Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TÍTULO DE LA TESIS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ADRICA MERINO SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ

2022

1.Datos del alumno	
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Sánchez
Nombre (s)	Adrica
Teléfono	XX XX XX XX XX
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	41607030-7
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre (s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dra.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
4. Datos del sinodal 2	
Grado	M. en C.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Mat.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Lic. en Ciencias de la Computación
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
7.Datos del trabajo escrito	
Título	Título
Número de páginas	XX p.
Año	2022

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis por haber hecho esta plantilla.

Contents

Chapter 1

Definiciones de Teoría de Gráficas

1.1 Definiciones básicas

El objeto a estudiar en el área de Teoría de Gráficas es, naturalmente, una gráfica. Una **gráfica** G es una pareja ordenada de conjuntos finitos $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es no vacío y $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$. Los elementos de $V(G)$ son llamados **vértices** y los elementos de $E(G)$ son **aristas**. Para una arista e y vértices u, v de G, decimos que e es **incidente** en u y en v si $e = \{u, v\}$. A su vez, los vértices u y v son **extremos** de la arista e. De igual manera, podemos decir que u y v son **vértices adyacentes** o **vecinos** y lo denotamos $u \sim v$. Por otro lado, decimos que son **aristas adyacentes** cuando dos aristas comparten un extremo.

Al conjunto de vecinos de un vértice v se le llama **vecindad**, y se denota $N_G(v)$, mientras que al número de aristas incidentes en v se le llama **grado** de v, $d(v)$. Un **vértice aislado**, es decir, un vértice que no tiene vecinos, tiene grado 0.

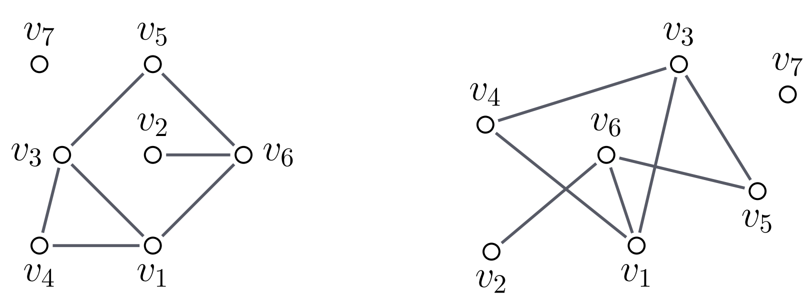


Figure 1.1: Diferentes diagramas de una gráfica G

Las gráficas pueden ser representadas por **diagramas** donde los vértices son círculos y las arista son líneas cuyos extremos son sus vértices incidentes. Cabe recalcar que una gráfica puede tener múltiples diagramas, como se muestra en la Figura 1.1. Es fácil observar que en ambos diagrámas de G los vértices tienen las mismas propiedades, por ejemplo que $N_G(v_3) = \{v_1, v_4, v_5\}$ o que el grado de v_2 es 1. Esto se debe a que la gráfica es un objeto matemático, independiente del diagrama.

Al momento de estudiar objetos matemáticos, siempre es importante analizar como se relacionan dichos objetos entre sí. Ya teniendo la noción de una gráfica, ahora nos enfocamos en cómo se ven las relaciones entre gráficas. Veamos que necesitarían dos gráficas para ser "iguales". Observamos que, de igual manera que una gráfica puede tener varios diagramas, a un diagrama se le pueden asociar distintas gráficas, renombrando vértices y aristas, para obtener distintos conjuntos de vértices y aristas. Un ejemplo de esto es la Figura 1.2. Al renombrar las aristas de la gráfica G, podemos dibujar a G como la gráfica H y viseversa, usando como guía los colores que se muestran en la figura. De manera intuitiva, las dos gráficas que comparten un mismo diagrama podríamos decir que son "iguales" hasta donde nos interesa, pues, al compartir un diagrama, comparten muchas propiedades como el número de vértices, las adyacencias o el grado de los vértices. Estas gáficas se dice que son isomorfas. Formalmente hablando, dos gráficas G y H son **isomorfas** si exite una biyección $\theta : V(G) \to V(H)$ tal que para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$, se cumple que $uv \in E(G)$ si y sólo si $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$. Es decir, la biyección θ preserva adyacencias y no adyacencias. Cuando G es ismorfa a H lo denotamos $G \cong H$ y la biyección entre las gráficas es llamada isomorfismo.

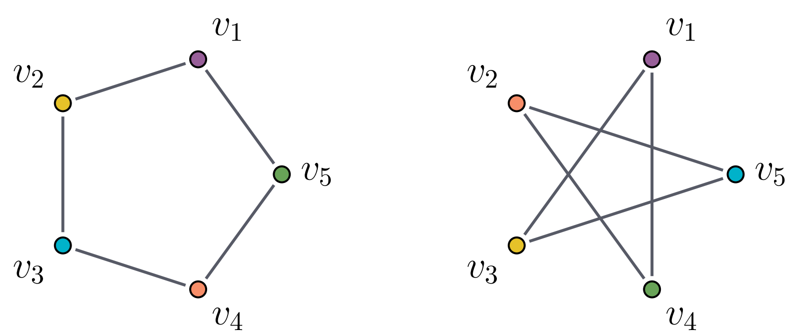


Figure 1.2: Dos gráficas isomorfas, G y H.

Al momento de ver las relaciones entre dos gráficas, también es importante analizar el caso en el que una gráfica este "contenida" en la otra. En el caso de conjuntos nos referiríamos a subconjunto y en el caso de gráficas nos vamos a referir a subgráficas. Sean G y H tales que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Entonces decimos que H es una **subgráfica** de G. Por otra parte, decimos que G es una **supergráfica** de H. Esta relación la denotamos con la misma notación que para subconjuntos, es decir $H \subseteq G$. Un concepto que se deriva de las subgráficas parte de fijarnos en la subgráfica que tiene la mayor cantidad de aristas posibles. Formalmente hablando, nos referimos a H, la subgráfica de G, cuyo conjunto de vértices es $S \subseteq V(G)$ y cuyo conjunto de aristas son aquellas aristas de G que tienen ambos extremos en S, es decir, $E(H) = \{uv \in E(G)\colon\ u, v \in S\}$. A esta subgráfica la llamamos la **subgráfica inducida** de G por S y la denotamos $G[S]$. Notemos que esta gráfica $G[S]$ es la subgráfica de G con conjunto de vértices S que más se parece a G. Otro ejemplo importante de subgráficas es la subgráfica inducida obtenida al quitarle uno o más vértices a una gráfica. En otras palabras, sea $S \subset V(G)$, nombramos $H \subseteq G$ a la gráfica con $V(H) = V(G) \setminus S$ y $E(H) = E(G) \setminus \{uv \in E(G)\colon\ u \in S \vee v \in S\}$. Tenemos que H es la subgáfica obtenida a partir de G al quitarle el conjunto S, esta subgráfica se denota $G - S$. Un caso a señalar es cuando S es un conjunto unitario, es decir, el caso en el que le quitamos un solo vértice v a G. En este caso escribiremos $G - v$ en vez de $G - \{v\}$. A continuación se muestra un ejemplo de subgráficas en la Figura 1.3, donde $\mathbf{H}$ es una subgráfica inducida con $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $\mathbf{H'}$ es una subgráfica con $V(H') = \{v_5, v_6, v_7\}$ y $E(H') = \{v_5v_6, v_6v_7\}$. Notamos que a $\mathbf{H'}$ le falta la arista $\mathbf{v_5v_7}$, resaltada en la figura, para ser una subgráfica inducida.

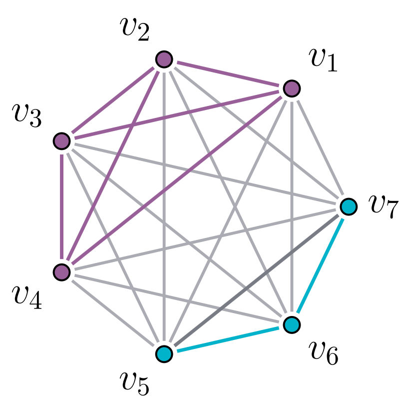


Figure 1.3: Una gráfica en la que se resalta una subgráfica inducida, $\mathbf{H}$, y una subgráfica, $\mathbf{H'}$.

1.2 Clanes y conjuntos independientes

Algo que es relevante a través de varios temas de la Teoría de Gráficas es encontrar conjuntos de vértices que sean adyacentes dos a dos o conjuntos de vértices que, al contrario, no tengan vecinos dentro del conjunto. Teniendo una gráfica G y un conjunto $S \subset V(G)$. Decimos que S es un **conjunto independiente** si cualesquiera dos vértices de S no son adyacentes. Esto quiere decir que todos los elementos de S tienen grado 0 en $G[S]$. La cardinalidad del conjunto independiente más grande de una gráfica se llama **número de independencia** y se denota α. Por otro lado, decimos que S es un **clan** si cualesquiera dos vértices en S son adyacentes. En este caso, el grado de todo vértice de S es $|S - 1|$ en $G[S]$. El **número de clan** es la cardinaliad del clan con mayor número de elementos de una gráfica, se denota ω. En la Figura 1.4 se muestra un ejemplo de un clan y un **conjunto independiente** de una gráfica. Es fácil observar que el **conjunto independiente** no es el conjunto independiente más grande que podemos obtener, pues podríamos agregar el vértice v_2 y seguiría siendo un conjunto independiente. De igual manera, podemos notar que existe un clan con cardinalidad mayor al clan mostrado. Este clan, llamémoslo K, está mostrado con el perímetro de los vértices de color **azul**. Es fácil ver que $|K| = \omega$.

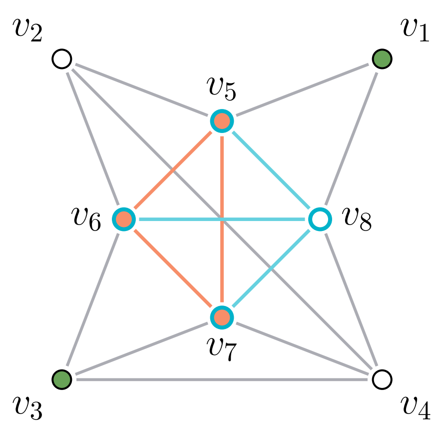


Figure 1.4: Una gráfica, resaltando dos clanes y un conjunto independiente.

1.3 Caminos y conexidad

En Teoría de Gráficas resulta interesante preguntarse si, en una gráfica, hay algún "vínculo" entre dos vértices. Si estos dos vértices son adyacentes, es claro que ese vínculo existe a través de la arista que comparten. Un uv-**camino** entre los vértices u y v de una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas de G de la siguiente forma, $W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k)$ con $v_i \in V(G)$ y $v_{j-1}v_j = e_j \in E(G)$, para $i \in \{0, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, k\}$. Este uv-camino es una forma de vincular el vértice u con el vértice v. En caso de que no sea necesario especificar de qué vértice a qué vértice va la suceción, nos referiremos simplemente a un **camino**. Al ser una sucesión, a un camino W se le puede asociar una longitud, que será el número de posiciones en la sucesión W que son ocupadas por aristas, se denota $\ell(W)$.

Al poderle asignar una longitud a un camino, es natural utilizarla para ver que tan "cercano" esta un vértice de otro. Pero, observamos que, un camino puede pasar múltiples veces por el mismo vértice o la misma arista. En otras palabras, el concepto de camino no ayuda mucho para encontrar que tan "cerca" esta un vértice de otro, puesto que puede existir otro camino que ocupe los mismos vértices y aristas multiples veces. Por lo tanto, introducimos el concepto de trayectoria. Una **trayectoria** es un camino que no repite vértices, más aún, una uv-**trayectoria** es una trayectoria que tiene vértice inicial u y vértice final v. En una uv-trayectoria, los vértices u y v son llamados **extremos** y el resto de los vértices de la trayectoria son llamados **vértices internos**. Notemos que, al no repetir vértices, este camino tampoco repite aristas, pues, si lo hiciera, necesitaría volver a pasar por al menos uno de los extremos de dicha arista. De lo anterior se sigue que todas las trayectorias que tengan los mismos vértices y aristas también tienen la misma longitud. Esto es un mejor acercamiento al concepto de "cercanía" entre vértices, pero se puede tener el caso que haya múltiples trayectorias de distintas longitudes entre dos vértices. Entonces, definimos la **distancia** entre dos vértices u y v de una gráfica, denotada $d(u, v)$, como la longitud de la uv-trayectoria más corta. Sea P una trayectoria en una gráfica, decimos que P no tiene **cuerdas** si la subgráfica inducida por $V(P)$ tiene grado máximo 2. Observamos que cualquier trayectoria de longitud mínima entre dos vértices no tiene cuerdas. Adicionalmente, podemos darle un "tamaño" a una gráfica G al definir su **diámetro** como $\max_{v \in G}\{\max_{u \in G}\{d(u, v)\}\}$.

La siguiente proposición nos muestra una relación entre caminos y trayectorias.

Proposición 1.3.1. *En una gráfica G con $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, todo uv-camino contiene una uv-trayectoria.*

Proof. Sea W un uv-camino en una gráfica G, con $u, v \in V(G)$. Demostraremos, por inducción sobre la longitud de W, que W contiene una uv-trayectoria. Primero, supongamos que $\ell(W) = 1$, esto quiere decir que W solo contiene una arista, por lo tanto W es una trayectoria. Ahora, supongamos que todo uv-camino con longitud menor a k contiene una uv-trayectoria. Tomamos W, tal que $\ell(W) = k$. Además, supongamos que W no es una trayectoria, pues en el caso contrario, W sería la trayectoria buscada. Tomamos $W = (w_0, e_1, w_1, e_2, \ldots, e_n, w_n)$, con $w_0 = u$, $w_n = v$, $e_i \in E(G)$ y $w_j \in V(G)$, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{0, \ldots, n\}$. Sea $m \in \{0, \ldots, n\}$ el índice del primer vértice de W que se repite y sea $l \in \{m+1, \ldots, n\}$ tal que $w_m = w_l$. Entonces, formamos el camino $W' = (w_0, e_1, w_1, \ldots w_m, e_{l+1}, w_{l+1} \ldots, e_n, w_n)$. Observamos que $\ell(W') < \ell(W)$, por lo que, por hipótesis de inducción, W' contiene una uv-trayectoria. Por lo tanto W también contiene una uv-trayectoria. ■

Por la Proposición 1.3.1, sabemos que, cada que hablemos de caminos, siempre hay una trayectoria contenida por lo que ahora nos enfocaremos en trayectorias. Como se mencionó anteriormente, entre dos vértices u y v pueden existir múltiples trayectorias. Decimos que X y Y son dos **uv-trayectorias internamente ajenas** si $V(X) \cap V(Y) = \{u, v\}$. Este concepto nos sevirá más adelante cuando hablemos de conexidad. Adicionalemtne, podemos ver que al recorrer una trayectoria de manera inversa obtenemos otra trayectoria. Formalmente hablando, teniendo una uv-trayectoria X, su **trayectoria inversa**, a la cuál denotamos X^{-1}, es una vu-trayectoria que tiene los mismos vértices y aristas que X.

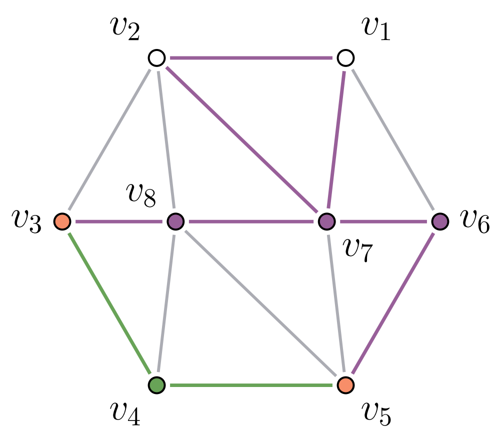


Figure 1.5: Una gráfica en la que se resaltan las **aristas** de un **v_3v_5**-camino con su **v_3v_5**-trayectoria contenida, resaltando sus **vértices**. También se resalta una **v_3v_5**-trayectoria sin cuerdas de color **verde**.

En la Figura 1.5 podemos ver un ejemplo de 1.3.1 donde se resaltan las **aristas** de un v_3v_5-camino y donde, para mostrar la trayectoria contenida, se resaltan los **vértices** de una v_3v_5-trayectoria. Adicionalmente, en la misma figura se observan dos **v_3v_5**-trayectorias internamente ajenas. Ambas están representadas con sus vértices internos coloreados del mismo color, una de **morado** y la otra de **verde**. Notamos que la **trayectoria morada** tiene cuerdas, entre ellas la arista v_8v_5. Por otro lado, la **trayectoria verde** no tiene cuerdas y es la trayectoria más corta entre v_3 y v_5, por lo que la distancia entre v_3 y v_5 es 2.

Cuando los extremos de un camino son iguales, se llama **camino cerrado**. Al igual que en el caso de las trayectorias, vale la pena resaltar el caso en el que un camino cerrado no repite vértices (salvo los extremos). Un **ciclo** es un camino cerrado de longitud al menos 3 que, además, no repite vértices, salvo los extremos. Muchas véces nos interesa saber si una gráfica contiene o no contiene ciclos. Una gráfica sin ciclos es llamada **acíclica**.

Hasta ahora nos hemos enfocado en los "vínculos" entre dos vértices de una gráfica. Sin embargo, es importante mencionar que no siempre existe manera de "vincular" dos vértices, como se puede ver la Figura 1.1, donde no existen trayectorias que conecten a v_7 con algún otro vértice. Definimos una gráfica G como **conexa** si, para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$, existe una uv-trayectoria. Si una gráfica no cumple esta propiedad, decimos que es **inconexa**. Observamos que toda gráfica, incluso las gráficas inconexas, contienen "partes" que sí son conexas, por lo que en todo caso, al estudiar la conexidad de las gráficas, nos podemos enfocar en dichas partes. En una gráfica G, las subgráficas máximas con la propiedad de ser conexas son llamadas **componentes conexas**. Notamos que si una gráfica es conexa, contiene sólo una componente conexa, ella misma.

Algo que también puede ser de interés en este tema es, que tan difícil es "desvincular" dos vértices. Una manera de verlo es cuestionarse si existe algún vértice o conjunto de vértices que, al quitarlo, "desvincule" a los vértices. A este conjunto lo llamamos corte por vértices. Formalmente, un **corte por vértices** S de una gráfica G es un subconjunto de $V(G)$ tal que $G[V(G) - S]$ es inconexa. Cabe notar que no todas las gráficas tienen corte por vértices, a saber, las gráficas completas (introducidas en la siguiente sección) no tienen corte por vértices y son las únicas con esta propiedad. La **conexidad local** entre dos vértices distintos u y v se define como el máximo número de uv-trayectorias internamente ajenas. Este número se denota por $p(u, v)$. Decimos que una gráfica no trivial es t-**conexa** si, para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$, se tiene que $p(u, v) \geq t$. Por convención, decimos que la gráfica trivial es 0-conexa y no es k-conexa para ningún $k > 0$. Adicionalmente, definimos la **conexidad** de una gráfica como el máximo número t para el cuál la gráfica es t-conexa. Un ejemplo de conexidad es considerar las gráficas en la Figura 1.2 y la Figura 1.3. Notamos que ambas son conexas, sin embargo, necesitaríamos "borrar" más aristas para "desvincular" vértices en la gráfica de la Figura 1.3 que en las gráficas de la Figura 1.2, a saber, las gráficas de la Figura 1.2 son 2-conexas y la gráfica de la Figura 1.3 es 6-conexa.

Otra forma de determinar como "desvincular" dos vértices es preguntarse cuantas aristas se necesitarían "borrar" para que no hubiera trayectorias entre dichos vértices. Es fácil observar que esto está relacionado con la cantidad de trayectorias ajenas por aristas que existan entre dichos vértices.

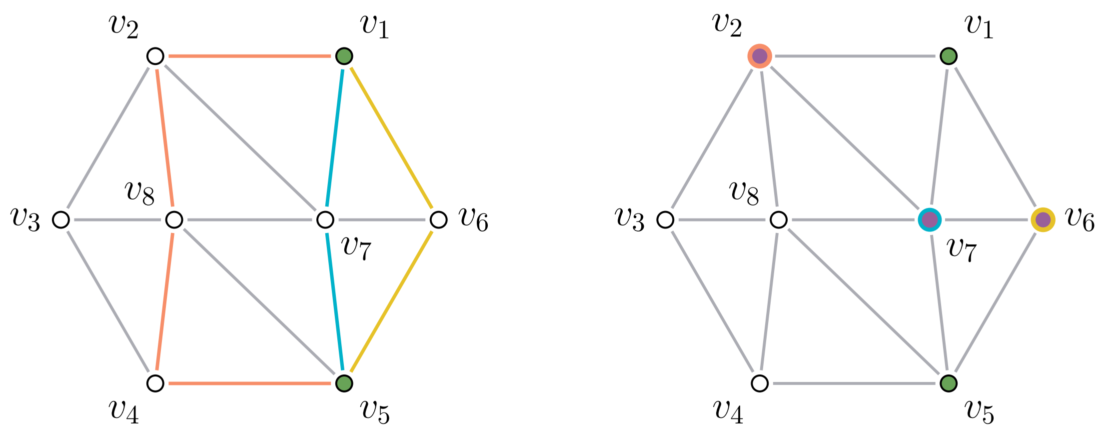


Figure 1.6: Tres trayectorias internamente ajenas entre v_1 y v_5 (izquierda), y un conjunto de tres vértices que separa a v_1 de v_5 (derecha).

Teorema 1.3.2.

1.4 Operaciones

Al igual que en muchas áreas de las matemáticas, al buscar maneras de generar nuevas gráficas, nos encontramos con las operaciones de gráficas. A continuación hablaremos de las operaciones de gráficas que son pertinentes para este trabajo. El primer grupo operaciones que se va a definir se basa en el concepto de unión de conjuntos. La **unión** de dos gráficas G y H la definimos como la gráfica cuyo conjunto de vértices y de aristas son la unión de los conjuntos de vértices y de aristasde ambas gráficas, respectivamente. Se utiliza la misma notación que para la unión conjuntos, es decir $G \cup H$. El siguiente concepto es el de la unión ajena de dos gráficas. La **unión ajena** de las gráficas G y H es la unión de G y H, donde $V(G) \cap V(H) = \varnothing$. La unión ajena se denota $G + H$. Por último, otra operación que surge del concepto de unión de conjuntos y que va a ser de utilidad en este trabajo es la unión completa. La **unión completa** de dos gráficas G y H es la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G) \cup E(H) \cup \{uv \colon u \in V(G), v \in V(H)\}$. La unión completa la denotamos $G \oplus H$. En la Figura 1.7 se muestra, del lado izquierdo, un ejemplo de dos gráficas, la primera con vértices v_i y la segunda con vértices w_i, ambas con $i \in \{1, 2, 3\}$. Del lado izquierdo de la figura se muestra la unión completa de dichas gráficas.

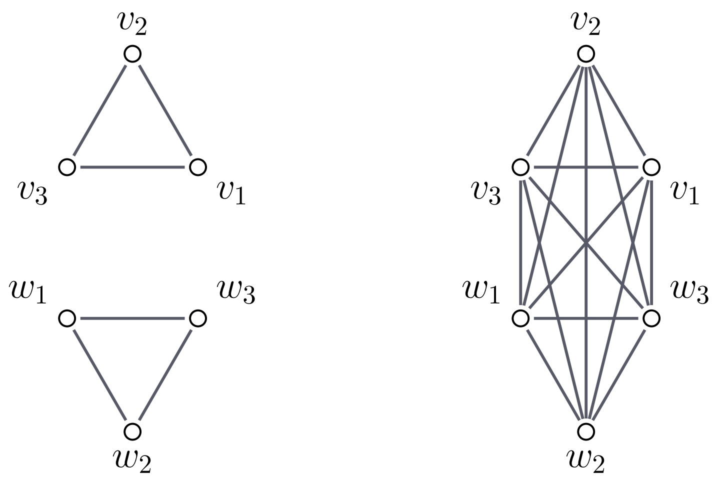


Figure 1.7: Dos gráficas (izquierda) y su unión completa (derecha).

Otra operación que se utilizará en este trabajo es el producto cartesiano de gráficas. Dadas dos gráficas G y H, el **producto cartesiano** de G y H, denotado $G \square H$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el producto cartesiano de $V(G)$ y $V(H)$, es decir $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$. Además, $(g_1, g_2)(h_1, h_2)$ es arista de $G \square H$ si y sólo si $g_1 = g_2$ y $h_1 h_2 \in E(H)$, o $h_1 = h_2$ y $g_1 g_2 \in E(G)$. A continuación, en la Figura 1.8, se muestran dos gráficas, la primera del lado izquierdo y con conjunto de vértices $\{v_1, v_2\}$ y la segunda en la parte inferior y con conjunto de vértices $\{w_1, w_2\}$. En medio de estas gráficas se muestra el producto cartesiano de ambas, resaltando de donde vienen los vértices de esta última gráfica.

Por último, definimos el **complemento** de una gráfica G como la gráfica que tiene el mismo conjunto de vértices que G y cuyo conjunto de aristas es $\binom{V(G)}{2} - E(G)$, a esta gráfica la denotamos $\overline{G}$.

1.5 Algunas familias relevantes

Muchas veces, en Teoría de Gráficas, al momento de abordrar varios problemas, es de utilidad separar las gráficas en familias donde se compartan caracteristcas. Hay

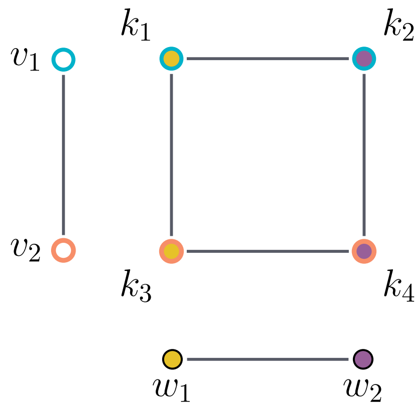


Figure 1.8: A

varias familias relevantes en la Teoría de Gráficas, en esta sección hablaremos de las familias que son relevantes para este trabajo y sus propiedades.

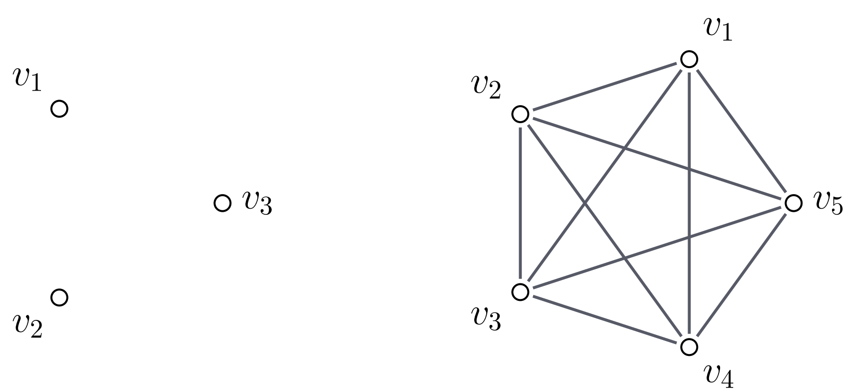


Figure 1.9: La gráfica vacía de 3 vértices (izquierda) y la gráfica completa de 5 vértices (derecha).

Decimos que una gráfica G es **completa** si su conjunto de aristas es igual a $\binom{V(G)}{2}$. A la gráfica completa de orden n se le denota K_n. Cuando una gráfica está conformada únicamente por vértices aislados decimos que es una gráfica **vacía** y la denotamos $\overline{K_n}$, donde n es el número de vértices de la gráfica. A K_1 también se le conoce como la gráfica **trivial**.

Una familia de gráficas que es muy estudiada en Teoría de Gráficas es la familia de las **gráficas k-partitas**. Una gráfica es *k-partita* si su conjunto de vértices admite una partición en a lo más k conjuntos independientes. Un caso muy relevante, y que nos será particularmente útil en este trabajo, es el caso en el que $k = 2$. En este caso se dice que es una **gráfica bipartita**. Una gráfica bipartita G con partición (X, Y) se denota $G[X, Y]$, y (X, Y) es llamada **bipartición**. Un caso especial de las gráficas k-partitas, es cuando todas las aristas posibles están presentes, por cuestion de utilidad para el trabajo, definiremos formalmente este comportamiento únicamente para las gráficas bipartitas. Una gráfica es **bipartita completa** si es bipartita y dada la partición X y Y de sus vértices, cada vértice de X es adyacente a cada vértice de Y.

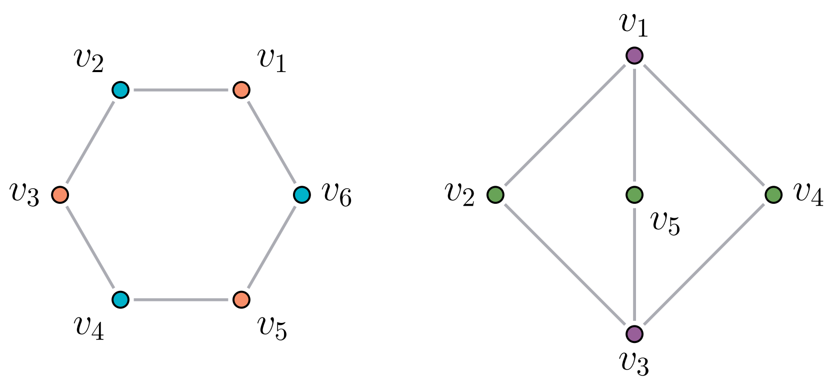


Figure 1.10: El 6-ciclo como ejemplo de una gráfica bipartita (izquierda), y una gráfica bipartita completa (derecha).

Otra familia de gráficas que se estudiará este trabajo son los abanicos.Un **abanico** $\mathcal{F}_n$ es la gráfica obtenida de la unión de K_1 y P_{n-1}, donde los primeros $n-1$ vértices de $\mathcal{F}_n$ son los vértices pertenecientes a P_{n-1} y el n-ésimo vértice de la gráfica es el que le corresponde a K_1. Al igual que en varios casos, existe una generalización de esta estructura de gráfica al sustituir K_1 por $\overline{K_n}$. Un **abanico generalizado**, denotiado $\mathcal{F}_{m.n}$, se define como $\mathcal{F}_{m,n} = \overline{K_m} \oplus P_n$. En la Figura 1.11 se puede ver un ejemplo de un abanico del lado izquierdo y un abanico generalizado del lado derecho.

La última familia de gráficas que veremos en esta sección es la familia de gráficas hamiltonianas. Para definir esta familia, es preciso definir algunos conceptos necesarios. El primer concepto es el de trayectoria hamiltoniana. Una **trayectoria hamiltoniana** es una trayectoria generadora, es decir, una trayectoria cuyo conjunto de vértices es el conjunto de vértices de la gráfica. Asimismo, un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo generador. Ahora, pasamos a definir una **gráfica hamiltoniana**, que es una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano. En la Figura 1.12 se muestra un ejemplo de una gráfica que contiene una trayectoria hamiltoniana del lado izquierdo y de una gráfica hamiltoniana del lado izquierdo, resaltando con colores la trayectoria y el ciclo hamiltoniano respectivamente. Una definición que nos será de utilidad a lo largo de

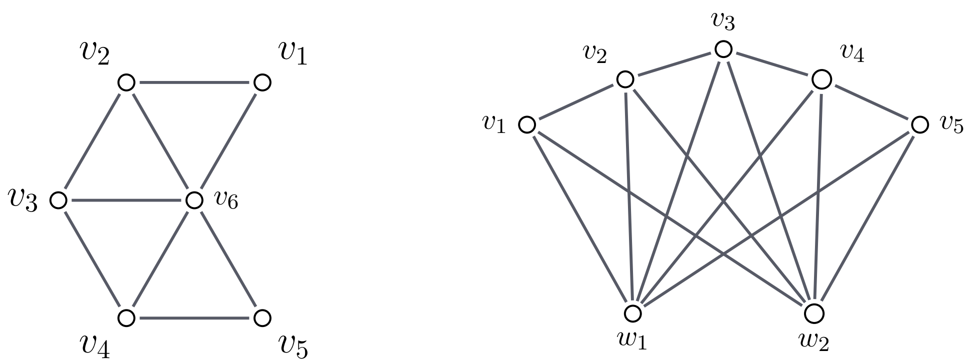


Figure 1.11: A

este trabajo es la de subtrayectoria hamiltoniana. Definimos una **subtrayectoria hamiltoniana** como la trayectoria hamiltoniana resultante de quitarle una arista a un ciclo hamiltoniano.

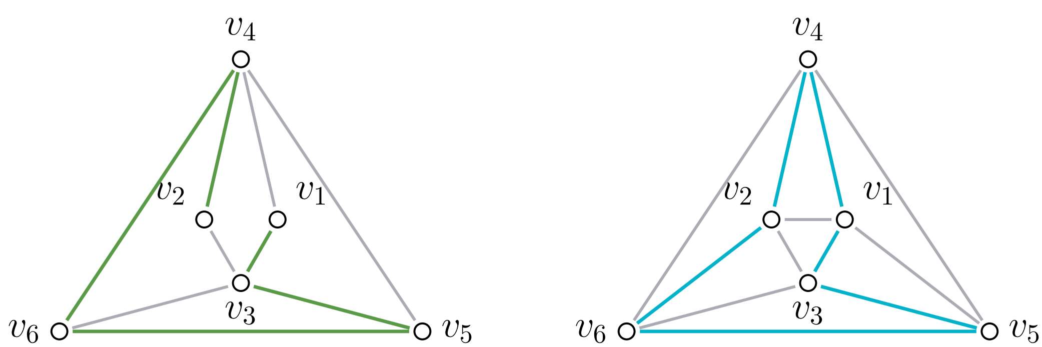
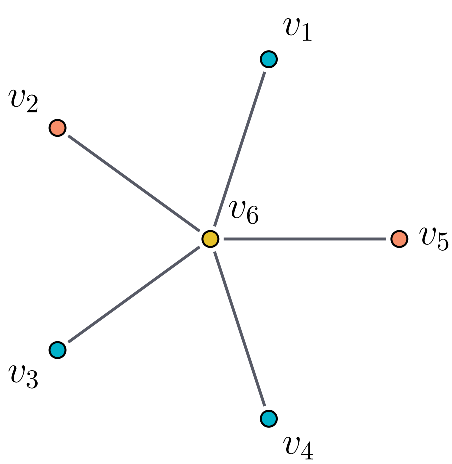


Figure 1.12: Una trayectoria hamiltoniana (izquierda) y un ciclo hamiltoniano (derecha).

1.6 Coloración

En Teoría de Gráficas, hablamos de colorear una gráfica como manera de etiquetar a los elementos de una gráfica, ya sean a los vértices o a las aristas. Primero nos enfocaremos en la coloración por aristas. Formalmente, una k-**coloración por aristas** de una gráfica G, para un entero k, es una función $c'\colon E(G) \to S$, con S un conjunto de cardinalidad k. La **clase cromática** de un color i en una coloración por aristas c' es el conjunto de todas las aristas de la gráfica que estan coloreadas del color i, es decir $c'^{-1}[i]$. Notemos que las clases cromáticas pueden ser vacías. Una **coloración propia por aristas** es una coloración por aristas donde se le asignan colores diferentes a todas las aristas adyacentes.

Por otro lado, una una k**-coloración por vértices** de una gráfica G, para un entero k, es una función $c\colon V(G) \to T$, donde T es un conjunto de cardinalidad k. En ambos casos, ya sea coloración por vértices o por aristas, a los elementos del codominio de la función se les llama **colores**. Una **coloración propia por vértices** es una coloración por vértices donde se le asignan colores diferentes a todas las vértices adyacentes. Decimos que una gráfica G es k**-coloreable**, con $k \in \mathbb{Z}$, si G admite una k-coloración propia por vértices. A continuación, en la Figura 1.13, se muestra una gráfica G donde se resalta una coloración propia por vértices, del lado izquierdo, y una coloración propia por aristas, del lado derecho.



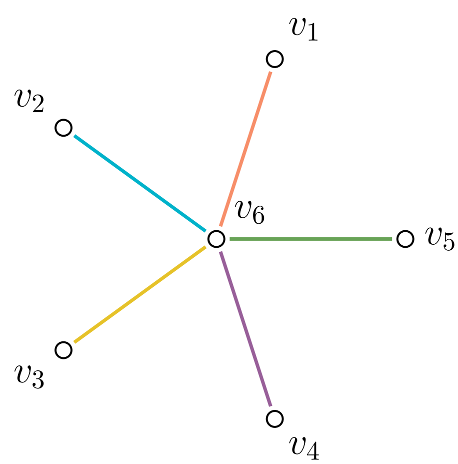


Figure 1.13: uns 3-coloración propia por vértices (izquierda) y una 5-coloración propia por aristas (derecha).

La **clase cromática** de un color i en una coloración por vértices c es el conjunto de todas las vértices de la gráfica que estan coloreadas del color i, es decir $c^{-1}[i]$. Notemos que las clases cromáticas pueden ser vacías, además, en una coloración propia, cada clase cromática es un conjunto independiente. El mínimo entero k para el cuál una gráfica G es k-coloreable es el **número cromático** de G, denotado por $\chi(G)$. En este caso decimos que G es k**-cromática**. Observamos que si H es una subgráfica de G, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$, más aún, si si H es una gráfica completa de n vértices, entonces $n \leq \chi(G)$. Observemos que, en la Figura 1.13, se muestra una 3-coloración propia por vértices, sin embargo el número cromático de la gráfica es 2.

Index

Bibliography

[1] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, **Graph Theory**, Springer, 2008.

[2] D. Corneil, H. Lerchs y L. Stewart Burlingham, *Complement reducible graphs*, Discrete Applied Mathematics 3 (1981) 163–174.

[3] R. Diestel, **Graph Theory, Fifth Edition**, Springer, 2017.

[4] A. Jones, F. Protti y R. R. Del-Vecchio, *Cograph generation with linear delay*, Theoretical Computer Science 713 (2018) 1–10.

[5] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, and E. Schlegl, The Not So Short Introduction to LaTeX Version 6.4 (2021), https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf.