UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TÍTULO DE LA TESIS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ADRICA MERINO SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ

2022

1.Datos del alumno	
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Sánchez
Nombre (s)	Adrica
Teléfono	XX XX XX XX XX
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	41607030-7
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre (s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dra.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
4. Datos del sinodal 2	
Grado	M. en C.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Mat.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Lic. en Ciencias de la Computación
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
7.Datos del trabajo escrito	
Título	Título
Número de páginas	XX p.
Año	2022

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis por haber hecho esta plantilla.

Contents

Chapter 1

Algunos Teoremas

1.1 Teoremas y demostraciones

Todos los ambientes que se desee referir por número más adelante deben de tener una etiqueta. Consideremos por ejemplo el siguiente lema.

Teorema 1.1.1. *Sea G una gráfica conexa con diámetro δ. Entonces, $F_k(G)$ es conexa con diámetro al menos $k(\delta - k + 1)$ y a lo más δk.*

Proof. Sean A y B vértices de $F_k(G)$. Primero nos enfocamos en la cota superior.

Por definición tenemos que $|A \triangle B| \leq |A \cup B|$, con igualdad cuando $A \cap B = \varnothing$. Observamos que, al ser A y B vértices de $F_k(G)$, tenemos que $|A| = k$ y $|B| = k$ por lo que $|A \cup B| \leq 2k$. Entonces, tenemos que $|A \triangle B| \leq 2k$, por lo que $\frac{1}{2}|A \triangle B| \leq k$.

Buscamos demostrar que el diámetro de $F_k(G)$ es a lo más δk, por que basta demostrar por inducción que para cualesquiera dos A y B vértices de $F_k(G)$ hay una $AB - trayectoria$ de a lo más $\frac{\delta}{2}|A \triangle B|$. Observamos que esto también implica que $F_k(G)$ es conexa.

Si $A \triangle B = \varnothing$, entonces $A = B$ por lo que no hay nada que probar. Ahora consideramos A y B tales que $A \triangle B \neq \varnothing$. Tomamos como hipótesis que para cualesquiera dos vértices de $F_k(G)$, C y D, tales que $|C \triangle D| < |A \triangle B|$, existe una $CD - trayectoria$ con longitud a lo más $\frac{\delta}{2}|C \triangle D|$.

Al tomar $A \triangle B \neq \varnothing$ tenemos un vértice de G en $A \setminus B$ y un vértice en $B \setminus A$, que denotamos a y b respectivamente. Dado que el diámetro de G ed δ, entonces hay una $ab - trayectoria$ de a lo más δ. Nombramos P a esta $ab - trayectoria$.

Definimos $A' := (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ y la trayectoria $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ en $F_k(G)$. Observamos que, por un lado tenemos que $b \in B \cap A'$ y $b \notin B \cap A$ pero $b \in A \cup B$. Por otro lado tenemos que $a \notin A'$ por lo que $a \notin A' \cup B$ y $a \notin A \cap B$, pero $a \in A \cup B$. Entonces, tenemos que $a, b \in A \triangle B$ y $a, b \notin A' \triangle B$. Ahora Tomamos $v \in A$ tal que $v \neq a$. Entonces, tenemos que $v \in A \triangle B$ si y sólo si $v \in A' \triangle B$. Por lo tanto tenemos que $|A' \triangle B| = |A \triangle B| - 2$.

Por la observación anterior sabemos que hay una $A'B - trayectoria$ en $F_k(G)$ de longitud a lo más $\frac{\delta}{2}|A' \triangle B| = \frac{\delta}{2}|A \triangle B| - \delta$.

Sabemos que $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ tiene la misma longitud que P, que es a lo más δ. Entonces, tenemos una $AB - trayectoria$ de la forma $A \rightarrow A' \rightarrow B$ que tiene longitud a lo más $\frac{\delta}{2}|A \triangle B| - \delta + \delta = \frac{\delta}{2}|A \triangle B|$.

Por lo tanto tenemos que $F_k(G)$ es conexa y tiene diámetro a lo más δk.

Ahora demostraremos la cota inferior. Sabemos que G es una gráfica conexa con diámetro δ, por lo que existen vertices que están a distancia δ, los nombramos x y y. Ahora construimos conjunto de vértices de G de acuerdo a la distancia que tienen esos vértices de x. Es decir, para cada $i \in [0, \delta]$, sea V_i el conjunto de vértices de G a distancia i de x. Entonces, tenemos que $V_0 = \{x\}$ y $y \in V_\delta$. Denotamos $d(v)$ a la distancia entre x y el vértice v.

Sea a el mínimo índice par el cúal se tiene $k \leq |V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_a|$ y sea b el máximo índice para el cuál se tiene $k \leq |V_b \cup V_{b+1} \cup \cdots \cup V_\delta|$. Tomamos A un $k - subconjunto$ de $V_0 \cup \cdots \cup V_a$ tal que $A \subseteq V_0$ o $V_0 \cup \ldots V_{a-1} \subseteq A$. Tomamos B un *k-subconjunto* de $V_b \cup \cdots \cup V_\delta$ tale que $B \subseteq V_\delta$ o $V_{b+1} \cup \cdots \cup V_\delta$.

Consideramos cualquier trayectoria entre A y B en $F_k(G)$. Cualquier ficha inicialmente en A, digamos en el vértice v de G, se mueve a algún vértice en B, digamos el vértice v' de G. Observamos que odas las aristas de G están dentro de algún V_i o a lo más entre algún V_i y V_{i+1}, con $i \in [0, \delta]$. Entonces, para la ficha en v se necesitan al menos $d(v') - d(v)$ movimientos para llegar a v', ocupando sólo las aristas entre V_i y V_{i+1}, $i \in [0, \delta]$. Por lo tanto, el diámetro de $F_k(G)$ es al menos $\sum_{v \in A}(d(v') - d(v)) = \sum_{w \in B} d(w) - \sum_{v \in A} d(v)$ Observamos que al ser G conexa toda V_i tiene al menos un elemento y por construcción $V_i \cap V_{i+1} = \varnothing$, para toda $i \in [0, \delta]$. Tomamos el caso en el que $V_i = 1$ para toda $i \in [0, \delta]$. Entonces, tenemos que $k \leq |V_b \cup \cdots \cup V_\delta| = |V_b| + |V_{b+1}| + \cdots + |V_\delta| = \sum_b^\delta 1 = \delta - b + 1$ Análogamente tenemos que $k \leq |V_0 \cup V_1 \cup \ldots V_a| = |V_0| + |V_1| + \cdots + |V_a| = \sum_0^a 1 = a + 1$ En ambos casos la cota mínima se alcanza en la igualdad, por lo que tomamos $a = k - 1$ y $b = \delta - k + 1$. Por lo tanto tenemos que el diámetro de $F_k(G)$ es al menos $\sum_{j=\delta-k+1}^{\delta} j - \sum_{i=0}^{k-1} i = k(\delta - k + 1)$ ■

Y finalmente obtener el siguiente corolario.

Corolario 1.1.2. *Corolario de ejemplo.*

Bibliography

[1] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, **Graph Theory**, Springer, 2008.

[2] D. Corneil, H. Lerchs y L. Stewart Burlingham, *Complement reducible graphs*, Discrete Applied Mathematics 3 (1981) 163–174.

[3] R. Diestel, **Graph Theory, Fifth Edition**, Springer, 2017.

[4] A. Jones, F. Protti y R. R. Del-Vecchio, *Cograph generation with linear delay*, Theoretical Computer Science 713 (2018) 1–10.

[5] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, and E. Schlegl, The Not So Short Introduction to LaTeX Version 6.4 (2021), https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf.