Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TÍTULO DE LA TESIS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

ADRICA MERINO SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ

2022

1.Datos del alumno	
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Sánchez
Nombre (s)	Adrica
Teléfono	XX XX XX XX XX
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	41607030-7
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre (s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dra.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
4. Datos del sinodal 2	
Grado	M. en C.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Mat.
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Lic. en Ciencias de la Computación
Nombre (s)	Nombres
Apellido paterno	Paterno
Apellido materno	Materno
7.Datos del trabajo escrito	
Título	Título
Número de páginas	XX p.
Año	2022

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis por haber hecho esta plantilla.

Contents

Chapter 1

Algunos Teoremas

1.1 Teoremas y demostraciones

Todos los ambientes que se desee referir por número más adelante deben de tener una etiqueta. Consideremos por ejemplo el siguiente lema.

Teorema 1.1.1. *Sea G una gráfica conexa con diámetro δ. Entonces, $F_k(G)$ es conexa con diámetro al menos $k(\delta - k + 1)$ y a lo más δk.*

Proof. Sean A y B vértices de $F_k(G)$. Primero nos enfocamos en la cota superior.

Por definición tenemos que $|A \triangle B| \leq |A \cup B|$, con igualdad cuando $A \cap B = \varnothing$. Observamos que, al ser A y B vértices de $F_k(G)$, tenemos que $|A| = k$ y $|B| = k$ por lo que $|A \cup B| \leq 2k$. Entonces, tenemos que $|A \triangle B| \leq 2k$, por lo que $\frac{1}{2}|A \triangle B| \leq k$.

Buscamos demostrar que el diámetro de $F_k(G)$ es a lo más δk, por que basta demostrar por inducción que para cualesquiera dos A y B vértices de $F_k(G)$ hay una $AB - trayectoria$ de a lo más $\frac{\delta}{2}|A \triangle B|$. Observamos que esto también implica que $F_k(G)$ es conexa.

Si $A \triangle B = \varnothing$, entonces $A = B$ por lo que no hay nada que probar. Ahora consideramos A y B tales que $A \triangle B \neq \varnothing$. Tomamos como hipótesis que para cualesquiera dos vértices de $F_k(G)$, C y D, tales que $|C \triangle D| < |A \triangle B|$, existe una $CD - trayectoria$ con longitud a lo más $\frac{\delta}{2}|C \triangle D|$.

Al tomar $A \triangle B \neq \varnothing$ tenemos un vértice de G en $A \setminus B$ y un vértice en $B \setminus A$, que denotamos a y b respectivamente. Dado que el diámetro de G ed δ, entonces hay una $ab - trayectoria$ de a lo más δ. Nombramos P a esta $ab - trayectoria$.

Definimos $A' := (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ y la trayectoria $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ en $F_k(G)$. Observamos que, por un lado tenemos que $b \in B \cap A'$ y $b \notin B \cap A$ pero $b \in A \cup B$. Por otro lado tenemos que $a \notin A'$ por lo que $a \notin A' \cup B$ y $a \notin A \cap B$, pero $a \in A \cup B$. Entonces, tenemos que $a, b \in A \triangle B$ y $a, b \notin A' \triangle B$. Ahora Tomamos $v \in A$ tal que $v \neq a$. Entonces, tenemos que $v \in A \triangle B$ si y sólo si $v \in A' \triangle B$. Por lo tanto tenemos que $|A' \triangle B| = |A \triangle B| - 2$.

Por la observación anterior sabemos que hay una $A'B-$*trayectoria* en $F_k(G)$ de longitud a lo más $\frac{\delta}{2}|A' \triangle B| = \frac{\delta}{2}|A \triangle B| - \delta$.

Sabemos que $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ tiene la misma longitud que P, que es a lo más δ. Entonces, tenemos una $AB-$*trayectoria* de la forma $A \rightarrow A' \rightarrow B$ que tiene longitud a lo más $\frac{\delta}{2}|A \triangle B| - \delta + \delta = \frac{\delta}{2}|A \triangle B|$.

Por lo tanto tenemos que $F_k(G)$ es conexa y tiene diámetro a lo más δk.

Ahora demostraremos la cota inferior. Sabemos que G es una gráfica conexa con diámetro δ, por lo que existen vertices que están a distancia δ, los nombramos x y y. Ahora construimos conjunto de vértices de G de acuerdo a la distancia que tienen esos vértices de x. Es decir, para cada $i \in [0, \delta]$, sea V_i el conjunto de vértices de G a distancia i de x. Entonces, tenemos que $V_0 = \{x\}$ y $y \in V_\delta$. Denotamos $d(v)$ a la distancia entre x y el vértice v.

Sea a el mínimo índice par el cúal se tiene $k \leq |V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_a|$ y sea b el máximo índice para el cuál se tiene $k \leq |V_b \cup V_{b+1} \cup \cdots \cup V_\delta|$. Tomamos A un k-*subconjunto* de $V_0 \cup \cdots \cup V_a$ tal que $A \subseteq V_0$ o $V_0 \cup \ldots V_{a-1} \subseteq A$. Tomamos B un k-*subconjunto* de $V_b \cup \cdots \cup V_\delta$ tale que $B \subseteq V_\delta$ o $V_{b+1} \cup \cdots \cup V_\delta$.

Consideramos cualquier trayectoria entre A y B en $F_k(G)$. Cualquier ficha inicialmente en A, digamos en el vértice v de G, se mueve a algún vértice en B, digamos el vértice v' de G. Observamos que odas las aristas de G están dentro de algún V_i o a lo más entre algún V_i y V_{i+1}, con $i \in [0, \delta]$. Entonces, para la ficha en v se necesitan al menos $d(v') - d(v)$ movimientos para llegar a v', ocupando sólo las aristas entre V_i y V_{i+1}, $i \in [0, \delta]$. Por lo tanto, el diámetro de $F_k(G)$ es al menos $\sum_{v \in A}(d(v') - d(v)) = \sum_{w \in B} d(w) - \sum_{v \in A} d(v)$ Observamos que al ser G conexa toda V_i tiene al menos un elemento y por construcción $V_i \cap V_{i+1} = \varnothing$, para toda $i \in [0, \delta]$. Tomamos el caso en el que $V_i = 1$ para toda $i \in [0, \delta]$. Entonces, tenemos que $k \leq |V_b \cup \cdots \cup V_\delta| = |V_b| + |V_{b+1}| + \cdots + |V_\delta| = \sum_b^\delta 1 = \delta - b + 1$ Análogamente tenemos que $k \leq |V_0 \cup V_1 \cup \ldots V_a| = |V_0| + |V_1| + \cdots + |V_a| = \sum_0^a 1 = a + 1$ En ambos casos la cota mínima se alcanza en la igualdad, por lo que tomamos $a = k - 1$ y $b = \delta - k + 1$. Por lo tanto tenemos que el diámetro de $F_k(G)$ es al menos $\sum_{j=\delta-k+1}^{\delta} j - \sum_{i=0}^{k-1} i = k(\delta - k + 1)$ ■

Lema 1.1.2. *Sea A un k-conjunto en la gráfica G y $a, b \in V(G)$ tales que $a \in A$ y $b \notin B$. Sean P, Q ab-trayectorias internamente ajenas en G. Entonces $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ y $A \underset{Q}{\rightarrow} A'$ son trayectorias internamente ajenas en $F_k(G)$.*

Proof. Dado A un *k-conjunto* en la gráfica G y P y Q *ab-trayectoria* internamente ajenas en G tal que $a \in A$ y $b \notin A$, con $a, b \in V(G)$. Primero, supongamos que $|P \cap A| \geq 2$, con $P \cap A = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, con $v_1 = a$. Ahora consideremos R un vértice interno de $A \underset{P}{\rightarrow} A'$. Entonces tenemos que $|R \cap P| = p$, las fichas de A que se mueven por P conforme avanzamos en la trayectoria.

Observamos que si $k > p$, entonces $k - p$ fichas no están ein la intersección, es decir, no están sobre P por lo que están estáticas en todos los vértices de $A \underset{P}{\rightarrow} A'$.

Por construcción de $A \underset{P}{\rightarrow} A'$, R tiene una ficha en la subtrayectoria Entonces R no contiene al conjunto $\{v_2, \ldots, v_p\}$. Por otro lado, como $\{v_2, \ldots, v_p\}$ está en $A \cap P$ y Q y P son internamente ajenas, entonces $\{v_2, \ldots, v_p\}$ están estáticos en cada vértice de $A \underset{Q}{\rightarrow} A'$. Por lo tanto tenemos que $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ y $A \underset{Q}{\rightarrow} A'$ son trayectorias internamente ajenas.

Al suponer que $|A \cap Q| \geq 2$ tenemos el caso análogo al caso anterior.

Ahora suponemos que $|A \cap P| = 1$ y $|A \cap Q| = 1$, es decir $A \cap P = \{a\} = A \cap Q$. Sin pérdida de generalidad suponemos que P no es la arista ab. Entonces tenemos que $P \setminus \{a, b\} \neq \varnothing$. Entonces tenemos que todo vértice interno de $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ tiene algún vértice de $P \setminus \{a, b\}$. Por otro lado, ningún vértice interno de $A \underset{Q}{\rightarrow} A'$ tiene un vértice de $P \setminus \{a, b\}$ pues P y Q son internamente ajenos y sólo comparten el vértice a con A. Entonces, cada vértice interno de ambas trayectorias tiene intersección vacía con A. Por lo tanto tenemos que $A \underset{P}{\rightarrow} A'$ y $A \underset{Q}{\rightarrow} A'$ son internamente ajenos. ■

Lema 1.1.3. *Sea H una gráfica bipartita completa con clases de color Y y Z, donde $|Y| < |Z|$. Supongamos que las aristas de H están coloreadas de azul y rojo de manera que cada vértice de Y es incidente en a lo más una arista roja. Entonces H tiene un conjunto M de aristas azules tal que cada vértice en Y incide en exactamente una arista de M y la unión de aristas rojas y aristas de M es acíclica.*

Proof. Sea H una gráfica bipartita completa con clases de color Y y Z como se especificaron. Demostramos el Lema por inducción sobre $|Y|$.

Primero supongamos que $Y = \{y\}$. Por construcción, existe una arista $e \in M$ tal que y es incidente en e. Por otro lado, a lo más existe una arista roja incidente en y, la nombramos e'. Entonces $\{e, e'\}$ no es un ciclo.

Ahora supongamos que $|Y| > 1$. Como tenemos que $|Y| < |Z|$, entonces existe algún $x \in Z$ tal que no tiene aristas rojas incidentes. Sea $v \in Y$ y sea e la arista roja incidente en v, en caso de que exista. Tomamos $H' := (H - v) - x$ con R' el conjunto de aristas rojas de H'. Observamos que $Y' = Y - v$ y $Z' = Z - x$ son las clases de color que H'. Por inducción existe un conjunto M' de aristas azules incidentes en H' tal que cada vértice de Y'incide exactamente en una arista de M' y además $R' \cup M'$ es acíclico. Ahora nos fijamos en H. Definimo $M := M' \cup \{xv\}$. Al tomar x sin aristas rojas tenemos que M cumple tener una arista azul por vértice en Y. También definimos $R := R' \cup e$, si es que existe e. Dado que $M' \cup R'$ es acíclica y las aristas $\{vx\}$ y e, en caso de que exista, no están en $M' \cup R'$, tenemos que $M \cup R$ es acíclica. ■

Bibliography

[1] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, **Graph Theory**, Springer, 2008.

[2] D. Corneil, H. Lerchs y L. Stewart Burlingham, *Complement reducible graphs*, Discrete Applied Mathematics 3 (1981) 163–174.

[3] R. Diestel, **Graph Theory, Fifth Edition**, Springer, 2017.

[4] A. Jones, F. Protti y R. R. Del-Vecchio, *Cograph generation with linear delay*, Theoretical Computer Science 713 (2018) 1–10.

[5] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, and E. Schlegl, The Not So Short Introduction to LaTeX Version 6.4 (2021), https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf.