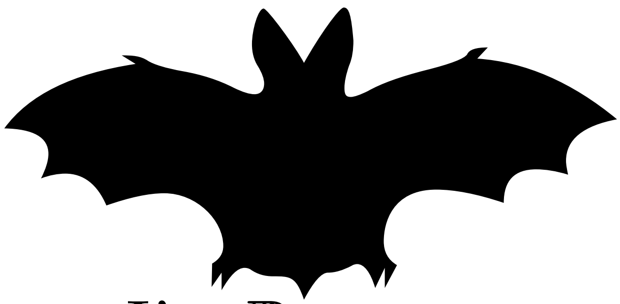
# Simulation du système solaire

Michel,Tanguy
tanguy.michel@tum.de



I'M BATMAN

6 novembre 2019

# 1 Physique

Soit $\vec{r}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$ le vecteur position de l'astre S et $\widehat{ST}$ le vecteur unitaire reliant les astres S et T. Le vecteur $\vec{F}_{ST}$ représente la force exercée par T sur S pointant de S vers T.

$$\vec{F}_{ST} = F_{ST} \cdot \widehat{ST} = -F_{ST} \cdot \widehat{TS} = -\vec{F}_{TS}$$

avec

$$\widehat{ST} = \frac{\vec{r}_T - \vec{r}_S}{|\vec{r}_T - \vec{r}_S|} = \frac{\vec{r}_T - \vec{r}_S}{\sqrt{(x_T - x_S)^2 - (y_T - y_S)^2}}$$

Troisième loi de Newton, la somme des forces qui s'appliquent sur un objet est proportionnelle à l'accélération de l'objet. Dans notre cas on a une force par astre moins 1, car un astre n'exerce pas de gravitation sur lui-même.

$$\sum_i \vec{F}_{iT} = m_T \vec{a}_T \Leftrightarrow \vec{a}_T = \sum_i \vec{a}_{i,T} = \sum_i \frac{\vec{F}_{iT}}{m_T}$$

Ici $a_{S,T}$ représente uniquement l'accélération induite par l'astre $i$ en T. Il faut faire la somme de l'accélération induite par chaque astre pour obtenir l'accélération globale de T.
On obtient pour la gravitation

$$\vec{F}_{ST} = \frac{GM_S m_T}{|\vec{r}_T - \vec{r}_S|^2} \cdot \widehat{ST}$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}_{S,T} = \frac{\vec{F}_{ST}}{m} = \frac{G \cdot M_S}{|\vec{r}_T - \vec{r}_S|^2} \cdot \frac{\vec{r}_T - \vec{r}_S}{|\vec{r}_T - \vec{r}_S|} = GM_S \frac{\vec{r}_T - \vec{r}_S}{|\vec{r}_T - \vec{r}_S|^3}$$

Il faut faire la somme de l'accélération induite par chaque astre pour obtenir l'accélération globale de T.
La vitesse est l'intégrale de l'accélération, la position en est la double intégrale. Chaque intégration apporte une constante qui est déterminée par les conditions initiales du système (vitesse et position). Normalement il faudrait résoudre l'équation différentielle

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \sum_i \frac{\vec{r}_i(t) - \vec{r}(t)}{|\vec{r}_i(t) - \vec{r}(t)|^3} GM_i$$

mais comme c'est un peu galère on fait une approximation en maintenant $\vec{a}(t)$ constant sur un intervalle de temps $\Delta t$. L'intégration se simplifie :

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \vec{a}(t)\ \mathrm{d}t' = \vec{a}(t)\Delta t + \vec{v}(t) = \vec{v}(t) + \sum_i \frac{\vec{r}_i(t) - \vec{r}(t)}{|\vec{r}_i(t) - \vec{r}(t)|^3} GM_i \cdot \Delta t$$
$$\vec{r}(t + \Delta t) = \iint_t^{t+\Delta t} \vec{a}(t)\ \mathrm{d}t'\mathrm{d}t' = \int_t^{t+\Delta t} \vec{a}(t)t' + \vec{v}(t)\ \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 + \vec{v}(t)\Delta t + \vec{r}(t)$$
$$= \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \cdot \Delta t + \sum_i \frac{\vec{r}_i(t) - \vec{r}(t)}{2|\vec{r}_i(t) - \vec{r}(t)|^3} GM_i \cdot \Delta t^2 \quad (1)$$

L'orbite des planètes, normalement circulaire/elliptique, est alors approchée par un polygone d'arête $|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|$. Plus $\Delta t$ est petit, plus le polygone ressemblera à une véritable orbite circulaire/elliptique.
Si $\Delta t$ n'est pas assez petit par rapport à $t_{max}$, alors la simulation partira en couille au bout d'un moment.
Ne pas oublier que le Soleil aussi bouge (légèrement).

## 2 Code

```
from math import sqrt as sqrt
import numpy as np
#Unités: mètres, secondes, et kilogrammes
#Attention ! Toutes les valeurs doivent être des floats
dT=3600 #Incrément du temps (1 heure). Plus petit => Simulation plus lente mais plus précise
Tmax=31557600 #Temps max (1 année). Plus grand => Plus d'imprécision vers la fin
G=6.6743e-11 #m^3/(kg*s^2)
v=np.array([[vx0(Soleil),vy0(Soleil)], [vx0(Mercure),vy0(Mercure)], ...]) #Vitesses ex: [[0.,0.], [0.,297
r=np.array([[x0(Soleil),y0(Soleil)], [x0(Mercure),y0(Mercure)], ...]) #Positions ex: [[0.,0.], [150e9.,0.
m=np.array([m(Soleil), m(Mecure), ...]) #Masses ex: [1.9885e30, 5.97237e24]
r2=r
v2=v
p=len(m)
F=np.array([[[0.,0.], [0.,0.], ...], ...]) #Initialisation de F (matrice de p*p*2)
for T in range(0,Tmax,dT)
    r2+=v*dT
    #Calculer les forces qui s'appliquent sur chaque astre.
    for i in range(p):
        for j in range(i+1,p):
            #2 variables temporaires pour éviter d'avoir à refaire ces calculs
            d=r[j]-r[i]
            A=G*dT/sqrt(d[0]**2+d[1]**2)**3
            F[i][j]=d*A
            r2[i]+=F[i][j]*m[j]*dT/2#G*M*dT^2/d^2
            r2[j]-=F[i][j]*m[i]*dT/2
            v2[i]+=F[i][j]*m[j]
            v2[j]-=F[i][j]*m[i]
    r=r2
    print(r) #Afficher les astres
```

`r2` représente $\vec{r}(t+\Delta t)$, `r` représente $\vec{r}(t)$, de même pour `v` et `v2`. Pour le calcul de $\vec{r}(t+\Delta t)$ selon l'équation 1, on procède d'abord en ajoutant le premier terme $\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}$ à la ligne `r2=r`. On rajoute ensuite le terme $\vec{v}(t)$ avec `r2+=v*dT`. On ajoute finalement le terme $\sum_i \frac{\vec{r}_i(t)-\vec{r}(t)}{2|\vec{r}_i(t)-\vec{r}(t)|^3} GM_i \cdot \Delta t^2$ avec la boucle `for j`. À la fin on remplace la valeur de $\vec{r}(t)$ par $\vec{r}(t+\Delta t)$ pour initialiser le prochain tour. On procède de même en parallèle pour la vitesse. Dans la boucle `for j` on profite d'avoir calculé $\vec{F}_{ij}$ pour ajouter en avance le terme accélération contenant $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ à l'autre planète. Le terme vitesse sera ajouté dans la boucle `for i`.

Voici le tableau montrant les valeurs prises par `F[i][j]`. `i` est le numéro de la ligne, `j` celui de la colonne. Premièrement, `j` commence à `i+1` car la diagonale est nulle (pas d'attraction gravitationnelle sur soi-même) et comme $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ il suffit de calculer la partie supérieure de la matrice pour obtenir `F[i][j]` pour `j` $\leq$ `i`.

| Force | Soleil | Mercure | Vénus | Terre | Mars | Jupiter | Saturne | Uranus | Neptune |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Soleil | 0 | `F[0][1]` | $\vec{F}_{SV}$ | $\vec{F}_{ST}$ | $\vec{F}_{SMa}$ | $\vec{F}_{SJ}$ | $\vec{F}_{SSa}$ | $\vec{F}_{SU}$ | `F[0][8]` |
| Mercure | $-$`F[0][1]` | 0 | $\vec{F}_{MeV}$ | $\vec{F}_{MeT}$ | $\vec{F}_{MeMa}$ | $\vec{F}_{MeJ}$ | $\vec{F}_{MeSa}$ | $\vec{F}_{MeU}$ | $\vec{F}_{MeN}$ |
| Vénus | $-\vec{F}_{SV}$ | $-\vec{F}_{MeV}$ | 0 | $\vec{F}_{VT}$ | $\vec{F}_{VMa}$ | $\vec{F}_{VJ}$ | $\vec{F}_{VSa}$ | $\vec{F}_{VU}$ | $\vec{F}_{VN}$ |
| Terre | $-\vec{F}_{ST}$ | $-\vec{F}_{MeT}$ | $-\vec{F}_{VT}$ | 0 | $\vec{F}_{TMa}$ | $\vec{F}_{TJ}$ | $\vec{F}_{TSa}$ | $\vec{F}_{TU}$ | $\vec{F}_{TN}$ |
| Mars | $-\vec{F}_{SMa}$ | $\vec{F}_{MeMa}$ | $-\vec{F}_{VMa}$ | $-\vec{F}_{TMa}$ | 0 | $\vec{F}_{MaJ}$ | $\vec{F}_{MaSa}$ | $\vec{F}_{MaU}$ | $\vec{F}_{MaN}$ |
| Jupiter | $-\vec{F}_{SJ}$ | $-\vec{F}_{MeJ}$ | $-\vec{F}_{VJ}$ | $-\vec{F}_{TJ}$ | $-\vec{F}_{MaJ}$ | 0 | $\vec{F}_{JSa}$ | $\vec{F}_{JU}$ | $\vec{F}_{JN}$ |
| Saturne | $-\vec{F}_{SSa}$ | $-\vec{F}_{MeSa}$ | $-\vec{F}_{VSa}$ | $-\vec{F}_{TSa}$ | $-\vec{F}_{MaSa}$ | $-\vec{F}_{JSa}$ | 0 | $\vec{F}_{SaU}$ | $\vec{F}_{SaN}$ |
| Uranus | $-\vec{F}_{SU}$ | $-\vec{F}_{MeU}$ | $-\vec{F}_{VU}$ | $-\vec{F}_{TU}$ | $-\vec{F}_{MaU}$ | $-\vec{F}_{JU}$ | $-\vec{F}_{SaU}$ | 0 | `F[7][8]` |
| Neptune | $-$`F[0][8]` | $-\vec{F}_{MeN}$ | $-\vec{F}_{VN}$ | $-\vec{F}_{TN}$ | $-\vec{F}_{MaN}$ | $-\vec{F}_{JN}$ | $-\vec{F}_{SaN}$ | $-$`F[7][8]` | 0 |