FAETERJ-Rio
Cálculo I
Professor DSc. Wagner Zanco

Solução dos Exercícios 1.13 – 1.17

1.13a) $f(x) = 2x^2 + x$ e $a = \frac{1}{4}$

Fórmula para o coeficiente angular da reta tangente em um ponto arbitrário do gráfico.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = 2x^2 + x$$

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 + x + h$$

$$= 2(x^2 + 2xh + h^2) + x + h$$

$$f(x+h) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h$$

$$f(x+h) - f(x) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - (2x^2 + x)$$

$$= 2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - 2x^2 - x$$

$$f(x+h) - f(x) = 4xh + 2h^2 + h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4xh + 2h^2 + h}{h}$$

$$= \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4x + 2h + 1$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} 4x + 2h + 1$$

$$m = \lim_{h \to 0} 4x + 2h + 1 = \lim_{h \to 0} 4x + \lim_{h \to 0} 2h + \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 4x + 0 + 1$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4x + 1$$

$$m = 4x + 1$$

Equação reduzida da reta tangente correspondente ao argumento $a = \frac{1}{4}$

$$m = 4\frac{1}{4} + 1 = 2$$

$$f(x) = 2x^2 + x$$

$$f(a) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$= 2\frac{1}{16} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(a) = \frac{3}{8}$$

$$y = mx + b$$

$$\frac{3}{8} = 2\frac{1}{4} + b$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2} + b$$

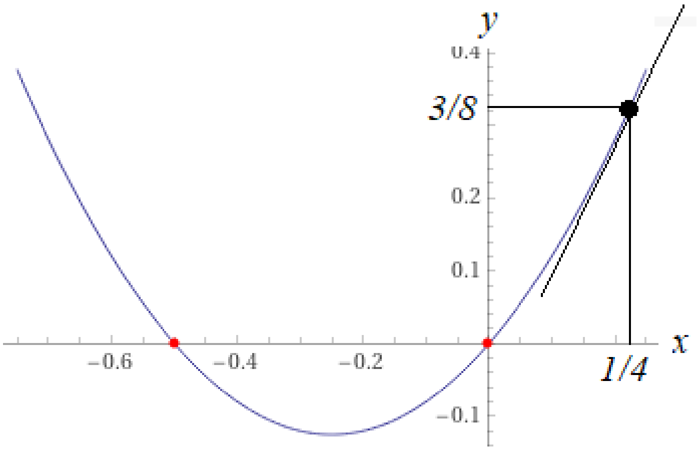
$$\frac{3}{8} - \frac{1}{2} = b$$

$$\frac{3-4}{8} = b$$

$$b = -\frac{1}{8}$$

$$y = 2x - \frac{1}{8}$$

Gráfico da função $f(x) = x^2 + x$ com a reta tangente no ponto $x = a = \frac{1}{4}$.



$$x = \frac{1}{4}; y = \frac{3}{8}; m = 2$$

1.13b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1 \; ; x = a = 2$

A fórmula do coeficiente angular

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = \frac{1}{3}(x+h)^3 + 1$$

$$(x+h)^3 = (x+h)^2(x+h)$$

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^3 = (x^2 + 2xh + h^2)(x+h)$$

$$= x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3$$

$$f(x+h) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3) + 1$$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{3}(x^3+2x^2h+xh^2+x^2h+2xh^2+h^3)+1-\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}2x^2h+\frac{1}{3}xh^2+\frac{1}{3}x^2h+\frac{1}{3}2xh^2+\frac{1}{3}h^3+1-\frac{1}{3}x^3-1$$

$$=\frac{1}{3}2x^2h+\frac{1}{3}xh^2+\frac{1}{3}x^2h+\frac{1}{3}2xh^2+\frac{1}{3}h^3$$

$$f(x+h)-f(x)=h\left(\frac{1}{3}2x^2+\frac{1}{3}xh+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}2xh+\frac{1}{3}h^2\right)$$

$$\frac{f(x+h)-\ f(x)}{h}=\frac{h\left(\frac{1}{3}2x^2+\frac{1}{3}xh+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}2xh+\frac{1}{3}h^2\right)}{h}$$

$$=\frac{1}{3}2x^2+\frac{1}{3}xh+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}2xh+\frac{1}{3}h^2$$

Sabendo que

$$\frac{1}{3}2x^2+\frac{1}{3}x^2=\frac{1}{3}(2x^2+x^2)=\frac{1}{3}3x^2=x^2$$

Temos que,

$$\frac{f(x+h)-\ f(x)}{h}=x^2+\frac{1}{3}xh+\frac{1}{3}2xh+\frac{1}{3}h^2$$

Assim,

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\ f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}x^2+\frac{1}{3}xh+\frac{1}{3}2xh+\frac{1}{3}h^2=x^2$$

$$m=x^2$$

Coeficiente angular em $x=2$

$$m=2^2=4$$

Equação reduzida da reta tangente ao ponto $x=2$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+1$$

$$f(2)=\frac{1}{3}2^3+1=\frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$$

Sabendo que

$$y = mx + b$$

Em $x = 2$, temos que

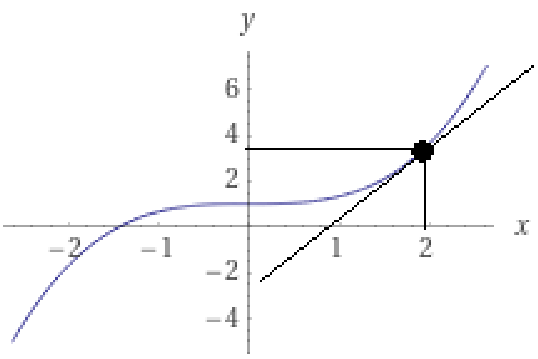
$$\frac{11}{3} = 4(2) + b$$

$$\frac{11}{3} - 8 = b$$

$$b = \frac{11 - 24}{3} = -\frac{13}{3}$$

$$y = 4x - \frac{13}{3}$$

Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$



1.13c) $f(x) = x^2 - 2$ e $a = 1$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 2$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 2$$

$$f(x + h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - 2 - (x^2 - 2)$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 2 - x^2 + 2$$

$$= 2xh + h^2$$

$$\frac{f(x+h)-\ f(x)}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\ f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h$$

$$m=2x$$

$$x=1$$

$$m=2.1=2$$

$$y=1^2-2=-1$$

Equação reduzida da reta tangente ao ponto $x=1$.

$$y=mx+b$$

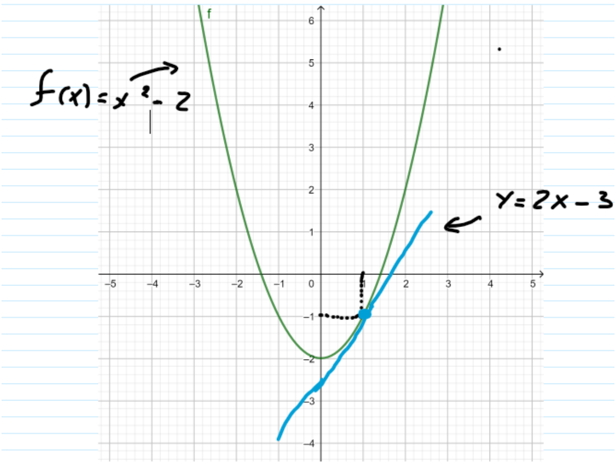
$$-1=2.1+b$$

$$-1-2=b$$

$$b=-3$$

$$y=2x-3$$

Gráfico da função $f(x)=x^2-2$



1.13d) $f(x)=4x^2+\ 3$ e $a=\frac{1}{2}$

Coeficiente angular da reta tangente

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = 4(x+h)^2 + 3$$

$$= 4(x^2 + 2xh + h^2) + 3$$

$$= 4x^2 + 8xh + 4h^2 + 3$$

$$f(x+h) - f(x) = 4x^2 + 8xh + 4h^2 + 3 - (4x^2 + 3)$$

$$= 4x^2 + 8xh + 4h^2 + 3 - 4x^2 - 3$$

$$= 8xh + 4h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(8x+4h)}{h} = 8x + 4h$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 8x + 4h$$

$$m = 8x$$

Em $x = \frac{1}{2}$

$$m = 8\frac{1}{2} = 4$$

$$y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 4\frac{1}{4} + 3$$

$$y = 1 + 3 = 4$$

Equação reduzida da reta tangente em $x = \frac{1}{2}$

$$y = mx + b$$

$$4 = 4.\frac{1}{2} + b$$

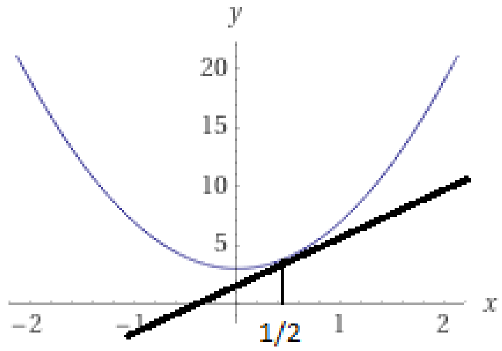
$$4 = 2 + b$$

$$4 - 2 = b$$

$$b = 2$$

$$y = 4x + 2$$

Gráfico da função $4x^2 + 3$



1.14) Encontre os pontos do gráfico $y = x^2$, no qual a reta tangente é paralela a reta $y = 6x - 1$.

$$\text{m} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - (x^2)$$

$$= 2xh + h^2$$

$$f(x+h) - f(x) = h(2x + h)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

$$\text{m} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$$\lim_{h \to 0} 2x + \lim_{h \to 0} h = 2x + 0 = 2x$$

$$m = 2x$$

Sabendo que a reta tangente à função $f(x) = x^2$, no ponto de interesse, é paralela à reta $y = 6x - 1$, elas possuem o mesmo coeficiente angular ($m = 6$).

Assim

$$m = 2x$$

Então

$$6 = 2x$$

$$x = 3$$

Em $x = 3$, y é igual a:

$$y = x^2$$

$$y = 3^2 = 9$$

A equação reduzida da reta tangente ao ponto (3, 9) é:

$$y = mx + b$$

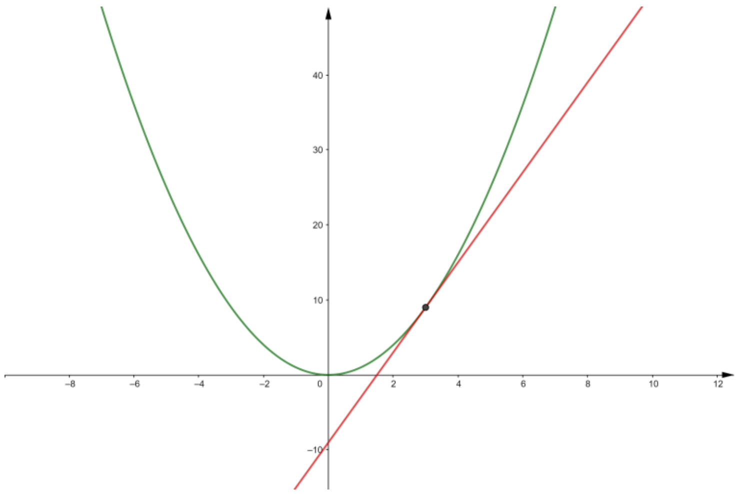
$$9 = 6(3) + b$$

$$9 - 18 = b$$

$$b = -9$$

$$y = 6x - 9$$

O gráfico da função $y = x^2$

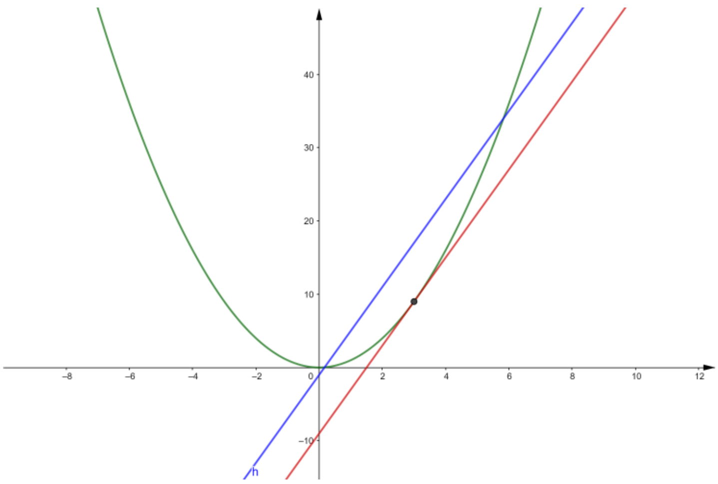


Em $y = 6x - 1$, para $x = 0$

$$y = -1$$

Para $y = 0$

$$x = \frac{1}{6}$$



1.15) Determine os pontos sobre o gráfico $y = x^3$, no qual a reta tangente é perpendicular à reta $3x + 9y = 4$.

$$\mathrm{m} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x+h) = (x+h)^3 = (x^2 + 2xh + h^2)(x+h)$$

$$f(x+h) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3$$

$$f(x+h) - f(x) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 - x^3$$

$$f(x+h) - f(x) = 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3$$

$$= h(2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2)}{h}$$

$$= 2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2$$

$$\text{m} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2$$

$$= 2x^2 + x^2$$

$$= 3x^2$$

$$m = 3x^2$$

Isolando o *y* na reta $3x + 9y = 4$, temos que

$$9y = -3x + 4$$

$$y = \frac{-3x + 4}{9}$$

$$y = \frac{-3x}{9} + \frac{4}{9}$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{9}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$

Sendo *m2* o coeficiente angular da reta, temos que

$$m2 = -\frac{1}{3}$$

Sabendo que *m* é o coeficiente angular da reta tangente e sabendo que o produto entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é igual a -1, temos que

$$m.m2 = -1$$

$$m\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$m = \frac{-1}{-\frac{1}{3}} = -1.\left(-\frac{3}{1}\right) = 3$$

Sabendo que o coeficiente angular da função $f(x) = x^3$ é dado pela equação

$$m = 3x^2$$

Sabendo que $m = 3$, temos que

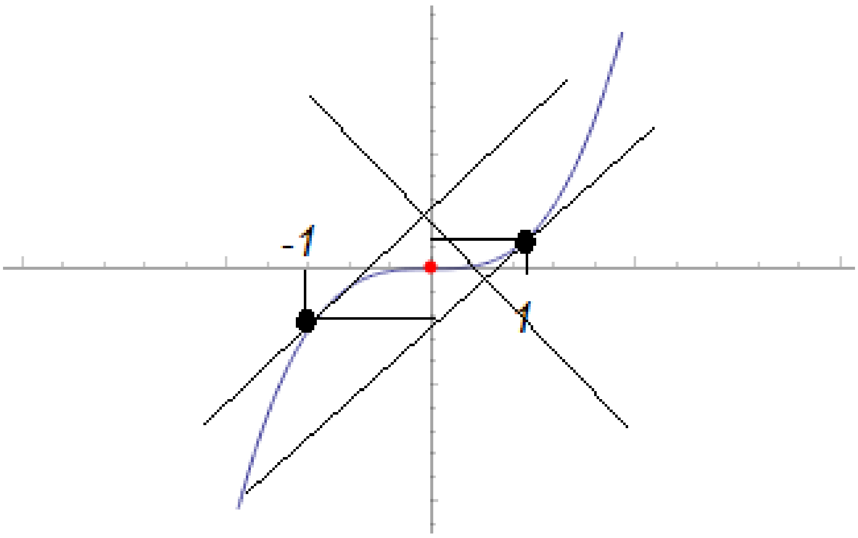
$$3 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{3}{3}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x' = 1 \; e \; x'' = -1$$



1.16) Encontre a equação reduzida da reta **normal** ao gráfico de $y = x^3$, no ponto em que $x = \frac{1}{3}$.

$$\mathrm{m} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = x^3$$

$$m = 3x^2 \qquad \text{(ver exercício 1.15)}$$

No ponto $x = \frac{1}{3}$, temos que

$$m = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3\,\frac{1^2}{3^2} = 3\,\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Se m_2 é o coeficiente da reta normal (perpendicular), temos que

$$m.m_2 = -1$$

$$\frac{1}{3}.m_2 = -1$$

$$m_2 = -3$$

Em $x = \frac{1}{3}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

A equação reduzida da reta normal é:

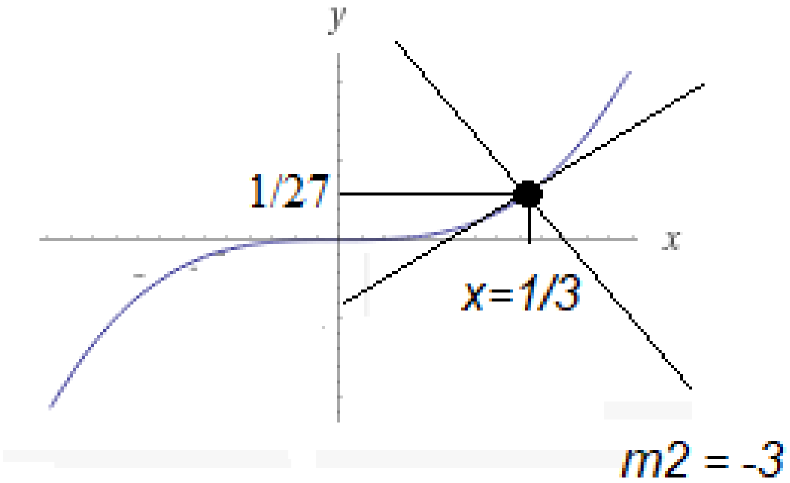
$$y = m_2x + b$$

$$\frac{1}{27} = -3\,\frac{1}{3} + b$$

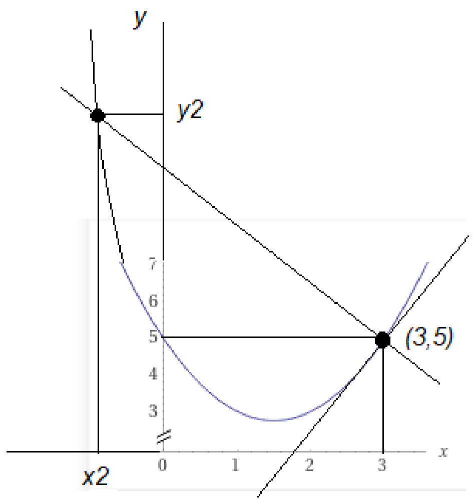
$$\frac{1}{27} + 1 = b$$

$$b = \frac{28}{27}$$

$$y = -3x + \frac{28}{27}$$



1.17) Em que pontos a reta normal à curva $y = x^2 - 3x + 5$, no ponto (3,5), intercepta a curva?



$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h) + 5$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 5$$

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 5 - (x^2 - 3x + 5)$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 5 - x^2 + 3x - 5$$

$$= 2xh + h^2 - 3h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x + h - 3)}{h} = 2x + h - 3$$

$$\text{m} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h - 3 = 2x - 3$$

$$m = 2x - 3$$

Em $x = 3$, temos que

$$m = 2.3 - 3 = 3$$

Sendo m_2 o coeficiente angular da reta normal, temos que

$$m.m_2 = -1$$

$$3.m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{3}$$

Sabendo que o coeficiente angular de uma reta é a relação entre a variação de *y* e a variação de *x*, temos que

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y}{x_2 - x}$$

Temos que

$$-\frac{1}{3} = \frac{y_2 - 5}{x_2 - 3}$$

Sabendo que

$$y_2 = (x_2)^2 - 3x_2 + 5$$

Substituindo y_2 pela sua equação, temos que

$$-\frac{1}{3} = \frac{(x_2)^2 - 3x_2 + 5 - 5}{x_2 - 3}$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{(x_2)^2 - 3x_2}{x_2 - 3}$$

$$-\frac{1}{3}(x_2 - 3) = (x_2)^2 - 3x_2$$

$$-\frac{1}{3}x_2 + 1 = (x_2)^2 - 3x_2$$

$$(x_2)^2 - 3x_2 + \frac{1}{3}x_2 - 1 = 0$$

$$(x_2)^2 + x_2\left(-3 + \frac{1}{3}\right) - 1 = 0$$

$$(x_2)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)x_2 - 1 = 0$$

$$x_2{}' = -\frac{1}{3} \text{ e } x_2{}'' = 3$$

Como x_2 é negativo, o valor de x_2 é -1/3.

Em $x = -\frac{1}{3}$, temos que

$$y_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 5$$

$$y_2 = \frac{1}{9} + 1 + 5 = \frac{1}{9} + 6$$

$$y_2 = \frac{55}{9}$$

Os pontos em que a reta normal intercepta a reta tangente ao ponto (3, 5) são:

$$(3, 5) \text{ e } \left(-\frac{1}{3}, \frac{55}{9}\right)$$

Gabarito: 1.13a) $y = 2x - \frac{1}{8}$. 1.13b) $y = 4x - \frac{13}{3}$. 1.13c) $y = -1$.
1.13d) $y = 4x + 2$. 1.14) (3, 9). 1.15) (1, 1) e (-1, -1).
1.16) $y = -3x + \frac{28}{27}$. 1.17) (3, 5) e $(-\frac{1}{3}, \frac{55}{9})$.