Escalonamento de Matrizes

Matriz Escalonada Reduzida

Aplicações: Matriz Inversa

Escalonamento de Matrizes: Método de Gauss-Jordan

Aplicações: Determinantes

Aplicações: Resolução de Sistemas (Rouché-Capelli)

Professor Cláudio Bispo

Matriz Escalonada Reduzida

Uma matriz está na forma escalonada reduzida por linhas, ou simplesmente, forma escalonada reduzida, se:

- ✓ Se uma linha não consistir só de zeros, então o primeiro número não nulo da linha é um 1, Chamado de pivô.
- ✓ Se existirem linhas constituídas somente de zeros, elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
- ✓ Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem somente de zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita que o pivô da linha superior.
- ✓ Cada coluna que contém um pivô tem zeros nos demais elementos.

Matriz Escalonada

$$\left.\begin{array}{l}
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\[1em]
B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\[1em]
C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}\right\} \text{Forma escalonada}$$

Matriz Escalonada

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{Forma escalonada reduzida}$$

Escalonada x Escalonada Reduzida

Observe que uma matriz na ***forma escalonada*** tem zeros abaixo do pivô, enquanto que uma matriz em ***forma escalonada reduzida*** por linhas tem zeros abaixo e acima do pivô.

Operações Elementares

Operações Elementares Linha: São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

1) Permuta da *i-ésima* e *j-ésima* linha ($L_i \leftrightarrow L_j$);

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

2) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo *k* ($L_i \to kL_i$);

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \to \frac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

3) Substituição da i-ésima linha por uma combinação linear desta com uma outra linha da matriz ($L_i \to \alpha L_i + \beta L_j$);

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes m x n, dizemos que B é **linha equivalente** a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Notação $A \sim B$.

Teorema: Toda matriz A de ordem m x n é linha equivalente a uma **única** matriz linha reduzida à forma escada.

Aplicações: Matriz Inversa

Aplicações: Matriz Inversa

Colocamos lado a lado a matriz A à esquerda e a matriz identidade de mesma ordem da matriz A.

$$\left[A \mid I\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[I \mid A^{-1}\right]$$

Para encontrar a inversa de uma matriz não singular A (A admite inversa), nós devemos encontrar uma sequência de operações elementares sobre linhas que reduz A à identidade e depois efetuar esta mesma sequência de operações na matriz identidade I para obter A^{-1}.

Aplicações: Matriz Inversa

Encontre a inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Monte a matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\quad A \qquad\qquad I$$

Aplicações: Matriz Inversa

Efetuando as operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/4 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$I \qquad\qquad\qquad A^{-1}$$

Logo a inversa de A é $\begin{bmatrix} 5/4 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Aplicações: Determinantes

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, o Determinante desta matriz A é um número real associado à matriz A. denotamos o determinante de A por det A.

Denotamos também o determinante da matriz A, como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ por } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propriedades do Determinante

i) det A = det A^T

ii) det (AB) = det A . det B.

iii) Se a matriz A possui uma linha ou coluna nula então det A = 0.

iv) Se a matriz A possui duas linhas ou colunas iguais então det A = 0 .

v) Se na matriz A uma linha ou coluna é múltipla de outra linha ou coluna então det A = 0 .

vi) Trocando a posição de duas linhas ou colunas o determinante muda de sinal.

Propriedades do Determinante (continuação)

vii) Quando se multiplica uma linha ou coluna de uma matriz A por um número $k \neq 0$ o determinante fica multiplicado pelo mesmo número.

Corolário: Quando se multiplica uma matriz A por um número $k \neq 0$ o determinante fica multiplicado por k^n.

$viii$) O determinante de uma matriz A não se altera quando se faz a seguinte operação entre linha:

$L_i \rightarrow L_i + k\, L_j$.

.

Propriedades do Determinante (continuação)

ix) O determinante de uma matriz triangular superior (ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

x) $\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

OBS.: A propriedade *x* é justificada pela propriedade *ii* e pode ser utilizada para verificar se A possui inversa ou não, pois se $\det A = 0 \Rightarrow \det A^{-1}$ não existe . Logo A não é invertível.

Cálculo do Determinante por triangulação

Para se calcular o determinante de uma matriz A usamos as operações elementares linha de modo a obter uma matriz triangular superior (ou inferior) observando as propriedades do determinante e fazendo as compensações necessárias.

EXEMPLO: Calcule o determinante da Matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Escalonamento de Sistemas Lineares:
Método de Gauss-Jordan

Professor Cláudio Bispo