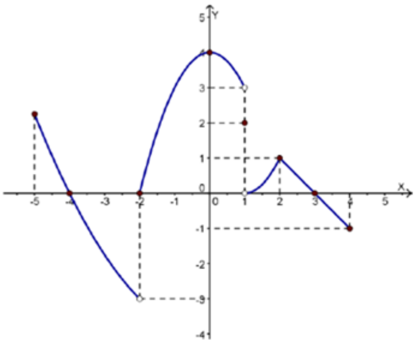
PROVA AV1 CÁLCULO
29/04/2022

1) Dada a função $y = f(x)$, cujo gráfico é mostrado abaixo. Determine *f(-2)* e $\lim_{x \to 2} f(x)$. (1,0 ponto)

$f(-2) = 0$ 0,5

$\lim_{x \to 2} f(x) = \nexists$ 0,5



2) Calcule $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (2,0 pontos)

a) $f(x) = 7x^2 + 10$

b) $f(x) = 3\sqrt{x}$

a) $f(x) = 7x^2 + 10$

$f(x+h) = 7(x+h)^2 + 10$

$= 7(x^2 + 2xh + h^2) + 10$

$= 7x^2 + 14xh + 7h^2 + 10$

$f(x+h) - f(x) = 7x^2 + 14xh + 7h^2 + 10 - (7x^2 + 10)$

$= \cancel{7x^2} + 14xh + 7h^2 + \cancel{10} - \cancel{7x^2} - \cancel{10}$

$= 14xh + 7h^2$

$= h(14x + 7h)$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{h}(14x + 7h)}{\cancel{h}}$

$= 14x + 7h$

$\lim_{h \to 0} 14x + 7h = \lim_{h \to 0} 14x + \cancel{\lim_{h \to 0} 7h}^{\,0}$

$\boxed{= 14x}$ 1,0

b) $f(x) = 3\sqrt{x}$

$f(x+h) = 3\sqrt{x+h}$

$f(x+h) - f(x) = 3\sqrt{x+h} - 3\sqrt{x}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3\sqrt{x+h} - 3\sqrt{x}}{h} = 3\,\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} 3\,\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = 3 \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= 3 \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

SE

$a = \sqrt{x+h}$

$b = \sqrt{x}$

ENTÃO

$(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) = (\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2$

$= x + h - x$

ASSIM,

$$= 3 \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= 3 \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = 3 \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= 3 \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = 3 \left(\frac{\lim_{h \to 0} 1}{\lim_{h \to 0} \sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= 3\,\frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = 3\,\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{x}}}$$

1,0

3) Calcule os limites, se existirem. (2,0 pontos)

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sin10x}{sin30x}$

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$

ASSIM,

$\lim_{h\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$

1,0

$= \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = \boxed{6}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 10x}{\sin 30x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{10x}{10x}\sin 10x}{\frac{30x}{30x}\sin 30x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{10x}}{\cancel{30x}} \frac{\frac{\sin 10x}{10x}}{\frac{\sin 30x}{30x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \frac{\frac{\sin 10x}{10x}}{\frac{\sin 30x}{30x}}$

$= \frac{1}{3} \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 30x}{30x}}$ 1 1

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} = \boxed{\frac{1}{3}}$ 1,0

4) Seja a função, $f(x)$ determine o limite de: (2,0 pontos)

a) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{4x^2+x-5}{2x^2+10}\right)$

b) $\lim_{x\to -\infty} (-4x^5+23x^3+\ 5x^2+1)$

a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+x-5}{2x^2+10}$

O $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ QUANDO $f(x)$ E $g(x)$ TÊM O MESMO GRAU, É IGUAL A RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS MONÔMIOS DE MAIOR GRAU.

ASSIM,

1,0

$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+x-5}{2x^2+10} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

1,0

$$b) \lim_{x \to -\infty} (-4x^5 + 23x^3 + 5x^2 + 1) = \lim_{x \to -\infty} -4x^5 = -4.(-\infty) = \boxed{\infty}$$

5) Encontre a equação reduzida da reta normal ao gráfico de $y = x^3 + 2$, no ponto em que $x = 1$. (1,0 ponto)

m = COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = (x+h)^3 + 2$$
$$= (x+h)^2 (x+h) + 2$$
$$= (x^2 + 2xh + h^2)(x+h) + 2$$
$$= x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 + 2$$
$$= x^3 + 3x^2h + 2xh^2 + h^3 + 2$$

$$f(x+h) - f(x) = x^3 + 3x^2h + 2xh^2 + h^3 + 2 - (x^3 + 2)$$
$$= \cancel{x^3} + 3x^2h + 2xh^2 + h^3 \cancel{+2} \cancel{-x^3} \cancel{-2}$$
$$= 3x^2h + 2xh^2 + h^3$$
$$= h(3x^2 + 2xh + h^2)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{h}(3x^2 + 2xh + h^2)}{\cancel{h}}$$

$= 3x^2 + 2xh + h^2$

$$\lim_{h \to 0} 3x^2 + \cancel{2xh}^{\,0} + \cancel{h^2}^{\,0} = 3x^2$$

$m = 3x^2$

Em $x = 1$

COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE EM $X = 1$

$m = 3(1)^2 = 3$

$m_2 \Rightarrow$ Coeficiente angular da reta normal a reta tangente.

Sabemos que

$m \cdot m_2 = -1$

Se $m = 3$, temos que

$3 \cdot m_2 = -1$

$m_2 = -\frac{1}{3}$

Em $x = 1$

$y = (1)^3 + 2$

$y = 3$

A equação reduzida da reta normal é dada por

$y = m_2 \cdot x + b$

Assim,

$3 = -\frac{1}{3}(1) + b$

$3 = \frac{-1}{3} + b$

$3 + \frac{1}{3} = b$

$b = \frac{10}{3}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}}$$

1,0