FAETERJ-Rio — Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro — FAETEC

Preenchido pelo Aluno		
Nome		Data
Disciplina Álgebra Linear	Curso	
Professor (a) Wagner da Silva Zanco	Período	Turno
Preenchido pelo Professor Prova AV1		

1) Calcule o determinante da matriz utilizando o teorema de Laplace: (2,0 pontos)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ 6 & 0 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$det(A) = 0 . C_{12} - 2 . C_{22} + 0 . C_{32} + 0 . C_{42} = 0 - 2 . (-78) + 0 + 0$
$= 156$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \\ -5 & 3 \end{matrix}$$

0 12 24   -2 -40 0

$-42 - 36 = -78$

$C_{22} = (-1)^{2+2} . -78 = -78$

2) Esboce os seguintes vetores, com ponto inicial na origem. (2,0 pontos)

a) $v_1 = (-4, 3)$
b) $v_2 = (5, -4)$
c) $v_3 = (3, 4, 5)$
d) $v_4 = (3, 3, 0)$

3) Sejam $u = (-3, 1, 2)$, $v = (4, 0, -8)$ e $w = (6, -1, -4)$, encontre os componentes de:

a) $v - w$
b) $6u+2v$
c) $-v+u$
d) $5(v-4u)$

a = (4, 0, -8) - (6, -1, -4) = (-2, 1, -4)

c = (-4, 0, 8) + (-3, 1, 2) = (-7, 1, 10)

4) Calcule a magnitude (módulo) dos vetores u, v e w, da questão 3.

5) Encontre o produto escalar $u \cdot v$ e os respectivos vetores unitários do produto escalar.

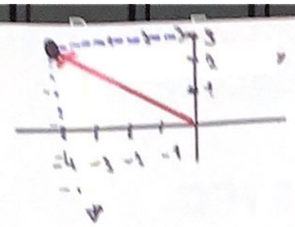
a) $u = (2,1);\ v = (2,3)$
b) $u = (2,-2);\ v = (2,4)$
c) $u = (2,3,4);\ v = (1,1,0)$

6) Sendo $u = (3,-1,-2), v = (2,4,-1)\ e\ w = (-1,0,1)$, calcule:

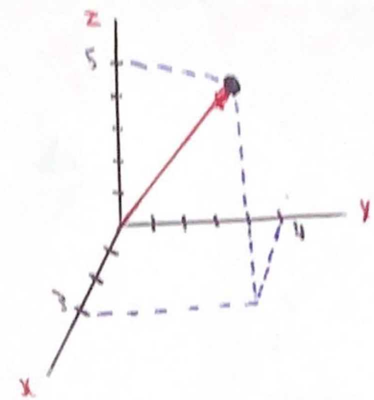
a) $u + v \times w$
b) $2v + (3u \times w)$
c) $(u \times v) + (v \times w)$
d) $u + (v \times w)$

7) Prove que os vetores $u = (1,0,0), v = (0,2,0)\ e\ w = (2,4,0)$ são coplanares por meio do produto misto $(u \times v) \cdot w$.

2) a) $V_1 = (-4, 3)$



c) $V_3 = (3, 4, 5)$



4) $u = (-3, 1, 2)$ $V = (4, 0, -8)$ $W = (6, -1, -4)$

$\|u\| = \sqrt{-3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$\|V\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + -8^2} = \sqrt{16+1+64} = \sqrt{80} =$

$\|W\| = \sqrt{6^2 + 1^2 - 4^2} = \sqrt{36+1+16} = \sqrt{53}$

5) a) $u = (2, 1)$ $V = (2, 3)$

Prod escalar $= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$

vet unitá $= \|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\hat{a} = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

7) $u = (1, 0, 0)$ $V = (0, 2, 0)$ e $W = (2, 4, 0)$ Calcule $(u \times V) \cdot W$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$0 \; 0 \; 0$ $\quad$ $0 \; 0 \; 0$

$0 - 0 = 0$ eles são coplanares

8) Dados os vetores $v = (-2,0,3,)$ e $w = (2,3,-2,)$, o produto vetorial $v \times w$ tem como resultado o vetor n. Determine a equação do plano onde se encontram os vetores v e w.

9) Verifique se o vetor $v = (7,8,9) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,3)$ e $v_3 = (3,2,5)$.

10) Os vetores $v_1 = (1,2), v_2 = (2,4)$ são LI ou LD?

11) Verifique se o conjunto $V = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, é LI ou LD?

12) Verifique se o conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y = 0\}$ é um espaço vetorial.

13) Verifique se o conjunto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

$$W = \{x, y, z, t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \; e \; z - t = 0\}$$

14) Verifique se o conjunto S é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$.

$$S = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z} \; e \; y, z \in \mathbb{R}\}$$

$8 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{x} & \hat{y} \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{matrix}$

$0 \quad 9\hat{x} \quad 4\hat{y} \quad 0 \quad 6\hat{y} \quad -6\hat{z}$

$6\hat{y} - 6\hat{z} - 9\hat{x} - 4\hat{y} = -9\hat{x} + 2\hat{y} - 6\hat{z}$

eplano $= Ax + By + Cz + D = 0$

$-9x + 2y - 6z + D = 0$

$-9(-2) + 2(0) - 6(3) + D = 0$

$18 + 0 - 18 + D = 0$

$D = 0$

eplano $= -9x + 2y - 6z = 0$

9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{vmatrix}$

$c_1 = \frac{Det(c_1)}{Det(D)} \quad c_2 = \frac{Det(c_2)}{Det(D)} \quad c_3 = \frac{Det(c_3)}{Det(D)}$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$

$-12 \quad 11 \quad 5 \quad -10 \quad 9 \quad 8$

$7 - 5 = 2$

$c_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \\ 3 & 9 \end{matrix}$

$55 - 55 = 0$

$c_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 1 \\ 8 & -1 \\ 9 & 2 \end{matrix}$

$\underbrace{-36 \quad 49 \quad 40}_{\cancel{55}} \quad \underbrace{-35 \quad 27 \quad 81}_{\cancel{73}}$

6
713
46
27

Teorema de Laplace

Ex: $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

se a soma for ímpar inverte o sinal

$Det(A) = 0 . C_{13} + 3 . C_{23} + 0 . C_{33} + 1 . C_{43}$

$D_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$0 \quad 6 \quad -1 \qquad -3 \quad 0 \quad 1$

$-2 - 5 = -7$

$C_{23} = (-1)^{2+3} . (-7) = 7$

$Det(A) = 0 + 3 . 7 + 0 + 1 . 13$

$Det(A) = 21 + 13 = 34$

Grandeza vetorial

$v = (2,3)$ e $w = (-1,-2)$

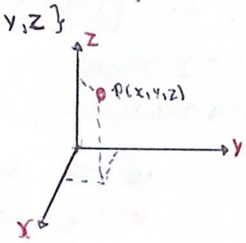
$j = 2v = (4,6)$

$n = v + w = (1,1)$

$p = v - w = (3,5)$

Vetores no espaço

$P = \{x, y, z\}$



Magnitude / módulo

$P = (1,2,3)$

$\|P\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} = 3,74$

Produto Escalar

$b . a = \|a\| . \|b\|$

$\|a\| = 11$ $\quad a . b = 11 . 4$

$\|b\| = 4$ $\quad a . b = 44$

Vetor unitário

$\hat{a}$ = vetor unitário

$a = (5,6)$

$\|a\| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} = 7,81$

$\hat{a} = \frac{a}{\|a\|} = \frac{(5,6)}{7,81} = \left(\frac{5}{7,81} ; \frac{6}{7,81}\right)$

$(0,64 , 0,77)$

observe que $\|\hat{a}\| = \sqrt{0,64^2 + 0,77^2} = 1$

Produto escalar 2

$a = (4,3)$ ou $a = 4\hat{x} + 3\hat{y}$

$\hat{x} . \hat{x} = 1$

$\hat{y} . \hat{y} = 1$

$\hat{x} . \hat{y} = 0$

$\hat{y} . \hat{x} = 0$

Calcule $a * b$, $a = (2,4)$ ou $2\hat{x} + 4\hat{y}$

$b = (5,7)$ ou $5\hat{x} + 7\hat{y}$

$a . b = (2,4) . (5,7) = 2 . 5 + 4 . 7 = 38$

ou

$a . b = 2\hat{x} . 5\hat{x} + \cancel{2\hat{x} . 7\hat{y}}^{0} + \cancel{4\hat{y} . 5\hat{x}}^{0} + 4\hat{y} . 7\hat{y}$

$= 2\hat{x} . 5\hat{x} + 4\hat{y} . 7\hat{y}$

$a . b = 10 + 28 = 38$

Produto vetorial no espaço tridimensional

$\hat{x} . \hat{y} = \hat{z}$ $\quad|\quad$ $\hat{y} . \hat{x} = -\hat{z}$

$\hat{y} . \hat{z} = \hat{x}$ $\quad|\quad$ $\hat{z} . y = -\hat{x}$

$\hat{z} . \hat{x} = \hat{y}$ $\quad|\quad$ $\hat{x} . \hat{z} = -\hat{y}$

$a = (2,4)$ ou $2\hat{x} + 4\hat{y}$

$b = (5,7)$ ou $5\hat{x} + 7y$

$a . b = \cancel{2\hat{x} . 5\hat{x}}^{0} + 2\hat{x} . 7\hat{y} + 4\hat{y} . 5\hat{x} + \cancel{4\hat{y} . 7\hat{y}}^{0}$

$a . b = 2\hat{x} . 7\hat{y} + 4\hat{y} . 5\hat{x}$

$a . b = 14\hat{z} - 20\hat{z}$

$a . b = -6\hat{z}$

ou

$a . b = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} & \hat{x} & \hat{y} \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ $\qquad 14\hat{z} - 20\hat{z} = -6\hat{z}$

$20\hat{z} \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 14\hat{z}$

Produto misto

$(u \times v) \cdot w = \det(D)$

seja $u = (1, 0, 2)$, $v = (-1, 1, 3)$ e $w = (0, 3, -2)$ calcule $[u, v, w]$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \quad -8 - 9 = -17$$

0 9 0 -2 0 -6

Equação do Plano

$a = (-1, 1, 2)$

$b = (0, 3, 0)$

1° Produto vetorial

$$D = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \hat{x} & \hat{y} \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \quad -3\hat{z} - 6\hat{x}$$

0 $6\hat{x}$ 0 0 0 $-3\hat{z}$

a equação geral do plano é dada por

$Ax + BY + CZ + D = 0$

$-6x + 0y \;\; 3z + D = 0$

3° substitui as coordenadas do ponto a

$6(-1) + 0(1) - 3(2) + D = 0$

$6 - 6 + D = 0$

$0 + D = 0$

o plano $= -6x - 3z = 0$

Combinação Linear

$V = (4, 3)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$

$V = (4, 3) = 4v_1 + 3v_2$

Ex: $V = (8, -2)$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -$

1° 2°

$$c_1\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ -2 \end{vmatrix}$$

3°

$c_1 + c_2 = 8$ I

$c_1 - c_2 = -2$ II

I + II

$2c_1 + 0 = 6$

$c_1 = 6/2 = 3$

4° $3 + c_2 = 8$

$c_2 = 8 - 3$

$c_2 = 5$

$$\boxed{V = 3v_1 + 5v_2}$$

Dependência Linear

LI = linearmente independente

LD = linearmente dependente

se $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$
é LI

senão LD

Ex: os vetores $v_1 = (3, 1)$ e $v_2 = (9, 3)$ são LI ou LD

$c_1v_1 + c_2v_2 = 0$

$$c_1\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} 9 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$3c_1 + 9c_2 = 0$

$c_1 + 3c_2 = 0$

$\to c_1 = -3c_2$

os vetores v_1 e v_2 são LD