FAETERJ-Rio

Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Vetores II

Professor Cláudio Bispo

FAETERJ-Rio

Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Vetores II

Igualdade de Vetores
Operações com Vetores
Combinação Linear
Produto Escalar

Professor Cláudio Bispo

Igualdade de Vetores

Fixados dois vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, com o mesmo número n de coordenadas, dizemos que eles são iguais se, e somente se, suas coordenadas correspondentes forem iguais.

- ✓ $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$
- ✓ $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

$$\boldsymbol{u = v \Rightarrow (u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n}$$

Operações com Vetores

Fixados dois vetores com o mesmo número de coordenadas e um número real qualquer, que chamaremos de **escalar**, definiremos as seguintes operações.

- **Adição**
- **Multiplicação por Escalar**

Adição

Considere os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, ambos com o mesmo número de coordenadas $\boldsymbol{n}$.

- ✓ $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$
- ✓ $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

O vetor $u + v$ será definido por:

$$\boldsymbol{u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)}$$

Exemplos:

- $u = (1,3), v = (5,-2) \Rightarrow u + v = (1,3) + (5,-2) = \big(1 + 5, 3 + (-2)\big) = (6,1)$
- $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{10}\right), v = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow u + v = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{3}\right), \frac{1}{10} + \left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{10}\right)$
- $u = (1,2,3,4), v = (-4,3,-2,1) \Rightarrow u + v = (1 + (-4), 2 + 3, 3 + (-2), 4 + 1) = (-3,5,1,5)$

Propriedades da Adição

Considere os vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, todos com o mesmo número n de coordenadas. Temos as seguintes propriedades da adição de vetores:

i. **Comutativa**: $u + v = v + u$

ii. **Associativa**: $u + (v + w) = (u + v) + w$

iii. **Elemento Neutro**: Existe o elemento neutro da adição, denotado por vetor nulo e representado por $\vec{0}$, tal que: $u + \vec{0} = \vec{0} + u = u$.

iv. **Elemento Oposto**: Dado o vetor u, existe um único vetor denominado de vetor oposto e representado por $-u$, tal que: $u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$.

Multiplicação por Escalar

Considere os vetores $\boldsymbol{u}$ com o número de coordenadas $\boldsymbol{n}$. Considere também um escalar $\boldsymbol{\alpha}$.

O vetor αu será definido por:

$$\boldsymbol{\alpha u = \alpha(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \ldots, \alpha u_n)}$$

Exemplos:

- $u = (1,3) \Rightarrow 2u = 2(1,3) = (2 \times 1, 2 \times 3) = (2,6)$
- $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{10}\right) \Rightarrow -7u = -7\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{10}\right) = \left((-7) \times \frac{1}{2}, (-7) \times \frac{5}{6}, (-7) \times \frac{1}{10}\right) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{35}{6}, -\frac{7}{10}\right)$
- $u = (1,2,3,4) \Rightarrow \pi u = \pi(1,2,3,4) = (\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi)$

Propriedades da Multiplicação por Escalar

Considere o vetor $\boldsymbol{u}$. Considere também os escalares $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.
Temos as seguintes propriedades da multiplicação por escalar:

v. **Associativa**: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

vi. **Elemento Neutro**: Para todo vetor u, existe somente um escalar, que é o número 1, tal que $1u = u$.

Propriedades da Mistas

Considere os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, ambos com o mesmo número de coordenadas $\boldsymbol{n}$. Considere também os escalares $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.

Temos as seguintes propriedades envolvendo as duas operações: adição e multiplicação por escalar.

vii. **Distributividade em relação aos escalares**: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

viii. **Distributividade em relação aos vetores**: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Combinação Linear

Sejam $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, vetores com o mesmo número de coordenadas n, afirmamos que $\boldsymbol{w}$ poder ser escrito como combinação linear de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, quando existirem escalares $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ tais que:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\alpha u} + \boldsymbol{\beta v}$$

Exemplos:

- $(5, 2) = 3(1, -1) + 1(2, 5) \Rightarrow \alpha = 3,\ \beta = 1$

- $(1, 2, 3) = \alpha(2, 1, 1) + \beta(3, -1, 1) + \gamma(1, 1, -1) \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}, \beta = -\frac{7}{8}, \gamma = -\frac{11}{8}$

- $(1, 1, 3) = \alpha(3, 1, -4) + \beta(1,0,1) \Rightarrow \nexists\ \alpha, \beta$

Combinação Linear

Para determinarmos os escalares de uma combinação linear, caso estes existam, temos que resolver um sistema linear.

Exemplo:

$$(5,2) = \alpha(1,-1) + \beta(2,5)$$

$$(5,2) = (\alpha,-\alpha) + (2\beta,5\beta)$$

$$(5,2) = (\alpha + 2\beta, -\alpha + 5\beta)$$

Sistema Linear

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 5 \\ -\alpha + 5\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Produto Escalar

Sejam $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n})$ e $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n})$, definimos como produto escalar (ou produto interno usual) e representamos por $u \cdot v$, o **número real** dado pela seguinte relação:

$$\boldsymbol{u \cdot v = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + \cdots + u_n \times v_n}$$

O produto escalar de u por v também é indicado por $\langle u, v \rangle$ e lê-se "u escalar v".

Exemplos:

- $u = (3, -2), v = (3, 7) \Rightarrow u \cdot v = 3 \times 3 + (-2) \times 7 = 9 + (-14) = -5$
- $u = (1, 0, 3), v = (-3, 1, 1) \Rightarrow u \cdot v = 1 \times (-3) + 0 \times 1 + 3 \times 1 = -3 + 0 + 3 = 0$

Propriedades do Produto Escalar

Sejam $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, e α, β escalares quaisquer, temos:

- ✓ $u \cdot v = v \cdot u$
- ✓ $\alpha u \cdot v = \alpha(u \cdot v)$
- ✓ $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- ✓ $u \cdot u = \|u\|^2$

- ✓ $u \cdot v = 0$ se, e somente se, os vetores são perpendiculares ($u \perp v$). Esta propriedade é verificada geometricamente em vetores de duas e três coordenadas.

- ✓ Considere os vetores u e v, ambos com duas coordenadas, e θ o ângulo entre eles (com $0° < \theta < 180°$). Temos $cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

Obs.: Este resultado também é válido para vetores de três coordenadas.

EXERCÍCIOS