FAETERJ-Rio
Cálculo I
Professor DSc. Wagner Zanco

Solução dos Exercícios 1.1 – 1.6

1.1) Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{y \to 2} \left(y^2 - \frac{1}{y}\right)$

$$\lim_{y \to 2} \left(y^2 - \frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to 2} y^2 - \lim_{y \to 2} \frac{1}{y} = 2^2 - \frac{1}{2} = \frac{8-1}{2} = \frac{7}{2}$$

b) $\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} x^2 - \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0^2 - \frac{1}{0} = \nexists \text{ (indeterminação)}$$

c) $\lim_{u \to 5} \left(\frac{u^2 - 25}{u-5}\right)$

Sabendo que $u^2 - 25 = (u-5)(u+5)$, temos que

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\lim_{u \to 5} \left(\frac{u^2 - 25}{u-5}\right) = \frac{5^2 - 25}{5-5} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{u \to 5} \left(\frac{u^2 - 25}{u-5}\right) = \lim_{u \to 5} \frac{(u-5)(u+5)}{u-5} = \lim_{u \to 5} u + 5$$

$$= \lim_{u \to 5} u + \lim_{u \to 5} 5 = 5 + 5 = 10$$

d) $\lim_{x \to 2} \lfloor x \rfloor$

Obs.:$\lfloor x \rfloor$ → Converte um número real *x* no maior número inteiro menor ou igual a *x*.

$x \to 2^+$

x	2,9	2,5	2,1	2,01	....	2,001	....	2,0001
f(x)	2	2	2	2	....	2	....	2

$x \to 2^-$

x	1,1	1,5	1,9	1,99	....	1,999	....	1,9999
f(x)	1	1	1	1	....	1	....	1

$$\lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1$$

O limite não existe, uma vez que o limite pela direita é diferente do limite pela esquerda.

$$\lim_{x\to 2} \lfloor x \rfloor = \nexists$$

1.2) Determine $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada uma das funções a seguir.

a) $f(x) = 3x - 1$

$$f(x+h) = 3(x+h) - 1$$

$$= 3x + 3h - 1$$

$$f(x+h) - f(x) = 3x + 3h - 1 - (3x - 1)$$

$$= 3x + 3h - 1 - 3x + 1$$

$$= 3h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

b) $f(x) = 4x^2 - x$

$$f(x+h) = 4(x+h)^2 - (x+h)$$

$$= 4(x^2 + 2xh + h^2) - x - h$$

$$= 4x^2 + 8xh + 4h^2 - x - h$$

$$f(x+h) - f(x) = 4x^2 + 8xh + 4h^2 - x - h - (4x^2 - x)$$

$$= 4x^2 + 8xh + 4h^2 - x - h - 4x^2 + x$$

$$= 8xh + 4h^2 - h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{8xh + 4h^2 - h}{h} = \frac{h(8x + 4h - 1)}{h}$$

$$= 8x + 4h - 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 8x + 4h - 1$$

$$= \lim_{h\to 0} 8x + \lim_{h\to 0} 4h - \lim_{h\to 0} 1 = 8x - 1$$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x+h) = \frac{1}{x+h}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d - b.c}{b.d}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x}$$

$$= \frac{x-x-h}{(x+h)x} = \frac{-h}{(x+h)x}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \frac{-h}{(x+h)x}\frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h)x}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} -1}{\lim_{h\to 0}(x+h)x} = \frac{-1}{\lim_{h\to 0}(x+h).\lim_{h\to 0} x} = -\frac{1}{x.x}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

1.3) Calcule $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

Se $x = 1$, temos que $1^3 - 1 = 0$ e $x - 1 = 0$

$$x - 1 = 0$$

Isto significa que $x^3 - 1$ é divisível por $x - 1$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$$
$$x^3 - 1 = (x^2+x+1)(x-1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x^2 & x^2+x+1 \\ \cline{1-1} x^2 - 1 & \\ -x^2 + x & \\ \cline{1-1} x - 1 & \\ -x + 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}x^2+x+1$$

$$\lim_{x\to1}x^2+\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}1$$

$$=1^2+1+1=3$$

$$f(1)=\nexists$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=3$$

1.4) Calcule os seguintes limites, se existirem.

a) $\lim_{x\to2}7=7$

b) $\lim_{u\to0}\frac{5u^2-4}{u+1}=\frac{5.0^2-4}{0+1}=-\frac{4}{1}$

$$\lim_{u\to0}\frac{5u^2-4}{u+1}=\frac{\lim_{u\to0}5u^2-4}{\lim_{u\to0}u+1}=\frac{\lim_{u\to0}5u^2-\lim_{u\to0}4}{\lim_{u\to0}u+\lim_{u\to0}1}=\frac{0-4}{0+1}=-4$$

c) $\lim_{w\to-2}\frac{4-w^2}{w+2}$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$4-w^2=2^2-w^2=(2-w)(2+w)$$

$$\lim_{w\to-2}\frac{(2-w)(2+w)}{w+2}=\lim_{w\to-2}2-w=2-(-2)=4$$

d) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}\lfloor x\rfloor$

Obs.: $\lfloor x\rfloor$ → Converte um número real *x* no maior número inteiro menor ou igual a *x*.

$$x\to\frac{3}{2}^{+}$$

x	1,6	1,51	1,501	1,501	....	1,5001	....	1,50001
f(x)	1	1	1	1	....	1	....	1

$x \to \frac{3}{2}^{-}$

x	1,4	1,49	1,499	1,4999	....	1,49999	....	1,499999
$f(x)$	1	1	1	1	....	1	....	1

$\lim_{x \to \frac{3}{2}^{+}} \lfloor x \rfloor = 1$

$\lim_{x \to \frac{3}{2}^{-}} \lfloor x \rfloor = 1$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor = 1$$

e) $\lim_{x \to 0} |x|$

$x \to 0^{+}$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,1	0,01	0,001	0,0001

$x \to 0^{-}$

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x)$	0,1	0,01	0,001	0,0001

$\lim_{x \to 0^{+}} |x| = 0$

$\lim_{x \to 0^{-}} |x| = 0$

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

f) $\lim_{x \to 2} 7x^3 - 5x^2 + 2x - 4$

$$\lim_{x \to 2} 7x^3 - 5x^2 + 2x - 4 = \lim_{x \to 2} 7x^3 - \lim_{x \to 2} 5x^2 + \lim_{x \to 2} 2x - \lim_{x \to 2} 4$$

$$= 56 - 20 + 4 - 4 = 36$$

g) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

$$x = 2$$

$$2^3 - 8 = 0$$

Isto significa que $x - 2 = 0$ e que $x^3 - 8$ é divisível por $x - 2$.

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8 & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 & x^2 + 2x + 4 \\ \cline{1-1} 2x^2 - 8 & \\ -2x^2 + 4x & \\ \cline{1-1} 4x - 8 & \\ -4x + 8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x^2 + 2x + 4$$

$$= 2^2 + 2.2 + 4 = 12$$

h) $\lim_{x \to 2}(x - \lfloor x \rfloor)$

$x \to 2^+$

x	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	0,1	0,01	0,001	0,0001

$x \to 2^-$

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	0,9	0,99	0,999	0,9999

a)

$$\lim_{x \to 2^+}(x - \lfloor x \rfloor) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-}(x - \lfloor x \rfloor) = 1$$

$$\lim_{x \to 2}(x - \lfloor x \rfloor) = \nexists \text{ (o limite não existe)}$$

i) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

$$x = 4$$

$$4^2 - 4 - 12 = 0$$

Isto significa que $x - 4 = 0$ e que $x^2 - x - 12$ é divisível por $x - 4$.

$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 - x - 12 & x-4 \\
\cline{3-3}
- & x^2 + 4x & x+3 \\
\cline{1-2}
 & 3x - 12 & \\
- & 3x + 12 & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{x - 4} = \lim_{x\to 4} x + 3$$

$$= 4 + 3 = 7$$

j) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - x^2 - x - 15}{x-3}$

$$x = 3$$

$$3^3 - 3^2 - 3 - 15 = 0$$

Isto significa que $x - 3 = 0$ e que $x^3 - x^2 - x - 15$ é divisível por $x - 3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - x^2 - x - 15}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+2x+5)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3} x^2 + 2x + 5$$

$$= 3^2 + 2.3 + 15 = 20$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - x^2 - x - 15 & x-3 \\
\cline{3-3}
 & -x^3 + 3x^2 & x^2+2x+5 \\
\cline{1-2}
 & 2x^2 - x - 15 & \\
- & 2x^2 + 6x & \\
\cline{1-2}
 & 5x - 15 & \\
- & 5x + 15 & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

k) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^4 - 7x^2 + x - 6}{x-2}$

$$x = 2$$

$$2.2^4 - 7.2^2 + 2 - 6 = 0$$

Isto significa que $x - 2 = 0$ e que $2x^4 - 7x^2 + x - 6$ é divisível por $x - 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^4 - 7x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x - 2)(2x^3 + 4x^2 + x + 3)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^3 + 4x^2 + x + 3$$

$$= 2.2^3 + 4.2^2 + 2 + 3 = 37$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - 7x^2 + x - 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^4 + 4x^3 & 2x^3 + 4x^2 + x + 3 \\ \cline{1-1}
4x^3 - 7x^2 + x - 6 & \\
-4x^3 + 8x^2 & \\ \cline{1-1}
x^2 + x - 6 & \\
-x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
3x - 6 & \\
-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

l) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$

$$x = 1$$

$$1^4 + 3.1^3 - 13.1^2 - 27.1 + 36 = 0$$

$$1^2 + 3.1 - 4 = 0$$

Isto significa que $x - 1 = 0$ e que $x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36$ é divisível por $x - 1$ e por $x^2 + 3x - 4$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 9)}{x^2 + 3x - 4}$$

$$= \lim_{x\to 1} x^2 - 9$$

$$= 1^2 - 9 = -8$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36 & x^2 + 3x - 4 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 4x^2 & x^2 - 9 \\ \cline{1-1}
-9x^2 - 27x + 36 & \\
9x^2 + 27x - 36 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

m) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{x + 3} \ e \ b = \sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{x + 3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= x + 3 - 3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+3-3}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\sqrt{x+3}+\lim_{x\to 0}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

n) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+3-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}+\lim_{x\to 1} 2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

o) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$

Sabendo que $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$, temos que

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)1-(x-2)4}{(x-2)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4 - 4x + 8}{(x-2)(x^2 - 4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)(x^2 - 4)}$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2 - 4)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x^2 - 4)}$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+2)} = \frac{\lim_{x\to 2} 1}{\lim_{x\to 2} (x+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

1.5) Calcule $\frac{f(x+h)- f(x)}{h}$ e depois $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)- f(x)}{h}$

a) $f(x) = 3x^2 + 5$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 + 5$$

$$= 3(x^2 + 2xh + h^2) + 5$$

$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5$$

$$f(x+h) - f(x) = 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5 - (3x^2 + 5)$$

$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5 - 3x^2 - 5$$

$$= 6xh + 3h^2 = h(6x + 3h)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(6x+h)}{h} = 6x + 3h$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 6x + 3h = 6x$$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$f(x+h) = \frac{1}{(x+h)+1}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{da - bc}{bd}$$

$$= \frac{x+1-(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{x+1-x-h-1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}\frac{1}{h}$$

$$= -\frac{1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$= -\frac{\lim_{h\to 0} 1}{\lim_{h\to 0}(x+h+1)(x+1)} = -\frac{1}{\lim_{h\to 0}(x+h+1)\lim_{h\to 0}(x+1)}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)(x+1)} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

c) $f(x) = 7x + 12$

$$f(x+h) = 7(x+h) + 12 = 7x + 7h + 12$$

$$f(x+h) - f(x) = 7x + 7h + 12 - (7x + 12)$$

$$= 7x + 7h + 12 - 7x - 12 = 7h$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{7h}{h}=7$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}7=7$$

d) $f(x)=x^3$

$$f(x+h)=(x+h)^3=(x+h)^2(x+h)$$

$$=(x^2+2xh+h^2)(x+h)$$

$$=x^3+2x^2h+xh^2+x^2h+2xh^2+h^3$$

$$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$$

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-(x^3)$$

$$=3x^2h+3xh^2+h^3$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

e) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f(x+h)=\sqrt{x+h}$$

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\lim_{h \to 0} 1}{\lim_{h \to 0}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{h \to 0}\left(\sqrt{x+h}\right) + \lim_{h \to 0}\left(\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

f) $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$

$$f(x+h) = 5(x+h)^2 - 2(x+h) + 4$$

$$= 5(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h + 4$$

$$= 5x^2 + 10xh + 5h^2 - 2x - 2h + 4$$

$$f(x+h) - f(x) = 5x^2 + 10xh + 5h^2 - 2x - 2h + 4 - (5x^2 - 2x + 4)$$

$$= 5x^2 + 10xh + 5h^2 - 2x - 2h + 4 - 5x^2 + 2x - 4$$

$$= 10xh + 5h^2 - 2h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(10x + 5h - 2)}{h} = 10x + 5h - 2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 10x + 5h - 2$$

$$= 10x - 2$$

1.6) Calcule

a) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+21} - 5}{x-4}$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$a = \sqrt{x+21} \; e \; b = 5$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+21} - 5}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+21} - 5}{x-4} \frac{\sqrt{x+21} + 5}{\sqrt{x+21} + 5}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x + 21 - 5^2}{(x-4)\left(\sqrt{x+21} + 5\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+21} + 5\right)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\left(\sqrt{x+21} + 5\right)} = \frac{\lim_{x \to 4} 1}{\lim_{x \to 4} \left(\sqrt{x+21} + 5\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{4+21} + 5\right)} = \frac{1}{10}$$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

$$x = 1$$

$$1^4 - 1 = 0$$

Isto significa que $x - 1 = 0$ e que $x^4 - 1$ é divisível por $x - 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x^3 + x^2 + x + 1$$
$$= 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^4 + x^3 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ \hline x^3 - 1 & \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 - 1 & \\ -x^2 + x & \\ \hline x - 1 & \\ -x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Gabarito:

1.1a) 7/2. 1.1b) O limite não existe. 1.1c) 10. 1.1d) O limite não existe.
1.2a) 3. 1.2b) $8x - 1$. 1.2c) $\frac{-1}{x^2}$. 1.3) 3. 1.4a) 7. 1.4b) -4. 1.4c) 4. 1.4d) 1. 1.4e) 0.
1.4f) 36. 1.4g) 12. 1.4h) Não existe limite. 1.4i) 7. 1.4j) 30. 1.4k) 37. 1.4l) -8.
1.4m) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 1.4n) $\frac{1}{4}$. 1.4o) $\frac{1}{4}$. 1.5a) $6x$. 1.5b) $\frac{-1}{(x+1)^2}$. 1.5c) 7. 1.5d) $3x^2$. 1.5e) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
1.5f) $10x - 2$. 1.6a) $\frac{1}{10}$. 1.6b) 4.