

FAETERJ-Rio
Cálculo I
Professor DSc. Wagner Zanco

Solução dos Exercícios 1.7 – 1.12

1.7) Calcule o limite de

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)$

$x \rightarrow 1^+$

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$x - 1$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$x + 3$	4,1	4,01	4,001	4,0001
$\frac{x + 3}{x - 1}$	41	401	4001	40001

Quanto mais x se aproxima de 1, mais a expressão $x - 1$ tende a 0, e maior vai ser o resultado da divisão $\frac{x+3}{x-1}$. Em outras palavras:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x + 3}{x - 1} \right) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)$

$x \rightarrow 1^-$

x	0,9	0,99	0,999	0,9999
$x - 1$	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$x + 3$	3,9	3,99	3,999	3,9999
$\frac{x + 3}{x - 1}$	-39	-399	-3999	-39999

Seguindo a mesma lógica do item a , concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x + 3}{x - 1} \right) = -\infty$$

1.8) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad se \ x > 0 \\ 3x + 2, & se \ x < 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$x \rightarrow 0^+$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	10	100	1000	10000

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$x \rightarrow 0^-$

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x)$	2	2	2	2

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 2 = 2$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1000	10000	...
$f(x)$	0,1	0,01	0,001	0,0001	...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1000	-10000	...
$f(x)$	-28	-298	-2998	-29998	...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 2 = -\infty$$

1.9) Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{4x^2 - 5} \right)$

Como f e g têm o mesmo grau, temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{4x^2 - 5} \right) = \frac{3}{4}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 7}{x^2 - 8} \right)$

Como o grau de g é maior que o grau de f , temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 7}{x^2 - 8} \right) = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+2}{\sqrt{x^2 - 3x+1}} \right)$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1.000	10.000	100.000	...
$f(x)$	52	502	5.002	50.002	500.002	...
$g(x)$	8,42	96,44	998,48	9.998,49	99.998,49	...
$f(x)/g(x)$	6,17	5,2	5	5	5	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}} \right) = 5$$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x+2}{\sqrt{x^2 - 3x+1}} \right)$

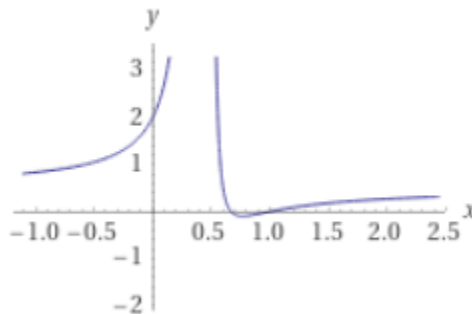
$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1.000	-10.000	-100.000	...
$f(x)$	-48	-498	-4.998	-49.998	-400.998	...
$g(x)$	8,42	96,44	998,48	9.998,49	99.998,49	...
$f(x)/g(x)$	-5,7	-5,1	-5	-5	-5	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}} \right) = -5$$

1.10) Determine as assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função

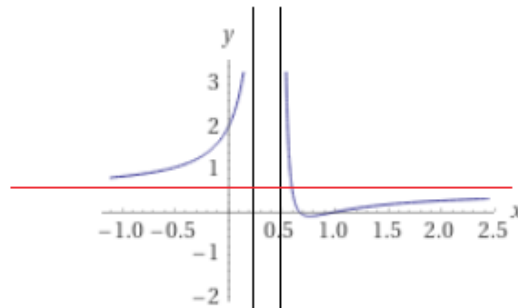
racional $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1}$.



Obs.: As assíntotas verticais são determinadas pelas raízes do denominador e as assíntotas horizontais podem ser encontradas pela Regra B.

As assíntotas verticais são as raízes de $6x^2 - 5x + 1$. $x' = \frac{1}{3}$ e $x'' = \frac{2}{3}$.

Como g tem um grau maior que f , a assíntota horizontal é $\frac{3}{6}$.



1.11) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^{11} - 5x^6 - 3x^2 + 1)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^{11}) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^7 + 23x^3 + 5x^2 + 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^7) = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 12x^2 + x - 7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4) = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 12x^2 + x - 7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^8 + 2x^7 - 3x^3 + x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^8) = -(x^8) = -(-\infty^8) = -\infty$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5) = +\infty$$

1.12) Calcule os seguintes limites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \text{ se } f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ 3x + 5 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7 \cdot 2 - 2 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 + 5 = 11$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x^3}$$

$x \rightarrow 0^+$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
$f(x)$	-0,09	-0,009	-0,0009	-0,00009	...
$g(x)$	0.001	0,000001	0,0000000001	0.0000000000001	...
$f(x)/g(x)$	-9	-9.000	-900.000	-90.000.000	...

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x^3} = -\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+3}{x^2-9} \right)$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+3}{x^2-9} \right)$

$x \rightarrow 3^+$

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	...
$f(x)$	6,1	6,01	6,001	6,0001	...
$g(x)$	0,1	0,01	0,001	0.0001	...
$f(x)/g(x)$	61	601	6001	60001	...

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+3}{x^2-9} \right) = +\infty$$

$x \rightarrow 3^-$

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	...
$f(x)$	5,9	5,99	5,999	5,9999	...
$g(x)$	-0,5	-0,05	-0,005	-0,0005	...
$f(x)/g(x)$	-11,8	-119,8	-1.199,8	-11.999,8	...

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+3}{x^2-9} \right) = -\infty$$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x^2-5x+6}{x-3} \right)$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2-5x+6}{x-3} \right)$

$x \rightarrow 3^+$

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	...
$f(x)$	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
$g(x)$	0,1	0,01	0,001	0.0001	...
$f(x)/g(x)$	1	1	1	1	...

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right) = 1$$

$x \rightarrow 3^-$

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	...
$f(x)$	-0,09	-0,009	-0,0009	-0,00009	...
$g(x)$	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	...
$f(x)/g(x)$	1	1	1	1	...

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right) = 1$$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} \right)$

$x \rightarrow 3^+$

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	...
$f(x)$	1	1	1	1	...
$g(x)$	-0,09	-0,009	-0,0009	-0,00009	...
$f(x)/g(x)$	11,1	111,1	1.111,1	11.111,1	...

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} \right) = +\infty$$

$x \rightarrow 3^-$

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	...
$f(x)$	1	1	1	1	...
$g(x)$	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
$f(x)/g(x)$	10	100	1000	10000	...

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} \right) = +\infty$$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x+5} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3x+5} \right)$

Como o grau de g é maior que o grau de f , temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x+5} \right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3x+5} \right) = 0$$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 5}{3x + 1} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 5}{3x + 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 5}{3x + 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 5}{3x + 1} \right) = -\infty$$

$$1.3. (-1)^{2-1} = 3. (-1) = -3$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 + x - 5}{5x^4 - 1} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + x - 5}{5x^4 - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 + x - 5}{5x^4 - 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + x - 5}{5x^4 - 1} \right) = 0$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}} \right)$$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1.000	10.000	100.000	...
$f(x)$	39	399	3.999	39.999	399.999	...
$g(x)$	10	100	1.000	10.000	100.000	...
$f(x)/g(x)$	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) = 3,9$$

$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1.000	-10.000	-100.000	...
$f(x)$	-41	-401	-4.001	-40.001	-400.001	...

$g(x)$	10	100	1.000	10.000	100.000	...
$f(x)/g(x)$	-4,1	-4,1	-4,1	-4,1	-4,1	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) = -4,1$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 1}{\sqrt{x^4 - 2}} \right) e \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 - 1}{\sqrt{x^4 - 2}} \right)$$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1.000	...
$f(x)$	2.999	2.999.999	2.999.999.999	...
$g(x)$	99,9	9.999,9	9.999.999,9	...
$f(x)/g(x)$	30	300	3000	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 1}{\sqrt{x^4 - 2}} \right) = +\infty$$

$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1.000	...
$f(x)$	-3001	-3.000.001	-3.000.000.001	...
$g(x)$	99,9	9.999,9	9.999.999,9	...
$f(x)/g(x)$	-30	-300	-3000	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 - 1}{\sqrt{x^4 - 2}} \right) = -\infty$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x - 4}{\sqrt{x^3 + 5}} \right) e \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x - 4}{\sqrt{x^3 + 5}} \right)$$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1.000	10.000	...
$f(x)$	66	696	6.996	69.996	...
$g(x)$	31,7	1000	31.622,7	1.000.000	...
$f(x)/g(x)$	2	0,69	0,22	0,069	...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x - 4}{\sqrt{x^3 + 5}} \right) = 0$$

$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1.000	...
$f(x)$	-74	-704	-7004	...
$g(x)$	\nexists	\nexists	\nexists	...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x - 4}{\sqrt{x^3 + 5}} \right) = \nexists$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x^2 - 2} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x^2 - 2} \right)$$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1.000	10.000	...
$f(x)$	66	696	6.996	69.996	...
$g(x)$	31,7	1000	31.622,7	1.000.000	...
$f(x)/g(x)$	2	0,69	0,22	0,069	...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x^2 - 2} \right) = 0$$

$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1.000	-10.000	...
$f(x)$	10,2	100	1000	10.000	...
$g(x)$	298	29.998	2.999.998	299.999.998	...
$f(x)/g(x)$	0,03	0,003	0,0003	0,00003	...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x^2 - 2} \right) = 0$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 4}} \right) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 4}} \right)$$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1.000	10.000	...
$f(x)$	25	205	2.005	20.005	...
$g(x)$	10	100	1.000	10.000	...
$f(x)/g(x)$	0,25	2	2	2	...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 4}} \right) = 2$$

$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1.000	-10.000	...
$f(x)$	-15	-195	-1.995	-19.995	...
$g(x)$	-10	-100	-1.000	-10.000	...
$f(x)/g(x)$	1,5	1,95	2	2	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 4}} \right) = 2$$

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-3}{\sqrt[3]{x^2+1}} \right) e \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x-3}{\sqrt[3]{x^2+1}} \right)$

$x \rightarrow +\infty$

x	10	100	1.000	10.000	...
$f(x)$	37	397	3.997	49.997	...
$g(x)$	4,64	21,54	100	464,1	...
$f(x)/g(x)$	7,9	18,43	39,97	107,7	...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x - 3}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \right) = +\infty$$

$x \rightarrow -\infty$

x	-10	-100	-1.000	-10.000	...
$f(x)$	-43	-403	-4.003	-40.003	...
$g(x)$	4,64	21,54	100	464,1	...
$f(x)/g(x)$	-9,2	-18,7	-40	-86,1	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x - 3}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \right) = -\infty$$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5}{3 + 5x - 2x^2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5}{3 + 5x - 2x^2} \right) = -\frac{1}{2}$$

r) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3} \right)$

$x \rightarrow 3^+$

X	3,1	3,01	3,001	3,0001	...
$f(x)$	0,78	0,24	0,077	0,024	...
$g(x)$	0.1	0,01	0,001	0,0001	...
$f(x)/g(x)$	7,8	40	77	240	...

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3} \right) = +\infty$$

s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4 - 7x^3 + 4}{x^2 - 3} \right)$

$$1.1(-1)^{4-2} = 1.1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4 - 7x^3 + 4}{x^2 - 3} \right) = +\infty$$

Gabarito:

1.7a)+ ∞ . 1.7b)- ∞ . 1.8a)+ ∞ . 1.8b) 2. 1.8c) 0. 1.8d) - ∞ . 1.9 a) $\frac{3}{4}$. 1.9b) 0. 1.9c) 5. 1.9d) -5. 1.10) Assíntotas verticais $\rightarrow \frac{1}{2}e\frac{1}{3}$; Assíntota horizontal $\rightarrow \frac{1}{2}$. 1.11a)+ ∞ . 1.11b)+ ∞ . 1.11c)+ ∞ . 1.11d) - ∞ . 1.11e)- ∞ . 1.11f) + ∞ . 1.12a)12 e 11. 1.12b) 1 e -1. 1.12c)- ∞ . 1.12d)+ ∞ e - ∞ . 1.12e)1 e 1. 1.12f)+ ∞ e + ∞ . 1.12g) 0 e 0. 1.12h) $\frac{3}{5}e\frac{3}{5}$. 1.12i)0 e 0. 1.12j) 0. 1.12k) 3,9 e -4,1. 1.12l)+ ∞ e - ∞ . 1.12j) 0 e 0. 1.12k) 4 e 4. 1.12l)+ ∞ e - ∞ . 1.12m) 0 e (não existe). 1.12n) 0 e 0. 1.12o) 2 e 2. 1.12p) + ∞ e - ∞ . 1.12q) $\frac{-1}{2}$. 1.12r) + ∞ . 1.12s) + ∞ .