

**5. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES
EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS**

5.1. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equações que envolvem termos em que a incógnita aparece no expoente são chamadas de *equações exponenciais*. Por exemplo,

$$2^x = \frac{1}{16}; \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25; 4^x - 2^x - 2 = 0$$

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de equações com a respectiva solução. Na maioria dos casos a aplicação das propriedades de potências reduz as equações a uma igualdade de potências da mesma base

$$a^x = a^\alpha$$

o que, usando o fato que a função exponencial é injetora, nos permite concluir

$$a^x = a^\alpha \Rightarrow x = \alpha, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

e portanto, resolver a equação.

Exemplos

1) Resolver as seguintes equações exponenciais

a) $2^x = 16$

Solução:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

$$\therefore S = \{4\}.$$

b) $(100)^x = 0,001$

Solução:

$$(100)^x = 0,001 \Rightarrow (10)^{2x} = (10)^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$$

c) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480$

Solução:

$$5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480 \Rightarrow 5^{4x} \left(5^{-1} - 1 - 5 + 5^2 \right) = 480 \Rightarrow 5^{4x} \left(\frac{96}{5} \right) = 480 \Rightarrow$$

$$5^{4x} = 25 \Rightarrow 5^{4x} = 5^2 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

d) $9^x + 3^{x+1} = 4$

Solução:

$$9^x + 3^{x+1} = 4 \Rightarrow 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$$

Fazendo $y = 3^x$, temos:

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -4$$

Observemos que $y = -4$ não satisfaz porque $y = 3^x > 0$.

De $y = 1$, temos:

$$3^x = 1 = 3^0 \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore S = \{0\}.$$

e) $5 \cdot (2)^x = 4^x$.

Solução:

$$5 \cdot (2)^x = 4^x \Rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^x = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5$$

$$\therefore S = \{\log_2 5\}$$

2) Resolver em \mathbb{R}_+ as equações:

a) $x^{x^2-2} = 1$

Solução:

Inicialmente vamos verificar se 0 ou 1 são soluções da equação. Como não se define 0^{-2} , $x = 0$ não é solução da equação.

Fazendo $x = 1$ na equação obtemos $1^{-1} = 1$ o que é uma identidade e portanto, $x = 1$ é solução. Supondo $x > 0$ e $x \neq 1$, podemos usar a injetividade da função exponencial

$$x^{x^2-2} = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore S = \{1, \sqrt{2}\}.$$

b) $x^{4-2x} = x$

Solução:

Examinemos inicialmente se 0 ou 1 são soluções da equação

$$0^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é solução}$$

$$1^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ é solução}$$

Supondo $x > 0$ e $x \neq 1$ temos

$$x^{4-2x} = x \Rightarrow 4 - 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore S = \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$$

5.2. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

As equações envolvendo logaritmos são chamadas de *equações logarítmicas* e são resolvidas aplicando-se propriedades dos logaritmos e o fato da função logarítmica ser injetora. Assim, procuramos escrever todos os logaritmos envolvidos numa mesma base e usamos a condição

$$\log_a x = \log_a \alpha \Rightarrow x = \alpha$$

Além disto, devemos inicialmente analisar as condições de existência dos logaritmos, levando-se em conta os domínios de definição do logaritmo e da base.

Exemplos

Resolva as seguintes equações:

1) $\log_3(x+2) = 1 + \log_{1/3} x$

Solução:

Condições de existência:

$$x+2 > 0 \text{ e } x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (I)$$

Temos

$$\log_3(x+2) = 1 + \log_{1/3} x \Rightarrow \log_3(x+2) = \log_3 3 - \log_3 x \Rightarrow \log_3(x+2) = \log_3\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow$$

$$x+2 = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1 \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é:

$$S = \{ 1 \}$$

$$2) \log_3 x + \frac{1}{\log_{3x} 9} = 2$$

Solução:

Condições de existência:

$$x > 0 \text{ e } 3x \neq 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{3} \quad (\text{I})$$

Temos

$$\log_3 x + \frac{1}{\log_{3x} 9} = 2 \Rightarrow \log_3 x + \log_9 3x = 2 \Rightarrow \log_3 x + \frac{\log_3 3x}{\log_3 9} = \log_3 3^2 \Rightarrow$$

$$\log_3 x + \frac{\log_3 3x}{2} = \log_3 9 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 \sqrt{3x} = \log_3 9 \Rightarrow \log_3(x\sqrt{3x}) = \log_3 9 \Rightarrow$$

$$x\sqrt{3x} = 9 \Rightarrow (x\sqrt{3x})^2 = 9^2 \Rightarrow 3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é $S = \{ 3 \}$.

$$3) x^{\log_2 x} = 4x$$

Solução:

$$\text{Condição de existência: } x > 0 \quad (\text{I})$$

$$x^{\log_2 x} = 4x \Rightarrow \log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2(4x) \Rightarrow (\log_2 x)(\log_2 x) = \log_2 4 + \log_2 x \Rightarrow$$

Fazendo $\log_2 x = y$, obtemos:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -1 \Rightarrow \log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = -1 \Rightarrow$$

$$x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é: $S = \{ \frac{1}{2}, 4 \}$.

$$4) (x)^{\log_x(x+3)} = 7$$

Solução:

Condições de existência:

$$x > 0, x \neq 1 \text{ e } x > -3 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x \neq 1 \quad (I)$$

Temos

$$(x)^{\log_x(x+3)} = 7 \Rightarrow x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4 \quad (II)$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é: $S = \{ 4 \}$.

$$5) \log_2(9^{x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-2} + 1)$$

Solução:

Condições de existência: como $9^{x-2} + 7 > 0$ e $3^{x-2} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, concluímos que a equação está definida para todo número real x .

Vejamos:

$$\log_2(9^{x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-2} + 1) \Rightarrow \log_2(9^{x-2} + 7) = \log_2 4 + \log_2(3^{x-2} + 1) \Rightarrow$$

$$\log_2(9^{x-2} + 7) = \log_2(4(3^{x-2} + 1)) \Rightarrow 9^{x-2} + 7 = 4 \cdot 3^{x-2} + 4 \Rightarrow$$

$$3^{2x} \cdot 3^{-4} + 7 = 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} + 4.$$

Fazendo $3^x = y$ obtemos a equação $y^2 - 36y + 243 = 0$, que tem como solução $y = 9$ ou $y = 27$.

Portanto,

$$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$$

$$3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$

Assim, a solução da equação é: $S = \{ 2, 3 \}$.

5.3. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Inequações que envolvem termos em que a incógnita aparece no expoente são *inequações exponenciais*. Por exemplos

$$5^x > 20; \quad 3^{-x} < \frac{1}{81}; \quad 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0.$$

Assim como no caso das equações exponenciais, em geral, as inequações podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base, através da aplicação das propriedades de potências. Usamos então a Proposição 4.2:

- i) Se $a > 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 < x_2$
- ii) Se $0 < a < 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 > x_2$

Em outros casos a inequação é resolvida com a aplicação dos logaritmos.

Exemplos

1) Resolver as seguintes inequações exponenciais:

$$a) \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$$

Solução:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

Como a base é menor que 1, temos que $x < 4$.

$$\therefore S =]-\infty, 4[$$

$$b) 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$$

Solução:

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$$

Fazendo, $2^x = y$, temos

$$y^2 - 6y + 8 < 0 \Rightarrow 2 < y < 4 \Rightarrow 2 < 2^x < 2^2$$

Como a base é maior que 1, então $1 < x < 2$

$$\therefore S =]1, 2[$$

$$c) 3^x < 5$$

Solução:

Aplicando logaritmo na base 3 nos dois lados da desigualdade e conservando o sinal da desigualdade uma vez que a base do logaritmo é maior que 1 temos

$$3^x < 5 \Rightarrow \log_3(3^x) < \log_3 5 \Rightarrow x < \log_3 5$$

$$\therefore S =]-\infty, \log_3 5[$$

2) Resolver em \mathbb{R}_+ a inequação $x^{4x-3} < 1$

Solução:

Devemos considerar três casos:

i) Vamos verificar se 0 ou 1 são soluções da inequação.

Como 0^{-3} não está definido, $x = 0$ não é solução da inequação.

Se $x = 1$, temos $1^x < 1$ o que não se verifica, logo $x = 1$ não é solução. A solução neste caso é $S_1 = \emptyset$.

ii) $x > 1$ (I)

$$x^{4x-3} < 1 \Rightarrow x^{4x-3} < x^0 \Rightarrow 4x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{4} \quad \text{(II)}$$

A solução neste caso deve satisfazer simultaneamente (I) e (II), portanto a solução $S_2 = \emptyset$.

iii) $0 < x < 1$ (III)

$$x^{4x-3} < 1 \Rightarrow x^{4x-3} < x^0 \Rightarrow 4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4} \quad \text{(IV)}$$

A solução neste caso deve satisfazer simultaneamente (III) e (IV), portanto $S_3 =]\frac{3}{4}, 1[$.

A solução da inequação é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]\frac{3}{4}, 1[$.

5.4. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para resolvermos inequações envolvendo logaritmos, procuramos colocar os logaritmos numa mesma base, usando as propriedades, analisamos as condições de existência e usamos as implicações

i) Para $a > 1$, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$

ii) Para $0 < a < 1$, $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$

Exemplos

Resolva as seguintes inequações logarítmicas:

$$1) \log_{1/2}(x^2 - x - 3/4) > 2 - \log_2 5$$

Solução:

Condição de existência:

$$x^2 - x - 3/4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1/2[\cup]3/2, +\infty[\quad (I)$$

Temos,

$$\begin{aligned} \log_{1/2}(x^2 - x - 3/4) > 2 - \log_2 5 &\Rightarrow -\log_2(x^2 - x - 3/4) > \log_2 4 - \log_2 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2(x^2 - x - 3/4) < \log_2(5/4) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 3/4 < 5/4 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow x \in]-1, 2[\quad (II)$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S =]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, 2[.$$

$$2) \log_5(x-2) + \frac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$$

Solução:

Condições de existência:

$$x-2 > 0 \text{ e } x-3 > 0 \text{ e } x-3 \neq 1 \Leftrightarrow x > 3 \text{ e } x \neq 4 \quad (I)$$

Consideremos

$$\begin{aligned}\log_5(x-2) + \frac{1}{\log_{(x-3)}5} &> \log_5 2 \Rightarrow \log_5(x-2) + \log_5(x-3) > \log_5 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_5(x-2)(x-3) &> \log_5 2 \Rightarrow (x-2)(x-3) > 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &\in]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[\quad (II)\end{aligned}$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S =]4, +\infty[.$$

$$3) |2 + \log_2 x| \geq 3$$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \quad (I)$$

Vejamos:

$$\begin{aligned}|2 + \log_2 x| \geq 3 &\Rightarrow 2 + \log_2 x \geq 3 \text{ ou } 2 + \log_2 x \leq -3 \Rightarrow \log_2 x \geq 1 \text{ ou } \log_2 x \leq -5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 2 \text{ ou } \log_2 x \leq \log_2 2^{-5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \geq 2 \text{ ou } x \leq 2^{-5} \quad (II)\end{aligned}$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S =]0, 2^{-5}[\cup [2, +\infty[.$$

$$4) x^{(\log_3 x)} \leq 9x$$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \quad (I)$$

Temos

$$x^{(\log_3 x)} \leq 9x \Rightarrow \log_3 \left(x^{(\log_3 x)} \right) \leq \log_3 (9x) \Rightarrow (\log_3 x)(\log_3 x) \leq \log_3 9 + \log_3 x \Rightarrow$$

Fazendo $\log_3 x = y$, obtemos

$$y^2 - y - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 2 \Rightarrow \log_3 3^{-1} \leq \log_3 x \leq \log_3 9 \Rightarrow 3^{-1} \leq x \leq 9 \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S = \left[\frac{1}{3}, 9 \right].$$

5) $x^{\log x + 1} > 100x$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \quad (\text{I})$$

Assim

$$x^{\log x + 1} > 100x \Rightarrow x^{\log x} \cdot x > 100x \Rightarrow x^{\log x} > 100 \Rightarrow \log(x^{\log x}) > \log 100 \Rightarrow$$

$$(\log x)^2 > 2 \Rightarrow \log x > \sqrt{2} \text{ ou } \log x < -\sqrt{2} \Rightarrow x > 10^{\sqrt{2}} \text{ ou } x < 10^{-\sqrt{2}} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é:

$$S =]0, 10^{-\sqrt{2}}[\cup]10^{\sqrt{2}}, +\infty[.$$

4) $\log_2(x-1) \leq \log_{(x-1)} 2$

Solução:

Condições de existência:

$$x-1 > 0 \text{ e } x-1 \neq 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ e } x \neq 2 \quad (\text{I})$$

Assim,

$$\log_2(x-1) \leq \log_{(x-1)} 2 \Rightarrow \log_2(x-1) \leq \frac{1}{\log_2(x-1)}$$

Fazendo $\log_2(x-1) = y$, obtemos

$$y \leq \frac{1}{y} \Rightarrow y - \frac{1}{y} \leq 0 \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{y} \leq 0 \Rightarrow y \leq -1 \text{ ou } 0 < y \leq 1 \Rightarrow$$

$$\log_2(x-1) \leq -1 \text{ ou } 0 < \log_2(x-1) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\log_2(x-1) \leq \log_2 2^{-1} \text{ ou } \log_2 1 < \log_2(x-1) \leq \log_2 2 \Rightarrow$$

$$x-1 \leq \frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x-1 \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x \leq 3 \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é:

$$S =]1, \frac{3}{2}] \cup]2, 3]$$

5.5. EXERCÍCIOS

5.1. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{x^2-x-16} = 16$

b) $2^{3x+2} \div 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

c) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} = 2$

d) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$

e) $3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4 \cdot 3^{1-3x}$

f) $x^{x^2-2} = 1$ (em \mathbb{R}_+)

g) $x^{4-2x} = x$ (em \mathbb{R}_+)

h) $4^x + 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x$

(Sugestão: Multiplique por $\frac{1}{14^x}$)

5.2. Resolva os seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 4^x = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}_+$$

5.3. Resolva as seguintes inequações:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2^{5x-1} > 8 & \text{b) } 4^{x^2+1} \leq 32^{1-x} \\ \text{c) } \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3} & \text{d) } (0,3)^{x-5} \leq (0,09)^{2x+3} \leq (0,3)^{x+6} \\ \text{e) } 4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 & \text{f) } x^{3x^2-7x+2} \leq 1 \quad (\text{Em } \mathbb{R}_+^*) \\ \text{g) } a^{x^2} < a^9 \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1) & \text{h) } |x|^{3x^2-4x-4} > 1 \end{array}$$

5.4. Resolva as seguintes equações:

$$\text{a) } \log_{2x} x = -2 \quad \text{b) } \log_{x-3} 4x = 2 \quad \text{c) } \log_{27} \log_2 \log_2 (x-1) = \frac{1}{3}$$

5.5. Resolva as seguintes equações:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log_9 (x-1) = \log_3 (\sqrt{10x-4}) - \log_3 (x+2) & \text{b) } x^{\log x} = \frac{x^4}{1000} \\ \text{c) } (\log x)^{\log x} = x^2 & \text{d) } \log_a ax \cdot \log_x ax = 4, \quad a > 0, a \neq 1 \\ \text{e) } 5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} & \text{f) } 2^{3x+2} \cdot 3^{2x-1} = 8 \end{array}$$

5.6. Resolva os seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} xy = 16 \\ \log_2 x = 2 + \log_2 y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \log \sqrt{x} - \log \sqrt{y} = \log 3 \\ 9y^3 - x^2 = 90y \end{cases}$$

5.7. Resolva as seguintes inequações:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log_3 (x^2 - 4x) < \log_{\sqrt{3}} (3\sqrt{5}) & \text{b) } \log_{1/3} (x^2 - 13) \geq -1 \\ \text{c) } \log(x+2) + \log(x+3) > \log 12 & \text{d) } \log_{(x^2-8)} 11 < \log_{(x^2-8)} 21 \\ \text{e) } \log_2 (x-1) \leq 3 + 10 \cdot \log_{(x-1)} 2 & \text{f) } x^{\log_3 x} > x^2 \end{array}$$