FAETERJ-Rio

Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Espaços Vetoriais I

Professor Cláudio Bispo

Espaços Vetoriais I

- Espaço $\mathbb{R}^n$
- Espaços Vetoriais
- Subespaços Vetoriais

Professor Cláudio Bispo

Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição

O espaço $\mathbb{R}^n$ é o conjunto das **n-uplas** ordenadas de números reais.

Exemplos:

- ✓ $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$
- ✓ $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 7\right) \in \mathbb{R}^4$
- ✓ $(1,2) \neq (2,1) \in \mathbb{R}^2$
- ✓ $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Operações em $\mathbb{R}^n$

Adição

Sejam $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v, v_3, \dots, v_n)$, elementos do $\mathbb{R}^n$, temos:

$$\boldsymbol{u + v = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)}$$

$$\boldsymbol{u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)}$$

Exemplos:

✓ $u = (2, 3)$ e $v = (-1, 4)$, temos $u + v = (2, 3) + (-1, 4) = (2 + (-1), 3 + 4) = (1, 7)$.

✓ $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$ e $v = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right)$, temos $u + v = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{7}{6}, 1, \frac{19}{35}\right)$.

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Operações em $\mathbb{R}^n$

Propriedades da Adição em $\mathbb{R}^n$: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$.

- Comutatividade: $u + v = v + u$.
- Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- Elemento neutro: $\exists\, 0$ tal que $u + 0 = 0 + u = u$.
- Inverso aditivo: dado u, $\exists\, -u$ tal que $u + (-u) = 0$.

Operações em $\mathbb{R}^n$

Multiplicação por Escalar

Consideremos $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{\alpha u = \alpha(u_1, u_2, \dots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)}$$

Exemplos:

✓ $u = (2,3)$ e $\alpha = 5$, temos $\alpha u = 5 \cdot (2,3) = (5 \cdot 2, 5 \cdot 3) = (10, 15)$.

✓ $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$ e $\alpha = -10$, temos $\alpha u = -10 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right) = \left(-10 \cdot \frac{1}{2}, -10 \cdot \frac{3}{4}, -10 \cdot \frac{2}{5}\right) = \left(-5, \frac{-15}{2}, -4\right)$.

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Operações em $\mathbb{R}^n$

Propriedades da Multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^n$: Sejam $u \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (⍰⍰) u = ⍰(⍰u).
- Elemento neutro: $1u = u$, ⍰u.

Operações em $\mathbb{R}^n$

Propriedades Distributivas da Multiplicação de $\mathbb{R}^n$: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha\, v$

- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta\, u$

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaço Vetorial

Definição:

Conjunto (de vetores) no qual estão definidos uma soma vetorial e uma multiplicação por escalar.

Escalar é um elemento de um conjunto de números no qual estão bem definidas as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão. Em nosso caso, como já foi dito, o escalar sempre será um número real.

Espaço Vetorial

Exemplos:

- $\mathbb{R}^n$

- Polinômios de grau menor ou igual a n: $\sum_{i=0}^{n}(a_i x^i) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

✓ Adição de polinômios: $[\sum_{i=0}^{n}(a_i x^i)] + [\sum_{i=0}^{n}(b_i x^i)] = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$.

✓ Multiplicação de um polinômio por um escalar: $\alpha[\sum_{i=0}^{n}(a_i x^i)] = \sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i)x^i$.

✓ Observação: $0(x) = \sum_{i=0}^{n} 0x^i$.

SUBESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço Vetorial

Definição:
O subconjunto de um espaço vetorial que também é espaço vetorial.
H ⍰ V é subespaço vetorial se:

- 0 ⍰ H;
- H é fechado para a soma vetorial;
- H é fechado para a multiplicação por escalar.

Subespaço Vetorial

Exemplos:

- $V \subset V$ é subespaço vetorial de V.
- $\{0\} \subset V$ é subespaço vetorial de V.

Os subespaços vetoriais acima são denominados subespaços vetoriais triviais.

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 3: Seja u ? V.

Seja H = {v ? V ? v = ?u, ? ? IR}.

0 ? H.

$$v_1 = \alpha_1 u, v_2 = \alpha_2 u \Rightarrow \quad v_1 + v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)u \in H.$$

$$v = \alpha u, \beta \in IR \Rightarrow \beta v = (\beta\alpha)u \in H.$$

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 3: Seja u $\in$ V.

Seja H = $\{v \in V \mid v = \alpha u,\ \alpha \in IR\}$.

0 $\in$ H.

$$v_1 = \alpha_1 u,\ v_2 = \alpha_2 u \Rightarrow \quad v_1 + v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)u \ \in\ H.$$

$$v = \alpha u,\ \beta \in IR \ \Rightarrow\ \beta v = (\beta\alpha)u \ \in\ H.$$

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 3: Seja u ∈ V.

Seja H = {v ∈ V | v = αu, α ∈ IR}.

0 ∈ H.

$$v_1 = \alpha_1 u, v_2 = \alpha_2 u \Rightarrow \quad v_1 + v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)u \ \in \ H.$$

$$v = \alpha u, \beta \in IR \ \Rightarrow \ \beta v = (\beta\alpha)u \ \in \ H.$$

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 3: Seja u V.

Seja H = {v V v = u,   IR}.

0 H.

$$v_1 = \alpha_1 u, v_2 = \alpha_2 u \Rightarrow \quad v_1 + v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)u \in H.$$

$$v = \alpha u, \beta \in IR \Rightarrow \beta v = (\beta\alpha)u \in H.$$

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 4: H = {(x, y, 0); x, y ∈ IR} ⊂ IR³.

0 ∈ H.

Sejam

$$\left(x_1, y_1, 0\right), \left(x_2, y_2, 0\right) \in \mathrm{H}.$$

Então

$$\left(x_1, y_1, 0\right) + \left(x_2, y_2, 0\right) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0\right) \in \mathrm{H}.$$

Sejam

$$\left(x, y, 0\right) \in \mathrm{H} \ \text{ e } \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\alpha\left(x, y, 0\right) = \left(\alpha x, \alpha y, 0\right) \in \mathrm{H}.$$

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 4: $H = \{(x, y, 0); x, y \in IR\} \subset IR^3$.

✓ $0 \in H$.

Sejam
$$(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0) \in \text{H}.$$
Então
$$(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in \text{H}.$$

Sejam
$$(x, y, 0) \in \text{H} \ \text{ e } \alpha \in \text{IR}.$$
Então
$$\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0) \in \text{H}.$$

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 4: H = {(x, y, 0); x, y ∈ IR} ⊂ IR³.

✓ 0 ∈ H.

✓ Sejam

$$(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0) \in \text{H}.$$

Então

$$(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in \text{H}.$$

Sejam

$$(x, y, 0) \in \text{H} \text{ e } \alpha \in \text{IR}.$$

Então

$$\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0) \in \text{H}.$$

Subespaço Vetorial - exemplos

Ex. 4: H = {(x, y, 0); x, y ∈ IR} ⊂ IR^3.

- ✓ 0 ∈ H.
- ✓ Sejam

$$\left(x_1, y_1, 0\right), \left(x_2, y_2, 0\right) \in \mathrm{H}.$$

Então

$$\left(x_1, y_1, 0\right) + \left(x_2, y_2, 0\right) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0\right) \in \mathrm{H}.$$

- ✓ Sejam

$$\left(x, y, 0\right) \in \mathrm{H} \text{ e } \alpha \in \mathrm{IR}.$$

Então

$$\alpha\left(x, y, 0\right) = \left(\alpha x, \alpha y, 0\right) \in \mathrm{H}.$$

Subespaço Vetorial – contraexemplo

Ex. 5: H = {(*x*, *y*, 1), *x*, *y* ∈ IR} ⊂ IR³.

(0,0,0) ∉ H.

Sejam

$$\left(x_1, y_1, 1\right), \left(x_2, y_2, 1\right) \in \mathrm{H}.$$

Então

$$\left(x_1, y_1, 1\right) + \left(x_2, y_2, 1\right) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2\right) \notin \mathrm{H}.$$

Sejam

$$\left(x, y, 1\right) \in \mathrm{H} \text{ e } \alpha \in \mathrm{IR}.$$

Então

$$\alpha\left(x, y, 1\right) = \left(\alpha x, \alpha y, \alpha\right) \notin \mathrm{H}, \text{ se } \alpha \neq 1.$$

Subespaço Vetorial – contraexemplo

Ex. 5: H = {(*x*, *y*, 1), *x*, *y* ∈ IR} ⊂ IR^3.

☹ (0,0,0) ∉ H.

Sejam

Então

$$(x_1, y_1, 1), (x_2, y_2, 1) \in \text{H}.$$

$$(x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin \text{H}.$$

Sejam

Então

$$(x, y, 1) \in \text{H} \text{ e } \alpha \in \text{IR}.$$

$$\alpha(x, y, 1) = (\alpha x, \alpha y, \alpha) \notin \text{H, se } \alpha \neq 1.$$

Subespaço Vetorial – contraexemplo

Ex. 5: H = {(x, y, 1), x, y ∈ IR} ⊂ IR³.

☹ (0,0,0) ∉ H.

☹ Sejam

$$\left(x_1, y_1, 1\right), \left(x_2, y_2, 1\right) \in \text{H}.$$

Então

$$\left(x_1, y_1, 1\right) + \left(x_2, y_2, 1\right) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2\right) \notin \text{H}.$$

Sejam

Então

$$\left(x, y, 1\right) \in \text{H} \text{ e } \alpha \in \text{IR}.$$

$$\alpha\left(x, y, 1\right) = \left(\alpha x, \alpha y, \alpha\right) \notin \text{H, se } \alpha \neq 1.$$

Subespaço Vetorial – contraexemplo

Ex. 5: $H = \{(x, y, 1), x, y \in \mathrm{IR}\} \subset \mathrm{IR}^3$.

- $(0,0,0) \notin$ H.
- Sejam

$$(x_1, y_1, 1), (x_2, y_2, 1) \in \mathrm{H}.$$

Então

$$(x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin \mathrm{H}.$$

- Sejam

$$(x, y, 1) \in \mathrm{H} \text{ e } \alpha \in \mathrm{IR}.$$

Então

$$\alpha(x, y, 1) = (\alpha x, \alpha y, \alpha) \notin \mathrm{H}, \text{ se } \alpha \neq 1.$$