FAETERJ-Rio

Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Matrizes

Professor Cláudio Bispo

FAEJERJ-Rio

Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Matrizes

Adição

Multiplicação por escalar

Multiplicação de matrizes

Inversa de uma matriz

Professor Cláudio Bispo

Adição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\,x\,n}(\mathbb{R})$, a matriz soma de A e B é a matriz $C = (c_{ij}) \in M_{m\,x\,n}(\mathbb{R})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i \in \{1,...,m\}$ e para todo j $\in \{1,...,n\}$.

Representamos a matriz soma de A e B por $A + B$. Em palavras, cada elemento de A + B é a soma dos elementos correspondentes das matrizes A e B. A diferença de A e B, indicada por $A - B$, é a soma de A com a oposta de B, ou seja, $A - B = A + (-B)$.

Multiplicação por Escalar

Dadas a matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\,x\,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, a matriz produto de A por λ é a matriz $C = (c_{ij}) \in M_{m\,x\,n}(\mathbb{R})$ tal que $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Representamos a matriz produto de A por λ por λA.

Multiplicação de Matrizes

Situação Problema

Uma empresa, que possui duas confeitarias, chamadas A e B, fabrica três tipos de bolo: 1, 2 e 3, os quais são feitos de farinha, açúcar, leite, manteiga e ovos. Em cada semana, as vendas dessas duas confeitarias são estimadas conforme a matriz de **M** de venda semanal abaixo:

Confeitaria	Bolo tipo 1	Bolo tipo 2	Bolo tipo 3
A	50 unidades	30 unidades	25 unidades
B	20 unidades	20 unidades	40 unidades

Multiplicação de Matrizes

Para a fabricação desses bolos, o material é usado de acordo com a matriz **N** seguinte:

Bolo	farinha	açúcar	leite	manteiga	ovos
tipo 1	500 g	200 g	500 ml	150 g	4
tipo 2	400 g	100 g	300 ml	250 g	5
tipo 3	450 g	150 g	600 ml	0	6

A direção da empresa, a fim de atender à demanda, quer saber a quantidade de cada uma das cinco matérias primas que deve alocar às suas duas confeitarias. A resposta é uma matriz **P**, tipo 2×5, onde as linhas representam as duas confeitarias e as colunas correspondem aos cinco materiais usados.

Multiplicação de Matrizes

Confeitaria	farinha	açúcar	leite	manteiga	ovos
A	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
B	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}

Assim, c_{ij} é quanto a i-ésima confeitaria deve estocar do j-ésimo material a fim de executar as vendas previstas.

Se escrevermos $\boldsymbol{m} = (a_{ij});\ 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3$ e $\boldsymbol{n} = (b_{ij});\ 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5$, podemos verificar que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}\ (1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 5)$$

Multiplicação de Matrizes

Assim, por exemplo, o número de ovos necessários para a confeitaria A é:

Se escrevermos $\boldsymbol{m} = (a_{ij});\ 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3$ e $\boldsymbol{n} = (b_{ij});\ 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5$, veremos facilmente que

$$c_{15} = a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35}$$

$$c_{15} = 50 \text{ x } 4 + 30 \text{ x } 5 + 25 \text{ x } 6 = 500$$

Isto sugere a seguinte definição geral.

Multiplicação de Matrizes

Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$. A matriz produto de A por B é a matriz $AB = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Multiplicação de Matrizes

Exemplo 1

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Como **A** é do tipo 2×3 e **B** é do tipo 3×4, existe a matriz **AB** e é do tipo 2×4:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}_{\boxed{2} \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times \boxed{4}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}_{\boxed{2} \times \boxed{4}}$$

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Multiplicação de Matrizes

Exemplo 1

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 6 = 2 + 1 + 18 = 21$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 5 = 4 + 3 + 15 = 22$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (1) + 3 \cdot 7 = 6 - 1 + 21 = 26$$
$$c_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (5) + 3 \cdot 8 = 8 - 5 + 24 = 27$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 1 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) + (-5) \cdot 6 = 1 - 7 - 30 = -36$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) + (-5) \cdot 5 = 2 - 21 - 25 = -44$$
$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 1 \cdot 3 + 7 \cdot (1) + (-5) \cdot 7 = 3 + 7 - 35 = -25$$
$$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} = 1 \cdot 4 + 7 \cdot (5) + (-5) \cdot 8 = 4 + 35 - 40 = -1$$

Multiplicação de Matrizes

Exemplo 1

Construindo a matriz AB temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 21 & 22 & 26 & 27 \\ -36 & -44 & -25 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que neste caso não existe a matriz BA.

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Multiplicação de Matrizes

Exemplo 2

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 4\cdot 5 & 2\cdot 2 + 4\cdot 6 \\ 3\cdot 3 + (-1)\cdot 5 & 3\cdot 2 + (-1)\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 28 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 3 & 3\cdot 4 + 2\cdot(-1) \\ 5\cdot 2 + 6\cdot 3 & 5\cdot 4 + 6\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}$$

Note que o produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem n existe e também é uma matriz quadrada de ordem n. Deste modo a multiplicação pode ser efetuada nos dois casos, ou seja, nas duas ordens possíveis. Podemos observar que as matrizes AB e BA são diferentes, sendo assim **não** podemos afirmar que a multiplicação entre duas matrizes é comutativa.

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Multiplicação de Matrizes

Exemplo 3

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 6 & 1\cdot 4 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 6 & 3\cdot 4 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 27 & 40 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot 3 & 1\cdot 2 + 4\cdot 4 \\ 6\cdot 1 + 7\cdot 3 & 6\cdot 2 + 7\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 27 & 40 \end{bmatrix}$$

Neste caso $AB = BA$. Quando isto acontece dizemos que A e B **comutam**.

Multiplicação de Matrizes

Exemplo 4

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -19 \\ 26 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -19 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-19) + 1 \cdot 26 \\ (-4) \cdot 4 + 6 \cdot (-19) + 5 \cdot 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que, diferentemente do que ocorre com os números reais, quando multiplicamos matrizes, o produto pode ser a matriz nula, sem que qualquer um dos fatores envolvidos seja nulo.

Multiplicação de Matrizes

Exemplo 5

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot(-2)+2\cdot(3/2) & 1\cdot 1+2\cdot(-1/2) \\ 3\cdot(-2)+4\cdot(3/2) & 3\cdot 1+4\cdot(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Quando isso ocorre, isto é, quando o produto de duas matrizes A e B quadradas, é a identidade (de mesma ordem das matrizes fatores), dizemos que A é invertível e que B é a sua inversa. Uma matriz invertível sempre comuta com a sua inversa.

Multiplicação de Matrizes - Propriedades

A multiplicação de matrizes possui as seguintes propriedades:

P_1. $A(BC) = (AB)C$, para todo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e para todo $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ e para todo $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, ou seja, a multiplicação de matrizes é associativa.

P_2. $A(B + C) = AB + AC$, para todo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e para todo B, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, ou seja, a multiplicação é distributiva em relação à adição de matrizes. De forma análoga temos $(A + B)C = AC + BC$, para todo A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e para todo $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Multiplicação de Matrizes - Propriedades

A multiplicação de matrizes possui as seguintes propriedades:

P_3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e para todo $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

P_4. Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $I_m A = A I_n = A$.

P_5. Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e para todo $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, temos $\mathbf{(AB)^T = B^T \cdot A^T}$.

Inversa de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada A de ordem $\boldsymbol{n}$, se existir uma matriz quadrada B, também de ordem $\boldsymbol{n}$, que satisfaça $AB = BA = I_n$ diz-se que B é inversa de A e denota-se por A^{-1}, ou seja, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

OBS.: Dizemos que uma matriz A é **inversível (não singular)** se existe a inversa A^{-1}, caso contrário dizemos que a matriz A é **não inversível (singular)**.

EXERCÍCIOS