Álgebra Linear

ESPAÇOS VETORIAIS 1

3ALG Manhã

- **Espaços Vetoriais;**
- **Subespaços Vetoriais;**
- **Combinações Lineares.**

Professor Cláudio Bispo

1. Considerando as operações usuais de adição e multiplicação por escalar definidas em um espaço vetorial, verifique quais dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ abaixo são subespaços vetoriais:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = -x\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = x^2\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x + 3y = 0\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = x + 1\}$

2. Considerando as operações usuais de adição e multiplicação por escalar definidas em um espaço vetorial, verifique quais dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ abaixo são subespaços vetoriais:

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x = 4y \ \text{ e } \ z = 0\}$

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ z = 2x - y\}$

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ y = x + 2 \ \text{ e } \ z = 0\}$

d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x = y = z\}$

e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x = z^2\}$

3. Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M_2 \in \mathbb{R}$:

a) $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \ c = a + b \ \text{ e } \ d = 0 \right\}$

b) $B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; \ a, \ b, \ c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes simétricas)

c) $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix}; \ a, \ b \ \in \mathbb{R} \right\}$

d) $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix}; \ a, \ b \ \in \mathbb{R} \right\}$

4. Sejam os vetores $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um dos vetores $u = (-1, 2, 1)$, $v = (0, 2, 3)$ e $w = (0, 0, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

5. Sejam os vetores $u = (2, 1, 4)$, $v = (1, -1, 3)$ e $w = (3, 2, 5)$. Expressar cada um dos vetores $a = (-9, -7, -15)$, $b = (6, 11, 6)$, $c = (0, 4, 5)$ e $d = (0, 0, 0)$ como combinação linear de v, u e w.

6. Seja o espaço vetorial $M_2 \in \mathbb{R}$ e os vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Escreva o vetor $v = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

7. Escreva os polinômios:

a) $a(x) = -15x^2 - 7x - 9$;

b) $b(x) = 6x^2 + 11x + 6$;

c) $c(x) = 0$;

d) $d(x) = 9x^2 + 8x + 7$.

Como combinação linear de $p_1(x) = 4x^2 + x + 2$, $p_2(x) = 3x^2 - x + 1$ e $p_3(x) = 5x^2 + 2x + 3$.

8. Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$, $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

b) Para que valor de k o vetor $(8, -14, k)$ é combinação linear de u e v ?

c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor $(a, \ b, \ c)$ seja uma combinação linear de u e v ?

GABARITO

1.
a) É S.E.V.
b) Não é S.E.V.
c) È S.E.V.
d) Não é S.E.V.

2.
a) É S.E.V.
b) É S.E.V.
c) Não é S.E.V.
d) É S.E.V.
e) Não é S.E.V.

3.
a) É S.E.V.
b) É S.E.V.
c) È S.E.V.
d) Não é S.E.V.

4.
$(-1,2,1) = v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$
$(0,2,3) = v_1 + v_2 + 0 \cdot v_3$
$(0,0,0,) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

5.
$(-9,-7,-15) = -2 \cdot v_1 + v_2 - 2 \cdot v_3$
$(6,16,6) = 14 \cdot v_1 - 10 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3$
$(0,4,5) = \frac{41}{2} \cdot v_1 + -\frac{13}{2} \cdot v_2 - \frac{23}{2} \cdot v_3$
$(0,0,0,) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

6. $v = 4 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3$

7.
$a(x) = -2 \cdot p_1(x) + p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$
$b(x) = 4 \cdot p_1(x) - 5p_2(x) + \cdot p_3(x)$
$c(x) = 0 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x)$
$d(x) = 0 \cdot p_1(x) - 2 \cdot p_2(x) + 3 \cdot p_3(x)$

8.
a) $w = 3 \cdot u - v$
b) $k = 12$
c) $10a + 10b - c = 0$