FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO DE JANEIRO FERNANDO MOTA
FAETERJ-Rio

APOSTILA DE CÁLCULO I

AUTOR:
Professor Dr.
WAGNER DA SILVA ZANCO

Versão 9.24

RIO DE JANEIRO
MARÇO 2023

Nota do autor

Este trabalho foi desenvolvido para servir de bibliografia para a disciplina de Cálculo, da Faculdade de Tecnologia do Rio de Janeiro Fernando Mota - FAETERJ-Rio. Ele é o resultado do compêndio de notas de aula, resumo de livros, apostilas e de vídeo aulas. Com o texto sintetizado, uma gama diversificada de exemplos resolvidos passo a passo e gabarito dos exercícios propostos, esta obra, redigida na forma de apostila, pode servir como material deapoio àqueles que desejam aprender os fundamentos do cálculo de forma rápida e objetiva.

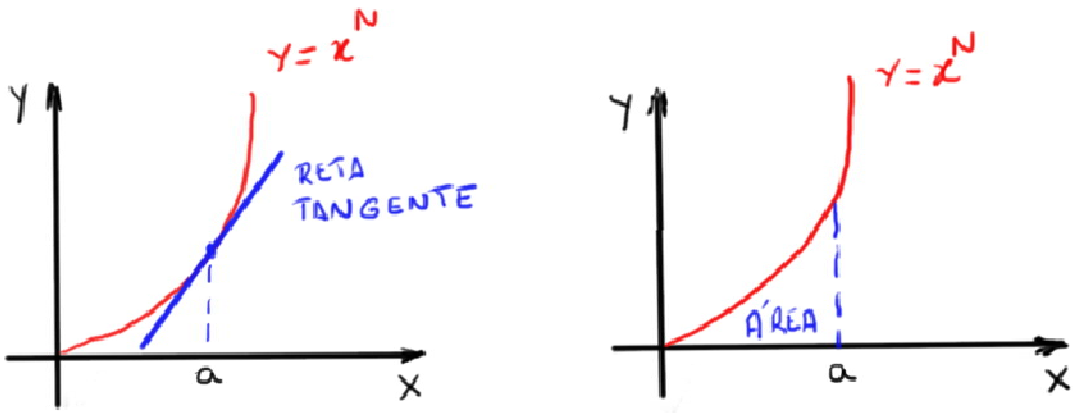
Agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que este trabalho fosse concretizado, aproveitando para dar créditos especiais aos bravos professores que dedicam tempo e dinheiro na publicação de vídeo aulas gratuitas, que tanto tem auxiliado os alunos decididos em aprender matemática.

SUMÁRIO

1. LIMITE

O limite é uma das três operações básicas do cálculo. As outras duas são a derivada e a integral. Desenvolvido por vários cientistas, dentre eles Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), o cálculo auxilia em conceitos e definições em várias áreas, tais como engenharia, matemática, computação, química, física clássica, física moderna e economia.

Inicialmente, o cálculo foi desenvolvido para resolver problemas de área e da reta tangente. A Figura 1.1 ilustra a ideia. A Figura 1.1a mostra o gráfico da função $f(x) = x^n$, sendo n um número real. Pode-se ver no gráfico, em azul, a reta tangente ao ponto do gráfico em que $x = a$. A derivada da função em $x = a$ é o coeficiente angular da reta tangente àquele ponto. A integral da função no intervalo [0, a] é a área sob o gráfico até o eixo Ox, ou seja, da origem até o ponto $x = a$, como mostra a Figura 1.1b.



(a) (b)

Figura 1.1: Princípios da derivada e da integral. (a) Reta tangente. (b) Área sob o gráfico.

A **derivada** nos permite calcular a reta tangente em qualquer ponto da curva e a **integral** calcula a área sob o gráfico de uma curva, dentro de um intervalo. Os matemáticos Descobriram que estas duas operações estavam relacionadas. Posteriormente, o conceito de **limite** foi utilizado para definir derivada, integral e outros conceitos importantes da matemática, como continuidade, convergência e divergência, estando estes três últimos fora do escopo desta obra.

1.1. Noção intuitiva de Limite

Seja $f(x) = x^2$. Podemos encontrar o valor da função para qualquer valor de x como, por exemplo, $x = 3$. Neste caso, quando $x = 3$, a função vai retornar o valor 9.

$$f(3) = 3^2 = 9$$

A Figura 1.2 apresenta o gráfico da função $f(x) = x^2$. Sendo uma função do segundo grau, o gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

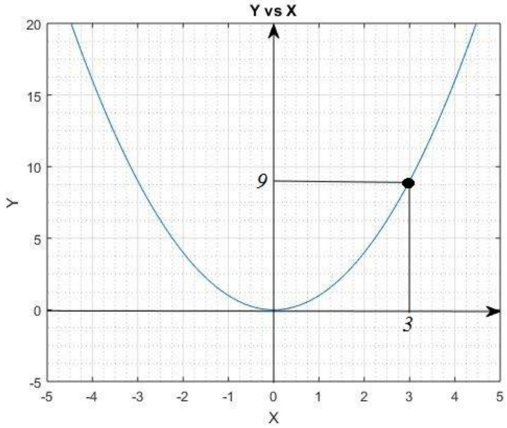


Figura 1.2: Gráfico da função $f(x) = x^2$.

O gráfico mostra que quanto mais próximo de 3 for o valor de *x*, mais próximo de 9 será o valor que a função vai retornar, independente se *x* se aproxima de 3 pela esquerda ou pela direita. Isso pode escrito da forma

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

A notação "$x \to 3$" indica que *x* tende a 3 e "lim" significa limite de. Assim, podemos dizer que o limite de x^2 é igual a 9 quando *x* tende a 3.

Exemplo 1.1: Determine o limite de $\lim_{x \to 3}(2x - 1)$

Uma das formas de encontrar o limite de uma função para um determinado valor de *x* é encontrar os limites laterais. O **limite lateral pela esquerda** é encontrado quando substituímos *x* por valores ligeiramente menores que o valor de interesse, no caso, $x \to 3^-$. Por outro lado, o **limite lateral pela direita** é encontrado quando substituímos *x* por valores ligeiramente maiores que 3, neste caso, $x \to 3^+$. A Figura 1;3 ilustra a ideia.

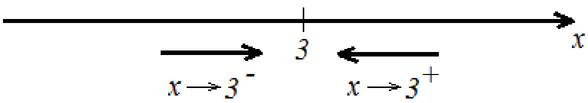


Figura 1.3: Valores de *x* tendendo a 3 pela direita e pela esquerda.

Os valores a serem atribuídos a *x* podem ser quaisquer valores próximos a 3, tanto pela esquerda quanto pela direita. A notação $x \to 3^-$ significa que *x* tende a 3 pela esquerda. Da mesma forma, $x \to 3^+$ significa que *x* tende a 3 pela direita.

A Figura 1.4 mostra uma tabela com os valores atribuídos a *x* pela esquerda e os respectivos valores que a função $f(x) = 2x - 1$ retorna para cada valor de *x*.

$x \to 3^-$

x	2	2,5	2,9	2,95	....	2,99	....	2,999
f(x)	3	4	4,8	4,9	....	4,98	....	4,998

Figura 1.4: Valores atribuídos a *x* pela esquerda**.**

Pode-se observar que quanto mais próximo o valor de x se aproxima de 3 pela esquerda, mais próximo de 5 é o valor que a função retorna. Assim, podemos dizer que o limite lateral pela esquerda é igual a 5.

$$\lim_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5$$

A Figura 1.5 mostra a tabela com os valores atribuídos a x pela direita e os respectivos valores que a função $f(x) = 2x - 1$ retorna para cada valor de x.

$x \to 3^+$

x	4	3,5	3,1	3,05	....	3,01	....	3,001
f(x)	7	6	5,2	5,1	....	5,02	....	5,002

Figura 1.5: Valores atribuídos a *x* pela direita**.**

Podemos observar que quanto mais próximo o valor de x se aproxima de 3 pela direita, mais próximo de 5 é o valor que a função retorna. Assim, podemos dizer que o limite lateral pela direita também é igual a 5.

$$\lim_{x \to 3^+} (2x - 1) = 5$$

Quando o limite lateral pela esquerda é igual ao limite lateral pela direita, significa que o limite existe. Assim, se

$$\lim_{x \to 3^-} (2x - 1) = \lim_{x \to 3^+} (2x - 1) = 5$$

então,

$$\lim_{x \to 3} 2x - 1 = 5$$

Observe que o limite da função quando $x \to 3$ é igual ao valor que a função $f(x) = 2x - 1$ retorna quando $x = 3$.

$$f(3) = 2.3 - 1 = 5$$

Isso nos leva a uma reflexão. Substituir o valor de *x* na função é suficiente para encontrar o limite da função?

A resposta é **NÃO!** Em muitas funções, apenas substituir o valor de *x* na função não encontra o limite da função. A constatação acima nos leva a uma reflexão sobre limites.

“Para o cálculo do limite de uma função, o que importa são os valores que a função assume quando x tende a um determinado valor.”

Por exemplo, em $\lim_{x\to 3}(2x-1)$, não importa o valor que $f(x) = 2x - 1$ assume quando $x = 3$. O que importa são os valores que a função retorna para valores de x próximos de 3, ou seja, quando $x \to 3$.

Exemplo 1.2: Como a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ se comporta próximo de *x = 1*?

Substituindo o valor de *x* por *1* em *f(x)*, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

$$f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = 2\frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

O resultado acima demonstra que a função não é definida para $x = 1$, porém isso não significa que ela não tenha limite quando $x \to 1$, como veremos a seguir.

A Figura 1.6 apresenta o limite lateral pela direita. Observe que à medida que *x* assume valores mais próximos de 1, a função retorna valores cada vez mais próximos de 2.

$x \to 1^+$

x	2	1,5	1,1	1,01	....	1,001	....	1,0001
f(x)	3	2,5	2,1	2,01	....	2,001	....	2,0001

Figura 1.6: Valores atribuídos a *x* pela direita.

Desta forma, podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

A Figura 1.7 apresenta o Limite lateral pela esquerda. Observe que à medida que *x* assume valores mais próximos de 1, a função retorna valores cada vez mais próximos de 2.

$x \to 1^-$

x	0	0,5	0,9	0,99	....	0,999	....	0,9999
f(x)	1	1,5	1,9	1,99	....	1,999	....	1,9999

Figura 1.7: Valores atribuídos a *x* pela esquerda.

Desta forma, podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Se os limites laterais são iguais, significa que o limite da função existe e é igual a 2

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Embora a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não seja definida para *f(1)*, como mostra a Figura 1.8, onde se pode ver o gráfico da função, o limite quando x tende a 1 existe e é igual a 2.

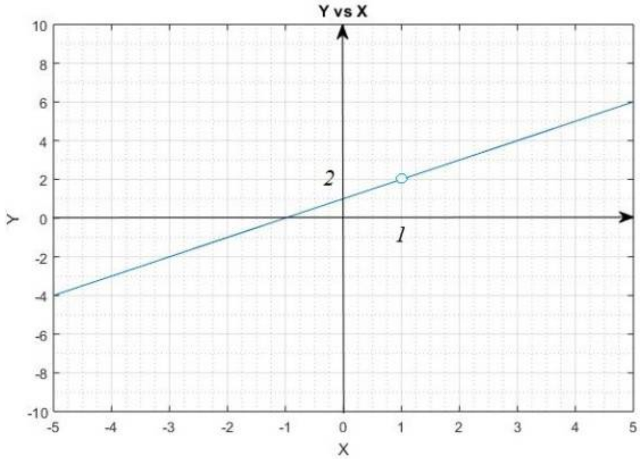


Figura 1.8: Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Pode-se ver no gráfico que quando x se aproxima de 1, independente que seja pela direita ou pela esquerda, a função retorna valores cada vez mais próximos de 2. Observando o gráfico, pode-se deduzir que o domínio da função será tal que

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq 1\}$$

Ou seja, a função é definida para todo o conjunto dos números reais, exceto para $x = 1$.

1.2. Limites Obtidos Graficamente

É possível encontrar o limite de uma função em um determinado ponto analisando o gráfico da função. Embora seja possível que uma função tenha limite em um determinado ponto a, mesmo que ela não seja definida naquele ponto, podemos afirmar que uma função f *só* é contínua em um ponto a de seu domínio quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Em outras palavras, a função é contínua em um determinado ponto a quando o limite da função no ponto a é igual ao valor que a função retorna quando $x = a$. Quando a função f é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos que f é contínua. Os gráficos da Figura 1.9 ilustram a ideia de continuidade de uma função.

Na Figura 1.9a, a função é contínua no ponto a, uma vez que o valor que a função retorna quando $x = a$ é igual ao limite quando $x \to a$, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Na Figura 1.9b, o valor que a função retorna quando $x = a$ é L, enquanto $\lim_{x\to a} f(x) = K$. Neste caso, pode-se observar que embora a função não seja contínua no ponto a, ela possui limite quando $x \to a$.

Na Figura 1.9c, pode-se observar que a função não é definida para $x = a$, porém o limite existe quando $x \to a$, sendo $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Na Figura 1.9d, o valor que a função retorna quando $x = a$ é zero, enquanto $\lim_{x \to a} f(x) = \nexists$. Em outras palavras, o limite não existe quando $x \to a$.

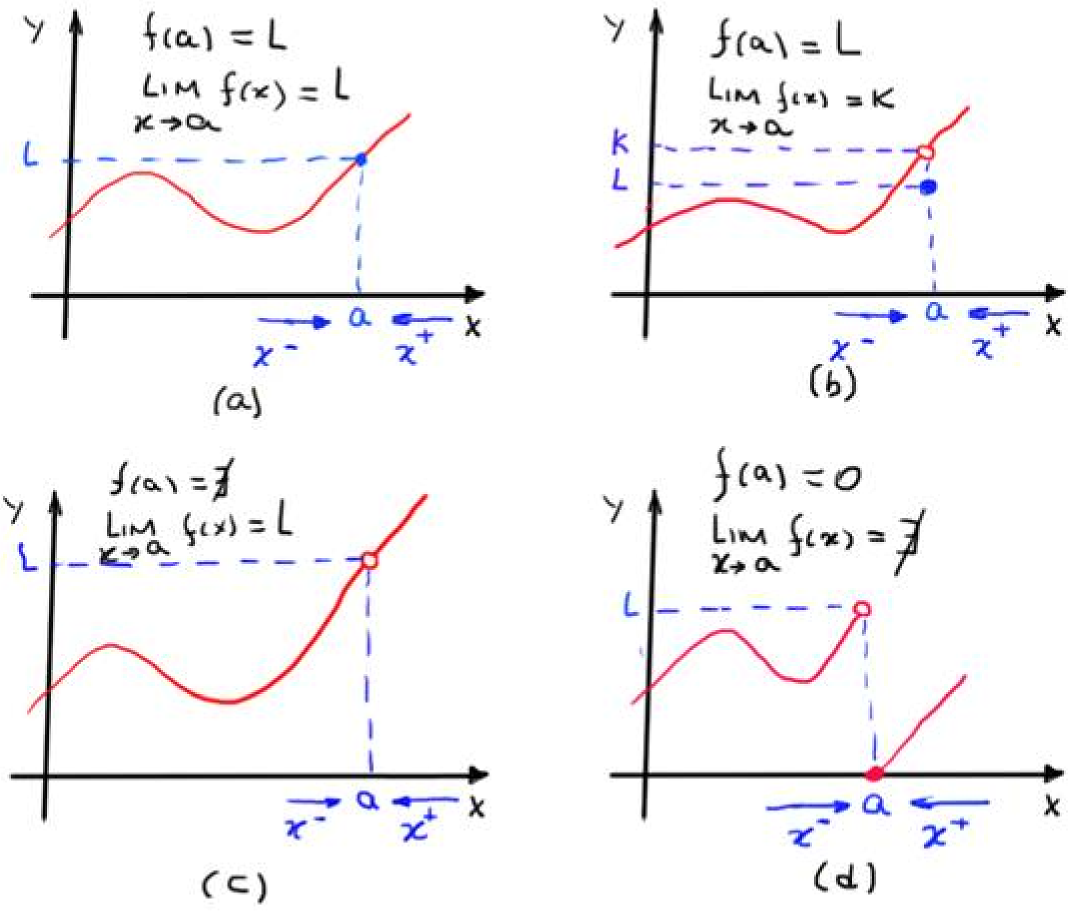
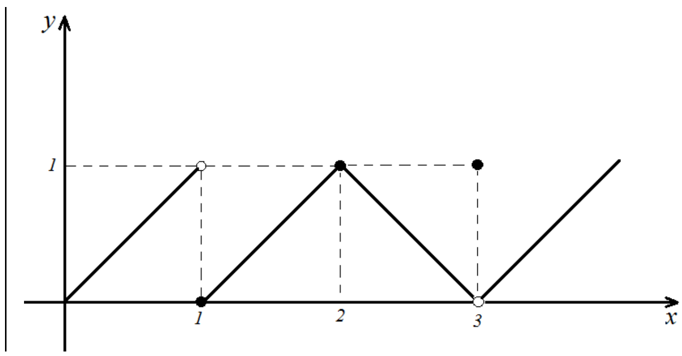


Figura 1.9: Continuidade de uma função.

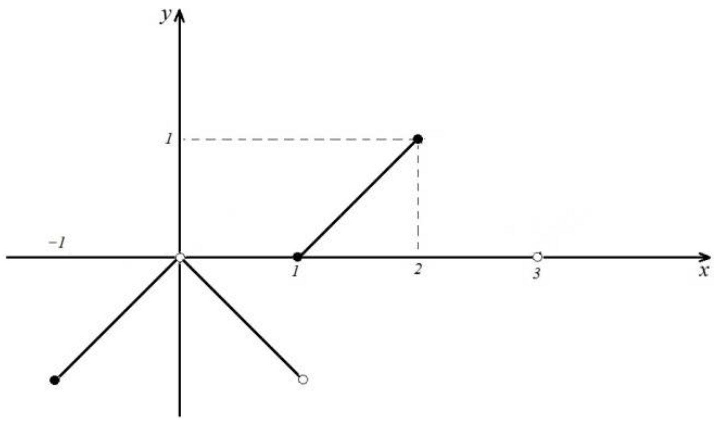
Exemplo 1.3: Para a função $y = g(x)$ ilustrada abaixo, encontre os seguintes limites ou explique por que eles não existem.

a) $\lim_{x \to 1} g(x)$ Não existe limite
b) $\lim_{x \to 2} g(x)$ O limite é 1
c) $\lim_{x \to 3} g(x)$ O limite é 0



Exemplo 1.4: Quais as seguintes afirmações sobre a função $y = f(x)$ ilustrada a seguir são verdadeiras e quais são falsas?

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = Existe$ Verdade
b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ Verdade
c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ Falsa
d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ Falsa
e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ Falsa



a) Verdadeira. b) Verdadeira. c) Falsa. d) Falsa. e) Falsa

1.3. Definição Formal de Limite

Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contenha a, excluindo a. A afirmação $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. A Figura 1.10 ilustra a ideia.

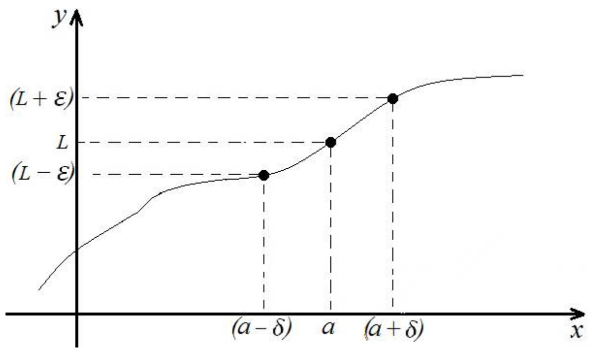
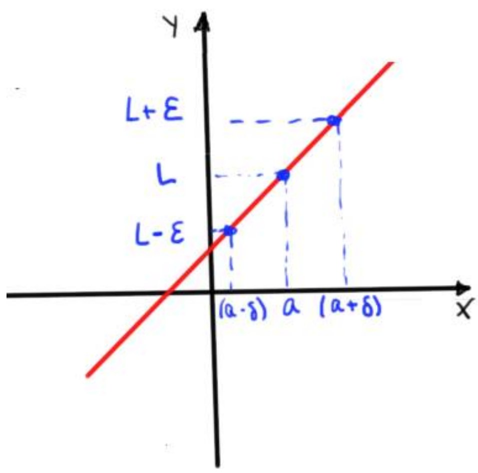


Figura 1.10: Definição formal de limite.

Uma vez que o valor de x esteja dentro da faixa $(a - \delta) \leq a \leq (a + \delta)$, para que o limite exista o valor que a função irá retornar deve estar dentro da faixa $(L - \varepsilon) \leq L \leq (L + \varepsilon)$.

Exemplo 1.5: Dado $\lim_{x\to 2}(x + 1) = 3$ e $\varepsilon = 0{,}03$, determine δ positivo tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.



$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|x + 1 - 3| < 0{,}03$$

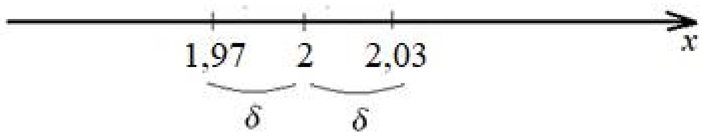
Sabendo que $|H| < K$, temos que $-K < H < K$.

$$-0{,}03 < x - 2 < 0{,}03$$

$$-0{,}03 + 2 < x < 0{,}03 + 2$$

$$1{,}97 < x < 2{,}03$$

$$\delta = 0{,}03$$



Exemplo 1.6: O gráfico de uma função g é apresentado a seguir. Use-o para estabelecer o valor, caso exista, dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

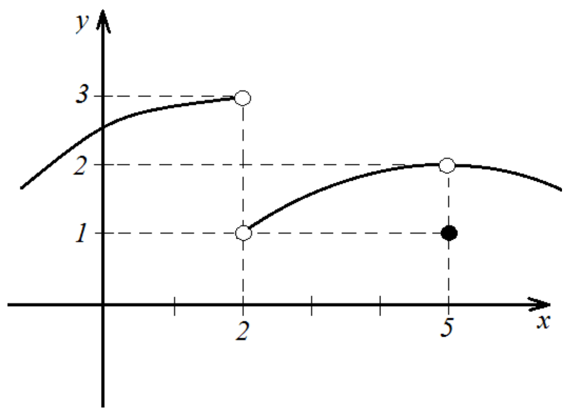
b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$

e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$

f) $\lim_{x \to 5} g(x)$



a) 3. b) 1. c) Não existe. d) 2. e) 2. f) 2, embora $f(5) = 1$.

1.4. Propriedades dos Limites

Embora o limite de uma função possa ser encontrado por meio dos limites laterais ou analisando o gráfico. Um conjunto de propriedades foram desenvolvidas para facilitar o cálculo do limite. São elas:

I. $\lim_{x\to a} x = a$;

II. $\lim_{x\to a} c = c$

III. $\lim_{x\to a} c.f(x) = c.\lim_{x\to a} f(x)$

IV. O limite de um produto é o produto dos limites.

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

V. O limite de uma soma/diferença é a soma/diferença dos limites.

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

VI. O limite de uma razão é a razão dos limites.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

VII. O limite de uma raiz quadrada é a raiz quadrada do limite.

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

VIII. Limite da potência é igual à potência do limite

$$\lim_{x\to a}(f(x))^b = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^b$$

IX. Limite do logaritmo é igual ao logaritmo do limite

$$\lim_{x\to a}(\log f(x)) = \log\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

X. Limite do úmero de Euler elevado a uma função é igual ao número de Euler elevado ao limite da função

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)}$$

Para auxiliar no cálculo do limite, apresentamos a seguir algumas indeterminações matemáticas encontradas na literatura.

$\frac{0}{0}$; $\frac{n}{0}$; $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; 0^0; ∞^0; 0^∞; $0.\infty$; $\frac{\infty}{0}$; n^∞.

Convém também ressaltar que

$\frac{n}{\infty} = 0$; $\frac{\infty}{n} = \infty$; $\infty^n = \infty$; $-\infty.\infty = -\infty$; $-\infty.-\infty = \infty$; $-\infty^{n\ (\text{impar})} = -\infty$;

$-\infty^{n(\text{par})} = \infty$; $\infty \pm n = \infty$

Exercícios

1.1) Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{y\to 2}\left(y^2 - \frac{1}{y}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{u\to 5}\left(\frac{u^2-25}{u-5}\right)$

d) $\lim_{x\to 2}\lfloor x\rfloor$

Obs.: $\lfloor x\rfloor$ →Função Piso. Converte um número real *x* no maior número inteiro menor ou igual a x.

1.2) Determine $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada uma das funções a seguir.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = 4x^2 - x$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

1.3) Calcule $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

1.4) Calcule os seguintes limites, se existirem.

a) $\lim_{x\to 2} 7$

b) $\lim_{u\to 0}\frac{5u^2-4}{u+1}$

c) $\lim_{w\to -2}\frac{4-w^2}{w+2}$

d) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}\lfloor x\rfloor$

e) $\lim_{x\to 0}|x|$

f) $\lim_{x\to 2} 7x^3 - 5x^2 + 2x - 4$

g) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

h) $\lim_{x\to 2}(x - \lfloor x\rfloor)$

i) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}$

j) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - x^2 - x - 15}{x - 3}$

k) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^4 - 7x^2 + x - 6}{x - 2}$

l) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$

m) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

n) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

o) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 4}$

1.5) Calcule $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ e depois $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

a) $f(x) = 3x^2 + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

c) $f(x) = 7x + 12$

d) $f(x) = x^3$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$

1.6) Calcule

a) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+21} - 5}{x-4}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x-1}$

Gabarito:

1.1a) 7/2. 1.1b) O limite não existe. 1.1c) 10. 1.1d) O limite não existe.
1.2a) 3. 1.2b) $8x - 1$. 1.2c) $\frac{-1}{x^2}$. 1.3) 3. 1.4a) 7. 1.4b) -4. 1.4c) 4. 1.4d) 1. 1.4e) 0. 1.4f) 36. 1.4g) 12. 1.4h) Não existe limite. 1.4i) 7. 1.4j) 30. 1.4k) 37. 1.4l) -8. 1.4m) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

1.4n) $\frac{1}{4}$. 1.4o) $\frac{1}{4}$. 1.5a) $6x$. 1.5b) $\frac{-1}{(x+1)^2}$. 1.5c) 7. 1.5d) $3x^2$. 1.5e) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 1.5f) $10x - 2$.
1.6a) $\frac{1}{10}$. 1.6b) 4.

1.5. Funções Racionais

Uma função racional é uma função *f(x)* que pode ser expressa como uma razão de dois polinômios *p(x) e g(x)*.

$$f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$$

O domínio de uma função racional consiste no conjunto dos números reais, exceto para $g(x) = 0$.

Ao contrário dos polinômios, cujos gráficos são curvas contínuas (sem interrupções), o gráfico de uma função racional pode apresentar interrupções (descontinuidades) nos pontos onde o denominador é igual a zero.

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função racional, cujo gráfico pode ser visto na Figura 1.11.

Ao contrário dos polinômios, uma função racional pode não estar definida para determinados valores de *x*. Próximo desses valores, algumas funções racionais têm gráficos que se aproximam bastante de uma reta vertical (assíntota vertical). A reta *x = 0* é uma assíntota vertical da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Seguindo o mesmo raciocínio, A reta *y = 0* é uma assíntota horizontal da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

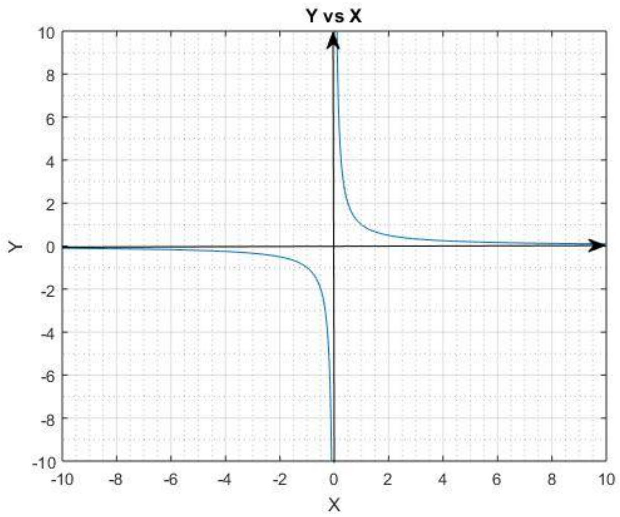


Figura 1.11: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Uma exceção é o caso em que, apesar do denominador ser igual a zero para um determinado valor de *x*, este pode ser cancelado no processo de fatoração e simplificação. Nesse caso, a função racional apresenta um "furo" no ponto onde o denominador é igual a zero. É o que acontece com a função $f(x) = \frac{x^2+2}{x+2}$, cujo gráfico é apresentado na Figura 1.12. Pode-se observar no gráfico que no par ordenado $(-2, -2)$ existe um furo, o que significa que -2 não pertence ao domínio da função. Assim, o domínio da função é dado por

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$$

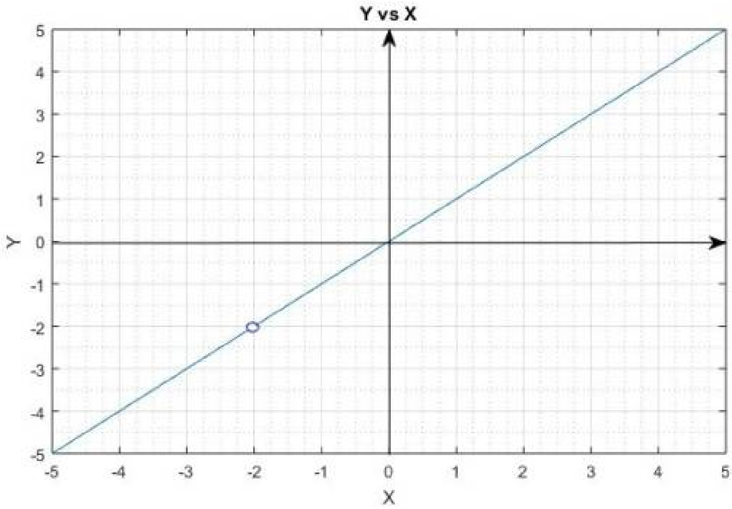


Figura 1.12: Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+2}{x+2}$.

1.6. Limite No Infinito De Funções Racionais

Regra Geral - Para calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$, divida o numerador e o denominador pela mais alta potência de *x* no denominador e então use o fato de que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^R} = 0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^R} = 0$$

em que *R* é um número real e *C* é uma constante.

Regra geral A – Se *f(x)* e *g(x)* são polinômios e o grau de *g* é maior que o grau de *f*, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemplo 1.7: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-7x+3}$

Multiplicando o divisor e o dividendo por $\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}(2x + 5)}{\frac{1}{x^2}(x^2 - 7x + 3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x}) + \lim_{x\to\infty}(\frac{5}{x^2})}{\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}(\frac{7}{x}) + \lim_{x\to\infty}(\frac{3}{x^2})} = \frac{0+0}{1+0+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Regra Geral B - Se *f(x)* e *g(x)* são polinômios e *g* é do mesmo grau de *f*, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

são iguais a razão entre os coeficientes dos monômios de maior grau de *f* e *g*.

Exemplo 1.8: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 4x + 2}{7x^3 + 5}$

Multiplicando o divisor e o dividendo por $\frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}(3x^3 - 4x + 2)}{\frac{1}{x^3}(7x^3 + 5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} + \frac{5}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}(3 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3})}{\lim_{x\to\infty}(7 + \frac{5}{x^3})} = \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}(\frac{4}{x^2}) + \lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x^3})}{\lim_{x\to\infty} 7 - \lim_{x\to\infty}(\frac{5}{x^3})} = \frac{3 - 0 + 0}{7 - 0} = \frac{3}{7}$$

Regra Geral C - Se *f(x)* e *g(x)* são polinômios e o grau de *g* é menor que o grau de *f*, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

- O resultado é $+\infty$ quando os coeficientes dos monômios de maior graude *f* e *g* têm o mesmo sinal.
- O resultado é $-\infty$ quando os coeficientes dos monômios de maior grau de *f* e *g* têm sinais opostos.

Exemplo 1.9: $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5 - 1}{3x^3 + 7}$

Multiplicando o divisor e o dividendo por $\frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3}(4x^5 - 1)}{\frac{1}{x^3}(3x^3 + 7)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^5}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{7}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}(4x^2 + \frac{1}{x^3})}{\lim_{x\to+\infty}(3 + \frac{7}{x^3})} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(4x^2) + \lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^3})}{\lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x+\infty}(\frac{7}{x^3})} = \frac{4\lim_{x\to+\infty}(x^2) + 0}{3 + 0}$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$$

Regra Geral D - Se *f(x)* e *g(x)* são polinômios e o grau de g é menor que o grau de f, então

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

A regra geral para determinar se o resultado é $+\infty$ ou $-\infty$ é complexa. Se a_n e b_k são os coeficientes de maior grau de f e g, respectivamente, então o limite é igual a $\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n}{b_k} x^{n-k}$ e o sinal correto é o sinal de $a_n b_k (-1)^{n-k}$.

Exemplo 1.10: $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - 7}{2x + 7}$

Multiplicando o divisor e o dividendo por $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}(3x^2 - 7)}{\frac{1}{x}(2x + 7)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^2}{x} - \frac{7}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{7}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(3x - \frac{7}{x})}{\lim_{x\to-\infty}(2 + \frac{7}{x})} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(3x) - \lim_{x\to-\infty}(\frac{7}{x})}{\lim_{x\to-\infty} 2 + \lim_{x\to-\infty}(\frac{7}{x})} = \frac{3\lim_{x\to-\infty}(x) - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

Comprovação por $a_n b_k (-1)^{n-k}$

$3.(2)(-1)^{2-1} = 6(-1)^1 = -6$ (sinal negativo)

Exemplo 1.11:

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 7}{2x + 7}$

Multiplicando o divisor e o dividendo por $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}(3x^3 - 7)}{\frac{1}{x}(2x + 7)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x^3}{x} - \frac{7}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{7}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} (3x^2 - \frac{7}{x})}{\lim_{x \to -\infty} (2 + \frac{7}{x})} = \frac{\lim_{x \to -\infty} (3x^2) - \lim_{x \to -\infty} (\frac{7}{x})}{\lim_{x \to -\infty} 2 + \lim_{x \to -\infty} (\frac{7}{x})} = \frac{3 \lim_{x \to -\infty} (x^2) - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$$

Comprovação por $a_n b_k (-1)^{n-k}$

$3.(2)(-1)^{3-1} = 6(-1)^2 = +6$ (sinal positivo)

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2 - 7}{2x + 7}$

Multiplicando o divisor e o dividendo por $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}(-3x^2 - 7)}{\frac{1}{x}(2x + 7)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{-3x^2}{x} - \frac{7}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{7}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} (-3x - \frac{7}{x})}{\lim_{x \to -\infty} (2 + \frac{7}{x})} = \frac{\lim_{x \to -\infty} (-3x) - \lim_{x \to -\infty} (\frac{7}{x})}{\lim_{x \to -\infty} 2 + \lim_{x \to -\infty} (\frac{7}{x})} = \frac{-3 \lim_{x \to -\infty} (x) - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{-3}{2} \lim_{x \to -\infty} (x) = +\infty$$

Comprovação por $a_n b_k (-1)^{n-k}$

$-3.(2)(-1)^{2-1} = -6(-1)^1 = +6$ (sinal positivo);

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^3 - 7}{2x + 7}$

Multiplicando o divisor e o dividendo por $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}(-3x^3 - 7)}{\frac{1}{x}(2x + 7)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-3x^3}{x} - \frac{7}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{7}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(-3x^2 - \frac{7}{x})}{\lim_{x\to-\infty}(2 + \frac{7}{x})} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(-3x^2) - \lim_{x\to-\infty}(\frac{7}{x})}{\lim_{x\to-\infty} 2 + \lim_{x\to-\infty}(\frac{7}{x})} = \frac{-3\lim_{x\to-\infty}(x^2) - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{-3}{2}\lim_{x\to-\infty}(x^2) = -\infty$$

Comprovação por $a_n b_k (-1)^{n-k}$

$-3.(2)(-1)^{3-1} = -6(-1)^2 = -6$ (sinal negativo)

Exemplo 1.12: Determine o limite das seguintes funções:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{2} = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{2} = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{2} = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{2} = -\infty$

Se $f(x)$ for um polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Exemplo 1.13: Determine os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to+\infty} (5x^3 - 20x^2 + 2x - 14)$

$\lim_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} (-2x^3 + 70x^2 + 50x + 5)$

$\lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} (7x^4 + 12x^3 + 4x - 3)$

$\lim_{x\to-\infty} 7x^4 = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} (7x^3 + 10x^2 + 3x + 5)$

$$\lim_{x \to -\infty} 7x^3 = -\infty$$

Regra Geral P–Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ e o sinal é o de a_n.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ e o sinal é o de $a_n(-1)^n$.

Exercícios:

1.7) Calcule o limite de

a) $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)$

b) $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)$

1.8) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & se\ x > 0 \\ 3x + 2, & se\ x < 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

1.9) Calcule:

a) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{4x^2 - 5}\right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 7}{x^2 - 8}\right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+2}{\sqrt{x^2 - 3x+1}}\right)$

d) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x+2}{\sqrt{x^2 - 3x+1}}\right)$

1.10) Determine as assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1}$$

Obs.: As assíntotas verticais são determinadas pelas raízes do denominador e as assíntotas horizontais podem ser encontradas pela Regra B.

1.11) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to +\infty} (2x^{11} - 5x^6 - 3x^2 + 1)$

b) $\lim_{x \to -\infty} (-4x^7 + 23x^3 + 5x^2 + 1)$

c) $\lim_{x \to -\infty} (2x^4 - 12x^2 + x - 7)$

d) $\lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 12x^2 + x - 7)$

e) $\lim_{x \to -\infty} (-x^8 + 2x^7 - 3x^3 + x)$

f) $\lim_{x \to -\infty} (-2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4)$

1.12) Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, se $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & se \ x \geq 2 \\ 3x + 5 & se \ x < 2 \end{cases}$

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$

c) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{x+3}{x^2 - 9}\right)$ e $\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{x+3}{x^2 - 9}\right)$

e) $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}\right)$ e $\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}\right)$

f) $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12}\right)$ e $\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12}\right)$

g) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3x + 5}\right)$ e $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3x + 5}\right)$

h) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1}\right)$ e $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^3 + x^2}{5x^3 - 1}\right)$

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x-5}{3x+1}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4x-5}{3x+1}\right)$

j) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+x-5}{5x^4-1}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+x-5}{5x^4-1}\right)$

k) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

l) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-1}{\sqrt{x^4-2}}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3-1}{\sqrt{x^4-2}}\right)$

m) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x-4}{\sqrt{x^3+5}}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x-4}{\sqrt{x^3+5}}\right)$

n) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}}{3x^2-2}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}}{3x^2-2}\right)$

o) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{\sqrt[3]{x^3+4}}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+5}{\sqrt[3]{x^3+4}}\right)$

p) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x-3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$

q) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5}{3+5x-2x^2}\right)$

r) $\lim_{x\to+3}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right)$

s) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4-7x^3+4}{x^2-3}\right)$

Gabarito:

1.7a) $+\infty$. 1.7b) $-\infty$. 1.8a) $+\infty$. 1.8b) 2. 1.8c) 0. 1.8d) -∞. 1.9 a) $\frac{3}{4}$. 1.9b) 0. 1.9c) 5. 1.9d) -5. 1.10) Assíntotas verticais em $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$; Assíntota horizontal em $\frac{1}{2}$. 1.11a) $+\infty$. 1.11b) $+\infty$. 1.11c) $+\infty$. 1.11d) -∞. 1.11e) $-\infty$. 1.11f) $+\infty$. 1.12a) 12 e 11.

1.12b) 1 e -1. 1.12c) $-\infty$. 1.12d) $+\infty$ e -∞. 1.12e) 1 e 1. 1.12f) $+\infty$ e +∞. 1.12g) 0 e 0. 1.12h) $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{5}$. 1.12i) $0\ e\ 0$. 1.12j) 0. 1.12k) 3,9 e -4,1. 1.12l) $+\infty$ e$-\infty$. 1.12j) 0 e 0. 1.12k) 4 e 4. 1.12l) $+\infty$ e $-\infty$. 1.12m) 0 e (não existe). 1.12n) 0 e 0. 1.12o) 2 e 2. 1.12p) $+\infty$ e $-\infty$. 1.12q) $\frac{-1}{2}$. 1.12r) $+\infty$. 1.12s) $+\infty$.

1.7. Equação Reduzida De Uma Reta

A equação de uma função do primeiro grau, cujo gráfico é uma reta, é dado pela expressão a seguir, em que m é o coeficiente angular e b o coeficiente linear. O coeficiente angular define a inclinação da reta com relação ao eixo Ox e o coeficiente linear determina o ponto em que o gráfico intercepta o eixo Oy.

$$f(x) = mx + b$$

O coeficiente angular em qualquer intervalo do gráfico de uma função do primeiro grau, em que $f(x) = mx + b$, é dado por

$$m = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$$

Se $f(x)$ não for uma função do primeiro grau, ou seja, se o gráfico de $f(x)$ não for uma reta, o coeficiente angular da reta tangente em algum ponto do gráfico pode ser calculado por

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Na Figura 1.13, é mostrado o gráfico de uma função do primeiro grau, em que h é a distância que separa os dois pontos do gráfico, dado por

$$h = (x + h) - x.$$

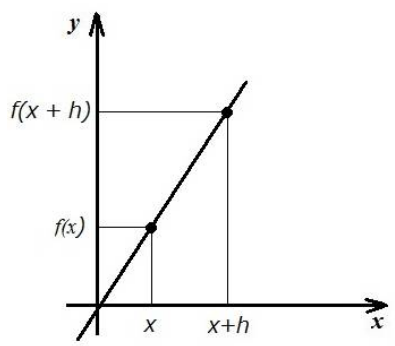


Figura 1.13: Gráfico de uma função do primeiro grau.

O coeficiente angular da reta pode ser calculado pela fórmula da taxa média de variação (m) em qualquer intervalo, dado por

$$m = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Se os dois pontos mostrados no gráfico forem aproximados de forma que $h \cong 0$, o coeficiente angular pode ser calculado pelo limite mostrado a seguir

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Reta Normal

A reta normal a uma curva em um ponto *p* é definida como a reta que passa por *p* e é perpendicular a reta tangente ao ponto *p*. A Figura 1.14 ilustra a ideia. A reta normal é perpendicular a reta tangente, ou seja, entre elas existe um ângulo de 90º.

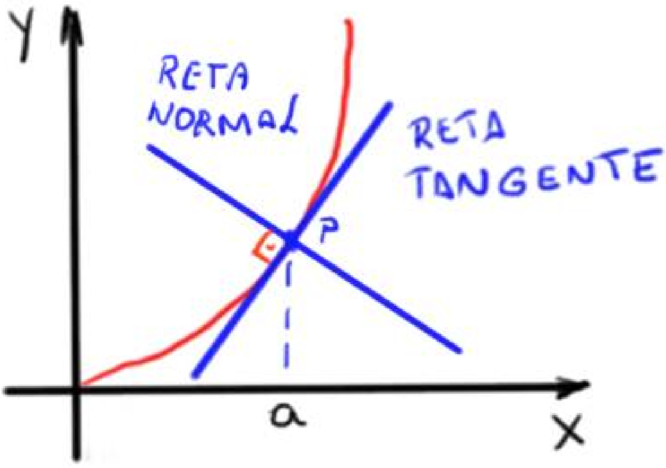


Figura 1.14: Reta normal.

Teorema: Duas retas não verticais são perpendiculares se, somente se, o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1, como mostra a Figura 1.15.

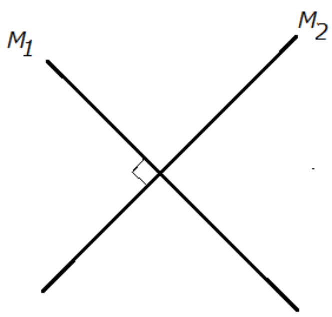


Figura 1.15: Retas Perpendiculares.

$$m_1.m_2 = -1$$

Se o coeficiente angular de m_1é igual a 2, o coeficiente angular de m_2 será

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

Teorema: Duas retas são paralelas se os seus coeficientes angulares forem iguais, ou seja, $m_1 = m_2$, como mostra a Figura 1.16.

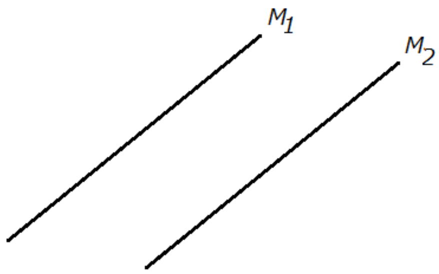


Figura 1.16: Retas paralelas.

Exercício 1.13: Para cada função *f(x)* e argumento $x = a$

a) Obtenha a fórmula geral para o coeficiente angular da reta tangente a um ponto arbitrário *p(x,f(x))* do gráfico de *f(x)*.

b) Encontre a equação reduzida da reta tangente correspondente ao argumento $x = a$.

c) Desenhe o gráfico de *f(x)* e mostre a reta tangente obtida no item *b*.

1.13a) $f(x) = 2x^2 + x$ e $a = \frac{1}{4}$

1.13b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ e $a = 2$

1.13c) $f(x) = x^2 - 2$ e $a = 1$

1.13d) $f(x) = 4x^2 + 3$ e $a = \frac{1}{2}$

1.14) Encontre os pontos do gráfico $y = x^2$, no qual a reta tangente é paralela a reta $y = 6x - 1$.

1.15) Determine os pontos sobre o gráfico $y = x^3$, no qual a reta tangente é perpendicular à reta $3x + 9y = 4$.

1.16) Encontre a equação reduzida da reta normal ao gráfico de $y = x^3$, no ponto em que $x = \frac{1}{3}$.

1.17) Em que pontos a reta normal à curva $y = x^2 - 3x + 5$, no ponto (3,5) intercepta a curva?

Gabarito:

1.13a) $y = 2x - \frac{1}{8}$. 1.13b) $y = 4x - \frac{13}{3}$.1.13c) $y = -1$. 1.13d) $y = 4x + 2$. 1.14) (3, 9). 1.15) (1, 1) e (-1, -1). 1.16) $y = -3x + \frac{28}{27}$. 1.17) (3, 5) e $(-\frac{1}{3}, \frac{55}{9})$.

1.8. Limite de Funções Trigonométricas

O cálculo do limite de funções trigonométrica pode ser potencializado quando fazemos uso do **Limite Fundamental Trigonométrico**, o qual é definido como

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (x\ em\ radianos)$$

A função $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ é chamada de função $sinc\ (x)$ e o seu gráfico é mostrado na Figura 1.17.

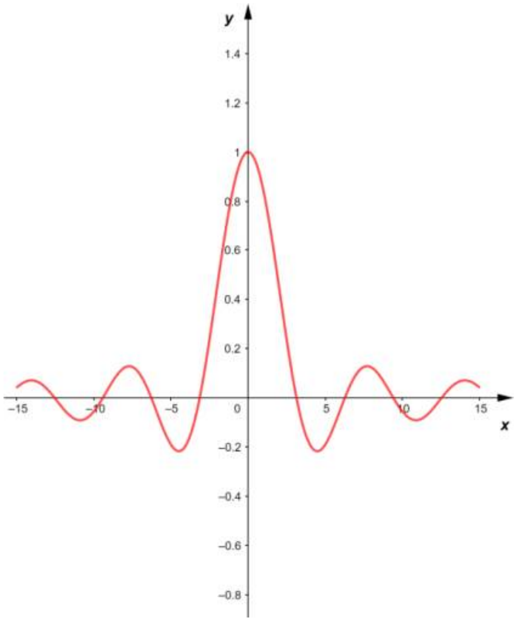


Figura 1.17: Gráfico da função $sinc\ (x)$.

A ideia é utilizar o Limite Fundamental Trigonométrico para eliminar indeterminações ou simplificar a equação.

Exemplo 1.14:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{8x}$$

Substituindo o *x* por *0* na equação vamos cair em uma indeterminação

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{8x} = \frac{\sin 3.0}{8.0} = \frac{0}{0}$$

Vamos utilizar o Limite Fundamental Trigonométrico para eliminar a indeterminação multiplicando o numerador e o denominador por $\frac{3}{8}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{8x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{8}\frac{\sin 3x}{\frac{3}{8}8x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{8}\frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$$

Sabendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1$, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{8}.(1) = \frac{3}{8}$$

Exemplo 1.15:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{2x\frac{\sin 2x}{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2}\frac{1}{1} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 1.16:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.\frac{1+\cos x}{1+cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{x(1+\cos x)}$$

Sabendo que $1 - cos^2x = sin^2x$, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$= 1.\frac{\sin 0}{1+\cos 0} = \frac{0}{1+1} = 0$$

Exemplo 1.17:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\frac{1}{1} = 1$$

Exemplo 1.18:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{x-1}$$

$$u = x - 1$$

$$u = 1 - 1 = 0$$

Assim,

$$\lim_{u\to 0}\frac{\tan(u)}{u} = 1$$

Exemplo 1.19:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)\cos(x-1)}$$

$$u = x^2 - 1$$

$$u = 1^2 - 1 = 0$$

Assim,

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u\cos\left(\sqrt{u+1}-1\right)} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\frac{1}{\cos\left(\sqrt{u+1}-1\right)}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\lim_{u\to 0}\frac{1}{\cos\left(\sqrt{u+1-1}\right)} = 1.\frac{1}{\cos\left(\sqrt{0+1}-1\right)} = \frac{1}{\cos\left(\sqrt{1}-1\right)} = \frac{1}{\cos(1-1)}$$

$$\frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemplo 1.20:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{\frac{x^2-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}.x$$

$$u=x^2-1$$

$$x=\sqrt{u+1}$$

$$u=1^2-1=0$$

Assim,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\sqrt{u+1}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}\lim_{u\to0}\sqrt{u+1}=1.\sqrt{1}=1$$

Exemplo 1.21:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x+\tan x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x+\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{\cos x}}{\frac{x\cos x+\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{\cos x}\frac{\cos x}{x\cos x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)}{\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(\cos x)-\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}(\cos x)+\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

Exercício 1.18) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 8x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(102x)}{\sin(51x)}$

c) $\lim_{x\to0}\tan x\, cossec\, x$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2 x}{x sin\, x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\frac{\cos x}{x}}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2+x-2)}{x^2-1}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\cos x}$

h) $\lim_{x\to 0^+} \frac{sin^2 x}{x^3-x^2}$

Gabarito

1.18a) 8. 1.18b) 2.1. 18c) 1.1. 18d) 1.1. 18e) 12.1. 18f) $\frac{3}{2}$ 1.18g) $\frac{1}{3}$ 1.18h) -1

1.9. Limite de Funções Exponenciais e Logarítmicas

Uma função exponencial é definida por

$$f(x) = a^x$$

tal que $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. A Figura 1.18 mostra a forma geométrica dos possíveis valores para a em uma função exponencial.

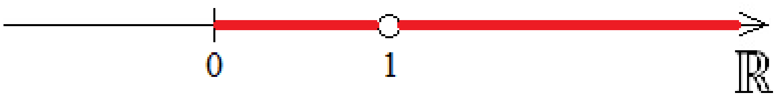


Figura 1.18: Base de uma função exponencial.

A Figura 1.19 mostra o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$. Pode-se observar que o gráfico é crescente. Isso acontece porque $a > 1$. Além disso, uma função exponencial sempre irá interceptar o eixo Oy em $y = 1$.

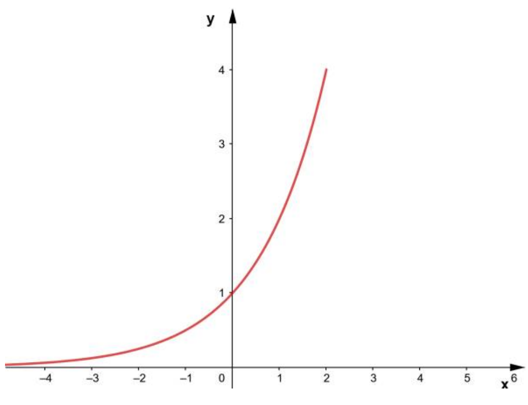


Figura 1.19: Gráfico de uma função exponencial crescente.

Observando o gráfico de uma função exponencial crescente, podemos deduzir que:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

A figura 1.20 mostra o gráfico da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Pode-se observar que o gráfico é decrescente. Isso acontece porque *a < 1*.

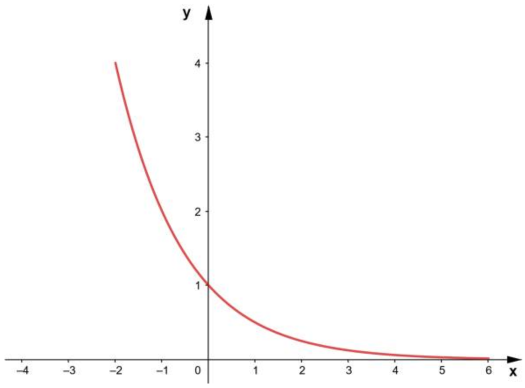


Figura 1.20: Gráfico de uma função exponencial decrescente.

Observando o gráfico de uma função exponencial decrescente, podemos deduzir que:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Além dos limites apresentados acima, existe um limite muito importante, chamado Limite Fundamental Exponencial, dado por

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

em que $\boldsymbol{e}$ é um número irracional, conhecido como número de Euler, cujo valor é

$$e = 2{,}7182818284 \ldots$$

A dedução do Limite Fundamental Exponencial é apresentada no Anexo B.

1.10. Função Logarítmica

A função logarítmica é a inversa da função exponencial e sua lei de formação é dada por

$$\log_a x$$

A base de uma função logarítmica deve ser maior que *0* e diferente de *1*, ou seja, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Gráfico de uma Função Logarítmica

A figura a seguir mostra o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log x$. Da mesma forma que uma função exponencial, a função logarítmica pode ser crescente ou decrescente. Ela será crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. A Figura 1.21 apresenta o gráfico de uma função logarítmica crescente.

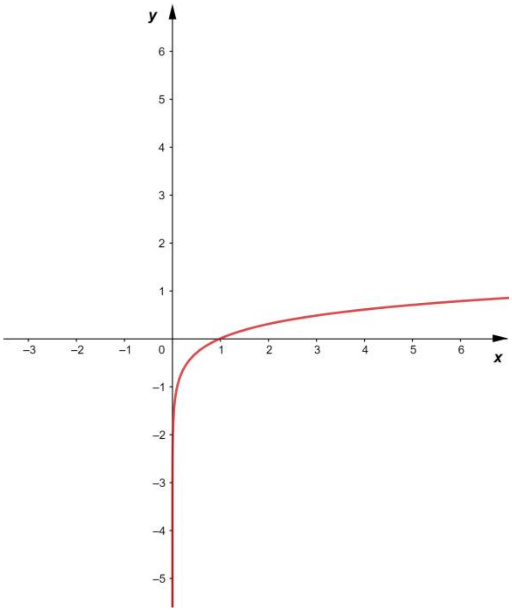


Figura 1.21: Gráfico de uma função logarítmica crescente.

Observando o gráfico de uma função logarítmica crescente, podemos deduzir que:

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

A Figura 1.22 mostra o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Como $0 < a < 1$, o gráfico da função é decrescente.

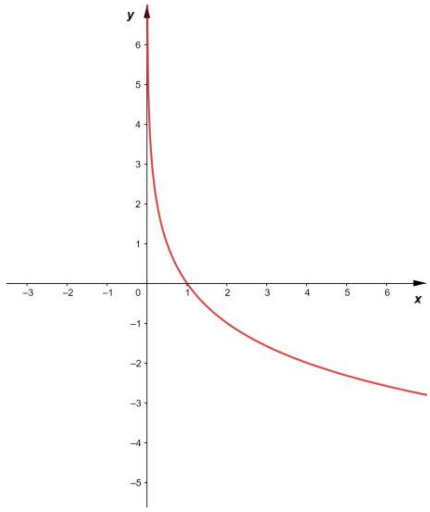


Figura 1.22: Gráfico de uma função logarítmica decrescente.

Observando o gráfico de uma função logarítmica decrescente, podemos deduzir que:

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

O domínio de uma função logarítmica é composto pelos valores reais positivos $D = \{\mathbb{R}_+\}$, enquanto a imagem de uma função logarítmica é todo o conjunto dos números reais $Im = \{\mathbb{R}\}$.

Exemplo 1.22:

$\lim\limits_{x \to \infty} x - \sqrt{x + 3}$

Se substituirmos$x$ por∞ na expressão, o limite cairá numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para tentar resolver o limite, vamos colocar x^2 em evidência dentro da raiz.

$$\lim_{x \to \infty} x - \sqrt{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x - x \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} \right)$$

Sabendo que$\sqrt{x^2}$é igual a $x$se$x > 0$e igual a -x se$x < 0$, temos que

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x - x \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} \right)$$

Colocando x em evidência, temos que

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty} x \,.\, \lim_{x\to\infty}\left(1-\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)$$

$$= \infty. \lim_{x\to\infty}\left(1-\sqrt{0+0}\right) = \infty. \lim_{x\to\infty}(1)$$

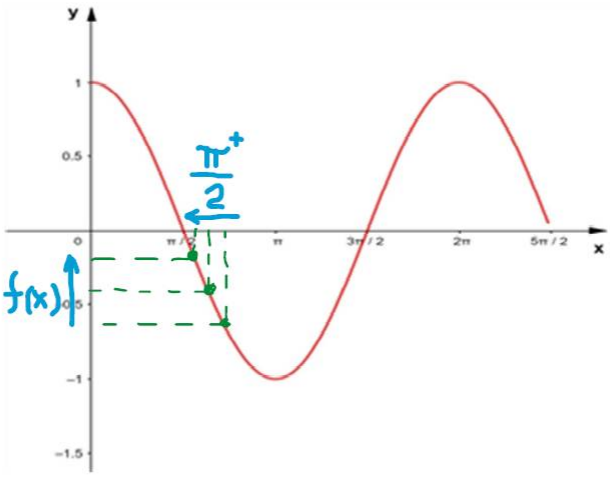
$$= \infty. 1 = \infty$$

Exemplo 1.23: Calcule os limites

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x$.

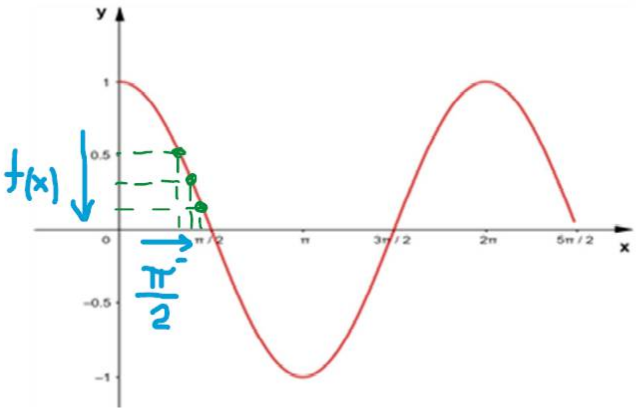
a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \sin x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x} = \frac{1}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x}$



Observe no gráfico da função $\cos x$, que na medida em que x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$ pela direita, $f(x)$ retorna valores negativos se aproximam cada vez mais de 0. Assim,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \frac{1}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x} = -\infty$$

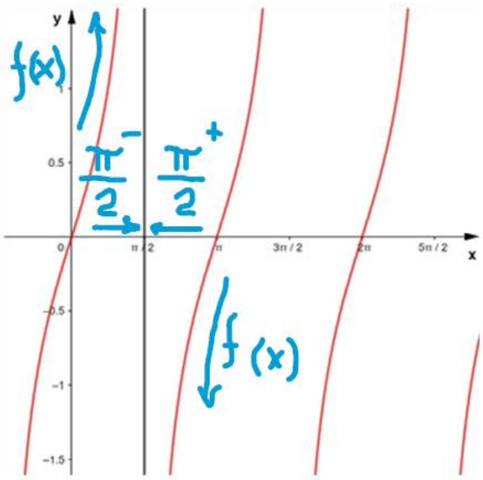
b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x} = \frac{1}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x}$



O raciocínio é o mesmo usado na solução do limite quando $x \to \frac{\pi}{2}^{+}$ só que, neste caso, a função $f(x) = \cos x$ retorna valores positivos que se aproximam cada vez mais de 0 na medida em que x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$ pela esquerda. Assim,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} \tan x = \frac{1}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \cos x} = \infty$$

O gráfico de $f(x) = \tan x$, mostrado abaixo, ilustra a ideia do que acontece com $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} \tan x$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \tan x$. Observe que na medida em que $x \to \frac{\pi}{2}^{+}$, a função retorna valores cada vez maiores enegativos. Por outro lado, quando que $x \to \frac{\pi}{2}^{-}$, a função retorna valores positivos cada vez maiores.



Exemplo 1.24: Calcule os limites as seguir.

a) $\lim_{x \to -\infty} (2^x + 2^{-x})$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-2^x}{1-3^x}$

c) $\lim_{x \to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x ln\, 2 - \ln(3^x + 1)]$

e) $\lim_{u \to 0} (1-u)^{\frac{1}{u}}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Solução:

a) $\lim_{x \to -\infty} (2^x + 2^{-x})$

$$\lim_{x \to -\infty} (2^x + 2^{-x}) = \lim_{x \to -\infty} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left[2^x + \frac{1^x}{2^x}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = \lim_{x \to -\infty} 2^x + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Se a função exponencial é crescente, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Se a função exponencial é decrescente, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Desta forma, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 + \infty = \infty$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-2^x}{1-3^x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-2^x}{1-3^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x \left(\frac{1}{2^x} - 1\right)}{3^x \left(\frac{1}{3^x} - 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{3^x} - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{3^x} - 1}\right) = 0.\frac{-1}{-1} = 0.1 = 0$$

c) $\lim_{x \to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \lim_{x \to 1} \ln(x+1) = \ln 2$$

d) $\lim_{x\to+\infty}[x ln\, 2 - \ln(3^x + 1)]$

$$\lim_{x\to+\infty}[x ln\, 2 - \ln(3^x + 1)] = \lim_{x\to+\infty}[ln\, 2^x - \ln(3^x + 1)]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{2^x}{3^x + 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} ln\frac{2^x}{3^x\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} ln\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x \frac{1}{1 + \frac{1}{3^x}}\right]$$

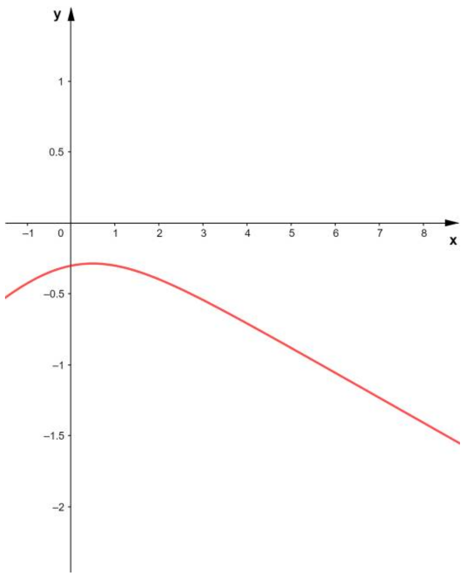
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(\frac{2}{3}\right)^x + ln\frac{1}{1 + \frac{1}{3^x}}\right] = \lim_{x\to+\infty} x ln\frac{2}{3} + ln\frac{1}{1 + \frac{1}{3^x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x ln\frac{2}{3} + \lim_{x\to+\infty} ln\frac{1}{1 + \frac{1}{3^x}}$$

Sabendo que $ln\frac{2}{3} = -0{,}4$, temos que

$$= \lim_{x\to+\infty} x ln\frac{2}{3} + \lim_{x\to+\infty} ln\frac{1}{1 + \frac{1}{3^x}} = \infty.(-0{,}4) + \ln 1 = -\infty + 0 = -\infty$$

Observe no gráfico da função $f(x) = x ln\, 2 - \ln(3^x + 1)$ que na medida em que $x \to +\infty$ os valores que a função retorna tendem a $-\infty$.



e) $\lim_{u\to0}(1 + u)^{\frac{1}{u}}$

Para resolver este limite vamos calcular os limites laterais pela direita e pela esquerda.

$$\lim_{u\to0^+}(1 + u)^{\frac{1}{u}}$$

$$u = \frac{1}{t}\begin{cases} u \to 0^+ \\ t = \frac{1}{u} \\ t \to \infty \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$\lim\limits_{u\to 0^-}(1+u)^{\frac{1}{u}}$

$$u = \frac{1}{t}\begin{cases} u \to 0^- \\ t = \frac{1}{u} \\ t \to -\infty \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

Desta forma, podemos afirmar que se

$$\lim_{u\to 0^+}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e \text{ e } \lim_{u\to 0^-}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Então,

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2} = e.1 = e$$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{x}$$

$$t = \frac{x}{2}$$

$$x \to +\infty$$

$$t = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$x = 2t$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.e = e^2$$

h) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

$$u = e^x - 1$$

$$e^x = u + 1$$

Sabendo que$e^{\ln a} = a$, temos que

$$e^{\ln u+1} = u + 1$$

Assim,

$$x = \ln u + 1$$

$$x \to 0$$

$$u = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Desta forma,

$$\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln u + 1}$$

Passando o u do numerador para o denominador, temos que

$$\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln u + 1} = \lim_{u\to0}\frac{1}{\frac{1}{u}\ln u + 1} = \lim_{u\to0}\frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}$$

$$= \frac{\lim_{u\to0} 1}{\lim_{u\to0}\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\lim_{u\to0}\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}$$

Sabendo que $\lim\limits_{x\to a}(\ln|f(x)|) = \ln\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|$, temos que

$$\lim_{u\to 0}\ln(u+1)^{\frac{1}{u}} = \ln\left|\lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right|$$

Assim,

$$\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln\left|\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right|} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

Desta forma,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercício 1.19: prove, para $a > 0$ e $a \neq 1$, que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Exercício 1.20: Calcule os limites a seguir.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{\frac{4}{5}x}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{8x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln|x-4| - \ln|x|)$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln|x^2-3| - \ln|x+1|)$

Gabarito

1.20a) $\frac{1}{e}$. 1.20b) $\ln\frac{2}{3}$. 1.20c) $e^{-\frac{8}{15}}$. 1.20d) e^{-2}. 1.20e) e^{24}. 1.20f) e^{6}. 1.20g) 0.

1.20h) 0. 1.20i) $-\infty$. 1.20j) e. 1.20k) $+\infty$.

Limites Uteis

Limite Fundamental Trigonométrico	Limite Fundamental Exponencial
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (em radianos)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ (em radianos)	$\lim\limits_{x\to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = e$
Função Exponencial Crescente	**Função Exponencial Decrescente**
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
Função Logarítmica Crescente	**Função Logarítmica Decrescente**
$\lim\limits_{x\to 0} \log(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} f \log(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to \infty} \log(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to \infty} \log(x) = -\infty$
Função Exponencial	**Função Logarítmica**
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$ (para $a > 0$ e $a \neq 1$)	$\lim\limits_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

1.11. Continuidade de uma Função

Uma função é contínua em um determinado ponto quando o valor que a função retorna naquele ponto é igual ao limite da função.

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

A continuidade da função em um determinado ponto está condicionada a três condições. São elas:

1 – O ponto a deve pertencer ao domínio da função, ou seja, $f(a)$ deve existir.

2 – O limite de $f(x)$ quando $x \to a$ deve existir.

3 – O limite da função quando $x \to a$ deve ser igual ao valor que a função retorna no ponto a. Ou seja, $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Somente quando as três condições acima forem satisfeitas a função será contínua no ponto a.

Exemplo 1: Verificar a continuidade da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $x = 0$.

A função $f(x)$ é tal que $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}^*$ o domínio da função. Sabendo que o domínio da função é $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, temos que o domínio da função é composto por todos os números reais, exceto o zero.

Assim,

$$f(0) = \nexists$$

Se a primeira condição não é satisfeita, significa que a função $f(x)$ não é contínua em $x = 0$.

Pode-se observar no gráfico da Figura 1.23 a descontinuidade da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $x = 0$. Na medida que *x* se aproxima de *0* pela direita a função retorna valores que tendem ao infinito. Na medida que *x* se aproxima de *0* pela esquerda, a função retorna valores que tendem ao menos infinito.

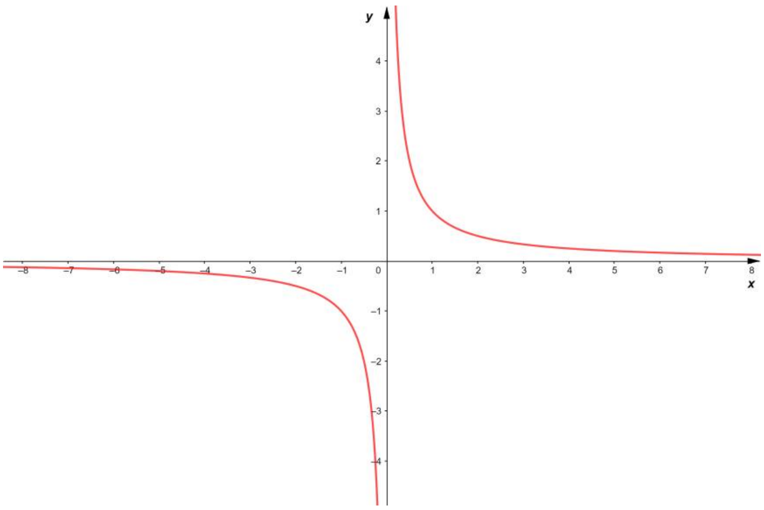


Figura 1.23: Descontinuidade da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $x = 0$.

Exemplo 2: Verificar a continuidade de $f(x)$ em $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Substituindo *x* por *1* na equação, cairemos em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver o problema, precisamos fatorar o numerador.

Sabendo que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, temos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2$$

A função é contínua, uma vez que

$$f(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Exemplo 3: Verificar a continuidade de $f(x)$ em $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

A função não é contínua, uma vez que

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x - 2)^2}$$

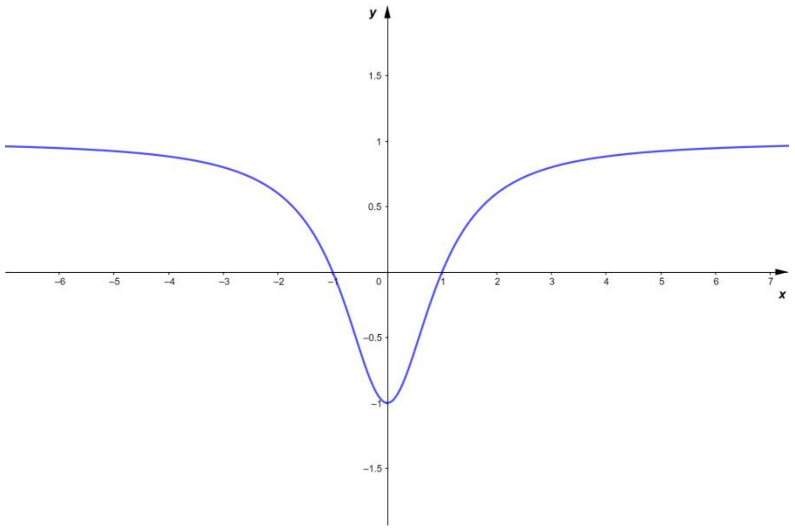
Exemplo 4: Verificar a continuidade da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ em $x = 1$.

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1^2 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1^2 - 1}{1^2 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$$

A função $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ é continua em $x = 1$. Isso pode ser observado no gráfico da função, mostrado na Figura 1.24. Independentemente de *x* se aproximar de *1* pela esquerda ou pela direita, a função vai retornar valores cada vez mais próximos de *1*.



Exemplo 5: Verificar a continuidade da função $f(x)$ em $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

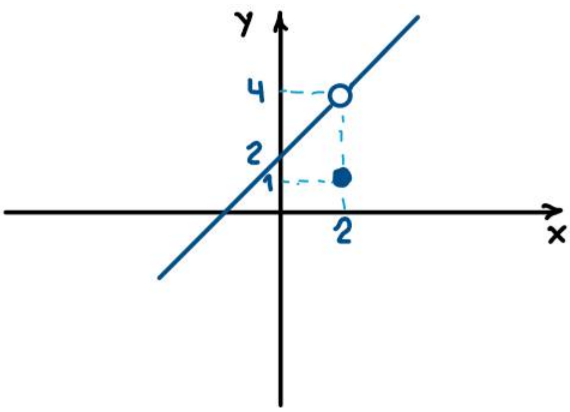
$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

A função não contínua em $x = 2$, uma vez que

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$$

A figura a seguir mostra o gráfico da função $f(x)$. Nele pode ser visto a descontinuidade da função em $x = 2$.



Exemplo 6: Verificar a continuidade da função $f(x)$ em $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 3 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 3 + 1 = 4$$

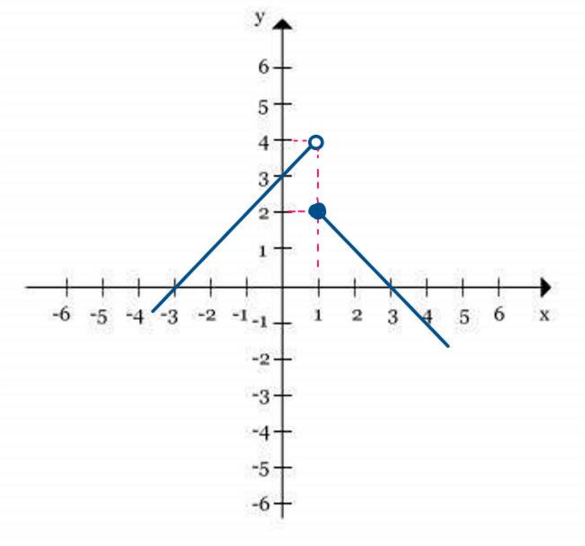
$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

Para encontrar o limite de $f(x)$ é preciso calcular os limites laterais, uma vez que as equações são diferentes quando $x \to 1^+$ e quando $x \to 1^-$.

$$\lim_{x \to 1^+} 3 - x = 3 - 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} 3 + x = 3 + 1 = 4$$

O limite não existe, o que significa que a função é descontínua em $x = 1$, como podemos ver no gráfico, apresentado a seguir.



Exercícios 1.21: Verifique a continuidade das funções nos pontos de interesse.

a) $f(x) = x^2 + 3$, em $x = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, em $x = 0$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, em $x = 0$

d) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$, em $x = 1$

e) $f(x) = |x| + 2$, em $x = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & se\ x < 2 \\ 2x + 3, & se\ x \geq 2 \end{cases}$, em $x = 2$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2}, & se\ x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ \frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}, & se\ x > 2 \end{cases}$, em $x = 2$

Exercício 1.22: Para que valor que k a função é contínua em $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 2, & se\ x < 2 \\ 2x + 3, & se\ x \geq 2 \end{cases}$

Gabarito

1.12. Propriedades de Funções Contínuas

Se as funções f e g são contínuas em C, então:

I) $f + g$ é contínua em C

II) $f - g$ é contínua em C

III) $f.g$ é contínua em C

IV) $\frac{f}{g}$é contínua em C, para $g(x) \neq 0$

V) Se f é continua em C e g é contínua em $f(C)$, então a composta $g\big(f(c)\big)$ é continua em C

VI) As funções $\sin(x)\ e \cos(x)$ são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$

VII) Funções racionais são contínuas em todo o seu domínio

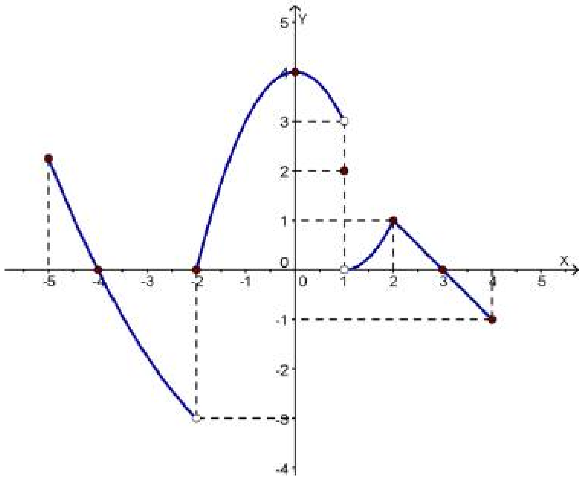
VIII) Se $f: A \to B$ é contínua em *A*, então, caso exista, $f^{-1}: B \to A$ é contínua em *B*.

Exercício 1.23: Considere a função $f(x)$, cujo gráfico é apresentado abaixo:

a) $f(x)$ é contínua em $x = 2$? Justifique.

b) $f(x)$ é contínua em $x = 1$? Justifique.

c) Qual o domínio de $f(x)$ e em quais pontos do seu domínio a função é contínua?



Exercício 1.24: Mostre que a função $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$é contínua no intervalo [-1, 1].

Exercício 1.25: **"**A função é contínua em $x = C$ se estiver definida em f(C), se existir o limite $\lim_{x \to C} f(x)$ e se ________________."

Exercício 1.26: Considere as funções $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 4 \\ -1, & se\ x = 4 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 4x - 1, & se\ x \neq 4 \\ -6, & se\ x = 4 \end{cases}$

a) A função $f(x)$ é contínua em $x = 4$? Justifique.
b) A função $g(x)$ é contínua em $x = 4$? Justifique.
c) A função $f(x) + g(x)$ é contínua em $x = 4$? Justifique.
d) A função $g(f(x))$ é contínua em $x = 4$? Justifique.

Exercício 1.27: Para quais valores de x, se houver, a função $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5 + 4}$ é descontínua.

Exercício 1.28: Encontre um valor para cada constante k, se possível, que faça a função ser contínua em todos os pontos.

a) $f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & se\ x \leq 1 \\ kx^2, & se\ x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} kx^2, & se\ x \leq 2 \\ 2x + k, & se\ x > 2 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & se\ x \neq 4 \\ k, & se\ x = 4 \end{cases}$

Gabarito

2. DERIVADA

Neste capítulo vamos estudar a derivada de uma função. O desenvolvimento da derivada está associado à solução de problemas da reta tangente. Vamos introduzir o conceito de derivada a partir do cálculo do coeficiente angular de uma reta.

A Figura 2.1 apresenta o gráfico de uma função do 1º grau. Dois pontos do gráfico podem ser vistos. São eles definidos pelas coordenadas $(x, f(x))\ e\ (x_1, f(x_1))$. Como o gráfico é uma reta, o coeficiente angular é o mesmo em qualquer intervalo.

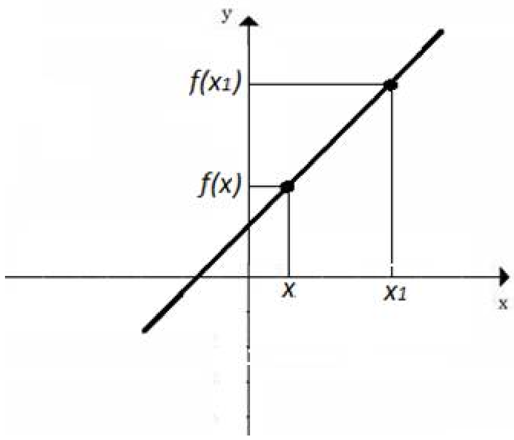


Figura 2.1: Gráfico de uma reta.

O coeficiente angular da reta define a sua inclinação com relação ao eixo *Ox* e pode ser calculado da forma a seguir, em que m é o coeficiente angular da reta no intervalo definido por $[x, x_1]$, também conhecido como taxa média de variação.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Assumindo o intervalo $[x, x_1] = h$, temos que

$$h = x_1 - x$$

Assim, pode-se afirmar que

$$x_1 = x + h$$

Reescrevendo a equação do coeficiente angular, substituindo x_1 por $x + h$, temos que

$$m = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Utilizando o conceito de limite, podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente a qualquer ponto da reta, pela equação

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Fazer $h \to 0$ equivale a aproximar os pontos x e x_1, de forma que a distância entre eles seja aproximadamente zero. Esta abordagem nos permite calcular o coeficiente angular da reta tangente a qualquer ponto de um gráfico, mesmo que ele não seja uma reta. Vejamos o gráfico da Figura 2.2, cuja forma não é uma reta.

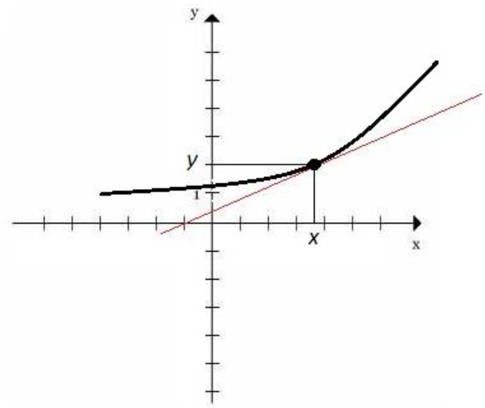


Figura 2.2: Reta tangente ao ponto (x,y).

A equação $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nos permite calcular o coeficiente angular da reta tangente ao ponto, em qualquer parte do gráfico. Podemos observar que a inclinação da reta tangente ao ponto muda de um valor de *x* para outro, pelo fato de o gráfico não ser uma reta.

Derivada de Uma Função

A derivada de uma função é denotada por $f'(x)$. Ela pode ser calculada utilizando a definição de limite, pela equação

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+\ h) - \ f(x)}{h}$$

Que nada mais é do que o cálculo do coeficiente angular da reta tangente em um determinado intervalo, quando o intervalo em questão tende a zero. A derivada permite calcular o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto do gráfico. Para isso, basta substituir o valor de *x* em $f'(x)$. Outras notações para representar a derivada podem ser utilizadas, tais como

$$f'(x) = Dx\big(f(x)\big) = \frac{dy}{dx}$$

As notações dy e dx representam respectivamente variações infinitesimais de *y* e de *x*. Quando a variável *Y* representa *f(x)*, a derivada é denotada por

Y’ ou *Dx(Y)*

O gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, mostrado na Figura 2.3, dá a ideia do conceito de derivada.

A derivada de *f(x)*, que neste caso é $f'(x) = 6x - 5$, permite calcular o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto do gráfico. Em $x = 2$, a derivada é igual a 7. Chegamos a este valor substituindo $x = 2$ na equação de $f'(x)$.

$$f'(2) = 6(2) - 5 = 7$$

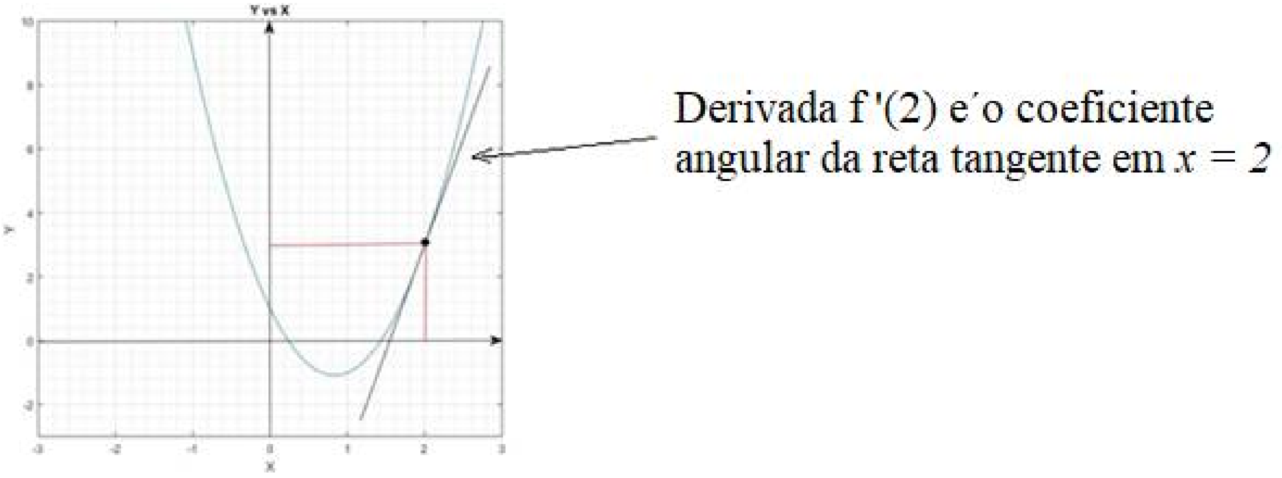


Figura 2.3: Derivada da função em *x=2*.

Exemplo 2.1: Seja a função $f(x) = 3x + 5$, calcule a derivada da função utilizando o conceito de limite.

$$f(x + h) = 3(x + h) + 5 = 3x + 3h + 5$$

$$f(x + h) - f(x) = 3x + 3h + 5 - (3x + 5)$$

$$= 3x + 3h + 5 - 3x - 5$$

$$f(x + h) - f(x) = 3h$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$$\lim_{h \to 0} 3 = 3$$

Podemos dizer que a derivada de $f'(x) = 3$. Em outras palavras, $Dx(3x + 5) = 3$.

Teorema 1: Seja a função $f(x) = ax + b$, sendo a e b constantes. A derivada de *f(x)* é a.

$$Dx(ax + b) = a.$$

Teorema 2: A derivada de uma função constante é zero. Em outras palavras,

$$Dx(ax + b) = 0 \text{ se a} = 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Teorema 3: A derivada e $Dx(ax + b) = 1$ se $a = 1$ e $b = 0$.

Teorema 4: $Dx(x^n) = nx^{n-1}$

$Dx(x) = 1 \Rightarrow Dx(x^1) = 1.x^{1-1} = 1x^0 = 1$

$Dx(x^2) = 2x \Rightarrow Dx(x^2) = 2.x^{2-1} = 2x$

$Dx(x^3) = 3x^2 \Rightarrow Dx(x^3) = 3.x^{3-1} = 3x^2$

$Dx\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow Dx\left(\frac{1}{x}\right) = Dx(x^{-1}) = -1.x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Regra 1: $Dx(f(x) + g(x)) = Dx(f(x)) + Dx(g(x))$

Regra2: $Dx(C.f(x)) = C.Dx(f(x))$

Regra 3: $Dx(f(x).g(x)) = f(x).Dx(g(x)) + g(x).Dx(f(x))$

Regra 4: $Dx(C) = 0$, em que C é uma constante.

Regra 5: Para derivar um polinômio, troque cada termo não constante $a_k x^n$ por $a_k.n.x^{n-1}$ e elimine o termo constante, se ele existir.

Exemplo 2.2: $Dx(8x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 5x + 7)$

$$Dx(8x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 5x + 7) = 8.5x^4 - 4.2x^3 + 2.3x + 5$$

$$= 40x^4 - 8x^3 + 6x + 5$$

Exemplo 2.3: $Dx(3x^7 + \sqrt{2}x^5 - \frac{4}{3}x^2 + 9x - \pi)$

$$= 7.3x^6 + 5.\sqrt{2}x^4 - 2.\frac{4}{3}x + 9$$

$$= 21x^6 + 5\sqrt{2}x^4 - \frac{8}{3}x + 9$$

Exemplo 2.4: Encontre as equações reduzidas das retas tangentes aos gráficos das seguintes funções, nos pontos dados.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, em $x = 2$

b) $f(x) = x^7 - 12x^4 + 2x$, em $x = 1$

a) O coeficiente angular (*m*), de *f(x)* em *x = 2,* pode calculado pela derivada de *f(x).*

$$Dx(3x^2 - 5x + 1)$$

$$= 2.3x - 5$$

$$= 6x - 5$$

Em $x = 2$, tempos que

$$m = 6.(2) - 5 = 7.$$

Equação reduzida da reta tangente

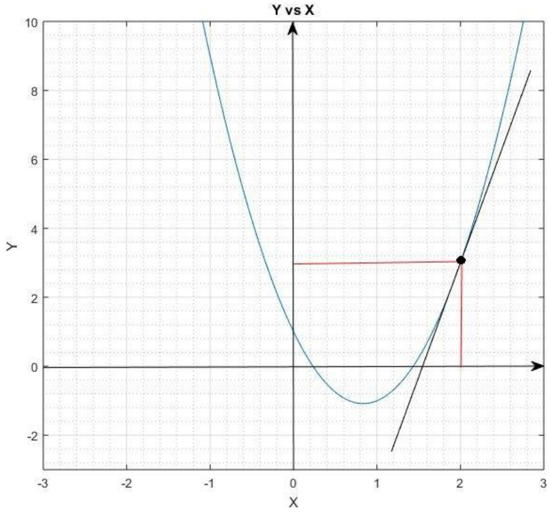
$$y = 3.(2^2) - 5.2 + 1 = 3$$

$$y = 7x + b$$

$$3 = 7.(2) + b$$

$$3 - 14 = b = -11$$

$$y = 7x - 11$$



b) $Dx(x^7 - 12x^4 + 2x)$

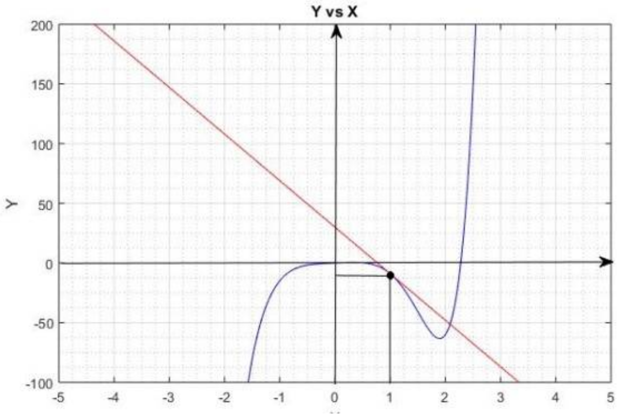
$$= 7x^6 - 4.12x^3 + 2$$
$$= 7x^6 - 48x^3 + 2$$

Em $x = 1$

$$m = 7(1)^6 - 48(1) + 2$$
$$m = -39$$

Equação reduzida da reta tangente

$$y = (1)^7 - 12(1)^4 + 2(1) = -9$$
$$y = -39x + b$$
$$-9 = -39(1) + b$$
$$-9 + 39 = b = 30$$
$$y = -39x + 30$$



Exercícios:

2.1) Use a definição básica de $f'(x)$ como um limite para calcular a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 5$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 7x + 4$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

d) $f(x) = x^4$

e) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

f) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

2.2) Use a regra 5 para calcular as derivadas dos seguintes polinômios

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

b) $f(x) = -8x^5 + \sqrt{3}x^3 + 2\pi x^2 - 12$

c) $f(x) = 3x^{13} - 5x^{10} + 10x^2$

2.3) Determine a derivada de:

a) $Dx(3x^7 - \frac{1}{5}x^5)$

b) Encontre $\frac{d(3x^2-5x+1)}{dx}$

c) Se $y = \frac{1}{2}x^4 + 5x$, obtenha $\frac{dy}{dx}$

d) Calcule $\frac{d(3t^7 - 12t^2)}{dt}$

e) Se $U = \sqrt{2}x^5 - 3x^3$, obtenha DxU

2.4) Encontre as equações reduzidas das retas tangentes aos gráficos das seguintes funções, nos pontos especificados.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 2$, em $x = -1$

b) $f(x) = 4x^3 - 7x^2$, em $x = 3$

c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$, em $x = 0$

2.5) Determine a equação reduzida da reta normal ao gráfico $y = x^3 - x^2$, no ponto onde $x = 1$.

2.6) Obtenha os pontos do gráfico $y = \frac{1}{2}x^2$, nos quais a reta normal passa pelo ponto (4,1).

2.7) Especifique todas as retas que satisfazem as seguintes equações:

a) Passa pelo ponto (0,2) e é tangente a curva $y = x^4 - 12x + 50$

b) Passa pelo ponto (1,5) e é tangente a curva $y = 3x^3 + x + 4$

Gabarito:

2.1a) 2. 2.1b) $\frac{2}{3}x - 7$. 2.1c) $6x^2 + 3$. 2.1d) $4x^3$. 2.1e) $\frac{1}{(2-x)^2}$. 2.1f) $\frac{2}{(2+x)^2}$. 2.1g) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
2.1a) $9x^2 - 8x + 5$. 2.2b) $-40x^4 + 3\sqrt[2]{3}x^2 + 4\pi x$. 2.2.c) $39x^{12} - 50x^9 + 20x$.

2.3a) $21x^6 - x^4$. 2.3b) $6x - 5$. 2.3c) $2x^3 + 5$. 2.3d) $21t^6 - 24t$. 2.3e) $5\sqrt{2}x^4 - 9x^2$.
2.4a) $-7x + 1$. 2.4b) $66x - 153$. 2.4c) 3. 2.5) $y = -x + 1$. 2.6) (2, 2) e (-3, 4,5).

2.7a) $y = 20x + 2$ e $y = -44x + 2$. 27b) $y = \frac{85}{4}x - \frac{65}{4}$.

Regra 6: Regra do quociente. Se f e g são diferenciáveis em x e se $g(x) \neq 0$, então

$$Dx\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x).Dxf(x) - f(x).Dxg(x)}{g(x)^2}$$

Exemplo 2.5:

a) $Dx\,\frac{x+1}{x^2-2} = \frac{(x^2-2).Dx(x+1)-(x+1).Dx(x^2-2)}{(x^2-2)^2} = \frac{(x^2-2).(1)-(x+1).(2x)}{(x^2-2)^2}$

$= \frac{(x^2-2)-(2x^2+2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{x^2-2-2x^2-2x}{(x^2-2)^2}$

$= \frac{-x^2-2x-2}{(x^2-2)^2} = -\frac{x^2+2x+2}{(x^2-2)^2}$

b) $Dx\,\frac{1}{x^2} = \frac{x^2.Dx(1)-1.(Dx(x^2)}{(x^2)^2} = \frac{-(2x)}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

Regra 7: $Dx\left(\frac{1}{x}\right) = Dx(x^{-1}) = (-1).\,x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$Dx\left(\frac{1}{x^2}\right) = Dx(x^{-2}) = (-2).\,x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Exercícios:

2.8) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes fórmulas:

a) $(x^{100} + 2x^{50} - 3)(7x^8 + 20x + 5)$

b) $(x-2)(x+2)$

c) $\frac{x^2-3}{x+4}$

d) $\frac{x^5-x+2}{x^3+7}$

e) $\frac{3}{x^5}$

f) $8x^3 - x^2 + 5 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3}$

g) $\frac{3x^7+x^5-2x^4+x-3}{x^4}$

2.9) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, em $x = 2$

b) $\frac{x+2}{x^3-1}$, em $x = -1$

c) Seja $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, para todo $x \neq 2$. Calcule $f'(-2)$

2.10) Determine os pontos nos quais a função $f(x) = |x-3|$ é diferenciável.

Obs.: Uma função é diferenciável em *x* se $f'(x)$ existir naquele ponto.

Gabarito:

2.8a) $(x^{100} + 2x^{50} - 3)(7x^8 + 20x + 5)$. 2.8b) $2x$. 2.8c) $\frac{x^2+8x+3}{(x+4)^2}$.

2.8d) $\frac{2x^7+35x^4+2x^3-6x^2-7}{(x^3+7)^2}$. 2.8e) $\frac{-15}{x^6}$. 2.8f) $24x^2 - 2x + \frac{2}{x^2} - \frac{12}{x^4}$.

2.8g) $9x^2 + 1 - \frac{3}{x^4} + \frac{12}{x^5}$. 2.9a) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. 2.9b) $y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$.

2.9c) $-\frac{1}{4}$. 2.10) todos os pontos, exceto em $x = 3$.

2.1. Máximos e Mínimos

Neste item vamos analisar os extremos relativos e absolutos de uma função, que incluem os pontos máximos mínimos, além dos pontos críticos.

2.1.1. Máximo Relativo

Uma função é dita ter um máximo relativo em $x = c$ se $f(x) \leq f(c)$ para todo x próximo de c. Mais precisamente, f atinge um valor máximo relativo em c, se existe um $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \delta$ implica em $f(x) \leq f(c)$.

Exemplo 2.6: Dada a função *f*, cujo gráfico é apresentado na Figura 2.4, os máximos relativos ocorrem em $x = c_1$ e $x = c_2$.

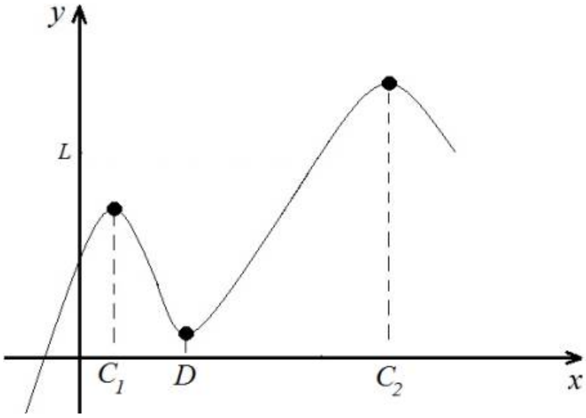


Figura 2.4: Máximos e mínimo relativos.

O termo "**relativo**" é usado para qualquer "**máximo**", uma vez que o valor de uma função em um **máximo relativo** não é necessariamente o maior valor da função. O máximo relativo também é chamado de máximo local.

2.1.2. Mínimo Relativo

Uma função é dita ter um mínimo relativo em $x = c$, se $f(x) \geq f(c)$ para todo x próximo de c.

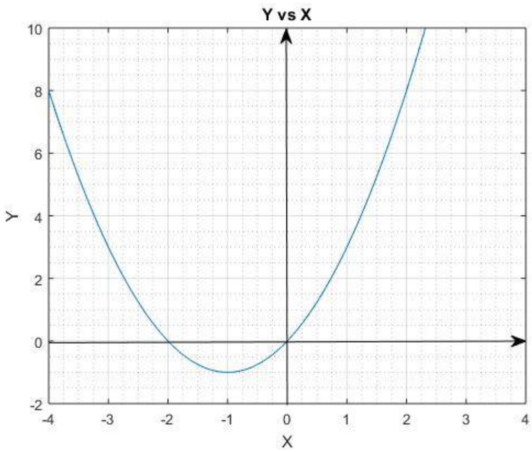
No gráfico da Figura 2.4, f atinge um valor mínimo em $x = D$, uma vez que o ponto D é o ponto mais baixo dentre os que estão próximos. Sendo assim, podemos afirmar que o valor de um **mínimo relativo** não precisa ser o valor mínimo da função. O mínimo relativo também é chamado de mínimo local.

2.1.3. Extremo Relativo

Por extremo relativo, entende-se um ponto máximo relativo ou um ponto mínimo relativo. Pontos entre os quais existe um extremo relativo possuem a seguinte propriedade especial.

Propriedade 2.1: Se f tem um extremo relativo em $x = c$ e se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$ naquele ponto. Isso acontece porque a reta tangente no extremo relativo é horizontal e, portanto, seu coeficiente angular é 0.

Exemplo 2.7: Seja a função $f(x) = x^2 + 2x$, determine o mínimo da função no intervalo [-2,0].



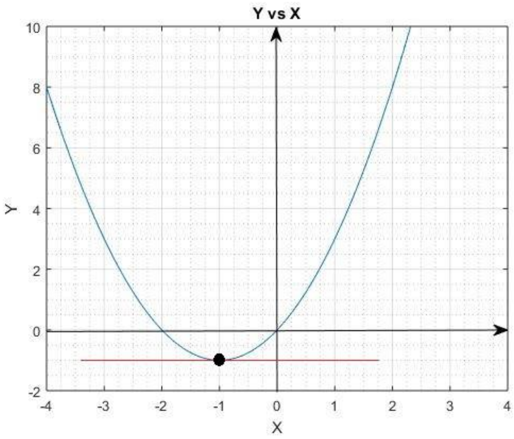
Podemos observar, olhando atentamente para o gráfico da função, que o mínimo relativo no intervalo [-2,0] ocorre em $x = -1$. Observe também que o valor da função em $f(-1) = -1$. A derivada de $f(x)$ neste ponto é

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(-1) = 2(-1) + 2$$

$$f'(-1) = 0$$



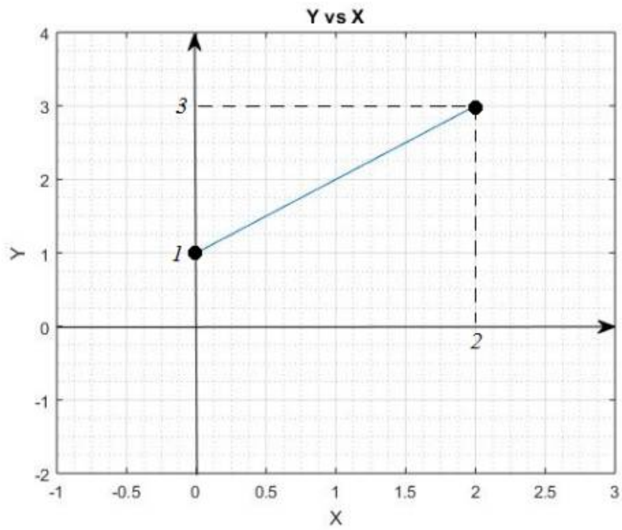
Observe no gráfico que no ponto mínimo, $f'(x) = 0$, uma vez que a reta tangente é paralela ao eixo *Ox*. Podemos conjecturar que o ponto *(-1,-1)* é também o mínimo absoluto da função, uma vez que todos os valores assumidos pela função são maiores ou igual a -1.

2.1.4. Máximo e Mínimo Absolutos

Seja *c* um número no domínio *D* de uma função *f*. Então, *f(c)* é o valor **máximo absoluto** de *f* em *D*, se $f(c) \geq f(x)$. Da mesma forma, *f(c)* é o **mínimo absoluto** de *f* em *D*, se $f(c) \leq f(x)$.

Um máximo ou mínimo absoluto é às vezes chamado de máximo ou mínimo **global**. Os valores máximos e mínimos de *f* são chamados de **valores extremos** de *f*.

Exemplo 2.8: Seja $f(x) = x + 1$, para todo *x* no intervalo fechado [0,2]. A função *f* atinge o máximo absoluto em *x = 2*; esse valor de máximo absoluto é 3. A função *f* atinge o mínimo absoluto em *x = 0*; esse valor mínimo absoluto é o 1.



Teorema do Valor Extremo: Qualquer função contínua *f* sobre um intervalo [a,b] admite um valor **máximo absoluto** e um **mínimo absoluto** em [a,b].

2.1.5. Ponto Crítico

O **ponto crítico** de uma função é um número c no domínio de *f*, tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c) = não\ existe$. Quando $f'(c) = 0$, dizemos que o ponto $f'(c)$ é um **ponto estacionário**.

A Figura 2.5 mostra o gráfico de uma função *f*, na qual podemos ver os pontos críticos, que também são pontos máximos e mínimos da função. Nos pontos máximos e mínimos da função, $f'(x) = 0$.

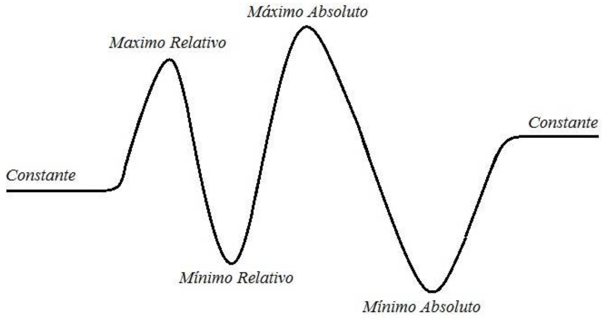


Figura 2.5: Máximos e mínimos de uma função.

É importante observar, no entanto, que nem sempre um ponto crítico, onde $f'(x) = 0$, corresponde a um máximo ou mínimo da função. Na Figura 2.6, podemos ver três situações em que temos um ponto crítico.

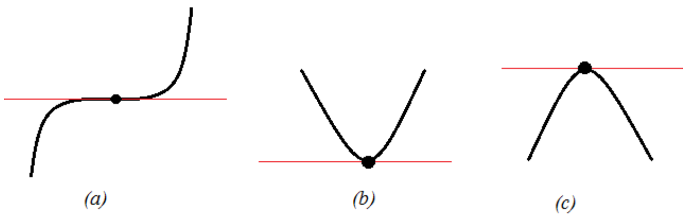


Figura 2.6: Um ponto crítico pode não ser um ponto máximo ou um ponto mínimo.

Na Figura *2.6a*, temos um ponto crítico que não é nem máximo nem mínimo da função. Nas Figuras 2.6b e 2.6c, vemos pontos críticos que também são pontos máximos e mínimos, respectivamente. Nos três casos, $f'(x) = 0$.

Há situações, no entanto, em que um ponto crítico não pode ser chamado de ponto estacionário. A Figura 2.7 apresenta três casos em que um ponto crítico não é um ponto estacionário, ou seja, $f'(x) \neq 0$. Na verdade, a derivadas nos pontos em questão não existem. Assim, $f'(x) = \nexists$ nesses pontos. Nos casos 2.7a e 2.7b, a derivada não existe porque existe mais de uma reta tangente naquele ponto.

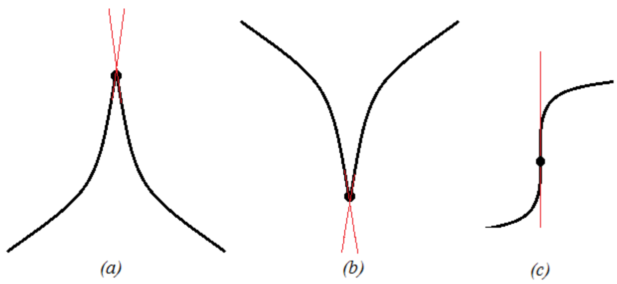
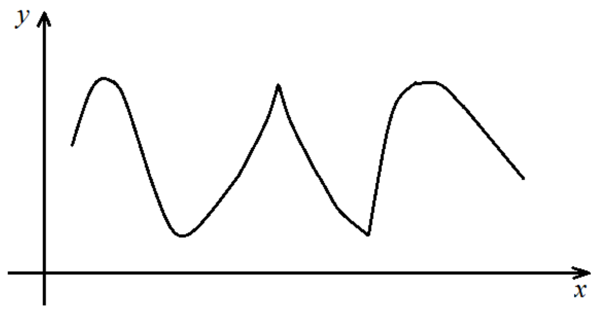


Figura 2.7: Ponto crítico não é um ponto estacionário.

Sabemos que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente àquele ponto e pode ser calculada pela $tg\ \alpha$, em que o ângulo α é o ângulo formado pela reta tangente e o eixo Ox. Como a reta tangente na figura *2.7c* é uma reta vertical, perpendicular ao eixo Ox, ou seja, $\alpha = 90^o$, podemos afirmar que a derivada naquele ponto não existe porque $tg\ 90^o = \nexists$.

Quando a derivada de uma função não existe em um determinado ponto do gráfico, dizemos que a função não é diferenciável naquele ponto.

Exercício 2.11: Classifique os pontos críticos e os pontos estacionários.



Pontos Máximos e Mínimos de uma Função Polinomial

Para determinar os máximos e mínimos de uma função polinomial pelo teste da derivada primeira, podemos seguir os seguintes passos:

1º Passo: Encontrar a derivada primeira da função $f'(x)$;

2º Passo: Igualar a derivada a zero para encontrar os pontos críticos $f'(x) = 0$;

3º Passo: Encontrar os valores das derivadas para valores próximos dos pontos críticos (antes e depois);

4º Passo: Definir se a derivada é crescente ou decrescente entre os valores críticos e o valor anterior e o posterior a eles.

Exemplo 2.7: Seja a função $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 16$. Encontre os máximos e mínimos da função.

1º) $Dx(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 16) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$

2º) $12x^3 + 12x^2 - 24x = 0\ (\div 12)$

$$= x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$= x(x^2 + x - 2) = 0$$

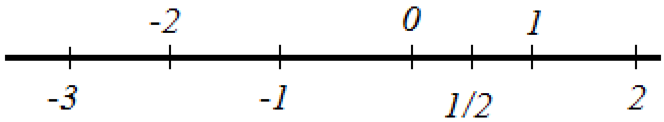
As raízes da equação $12x^3 + 12x^2 - 24x = 0$ são

$$x' = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x'' = -2 \text{ e } x''' = 1$$

3º) Vamos calcular o valor da derivada nos pontos anteriores e posteriores às raízes da derivada da função. São eles os pontos -3, -1, ½ e 2.



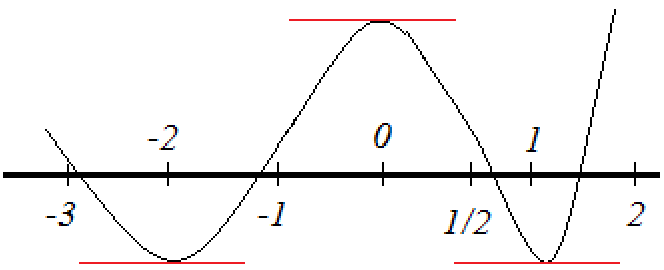
$$f'(-3) = 12(-3)^3 + 12(-3)^2 - 24(-3) = -144 \text{ (decrescente)}$$

$$f'(-1) = 12(-1)^3 + 12(-1)^2 - 24(-1) = 24 \text{ (crescente)}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 24\left(\frac{1}{2}\right) = -7{,}5 \text{ (decrescente)}$$

$$f'(2) = 12(2)^3 + 12(2)^2 - 24(2) = 96 \text{ (crescente)}$$

O Cálculo acima nos permite traçar a tendência do gráfico entre as raízes da função. Observe que a função tem dois mínimos e um máximo, mas não é possível determinar os valores exatos da função nos pontos críticos.

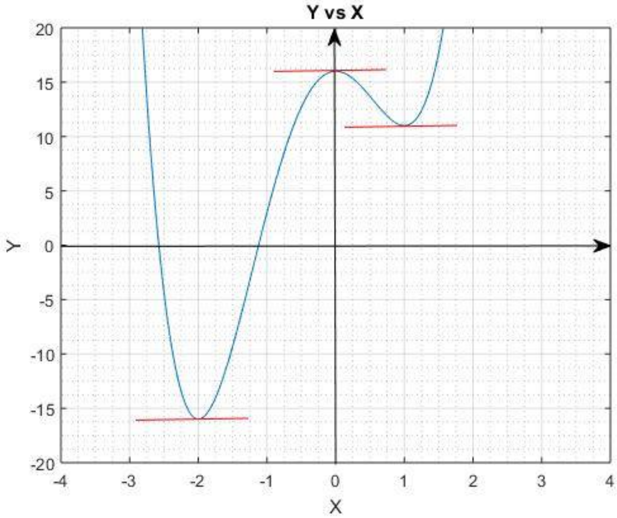


Para determinar os valores exatos da função nos pontos críticos temos de calcular o valor da função para os valores máximos e mínimos encontrados.

$$f(1) = 3(1)^4 + 4(1)^3 - 12(1)^2 + 16 = +11$$

$$f(0) = 3(0)^4 + 4(0)^3 - 12(0)^2 + 16 = +16$$

$$f(-2) = 3(-2)^4 + 4(-2)^3 - 12(-2)^2 + 16 = -16$$



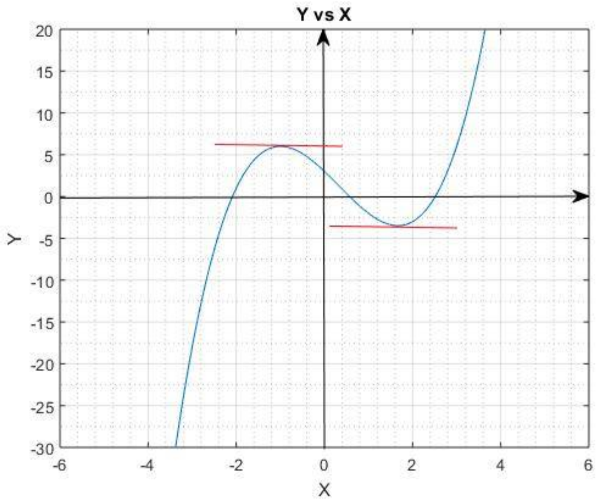
Exemplo 2.8: Seja $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 3$. Determine os pontos máximos e mínimos da função.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

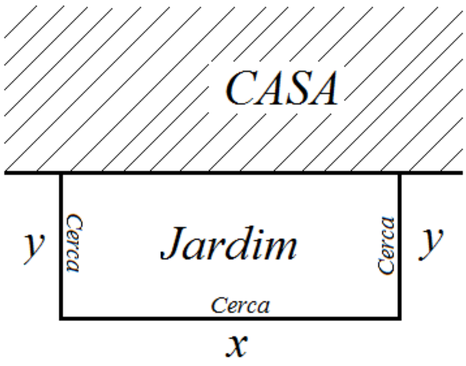
Os pontos críticos são encontrados quando $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 2x - 5$$
$$x_1 = \frac{5}{3} \text{ e } x_1 = -1$$

Existem dois pontos críticos. São eles os pontos $\frac{5}{3}$ e –1.



Exemplo 2.9: Um morador quer construir um jardim retangular. Encontre as dimensões do maior jardim que pode ser cercado com 40 m de cerca, lembrando que um dos lados do jardim utiliza a parede da casa como limite.



$$2y + x = 40$$

$$x = 40 - 2y$$

$$A = y.x = y(40 - 2y)$$

$$A = 40y - 2y^2$$

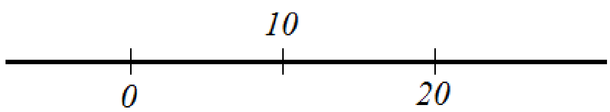
$$f'(40y - 2y^2) = 40 - 4y$$

Encontrando o máximo da função

$$40 - 4y = 0$$

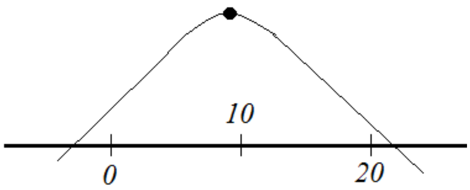
$$40 = 4y$$

$$y = 10$$



$f'(0) = 40 - 4(0) = 40$ (crescente)

$f'(20) = 40 - 4(20) = -40$ (decrescente)



Y = 10 é o valor ideal para a cerca

Assim,

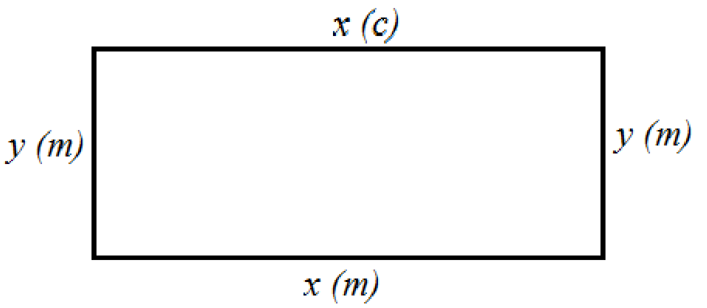
$$x = 40 - 2y$$

$$x = 40 - 2(10)$$

$$x = 20$$

A maior área do jardim é $A = 20.10 = 200\, m^2$

Exemplo 2.10: Uma loja quer construir um cercado retangular com 600 m^2 de área. Três lados serão construídos de madeira (m) a um custo de R$14,00 o metro. O último será construído com blocos de cimento (c), custando R$28,00 o metro. Qual a dimensão que melhor vai otimizar o custo do cercado?



$$\Delta = x.y$$

$$600 = x.y$$

$$y = \frac{600}{x}$$

Custo do Cercado (CC) = 28x + 14(2y + x)

$$CC = 28x + 28y + 14x$$

$$CC = 42x + 28y$$

$$CC = 42x + 28\left(\frac{600}{x}\right)$$

$$CC = 42x + \frac{16800}{x}$$

$$CC = 42x + 16800x^{-1}$$

$$CC' = 42 - 16800x^{-2}$$

$$CC' = 42 - \frac{16800}{x^2}$$

Igualando a derivada a zero, temos que,

$$CC' = 0$$

$$42 - \frac{16800}{x^2} = 0$$

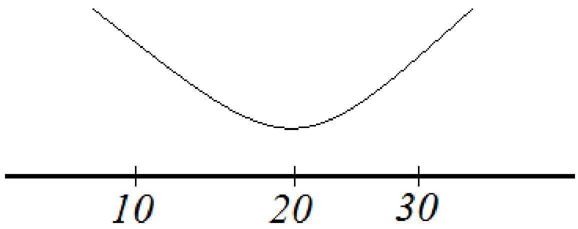
$$42 = \frac{16800}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{16800}{42} = 400$$

$$x = \pm\sqrt{400}$$

$$x = \pm 20$$

Como não faz sentido valores negativos, $x = 20$



$$f'(10) = 42 - \frac{16800}{10^2} = -126 \text{ (decrescente)}$$

$$f'(30) = 42 - \frac{16800}{30^2} = 23{,}33 \text{ (crescente)}$$

$$\Delta = x.y = 600$$

$$y = \frac{600}{x} = 30$$

$$x = 20\,m \text{ e } y = 30\,m$$

Exercício 2.11: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de *f* no intervalo dado.

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, [0,3]

b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, [0,3]

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, [-2,3]

d) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$, [-3,5]

e) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $[-2, 3]$

f) $f(t) = (t^2 - 4)^3$, $[-2{,}3]$

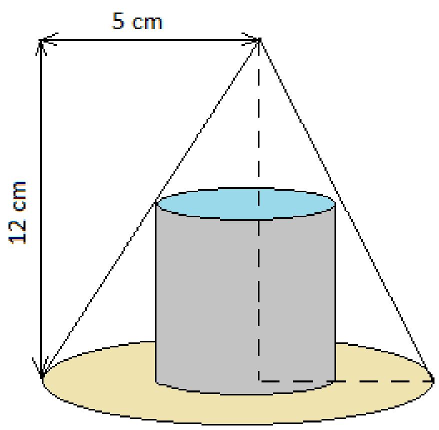
g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[0{,}2, 4]$

h) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, $[0{,}3]$

i) $f(t) = t - \sqrt[3]{t}$, $[-1, 4]$

j) $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1 + t^2}$, $[0{,}2]$

Exercício 2.12: Encontrar as dimensões de um cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto com raio de 5 cm e altura de 12 cm.



Gabarito:

2.11a) Máximo $(0, 5)$ e mínimo $(2, -7)$.

2.11b) Máximo $(-1, 3)$ e mínimo $(1, -1)$. .

2.11c)Máximo $(-1, 12)$ e mínimo $(2, -15)$.

2.11d) Máximo $(5, 105)$ e mínimo $(-3, -103)$.

2.11e) Máximo $(0, 5)$ e mínimo $(-2, -27)$.

2.11f) Máximo $(3{,}12\ 5)$ e mínimo $(0, -64)$.

2.11g) Máximo $(0{,}2, \frac{26}{5})$ e mínimo $(1, 2)$.

2.11h) Máximo $(1, 1)$ e mínimo $(0, 0)$.

2.11i) Máximo $(4, 2{,}41)$ e mínimo $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}, -0{,}39\right)$

2.11j) Máximo $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 5{,}6\right)$ e mínimo $(0, 0)$.

2.12) $raio = \frac{10}{3}$ cm e altura = 4 cm

2.2. Regra da Cadeia

A regra da cadeia é uma técnica utilizada quando é calculada a derivada de uma função composta. A Figura 2.8 ilustra a ideia. A função é composta quando a saída de uma função serve como entrada para outra função.

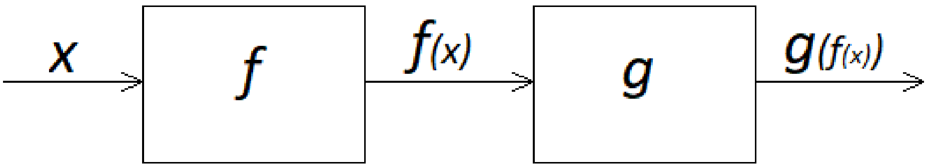


Figura 2.8: Fluxograma de uma função composta.

Teorema: A composição de funções contínuas é uma função contínua. Se *f* é contínua em *a* e *g* é contínua em *f(a)*, então $g \circ f$ (*g* composta de *f*) é contínua em *a*. Uma função composta poder ser representada da forma:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

A função composta pode ser escrita a partir de duas funções mais simples.

Exemplo 2.10: Dadas as funções abaixo, determine *g(f(x))*.

a) $\sqrt{x^3 - x + 2}$ e $f(x) = x^3 - x + 2$

$$g\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)}$$

b) $\sqrt[3]{x + 4}$ e $f(x) = x + 4$

$$g\big(f(x)\big) = \sqrt[3]{f(x)}$$

c) $(x^2 + 3x - 1)^{23}$e $f(x) = x^2 + 3x - 1$

$$g\big(f(x)\big) = (f(x))^{23}$$

Teorema: Regra da cadeia para potências, se *f* é diferenciável e *n* é qualquer inteiro, então

$$Dx(f(x))^n = n\big(f(x)\big)^{n-1}.\ Dx(f(x))$$

Exemplo 2.11: Calcule a derivada utilizando a regra da cadeia

a) $Dx((x^2 - 5)^3)$

$$= 3(x^2 - 5)^2 . 2x$$
$$= 6x(x^2 - 5)^2$$

b) $Dx((x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^7)$

$$= 7(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)^6 . (3x^2 - 4x + 3)$$

c) $Dx(\frac{1}{(3x-5)^4})$

$$= Dx(3x - 5)^{-4}$$

$$= -4(3x - 5)^{-5} . (3)$$

$$= -12(3x - 5)^{-5}$$

$$= \frac{-12}{(3x - 5)^5}$$

Regra da Cadeia: Assuma que *f* é diferenciável em x e g é diferenciável em *f(x)*. Então, a composição $g \circ f$ é diferenciável em *x* e a derivada $Dx(g \circ f)$ é dada por

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) . f'(x)$$

Outra forma de representar a regra da cadeia é por meio da representação a seguir. Suponha que

$$y = (3x + 1)^2$$

Pela regra da cadeia

$$(y)' = \frac{d(y)}{du}\frac{d(u)}{dx}$$

Se $u = 3x + 1$, temos que

$$y = u^2$$

Assim,

$$(y)' = \frac{d(u^2)}{du}\frac{d(3x + 1)}{dx} = 2u . 3$$

Como $u = 3x + 1$, temos que

$$(y)' = 2(3x + 1) . 3 = 6(3x + 1) = 18x + 6$$

Álgebra: Um número racional R é aquele que pode ser representado na forma $R = \frac{n}{k}$, na qual *n* e *k* são inteiros, com *k* positivo. Por definição

$$a^{\frac{n}{k}} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^n$$

exceto quando a é negativo e k é par (caso no qual a *k-enésima* de a não é definida).

Corolário: Se *f* é diferenciável e R é um número racional, então

$$Dx((f(x))^R) = R\left(f(x)\right)^{R-1}.Dxf(x)$$

Exemplo 2.12: Resolva os radicais abaixo

a) $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
b) $32^{\frac{-2}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
c) $-27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^4 = -3^4 = 81$
d) $-4^{\frac{7}{8}} = \left(\sqrt[8]{-4}\right)^7 = \nexists$ no conjunto dos reais

Exercício 2.13: Calcule as derivadas

a) $(\, x^4 - 3x^2 + 5x - 2\,)^3$

b) $\sqrt{7x^3 - 2x^2 + 5}$

c) $\frac{1}{(5x^2+4)^3}$

d) $\sqrt{1 + \sqrt{x+1}}$

Exercício 2.14: Encontre os extremos absolutos de $f(x) = x.\sqrt{1 - x^2}$, em [*0,1*].

Exercício 2.15: Para cada par de funções *f(x)* e *g(x)*, encontre fórmulas para $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

a) $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $g(x) = 3x$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $g(x) = x^3$

c) $f(x) = 2x^3 - x^2 = 4$, $g(x) = 3$

d) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$, g$(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 4$

Exercício 2.16: Para cada par de funções encontre o conjunto de soluções da equação $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

a) $f(x) = x^3$; $g(x) = x^6$

b) $f(x) = \frac{2}{x+1}$; $g(x) = 3x$

c) $f(x) = 2x$; $g(x) = \frac{1}{x-1}$

d) $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{1}{x+1}$

e) $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{1}{x^3-3}$

Exercício 2.17: Expresse cada uma das seguintes funções como a composição $(g \circ f)(x)$ de duas funções mais simples.

a) $(x^3 - 2x + 2)^4$

b) $(8 - x)^4$

c) $\sqrt{1 + x^2}$

d) $\frac{1}{x^2 - 4}$

Exercício 2.18: Encontre as derivadas das seguintes funções

a) $(x^3 - 2x^2 + 7x - 3)^4$

b) $(7 - 3x)^5$

c) $(2x - 3)^{-2}$

d) $(3x^2 + 5)^{-2}$

e) $(4x^2 - 3)^2 . (x + 5)^3$

f) $\left(\frac{x^2 + 2}{x - 3}\right)^3$

g) $\left(\frac{x^2-2}{2x^2+1}\right)^2$

h) $\frac{4}{3x^2-x+5}$

i) $\sqrt{1+x^3}$

Exercício 2.19: Encontre as derivadas das seguintes funções

a) $2x^{\frac{3}{4}}$

b) $x^2(1-3x^3)^{\frac{1}{3}}$

c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $(7x^3-4x^2+2)^{\frac{1}{4}}$

e) $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$

f) $8x^{\frac{3}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{3}}$

g) $\sqrt[3]{(4x^2+3)^2}$

h) $\sqrt{\frac{4}{x}}$

i) $\sqrt{4-\sqrt{4+x}}$

j) $\frac{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}{1-2x}$

Exercício 2.20: Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ no ponto $(2, \frac{1}{5})$.

Exercício 2.21: Determine a equação reduzida da reta normal ao gráfico $\sqrt{x^2+16}$, nos pontos $(3, 5)$.

Exercício 2.22: Sejam $g(x) = x^2 - 4$ e $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, determine $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

Exercício 2.23: Encontre os pontos críticos das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, em (-1, 1)

b) $f(x) = (x-2)^2(x+3)^3$, (-4, 3)

c) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, em (-1, 1)

d) $f(x) = \frac{2}{3}x - x^{\frac{2}{3}}$, em (0, 8)

e) $f(x) = x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{9}x^{\frac{7}{5}}$, em (-1, 1)

Gabarito:

2.13a) $3(x^4 - 3x^2 + 5x - 2)^2(4x^3 - 6x + 5)$. 2.13b) $\frac{x(21x-4)}{2\sqrt{7x^3-2x^2+5}}$. 2.13c) $\frac{-30x}{(5x^2-4)^4}$.
2.13d) $\frac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{x+1}(x+1)}}$. 2.14) Mínimos (0, 0), (1, 0) e máximo ($\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$).

2.15a) $(f \circ g)(x) = \frac{2}{3x+1}$ e$(g \circ f)(x) = \frac{6}{x+1}$.
2.15b) $(f \circ g)(x) = x^6 + 2x^3 - 5$ e $(g \circ f)(x) = (x^2 + 2x - 5)^3$.
2.15c) $(f \circ g)(x) = 49$ e $(g \circ f)(x) = 3$.
2.15d) $(f \circ g)(x) = x^6$ e $(g \circ f)(x) = x^6$.
2.15e) $(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$.
2.15f) $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$ e $(g \circ f)(x) = x^2 - 4$
2.16a) $x \varepsilon \mathbb{R}$. 2.16b) $-\frac{1}{4}$. 2.16c) $\frac{1}{3}$. 2.16d) 0. 2.16e) $\sqrt[3]{2}$.
2.17a) $f(x) = (x^3 - 2x + 2)^4$ e $g(x) = x^4$.
2.17b) $f(x) = 8 - x$ e $g(x) = x^4$.
2.17c) $f(x) = 1 + x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
2.17d) $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.
2.18a) $4(x^3 - 2x^2 + 7x - 3)^3(3x^2 - 4x + 7)$.
2.18b) $-15(7-3x)^4$.
2.18c) $-\frac{4}{(2x-3)^3}$.
2.18d) $\frac{18x}{(3x^2+5)^4}$.
2.18e) $16x(4x^2 - 3)(x + 5)^3 + 3(4x^2 - 3)^2(x + 5)^2$.
2.18f) $\frac{3(x^2+2)^2(x^2-6x-2)}{(x-3)^4}$. 2.18g) $\frac{20x(x^2-2)}{(2x^2+1)^3}$. 2.18h) $\frac{4(-6x+1)}{(3x^2-x+5)^2}$. 2.18i) $\frac{3x}{2\sqrt{1+x^3}}$.
2.19a) $\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$. 2.19b) $\frac{2x-9x^4}{\sqrt[3]{(1-3x^3)^2}}$. 2.19c) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. 2.19d) $\frac{21x^2-8x}{4\sqrt[4]{(7x^3-4x^2+2)^3}}$.
2.19e) $\frac{3}{2\sqrt{(x-1)^3}\sqrt{x+2}}$. 2.19f) $\frac{6}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[4]{x^3}}$.
2.19g) $\frac{16x}{3\sqrt[3]{4x^2+3}}$. 2.19h) $-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. 2.19i) $-\frac{1}{4\sqrt{4-\sqrt{4+x}}\sqrt{4+x}}$. 2.18j) $\frac{2(-x^3+x^2+1)}{\sqrt[3]{1+x^3}(1-2x)^2}$.

2.20) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{15}$. 2.21) $y = -\frac{5}{3}x + 10$.

2.22) $\frac{x^2-2}{x^2-6}\ e$.

2.23a) Não existe. 2.23b) $(-3,0)$; $(0,108)$; $(2,0)$. 2.23c) Não existe.
2.23d) $(1,-\frac{1}{3})$.
2.23e) Não existe.

2.3. Regra de L'Hospital

A regra de L'Hospital é uma regra que pode ser aplicada ao cálculo de limite que recai sobre uma das indeterminações

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\infty}{\infty}.$$

A aplicação da regra de L'Hospital facilita o cálculo do limite em um desses casos, e se baseia no fato de que

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Assim, ao se deparar com um dos casos de indeterminação citados acima, calcule a derivada da $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ até que a indeterminação seja anulada e o cálculo do limite possa ser efetuado.

Exemplo 2.14: Calcule $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$.

Substituindo x por 1 na equação é possível observar que o cálculo do limite cai na indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim sendo, a regra de L'Hospital pode ser aplicada.

$$Dx(x^2-1)=2x \quad \text{e} \quad Dx(x-1)=x$$

A equação pode ser reescrita da forma

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$$

Exemplo 2.15: Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$, sabendo que $Dx(\ln x)=\frac{1}{x}$.

$$Dx(\sqrt{x})=Dx\left(x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}x^{-\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} . \frac{2\sqrt{x}}{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Por causa da indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, vamos derivar $Dx(2\sqrt{x})$ e $Dx(x)$.

$$Dx\left(2\sqrt{x}\right) = Dx(2x^{\left(\frac{1}{2}\right)})$$

$$= 2. x^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2. \frac{1}{2} . x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$Dx\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e

$$Dx(x) = 1$$

Então,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Exemplo 2.16: Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$, sabendo que $Dx(e^x) = e^x$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Por causa da indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, vamos derivar $Dx(e^x)$ e $Dx(2x)$.

$$Dx(e^x) = e^x \text{e} Dx(2x) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

Exemplo 2.17: Calcule $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}\right)$.

Substituindo x por 2 na equação é possível observar que o cálculo do limite cai na indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim sendo, a regra de L'Hospital pode ser aplicada.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x^2 + 2x - 8)'}{(x^2 - x - 2)'}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{2x + 2}{2x - 1}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x + 2}{2x - 1}\right) = \frac{6}{3} = 2$$

Exemplo 2.18: Calcule $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)$, sabendo que $Dx(sen\,x) = cos\,x$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x}\right) = \frac{sen\,(0)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Aplicando a regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{cos\,x}{1}\right) = \frac{cos\,(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemplo 2.19: Calcule $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,2x}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,2x}{x}\right) = \frac{sen\,(2.0)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Aplicando a regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,(2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2.\,cos\,(2x)}{1}\right) = \frac{2.\,cos\,(2.0)}{1} = \frac{2.\,(1)}{1} = 2$$

Exercício 2.24:Calcule os limites a seguir.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{8^x}$ (obs.: $Dx(a^x) = a^x.\ln a$)

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^{3x}}\right)$

d) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{sen\,(\pi x)}{x-1}\right)$ (obs.: $\cos\pi = -1$)

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - cos\,x}{4.sen\,x}\right)$

f) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2e^{2x}-2}{x^2+x}\right)$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x.cos\,x}{(x+1).sen\,x}\right)$

Gabarito:

2.24a) 0. 2.24b) 0. 2.24c) 0. 2.24d) $-\pi$. 2.24e) $\frac{1}{4}$. 2.24f) 4. 2.24g) 1.

2.4. Círculo Unitário

Neste item vamos trabalhar a solução de derivadas de funções trigonométricas. Antes, porém, vamos rever alguns conceitos de trigonometria. A melhor forma de fazer isso é analisando o círculo unitário, apresentado na Figura 2.9, o qual é o gráfico da função $x^2 + y^2 = 1$.

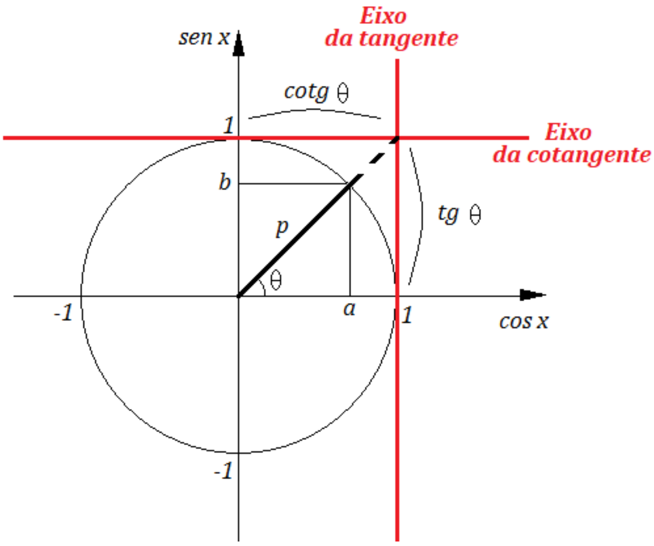
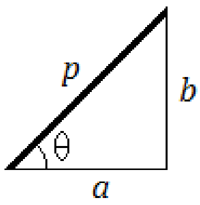


Figura 2.9: Círculo unitário.

Analisando as relações do triângulo retângulo formado por *(a,b, p)*, temos que

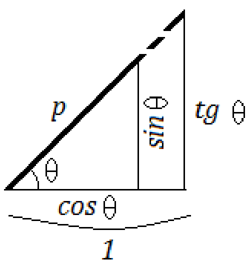


$$p = 1$$

$$\cos\theta = \frac{a}{p} = a$$

$$\sin\theta = \frac{b}{p} = b$$

Prolongando a reta de p até o eixo da tangente e sabendo que $p = 1$, temos que



Aplicando as relações métricas entre triângulos retângulos, temos que

$$\frac{tg\ \theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ ou } tg\ \theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Usando o mesmo raciocínio, podemos deduzir que

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

A secante e a cossecante, são definidas graficamente pela Figura 2.10.

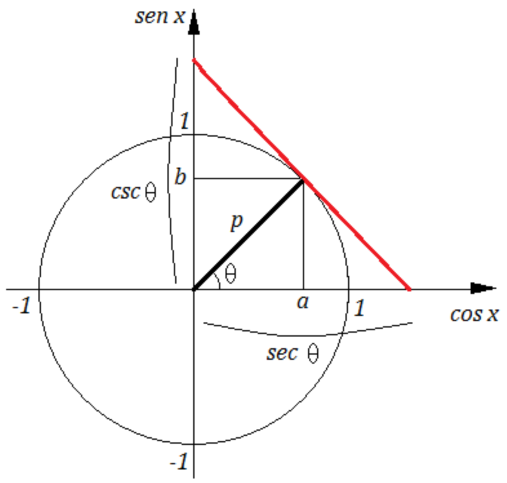


Figura 2.10: Secante e Cossecante.

A figura apresentada a seguir ilustra a ideia, que nos permite deduzir as equações da secante e da cossecante.

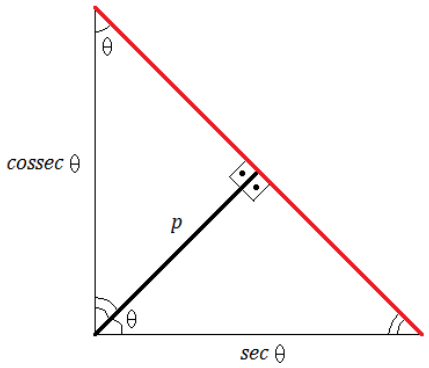


Figura 2.11: Dedução geométrica da secante e da cossecante.

Observando atentamente a Figura 2.11, podemos afirmar que $\sin\theta = \frac{p}{\text{cossec}\,\theta}$. Como $p = 1$, temos que $\sin\theta = \frac{1}{\text{cossec}\,\theta}$. Matematicamente, a cossecante é definida pelo inverso do seno.

$$\text{cossec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

A partir de uma análise semelhante, pode-se deduzir que a cossecante é definida pelo inverso do cosseno.

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

2.4.1. Derivadas de Funções Trigonométricas

Uma quantidade considerável de problemas envolve a solução de derivada de funções trigonométricas. Vejamos algumas derivadas importantes.

$Dx(\text{sen}\, x) = \cos x$

$Dx(\cos x) = -\sin x$

$Dx(\text{tg}\, x) = sec^2\, x$

$Dx(\sec x) = \text{tg}\, x\, .\sec x$

$Dx(\text{cotg}\, x) = -\text{cossec}^2\, x$

$Dx(\text{cossec}\, x) = -\text{cossec}\, x\, .\, cotg\ x$

$Dx(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

$Dx(e^x) = e^x$

Exemplo 2.20: Calcule as derivadas a seguir.

a) $f(x) = 3\cos x + 7\sin x + 3x^2 + 7$

b) $f(x) = sin^2\ x$

c) $f(x) = 3sin\ x.\cos x$

d) $f(x) = tg\ x$

e) $f(x) = cotg\ x$

f) $f(x) = 3tg\ x + 4cotg\ x$

g) $f(x) = ln(2x^2 - 1)$

h) $f(x) = e^{(2x^2-4)}$

i) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x + x^3 - 10$

j) $f(x) = tg\ (4x^2)$

Solução:

a) $f(x) = 3\cos x + 7\sin x + 3x^2 + 7$

$$f'(x) = 3.(-\sin x) + 7.\cos x + 6x$$
$$= -3\sin x + 7\cos x + 6x$$

b) $f(x) = sin^2\, x$

$$f(x) = \sin x . \sin x$$
$$f'(x) = \sin x . \cos x + \cos x\, .\sin x$$
$$= 2.(\cos x\, .\sin x)$$

c) $f(x) = 3sin\ x . \cos x$

$$f(x) = 3(sin\ x . \cos x)$$
$$f'(x) = 3[sin\ x.(-\sin x) + \cos x\, .(\cos x)]$$
$$= 3(-sin^2 x + cos^2\, x)$$

d) $f(x) = tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x \sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}$$

Sabendo que $cos^2 x + sin^2 x = 1$e que $\frac{1}{\cos x} = \sec x$, temos que

$$f'(x) = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = sec^2 x$$

e) $f(x) = cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(-\sin x) - (\cos x \cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-sin^2 x - cos^2 x}{sin^2 x} = -\frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x}$$

Sabendo que $cos^2 x + sin^2 x = 1$ e que $\frac{1}{\sin x} = \text{cossec}\, x$, temos que

$$f'(x) = -\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x} = -\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = -cossec^2x$$

f) $f(x) = 3tg\ x + 4cotg\ x$

$$f'(x) = 3sec^2\ x + 4(-cossec^2\ x)$$

$$f'(x) = 3sec^2\ x - 4cossec^2\ x$$

g) $f(x) = ln(2x^2 - 1)$

$$u = 2x^2 - 1;\ u' = 4x$$

$$f'(x) = ln(u)'.u' = \frac{1}{u}.u'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 - 1}.4x$$

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2 - 1}$$

h) $f(x) = e^{(2x^2-4)}$

$$u = 2x^2 - 4;\ u' = 4x$$

$$f'(x) = (e^u)'.u' = e^u.u'$$

$$= e^{(2x^2-4)}.4x = 4xe^{(2x^2-4)}$$

i) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x + x^3 - 10$

$$f'(x) = 2\cos x - 3\sin x + 3x^2$$

j) $f(x) = tg\ (4x^2)$

$$u = 4x^2;\ u' = 8x$$

$$f'(x) = tg(u)'.u'$$

$$f'(x) = sec^2\, u.8x$$
$$f'(x) = sec^2(4x^2).8x$$
$$f'(x) = 8x.sec^2(4x^2)$$

Exercício 2.25: Calcule as derivadas a seguir.

a) $f(x) = \sin x.\cos x$

b) $f(x) = e^{(\sin x)}$

c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

d) $f(x) = \sin x.e^x$

e) $f(x) = ln(x).e^x$

f) $f(x) = \sin(2x^2 - 1)$

g) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

h) $f(x) = e^{2x}.\cos(3x)$

i) $f(x) = \sec x$

j) $f(x) = \text{cossec}\, x$

k) $f(x) = 7tg\ (2x^2 - 1)$

l) $f(x) = \sin(x^4)$

m) $f(x) = sin^4\, x$

n) $f(x) = \ln(\cos x)$

o) $f(x) = 5\sec(2x^2 - 1)$

Gabarito:

2.25a) $-sin^2x + cos^2x$. 2.25b) $\cos x\, e^{(\sin x)}$. 2.25c) $\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$.

2.25d) $e^x(\sin x + \cos x)$. 2.25e)$e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$.

2.25f) $4x(\sin(2x^2-1))$.2.25g) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

2.25h) $e^{2x}(2\cos(3x)-3\sin(3x))$. 2.25i) $\tan x \sec x$.

2.25j) $-\cot x\ cossec\ x$. 2.25k) $28x.sec^2(2x^2-1)$. 2.25l) $4x^3\cos(x^4)$.

2.25m) $4sin^3x\cos x$. 2.25n) $-\tan x$.

2.25o) $20x\tan(2x^2-1)\sec(2x^2-1)$.

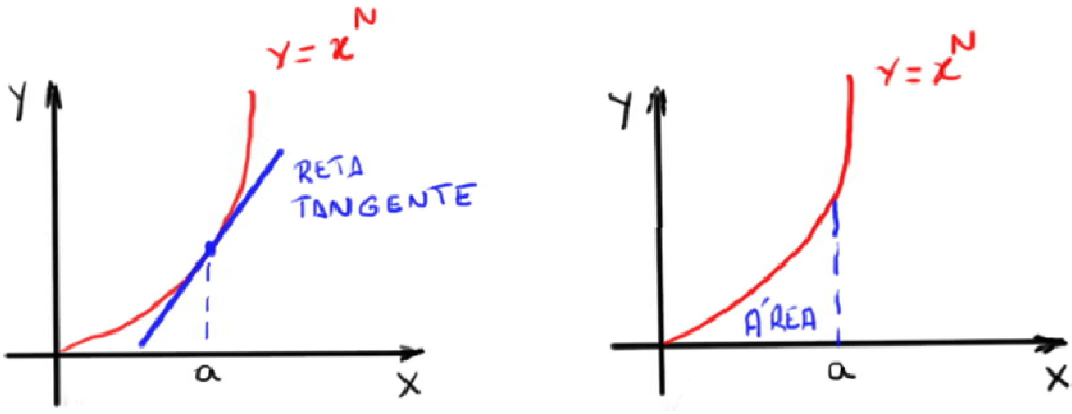
3. INTEGRAL

A integral de uma função *f(x)*, também chamada de antiderivada, é uma função cuja derivada é a função *f(x)*. A notação $\int f(x)dx$ se refere a qualquer integral de *f(x)*, logo

$$Dx\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

O termo *dx* na expressão da integral é chamado de **diferencial em *x***, e significa que a integral será calculada em função de *x*. Em outras palavras, se diferentes variáveis estivessem presentes na expressão, elas seriam tratadas como constante.

A Figura 3.1 mostra A Figura o gráfico da função $f(x) = x^n$, sendo *n* um número real. Pode-se ver no gráfico, em azul, a reta tangente ao ponto do gráfico em que $x = a$. A derivada da função em $x = a$ é o coeficiente angular da reta tangente àquele ponto. A integral da função no intervalo [0, a] é a área sob o gráfico até o eixo *Ox*, ou seja, da origem até o ponto $x = a$, como mostra a Figura 3.1b.



(a) (b)

Figura 3.1: Princípios da derivada e da integral. (a) Reta tangente. (b) Área sob o gráfico.

A Figura 3.2 ilustra a ideia de que a integral da derivada de uma função é a própria função.

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[rr, bend left, "Dx\left(f(x)\right)"] & & f'(x) \arrow[ll, bend left, "\int f'(x)dx"] \end{tikzcd}$$

Figura 3.2: Teorema Fundamental do Cálculo.

A ideia apresentada na Figura 3.2 faz parte do **Teorema Fundamental do Cálculo**, sendo de vital importância o seu conhecimento para estudo do cálculo. Seja a função

$$f(x) = 3x^2 - 4x$$

Sua derivada será

$$f'(x) = 6x - 4$$

Sendo assim, a integral de $f(x) = 6x - 4$, denotada por $F(x) = \int (6x - 4)\, dx$, é igual a $3x^2 - 4x$.

$$\int (6x - 4)\, dx = 3x^2 - 4x$$

Em geral, se *F(x)* é a integral de *f(x)*, então *F(x)+C* também é integral de *f(x)*. Sendo *C* uma constante, a integral de uma função é um conjunto de funções, uma vez que $C \in \mathbb{R}$. Assim, podemos escrever que

$$\int (6x - 4)\, dx = 3x^2 - 4x + C$$

Sejam as funções

$f(x) = x^2;$ $f'(x) = 2x;$

$f(x) = x^2 + 1;$ $f'(x) = 2x;$

$f(x) = x^2 - 2;$ $f'(x) = 2x;$

$f(x) = x^2+3;$ $f'(x) = 2x;$

$f(x) = x^2 - 5;$ $f'(x) = 2x;$

Embora as funções sejam diferentes, a derivada de todas elas dá um mesmo resultado. Sendo assim, a integral de

$$\int 2x\, dx = x^2 + C$$

A integral apresentada acima é chamada de integral indefinida. Sendo uma integral indefinida, o resultado deve sempre ser somado a uma constante *C*.

3.1. Regras para Integral

A seguir apresentamos algumas regras utilizadas no cálculo de integrais indefinidas.

Regra 1: $\int 0\, dx = C$

Regra 2: $\int 1\, dx = x + C$

Regra 3: $\int a\, dx = ax + C$

Regra 4: $\int x^n\, dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C$ para todo $n \neq -1$

Regra 5: $\int af(x)\, dx = a.\int f(x)\, dx$

Regra 6: $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Regra 7: $\int \big(f(x)\big)^n . f'(x)\ \ dx = \frac{f(x)^{(n+1)}}{n+1} + C$ para todo $n \neq -1$

Exemplo 3.1: Calcule as integrais das funções a seguir.

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = 7x^2$

g) $f(x) = x^2 + 4$

h) $f(x) = 3x^5 + 4x$

i) $f(x) = 2x^3.6x^2$

Solução:

a) $f(x) = 1$

$$\int 1\, dx = x + C$$

b) $f(x) = 2x$

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) = 2\frac{x^2}{2} = x^2 + C$$

c) $f(x) = x^3$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\left(\frac{1}{3}\right)}\,dx$$

$$= \frac{x^{\left(\frac{1}{3}+1\right)}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\frac{4}{3}} = \frac{3x^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{4} + C$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{(-1)x} = -\frac{1}{x} + C$$

f) $f(x) = 7x^2$

$$\int 7x^2\,dx = 7\int x^2\,dx = 7\frac{x^3}{3} = \frac{7}{3}x^3 + C$$

g) $f(x) = x^2 + 4$

$$\int (x^2 + 4)\,dx = \int x^2\,dx + \int 4\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x + C$$

h) $\int (3x^5 + 4x)\ dx$

$$= \int 3x^5\ dx + \int 4x\ dx$$

$$\int 3x^5\, dx = \frac{3x^6}{6} + C$$

$$\int 4x\ dx = 4\frac{x^2}{2} = 2x^2 + C$$

i) $f(x) = 2x^3.6x^2$

$$\int 2x^3.6x^2\ dx = 12\int x^3 . x^2\, dx = 12\int x^5\ dx$$

$$= 12\left(\frac{x^6}{6}\right) = 2x^6 + C$$

Exercício 3.1: Encontre as integrais indefinidas a seguir.

a) $\int \frac{x^2+2x}{x}\ dx$

b) $\int \sqrt{25x}\ dx$

c) $\int x^{-3}\left(-3\frac{1}{x^4}\right)\ dx$

d) $\int x\sqrt{x}\ dx$

e) $\int 2x^3 + 5x^2 - x + 2\, dx$

f) $\int (3x^2 + 2x)^3\,(6x + 2)\, dx$

g) $\int \frac{x^2\sqrt{x}+2}{x}\ dx$ (Obs.:$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$)

h) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}\ dx$

i) $\int (x-2)^2\, dx$

j) $\int \frac{2x\sqrt{x^3}}{3\sqrt{x}}\ dx$

Gabarito:

3.1a) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$. 3.1b) $\frac{10\sqrt{x^3}}{3} + C$. 3.1c) $\frac{1}{2x^6} + C$. 3.1d) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5 + C}$.

3.1e) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$. 3.1f) $\frac{1}{4}(3x^2 + 2x)^4 + C$.

3.1g) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2\ln|x| + C$. 3.1h)$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2x + 2\sqrt{x} + C$.

3.1i)$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$. 3.1j) $\frac{2}{9}x^3 + C$.

Um dos recursos de integração mais importante é a utilização de tabelas de integração. Vejamos algumas integrais importantes para a solução de integrais mais complexas.

$$\int \sin x \ dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \ dx = \sin x + C$$

$$\int \sin(nx) \ dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + C$$

$$\int \cos(nx) \ dx = \frac{\sin(nx)}{n} + C$$

$$\int \tan x \ dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int sec^2\, x\, dx = \mathrm{tg}\, x + C$$

$$\int \sec x . \mathrm{tg}\, x \ dx = \sec x + C$$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + tg\ x| + C$$

$$\int \mathrm{cossec}\, x \ dx = \ln|\mathrm{cossec}\, x + cotg\ x| + C$$

$$\int e^x \ dx = e^x + C$$

$$\int \ln x \ dx = x.\ln|x| - x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \ dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \ dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{a+x^2} \ dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$$

$$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Exemplo 3.2:

a) $\int (x+2)\sqrt{5x} \ dx$

b) $\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x}} \ dx$

c) $\int (x^2 + x^3) \, dx$

d) $\int \left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^7 . x \, dx$

e) $\int \left(\sqrt[3]{x} - 5x^2\right) \ dx$

f) $\int \left(4x^2 + \sqrt{x^5} - 2\right) \ dx$

g) $\int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x^2}{x}\right) \ dx$

h) $\int (2x^3 - x)^4 (6x^2 - 1) \ dx$

i) $\int \left(\sqrt[3]{5x^2 - 1}\right) x \, dx$

Solução:

a) $\int (x + 2)\sqrt{5x}\ dx$

$$= \int \sqrt{5x}\,.\,x + \sqrt{5x}.\,2\,dx$$

$$= \int \sqrt{5x}\,.\,x\,dx + \int \sqrt{5x}.\,2\,dx$$

$$= \int \sqrt{5}\sqrt{x}.\,x\,dx + \int \sqrt{5}\sqrt{x}.\,2\,dx$$

$$= \sqrt{5}\int \sqrt{x}\,.\,x\,dx + 2\sqrt{5}\int \sqrt{x}\ dx$$

$$= \sqrt{5}\int x^{\left(\frac{1}{2}\right)}.\,x\,dx + 2\sqrt{5}\int x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ dx$$

$$= \sqrt{5}\int x^{\left(\frac{3}{2}\right)}\ dx + 2\sqrt{5}\int x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ dx$$

$$= \sqrt{5}\,\frac{x^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{5}\,\frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \sqrt{5}\,\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{5}\,\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4\sqrt{5}}{3}\sqrt{x^3} + C$$

b) $\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x}}\ dx$

$$= \int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{2}{\sqrt{x}}\ dx$$

$$= \int x^3 x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\,dx - 2\int x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\ dx$$

$$= \int x^{\left(\frac{5}{2}\right)}\,dx - 2\int x^{\left(\frac{-1}{2}\right)}\ dx$$

$$= \frac{x^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{\frac{7}{2}} - 2\,\frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}x^{\left(\frac{7}{2}\right)} - 2\frac{2}{1}x^{\left(\frac{1}{2}\right)} + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 4\sqrt{x} + C$$

c) $\int (x^2 + x^3)\, dx$

$$= \int x^2\, dx + \int x^3\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

d) $\int \left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^7 .\, x\, dx$

Sabendo que $Dx\left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right) = x$ e que $\int \left(f(x)\right)^n .\, f'(x)dx = \frac{f(x)^{(n+1)}}{n+1} + C$ para todo $n \neq -1$, temos que

$$\int \left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^7 .\, x\, dx = \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^{(7+1)}}{7+1} + C$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^8}{8} + C$$

e) $\int \left(\sqrt[3]{x} - 5x^2\right)\, dx$

$$= \int \sqrt[3]{x}\, dx - \int 5x^2\, dx$$

$$= \int x^{\left(\frac{1}{3}\right)}\, dx - 5\int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\frac{4}{3}} - 5\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{3}{4}x^{\left(\frac{4}{3}\right)} - \frac{5}{3}x^3 + C$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{5}{3}x^3 + C$$

f) $\int \left(4x^2 + \sqrt{x^5} - 2\right)\, dx$

$$= \int 4x^2\, dx + \int \sqrt{x^5}\, dx - \int 2\, dx$$

$$= 4\int x^2\, dx + \int \sqrt{x^5}\, dx - 2\int 1\, dx$$

$$= 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^{\left(\frac{5}{2}+1\right)}}{\frac{5}{2}+1} - 2x + C$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{\frac{7}{2}} - 2x + C$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{7}x^{\left(\frac{7}{2}\right)} - 2x + C$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2x + C$$

g) $\int \left(\frac{2\sqrt{x}-3x^2}{x}\right)\, dx$

$$= \int \left(\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{3x^2}{x}\right)\, dx$$

$$= \int \left(\frac{2\sqrt{x}}{x}\right)\, dx - \int \frac{3x^2}{x}\, dx$$

$$= \int (2\sqrt{x})x^{-1}\, dx - \int (3x^2)x^{-1}\, dx$$

$$= \int 2x^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{-1}\, dx - \int 3x\, dx$$

$$= 2\int x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\ dx - 3\int x\ dx$$

$$= 2\frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}} - 3\frac{x^2}{2} + C$$

$$= 2\frac{2}{1}\sqrt{x} - \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$= 4\sqrt{x} - \frac{3}{2}x^2 + C$$

h) $\int(2x^3 - x)^4(6x^2 - 1)\ dx$

Sabendo que $Dx(2x^3 - x) = 6x^2 - 1$, temos que

$$\int (2x^3 - x)^4(6x^2 - 1)\ dx = \frac{(2x^3 - x)^{(4+1)}}{4 + 1}$$

$$= \frac{(2x^3 - x)^5}{5} + C$$

i) $\int\left(\sqrt[3]{5x^2 - 1}\right)x\ dx$

Sabendo que, $Dx(5x^2 - 1) = 10x$, vamos multiplicar a função por $\frac{10}{10}$.

$$= \int (5x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}.\frac{10}{10}x\ dx = \frac{1}{10}\int (5x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}.10.x\ dx$$

Sabendo que $\int\left(f(x)\right)^n.f'(x)dx = \frac{f(x)^{(n+1)}}{n+1} + C$ para todo $n \neq -1$, temos que

$$\frac{1}{10}\int (5x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}.10.x\ dx = \frac{1}{10}\frac{(5x^2 - 1)^{\left(\frac{1}{3}+1\right)}}{\frac{1}{3} + 1} + C$$

$$= \frac{1}{10}\frac{(5x^2 - 1)^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{10}\frac{3}{4}(5x^2 - 1)^{\left(\frac{4}{3}\right)} + C$$

$$= \frac{3}{40}\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^4} + C$$

3.2. Métodos de Integração

Métodos de integração são técnicas que foram desenvolvidas para auxiliar na solução de integrais. Alguns dos métodos de integração bem conhecidos são o método da substituição, a integração por partes e a integração de funções racionais por funções parciais.

3.2.1. Método da Substituição Simples

O método da substituição pode ser utilizado na integração de funções compostas e é baseado na regra da cadeia. Pela regra da cadeia, podemos afirmar que

$$Dx\left(f\left(g(x)\right)\right) = f'\left(g(x)\right).g'(x)$$

De onde obtemos imediatamente

$$\int f'\left(g(x)\right).g'(x)\ dx = f\left(g(x)\right) + C$$

A ideia por trás do método da substituição simples é substituir a função *g(x)* por *u*. Fazendo isso, teremos que

$$u = g(x)$$
$$du = u'dx$$

Assim,

$$\int f'(u)\,du = f(u) + C.$$

Exemplo 3.3: Calcule $\int \sqrt{2x+1}\,dx$

$$u = 2x + 1$$

$$u' = 2$$

$$du = u'dx = 2dx$$

$$\frac{du}{2} = dx$$

Após a substituição $u = 2x + 1$, temos que

$$\int \sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ du = \frac{1}{2}\frac{u^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$\frac{1}{2}\frac{u^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\left(\frac{3}{2}\right)} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(2x + 1)^3} + C$$

Exemplo 3.4: Calcule $\int \cos(2x)\ dx$.

$$u = 2x$$

$$u' = 2$$

$$du = u'dx = 2dx$$

$$\frac{du}{2} = dx$$

Após a substituição $u = 2x$, temos que

$$\int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\ du$$

$$= \frac{1}{2}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

Exemplo 3.5: Calcule as integrais indefinidas a seguir.

a) $\int \sin(3x)\ dx$

b) $\int e^{5x}\ dx$

c) $\int sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$

d) $\int x^2 \cos(x^3)\ dx$

e) $\int (x^2+3x-5)^3\,(2x+3)\,dx$

f) $\int sin^2\,x\,.\cos x\,dx$

g) $\int \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

h) $\int x.sec^2(3x^2-1)\ dx$

i) $\int x^2\sqrt{x+2}\ dx$

j) $\int e^{(x^2)}\,.\,2x\,dx$

k) $\int \cos(x^3)\,.\,x^2\,dx$

Solução:

a) $\int \sin(3x)\ dx$

$$u = 3x$$

$$u' = 3$$

$$du = u'dx = 3dx$$

$$\frac{du}{3} = dx$$

Após a substituição $u = 3x$, temos que

$$\int \sin u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\ du$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos u) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

b) $\int e^{5x}\ dx$

$$u = 5x$$

$$u' = 5$$

$$du = u'dx = 5dx$$

$$\frac{du}{5} = dx$$

Após a substituição $u = 5x$, temos que

$$\int e^u \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int e^u \ du$$

$$= \frac{1}{5}e^u + C$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

c) $\int sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \ dx$

$$u = \frac{x}{2}$$

$$u' = \frac{1}{2}$$

$$du = u'dx = \frac{1}{2}dx$$

$$2du = dx$$

Após a substituição $u = \frac{x}{2}$, temos que

$$\int sec^2 u \, 2du = 2\int sec^2 u \, du$$

$$= 2tg \, u + C$$

$$= 2tg \ \left(\frac{x}{2}\right) + C$$

d) $\int x^2 \cos(x^3) \ dx$

$$u = x^3$$

$$u' = 3x^2$$

$$du = u'dx = 3x^2 dx$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

Após a substituição $u = x^3$, temos que

$$\int x^2 \cos(u) \frac{du}{3x^2} = \int \frac{1}{3} \cos(u)\, du$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos(u)\, du = \frac{1}{3} \sin u + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin(x^3) + C$$

e) $\int (x^2 + 3x - 5)^3\, (2x + 3) dx$

$$u = x^2 + 3x - 5$$

$$u' = 2x + 3$$

$$du = u'dx = (2x + 3)dx$$

$$\frac{du}{(2x + 3)} = dx$$

Após a substituição $u = x^2 + 3x - 5$, temos que

$$\int (x^2 + 3x - 5)^3\, (2x + 3)dx = \int u^3\ du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2 + 3x - 5)^4}{4} + C$$

f) $\int sin^2\, x \,.\cos x\ \ dx =$

$$u = sin\ x$$

$$u' = \cos x$$

$$du = u'dx = \cos x \, dx$$

$$\frac{du}{\cos x} = dx$$

Após a substituição $u = sin\ x$, temos que

$$\int sin\ x . \sin x . \cos x \ dx = \int u^2 \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u^2 \ du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{sin^3\ x}{3} + C$$

g) $\int \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) \ dx$

$$u = \sqrt{x}$$

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$du = u'dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

Após a substituição $u = \sqrt{x}$, temos que

$$\int \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) \ dx = \int \frac{\sin u}{u} 2u \ du = 2\int \sin u \ du$$

$$= 2(-\cos u) + C = -2\cos\sqrt{x} + C$$

h) $\int x . sec^2(3x^2 - 1) \ dx$

$$u = 3x^2 - 1$$

$$u' = 6x$$

$$du = u'dx = 6x dx$$

Após a substituição $u = 3x^2 - 1$, temos que

$$\int x . sec^2(3x^2 - 1) \ dx = \int (sec^2\ u) \, x \frac{du}{6x}$$

$$= \frac{1}{6}\int sec^2\ u\,du = \frac{1}{6}tg\ u + C$$

$$= \frac{1}{6}tg\ (3x^2 - 1) + C$$

i) $\int x^2\sqrt{x+2}\ dx$

$$u = x + 2$$

$$u' = 1$$

$$du = u'dx = dx$$

Após a substituição $u = x + 2$ e sabendo que $x = u - 2$, temos que

$$\int x^2\sqrt{x+2}\ dx = \int (u-2)^2\sqrt{u}\,du$$

$$= \int (u^2 - 2.2.u + 2^2)\sqrt{u}\,du = \int \left(u^2\sqrt{u} - 4u\sqrt{u} + 4\sqrt{u}\right)\,du$$

$$= \int u^2\sqrt{u}\ du - 4\int u\sqrt{u}\,du + 4\int \sqrt{u}\ du$$

$$= \int u^2.u^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ du - 4\int u.u^{\left(\frac{1}{2}\right)}\,du + 4\int u^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ du$$

$$= \int u^{\left(\frac{5}{2}\right)}\ du - 4\int u^{\left(\frac{3}{2}\right)}\,du + 4\int u^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ du$$

$$= \frac{u^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{\frac{7}{2}} - 4\frac{u^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{\frac{5}{2}} + 4\frac{u^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}u^{\left(\frac{7}{2}\right)} - 4\frac{2}{5}u^{\left(\frac{5}{2}\right)} + 4\frac{2}{3}u^{\left(\frac{3}{2}\right)} + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{u^7} - \frac{8}{5}\sqrt{u^5} + \frac{8}{3}\sqrt{u^3} + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7} - \frac{8}{5}\sqrt{(x+2)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$$

j) $\int e^{(x^2)}\,.\,2x\ dx$

$$u = x^2$$

$$du = u'dx = 2xdx$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

Após a substituição $u = x^2$, temos que

$$\int e^{(x^2)}\,.\,2x\ dx = \int e^u\,.\,2x\ \frac{du}{2x}$$

$$= \int e^u\ du = e^u + C$$

$$= e^{(x^2)} + C$$

k) $\int \cos(x^3)\,.\,x^2\ dx$

$$u = x^3$$

$$du = u'dx = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

Após a substituição $u = x^3$, temos que

$$\int \cos(x^3)\,.\,x^2\ dx = \int \cos u\,.\,x^2\,\frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u\ du = \frac{1}{3}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{3}\sin(x^3) + C$$

Exercícios 3.2: Resolva as integrais a seguir.

a) $\int \cos(2x)\ dx$

b) $\int xe^{(x^2)}\ dx$

c) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\ dx$

d) $\int sin^2\theta \cos\theta\ d\theta$

e) $\int \frac{x^3}{x^4-5}\ dx$

f) $\int \sqrt{2t+1}\ dt$

g) $\int x\sqrt{1-x^2}\ dx$

h) $\int (3x+2)^{20}\ dx$

i) $\int \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\ dt$

j) $\int \cos(\pi t)\ dt$

k) $\int \cos^2(\theta)\sin(\theta)\ d\theta$

l) $\int \frac{e^u}{(1-e^u)^2}\ du$

m) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

n) $\int \cos^4(\theta)\sin(\theta)\ d\theta$

o) $\int x^2 e^{x^3}\ dx$

p) $\int 3\sin(3t)\ dt$

q) $\int sec^2\,(2\theta)\ d\theta$

r) $\int y^2(4-y^3)^{\left(\frac{2}{3}\right)}\ dy$

s) $\int e^{-5r}\ dr$

t) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

u) $\int \frac{z^2}{z^3+1}\ dz$

v) $\int \sin x \sin(\cos x)\ dx$

w) $\int x\sqrt{x+2}\ dx$

Gabarito:

3.2a) $\frac{1}{2}\sin(2x) + C$. 3.2b) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. 3.2c) $\frac{2}{9}\sqrt{x^3 + 1} + C$.
3.2d) $\frac{1}{3}sin^3\theta + C$. 3.2e) $\frac{1}{4}\ln|x^4 - 5| + C$. 3.2f)$\frac{1}{3}\sqrt{(2t + 1)^3} + C$.
3.2g) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1 + x^2)^3} + C$. 3.2h) $\frac{1}{63}(3x + 2)^{21} + C$. 3.2i) $\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + C$.
3.2j) $\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) + C$. 3.2k) -$\frac{1}{3}\cos^3\theta + C$. 3.2l) -$\frac{1}{1-e^u} + C$.
3.2m) $\frac{1}{3}ln^3|x| + C$. 3.2n) $-\frac{1}{5}(\cos\theta)^5 + C$. 3.2o) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$.
3.2p) $-\cos(3t) + C$. 3.2q) $\frac{1}{2}tg(2\theta) + C$.
3.2r)$\frac{1}{5}\sqrt[3]{(4 - y^3)^5} + C$. 3.2s) -$\frac{1}{5}e^{-5r} + C$. 3.2t) $-2\cos(\sqrt{x}) + C$.
3.2u) $\frac{1}{3}\ln|z^3 + 1| + C$. 3.2v) $\cos(\cos x) + C$.
3.2w) $\frac{2}{15}\sqrt{(x + 2)^3}(3x - 4) + C$.

3.2.2. Método da Substituição Por Partes

O método da substituição por partes é um importante método a ser utilizado na solução de determinadas integrais, fruto do produto de funções. A derivação por partes tem a sua origem na regra da derivação do produto.

$$\big(f(x).g(x)\big)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Integrando cada termo, temos que

$$\int (f(x)g(x))'\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

Sabendo que $\int f'(x)\,dx = f(x)$, podemos reescrever a equação da seguinte forma

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx \tag{2.1}$$

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e sabendo que $v' = g'(x) = \frac{dv}{dx}$, temos que

$$dv = g'(x)dx$$

Da mesma forma, sabendo que $u' = f'(x) = \frac{du}{dx}$, temos que

$$du = f'(x)dx$$

Assim, a equação 2.1 pode ser reescrita da forma

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

Passando o termo $\int v\,du$ para o outro lado da equação, temos que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Se $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos que

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$$

$$\frac{dv}{dx} = g'(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$$

$$\int g'(x)dx = g(x) + C$$

Assim,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int f(x)\,g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)dx$$

Exemplo 3.6: Calcule a integral a seguir utilizando o método de integração por partes.

$$\int xe^{x}dx$$

Primeiramente, definimos quem será *u* e quem será *dv*.Normalmente, escolhemos como *u* o termo que sabemos derivar e *dv*, quem sabemos integrar. Uma sugestão é utilizar a regra de prioridades conhecida como LIATE.

L – funções logarítmicas

I – funções inversas

A – funções algébricas

T – funções trigonométricas

E – funções exponenciais

Seguindo a prioridade do LIATE, temos que

$$u = x \text{ e } dv = e^{x}dx$$

Assim

$$u' = 1$$

$$du = u'dx$$

$$du = dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = e^x$, então

$$v = \int e^x dx = e^x$$

Desta forma

$$\int xe^x dx = uv - \int v\, du$$

$$= xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

Exemplo 3.7: Calcule as integrais a seguir utilizando o método de integração por partes.

a) $\int x^2 cos(5x)\, dx$

b) $\int \ln x\, dx$

c) $\int \tan^{-1}(x)\, dx$

d) $\int e^x \cos(x)\, dx$

e) $\int xln\, x\ \ dx$

f) $\int \sin^{-1}(x)\ \ dx$

g) $\int (2x+1)\, sen\, (x)\, dx$

h) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

i) $\int \sin(x) \cos(x)\ \ dx$

a) $\int x^2 cos(5x)\, dx$

$$u = x^2$$

$$dv = cos(5x)dx$$

$$u' = 2x$$

$$du = u'dx = 2xdx$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = cos(5x)$, então

$$v = \int cos(5x)\, dx$$

$$\int cos(5x)\, dx = \frac{\sin(5x)}{5} + C$$

$$v = \frac{\sin(5x)}{5}$$

$$\int x^2 cos(5x)\, dx = x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \int \frac{\sin(5x)}{5} 2x\, dx$$

$$= x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5} \int x \sin(5x)\; dx$$

Será preciso fazer uma nova integração por parte. Assim

$$\int x \sin(5x)\; dx$$

$$u = x$$

$$dv = \sin(5x)\, dx$$

$$u' = 1$$

$$du = u'dx$$

$$du = dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = \sin(5x)$, então

$$v = \int \sin(5x) = -\frac{\cos(5x)}{5} + C$$

$$v = -\frac{\cos(5x)}{5}$$

Assim,

$$\int x\sin(5x)\ dx = x\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right) - \int -\frac{\cos(5x)}{5}\ dx$$

$$= x\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\ dx$$

$$\frac{1}{5}\int \cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}\left(\frac{\sin(5x)}{5}\right) + C = \left(\frac{\sin(5x)}{25}\right) + C$$

$$\int x\sin(5x)\ dx = -\frac{x\cos(5x)}{5} + \left(\frac{\sin(5x)}{25}\right) + C$$

$$\int x^2 cos(5x)\,dx = x^2\frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\int x\sin(5x)\ dx$$

$$= x^2\frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\left[-\frac{x\cos(5x)}{5} + \left(\frac{\sin(5x)}{25}\right)\right] + C$$

$$= x^2\frac{\sin(5x)}{5} + \frac{2\,x\cos(5x)}{25} - \left(\frac{2\sin(5x)}{125}\right) + C$$

$$\frac{25x^2\sin(5x) + 10\,x\cos(5x) - 2\sin(5x)}{125} + C$$

$$\int x^2 cos(5x)\, dx = \frac{1}{125}[(25x^2 - 2)\sin(5x) + 10\, x\cos(5x)] + C$$

b) $\int \ln x\, dx$

$$u = \ln x$$

$$dv = 1dx$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = 1$, então

$$v = \int 1\, dx = x + C$$

$$v = x$$

$$\int \ln x\, dx = \ln|x|.x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$= xln\,|x| - \int 1\, dx$$

$$\int \ln|x|\, dx = xln\,|x| - x + c$$

c) $\int \tan^{-1}(x)\, dx$

$$u = \tan^{-1}(x)$$

$$dv = 1\, dx$$

$$u' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$du = u'dx$$

$$du = \frac{1}{1 + x^2}\ dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = 1$, então

$$v = \int 1dx = x + C$$

$$v = x$$

Assim,

$$\int \tan^{-1}(x)\ dx = \tan^{-1}(x) \,.\, x - \int x \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$\int \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$u = 1 + x^2$$

$$u' = 2x$$

$$du = u'dx = 2xdx$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\int \frac{x}{1 + x^2} dx = \int \frac{x}{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln u + C = \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C$$

Desta forma,

$$\int \tan^{-1}(x)\ dx = \tan^{-1}(x) \,.\, x - \int x \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C$$

d) $\int e^x \cos(x)\, dx$

$$u = e^x \;/\; dv = \cos(x)\, dx$$

$$u' = e^x$$

$$du = u'dx$$

$$du = e^x dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = \cos(x)$, então

$$v = \int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$$

$$v = \sin(x)$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx$$

$$\int e^x \sin(x)\, dx$$

$$u = e^x \;/\; dv = \sin(x)\, dx$$

$$u' = e^x$$

$$du = u'dx$$

$$du = e^x dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = \sin(x)$, então

$$v = \int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$$

$$v = -\cos(x)$$

Assim,

$$\int e^x \sin(x)\, dx = e^x(-\cos(x)) - \int -e^x cos(x)\, dx$$

$$\int e^x \sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + \int e^x cos(x)\,dx$$

Desta forma,

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x\sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x\sin(x) - \left[-e^x\cos(x) + \int e^x cos(x)\,dx\right]$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x\sin(x) + e^x\cos(x) - \int e^x cos(x)\,dx$$

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x\sin(x) + e^x\cos(x) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x\sin(x) + e^x\cos(x)}{2} + C$$

e) $\int xln\, x\ \ dx$

$$dv = x\,dx \ \text{ e } \ u = \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$du = u'dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = x$, então

$$v = \int x\ \ dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln x \; dx = (\ln x).\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x \; dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x\ln x \; dx = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$$

f) $\int \sin^{-1}(x) \; dx$

$$u = \sin^{-1}(x) \text{ e } dv = 1dx$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$du = u'dx$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se $\frac{dv}{dx} = 1$, então

$$v = \int 1 \; dx = x + C$$

$$v = x$$

Assim,

$$\int \sin^{-1}(x) \; dx = \sin^{-1}(x)\,.\,x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Assim,

$$\int \sin^{-1}(x)\ dx = x\sin^{-1}(x) — \sqrt{1-x^2} + C$$

$$= x\sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

g) $\int (2x+1)\, sen\ (x)\ dx$

$$u = 2x + 1 \text{ e } dv = \sin(x)\, dx$$

$$u' = 2$$

$$du = u'dx$$

$$du = 2dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = \sin(x)$, então

$$v = \int \sin(x)\ dx = -\cos\ (x) + C$$

$$v = -\cos\ (x)$$

Assim,

$$\int (2x+1)\, sen\ (x) dx = (2x+1)(-cos(x)) - \int -\cos(x)\, 2dx$$

$$= -2xcos(x) - \cos(x) + 2\int \cos\ (x)\, dx$$

$$\int (2x+1)\, sen\ (x) dx = -2xcos(x) - \cos(x) + 2\sin(x) + C$$

h) $\int \frac{\ln x}{x^2}\ dx$

$$u = \ln x \text{ e } dv = \frac{dx}{x^2}$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$du = u'dx$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

Se $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2}$, então

$$v = \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$v = -\frac{1}{x}$$

Assim,

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \ln x.\left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \left(\frac{dx}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right) + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

i) $\int \sin(x)\cos(x)\ dx$

$$u = \sin(x) \text{ e } dv = \cos(x)\, dx$$

$$u' = \cos(x)$$

$$du = u'dx$$

$$du = \cos(x)\, dx$$

Se $\frac{dv}{dx} = \cos(x)$, então

$$v = \int \cos(x)\ dx = \sin(x) + C$$

$$v = \sin(x)$$

Assim,

$$\int \sin(x)\cos(x)\ dx = \sin(x)\sin(x) - \int \sin(x)\cos(x)\, dx$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\, dx = sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\, dx$$

$$2\int \sin(x)\cos(x)\, dx = sin^2(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\, dx = \frac{sin^2(x)}{2} + C = \frac{1}{2}sin^2(x) + C$$

É possível demonstrar que

$$\int \sin(x)\cos(x)\ dx = -\frac{1}{2}cos^2(x) + C$$

Fazendo $u = \cos(x)$ e $dv = \sin(x)dx$.

Assim,

$$\frac{1}{2}sin^2(x) + C_1 = -\frac{1}{2}cos^2(x) + C_2$$

$$\frac{1}{2}sin^2(x) + \frac{1}{2}cos^2(x) = C_2 - C_1$$

$$\frac{1}{2}\left(sin^2(x) + cos^2(x)\right) = C_2 - C_1$$

Como $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, temos que

$$\frac{1}{2} = C_2 - C_1$$

Isto significa que a diferencia entre os dois resultados são as constantes C_1e C_2. Fica claro a importância da inclusão da constante C quando vamos calcular a integral não definida de uma função.

Exercício 3.3: Calcule as integrais a seguir utilizando a integração por partes.

a) $\int xcos(5x)\ dx$

b) $\int xe^{\frac{x}{2}}\ dx$

c) $\int(x^2+2x)\cos(x)\,dx$

d) $\int \cos^{-1}x\,dx$

e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

f) $\int xsin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

g) $\int x2^x\,dx$

h) $\int x\cos(\pi x)\,dx$

i) $\int(x^2-5x)e^x\ dx$

j) $\int x\sec^{-1}(x)\,dx$

k) $\int e^x\sin(x)\,dx$

l) $\int x^3e^x\,dx$

Exercício Proposto 3.4: Prove matematicamente que $\int 2^x\ln 2\,dx = 2^x$.

Exercício Proposto 3.5: Prove a partir da definição de limite que $Dx(2^x) = 2^x\ln 2$.

Gabarito:

3.3a) $\frac{5xsin(5x)+\cos(5x)}{25}+C$. 3.3b) $2e^{\frac{x}{2}}(x-2)+C$.

3.3c) $(x^2+2x-2)\sin(x)+(2x+2)\cos(x)+C$. 3.3d) $x\cos^{-1}(x)-\sqrt{1-x^2}+C$.

3.3e) $\frac{(\ln x)^3}{3}$. 3.3f) $2\left(2sin\left(\frac{x}{2}\right)-xcos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$.

3.3g) $\frac{2^x(x\ln 2-1)}{(\ln 2)^2}$. 3.5h)$\frac{\pi x\sin(\pi x)+\cos(\pi x)}{\pi^2}$. 3.3i) $e^x(x^2-7x+7)+C$.

3.3j) $\frac{1}{2}\left(x^2\sec^{-1}(x)-\sqrt{x^2-1}\right)+C$. 3.3k)$\frac{e^x}{2}(\sin(x)-\cos(x))$.

3.3l) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$.

3.2.3. Método da Substituição Por Frações Parciais

O método da substituição por frações parciais nos permite resolver integrais de frações racionais de uma forma mais simples. Antes, porém, vamos rever os conceitos de decomposição em frações parciais.

O método da substituição por frações parciais baseia-se no fato de que qualquer função racional pode ser escrita na forma de soma de frações, chamadas frações parciais. Usando este método na integração, é possível converter a integral de uma fração racional em uma soma de integrais de frações parciais, o que facilita o processo de integração.

Dada uma função do tipo $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, sendo o grau de $P(x)$ menor que o grau de $Q(x)$, é possível fazer a decomposição de $R(x)$ em funções parciais. Se $Q(x)=(x-a)^n$, é possível fazer a sua decomposição em

$$R(x)=\frac{P(x)}{(x-a)^n}=\frac{A}{(x-a)^1}+\frac{B}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{An}{(x-a)^n}$$

Exemplo 3.7: Reescreva a fração $\frac{4}{x^2-5x+6}$ na forma de frações parciais.

Sabendo que $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, temos que

$$\frac{4}{x^2-5x+6}=\frac{4}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$4=\frac{A(x-2)(x-3)}{x-2}+\frac{B(x-2)(x-3)}{x-3}$$

$$4=A(x-3)+B(x-2)$$

Fazendo $x=2$, temos que

$$4=A(2-3)+B(2-2)$$

$$4=A(-1)+B(0)$$

$$4=A(-1)$$

$$A=-4$$

Fazendo $x = 3$, temos que

$$4 = -4(3-3) + B(3-2)$$

$$4 = 0 + B(1)$$

$$B = 4$$

Com os valores de A e B, podemos montar a equação parcial equivalente.

$$\frac{4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-4}{x-2} + \frac{4}{x-3} = \frac{4}{x-3} - \frac{4}{x-2}$$

Exemplo 3.8: Decomponha $\frac{x+1}{x(x+2)^2}$ em frações parciais.

$$\frac{x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$x + 1 = \frac{Ax(x+2)^2}{x} + \frac{Bx(x+2)^2}{x+2} + \frac{Cx(x+2)^2}{(x+2)^2}$$

$$x + 1 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

Fazendo $x = 0$

$$0 + 1 = A(0+2)^2 + B0(0+2) + C(0)$$

$$1 = A(2)^2$$

$$A = \frac{1}{4}$$

Fazendo $x = -2$

$$-2 + 1 = A(-2+2)^2 + B(-2)(-2+2) + C(-2)$$

$$-1 = A(0)^2 + B(-2)(0) - 2C$$

$$-1 = -2c$$

$$C = \frac{1}{2}$$

Fazendo $x = 1$

$$1 + 1 = A(1+2)^2 + B(1)(1+2) + C(1)$$

$$2 = \frac{1}{4}(3)^2 + B(1)(3) + \frac{1}{2}(1)$$

$$2 = \frac{9}{4} + 3B + \frac{1}{2}$$

$$2 - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = 3B$$

$$\frac{8 - 9 - 4}{4} = 3B$$

$$\frac{-3}{12} = B = -\frac{1}{4}$$

Assim,

$$\frac{x + 1}{x(x + 2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x + 2} + \frac{\frac{1}{2}}{(x + 2)^2}$$

$$\frac{x + 1}{x(x + 2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x + 2)} + \frac{1}{2(x + 2)^2}$$

Exemplo 3.9: Decomponha $\frac{x^2-x+6}{x(x^2+3)}$ em frações parciais.

$$\frac{x^2 - x + 6}{x(x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3}$$

O termo $Bx + C$ é necessário porque o termo $x^2 + 3$ é um polinômio de grau 2. O termo do numerador, neste caso, deve ser um polinômio um grau abaixo do denominador.

$$x^2 - x + 6 = \frac{Ax(x^2 + 3)}{x} + \frac{(Bx + C)x(x^2 + 3)}{x^2 + 3}$$

$$x^2 - x + 6 = A(x^2 + 3) + (Bx + C)x$$

$$x^2 - x + 6 = Ax^2 + 3A + Bx^2 + Cx$$

$$x^2 - x + 6 = (A + B)x^2 + Cx + 3A$$

Levando em conta que temos uma equação do segundo grau em cada lado da equação, temos que

$$x^2 = (A + B)x^2$$

$$1 = A + B$$

$$-x = Cx$$

$$C = -1$$

$$6 = 3A$$
$$A = 2$$

$$1 - A = B$$
$$B = -1$$

Assim

$$\frac{x^2 - x + 6}{x(x^2 + 3)} = \frac{2}{x} + \frac{(-1)x - 1}{x^2 + 3}$$

$$\frac{x^2 - x + 6}{x(x^2 + 3)} = \frac{2}{x}\frac{-x - 1}{x^2 + 3}$$

$$\frac{x^2 - x + 6}{x(x^2 + 3)} = \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2 + 3} - \frac{1}{x^2 + 3}$$

Exemplo 3.10: Encontre a integral utilizando o método de substituição por fração parcial.

a) $\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x-4)} dx$

b) $\int \frac{x^2-x+6}{x(x^2+3)} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

Solução:

a) $\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x-4)} dx$

$$\frac{x - 1}{(x + 1)^2(x - 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x - 4}$$

$$x - 1 = \frac{A(x + 1)^2(x - 4)}{x + 1} + \frac{B(x + 1)^2(x - 4)}{(x + 1)^2} + \frac{C(x + 1)^2(x - 4)}{x - 4}$$

$$x - 1 = A(x + 1)(x - 4) + B(x - 4) + C(x + 1)^2$$

Fazendo $x = -1$

$$-1-1 = A(-1+1)(-1-4) + B(-1-4) + C(-1+1)^2$$
$$-2 = A(0)(-5) + B(-5) + C(0)^2$$
$$-2 = -5B$$
$$B = \frac{2}{5}$$

Fazendo $x = 4$

$$4-1 = A(4+1)(4-4) + B(4-4) + C(4+1)^2$$
$$3 = A(5)(0) + B(0) + C(5)^2$$
$$3 = 25C$$
$$c = \frac{3}{25}$$

Fazendo $x = 0$

$$0-1 = A(0+1)(0-4) + B(0-4) + C(0+1)^2$$
$$-1 = A(1)(-4) + B(-4) + C(1)^2$$
$$-1 = -4A - 4B + C$$
$$-1 = -4A - 4\frac{2}{5} + \frac{3}{25}$$
$$-1 = -4A - \frac{8}{5} + \frac{3}{25}$$
$$4A = 1 - \frac{8}{5} + \frac{3}{25}$$
$$4A = \frac{25 - 40 + 3}{25}$$

$$A = \frac{-12}{100} = -\frac{3}{25}$$

Assim,

$$\frac{x-1}{(x+1)^2(x-4)} = \frac{-\frac{3}{25}}{x+1} + \frac{\frac{2}{5}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{3}{25}}{x-4}$$

$$= -\frac{3}{25(x+1)} + \frac{2}{5(x+1)^2} + \frac{3}{25(x-4)}$$

Desta forma,

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x-4)} dx = \int -\frac{3}{25(x+1)} + \frac{2}{5(x+1)^2} + \frac{3}{25(x-4)} dx$$

Podemos observar que a substituição por frações parciais transformou a integral numa integral de uma soma, o que facilita a solução do problema.

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x-4)} dx = \int -\frac{3}{25(x+1)} dx + \int \frac{2}{5(x+1)^2} dx + \int \frac{3}{25(x-4)} dx$$

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x-4)} dx = -\frac{3}{25}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \frac{3}{25}\int \frac{1}{x-4} dx$$

$$-\frac{3}{25}\int \frac{1}{x+1} dx = -\frac{3}{25}\int \frac{1}{u} du = -\frac{3}{25}\ln u + C = -\frac{3}{25}\ln|x+1| + C$$

$$u = x + 1$$

$$u' = 1$$

$$du = u'dx$$

$$du = dx$$

$$\frac{2}{5}\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{5}\int \frac{1}{u^2} du = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{2}{5(x+1)} + C$$

$$u = x + 1$$

$$u' = 1$$

$$du = u'dx$$

$$du = dx$$

$$\frac{3}{25}\int \frac{1}{x-4} dx = \frac{3}{25}\int \frac{1}{u} du = \frac{3}{25}\ln u + C = \frac{3}{25}\ln|x-4| + C$$

$$u = x - 4$$

$$u' = 1$$

$$du = u'dx$$

$$du = dx$$

Assim,

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2(x-4)}dx = -\frac{3}{25}\ln|x+1| - \frac{2}{5(x+1)} + \frac{3}{25}\ln|x-4| + C$$

b) $\int \frac{x^2-x+6}{x(x^2+3)}dx = \int \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+3}dx$

$$= \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+3}dx - \int \frac{1}{x^2+3}dx$$

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2\ln x + C$$

$$-\int \frac{x}{x^2+3}dx$$

$$u = x^2 + 3$$

$$u' = 2x$$

$$du = u'dx$$

$$du = 2x\,dx$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$-\int \frac{x}{x^2+3}dx = -\int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln u + C$$

$$-\int \frac{x}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\ln|x^2+3| + C$$

$$-\int \frac{1}{x^2+3}dx$$

Sabendo que $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \mathrm{atan}(x) + C$, temos que

$$-\int \frac{1}{x^2+3}dx = -\int \frac{1}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1}dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$$

$$u = \frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$u' = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$du = u'dx$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dx$$
$$\sqrt{3}du = dx$$

Assim,

$$-\frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{(u)^2 + 1}\sqrt{3}du$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{(u)^2 + 1} du$$

Como $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, temos que

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{atan}(u) + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{atan}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + C$$

Desta forma,

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x(x^2 + 3)} dx = 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 3| - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{atan}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + C$$

c) $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 2}$$

$$1 = \frac{A(x + 2)(x - 2)}{x + 2} + \frac{B(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = A(x - 2) + B(x + 2)$$

Fazendo $x = 2$

$$1 = A(2-2) + B(2+2)$$
$$1 = A(0) + B(4)$$
$$B = \frac{1}{4}$$

Fazendo $x = -2$

$$1 = A(-2-2) + B(-2+2)$$
$$1 = A(-4) + B(0)$$
$$A = -\frac{1}{4}$$

Assim,

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}dx = \int -\frac{1}{4(x+2)}dx + \int \frac{1}{4(x-2)}dx$$
$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}dx$$
$$-\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{4}\ln u + C = -\frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$
$$u = x+2$$
$$u' = 1$$
$$du = u'dx$$
$$du = dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln u + C = \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$
$$u = x-2$$
$$u' = 1$$
$$du = u'dx$$
$$du = dx$$

Assim,

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx = -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right) + C$$

Exercícios 3.6: Calcule as integrais a seguir utilizando o método de substituição por frações parciais.

a) $\int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

c) $\int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}dx$

d) $\int \frac{x^3+5x^2-x-22}{x^2+3x-10}dx$

e) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}dx$

f) $\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx$

g) $\int \frac{4x^2+2x+4}{x^3-4x}dx$

h) $\int \frac{x^2+2}{x^3-x}dx$

Gabarito:

3.6a) $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C.$

3.6b) $\frac{1}{6}\left(\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right) + C.$

3.6d) $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{4}{7}\ln|x-2| + \frac{17}{7}\ln|x+5| + C.$

3.6e) $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C.$

3.6f) $\frac{-11x^2+17x-4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C.$

3.6g) $-\ln|x| + 3\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C.$

3.6h) $\frac{3}{2}\ln|x^2-1| - 2\ln|x| + C$

3.2.4. Integração Por Substituição Trigonométrica

O método de integração por substituição trigonométrica é utilizado para resolver integrais do tipo

a) $\sqrt{a^2 - u^2}$

b) $\sqrt{a^2 + u^2}$

c) $\sqrt{u^2 - a^2}$

A Figura 3.3 ilustra a ideia de utilizar as relações trigonométricas do triângulo retângulo para definir matematicamente as equações em cada caso.

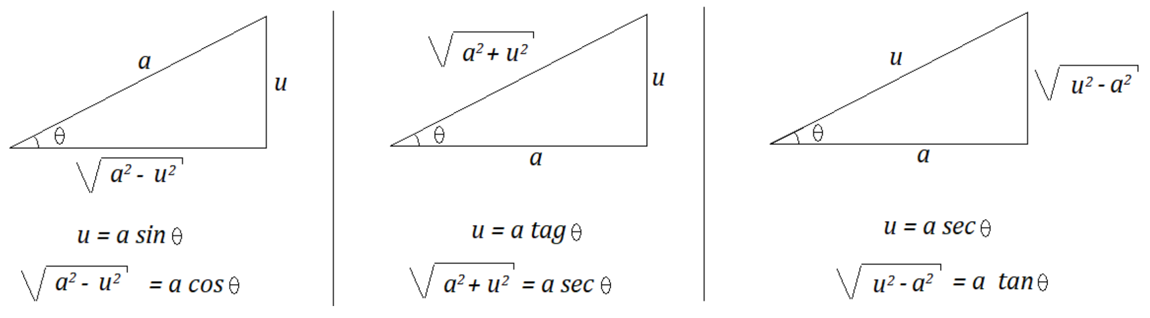


Figura 3.3: Relações trigonométricas do triângulo retângulo.

Exemplo 3.11: Calcule $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$ utilizando a integração por substituição trigonométrica.

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx = \int\sqrt{4^2-x^2}\,dx$$

Veja que $\sqrt{4^2-x^2}$ se enquadra no caso $\sqrt{a^2-u^2}$. Assim, Sendo $a = 4$ e $u = x$, temos que

$$x = 4\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{x}{4} \text{ e } \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$x' = 4\cos\theta$$

$$dx = x'd\theta$$

$$dx = 4\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{4^2 - x^2} = 4\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4^2 - x^2}}{4}$$

Assim,

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = \int 4cos\,\theta . 4\cos\theta\, d\theta = 16\int cos^2\theta\, d\theta$$

Sabendo que $cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, temos que

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = 16\int cos^2\theta\, d\theta = 16\int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$= 8\left(\int 1\, d\theta + \int \cos(2\theta)\, d\theta\right)$$

$$\int 1\, d\theta = \theta + C$$

$$\int \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} + C$$

Desta forma,

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = 8\left(\int 1\, d\theta + \int \cos(2\theta)\, d\theta\right) = 8\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$$

Sabendo que $\frac{\sin(2\theta)}{2} = \sin\theta\cos\theta, \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$ e que $\cos\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$, temos que

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = 8(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C = 8\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{4}\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}\right) + C$$

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{8x}{4}\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + C$$

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$$

Exemplo 3.12: Calcule as integrais a seguir utilizando a integração por substituição trigonométrica.

a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\,dx$

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{7-4x^2}}{x^2}\,dx$

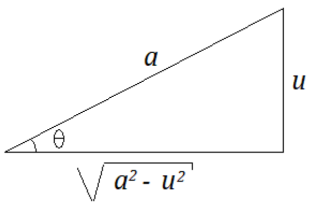
e) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

f) $\int \sqrt{9-x^2}$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Solução:

a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$



$u = a \sin\theta$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$

$$u = x \text{ e } a = 4$$

$$x = 4\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{x}{4} \text{ e } \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$x' = 4\cos\theta$$

$$dx = x'd\theta$$

$$dx = 4\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{16-x^2} = 4\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

Assim,

a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{(4\sin\theta)^2 4\cos\theta} 4\cos\theta\, d\theta = \int \frac{1}{16\sin^2\theta}\,d\theta$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

Sabendo que $\frac{1}{\sin^2\theta} = \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2$ e que $cossec\ \theta = \frac{1}{\sin\theta}$, temos que

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{16}\int cossec^2\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{16}(-ctg\ \theta) + C$$

Sabendo que $ctg\ \theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, temos que

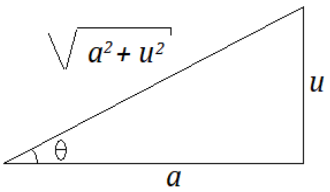
$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta = -\frac{1}{16}(ctg\ \theta) + C = -\frac{1}{16}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = C$$

Como $\cos\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$ e $\sin\theta = \frac{x}{4}$, temos que

$$-\frac{1}{16}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + C = -\frac{1}{16}\frac{\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}}{\frac{x}{4}} + C = -\frac{1}{16}\frac{4}{x}\frac{\sqrt{16-x^2}}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$$

b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx$



$u = a\ tag\,\theta$

$\sqrt{a^2+u^2} = a\ sec\,\theta$

$u = x$ e $a = 3$

$x = 3\tan\theta$

$\tan\theta = \frac{x}{3}$ e $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$x' = 3\sec^2\theta$

$dx = x'd\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

$\sqrt{9+x^2} = 3\sec\theta$

$\sec\theta = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$

$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$

$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{9+x^2}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}{\frac{3}{\sqrt{9+x^2}}} = \frac{x}{3}$

Assim,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{1}{(3\tan\theta)^2 3\sec\theta}3\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{9\tan^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

Sabendo que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ e que $\tan^2\theta = \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}$, temos que

$$\frac{1}{9}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}}d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\cos\theta}\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{sin^2\theta}d\theta$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{sin^2\theta}d\theta$$

$$u = \sin\theta$$

$$u' = \cos\theta$$

$$du = u'd\theta$$

$$du = \cos\theta\, d\theta$$

$$\frac{du}{\cos\theta} = d\theta$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{u^2}\frac{du}{\cos\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2}du = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{9u} + C$$

$$= -\frac{1}{9\sin\theta} + C = -\frac{1}{9}cossec\,\theta + C$$

Sabendo que $\sec\theta = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$ e que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, temos que $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{9+x^2}}$.

Sabendo que $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$, temos que

$$sin^2\theta + \left(\frac{3}{\sqrt{9+x^2}}\right)^2 = 1$$

$$sin^2\theta + \frac{9}{9+x^2} = 1$$

$$sin^2\theta = 1 - \frac{9}{9+x^2} = \frac{9+x^2-9}{9+x^2} = \frac{x^2}{9+x^2}$$

Fazendo a raiz quadrada dos dois lados da equação, temos que

$$\sqrt{sin^2\theta} = \sqrt{\frac{x^2}{9+x^2}}$$

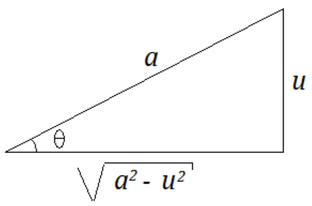
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{9+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

Sabendo que $cossec\ \theta = \frac{1}{\sin\theta}$, temos que

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx = -\frac{1}{9}cossec\ \theta + C = -\frac{1}{9}\frac{1}{\sin\theta} + C$$

$$= -\frac{1}{9}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}} + C = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9+x^2}}{x} + C = -\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x} + C$$

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}dx$



$u = a \sin\theta$

$\sqrt{a^2-u^2} = a\cos\theta$

$u^2 = (3x)^2$
$u = 3x$ e $a = 2$
$3x = 2\sin\theta$
$x = \frac{2\sin\theta}{3}$

$\sin\theta = \frac{3x}{2}$ e $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$

$x' = \frac{2}{3}\cos\theta$

$dx = x'd\theta$

$dx = \frac{2}{3}\cos\theta\, d\theta$

$x^2 = \left(\frac{2\sin\theta}{3}\right)^2 = \frac{4sin^2\theta}{9}$

$\sqrt{4-9x^2} = 2\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \int \frac{\frac{4sin^2\theta}{9}}{2\cos\theta}\frac{2}{3}\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{4sin^2\theta}{9}d\theta$$

$$= \frac{4}{27}\int sin^2\theta\, d\theta$$

Sabendo que $sin^2\theta = 1 - \frac{\cos(2\theta)}{2}$, temos que

$$= \frac{4}{27}\int sin^2\theta\, d\theta = \frac{4}{27}\int \frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{2}{27}\left(\int 1\, d\theta - \int \cos(2\theta)\, d\theta\right)$$

$$\int 1\, d\theta = \theta + C$$

$$\int \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} + C$$

Assim,

$$\frac{2}{27}\left(\int 1\, d\theta - \int \cos(2\theta)\, d\theta\right) = \frac{2}{27}\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$$

Sabendo que $\sin(2\theta) = 2sin\theta \cos\theta$, temos que

$$\frac{2}{27}\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C = \frac{2}{27}\left(\theta - \frac{2sin\theta \cos\theta}{2}\right) + C$$

Desta forma

$$\frac{4}{27}\int sin^2\theta\, d\theta = \frac{2}{27}(\theta - sin\theta \cos\theta) + C$$

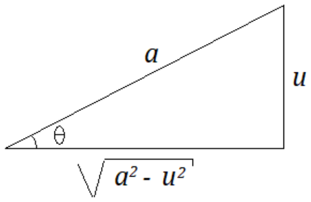
Assim,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}} dx = \frac{2}{27}(\theta - sin\theta \cos\theta) + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}} dx = \frac{2}{27}\left(\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{3x}{2}\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}} dx = \frac{2}{27}\left(\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{3x\sqrt{4-9x^2}}{4}\right) + C$$

d) $\int \frac{\sqrt{7-4x^2}}{x^4} dx$



$u = a \sin\theta$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$

$u^2 = (2x)^2$

$u = 2x$ e $a = \sqrt{7}$

$2x = \sqrt{7}\sin\theta$

$x = \dfrac{\sqrt{7}\sin\theta}{2}$

$\sin\theta = \frac{2x}{\sqrt{7}}$ e $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)$

$x' = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta$

$dx = x' d\theta$

$dx = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta\, d\theta$

$x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\sin\theta\right)^2 = \dfrac{7}{4}sin^2\theta$

$x^4 = \dfrac{49sin^4\theta}{16}$

$\sqrt{4 - 9x^2} = \sqrt{7}\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7-4x^2}}{\sqrt{7}}$

$$\int \frac{\sqrt{7-4x^2}}{x^4} dx = \int \frac{\sqrt{7}\cos\theta}{\frac{49sin^4\theta}{16}} \frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{7}\cos\theta}{\frac{49sin^4\theta}{16}} \frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta\, d\theta = \int 7\cos\theta \frac{16}{2(49sin^4\theta)}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \cos^2\theta \frac{8}{7sin^4\theta} d\theta = \frac{8}{7}\int \frac{\cos^2\theta}{sin^4\theta} d\theta = \frac{8}{7}\int \frac{\cos^2\theta}{sin^2\theta}\frac{1}{sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{8}{7}\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta$$

$$\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta$$

$u = ctg^2\theta$ e $dv = cossec^2\theta\, d\theta$

$u' = -2cossec^2\theta\, \text{ctg}\,\theta$

$du = u' d\theta$

$du = -2cossec^2\theta\, \text{ctg}\,\theta\, d\theta$

Se $dv = cossec^2\theta\, d\theta$, então

$$v = \int cossec^2\theta\ d\theta = -ctg\ \theta + C$$

$$v = -ctg\ \theta$$

$$\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta = ctg^2\theta(-ctg\,\theta) - \int (-ctg\,\theta)(-2cossec^2\theta\,\text{ctg}\,\theta)\, d\theta$$

$$\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta = -ctg^3\theta - 2\int ctg\,\theta cossec^2\theta\,\text{ctg}\,\theta\, d\theta$$

$$\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta = -ctg^3\theta - 2\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta$$

$$3\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta = -ctg^3\theta + C$$

$$\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta = \frac{-ctg^3\theta}{3} + C$$

Assim,

$$= \frac{8}{7}\int ctg^2\theta cossec^2\theta\, d\theta = \frac{8}{7}\left(-\frac{ctg^3\theta}{3}\right) + C = -\frac{8}{21}ctg^3\theta + C$$

Sabendo que $ctg\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, e que$ctg^3\theta = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^3 = \frac{cos^3\theta}{sin^3\theta}$, temos que

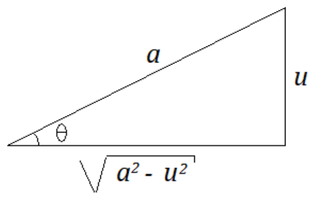
$$-\frac{8}{21}ctg^3\theta + C = -\frac{8}{21}\frac{cos^3\theta}{sin^3} + C = -\frac{8}{21}\frac{\left(\frac{\sqrt{7-4x^2}}{\sqrt{7}}\right)^3}{\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)^3} + C$$

$$= -\frac{8}{21}\frac{\frac{\left(\sqrt{7-4x^2}\right)^3}{\left(\sqrt{7}\right)^3}}{\frac{(2x)^3}{\left(\sqrt{7}\right)^3}} + C = -\frac{8}{21}\frac{\left(\sqrt{7-4x^2}\right)^3}{(2x)^3} + C = -\frac{8}{21}\frac{\left(\sqrt{7-4x^2}\right)^3}{8x^3} + C$$

Deste modo,

$$\int \frac{\sqrt{7-4x^2}}{x^4}dx = -\frac{\left(\sqrt{7-4x^2}\right)^3}{21x^3} + C$$

e) $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$



$u = a \sin\theta$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos\theta$

$$u = x \text{ e } a = 2$$
$$x = 2\sin\theta$$
$$\sin\theta = \frac{x}{2}$$

$$\theta = sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$x' = 2\cos\theta$$
$$dx = x' d\theta$$
$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 2\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int 2\cos\theta . 2\cos\theta\, d\theta = 4\int cos^2\theta\, d\theta$$

Sabendo que $cos^2(nx) = \frac{1+\cos(2nx)}{2}$, temos que $cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

Assim,

$$4\int cos^2\theta\, d\theta = 4\int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = 2\int 1 + \cos(2\theta)\, d\theta$$

$$2\int 1 + \cos(2\theta)\, d\theta = 2\left(\int 1\, d\theta + \int \cos(2\theta)\, d\theta\right)$$

$$\int 1\, d\theta = \theta + C$$

$$\int \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} + C$$

Desta forma,

$$2\int 1 + \cos(2\theta)\, d\theta = 2\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$$

Assim,

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C = 2\theta + \sin(2\theta) + C$$

Sabendo que $\sin(2\theta) = 2sin\theta cos\theta$, temos que

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2\theta + 2sin\theta cos\theta + C$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + C$$

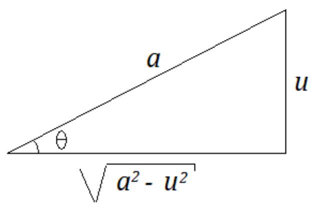
$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

Outra forma de representar o resultado é:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C = 2\theta + \sin(2\theta) + C$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(2sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

f) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$



$u = a \sin\theta$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$

$u = x$ e $a = 3$

$x = 3\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{x}{3}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$x' = 3\cos\theta$

$dx = x'd\theta$

$dx = 3\cos\theta\,d\theta$

$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int 3\cos\theta . 3\cos\theta\,d\theta = 9\int cos^2\,\theta\,d\theta$$

Sabendo que $cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, temos que

$$9\int cos^2\,\theta\,d\theta = 9\int \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{9}{2}\left(\int 1\,d\theta + \int \cos 2\theta\right)$$

$$\int 1\,d\theta = \theta + C \text{ e } \int \cos 2\theta\,d\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} + C$$

Assim,

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{2}\left(\int 1\,d\theta + \int \cos(2\theta)\right) = \frac{9}{2}\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$$

$$= \left(\frac{9}{2}\theta + \frac{9\sin(2\theta)}{4}\right) + C$$

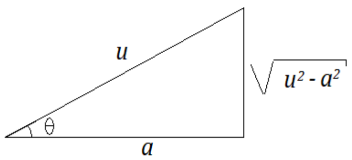
Sabendo que $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, temos que

$$= \left(\frac{9}{2}\theta + \frac{92\sin\theta\cos\theta}{4}\right) + C = \left(\frac{9}{2}\theta + \frac{9\sin\theta\cos\theta}{2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \left(\frac{9}{2}\theta + \frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta\right) + C$$

$$= \left(\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2}\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\left(9\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + x\sqrt{9 - x^2}\right) + C$$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$



$u = a \sec\theta$

$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan\theta$

$u = x$ e $a = 1$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1}$$

$$\theta = \sin^{-1} x$$

$$x = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$x' = \tan\theta\sec\theta$$
$$dx = x'd\theta$$
$$dx = \tan\theta\sec\theta\ d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = 1\sin\theta$$

$$\tan\theta = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta} \tan\theta\sec\theta\ d\theta = \int sec\ \theta sec\ \theta\ d\theta = \int sec^2\ \theta\ d\theta$$

$$= \tan\theta + C = \tan\theta + C = \sqrt{x^2 - 1} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \sqrt{x^2 - 1} + C$$

Exercícios 3.7: Calcule as integrais a seguir utilizando o método de substituição trigonométrica.

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$

b) $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

d) $\int \sqrt{5+x^2}\, dx$

e) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$

f) $\int \sqrt{5+4x-x^2}\, dx$

g) $\int \sqrt{x^2-4x+8}\, dx$

h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} dx$

i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx$

j) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

l) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6}} dx$

m) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

n) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$

Gabarito:

3.7a) $2\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{8}x\sqrt{16-x^2} + C.$

3.7b) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C.$

A 3.7c) $\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.$

3.7d) $\frac{x\sqrt{5+x^2}}{2} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5+x^2}+x}{\sqrt{5}}\right| + C.$

3.7e) $\sqrt{x^2 - 25} - 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C.$

3.5f) $\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{(x-2)\sqrt{5+4x-x^2}}{2} + C$

3.7g) $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 8} - 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4x+8}+x-2}{2}\right| + C.$

3.7h) $\frac{1}{3}\sqrt{16 - x^2}(32 + x^2) + C.$

3.7i) $\frac{1}{2}x\sqrt{9 + x^2} - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C$

3.7j) $-\frac{\sqrt{4-x^2}+x\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} + C$

3.7k) $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$

3.7l) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 6} - 3\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}}\right| + C$

3.7m) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + C$

3.7n) $-\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x} + C$

3.2.5. Método da Substituição Tangente do Arco Metade (Weierstrass)

Este método de substituição é baseado no método da substituição trigonométrica, na qual $\theta = \frac{x}{2}$. Ele permite resolver integrais de funções racionais trigonométricas. A Figura 3.4 ilustra a ideia.

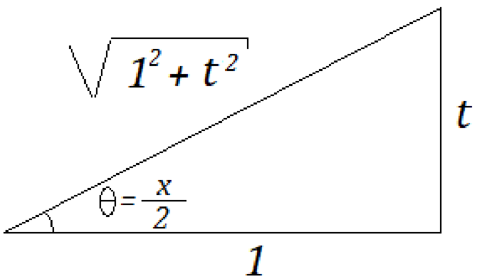


Figura 3.4: Relações trigonométricas com $\theta = \frac{x}{2}$.

Sabendo que $\sin(x) = \sin\left(2\frac{x}{2}\right)$,e que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1^2 + t^2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + t^2}}$$

Sabendo que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,temos que

$$\sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{t}{\sqrt{1^2 + t^2}}\frac{1}{\sqrt{1^2 + t^2}}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Da mesma forma, sabendo que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, temos que

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1^2 + t^2}}\right)^2$$

$$\cos(x) = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Sabendo que $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$, temos que

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\frac{\sqrt{1 + t^2}}{1} = t$$

Assim,

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \frac{x}{2} = \tan^{-1}(t)$$

$$x = 2\tan^{-1}(t)$$

$$x' = \frac{2}{1 + t^2}$$

$$dx = x'dt = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Resumindo, no método da substituição tangente do arco metade, temos que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Exemplo 3.12: Calcule $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$ utilizando o método da substituição tangente do arco metade.

$$\int \frac{1}{1-\cos x} dx = \int \frac{1}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{1+t^2-1+t^2} dt = \int \frac{2}{2t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{t} + C$$

Como $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, temos que

$$\int \frac{1}{1-\cos x} dx = -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exemplo 3.13: Calcule $\int \frac{1}{2+\sin x} dx$ utilizando o método da substituição tangentedo arco metade.

$$\int \frac{1}{2+\sin x} dx = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{\frac{2(1+t^2)+2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{2(1+t^2)+2t} dt = \int \frac{2}{2[(1+t^2)+t]} dt = \int \frac{1}{(1+t^2)+t} dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+t+1} dt$$

$$t^2+t+1 = t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

$$t^2 + t + \frac{1}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Assim,

$$\int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$= \int \frac{1}{\left[\frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]\frac{3}{4}} dt = \int \frac{1}{\left[\frac{4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}{3} + 1\right]\frac{3}{4}} dt$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt$$

$$u = \frac{2t + 1}{\sqrt{3}}$$

$$u' = \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$du = u' dt$$

$$du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} du = dt$$

Assim,

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{u^2 + 1}\frac{\sqrt{3}}{2} du$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

Sabendo que

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \tan^{-1}(u) + C$$

Temos que,

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}(u) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Exemplo 3.14: Calcule $\int \frac{\cos(x)}{4-sin^2(x)}dx$ utilizando o método da substituição tangente do arco metade.

Sabendo que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ e que $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, temos que

$$\int \frac{\cos(x)}{4-sin^2(x)}dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{4-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left[4-\frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2}\right]}\frac{dt}{(1+t^2)} = 2\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left[\frac{4(1+t^2)^2-4t^2}{(1+t^2)^2}\right]}\frac{dt}{(1+t^2)}$$

$$= 2\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left[\frac{4(1+t^2)^2-4t^2}{1+t^2}\right]}dt = 2\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{4(1+t^2)-\frac{4t^2}{1+t^2}}dt$$

$$= 2\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{4(1+t^2)-4t^2}{1+t^2}}dt = 2\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{1+t^2}{4(1+t^2)-4t^2}$$

$$= 2\int \frac{1-t^2}{4(1+t^2)^2-4t^2}dt = 2\int \frac{1-t^2}{4(t^4+2t^2+1)-4t^2}dt$$

$$= 2\int \frac{1-t^2}{4t^4+8t^2+4-4t^2}dt = 2\int \frac{1-t^2}{4t^4+4t^2+4}dt$$

$$= 2\int \frac{1-t^2}{4(t^4+t^2+1)}dt = \frac{2}{4}\int \frac{1-t^2}{t^4+t^2+1}dt$$

Uma vez que

$$(t^2+1)^2 = t^4+2t^2+1$$

$$(t^2+1)^2-2t^2 = t^4+1$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2-2t^2+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2-t^2}dt$$

Fazendo $a = t^2 + 1$ e $b = t$ e sabendo que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, temos que

$$\frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2-t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)}dt$$

Decompondo em frações parciais temos que

$$\frac{1-t^2}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)} = \frac{C_1t+D_1}{t^2-t+1} + \frac{C_2t+D_2}{t^2+t+1}$$

$$1-t^2 = (C_1t+D_1)(t^2+t+1) + (C_2t+D_2)(t^2-t+1)$$

$$1-t^2 = C_1t^3 + C_1t^2 + C_1t + D_1t^2 + D_1t + D_1 + C_2t^3 - C_2t^2 + C_2t$$

$$+D_2t^2 - D_2t + D_2$$

$$1-t^2 = (C_1+C_2)t^3 + (C_1+D_1-C_2+D_2)t^2 + (C_1+D_1+C_2-D_2)t$$

$$+D_1 + D_2$$

A equação acima pode ser reescrita da forma

$$0t^3 - t^2 + 0t + 1 = (C_1+C_2)t^3 + (C_1+D_1-C_2+D_2)t^2$$

$$+(C_1+D_1+C_2-D_2)t + D_1 + D_2$$

A partir das propriedades dos polinômios, podemos afirmar que

$$0 = C_1 + C_2$$

$$-1 = C_1 + D_1 - C_2 + D_2$$

$$0 = C_1 + D_1 + C_2 - D_2$$

$$1 = D_1 + D_2$$

Reescrevendo as equações, temos que

$$C_1 = -C_2 \text{ e } C_2 = -C_1$$

$$-1 = C_1 + D_1 + C_1 + D_2$$

$$-1 = 2C_1 + 1$$

$$2C_1 = -2$$

$$C_1 = -1$$
$$C_2 = 1$$
$$0 = C_1 + D_1 + C_2 - D_2$$
$$0 = +D_1 - D_2$$
$$D_1 = D_2$$

$$1 = D_1 + D_2$$
$$1 = 2D_1$$
$$D_1 = D_2 = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$\frac{1-t^2}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)} = \frac{C_1 t + D_1}{t^2-t+1} + \frac{C_2 t + D_2}{t^2+t+1}$$
$$\frac{1-t^2}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)} = \frac{-t+\frac{1}{2}}{t^2-t+1} + \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}$$

Desta forma

$$\frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{-t+\frac{1}{2}}{t^2-t+1} + \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{-t+\frac{1}{2}}{t^2-t+1}dt + \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int -\frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-t+1}dt + \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt\right)$$

Reescrevendo $t^2 - t + 1$ como um quadrado perfeito, temos que

$$t^2 - t + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = t^2 - t + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Da mesma forma

$$t^2 + t + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = t^2 + t + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Assim,

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-t+1}dt + \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \frac{t-\frac{1}{2}}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt + \int \frac{t+\frac{1}{2}}{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\right)$$

Aplicando o método de integração por substituição simples, temos que

$u = t - \frac{1}{2}$	$v = t + \frac{1}{2}$
$u' = 1$	$v' = 1$
$du = u'dx$	$dv = v'dx$
$du = dx$	$dv = dx$

Assim,

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \frac{t-\frac{1}{2}}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt + \int \frac{t+\frac{1}{2}}{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}dt + \int \frac{v}{v^2+\frac{3}{4}}dv\right)$$

Aplicando novamente o método de integração por substituição simples, temos que

$z = u^2 + \frac{3}{4}$	$w = v^2 + \frac{3}{4}$
$z' = 2u$	$w' = 2v$
$dz = z'du$	$dw = w'dv$
$dz = 2udu$	$dw = 2vdv$
$\frac{dz}{2} = du$	$\frac{dw}{2} = dv$

Assim,

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}dt + \int \frac{v}{v^2+\frac{3}{4}}dt\right) = \frac{1}{2}\left(-\int \frac{dz}{2z} + \int \frac{dw}{2w}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}\ln|w|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}(\ln|w| - \ln|z|) + C$$

Sabendo que $z = u^2 + \frac{3}{4}$e que $w = v^2 + \frac{3}{4}$, temos que

$$= \frac{1}{4}(\ln|w| - \ln|z|) + C = \frac{1}{4}\left(\ln\left|v^2 + \frac{3}{4}\right| - \ln\left|u^2 + \frac{3}{4}\right|\right) + C$$

Sabendo que $u = t - \frac{1}{2}$ e que$v = t + \frac{1}{2}$, temos que

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|v^2 + \frac{3}{4}\right| - \ln\left|u^2 + \frac{3}{4}\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| - \ln\left|\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|t^2 + t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right| - \ln\left|t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|t^2 + t + \frac{4}{4}\right| - \ln\left|t^2 - t + \frac{4}{4}\right|\right) + C$$

Sabendo que $t = tan\frac{x}{2}$, temos que

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| - \ln\left|\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right|\right) + C$$

Sabendo que $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$, temos que

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|sec^2\left(\frac{x}{2}\right) - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C$$

Sabendo que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ e que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, temos que

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right| - \ln\left|\frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| - \ln\left|\frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\right) + C$$

Sabendo que $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, temos que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(x)$$

Assim,

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|-\ln\left|\frac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}\sin(x)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|-\ln\left|\frac{1-\frac{1}{2}\sin(x)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\right)+C$$

Sabendo que $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$, temos que

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}\sin(x)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|-\ln\left|\frac{1-\frac{1}{2}\sin(x)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\right)+C=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\frac{1+\frac{1}{2}\sin(x)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{1-\frac{1}{2}\sin(x)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}\sin(x)}{1-\frac{1}{2}\sin(x)}\right|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|1+\frac{1}{2}\sin(x)\right|-\ln\left|1-\frac{1}{2}\sin(x)\right|\right)+C$$

Exemplo 3.15: Calcule $\int\frac{1}{\cos(x)}dx$ utilizando o método da substituição tangentedo arco metade.

Sabendo que $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ e que $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, temos que

$$\int\frac{1}{\cos(x)}dx=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{1}{1-t^2}dt=-2\int\frac{1}{t^2-1}dt$$

$$=-2\int\frac{1}{t^2-1}dt=-2\int\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$

Decompondo em frações parciais, temos que

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{A}{(t-1)}+\frac{B}{(t+1)}$$

$$1=\frac{A(t-1)(t+1)}{(t-1)}+\frac{B(t-1)(t+1)}{(t+1)}$$

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

Fazendo $t = 1$

$$1 = A(1+1) + B(1-1)$$

$$1 = A(2)$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Fazendo $t = -1$

$$1 = A(-1+1) + B(-1-1)$$

$$1 = B(-2)$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

Assim,

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(t-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)} = \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$$

Desta forma,

$$-2\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = -2\int \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\,dt$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-1)}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)}\,dt\right)$$

$$= -1\left(\int \frac{1}{(t-1)}\,dt - \int \frac{1}{(t+1)}\,dt\right)$$

$$= \int \frac{1}{(t+1)}\,dt - \int \frac{1}{(t-1)}\,dt$$

$$= \ln|t+1| - \ln|t-1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right| + C$$

Exercício 3.8: Calcule as integrais utilizando o método de substituição tangentedo arco metade.

a) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$

b) $\int \frac{1}{\sin(x)+1} dx$

c) $\int \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} dx$

d) $\int \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} dx$

Gabarito:

3.8a) $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

3.8b) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} + C$

3.8c) $\ln|1-\sin(x)| + C$

3.8d) $-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - x + C$

3.3. Integral Definida

Todas as integrais apresentadas até aqui eram integrais indefinidas, e eram representadas por

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

em que *F(x)* é a função que resulta da integração de *f(x)* e *C* uma constante. É possível, no entanto, calcular a integral em um intervalo [*a*,*b*] de uma função, desde que ela seja contínua no intervalo [*a*,*b*]. A integral de um intervalo definido é chamada de **integraldefinida**. A integral definida é representada matematicamente por

$$\int_a^b f(x) = F(x) \begin{cases} b \\ a \end{cases} = F(b) - F(a)$$

É importante observar que no cálculo da integral definida, a constante *C* desaparece da equação. Vejamos o porquê.

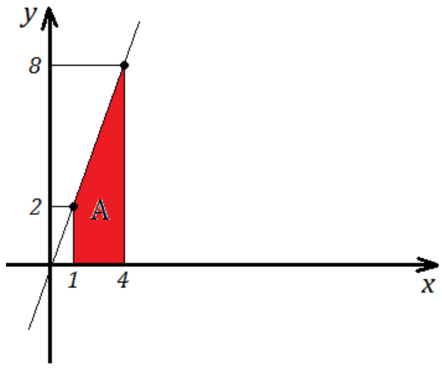
$$\int_a^b f(x) = F(x) + C \begin{cases} b \\ a \end{cases}$$

$$= (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

A integral definida **calcula a área sob o gráfico**, do intervalo [*a*,*b*] até o eixo Ox. Seja a função $f(x) = 2x$, vamos calcular a integral no intervalo [1,4].

$$\int_1^4 2x \ dx = x^2 \Big|_1^4 = 4^2 - 1^2 = 15$$

A figura abaixo apresenta o gráfico da função $f(x) = 2x$. A parte em vermelho é a área calculada pela integral $\int_1^4 2x \ dx$=15.



Calculando a área *A* utilizando as regras da geometria, temos que a área em vermelho é a soma das áreas do quadrado de base 3 e altura 2, e do triângulo de base 3 e de altura 6.

$$A = (4-1)2 + \frac{(4-1)(8-2)}{2}$$

$$A = 6 + \frac{18}{2} = 15$$

Dada uma função *f(x)*, é possível diferenciá-la ou integrá-la, se ela for contínua. A Figura 3.4 ilustra a ideia. A derivada da função permite calcular o coeficiente angular da reta tangente ao ponto $x = a$, enquanto a integral da função calcula a área, sob o gráfico, do intervalo [*a*,*b*], até o eixo Ox.

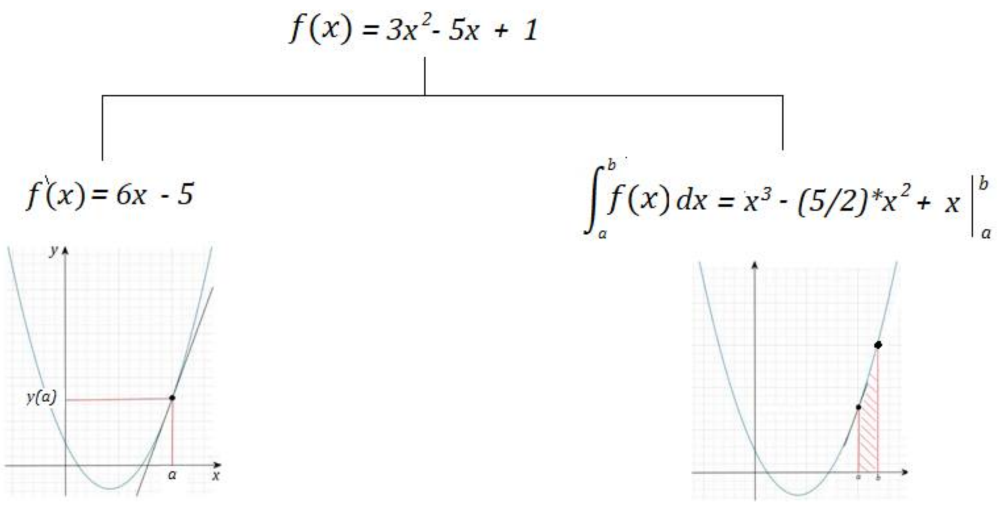


Figura 3.4: Integração e diferenciação.

Exercício 3.9: Calcule as integrais definidas a seguir.

a) $\int_{-9}^{-5} \frac{dx}{x+1}$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{3+5(\cos(2x))}\ dx$

c) $\int_{0}^{1} cosh^3\ x.\sinh x\ \ dx$

d) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\sin(\pi x)}\, cos^3(\pi x)\ \ dx$

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{9}} cotg\ (3x)\ \ dx$

f) $\int_{0}^{1} x^2 - 2cos\ (x)\ \ dx$

g) $\int_{-1}^{3} 3x^2 - 2x + 1\ \ dx$

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos\ x\ \ dx$

i) $\int_{1}^{16} \sqrt{x^3}\ \ dx$

j) $\int_{4}^{5} \frac{2}{\sqrt{x}} - x\ dx$

k) $\int_{0}^{1} \sqrt{x^2 - 6x + 9}\ \ dx$

l) $\int_{0}^{2} \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\ dx$

m) $\int_{-1}^{2} |2x + 3|\ \ dx$

n) $\int_{-3}^{4} |x + 2|\ \ dx$

o) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{1-x}\ dx$

p) $\int_{-3}^{-1} \frac{x^4}{\sqrt{3-x}}\ dx$

Exercício 3.10: Calcule as áreas sob os gráficos das seguintes funções, até o eixo Ox, entre os valores indicados de *x* (a e b).

a) $f(x) = \sin x; (a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3})$

b) $f(x) = x^2 + 4x$; $(a = 0, b = 3)$

c) $f(x) = \sqrt{5x + 4}$; $(a = 0, b = 1)$

d) $f(x) = x^2 + 2x$; $(a = 0, b = 1)$

Gabarito:

3.9.a) $-\ln 2$. 3.9b) $\frac{1}{10}\ln\frac{8}{3}$. 3.9c) $\frac{1}{4}cosh^4(1) - 1$. 3.9d) $\frac{32}{65\pi}$. 3.9e) $\frac{1}{3}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.9f) $\frac{1}{3} - 2\sin(1)$. 3.9g) 24. 3.9h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3.9j) $\frac{2046}{5}$ 3.9j) $\frac{8\sqrt{5}-25}{2}$. 3.9k) $-\frac{5}{2}$. 3.9l) 1.

3.9m) $\frac{1}{4}$. 3.9n) $\frac{37}{2}$. 3.9o) -2,405. 3.9p) 20,75.

3.10a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 3.10b) 27. 3.10c) $\frac{38}{15}$. 3.10d) $\frac{4}{3}$.

REFERÊNCIAS

Anton, Howard e Ayres e Mendelson. Cálculo 4ª Edição. Editora Bookman: Porto Alegre, 2007.

Davis. Cálculo Volume 1, 8ª Edição. Editora Bookman: Porto Alegre, 2014.

Ferreira, M. V. R.. Desenvolvendo a Matemática- 1500 exercícios Resolvidos. Rio de Janeiro, 2010.

Kahan Academy. https://pt.khanacademy.org/math/. Último acesso em 10/05/2019.

Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo I – 5ª Edição.LTC: São Paulo, 2019.

Grins, Fernando. O Matemático. WWW.omatematico.com. Último acesso em 01/06/2019.

Professor Ferretto. https://plataforma.professorferretto.com.br. Último acesso em 02/06/2019.

Responde Aí. WWW.respondeai.com.br. Último acesso em 06/06/2019.

Stewart, James. Cálculo Volume 1, 8ª Edição Norte Americana. Editora Cengage Learning: São Paulo, 2017.

TABELA DE DERIVADAS

Regras de Derivação

- $(cf(x))' = cf'(x)$
- Derivada da Soma
$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$
- Derivada do Produto
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
- Derivada do Quociente
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
- Regra da Cadeia
$$(f(g(x))' = (f'(g(x))g'(x)$$

Funções Trigonométricas Inversas

- $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccossec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Funções Exponenciais e Logarítmicas

- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln(a)$

Funções Trigonométricas

- $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x,$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}\sec x = \operatorname{tg} x \sec x$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cossec}^2 x$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{cossec} x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$

Funções Hiperbólicas Inversas

- $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\coth x \operatorname{cossech} x$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{1-x^2}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsech} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccossech} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

Tabela de senos, cossenos e tangentes

	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$ **ou** ∞

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

3) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

4) $\text{sen}^2 nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2nx$

5) $\cos^2 nx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2nx$

6) $2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} x = 1 - \cos x$

7) $2\cos^2 \frac{1}{2} x = 1 + \cos x$

8) $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x$

9) $\text{sen}\, x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\text{sen}\, 2x$

10) $\text{cosec}^2 x = \text{cotg}^2 x + 1$

11) $\text{tg}\, 2x = \frac{2\,\text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x}$

12) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

13) $\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$

14) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

15) $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$

16) $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

17) $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$

18) $\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$

19) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

20) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

21) $\text{sen}\, x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\text{sen}\,(x - y) + \text{sen}\,(x + y)]$

22) $\text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

23) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

24) $1 \pm \text{sen}\, x = 1 \pm \cos(\pi / 2 - x)$

25) $\sin(a \pm b) = \sin a . \cos b \pm \sin b . \cos a$

26) $\cos(a + b) = \cos a . \cos b - \sin b . \sin a$

27) $\cos(a + b) = \cos a . \cos b + \sin b . \sin a$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

TABELA DE INTEGRAIS

$$1 \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$2 \quad \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

$$3 \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4 \quad \int e^u du = e^u + C$$

$$5 \quad \int a^u du = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

$$6 \quad \int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C$$

$$7 \quad \int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + C$$

$$8 \quad \int \sec^2(u)\,du = \operatorname{tg}(u) + C$$

$$9 \quad \int \operatorname{cossec}^2(u)\,du = -\operatorname{cotg}(u) + C$$

$$10 \quad \int \sec(u)\,\operatorname{tg}(u)\,du = \sec(u) + C$$

$$11 \quad \int \frac{\operatorname{cotg}(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du = -\frac{1}{\operatorname{sen}(u)} + C$$

$$12 \quad \int \operatorname{tg}(u)\,du = \ln|\sec(u)| + C$$

$$13 \quad \int \operatorname{cotg}(u)\,du = \ln|\operatorname{sen}(u)| + C$$

$$14 \quad \int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + C$$

$$15 \quad \int \frac{du}{\operatorname{sen}(u)} = \ln\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(u)} - \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)}\right| + C$$

$$16 \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$17 \quad \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$18 \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$19 \quad \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$20 \quad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$21 \quad \int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$$

$$22 \quad \int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{(a^2u + 2u^3)\sqrt{a^2 + u^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$$

$$23 \quad \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 + u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$$

$$24 \quad \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$$

$$25 \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$$

$$26 \quad \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$$

$$27 \quad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$$

$$28 \quad \int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2u} + C$$

$$29 \quad \int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

$$30 \quad \int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$31 \quad \int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$32 \quad \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$$

$$33 \quad \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$34 \quad \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$35 \quad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 - u^2} + a}{u}\right| + C$$

$$36 \quad \int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2u} + C$$

$$37 \quad \int (a^2 + u^2)^{3/2}\,du = -\frac{(2u^3 - 5a^2u)\sqrt{a^2 - u^2}}{8} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$38 \quad \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

$$39 \quad \int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

$$40 \quad \int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du = -\frac{(2u^3 - a^2u)\sqrt{u^2 - a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

41 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du=\sqrt{u^2-a^2}-a\ \text{arc}\cos\left(\frac{a}{|u|}\right)+C$

42 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}du=-\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}+\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

43 $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

44 $\displaystyle\int\frac{u^2du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

45 $\displaystyle\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u}+C$

46 $\displaystyle\int\frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}}=-\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}}+C$

47 $\displaystyle\int\frac{udu}{a+bu}=\frac{1}{b^2}\left(a+bu-a\ln|a+bu|\right)+C$

48 $\displaystyle\int\frac{u^2du}{a+bu}=\frac{\left[(a+bu)^2-4a(a+bu)+2a^2\ln|a+bu|\right]}{2b^3}+C$

49 $\displaystyle\int\frac{du}{u(a+bu)}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|+C$

50 $\displaystyle\int\frac{du}{u^2(a+bu)}=-\frac{1}{au}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

51 $\displaystyle\int\frac{udu}{(a+bu)^2}=\frac{a}{b^2(a+bu)}+\frac{1}{b^2}\ln|a+bu|+C$

52 $\displaystyle\int\frac{du}{u(a+bu)^2}=\frac{1}{a(a+bu)}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

53 $\displaystyle\int\frac{u^2du}{(a+bu)^2}=\frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right)+C$

54 $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du=\frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}+C$

55 $\displaystyle\int\frac{udu}{\sqrt{a+bu}}=\frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+C$

56 $\displaystyle\int\frac{u^2du}{\sqrt{a+bu}}=\frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu}+C$

57 $\displaystyle\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}du=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+c$, se $a>0$

58 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a+bu}}{u}du=2\sqrt{a+bu}+a\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}du=-\frac{\sqrt{a+bu}}{u}+\frac{b}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60 $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du=\frac{2\left[u^n(a+bu)^{3/2}-na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]}{b(2n+3)}$

61 $\displaystyle\int\frac{u^ndu}{\sqrt{a+du}}=\frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n-1)}-\frac{2na}{b(2n+1)}\int\frac{u^{n-1}du}{\sqrt{a+bu}}$

62 $\displaystyle\int\frac{u^{-n}du}{\sqrt{a+bu}}=-\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}}-\frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int\frac{u^{-n+1}du}{\sqrt{a+bu}}$

63 $\displaystyle\int\text{sen}^2(u)du=\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\text{sen}(2u)+C$

64 $\displaystyle\int\cos^2(u)du=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\text{sen}(2u)+C$

65 $\displaystyle\int\text{tg}^2(u)du=\text{tg}(u)-u+C$

66 $\displaystyle\int\text{cotg}^2(u)du=-\text{cotg}(u)-u+C$

67 $\displaystyle\int\text{sen}^3(u)du=-\frac{\left[2+\text{sen}^2(u)\right]\cos(u)}{3}+C$

68 $\displaystyle\int\cos^3u\,du=\frac{\left[2+\cos^2(u)\right]\text{sen}(u)}{3}+C$

69 $\displaystyle\int\text{tg}^3(u)du=\frac{\text{tg}^2(u)}{2}+\ln|\cos(u)|+C$

70 $\displaystyle\int\text{cotg}^3(u)du=-\frac{\text{cotg}^2(u)}{2}-\ln|\text{sen}(u)|+C$

71 $\displaystyle\int\sec^3(u)du=-\frac{\sec(u)\text{tg}(u)}{2}-\frac{\ln|\text{sen}(u)+\text{tg}(u)|}{2}+C$

72 $\displaystyle\int\frac{du}{\text{sen}^3(u)}=-\frac{\text{cotg}(u)}{2\text{sen}(u)}+\frac{\ln|\text{cossec}(u)-\text{cotg}(u)|}{2}+C$

73 $\displaystyle\int\text{sen}^n(u)du=-\frac{\text{sen}^{n-1}(u)\cos(u)}{n}+\frac{n-1}{n}\int\text{sen}^{n-2}(u)du$

74 $\displaystyle\int\cos^n(u)du=\frac{\cos^{n-1}(u)\text{sen}(u)}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(u)du$

75 $\displaystyle\int\text{tg}^n(u)du=\frac{\text{tg}^{n-1}(u)}{n-1}-\int\text{tg}^{n-2}(u)du$

76 $\displaystyle\int\text{cotg}^n(u)\,du=-\frac{\text{cotg}^{n-1}(u)}{n-1}-\int\text{cotg}^{n-2}(u)\,du$

77 $\displaystyle\int\sec^n(u)\,du=\frac{\text{tg}(u)\sec^{n-2}(u)}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}(u)\,du$

78 $\displaystyle\int\frac{du}{\text{sen}^n(u)}=-\frac{\text{cotg}(u)}{(n-1)\text{sen}^{n-2}(u)}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{du}{\text{sen}^{n-2}(u)}$

79 $\displaystyle\int\text{sen}(au)\,\text{sen}(bu)du=\frac{\text{sen}(a-b)u}{2(a-b)}-\frac{\text{sen}(a+b)u}{2(a+b)}+C$

80 $\displaystyle\int\cos(au)\cos(bu)du=\frac{\text{sen}(a-b)u}{2(a-b)}+\frac{\text{sen}(a+b)u}{2(a+b)}+C$

ANEXOS

ANEXO A

Propriedades Matemáticas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$a^{bc} = (a^b)^c$$

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{b}{\frac{1}{a}.c}$$

PARA $a > 0$

$$\sqrt{a^2} = a$$

PARA $a < 0$

$$\sqrt{a^2} = -a$$

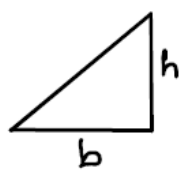
$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

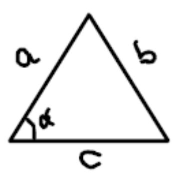
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO



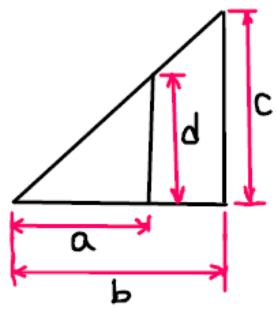
$$A = \frac{b.h}{2}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO ISÓSCELES



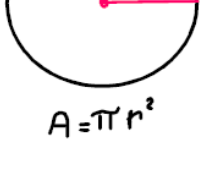
$$A = \frac{a.c \sin\alpha}{2}$$

RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$\frac{c}{b} = \frac{d}{a}$$

ÁREA DO CÍRCULO

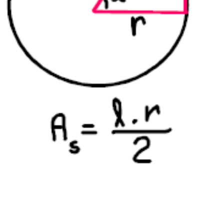


$$A = \pi r^2$$

COMPRIMENTO DO CÍRCULO

$$C = 2\pi r$$

ÁREA DO SETOR CIRCULAR



$$A_s = \frac{l.r}{2}$$

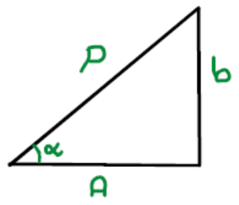
$$l = \alpha . r$$

l = COMPRIMENTO DO SETOR

α = ÂNGULO EM RADIANOS

r = RAIO

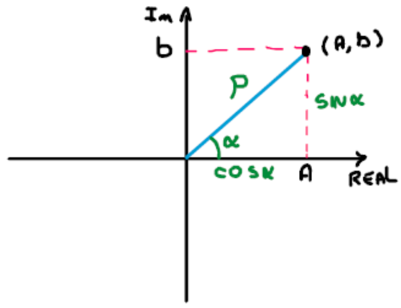
TEOREMA DE PITÁGORAS



$\sin\alpha = \dfrac{b}{P}$ | $\tan\alpha = \dfrac{b}{A}$

$\cos\alpha = \dfrac{A}{P}$ | $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{A}\right)$

NÚMEROS COMPLEXOS



FORMA ALGÉBRICA

$Z = P\cos\alpha + P\sin\alpha\, J$

FORMA POLAR

$Z = P\angle\alpha$ | $Z = Pe^{J\alpha}$

FUNÇÃO DO 2° GRAU

$f(x) = ax^2 + bx + c$

DISCRIMINANTE

$\Delta = b^2 - 4ac$

RAÍZES

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a} \end{cases}$$

FORMA ALTERNATIVA

$a(x - x')(x - x'')$

VÉRTICE

$X_v = \dfrac{-b}{2a}$ | $Y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$

RACIONALIZAÇÃO DO DENOMINADOR

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$$

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a}{b + \sqrt{c}} \cdot \frac{b - \sqrt{c}}{b - \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - c}$$

$$\frac{a}{c + \sqrt[3]{b}} = \frac{a}{c + \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{c^2 - c\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{c^2 - c\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a(c^2 - c\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})}{c^3 + b}$$

$$\left(c + \sqrt[3]{b}\right)\left(c^2 - c\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right) = c^3 - c^2\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{b^2} + c^2\sqrt[3]{b} - c\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b^2}$$

$$= c^3 - c^2\sqrt[3]{b} + \cancel{c\sqrt[3]{b^2}} + c^2\sqrt[3]{b} - \cancel{c\sqrt[3]{b^2}} + \sqrt[3]{b^3}$$

$$= c^3 \cancel{- c^2\sqrt[3]{b} + c^2\sqrt[3]{b}} + b = c^3 + b$$

ANEXO B

Limite Fundamental Trigonométrico

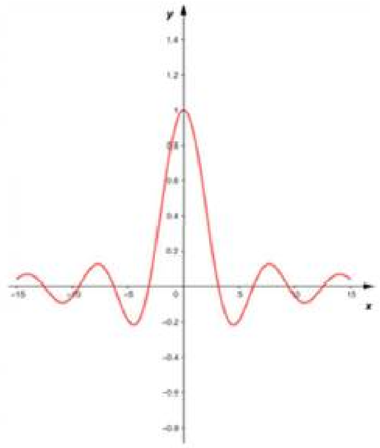
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{(INDETERMINAÇÃO)}$$

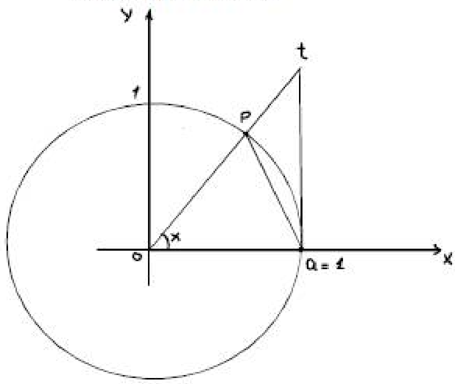
VAMOS PROVAR QUE, NA VERDADE

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1} \quad (X \text{ EM RADIANOS})$$

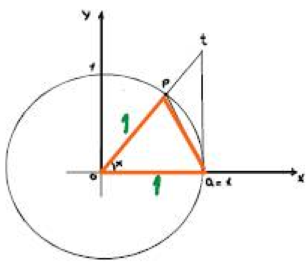
Gráfico da função sinc (x)



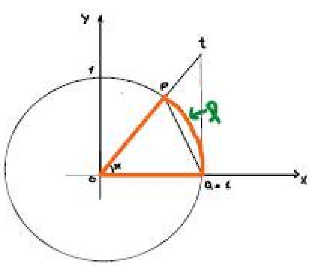
Círculo Trigonométrico



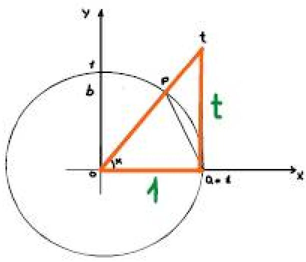
Área do triângulo isósceles



Área do setor circular



Área do triângulo retângulo



$$A_{\Delta OPa} = \frac{a \cdot P \sin x}{2}$$

$$A_{\Delta OPa} = \frac{1 \cdot 1 \sin x}{2}$$

$$A_{\Delta OPa} = \frac{\sin x}{2}$$

$$A_{SETOR\ OPa} = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

$$= \frac{x \cdot R}{2} = \frac{x}{2}$$

ℓ: COMPRIMENTO DO SETOR

$\ell = x \cdot R$ (EM RADIANOS)

$x \to$ ÂNGULO EM RADIANOS

$R \to$ RAIO

$\ell = 1 \cdot x = x$

$$A_{\Delta Ota} = \frac{a \cdot t}{2}$$

$t = \tan x$ E $a = 1$

$$A_{\Delta Ota} = \frac{\tan x}{2}$$

Observando os três triângulos na figura acima, Podemos afirmar que:

$$A_{\Delta OPQ} < A_{\text{SETOR } OPQ} < A_{\Delta OTQ}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

Multiplicando cada termo da desigualdade por $\frac{2}{\sin x}$, temos que

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} = 1$$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$$

$$\frac{\tan x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{d}{c}$$

A inversão dos termos em cada lado da desigualdade resultou na inversão do sinal da desigualdade.

Assim,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo a posição dos elementos de cada termo da desigualdade, temos que

$$\underbrace{1}_{g(x)} > \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{f(x)} > \underbrace{\cos x}_{h(x)}$$

$$\boxed{g(x) > f(x) > h(x)}$$

Cálculo dos limites laterais

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

Assim,

$$1 > \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right) > 1$$

O teorema do confronto diz que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Sendo $\cos x$ uma função par

$$\cos x = \cos(-x)$$

Sendo $\sin x$ uma função ímpar

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Assim,

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

Isso significa que a desigualdade

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

é válida para valores positivos e para valores negativos de x.

Desta forma, podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$$

Da mesma forma

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Se $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Assim,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

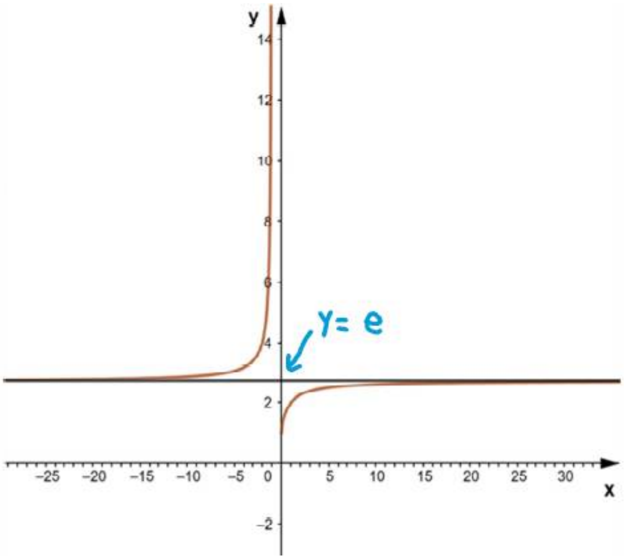
ANEXO C

Limite Fundamental Exponencial

a) $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Analisando o gráfico da função, podemos observar que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$



O gráfico mostra que existe uma assíntota horizontal em $y = e$. Quanto maior o valor de x, mais próximo de e vai ser o valor retornado pela função. O mesmo raciocínio vale para quando o valor de x cresce negativamente.

Podemos chegar a mesma conclusão atribuindo valores a x.

$x \to +\infty$

X	10	100	1.000	10.000	...
f(x)	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	...

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$x \to -\infty$

X	-10	-100	-1.000	-10.000	...
f(x)	2,8679	2,7319	2,7196	2,7184	...

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Para comprovar o que foi observado no gráfico e atribuindo valores a x, vamos calcular analiticamente os limites laterais separadamente.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Sabendo que$e^{\ln a}=a$e fazendo$a=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right|}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|}$$

Sabendo que$\lim_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)}$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|}=e^{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\right)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|=\infty.0$(indeterminação)

Para eliminar a indeterminação, vamos reescrever a expressão e aplicar o teorema de L’Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|}{\frac{1}{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|'=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}.\left(1+\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}x^2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Desta forma,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left|1+\frac{1}{x}\right|} = e^{\left(\lim_{x \to +\infty} x \ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\right)} = e^{1} = e$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\begin{array}{c|c} x = -(u+1) & u = -x - 1 \\ x = -u - 1 & u = -(-\infty) - 1 = +\infty \end{array}$$

Assim,

$$\lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-(u+1)}\right)^{-(u+1)}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)^{-(u+1)} = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u + 1 - 1}{u+1}\right)^{-(u+1)}$$

Sabendo que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c}$, temos que

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u}{u+1}\right)^{-(u+1)} = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u+1}{u}\right)^{(u+1)}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{(u+1)} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} 1 + \frac{1}{u}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} \lim_{u \to +\infty} 1 + \frac{1}{u}$$

Sabendo que $\lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} = e$, temos que

$$e. \lim_{u \to +\infty} 1 + \frac{1}{u} = e.1 = e$$

Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

$$u = a^x - 1$$

$$a^x = u + 1$$

Sabendo que se $a^x = b$, então $\log_a b = x$. Assim, temos que

$$x = \log_a u + 1$$

$$x \to 0$$

$$u = a^0 - 1 = 0$$

Desta forma,

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{\log_a(u + 1)} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \log_a(u + 1)} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\log_a(u + 1)^{\frac{1}{u}}}$$

Sabendo que $\lim_{x \to a}(\log_b f(x)) = \log_b \lim_{x \to a} f(x)$, temos que

$$\lim_{u \to 0} \frac{1}{\log_a(u + 1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{\lim_{u \to 0} 1}{\lim_{u \to 0}\left(\log_a(u + 1)^{\frac{1}{u}}\right)} = \frac{1}{\log_a\left(\lim_{u \to 0}(u + 1)^{\frac{1}{u}}\right)}$$

Sabendo que $\lim_{u \to 0}(u + 1)^{\frac{1}{u}} = e$, temos que

$$\frac{1}{\log_a\left(\lim_{u \to 0}(u + 1)^{\frac{1}{u}}\right)} = \frac{1}{\log_a e}$$

Efetuando a mudança de base

$$\frac{1}{\log_a e} = \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln a}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

ANEXO D
Derivada de sin x

DerivadaSenox

segunda-feira, 7dejunhode2021 09:26

CÁLCULO

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = \sin(x+h)$$

sabendo que

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

Temos que

$$f(x+h) = \sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x$$

— / —

$$f(x+h) - f(x) = \sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x - \sin x$$

$$= \sin x(\cos h - 1) + \sin h \cdot \cos x$$

$$= \sin x(\cos h - 1) \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} + \sin h \cdot \cos x$$

$$= \frac{\sin x(\cos^2 h - 1)}{\cos h + 1} + \sin h \cdot \cos x$$

sabendo que $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$, temos que

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\sin x(-\sin^2 h)}{\cos h + 1} + \sin h \cdot \cos x$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin^2 h}{\cos h + 1} + \sin h \cdot \cos x$$

— / —

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-\sin x \cdot \sin^2 h}{h(\cos h + 1)} + \frac{\sin h \cdot \cos x}{h}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot (\sin h \cdot \sin h)}{h(\cos h + 1)} + \frac{\sin h \cdot \cos x}{h}$$

―――――― / ――――――

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\sin x \cdot (\sin h \cdot \sin h)}{h(\cos h + 1)} + \frac{\sin h \cdot \cos x}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin x \cdot \sin h \cdot \sin h}{h(\cos h + 1)} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cdot \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin x \cdot \overset{1}{\sin h} \cdot \sin h}{h(\cos h + 1)} + \lim_{h\to 0} \frac{\overset{1}{\sin h} \cdot \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin x \cdot \sin h}{\cos h + 1} \xrightarrow{} 0 + \lim_{h\to 0} \cos x$$

$$\boxed{= \cos x}$$

ANEXO E
Derivada cos x

CÁLCULO

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = \cos(x+h)$$

—— / ——

$$f(x+h) - f(x) = \cos(x+h) - \cos x$$

—— / ——

SABENDO QUE

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

TEMOS QUE

$$f(x+h) - f(x) = \cos x \cdot \cosh - \sin x \cdot \sinh - \cos x$$

$$= \cos x(\cosh - 1) - \sin x \cdot \sinh$$

$$= \cos x(\cosh - 1) \cdot \frac{\cosh + 1}{\cosh + 1} - \sin x \cdot \sinh$$

$$= \frac{\cos x(\cos^2 h - 1)}{\cosh + 1} - \sin x \cdot \sinh$$

SABENDO QUE $\cos^2 h - 1 = -\sin^2 h$, TEMOS QUE

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\cos x \cdot (-\sin^2 h)}{\cosh + 1} - \sin x \cdot \sinh$$

$$= \frac{-\cos x \cdot \sin h \cdot \sin h}{\cos h + 1} - \sin x \cdot \sin h$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-\cos x \cdot \sin h \cdot \sin h}{h(\cos h + 1)} - \frac{\sin x \cdot \sin h}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{-\cos x \cdot \sin h \cdot \sin h}{h(\cos h + 1)} - \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cos x \cdot \sin h \cdot \sin h}{h(\cos h + 1)} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cos x \cdot \overset{1}{\sin h} \cdot \sin h}{h(\cos h + 1)} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \overset{1}{\sin h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{-\cos x \cdot \sin h}^{\,0}}{\cos h + 1} - \lim_{h \to 0} \sin x$$

$$= -\lim_{h \to 0} \sin x$$

$$\boxed{= -\sin x}$$