SISTEMAS LINEARES

Situações Problema
Equações Lineares
Sistema de Equações Lineares
Sistema Linear Homogêneo

Professor Cláudio Bispo

Situações Problema

Situações problema

Sistemas Lineares aparecem em diversos tipos de aplicações na Física, Química e Engenharia e dentro de diversos problemas da própria Matemática. Vamos apresentar diversos exemplos que servem de motivação para este estudo.

Situação problema 1

Há dois tipos de moeda, indistinguíveis exceto pelo peso. As de material X pesam 10g cada e as de material Y, 20g cada. Se um conjunto de 100 moedas pesa 1,25Kg, quantas são do material X?

Situação problema 2

Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$5,40 por 2 latas de refrigerantes e uma porção de batatas fritas. O segundo pagou R$9,60 por 3 latas de refrigerantes e 2 porções de batatas fritas. Calcule a diferença entre o preço de uma porção de fritas e de uma lata de refrigerante nesse bar.

Situação problema 3

Em um restaurante são servidos três tipos de saladas: A, B e C. Num dia de movimento, observaram-se os clientes X, Y e Z. O cliente X serviu-se de 200g de salada A, 300g da B e 100g da C e pagou R$5,50 pelo prato. O cliente Y serviu-se de 150g de salada A, 250g da B e 200g da C e pagou R$5,85. Já o cliente Z serviu-se de 120g de salada A, 200g da B e 250g da C e pagou R$5,76. Calcule o preço do quilo de cada salada.

Situação problema 4

Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Determine o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta total.

Equações Lineares

Professor Cláudio Bispo

Equações Lineares:

Definição

Uma ***equação linear*** nas variáveis x_1, x_2, x_3, ..., x_n como equação que pode ser expressa na forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b$$

onde a_1, a_2, a_3, ..., a_n e b são constantes reais. As variáveis de uma equação linear são muitas vezes chamadas ***incógnitas***.

Equações Lineares:
Definição

São exemplos de equações lineares:

$$x + 3y = 7;$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3z + 1;$$

$$x_1 - 2x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 = 7$$

Observe que uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais.

Equações Lineares:
Definição

São exemplos de equações não lineares:

$$x + 3\sqrt{y} = 5;$$

$$3x + 2y - z + xz = 4;$$

$$y = senx$$

$$\log x + e^{y} = 3$$

Equações Lineares:

Definição

Uma solução de uma equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

é uma sequência de n números s_1, s_2, s_3, ..., s_n tais que a equação é satisfeita quando substituímos $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$,...., $x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado seu ***conjunto solução*** ou, às vezes, a ***solução geral*** da equação.

Sistemas Lineares

Professor Cláudio Bispo

Sistemas Lineares

Um conjunto finito de equações lineares nas x_1, x_2, x_3, ... , x_n variáveis é chamado de um ***Sistema de Equações Lineares*** ou um ***Sistema Linear***. Uma sequência de números s_1 , s_2 , s_3 , ... , s_n é chamada solução do sistema se $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$, ... , $x_n = s_n$ for solução de cada equação linear do sistema.

Sistemas Lineares

Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$$

Tem solução $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -1$ pois estes valores satisfazem ambas equações. No entanto $x_1 = 1$, $x_2 = 8$ e $x_3 = 1$ não é uma solução do sistema pois estes valores satisfazem apenas a primeira das duas equações do sistema.

Sistemas Lineares

Nem todos os sistemas de equações lineares tem solução. Por exemplo, multiplicando por ½ a segunda equação do sistema

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=6 \end{cases} \quad \text{temos} \quad \begin{cases} x+y=4 \\ x+y=3 \end{cases},$$

torna-se evidente que não existem soluções, pois o sistema equivalente[1] que tem equações contraditórias.

Um sistema de equações que não possui solução é chamado ***inconsistente***; se existir pelo menos uma solução do sistema, dizemos que ele é ***consistente***.

1. Sistemas equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.

Sistemas Lineares:

Classificação

Um sistema de equações que não possui solução é chamado ***inconsistente***; se existir pelo menos uma solução do sistema, dizemos que ele é ***consistente***.

Um sistema de equações lineares tem:
i) exatamente uma solução;
ii) nenhuma solução;
iii) ou então uma infinidade de soluções.

Sistemas de Equações Lineares: *Classificação quanto a solução*

Tipo de Sistema	Solução
Consistente e determinado	Única
Consistente e Indeterminado	Infinitas soluções
Inconsistente	Não possui solução

Sistemas de Equações Lineares:

Produto de Matrizes

Um sistema arbitrário de ***m*** equações lineares em ***n*** incógnitas pode ser escrito como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde x_1, x_2, x_3, ..., x_n são incógnitas e as letras a e b com subscritos denotam constantes

Sistemas Lineares:

Produto de Matrizes

Um sistema arbitrário de ***m*** equações lineares em ***n*** incógnitas também pode ser interpretado como um produto de duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema Linear Homogêneo

Professor Cláudio Bispo

Sistema Linear Homogêneo

Um Sistema Linear Homogêneo de ***m*** equações lineares em ***n*** incógnitas é escrito como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Sistema Linear Homogêneo

Um sistema linear homogêneo é sempre ***consistente***.

Um sistema linear homogêneo pode ser:

i) Consistente e determinado. E neste caso a solução será $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_\mathrm{n} = 0$, que é chamado de ***solução trivial***;

ii) Consistente e indeterminado. E neste caso o sistema possuirá uma infinidade de soluções.

EXERCÍCIOS

Professor Cláudio Bispo