FAETERJ-Rio
Cálculo I
Professor DSc. Wagner Zanco

Solução dos Exercícios 2.8 – 2.10

2.8) Calcule as derivadas das funções definidas pelas seguintes fórmulas:

a) $Dx(x^{100} + 2x^{50} - 3)(7x^8 + 20x + 5)$

$$= (100x^{99} + 100x^{49})(7x^8 + 20x + 5) + (x^{100} + 2x^{50} - 3)(56x^7 + 20)$$

$$Dx\left(\frac{x^2 - 3}{x + 4}\right)$$

$$= \frac{(x+4)(2x) - (x^2 - 3)}{(x+4)^2} = \frac{2x^2 + 8x - x^2 + 3}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 8x + 3}{(x+4)^2}$$

b) $Dx\left(\frac{x^5 - x + 2}{x^3 + 7}\right)$

$$Dx\left(\frac{x^5 - x + 2}{x^3 + 7}\right) = \frac{(x^3 + 7)(5x^4 - 1) - (3x^2)(x^5 - x + 2)}{(x^3 + 7)^2}$$

$$= \frac{5x^7 + 35x^4 - x^3 - 7 - 3x^7 + 3x^3 - 6x^2}{(x^3 + 7)^2}$$

$$= \frac{2x^7 + 35x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7}{(x^3 + 7)^2}$$

c) $Dx\left(\frac{3}{x^5}\right)$

$$= \frac{x^5.0 - 5x^4.3}{(x^5)^2} = \frac{-15x^4}{x^{10}}$$

d) $Dx\left(8x^3 - x^2 + 5 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3}\right)$

$$= 24x^2 - 2x - Dx\left(\frac{2}{x}\right) + Dx\left(\frac{4}{x^3}\right)$$

$$Dx\left(\frac{2}{x}\right) = Dx(2.x^{-1}) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$Dx\left(\frac{4}{x^3}\right) = Dx(4x^{-3}) = -12x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

$$Dx\left(8x^3 - x^2 + 5 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3}\right) = 24x^2 - 2x + \frac{2}{x^2} - \frac{12}{x^4}$$

e) $Dx\left(\frac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4}\right)$

$$= \frac{x^4(21x^6 + 5x^4 - 8x^3 + 1) - (4x^3)(3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3)}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{21x^{10} + 5x^8 - 8x^7 + x^4 - 12x^{10} - 4x^8 + 8x^7 - 4x^4 + 12x^3}{x^8}$$

$$= \frac{9x^{10} + x^8 - 3x^4 + 12x^3}{x^8} = \frac{9x^{10}}{x^8} + \frac{x^8}{x^8} - \frac{3x^4}{x^8} + \frac{12x^3}{x^8}$$

$$= 9x^2 + 1 - \frac{3}{x^4} + \frac{12}{x^5}$$

2.9) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $x = 2$

$$f(x) = x^{-2}$$

$$m = f'(x) = -2x^{-3}$$

$$m = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Em $x = 2$, temos que

$$m = -\frac{2}{2^3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Deduzindo a equação reduzida da reta tangente.

$$y = mx + b$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.2 + b$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = b = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x^3-1}$ em $x = -1$

$$f'(x) = \frac{x + 2}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{(x^3 - 1).1 - 3x^2(x + 2)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3 - 1 - 3x^3 - 6x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^3 - 6x^2 - 1}{(x^3 - 1)^2}$$

Em $x = -1$, temos que

$$m = \frac{-2(-1)^3 - 6(-1)^2 - 1}{((-1)^3 - 1)^2} = \frac{2 - 6 - 1}{(-1 - 1)^2} = -\frac{5}{4}$$

$$y = \frac{-1 + 2}{(-1)^3 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Deduzindo a equação reduzida da reta tangente

$$y = mx + b$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{5}{4}(-1) + b$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{5}{4} + b$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{5}{4} = b = \frac{-2 - 5}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$$

c) Seja $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ para todo $x \neq 2$. Calcule $f'(-2)$

$$f'(x) = \frac{(x - 2)1 - 1(x + 2)}{(x - 2)^2} = \frac{x - 2 - x - 2}{(x - 2)^2} = -\frac{4}{(x - 2)^2}$$

$$f'(-2) = -\frac{4}{(-2 - 2)^2} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

2.10) Determine os pontos nos quais a função $f(x) = |x - 3|$ é diferenciável.

Obs.: Uma função é diferenciável em *x* se $f'(x)$ existir naquele ponto.

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 3\}$$

Gabarito:

2.8a) $(100x^{99} + 100x^{49})(7x^8 + 20x + 5) + (x^{100} + 2x^{50} - 3)(56x^7 + 20)$.

2.8b) $\frac{x^2 + 8x + 3}{(x+4)^2}$. 2.8c) $\frac{2x^7 + 35x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7}{(x^3 + 7)^2}$. 2.8d) $\frac{-15}{x^{10}}$.

2.8e) $24x^2 - 2x + \frac{3}{x^4} - \frac{12}{x^4}$.

2.8f) $9x^2 + 1 - \frac{3}{x^4} + \frac{12}{x^5}$. 2.9a) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. 2.9b) $y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$.

2.9c) $-\frac{1}{4}$. 2.10) todos os pontos, exceto em $x = 3$.