TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO

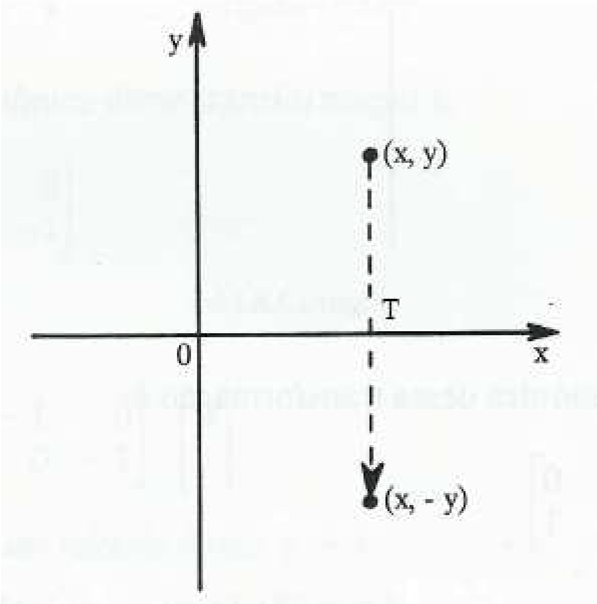
Professor Cláudio Bispo

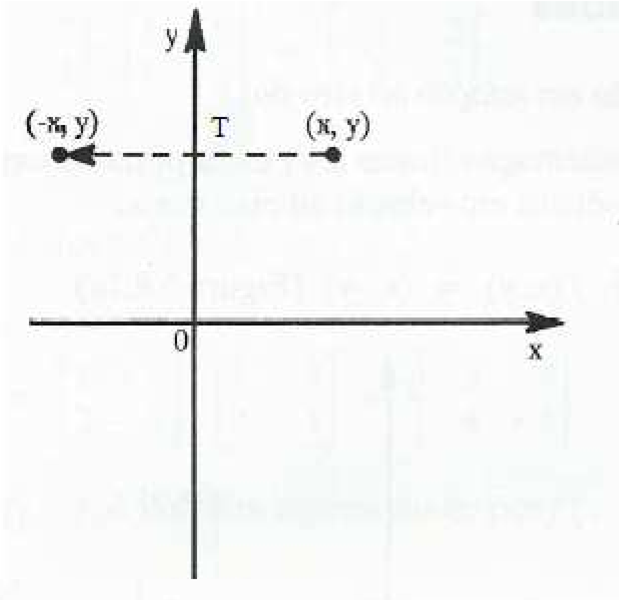
Introdução

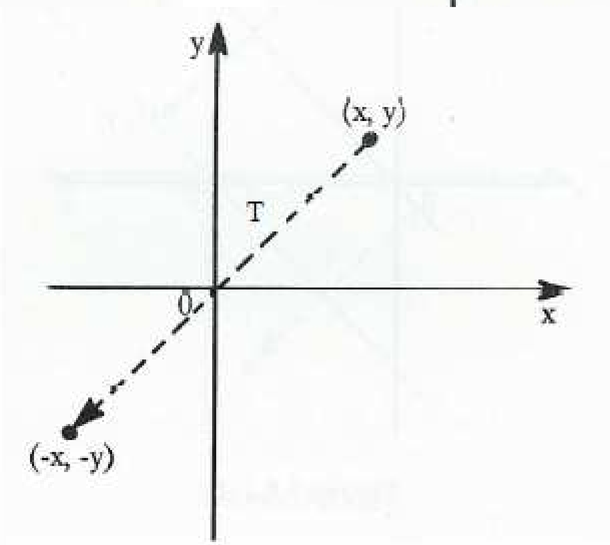
Estudaremos agora alguns Operadores Lineares no IR^2:

- Reflexões
- Dilatações e Contrações
- Cisalhamento
- Rotação

REFLEXÕES





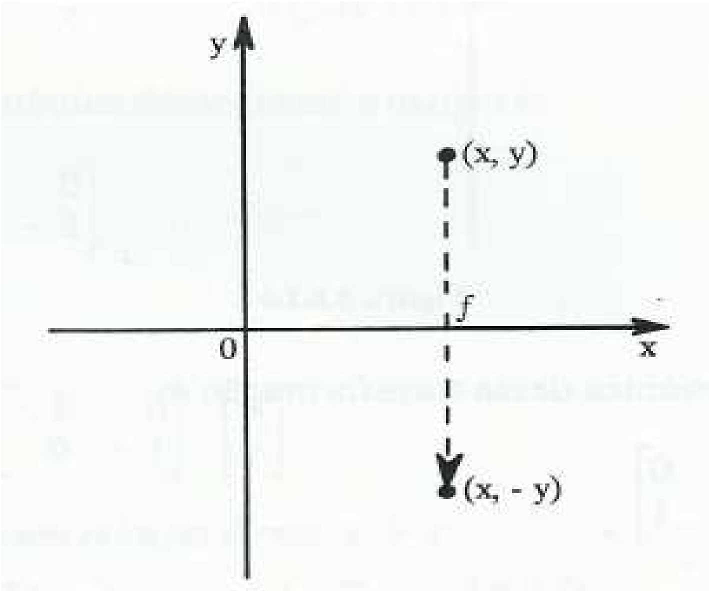


REFLEXÕES

REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO DAS ABCISSAS

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem (x, –y), simétrica em relação ao eixo dos x.

$T: IR^2 \to IR^2$, $T(x, y) = (x, -y)$



REFLEXÕES

REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO DAS ABCISSAS

MATRIZ CANÔNICA

A matriz canônica desta transformação é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

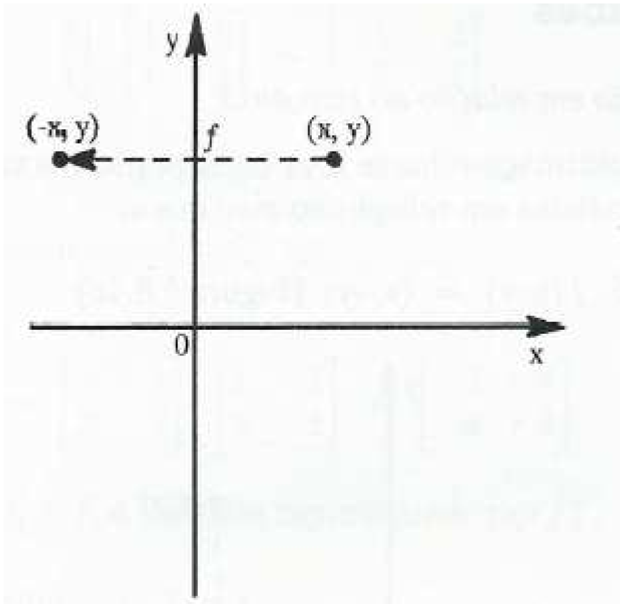
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad \equiv \quad T(x,y) = (x,-y)$$

REFLEXÕES

REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO DAS ORDENADAS

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem (–x, y), simétrica em relação ao eixo dos x.

T: $IR^2 \rightarrow IR^2$, T(x, y) = (–x, y)



REFLEXÕES

REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO DAS ORDENADAS

MATRIZ CANÔNICA

A matriz canônica desta transformação é:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

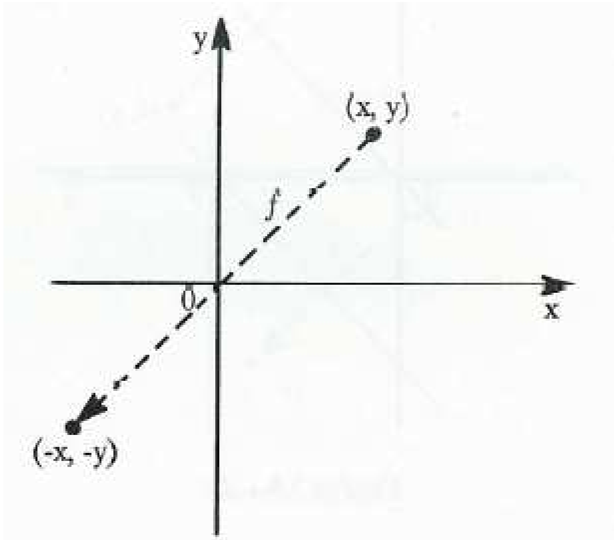
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \quad \equiv \quad T(x,y) = (-x,y)$$

REFLEXÕES

REFLEXÃO EM RELAÇÃO À ORIGEM

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem (–x, –y), simétrica em relação ao eixo dos x.

$T: IR^2 \to IR^2$, $T(x, y) = (-x, -y)$



REFLEXÕES

REFLEXÃO EM RELAÇÃO À ORIGEM

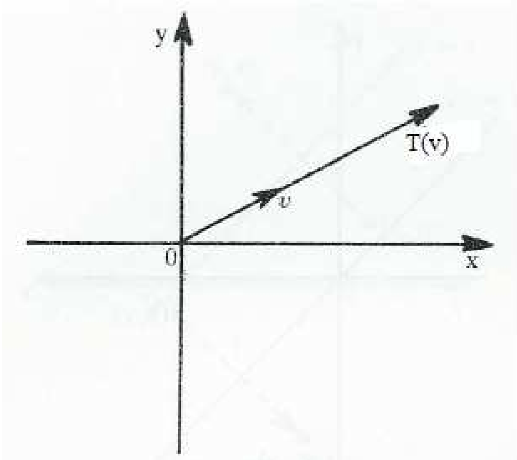
MATRIZ CANÔNICA

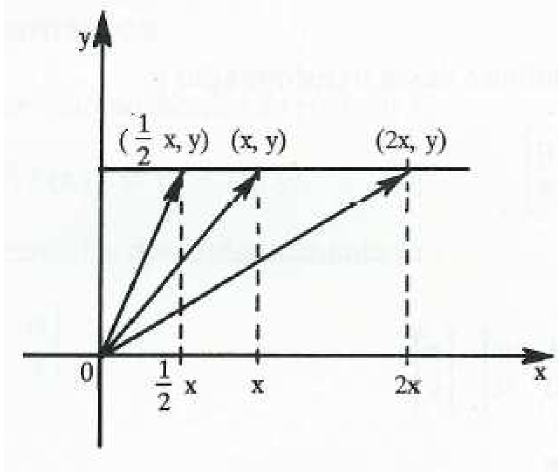
A matriz canônica desta transformação é:

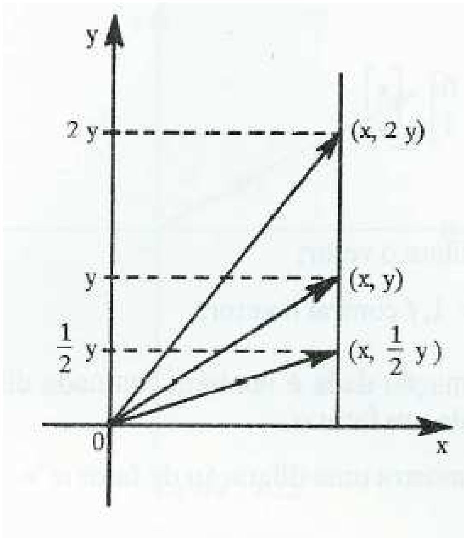
$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \quad \equiv \quad T(x, y) = (-x, -y)$$

DILATAÇÕES OU CONTRAÇÕES



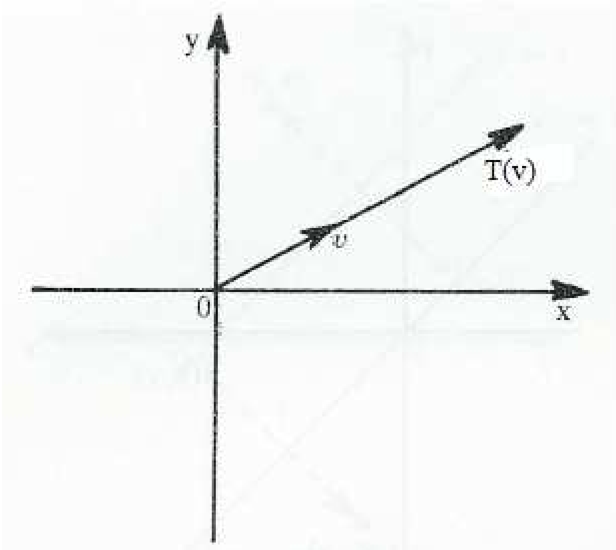




DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO NA DIREÇÃO DO VETOR

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem (αx, αy), onde $\alpha \in$ IR.

$T: IR^2 \to IR^2$, $T(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, $\alpha \in IR$.



DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO NA DIREÇÃO DO VETOR

MATRIZ CANÔNICA

A matriz canônica desta transformação é:

$$[T]=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{bmatrix} \quad \equiv \quad T(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$$

DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO NA DIREÇÃO DO VETOR

Observemos que:

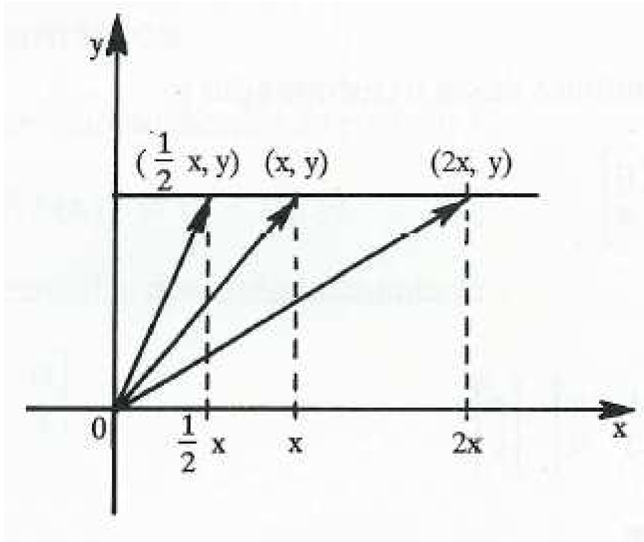
- Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor;
- Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;
- Se $\alpha = 1$, T é a identidade I;
- Se $\alpha < 0$, T muda o sentido do vetor.

Ex.: $T: IR^2 \rightarrow IR^2$, definida por $T(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ é um exemplo de contração.

DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ABSCISSAS

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem (αx, y), onde $\alpha \geq 0$.

T: $IR^2 \rightarrow IR^2$, $T(x, y) = (\alpha x, y)$, $\alpha \geq 0$.



DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ABCISSAS

MATRIZ CANÔNICA

A matriz canônica desta transformação é:

$$[T]=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x\\ y\end{bmatrix} \quad \equiv \quad T(x,y)=(\alpha x, y)$$

DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ABCISSAS

Observemos que:

- Se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;
- Se $0 \leq \alpha < 1$, T contrai o vetor;

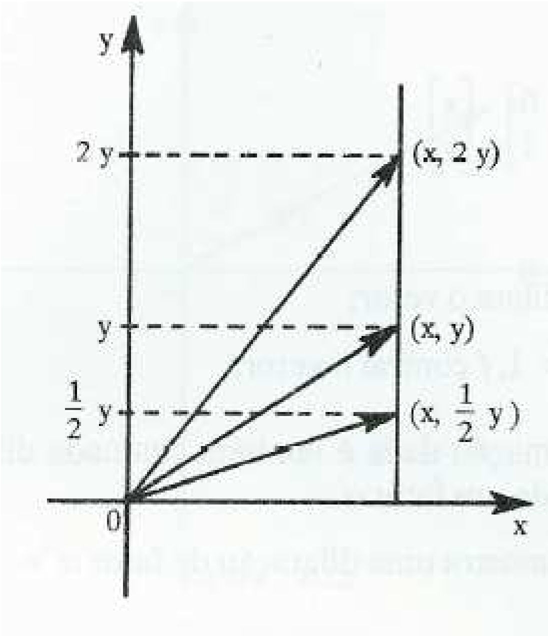
A transformação dada por $T(x, y) = (\alpha x, y)$ é também chamada de dilatação ou contração na direção horizontal de uma fator α.

A figura anterior mostra uma dilatação de fator $\alpha = 2$ e uma contração de fator $\alpha = 1/2$.

DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ORDENADAS

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, \alpha y)$, onde $\alpha \geq 0$.

$T: IR^2 \rightarrow IR^2$, $T(x, y) = (x, \alpha y)$, $\alpha \geq 0$.



DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ORDENADAS

MATRIZ CANÔNICA

A matriz canônica desta transformação é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \alpha y \end{bmatrix} \quad \equiv \quad T(x, y) = (x, \alpha y)$$

DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ORDENADAS

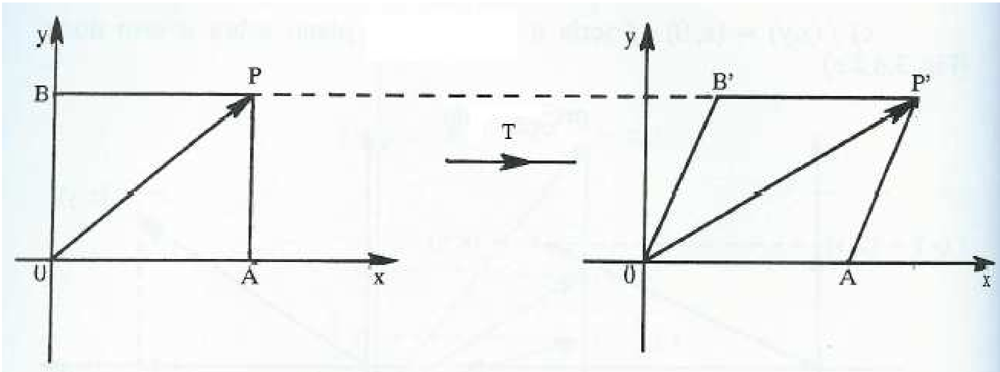
Observemos que:

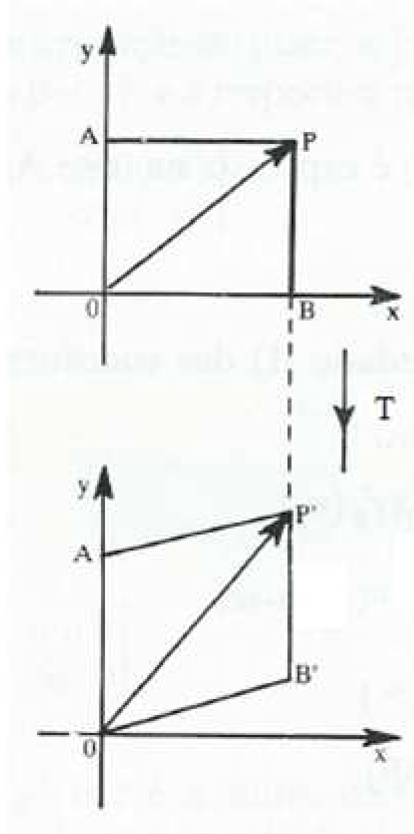
- Se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;
- Se $0 \leq \alpha < 1$, T contrai o vetor;

A transformação dada por $T(x, y) = (x, \alpha y)$ é também chamada de dilatação ou contração na direção vertical de uma fator α.

A figura anterior mostra uma dilatação de fator $\alpha = 2$ e uma contração de fator $\alpha = 1/2$.

CISALHAMENTO

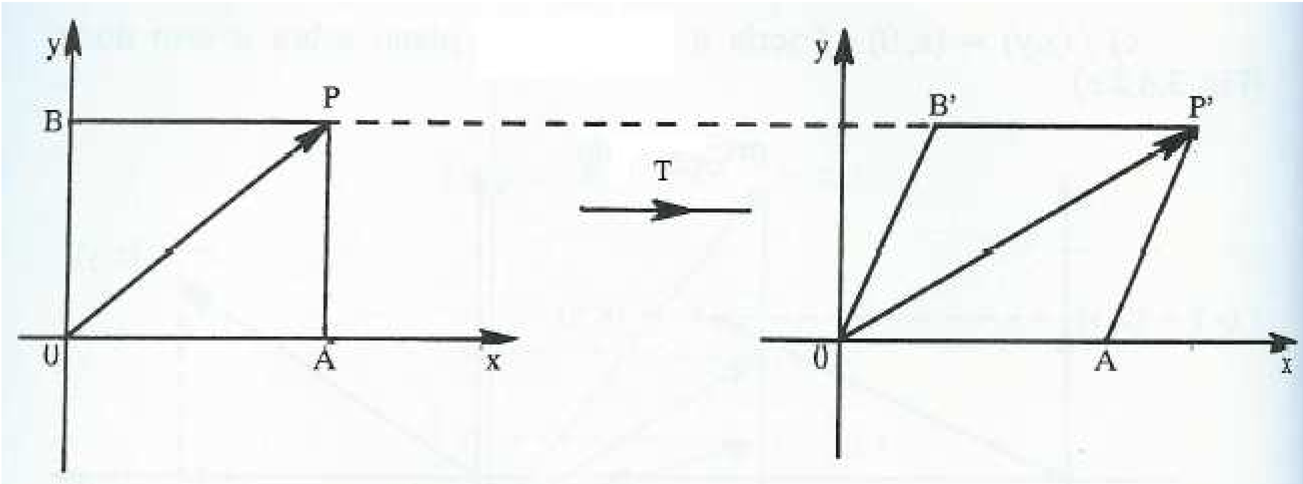




CISALHAMENTO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ABSCISSAS

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x + \alpha y, y)$.

$T: IR^2 \rightarrow IR^2$, $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$.



CISALHAMENTO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ABSCISSAS

MATRIZ CANÔNICA

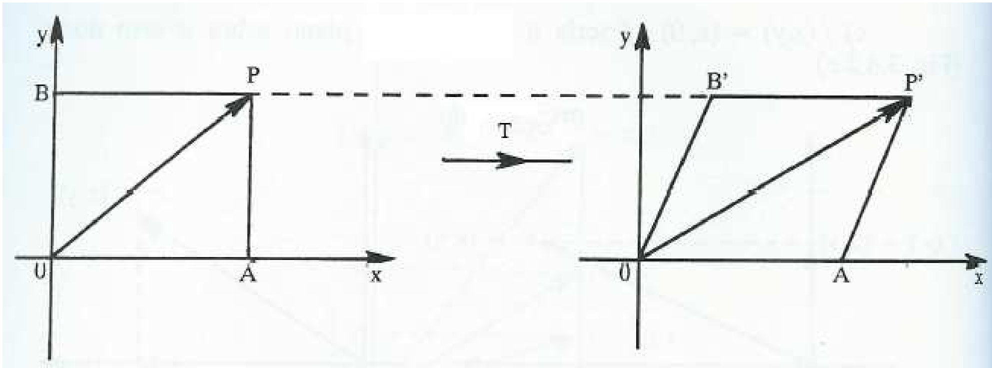
A matriz canônica desta transformação é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} \quad \equiv \quad T(x, y) = (x + \alpha y, y)$$

CISALHAMENTO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ABSCISSAS

O efeito desse cisalhamento, para um determinado valor de α, é transformar o retângulo OAPB no paralelogramo OAP'B' de mesma base e mesma altura (vide figura).



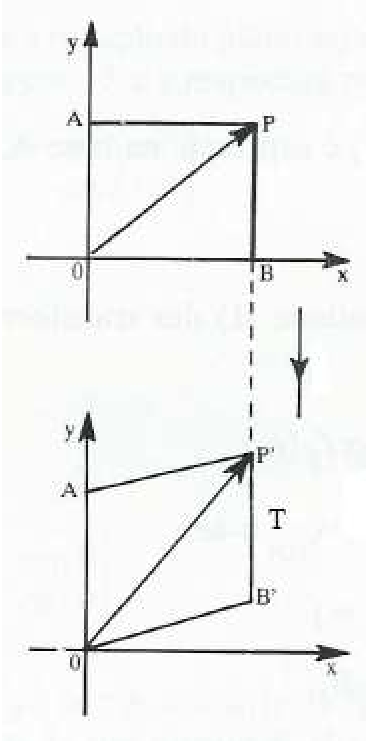
Por cisalhamento, cada ponto (x, y) se desloca paralelamente ao eixo dos x até chegar em $(x+\alpha y, y)$ com exceção dos pontos do próprio eixo das abscissas , pois para eles $y = 0$. Assim fica explicado por que o retângulo e o paralelogramo da figura tem a mesma base OA.

Esse cisalhamento é também chamado de *cisalhamento horizontal de fator* α.

CISALHAMENTO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ORDENADAS

Este Operador Linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, \alpha x + y)$.

$T: IR^2 \rightarrow IR^2$, $T(x, y) = (x, \alpha x + y)$.



CISALHAMENTO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ORDENADAS

MATRIZ CANÔNICA

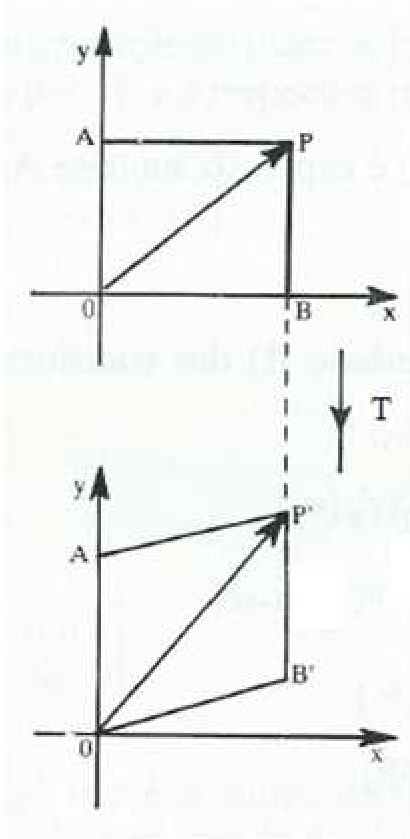
A matriz canônica desta transformação é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \alpha x + y \end{bmatrix} \equiv T(x,y) = (x, \alpha x + y)$$

CISALHAMENTO
NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ORDENADAS

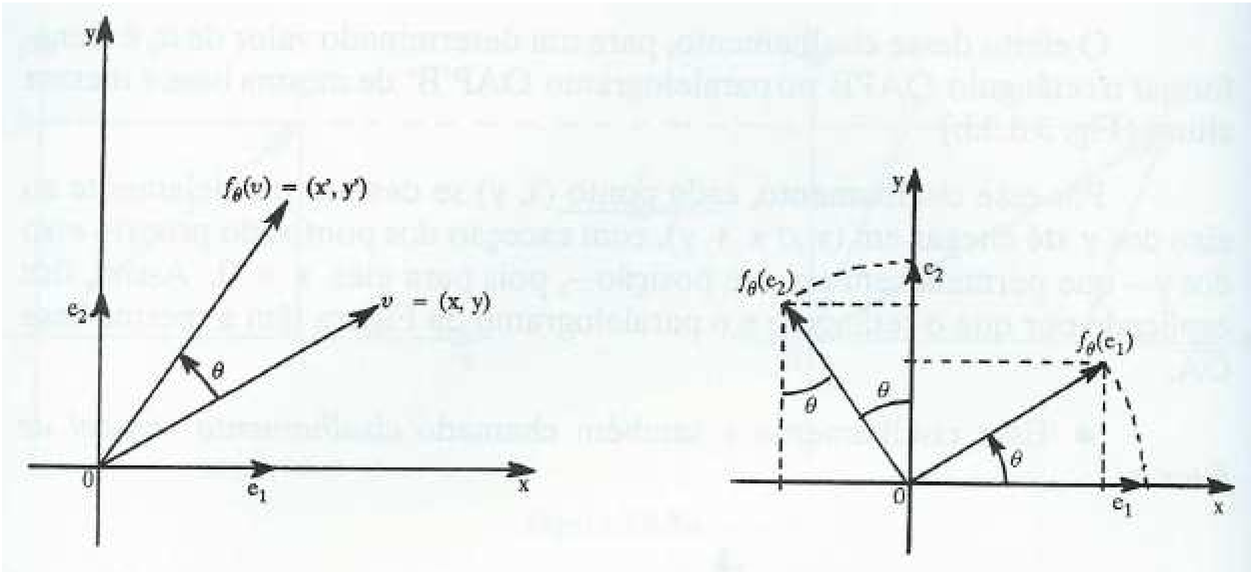
O efeito desse cisalhamento, para um determinado valor de α, é transformar o retângulo OAPB no paralelogramo OAP'B' de mesma base e mesma altura (vide figura).



Por cisalhamento, cada ponto (x, y) se desloca paralelamente ao eixo dos y até chegar em (x, αx + y) com exceção dos pontos do próprio eixo das ordenadas, pois para eles x = 0. Assim fica explicado por que o retângulo e o paralelogramo da figura tem a mesma base OA.

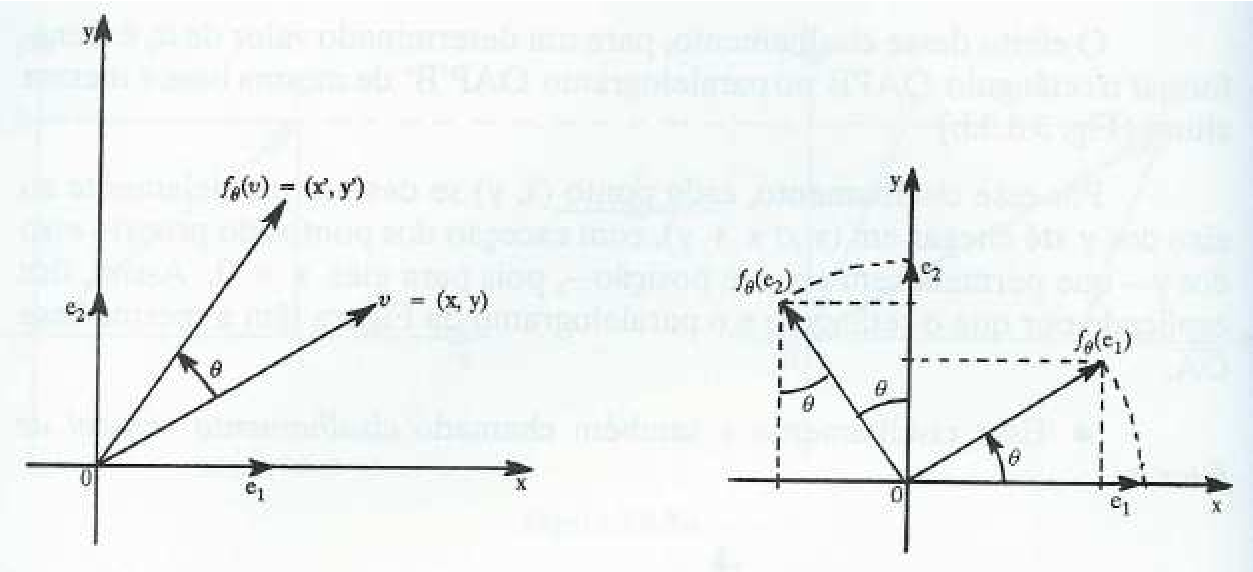
Esse cisalhamento é também chamado de *cisalhamento vertical de fator α.*

ROTAÇÃO



ROTAÇÃO

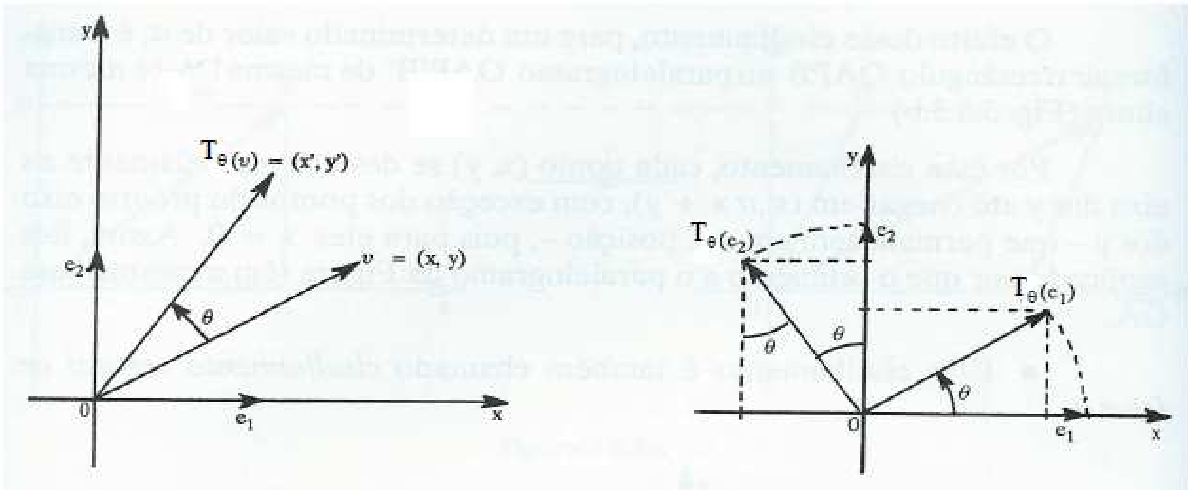
A rotação do plano de um ângulo θ em torno da origem do sistema de coordenadas, sistema determinado pela base canônica [B = {(1, 0), (0, 1)}] é uma transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ que a cada vetor v = (x, y) faz corresponder T(v) = (x', y') conforme figura abaixo.



ROTAÇÃO

Um vetor v = (x, y) é expresso, na base canônica, por $v = xe_1 + ye_2$ e como T é linear temos:

$$T(v) = xT(e_1) + yT(e_2)$$



Mas conforme a figura acima temos:

$$T(1,0) = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\theta)$$

$$T(0,1) = (-\mathrm{sen}\theta,\ \cos\theta)$$

$$T(x,y) = x(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\theta) + y(-\mathrm{sen}\theta,\ \cos\theta)$$

$$T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta,\ x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta)$$

ROTAÇÃO

MATRIZ CANÔNICA

A matriz canônica desta transformação é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta \\ x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\equiv$$

$$T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta,\ x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta)$$

ROTAÇÃO

A matriz T_θ , chamada matriz de rotação de um ângulo θ, $0 \leq 0 \leq 2\pi$, é a matriz canônica da transformação $T: IR^2 \to IR^2$ definida no início.

Nada impede que a rotação do plano seja de um ângulo $\theta < 0$; nesse caso, o ângulo será designado por $-\theta$ e a respectiva matriz de rotação, por $T_{-\theta}$:

$$[T_{-\theta}] = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}(-\theta) \\ \text{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

Mas como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$, temos :

$$[T_{-\theta}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS