Álgebra Linear

TRANSFORMAÇÕES LINEARES 1

3ALG Manhã

- **Transformaçõe Lineares**
- **Matriz Canônica de uma Transformação Linear**
- **Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear**

Professor Cláudio Bispo

1. Verifique, em cada caso abaixo, se a transformação dada é linear:

a) $\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & T(x,y)=(x+y,\ 2x-3y,\ 3x) \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & T(x,y,z)=(x+y+z,\ x^2+y^2) \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & T(x,y)=(x^2-y^2,\ x) \end{array}$

d) $\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & T(x,y)=\dfrac{2x-y}{5} \end{array}$

e) $\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & T(x,y)=(x+y,\ x-3,\ 2y,\ 3x) \end{array}$

f) $\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,w) & \mapsto & T(x,y)=\left(\dfrac{x+y}{z},\ \dfrac{x-y}{w}\right) \end{array}$

2. Seja $T(x,y,z)=(x-y+z,\ 3y-2x+5z)$ uma transformação linear, determine:

a) Domínio de T.

b) Contradomínio de T.

c) $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$.

d) $T(1,2,3)$.

e) $T(1,0,0)+2T(0,1,0)+3T(0,0,1)$.

f) O vetor (x,y,z) tal que $T(x,y,z)=(1,\ 1)$.

g) O vetor (x,y,z) tal que $T(x,y,z)=(3,\ 1)$.

3. As transformações lineares cujo domínio e o contradomínio são o mesmo espaço vetorial são chamadas de Operadores Lineares. Seja T um operador linear cuja lei de formação é $\left(\dfrac{3x+4y}{5},\ \dfrac{4y-3x}{5}\right)$, determine:

a) Domínio de T.

b) Contradomínio de T.

c) $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

d) $T(2,3)$.

e) $2T(1,0)+3T(0,1)$.

f) O vetor (x,y) tal que $T(x,y,z)=(1,\ 5)$.

g) O vetor (x,y) tal que $T(x,y,z)=(3,\ 4)$.

4. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ dizemos que a matriz $[T]$, tipo $m\times n$, é a **matriz canônica** ou **matriz natural** da transformação T e as suas colunas serão as transformações dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Por exemplo:

Seja T uma transformação linear definida por $T(x,y)=(x+2y,\ 3x-4y,\ 2y+3x)$ então a sua matriz canônica $[T]$ será

$$[T]=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \underbrace{\ }_{T(1,0)} & \underbrace{\ }_{T(0,1)} \end{array} \end{array}$$

Determine a matriz canônica das transformações lineares abaixo:

a) $T(x,y,z)=(2x,\ 3y+z)$.

b) $T(x,y)=(2x,\ 3y+z,\ 5y)$.

c) $T(x,y)=\left(\dfrac{2y}{5},\ \dfrac{x}{6}\right)$.

d) $T(x,y,z,w)=(x-2y,\ 3z-2w)$.

e) $T(x,y,z)=(2z,\ 3y+z,\ x-5z)$.

f) $T(x,y)=\left(\dfrac{x-3y}{4},\ \dfrac{3y-x}{5}\right)$.

5. Considerando os espaços vetoriais V e W e a transformação linear $T: V\rightarrow W$, definimos como "**Núcleo**"(ou **Kernel**), sob a notação de $\mathbf{Ker(T)}$ ou $\mathbf{N(T)}$, o subconjunto de V dado por $Ker(T)=\{u\in V: T(u)=0\}$. Por exemplo:

Para transformação Linear $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y)=(0,\ x+y,\ 0)$ o vetor $(x,-x)$ pertence ao $Ker(T)$, isto é, quando $y=-x$. Assim: $Ker(T)=\{(x,-x)\ :\ x\in\mathbb{R}\}$. Determine o núcleo de cada transformação linear abaixo:

a) $T(x,y)=(x+y,\ x-2y)$.

b) $T(x,y,z)=(y+z,\ x-y)$.

c) $T(x,y)=(y+x,\ x-y,\ 2x-y)$.

d) $T(x, y, z) = (y,\ x - y,\ y - z)$.

6. Considerando os espaços vetoriais V e W e a transformação linear $T : V \to W$, a imagem desta Transformação Linear é: $Im(t) = \{w = T(u) : u \in V \text{ e } v \in W\}$. Por exemplo:

Para transformação Linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, x - y)$, a imagem de T será: $Im(t) = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (x + y,\ x - y)\}$.

Determine a imagem de cada transformação linear cuja matriz canônica e dada por:

a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

c) $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

d) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

7. A **dimensão** de um espaço vetorial V não nulo é o número de vetores de uma base para V. Denota-se $\mathbf{dim(V)}$.
OBS.: Se $V = \{0\}$, então $dim(V) = 0$.

Determine a dimensão de $Ker(T)$ e de $Im(T)$ dos itens do exercício 6.

8. Nos itens abaixo serão apresentadas transformações lineares. Para cada uma delas:
8.1 Determinar o $\mathbf{N(T)}$, uma base para este subespaço e sua dimensão.
8.2 Determinar a $\mathbf{Im(T)}$, uma base para este subespaço e sua dimensão.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y, z) = (3x - y,\ y - 3x)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y) = (x + y,\ x,\ 2y)$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x - 2y,\ x + y)$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 2x - y + z)$.

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x - 2y - 2z - x + 2y + z,\ x - 3z)$.

f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x - 3y,\ x - z,\ z - x)$.

9. Considere a transformação linear:

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (2x+y,\ 3x+2y,\ -2x-y)$

a) Determinar o núcleo e a imagem de T.

b) Determinar bases para o núcleo e para a imagem.

GABARITO

1. a) sim b) não c) não d) sim e) não f) não

2.
a) $\mathbb{R}^3$
b) $\mathbb{R}^2$
c) $T(1, 0, 0) = (1, -2)$; $T(1, 0, 0) = (-1, 3)$; $T(1, 0, 0) = (1, 5)$.
d) $T(1, 2, 3) = (2,\ 19)$.
e) $(2,\ 19)$
f) $(4 - 8z,\ 3 - 7z,\ z,$ com $z \in \mathbb{R}$.
g) $(10 - 8z,\ 7 - 7z,\ z)$, com $z \in \mathbb{R}$.

3.
a) $\mathbb{R}^2$
b) $\mathbb{R}^2$
c) $T(1, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right)$; $T(0, 1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
d) $\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
e) $\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
f) $x = -\frac{10}{3}$ e $y = \frac{15}{4}$.
g) $x = -\frac{5}{6}$ e $y = \frac{35}{8}$.

4.
a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/6 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1/4 & -3/4 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$

5.
a) $Ker(T) = \{(0, 0)\}$
b) $Ker(T) = \{(-z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
c) $Ker(T) = \{(0, 0)\}$
d) $Ker(T) = \{(0,\ 0,\ 0)\}$

6.
a) $Im(T) = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (x + 2y + z,\ 5x + 3y)\}$
b) $Im(T) = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (x + y,\ 5x + 3y)\}$
c) $Im(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (2x,\ -x + 4y,\ -2x + 3y)\}$
d) $Im(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (x + y + z,\ y + z,\ z)\}$
e) $Im(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (x + y,\ 2x + 2z,\ x - 3y + 2z)\}$

GABARITO

7.

a) $\dim N(T) = 1$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$
b) $\dim N(T) = 0$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$
c) $\dim N(T) = 0$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$
d) $\dim N(T) = 0$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$
e) $\dim N(T) = 0$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$

8.

a) $N(T) = \{(x,\ 3x) : x \in \mathbb{R}\}$
$B_N = \{(1,\ 3)\} \Rightarrow \dim N(T) = 1.$
$\mathrm{Im}(T) = \{v \in R^2 : v = (3x - y,\ y - 3x)\}$
$B_{Im} = \{(-1,\ 1)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 1.$

b) $N(T) = \{(0,\ 0) : x \in \mathbb{R}\}$
$B_N = \{(0,\ 0)\} \Rightarrow \dim N(T) = 0.$
$\mathrm{Im}(T) = \{v \in R^3 : v = (x + y,\ x,\ 2y)\}$
$B_{Im} = \{(1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 2)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2.$

c) $N(T) = \{(0,\ 0) : x \in \mathbb{R}\}$
$B_N = \{(0,\ 0)\} \Rightarrow \dim N(T) = 0.$
$\mathrm{Im}(T) = \{v \in R^2 : v = (x - 2y,\ x + y)\}$
$B_{Im} = \{(1,\ 1),\ (-2,\ 1)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 1.$

d) $N(T) = \left\{\left(\frac{z}{5},\ \frac{3z}{5},\ z\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$
$B_N = \{(1,\ -3,\ 5)\} \Rightarrow \dim N(T) = 1.$
$\mathrm{Im}(T) = \{v \in R^2 : v = (x + 2y - z,\ 2x - y + z)\}$
$B_{Im} = \{(1,\ 2),\ (2,\ -1)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2.$

e) $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$
$B_N = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow \dim N(T) = 0.$
$\mathrm{Im}(T) = \{v \in R^3 : v = (x - 2y - 2z,\ -x + 2y + z,\ x - 3z)\}$
$B_{Im} = \{(1, 1, -1),\ (-2, 2, 0),\ (-2, 1, -3)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3.$

f) $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$
$B_N = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow \dim N(T) = 0.$
$\mathrm{Im}(T) = \{v \in R^3 : v = (x - 3y,\ x - z,\ z - x)\}$
$B_{Im} = \{(1, 1, -1),\ (3, 0, 0),\ (0, -1, 1)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3.$

9.

a) $N(T) = \{(0,\ 0)\} \Rightarrow B_N = \{(0,\ 0)\} \Rightarrow \dim N(T) = 0$
b) $\mathrm{Im}(T) = \{(v \in \mathbb{R}^3 : v = (2x + 3y,\ 3x + 2y,\ -2x - y)\} \Rightarrow$
$B_{Im} = \{(2,\ 3,\ 2),\ (1,\ 2,\ -1)\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2$