FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Álgebra Linear

GABARITO DA PROVA A AV1 – 3ALGAM

- **Matrizes**
- **Operações com Matrizes**
- **Espaços Vetoriais**

Professor Cláudio Bispo

Nome: **Gabarito A**

Nota do aluno(a)	Rubrica do Professor

INSTRUÇÕES

- Leia atentamente cada questão. A interpretação faz parte da avaliação.
- Esta avaliação fará parte da composição da nota do AV1.
- Valor desta avaliação é 10 pontos.
- As questões deverão ser desenvolvidas e respondidas na folha de papel almaço entregue pelo professor.
- O desenvolvimento poderá ser feito à lápis, porém a resposta deverá ser dada com caneta azul ou preta.
- Questões com desenvolvimento à lápis poderão não sofrer revisão de correção pelo avaliador.
- As questões deverão ser desenvolvidas e respondidas no espaço destinado.
- Não será aceita questão sem justificativa.
- Não é permitida consulta ao material didático.
- É permitido o uso de calculadora.
- Devolva a folha de questões e a folha de papel almaço assinadas.

1. Determine os números reais x, y e z que satisfazem a equação matricial mostradas a seguir. 2,0 pontos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solução

Vamos escrever a matriz associada ao sistema resultante do produto matricial acima:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Resposta: $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.

2. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine $A^{-1} + A + I_2$, onde A^{-1} é a matriz inversa de A e I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

OBS.: A^{-1} é a **matriz inversa** de A. Por definição, a matriz inversa de uma matriz quadrada é uma matriz quadrada de mesma ordem, tal que $A \cdot A^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade. 2,0 pontos

Solução

Determinando a matriz inversa de A usando o escalonamento:

$$\begin{array}{cc|cc} -5 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinando $A^{-1} + A + I_2$:

$$A^{-1} + A + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} + A + I_2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Resposta: $A^{-1} + A + I_2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

3. (COLÉGIO NAVAL – ADAPTADA) Na organização de uma competição interna do Colégio Naval, ficou decidido que cada ano de escolaridade compraria suas bolas de treinamento. Essa compra ocorreu da seguinte forma:

	Quantidade de bolas de futebol	Quantidade de bolas de basquete	Quantidade de bolas de vôlei
1º ano	4	2	2
2º ano	6	8	3
3º ano	2	3	1

Sabendo que as bolas de mesma categoria têm o mesmo valor, o total gasto pelo 1º ano foi de R$ 1.800,00 e que o total de gasto do 2º ano foi de R$ 3.000,00. Qual foi om gasto no 3º ano? 2,0 pontos

Solução

Considere as seguintes incógnitas:

f: preço de uma bola de futebol.

b: preço de uma bola de basquete.

v: preço de uma bola de vôlei.

Temos o seguintes sistema:

$$\begin{cases} 4f + 2b + 2v & = & 1800 \\ 6f + 8b + 3v & = & 3000 \\ 2f + 3b + v & = & ? \end{cases}$$

Vamos escalonar um sistema com as duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 4f + 2b + 2v & = & 1800 \\ 6f + 8b + 3v & = & 3000 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1800 \\ 6 & 8 & 3 & 3000 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 420 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} f + 0,5v & = & 420 & (\text{Eq. } 1) \\ b & = & 60 & (\text{Eq. } 2) \end{cases}$$

Fazendo $2 \cdot \text{Eq.}1 + 3 \cdot \text{Eq.}2$, temos:

$$\begin{aligned} 2f + 3b + v &= 2 \cdot (420) + 3 \cdot (60) \\ 2f + 3b + v &= 840 + 180 \\ 2f + 3b + v &= 1020 \end{aligned}$$

Resposta: $2f + 3b + v = 1.020,00$ reais.

4. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determine a matriz X na equação matricial $(A \cdot A^t + 3I) \cdot X = B$, ou seja, determine x e y.

OBS.: A^t é a matriz transposta, que é resultante da troca ordenada das linhas pelas colunas da matriz A. 2,0 pontos

Solução

Determinando $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinando $(A \cdot A^{-1}) + 3I$:

$$(A \cdot A^{-1}) + 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(A \cdot A^{-1}) + 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(A \cdot A^{-1}) + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Resolvendo a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rr|r} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & 2 \end{array} \sim \begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1/3 \\ y & = & 1/3 \end{array}$$

Resposta: $X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

5. Expresse a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2,0 pontos

Solução

Escrevendo A como combinação linear de M_1, M_2 e M_3:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha & \alpha \\ -3\alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 2\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha+\gamma & \alpha-\beta \\ -3\alpha+\beta-\gamma & 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha+\gamma & = & -1 \\ \alpha-\beta & = & -4 \\ -3\alpha+\beta-\gamma & = & 4 \\ 2\beta & = & 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 3 \\ \gamma & = & 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $\alpha = -1$, $\beta = 3$ e $\gamma = 2$.

Resposta: $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.