TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição

Propriedades

Matriz Natural ou Matriz Canônica

Professor Cláudio Bispo

Introdução

As transformações lineares são funções onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais, isto é, tanto a variável independente como a variável dependentes são vetores. Este tipo de função possui uma propriedade importante que é preservar a adição de vetores e a multiplicação de vetor por escalar. As transformações lineares apresentam aplicações na Física, Engenharia, Ciências Sociais e em vários ramos da Matemática.

Transformação Linear (TL) Definição

Sejam V e W espaços vetoriais e α um número real. Uma função T de V em W é chamada transformação linear (TL), se

i. $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall\, u, v \in V.$

ii. $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall\, u \in V.$

Transformação Linear (TL) Definição

Outra maneira de definirmos uma transformação linear (TL) é:

Sejam V e W espaços vetoriais e α um número real. Uma função T de V em W é chamada transformação linear (TL), se

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v),\ \forall\ u, v \in V.$$

No caso de V = W, T é chamada operador linear sobre V.

Propriedades

Seja T uma transformação linear de V em W.

P1. A imagem do vetor nulo é o vetor nulo, ou seja, $T(0_v) = 0_w$.

dem.: $T(0_v) = T(0_v + 0_v) = T(0_v) + T(0_v)$

$\text{Mas, } T(0_v) = T(0_v) + 0_w, \text{ pois } T(0_v) \in W$

$\text{e } 0_w \text{ é elemento neutro de W.}$

$\text{Assim, } T(0_v) + T(0_v) = T(0_v) + 0_w.$

$\text{Logo, } T(0_v) = 0_w.$

Portanto, se $T(0_v) \neq 0_w$ então T não é uma transformação linear.

Propriedades

CUIDADO!!!

No entanto, o fato de $T(0_V) = 0_W$ não é suficiente para que T seja linear.

Por exemplo, $T : R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y) = (x^2, y^2)$.

$$T(1,2) = (1^2, 2^2) = (1,4)$$

$$T(3,5) = (3^2, 5^2) = (9,25)$$

$$T(1,2) + T(3,5) = (1,4) + (9,25) = (10,29)$$

$$T((1,2) + (3,5)) = T(4,7) = (4^2, 7^2) = (16,49)$$

Assim, $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$.

Embora, $T(0,0) = (0,0)$, T não é uma transformação linear.

Propriedades

Seja T uma transformação linear de V em W.

P2. Em qualquer TL, a imagem de uma combinação linear de vetores é igual a combinação linear das imagens com os mesmos coeficientes, i.é,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$$

para quaisquer $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Corolário: Sabendo-se as imagens dos vetores de uma base do espaço vetorial V é possível determinar a transformação linear T: $V \to W$.

Matriz Canônica

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$

Se pensarmos na matriz A como um objeto que atua sobre o vetor $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, por multiplicação, o resultado será o vetor $w = \begin{bmatrix} 3x - y \\ 3x \\ 5x - 4y \end{bmatrix}.$

Matriz Canônica

Logo, a matriz A define uma transformação

$T: IR^2 \rightarrow IR^3$, onde $T(v) = A.v$ ou $T(x,y) = (2x-y, 3x, 5x-4y)$. Pode-se mostrar que essa transformação é linear.

Matriz Canônica

Logo, a matriz A define uma transformação $T: IR^2 \rightarrow IR^3$, onde T(v) = A.v ou T(x,y) = (3x-y, 3x, 5x-4y). Pode-se mostrar que essa transformação é linear.

Toda matriz A_{mxn} define uma TL $T: IR^n \rightarrow IR^m$, com T(v)= Av. Neste caso, A é chamada **matriz canônica** ou **matriz natural** de T e A pode ser representada também por [T]. As colunas de A são, respectivamente, as coordenadas das imagens de T quando aplicada nos vetores da base canônica do R^2 {(1,0) , (0,1)}.

Matriz Canônica

$$T(x,y)=(3x-y,3x,5x-4y)$$

$$T(1,0)=(3\times1-0,3\times1,5\times1-4\times0)$$

$$T(1,0)=(3,3,5)$$

$$T(0,1)=(3\times0-1,3\times0,5\times0-4\times1)$$

$$T(0,1)=(1,0,-4)$$

$$[T]=\begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix}3\\3\\5\end{matrix}}}_{T(1,0)} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix}1\\0\\-4\end{matrix}}}_{T(0,1)} \end{pmatrix}$$