

Faculdade de Educação Tecnológica do Estado do Rio de Janeiro
FAETERJ-Rio

Erik Mello
Gabriel Melo
Leandro Herbas
Kauã Valdevino

Árvore 2-3

Rio de Janeiro
2023

Estrutura e origem da árvore 2-3

Começando pela sua estrutura, a árvore 2-3 pode ser considerada como uma árvore B de ordem 3, ou seja, segue uma organização idêntica quando nos referimos a equilíbrio.

Nesta árvore, cada nó interno tem capacidade máxima de **duas** chaves, o que possibilita a existência de até **três** filhos, e o que origina o nome dessa estrutura é exatamente a capacidade de filhos possíveis (2 ou 3).

Portanto:

- Todas as folhas estão no mesmo nível (princípio que já vimos em aula);
- Cada nó possui apenas uma ou duas chaves;
- Cada nó interno tem dois filhos se tiver apenas uma chave, ou três caso tenha duas chaves;
- Todos os dados são ordenados (assim como as árvores binárias);

Uma curiosidade sobre esse modelo de estrutura, é que ela é a primeira árvore multicaminho (ou multivias), criada em 1970 por J.E. Hopcroft.

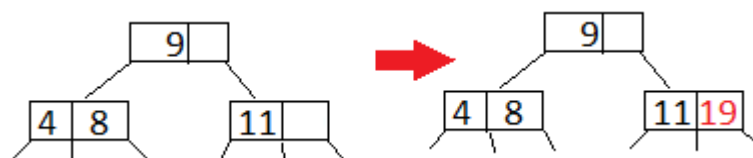
Inclusão em árvore 2-3

A inclusão de um elemento em uma árvore 2-3 funciona da seguinte forma:

Primeiro é necessário começar pela raiz da árvore, e então, será preciso descer recursivamente até encontrar a folha adequada para inserir a chave. A descida será dada da seguinte forma: se o número a ser inserido for menor que o número da chave, ele é inserido à esquerda, caso contrário, será inserido à direita. Se o nó possuir apenas 1 chave, a nova chave é inserida e acaba a inserção. Caso o nó já possua 2 chaves será necessário fazer uma divisão desse nó em outros 2 onde a chave central irá subir para a posição do “pai”, após isso as duas novas chaves deverão ter suas referências atualizadas para seus novos pais e filhos. Após essa divisão e atualização das novas referências, é possível que os pais acabem superando as 2 chaves suportadas já que a chave central “subiu”, nesse caso, será necessário repetir os passos até que cada nó só possua no máximo 2 chaves.

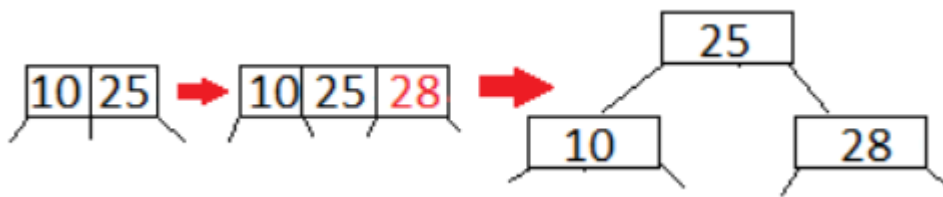
Exemplos de inserção em uma árvore 2-3

Inserção do número 19 em um nó simples:



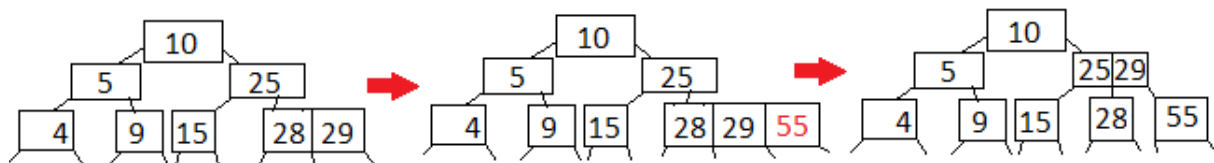
Nesse caso, não é preciso fazer balanceamentos da árvore, apenas inserir no local correto e terminar a inserção.

Inserção do número 28 em um nó duplo isolado(ou raiz da árvore):



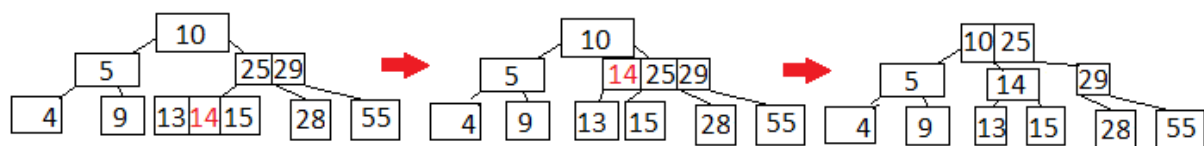
Nesse exemplo, o número 28 é inserido na direita por ser o maior número, porém é detectado que o nó ultrapassou o seu limite e por isso a chave central “25” é colocada como raiz e os números 10 e 28 como seus filhos.

Inserção do número 55 em um nó duplo com o pai simples:



Nesse exemplo, o número 55 é inserido na folha mais à direita, por ser o maior número, porém é detectado que o nó ultrapassou o limite, então é feita uma divisão do nó, onde o número central “29” sobe para o nó superior e o nó “28 e 55” é dividido em 2.

Inserção do número 14 em um nó duplo com pai duplo:



Nesse exemplo, a chave 14 está sendo inserida em um nó que já possui duas chaves. Para acomodar a nova chave, o nó é dividido em outros dois nós. A chave central do nó original é promovida para o nó superior. No entanto, o nó superior também já possui duas chaves. Portanto, é necessário dividi-lo novamente. O nó superior é dividido em dois, e a chave central desse nó é promovida para o nó pai, que neste exemplo é a raiz.

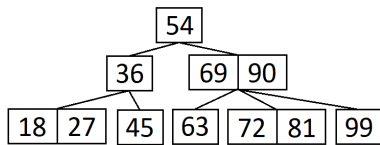
Exclusão em árvore 2-3

A exclusão de um elemento em uma árvore 2-3 é feita da seguinte forma:

Primeiro procura-se a posição correta onde o elemento a ser removido está localizado na árvore 2-3. Se o elemento não estiver presente na árvore, a remoção é encerrada, se não, a exclusão do elemento segue as seguintes regras:

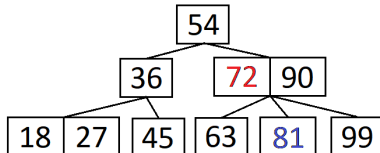
- Para excluir um valor, ele é trocado por seu sucessor na ordem e, em seguida, removido. Se ele não possuir filhos, o valor é apenas removido.
- Se um nó ficar vazio, dois nós deverão ser mesclados. Para mesclar o nó, puxe para baixo o menor valor no nó pai e mescle-o com o irmão esquerdo do nó vazio.

Para entender o processo de exclusão, considere a seguinte árvore 2-3:

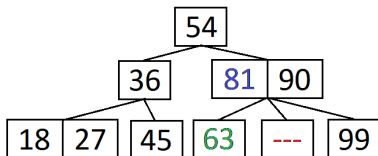


Vão ser excluídos os seguintes valores: 69, 72, 99, 81.

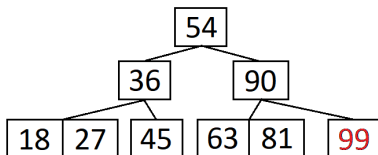
Para excluir o 69, troque-o por seu sucessor na ordem, ou seja, 72. 69 agora está no nó folha. Remova o valor 69 do nó folha.



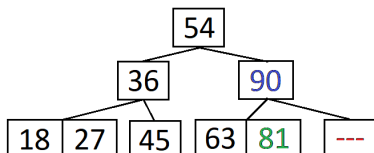
Para excluir 72, 72 é um nó interno. Para excluir esse valor, troque 72 com seu sucessor na ordem 81, de modo que 72 agora se torne um nó folha. Remova o valor 72 do nó folha.



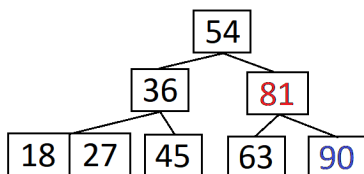
Para mesclar o nó, puxe para baixo o valor de dados mais baixo no nó pai e mescle-o com seu irmão esquerdo.



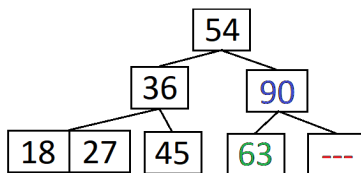
Para excluir 99, 99 está presente em um nó folha, portanto, o valor dos dados pode ser facilmente removido.



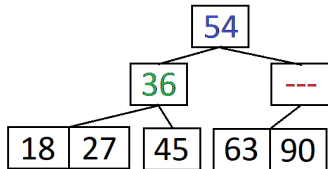
Agora há um nó folha que tem menos de 1 valor de dados, violando assim a propriedade de uma árvore 2-3. Portanto, o nó deve ser mesclado. Para mesclar o nó, puxe para baixo o valor de dados mais baixo no nó pai e mescle-o com seu irmão esquerdo.



Para excluir 81, 81 é um nó interno. Para excluir esse valor, troque 81 com seu sucessor em ordem 90, de modo que 81 agora se torne um nó folha. Remova o valor 81 do nó folha.

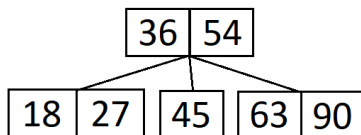


Agora há um nó folha que tem menos de 1 valor de dados, violando assim a propriedade de uma árvore 2-3. Portanto, o nó deve ser mesclado. Para mesclar o nó, puxe para baixo o valor de dados mais baixo no nó pai e mescle-o com seu irmão esquerdo.



Como o nó interno não pode estar vazio. Portanto, agora extraia o valor de dados mais baixo do nó pai e mescle o nó vazio com seu irmão esquerdo.

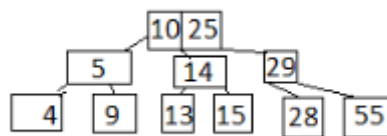
Resultado final após a remoção dos valores 69, 72, 99, 81:



Busca

A busca em uma árvore 2-3 é bem simples: Ao analisarmos que a árvore está sempre se organizando incluindo valores menores à esquerda, valores maiores à direita, e valores que estão entre dois nós ao meio, a busca ocorre utilizando de comparações entre o valor que está sendo buscado com os nós presentes na árvore, para assim decidir qual será o próximo caminho a ser percorrido.

Exemplificando, utilizando da árvore anteriormente citada na explicação da Inclusão:



Ao buscar o valor **13**, os seguintes passos serão seguidos:

1. Primeiramente, deve-se começar pelo topo da árvore (nesse caso, o [10|25]);
2. O nó e seus valores serão comparados com o número a ser buscado;
3. “13 é igual a 10 ou 13 é igual a 25?” Se sim, o valor já foi encontrado. Se não, mais perguntas devem ser feitas:
 - a. “13 é menor que 10?” Se sim, a busca continua pelos nós à esquerda.
 - b. “13 é maior que 25?” Se sim, a busca continua pelos nós à direita.
 - c. “13 está entre 10 e 25?” Se sim, a busca continua pelo centro.
4. Se, em qualquer dessas 3 opções, o próximo nó levar para um valor NULL, o número a ser procurado não está presente na árvore. Caso outro nó seja encontrado, o processo se repete a partir do passo 2.

Código e operações básicas da árvore

O código com as operações citadas pode ser encontrado em:

<https://replit.com/@leandroherbas/Arvore-2-3>

Incluindo a struct, as funções necessárias para o funcionamento dos nós, inserção, exclusão e busca.