FAETERJ-Rio

Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Vetores

Professor Cláudio Bispo

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Vetores

Vamos definir vetores?

“Desenhando” um vetor

Módulo de um vetor

Alguns resultados

Professor Cláudio Bispo

Vamos definir vetores?

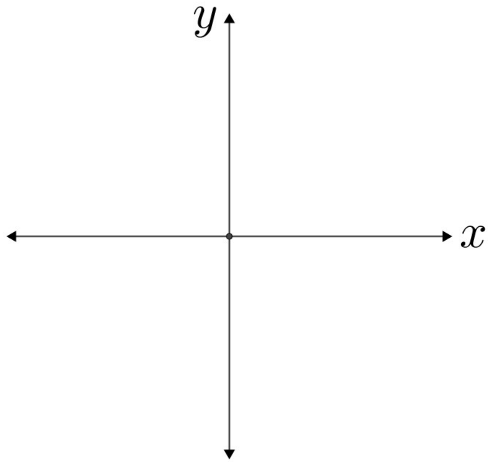
Vamos definir **vetor** como um conjunto ordenado, cujos seus elementos serão denominados de **coordenadas**. Nomeamos um vetor com uma letra minúscula do alfabeto e vamos, inicialmente, representá-lo com suas coordenadas dispostas entre parênteses e separados por vírgulas.

Exemplos:

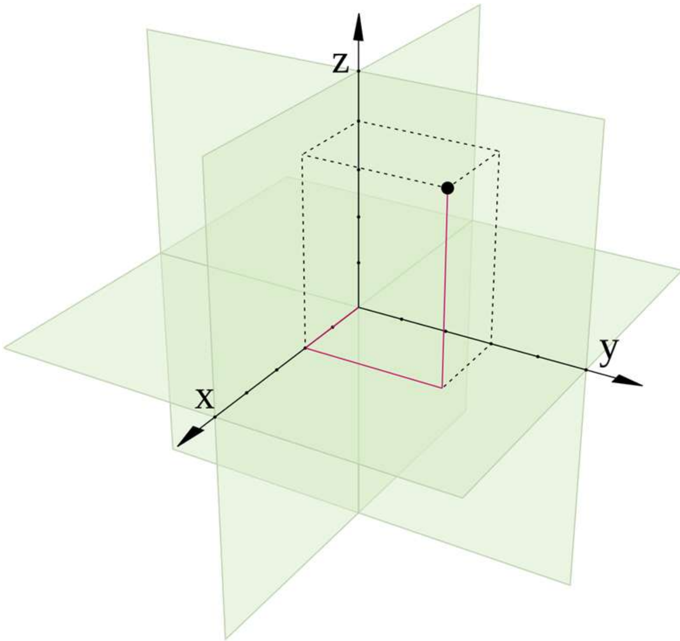
- $u = (1, 4)$
- $v = (3, 4, 5)$
- $w = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -3, \sqrt{5}\right)$
- $v = (x, y, z)$
- $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

“Desenhando” Vetores

Vetores com duas ou três coordenadas podem ser representados geometricamente. Vetores de 2 coordenadas serão representados no plano cartesiano, enquanto vetores de 3 coordenadas serão representados no espaço tridimensional.



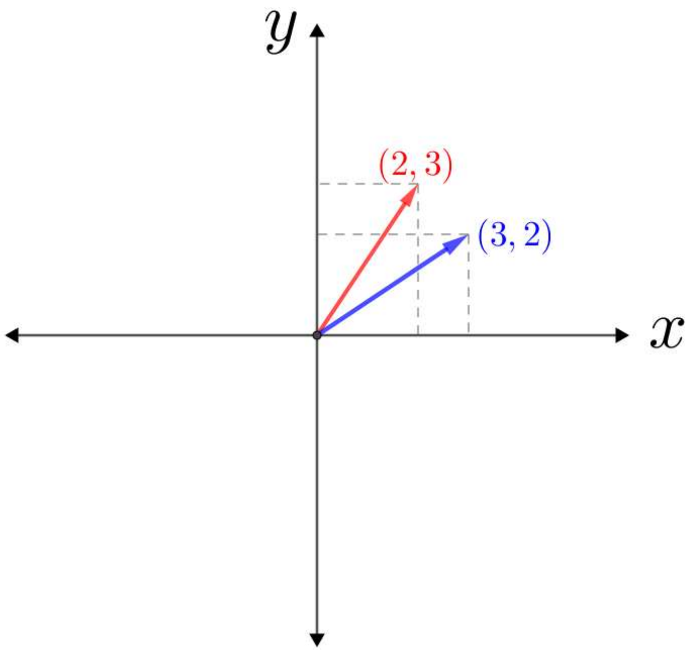
Plano Cartesiano



Espaço Tridimensional

“Desenhando” Vetores

Exemplos:



$$(2,\ 3) \rightarrow \begin{cases} \text{Coordenada } x = 2 \\ \text{Coordenada } y = 3 \end{cases}$$

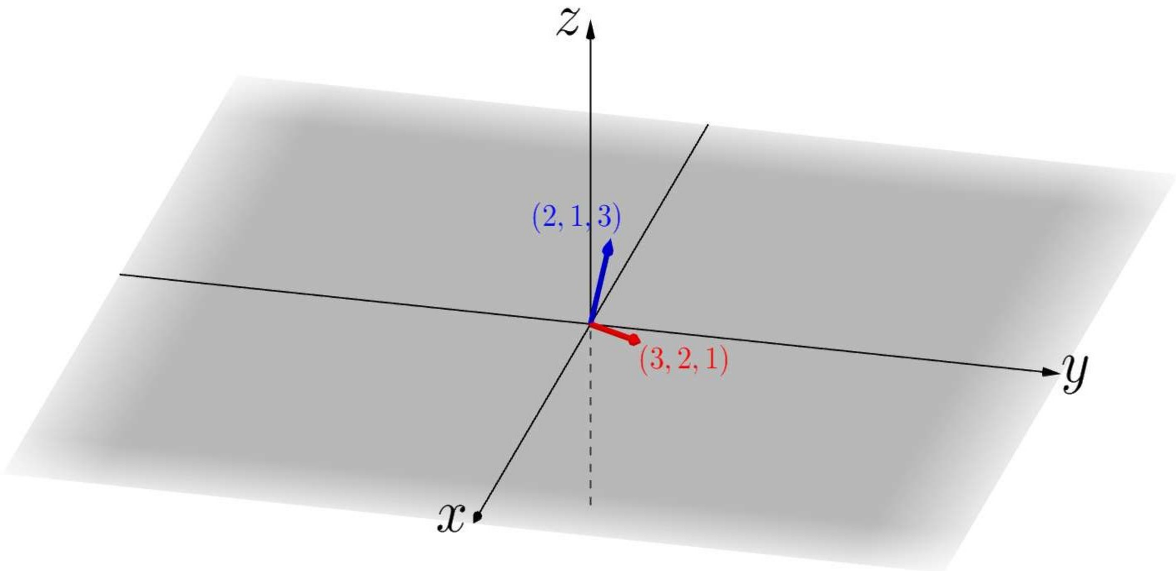
$$(3,\ 2) \rightarrow \begin{cases} \text{Coordenada } x = 3 \\ \text{Coordenada } y = 2 \end{cases}$$

Embora os valores numéricos sejam os mesmos, as coordenadas em cada vetor são diferentes. Temos então:

$$(2,3) \neq (3,2)$$

"Desenhando" Vetores

Exemplos:



$$(3,2,1) \rightarrow \begin{cases} \text{Coordenada } x = 3 \\ \text{Coordenada } y = 2 \\ \text{Coordenada } z = 1 \end{cases}$$

$$(2,1,3) \rightarrow \begin{cases} \text{Coordenada } x = 2 \\ \text{Coordenada } y = 1 \\ \text{Coordenada } z = 3 \end{cases}$$

Embora os valores numéricos sejam os mesmos, as coordenadas em cada vetor são diferentes. Temos então:

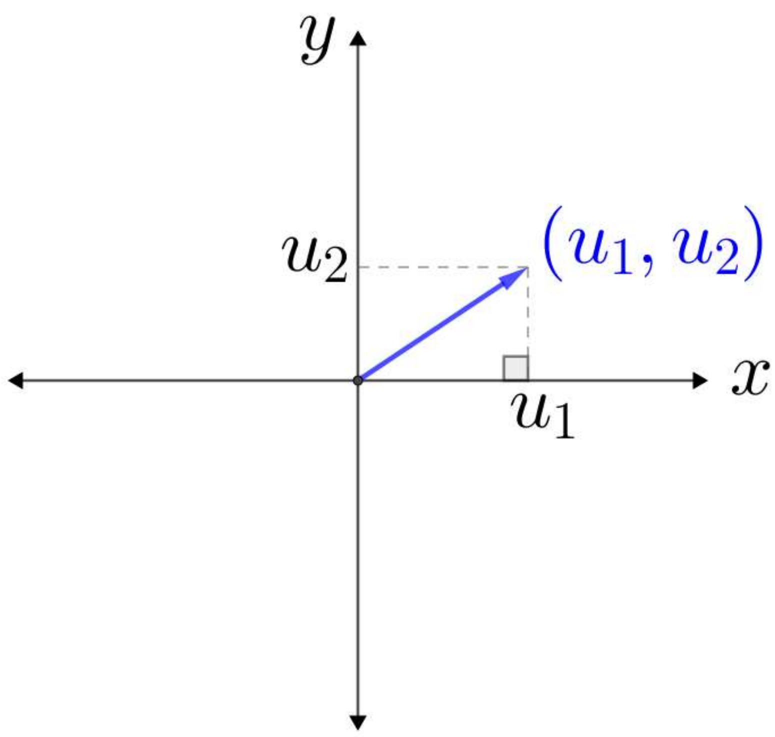
$$(3,2,1) \neq (2,1,3)$$

FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Módulo de um vetor

Considere o vetor $u = (u_1, u_2)$ e suas respectivas coordenadas representadas no plano cartesiano ao lado.

Denotaremos por $\|u\|$, o **módulo** do vetor u, que geometricamente é o comprimento deste vetor.



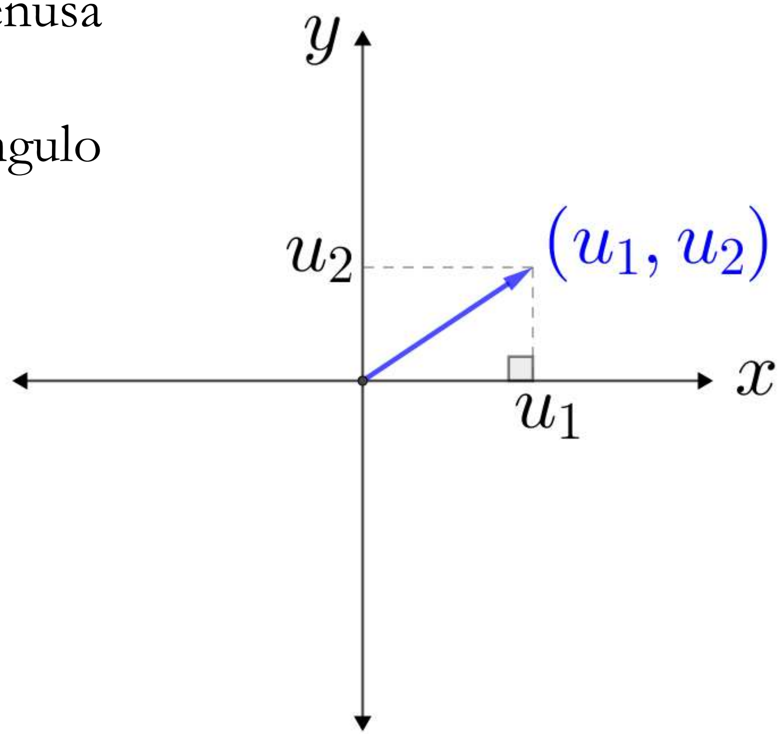
Módulo de um vetor

Observemos que o módulo de u ($|u|$) é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são u_1 e u_2.

Aplicando o Teorema de Pitágoras neste triângulo retângulo teremos:

$$\|u\|^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2$$

$$\|u\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

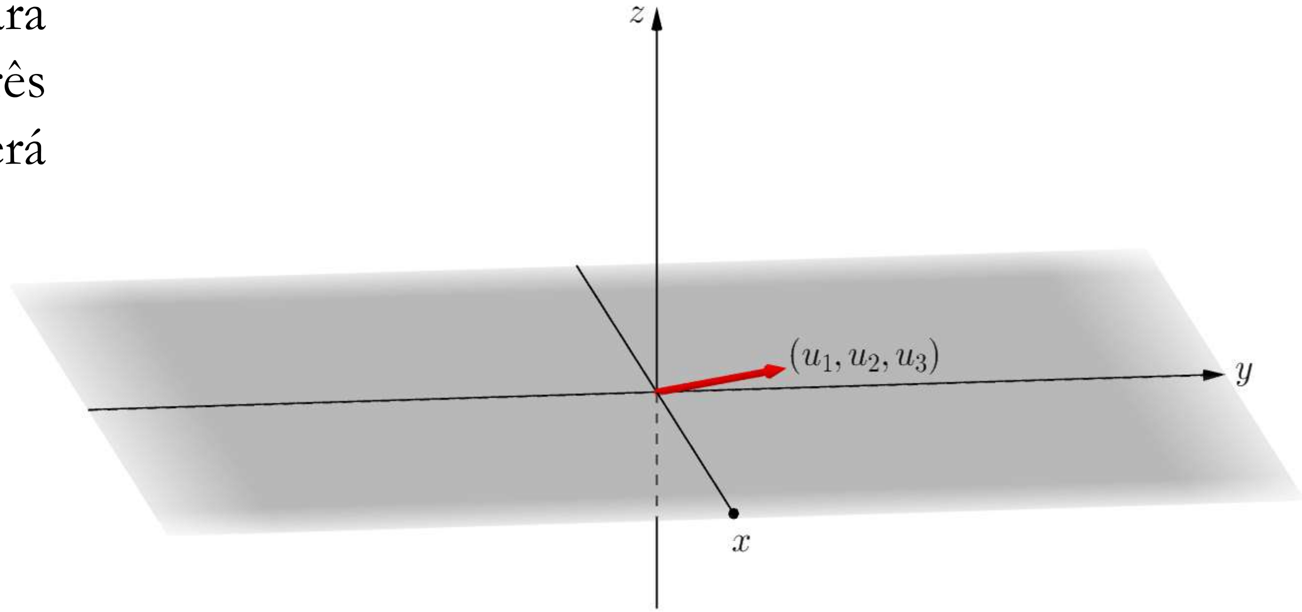


Módulo de um vetor

O resultado é análogo para vetores que possuem três coordenadas o seu módulo será dado por:

$$\|u\|^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2$$

$$\|u\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}$$



FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Módulo de um vetor

Geometricamente podemos representar, apenas vetores com dois e três coordenadas. Como comprimento é uma grandeza geométrica, para vetores com quatro ou mais coordenadas esta fórmula não retorna um valor que determine uma medida linear. Contudo, vetores com quatro ou mais coordenadas possuem **módulo**.

$$u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

$$\|u\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 + \cdots + (u_n)^2}$$

$$\|u\| = \sqrt{\sum (u_i)^2}$$

Alguns resultados

Vamos responder algumas perguntas sobre módulo de um vetor. Para isso, usaremos vetores de duas coordenadas, não perdendo e vista que para vetores com três ou mais coordenadas o raciocínio é análogo.

1) Se dobrarmos as coordenadas de um vetor, o módulo do novo vetor também será dobrado?

Resolução:

$$v = (2u_1, 2u_2)$$
$$\|v\| = \sqrt{(2u_1)^2 + (2u_2)^2}$$
$$\|v\| = \sqrt{4{u_1}^2 + 4{u_2}^2}$$
$$\|v\| = \sqrt{4({u_1}^2 + {u_2}^2)}$$
$$\|v\| = 2\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$
$$\|v\| = 2|u|$$

Podemos observar que o módulo do vetor também dobra quando dobramos o valor de suas coordenadas. De modo análogo se multiplicarmos as coordenadas de um vetor por um número real k o seu módulo também será multiplicado por k.

Alguns resultados

2) Se somarmos 2 unidades às coordenadas de um vetor, o módulo do novo vetor também terá seu valor adicionado de 2 unidades?

Resolução:

$$v = (u_1 + 2, 2u_2 + 2)$$
$$\|v\| = \sqrt{(u_1 + 2)^2 + (u_2 + 2)^2}$$
$$\|v\| = \sqrt{{u_1}^2 + 4u_1 + 4 + {u_2}^2 + 4u_2 + 4}$$
$$\|v\| = \sqrt{({u_1}^2 + {u_2}^2) + 4(u_1 + u_2) + 8} \qquad [1]$$
$$\|v\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} + 2 \qquad [2]$$

Igualando [1] e [2] temos:

$$\sqrt{({u_1}^2 + {u_2}^2) + 4(u_1 + u_2) + 8} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} + 2$$

igualando os quadrados de ambos os membros da igualdade, temos:

$$({u_1}^2 + {u_2}^2) + 4(u_1 + u_2) + 8 = ({u_1}^2 + {u_2}^2) + 4\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} + 4$$
$$4(u_1 + u_2) + 4 = 4\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$
$$\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = (u_1 + u_2) + 1$$

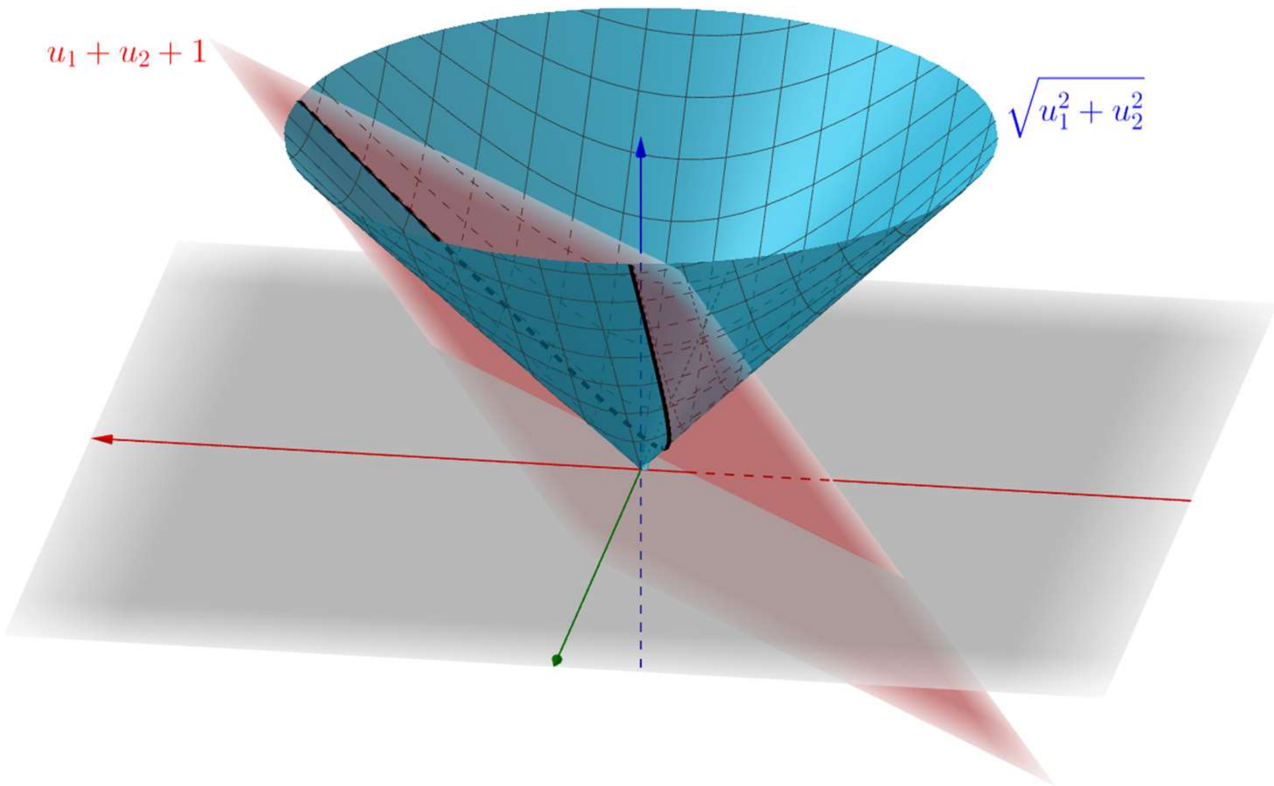
Alguns resultados

2) Se somarmos 2 unidades às coordenadas de um vetor, o módulo do novo vetor também terá seu valor adicionado de 2 unidades?

Resolução:

$$\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = (u_1 + u_2) + 1$$

Podemos construir um gráfico que represente esta igualdade.



FAETERJ-Rio
Faculdade de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

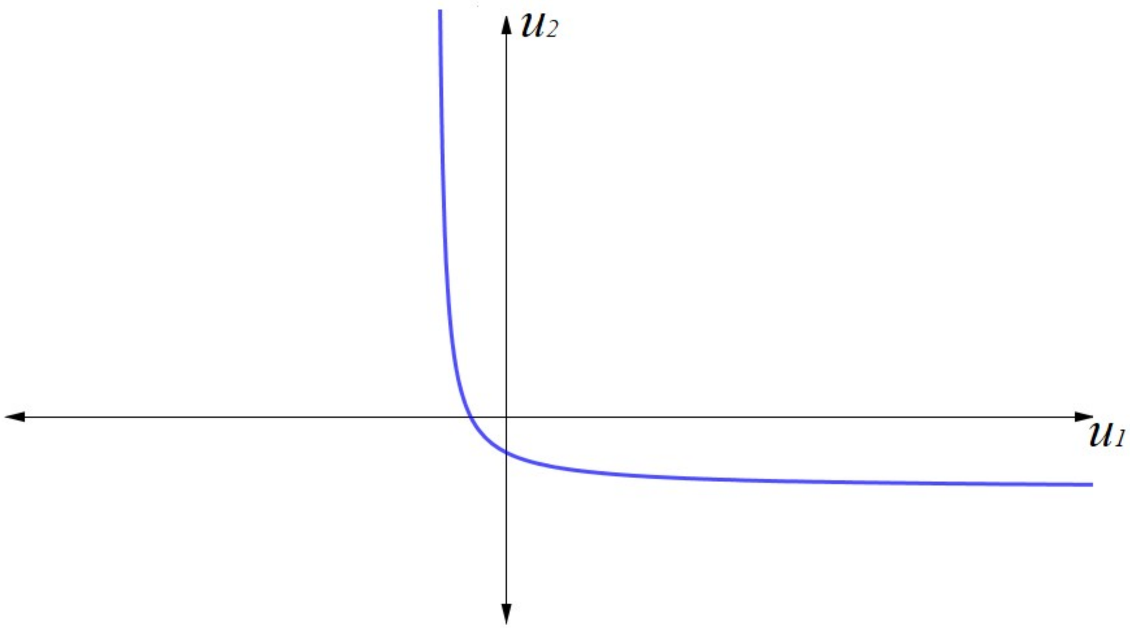
Alguns resultados

2) Se somarmos 2 unidades às coordenadas de um vetor, o módulo do novo vetor também terá seu valor adicionado de 2 unidades?

Os pontos sobre a curva azul fazem parte da solução da equação

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = (u_1 + u_2) + 1$$

Podemos concluir que, **somente alguns vetores** satisfazem a condição proposta no exemplo 2.



EXERCÍCIOS