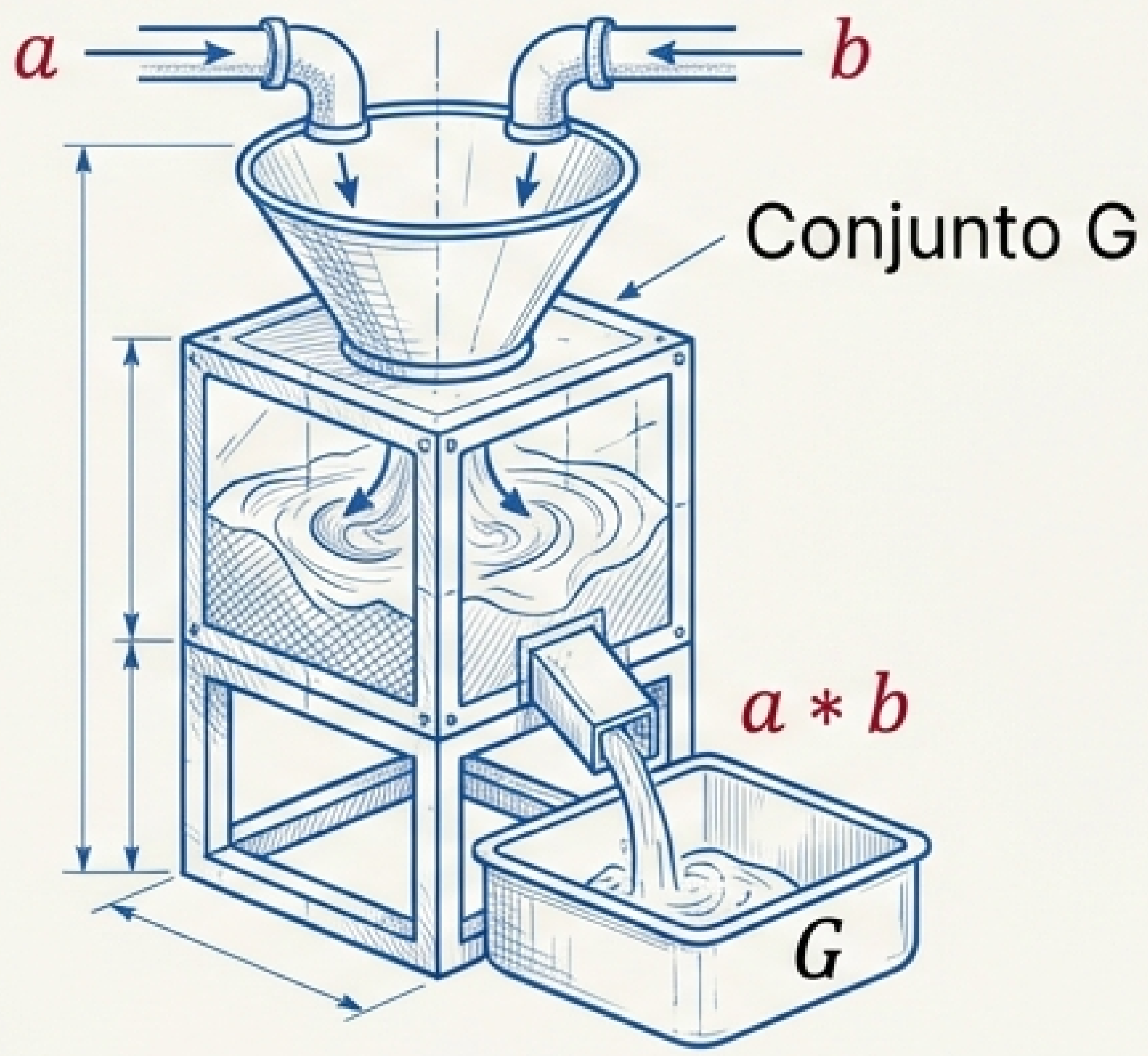
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS: DE GRUPOS A CUERPOS

Una guía visual sobre leyes de composición, anillos y propiedades fundamentales.

Primario (Grupos): Deep Blueprint Blue
Aviso/Critico (Divisores de Cero): Burnt Orange
Válido/Verificaclón: Sage Green

La Base: Ley de Composición Interna (LCI)

The Concept



$$f : G \times G \to G$$
$$\forall\, a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$$

Concrete Examples

SÍ es LCI: Conjunto Naturales ($\mathbb{N}$) con Suma (+)

$$3 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 + 7 = 10 \in \mathbb{N}$$

NO es LCI: Conjunto Naturales ($\mathbb{N}$) con Resta (-)

$$3 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$$

(-4 pertenece a $\mathbb{Z}$, no a $\mathbb{N}$)

Universidad Andina del Cusco

Las Reglas del Juego: Propiedades Fundamentales

1. Asociatividad

El orden de agrupación agrupación no altera el resultado.

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Suma en $\mathbb{Z}$:
$(1+2)+3 = 1+(2+3)$

2. Conmutatividad

El orden de los elementos no altera no altera el resultado.

$$a * b = b * a$$

Multiplicación en $\mathbb{C}$

3. Distributividad

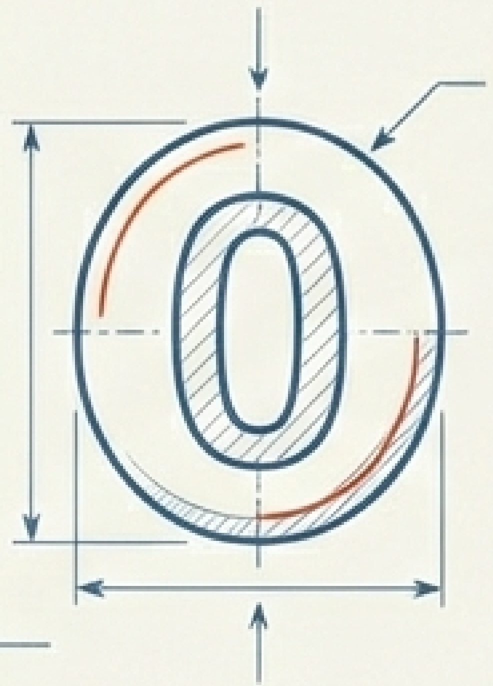
Conecta dos operaciones distintas (suma y producto).

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Universidad Andina del Cusco

Elementos Distinguibles

Elemento Neutro (e)

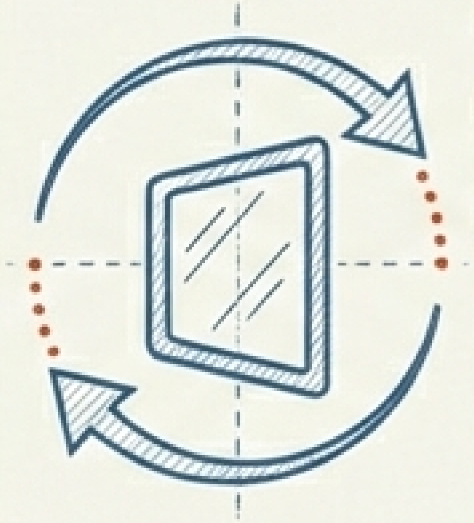


El elemento que "no hace nada".

$$a * e = a$$

Único para todo el conjunto.
Ej: 0 en suma, 1 en producto.

Elemento Inverso / Simétrico (a')



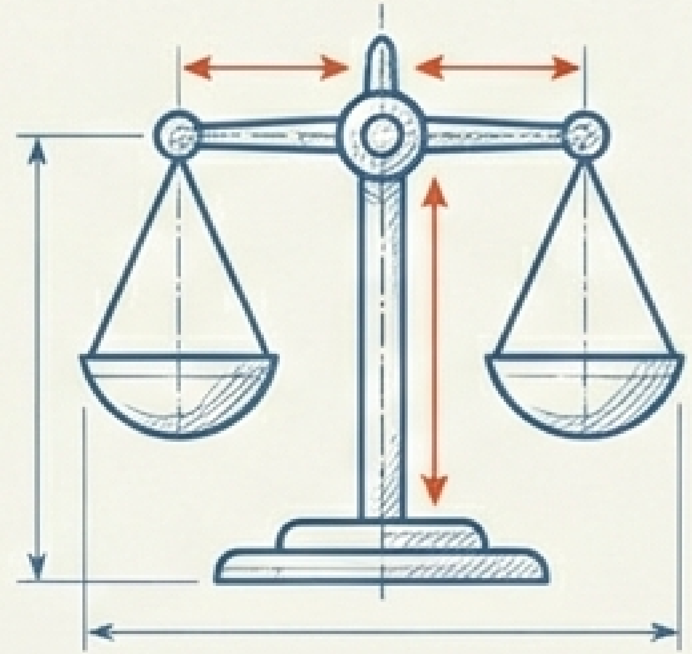
El elemento que te devuelve al neutro.

$$a * a' = e$$

Único para cada elemento.
Ej: Opuesto (-a) o Recíproco (a^{-1}).

Elemento Regular

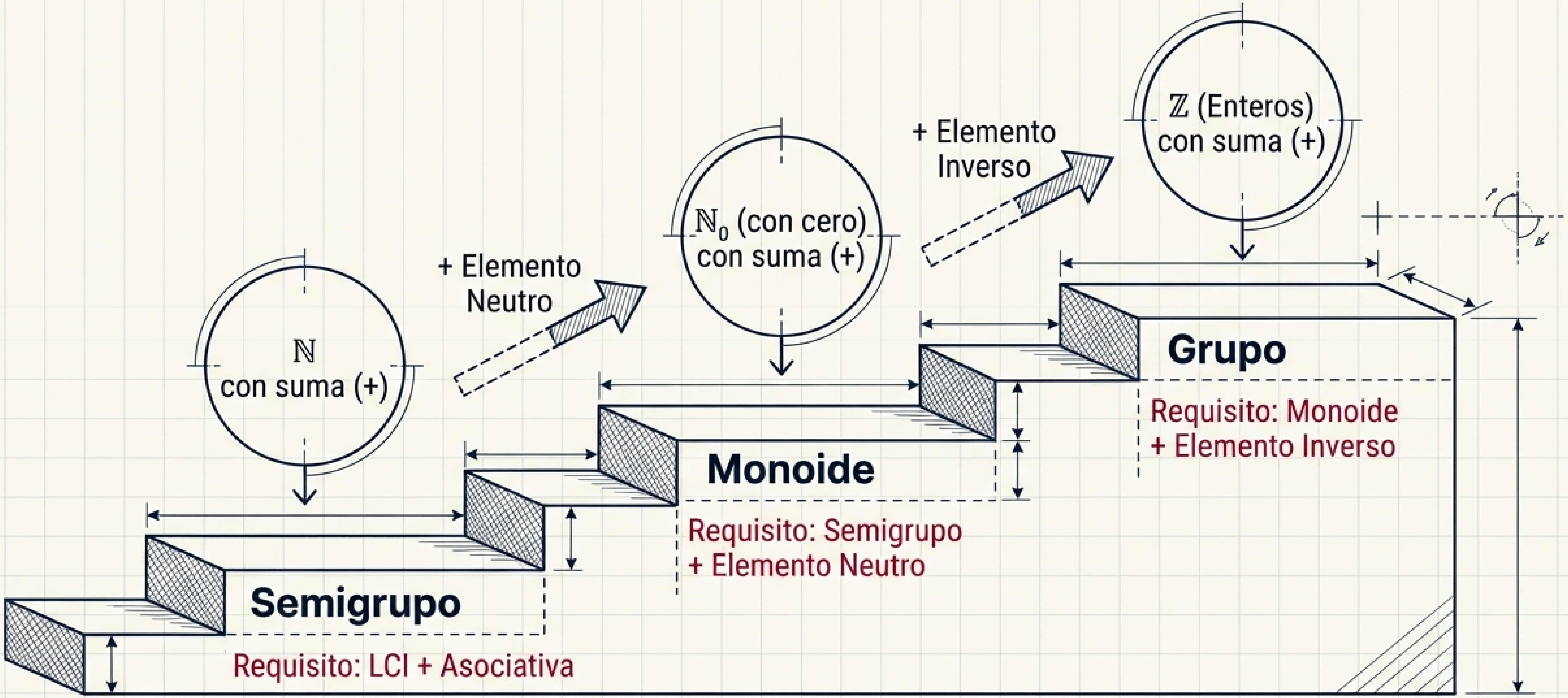
Permite la cancelación.



Si $a * b = a * c \Rightarrow b = c$

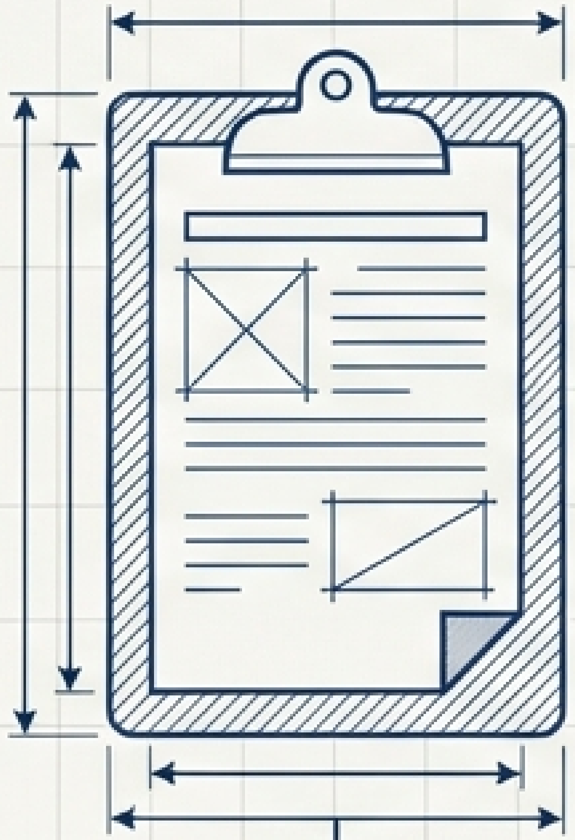
Universidad Andina del Cusco

La Escalera de Estructuras (1 Operación)



Universidad Andina del Cusco

El Grupo y El Grupo Abeliano



Requisitos para (G, ∗)

- ☑ Ley de Composición Interna (Cerradura)
- ☑ Asociatividad
- ☑ Elemento Neutro (e)
- ☑ Elemento Inverso (a′) para todo a

BONUS: Si cumple Conmutatividad ($a * b = b * a$) → **GRUPO ABELIANO**

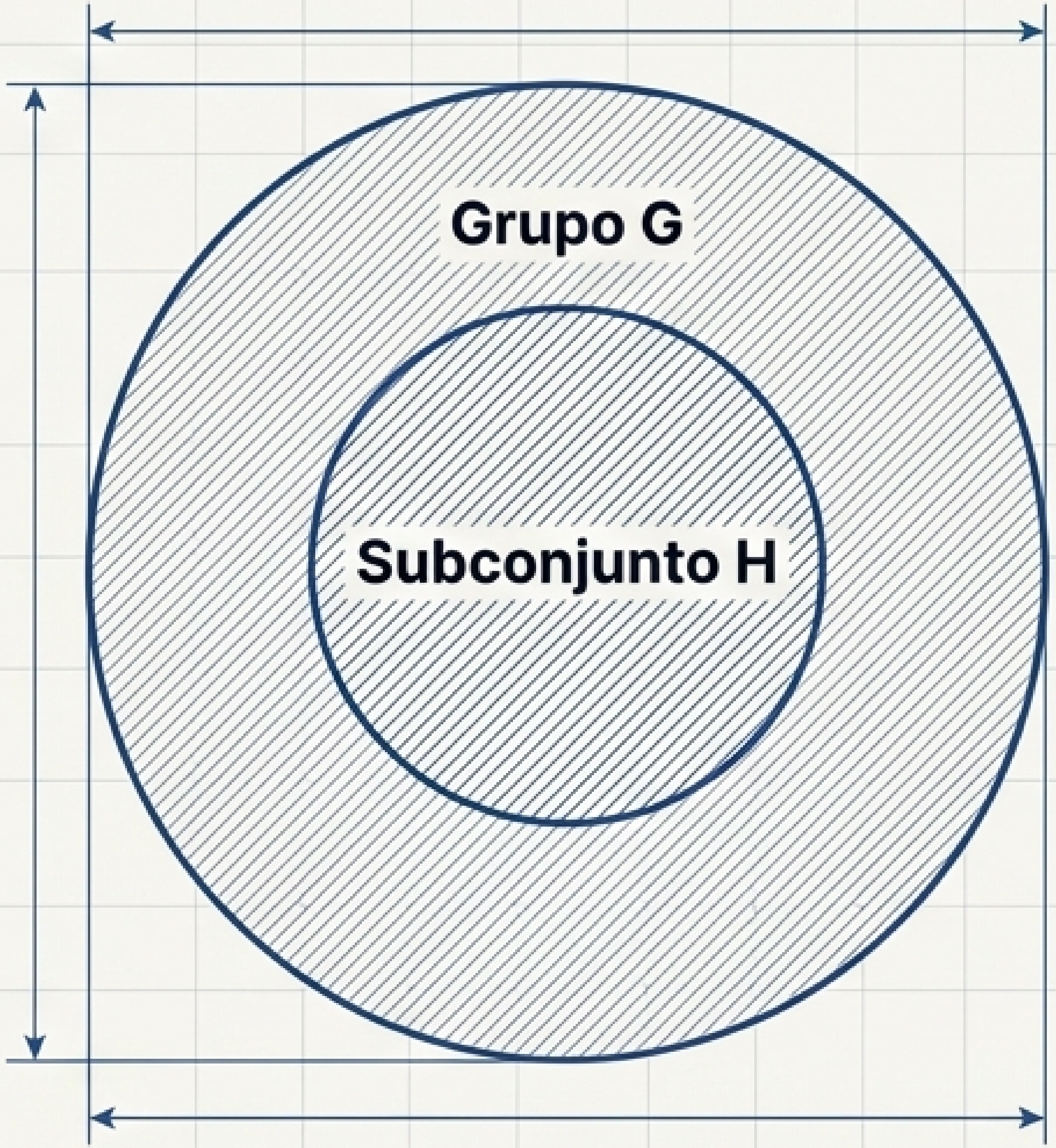
Ejemplo: Raíces cuartas de la unidad

$$R_4 = \{ 1, -1, i, -i \}$$

Multiplicación (·)

Neutro:	**1**
Inverso de **i**:	**-i** (pues **i** · **-i** = **-i²** = **1**)
Inverso de **-1**:	**-1**

Subgrupos: Estructuras dentro de Estructuras



Un subconjunto $H \subset G$ es subgrupo si H mismo es un grupo con la misma operación.

La Condición Suficiente (El Atajo)

$$\forall\, a, b \in H \Rightarrow a * b' \in H$$

Operar un elemento con el inverso de otro debe caer dentro del subconjunto.

Ejemplo: $(\mathbb{Z}, +)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

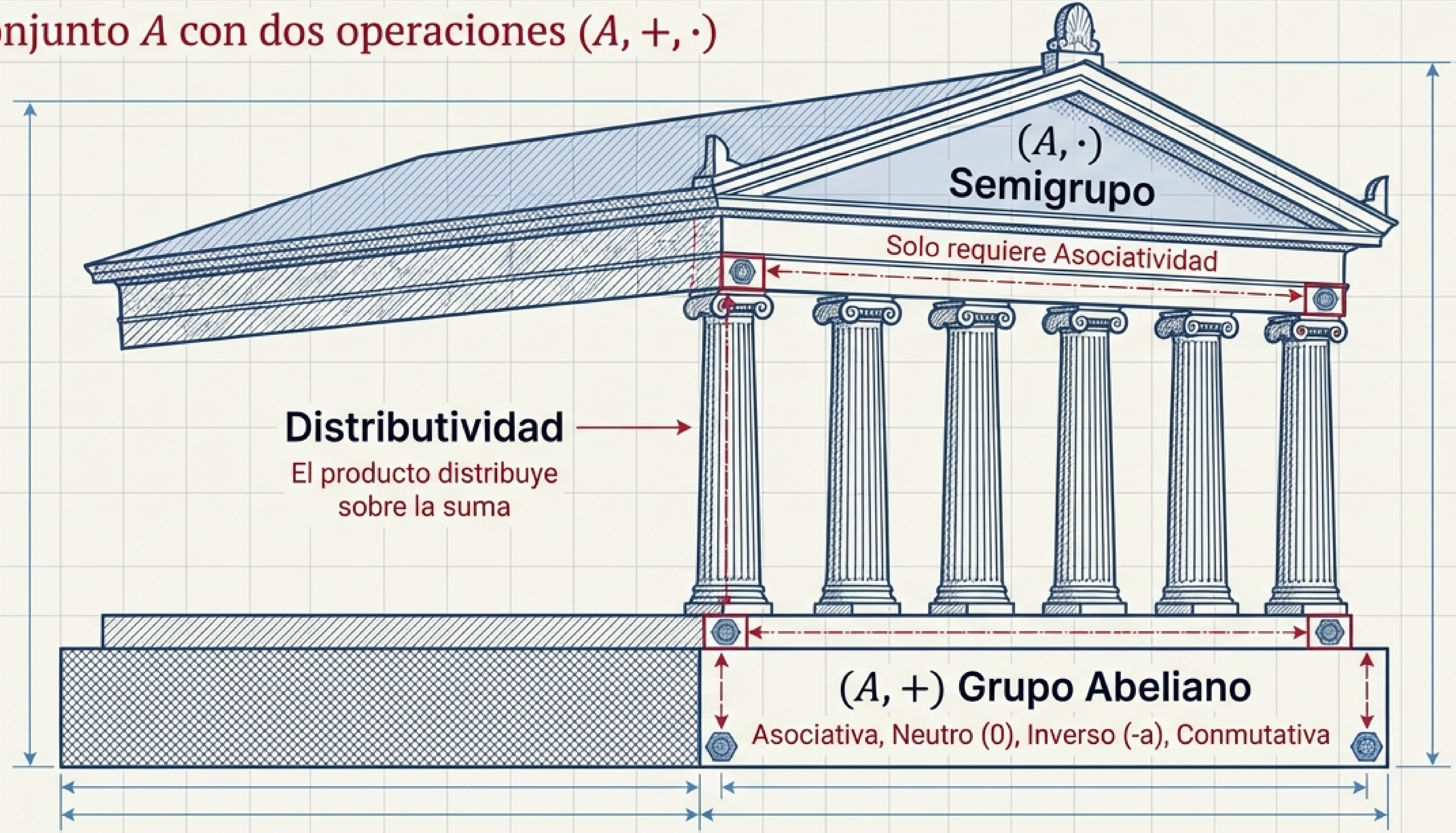
Elemento Elemento Operación

Si x, y son enteros, entonces $x + (-y)$ sigue siendo entero.

Universidad Andina del Cusco

Subiendo de Nivel: El Anillo

Un conjunto A con dos operaciones $(A, +, \cdot)$



Universidad Andina del Cusco

Clasificación de Anillos

¿Qué propiedades extra tiene la multiplicación?

Anillo Genérico

Anillo Conmutativo

Producto es conmutativo ($a \cdot b = b \cdot a$)

$\mathbb{Z}$ (Enteros)

Anillo con Identidad (Unitario)

Existe neutro multiplicativo (1)

$\mathbb{Z}$ tiene al 1

Anillo de División

Todo elemento no nulo tiene inverso (a^{-1})

⚠️ **$\mathbb{Z}$ NO es de división**
(Ej: 5 no tiene inverso en $\mathbb{Z}$)

La Trampa: Divisores de Cero

Intuición Escolar:
Si $a \cdot b = 0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$.

Realidad en Anillos:
¡No siempre! Existen "**Divisores de Cero**".

Elementos no nulos que multiplicados dan **cero**.

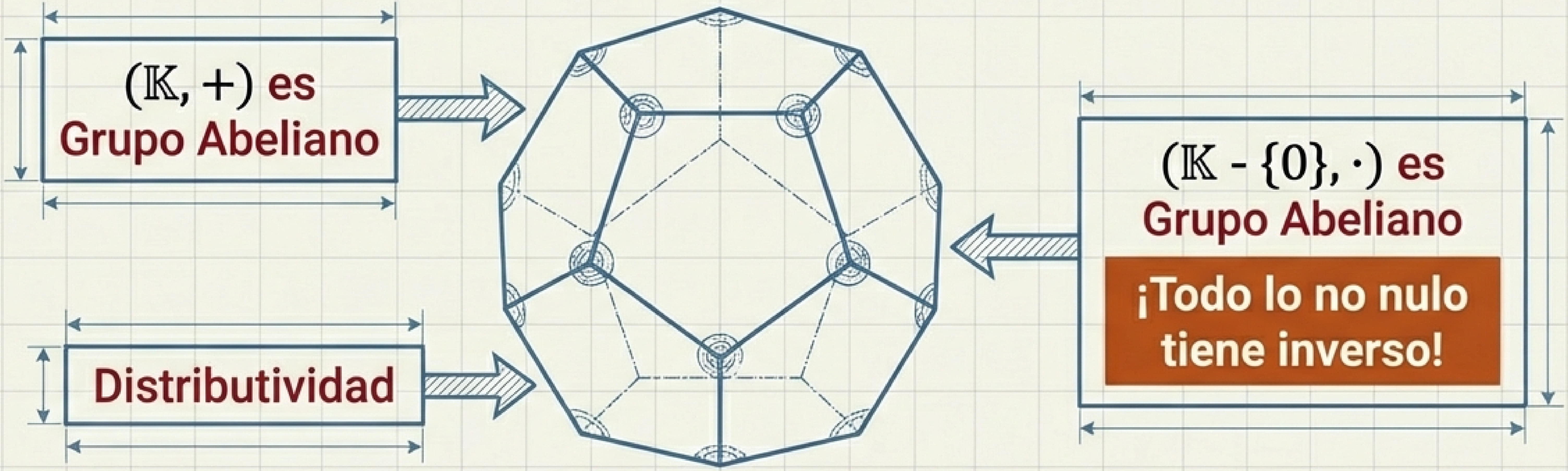
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dos matrices **NO nulas** producen una matriz **NULA**.

Universidad Andina del Cusco

La Cima: El Cuerpo (Field)

La estructura perfecta para la aritmética.



Consecuencia Clave: Un Cuerpo **NO** tiene divisores de cero.

Ejemplos: $\mathbb{Q}$ (Racionales), $\mathbb{R}$ (Reales), $\mathbb{C}$ (Complejos).

Contraejemplo: $\mathbb{Z}$ es Anillo, pero NO Cuerpo.

Propiedades Derivadas en Anillos

Verdades matemáticas que surgen de la estructura.

Elemento Absorbente

$$a \cdot 0 = 0$$

Prueba:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) =$$
$$= a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Cancelando,

$$0 = a \cdot 0.$$

Regla de los Signos

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

Unicidad

Si existe neutro, es único.

Si existe inverso, es único.

Universidad Andina del Cusco

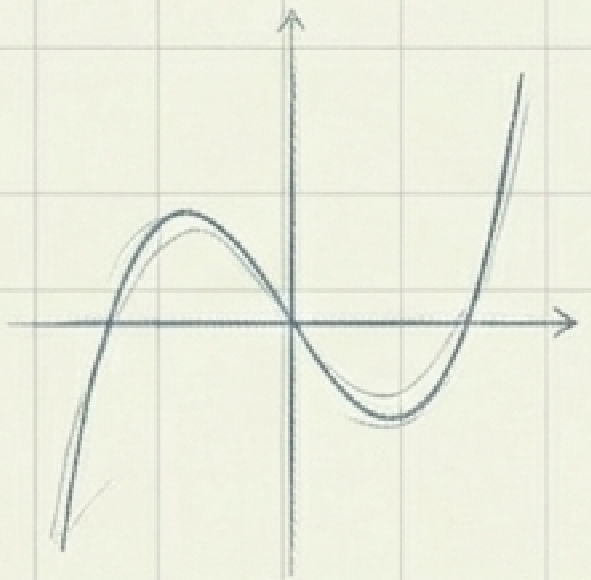
Caso de Estudio: Polinomios P_2

Polinomios de grado hasta 2: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Suma (+)

¿Es LCI? SÍ.

Sumar dos polinomios de grado ≤ 2 da grado ≤ 2.



Producto (·)

¿Es LCI? NO.

Contraejemplo:

$$h(x) = x^2$$
$$m(x) = x^2$$
$$h(x) \cdot m(x) = x^4$$

Grado 4 $\notin \mathbb{P}_2$

Veredicto: $\mathbb{P}_2$ **NO** es un anillo bajo multiplicación usual.

Universidad Andina del Cusco

Mapa Maestro de Estructuras

	Semigrupo	Monoide	Grupo	Anillo	Cuerpo
Asociativa	✓	✓	✓	✓	✓
Neutro		✓	✓	✓	✓
Inverso			✓	✓	✓
Conmutativa (+)			✓ Grupo Abeliano	✓	✓
Distributiva				✓	✓
Inverso Multiplicativo					✓

Universidad Andina del Cusco

¿Por qué importa esto?

$$x^2 - 9 = 0$$

$$\boxed{x = 3} \Leftarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

Solo podemos concluir esto porque estamos en un **CUERPO** ($\mathbb{R}$) sin divisores de cero.

Siguiente Paso

Próxima Estructura Estrella:

ESPACIOS VECTORIALES

Universidad Andina del Cusco