

TD d'optimisation
ENSAE
1A

Gabriel Romon

Version du 27 février 2017

1. Différentielle

Exercice 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est C^1 .
2. Montrer que f est C^2 .

1. Les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$ sont clairement définies et données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y^3 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 y^2 (3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Comme pour tout $h \in \mathbb{R}, f(0, h) = f(h, 0) = f(0, 0) = 0$, les dérivées partielles de f existent en $(0, 0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont clairement continues en tout $(x, y) \neq (0, 0)$. Montrons que ces deux fonctions sont continues en $(0, 0)$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x = 0$ ou $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Dans la suite on supposera donc sans perte de généralité que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{x^2 y^3 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{|y|^3 x^4}{(x^2 + y^2)^2} + 3 \frac{|y|^5 x^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y|^3 + 3|y|x^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |x|^3 + 3|x|y^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \text{ par symétrie.}$$

f admet donc des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de \mathbb{R}^2 . f est donc C^1 .

2. $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ admettent clairement des dérivées partielles en tout $(x, y) \neq (0, 0)$ données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2xy^5(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) = \frac{x^2 y^2 (3x^4 + 14x^2 y^2 + 3y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$$

et par symétrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^5 y (3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) = \frac{x^2 y^2 (3x^4 + 14x^2 y^2 + 3y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$$

Comme pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) = \frac{\partial f}{\partial x}(h, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, h) = \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

1.. DIFFÉRENTIELLE

les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(0, 0)$ avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) = 0$$

Les quatre dérivées partielles sont clairement continues en tout $(x, y) \neq (0, 0)$. Montrons qu'elles sont continues en $(0, 0)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme précédemment on peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Lemme : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \|(x, y)\|_2^2$

Preuve : Conséquence de l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ avec $a = |x|$ et $b = |y|$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right| &= \left| \frac{2xy^5(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \right| \leq \frac{2|x|^3|y|^5}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{2y^2(|xy|)^3}{\|(x, y)\|_2^6} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2 + y^2)^3} \\ &\leq \underbrace{\frac{2y^2\|(x, y)\|_2^6}{\|(x, y)\|_2^6}}_{\text{Lemme}} + 6|x||y| \\ &= 2y^2 + 6|x||y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \end{aligned}$$

La symétrie permet de conclure $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right| \leq 2x^2 + 6|x||y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$

et une technique similaire donne

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) \right| \leq 3y^2 + 14\|(x, y)\|_2^2 + 3x^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de \mathbb{R}^2 . Donc f est C^2 .

Exercice 1.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.
Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

f admet clairement des dérivées partielles en tout $(x, y) \neq (0, 0)$ données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^2 + y^2)^x \left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \log(x^2 + y^2) \right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy(x^2 + y^2)^{x-1}$. Par composition et multiplication de fonction continues, ces dérivées partielles sont continues en tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

f est donc différentiable en tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et son gradient en (x, y) est

$$\left((x^2 + y^2)^x \left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \log(x^2 + y^2) \right), 2xy(x^2 + y^2)^{x-1} \right)$$

Exercice 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Calculer la différentielle de f .

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé et $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f((x, y) + (h_1, h_2)) = f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ yh_1 + xh_2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}^T$$

Le candidat pour la différentielle de f en (x, y) est donc $(h_1, h_2) \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right]^T$.

Il suffit de prouver que $\frac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \xrightarrow{\|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0} 0$

Le choix de la norme n'importe pas étant donné l'équivalence des normes en dimension finie. On choisit par exemple la norme 2.

$$\frac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} = \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |h_1| \rightarrow 0$$

en minorant trivialement le dénominateur par $\sqrt{h_2^2}$.

Exercice 1.4

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), X \mapsto X^T X$. Calculer la différentielle de f .

Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X + H) = f(X) + X^T H + H^T X + H^T H$.

Le candidat pour la différentielle de f en X est donc $H \mapsto X^T H + H^T X$.

Il suffit de prouver que $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \xrightarrow{\|H\| \rightarrow 0} 0$.

Par équivalence des normes en dimension finie, on choisit n'importe quelle norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{R})$ (celle qui dérive de la norme 2 par exemple). Alors

$\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H^T\| \|H\|}{\|H\|} = \|H^T\|$. La transposée étant linéaire, elle est continue en 0, donc $\|H^T\| \xrightarrow{\|H\| \rightarrow 0} 0$ ce qui achève la preuve.

Exercice 1.5

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (f(x^2y, z^2x), g(x^y, zx))$. Calculer, si elle existe, la différentielle de f .

Posons $\gamma : (x, y, z) \mapsto (x^2y, z^2x)$ et $\delta : (x, y, z) \mapsto (x^y, zx)$.

γ et f sont différentiables en tous points de leurs domaines, donc $f \circ \gamma$ est différentiable en tout point de \mathbb{R}^3 avec

$$d(f \circ \gamma)(x, y, z) = df(\gamma(x, y, z)) \circ d\gamma(x, y, z)$$

On calcule $\text{Jac}(\gamma)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}$. En passant des applications linéaires aux matrices,

$$\begin{aligned} \text{Jac}(f \circ \gamma)(x, y, z) &= \text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \text{Jac}(\gamma)(x, y, z) \\ &= \text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

δ est définie et différentiable en (x, y, z) dès lors que $x > 0$. On calcule de même $\text{Jac}(\delta)(x, y, z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout (x, y, z) avec $x > 0$,

$$\text{Jac}(g \circ \delta)(x, y, z) = \text{Jac}(g)(x^y, zx) \cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

La différentielle de $f \circ \gamma$ en (x, y, z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T$$

et celle de $g \circ \delta$ en (x, y, z) avec $x > 0$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\text{Jac}(g)(x^y, zx) \cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T$$

Soit (x, y, z) fixé avec $x > 0$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right) &= \left(f \circ \gamma \left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix} \right), g \circ \delta \left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= (f \circ \gamma((x, y, z)) + d(f \circ \gamma)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) + \|h\| \varepsilon_1(\|h\|), \\ &\quad g \circ \delta((x, y, z)) + d(g \circ \delta)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) + \|h\| \varepsilon_2(\|h\|)) \end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions telles que $\varepsilon_1(\|h\|) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$ et $\varepsilon_2(\|h\|) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$

$$\begin{aligned} &= \varphi((x, y, z)) + (d(f \circ \gamma)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3), d(g \circ \delta)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3)) \\ &\quad + \|h\| \underbrace{(\varepsilon_1(\|h\|), \varepsilon_2(\|h\|))}_{\xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

La différentielle de φ en (x, y, z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left(\left[\text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T, \left[\text{Jac}(g)(x^y, zx) \cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T \right)$$

Exercice 1.6

Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $\varphi : E \rightarrow E, f \mapsto f^3$.
Montrer que φ est différentiable.

On n'est plus dans le cadre des espaces de dimension finie et la notion de différentielle est celle de Fréchet.

Pour $f \in E$ et $h \in E$, $\varphi(f+h) = \varphi(f) + 3f^2h + 3fh^2 + h^3$.

Le candidat pour la différentielle de φ en f est donc $h \mapsto 3f^2h$.

Il suffit de prouver que $h \mapsto 3f^2h$ est continue en 0 et que $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$.

Lemme : Pour $f, g \in E$, $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$.

Preuve : Par continuité de $|fg|$ sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\|fg\| = |f(c)g(c)| \leq |f(c)|\|g\| \leq \|f\|\|g\|$$

D'après le lemme, $\|3f^2h\| \leq 3\|f^2\|\|h\|$ ce qui prouve la continuité en 0.

On a $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\frac{\|fh^2\|}{\|h\|} + \frac{\|h^3\|}{\|h\|}$.

Le lemme donne $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\|f\|\|h\| + \|h\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$.

Exercice 1.7

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec g'' bornée par $M \geq 0$.

Soit $I : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 (g \circ f)(t) dt$

1. Montrer que I est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que I est C^1 .
3. Qu'en est-il si g est seulement C^1 ?

1. Pour $f \in E$ fixé et $h \in E$, $t \in [0, 1]$, la formule de Taylor-Lagrange donne

$$g(f(t) + h(t)) = g(f(t)) + h(t)g'(f(t)) + \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$$

où $\xi_t \in \mathbb{R}$ de sorte que $t \mapsto \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$ est continue sur $[0, 1]$ et

$$I(f+h) = I(f) + \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt + \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt$$

Le candidat pour la différentielle de I en f est $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$.

Il suffit de prouver que $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$ est continue en 0 et

$$\frac{\left| \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt \right|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

On a $\left| \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt \right| \leq \|h\| \underbrace{\int_0^1 |g'(f(t))|dt}_{\text{indépendant de } h}$ ce qui prouve la continuité en 0.

Comme $\left| \frac{h(t)^2}{2} g''(\xi_{h,t}) \right| \leq \frac{M}{2} h(t)^2$,

$$\frac{\left| \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2} g''(\xi_{h,t}) dt \right|}{\|h\|} \leq \frac{M}{2} \frac{\int_0^1 h(t)^2 dt}{\|h\|} \leq \frac{M}{2} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \frac{M}{2} \|h\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

2. Sur $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ on institue la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{op}$ dérivant de la norme infinie.

Il s'agit de montrer la continuité de $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt \end{cases} \end{cases}$

Soit $f_0 \in E$ et $h \in E$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)| &= \left| \int_0^1 h(t)(g'(f(t)) - g'(f_0(t))) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |h(t)| M |f(t) - f_0(t)| dt \quad g'' \text{ est bornée par } M \text{ donc } g' \text{ est } M\text{-lipschitzienne} \\ &\leq M \|f - f_0\| \int_0^1 |h(t)| dt \\ &\leq M \|f - f_0\| \|h\| \end{aligned}$$

Donc $\frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|}$ est bornée par $M\|f - f_0\|$, d'où

$$\|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} = \sup_h \frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|} \leq M\|f - f_0\|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Avec $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$, $\|f - f_0\| \leq \delta \implies \|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} \leq \varepsilon$ ce qui prouve la continuité de φ en f_0 .

3. Mon intuition me laisse penser que si g est deux fois dérivable sans être bornée (donc C^1), I n'est pas forcément différentiable. Obtenir un contre-exemple n'est pas évident, car I est tout de même continue (par uniforme continuité de g sur un compact).

Exercice 1.8

Soient E et F des evn avec F complet. Soit $D \subset E$ un ouvert.

On pose $B^2 = \{f : D \rightarrow F / f \text{ } C^2, f \text{ bornée, } df \text{ bornée, et } d^2f \text{ bornée}\}$ et

$$\|f\| = \sup_{x \in D} (\|f(x)\| + \|df(x)\| + \|d^2f(x)\|)$$

Montrer que B^2 est complet.

On trouvera une présentation de l'intégrale des fonctions à valeurs dans un espace de Banach à l'adresse
http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture_Notes/chap4.pdf

Etant donné X un ensemble et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un evn, on note $B(X, Y)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans Y . On rappelle que si Y est complet, alors $B(X, Y)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\infty, Y}$ définie par $\|f\|_{\infty, Y} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$.

On notera $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ qui dérive de $\|\cdot\|_F$. On rappelle que $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|_{op})$ est un Banach.

On notera $\|\cdot\|_{op'}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$ qui dérive de $\|\cdot\|_{op}$, de sorte que $(\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F)), \|\cdot\|_{op'})$ est un Banach.

On rappelle que si $f \in B^2$ et $a \in D$, $df(a) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $d^2f(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$. La norme définie dans l'énoncé est donc à prendre au sens suivant :

$$\|f\| = \sup_{x \in D} (\|f(x)\|_F + \|df(x)\|_{op} + \|d^2f(x)\|_{op'})$$

On prouve facilement les faits suivants : pour $f \in B^2$,

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \|f\|_{\infty, F} \\ \|f\| &\geq \|df\|_{\infty, op} \\ \|f\| &\geq \|d^2f\|_{\infty, op'} \end{aligned}$$

Soit (f_n) de Cauchy dans B^2 pour $\|\cdot\|$.

- D'après la remarque précédente, (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty, F}$ dans $B(D, F)$ qui est complet, donc (f_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty, F}$ vers un $f \in B(D, F)$.
 - D'après la remarque précédente, (df_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty, op}$ dans $B(D, \mathcal{L}_c(E, F))$ qui est complet, donc (df_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty, op}$ vers un $\varphi \in B(D, \mathcal{L}_c(E, F))$.
 - En tant que limites uniformes de fonctions continues, f et φ sont continues.
 - Montrons que f est différentiable de différentielle φ .
- Soit $a \in D$. Pour $h \in D$, et n quelconque,

$$f_n(a+h) - f_n(a) = \int_0^1 df_n(a+th)dt$$

La convergence des df_n vers φ étant uniforme, on a en passant à la limite

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \varphi(a+th)dt$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} &= \frac{\|\int_0^1 \varphi(a+th) - \varphi(a)(h) dt\|_F}{\|h\|_E} \\ &\leq \frac{\int_0^1 \|\varphi(a+th) - \varphi(a)\|_{op} \|h\|_E dt}{\|h\|_E} \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi(a+th) - \varphi(a)\|_{op} dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est continue on dispose de $\delta > 0$ tel que $\|x\|_F \leq \delta \implies \|\varphi(a+x) - \varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$. Pour $\|h\| \leq \varepsilon$ et $t \in [0, 1]$ on obtient

$$\|\varphi(a+th) - \varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$$

donc $\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} \leq \varepsilon$ dès que $\|h\| \leq \delta$.

f est donc différentiable sur D et sa différentielle est φ , qui est continue d'après la remarque précédente.

- Un raisonnement identique en remplaçant f_n par df_n montre que df est différentiable sur D , on note d^2f sa différentielle qui est continue.
- f est donc C^2 , bornée, de différentielles bornées. Il reste à prouver que (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, on dispose de N, N', N'' tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad n \geq N &\implies \|f(x) - f_n(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ n \geq N' &\implies \|df(x) - df_n(x)\|_{op} \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ n \geq N'' &\implies \|d^2f(x) - d^2f_n(x)\|_{op'} \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Pour $n \geq \max(N, N', N'')$,

$$\|f(x) - f_n(x)\|_F + \|df(x) - df_n(x)\|_{op} + \|d^2f(x) - d^2f_n(x)\|_{op'} \leq \varepsilon$$

et ceci pour tout $x \in D$, donc $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$. Ceci achève la preuve.

Exercice 1.9

Soit E un \mathbb{R} -evn, $D \subset E$ un ouvert et $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose \overline{D} compact, f continue, nulle à la frontière de D et f différentiable sur D .
Montrer qu'il existe $a \in D$ tel que $df(a) = 0$.

f est continue sur le compact \overline{D} donc elle admet un maximum M et un maximum m atteints respectivement en α et $\beta \in \overline{D}$.

Si $m = M = 0$, f est nulle sur D donc pour tout $x \in D$, $df(x) = 0$.

Sinon, $m < 0$ ou $M > 0$. On suppose par exemple $M > 0$. Comme f est nulle sur $\overline{D} \setminus \overset{\circ}{D} = \overline{D} \setminus D$, on a $\beta \in D$. En β , f admet un maximum global (donc local), d'où $df(\beta) = 0$.

Exercice 1.10

Soient $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f(x, y, z) = (x + \varphi(yz), y + \psi(\frac{x}{z}))$.
Calculer la différentielle de f .

La démarche est identique à celle de l'exercice 1.5. En posant $f_1 : (x, y, z) \mapsto x + \varphi(yz)$ et $f_2 : (x, y, z) \mapsto y + \psi(\frac{x}{z})$, il suffit de démontrer que f_1 et f_2 sont différentiables en (x, y, z) pour obtenir la différentielle de f en (x, y, z) :

$$df(x, y, z) : (h_1, h_2, h_3) \mapsto (df_1(x, y, z)(h_1, h_2, h_3), df_2(x, y, z)(h_1, h_2, h_3))$$

On calcule

$$\text{Jac}(f_1)(x, y, z) = (1, \varphi'(yz)z, \varphi'(yz)y)$$

et

$$\text{Jac}(f_2)(x, y, z) = \left(\psi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{1}{z}, 1, -\psi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{x}{z^2} \right)$$

Exercice 1.11

1. Soient E, F, G, H des \mathbb{R} -evn. B est une forme bilinéaire continue de $F \times G$ dans H , $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$.
On suppose que f et g sont différentiables en $a \in E$. Montrer que $C : E \rightarrow H, x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a .
2. Soit E un espace vectoriel euclidien.
 - (a) Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.
 - (b) Déterminer la différentielle de $\psi : x \mapsto \|x\|^2$.
 - (c) Déterminer et interpréter la différentielle de φ .

1. Soit $a \in E$. Pour $h \in E$,

$$\begin{aligned} C(a+h) &= C(a) + B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a)) \\ &\quad + \\ &\quad B(f(a), \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(\|h\|_{\varepsilon_f}(\|h\|), g(a+h)) \end{aligned}$$

Le candidat pour la différentielle en a de f est $h \mapsto B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a))$.
Il suffit de prouver que

$$B(f(a), \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(\|h\|_{\varepsilon_f}(\|h\|), g(a+h)) = o(\|h\|)$$

B étant bilinéaire continue, il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \|B(x, y)\| \leq K\|x\|\|y\|$$

On traite chaque terme de la somme séparément :

- $B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(f(a), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\rightarrow 0}$
- $\|B(df(a)(h), dg(a)(h))\| \leq K\|df(a)\|_{op}\|df(b)\|_{op}\|h\|^2$
- $B(df(a)(h), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(df(a)(h), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\rightarrow 0}$
- $B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h))}_{\rightarrow 0}$

La somme est bien $o(\|h\|)$.

2. a) $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est bilinéaire continue (d'après Cauchy-Schwarz). La question 1. implique que $\psi : x \mapsto \langle x, x \rangle$ est différentiable en tout $a \in E$. La fonction $\delta : x \mapsto \frac{1}{x}$ est différentiable en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc $\delta \circ \psi$ est différentiable en tout $a \in E \setminus \{0\}$.

$\pi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire continue, et d'après 1., $x \mapsto \pi(\delta \circ \psi(x), x)$ est différentiable en tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Ceci s'écrit encore $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

b) Soit $x \in E$. Pour $h \in E$, $\psi(x+h) = \psi(x) + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2$.
La différentielle de ψ en x est donc $h \mapsto 2\langle x, h \rangle$.

c) D'après 1., la différentielle de φ en $x \neq 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} d\varphi(x)(h) &= \pi(\text{Id}(x), d(\delta \circ \psi)(x)(h)) + \pi(d\text{Id}(x)(h), \delta \circ \psi(x)) \\ &= x \cdot d\delta(\psi(x))(d\psi(x)(h)) + \frac{h}{\|x\|^2} \\ &= x \cdot -\frac{2\langle x, h \rangle}{(\|x\|^2)^2} + \frac{h}{\|x\|^2} \\ &= \frac{h}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, h \rangle x}{\|x\|^4} \end{aligned}$$

Exercice 1.12

Déterminer toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

C'est un classique que l'on trouve dans n'importe quel livre de prépa.

Exercice 1.13

En quels points de \mathbb{R}^2 la fonction $g : (x, y) \mapsto \max(x^2, y)$ est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 > y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = x^2$ sur un voisinage de (x, y) . g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto 2xh_1$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 < y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = y$ sur un voisinage de (x, y) g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto h_2$.

En $(0, 0)$: $\frac{g(0, \frac{1}{n}) - g(0, 0)}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\frac{g(0, -\frac{1}{n}) - g(0, 0)}{-\frac{1}{n}} = 0$ donc g n'admet pas de dérivée partielle selon y en $(0, 0)$ donc g n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x^2 = y$ et $x \neq 0$.

$$\frac{g(x + \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{\frac{1}{n}} = \frac{(x + \frac{1}{n})^2 - x^2}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2x$$
$$\frac{g(x - \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{-\frac{1}{n}} = \frac{y - y}{-\frac{1}{n}} = 0 \neq 2x$$

donc g n'admet pas de dérivée partielle selon x en (x, y) donc g n'est pas différentiable en (x, y) .

Exercice 1.14

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers.

On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^n y^p}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Pour quelles valeurs de (n, p) f est-elle différentiable dans \mathbb{R}^2 ?

Quelles que soient les valeurs de n et p , f est différentiable en $(x, y) \neq (0, 0)$ par composition. f admet donc des dérivées partielles données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{nx^{n-1}y^p}{x^2 + y^2} - \frac{2x^{n+1}y^p}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{px^n y^{p-1}}{x^2 + y^2} - \frac{2x^n y^{p+1}}{(x^2 + y^2)^2}$$

En $(0, 0)$: comme pour tout $h \in \mathbb{R}, f(0, h) = f(h, 0) = f(0, 0) = 0$, les dérivées

1.. DIFFÉRENTIELLE

partielles de f existent en $(0, 0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

On étudie plusieurs cas selon n et p . Si les dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$, f est différentiable en $(0, 0)$. Si ce n'est le pas on ne peut a priori rien dire.

On utilise les mêmes techniques de majoration que dans l'exercice 1.

1. Si $n \geq 4$: OK
2. Si $n = 3$:
 - (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
 - (b) Si $p = 3$: OK
 - (c) Si $p = 2$: OK
 - (d) Si $p = 1$: OK
3. Si $n = 2$:
 - (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
 - (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
 - (c) Si $p = 2$: OK
 - (d) Si $p = 1$: Pour $t \in \mathbb{R}$ non nul,

$$\frac{f((0, 0) + t(1, 1)) - f((0, 0))}{t} = \frac{1}{2}$$

f admet donc une dérivée directionnelle selon le vecteur $(1, 1)$ qui vaut $\frac{1}{2}$.

Si f était différentiable en $(0, 0)$, son gradient donné par les dérivées partielles serait nul, donc la différentielle en $(0, 0)$ serait aussi nulle, donc toutes les dérivées directionnelles seraient aussi nulles, ce qui n'est pas le cas. f n'est donc pas différentiable en $(0, 0)$.

4. Si $n = 1$:
 - (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
 - (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
 - (c) Si $p = 2$: Non par symétrie
 - (d) Si $p = 1$: $f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, donc f n'est pas continue en 0, donc pas différentiable en $(0, 0)$.

Conclusion : f est différentiable en $(0, 0)$ pour tout $n \geq 1$ et $p \geq 1$ exceptés les couples $(n = 2, p = 1)$, $(n = 1, p = 2)$, $(n = 1, p = 1)$.

Exercice 1.15

Soit B dans $M_n(\mathbb{R})$.

Donner la différentielle de $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Tr}(A^{-1}B)$

On choisit une norme d'opérateur $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère $V \subset GL_n(\mathbb{R})$ un voisinage de A tel que pour tout $X \in V$, $\|A^{-1}(X - A)\| < 1$. Calculons la différentielle de la fonction $M \rightarrow M^{-1}$ en A .

Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, $\|H\| \leq \delta \implies A + H \in V$.

Pour $\|H\| \leq \delta$, $(A + H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$.

Démontrons que $(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k$. Comme $\|H\| \leq \delta$, $\|A^{-1}H\| < 1$ donc la série en question est absolument convergente, donc convergente. On a pour $N \geq 1$,

$$(I_n + A^{-1}H) \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k = (-1)^N \underbrace{(A^{-1}H)^{N+1}}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0} + I_n$$

En passant à la limite sur N on a l'égalité voulue.

Par conséquent

$$(A+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1}$$

La candidat pour la différentielle de l'inverse en A est donc $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

Il reste à remarquer que

$$\frac{\|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|} \|H\| \rightarrow 0$$

La fonction $A \mapsto \text{Tr}(AB)$ étant linéaire, la différentielle de φ en A est donnée par $H \mapsto -\text{Tr}(A^{-1}HA^{-1}B)$

Exercice 1.16

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $x \mapsto A(x)$
Calculer la différentielle de $x \mapsto \ln \det A(x)$

Il est classique (cf Gourdon Analyse ou Cassini Algèbre 2) que la différentielle du déterminant en A est donnée par $H \mapsto \text{Tr}((\text{com } A)^T H)$ qui devient $H \mapsto \det A \text{Tr}(A^{-1}H)$ lorsque A est inversible.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 d(\ln \circ \det \circ A)(a)(h) &= d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(h)) \\
 &= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(1)) \\
 &= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))\left(\frac{dA}{dx}(a)\right) \\
 &= h \cdot d \ln(\det A(a)) \left(d \det(A(a))\left(\frac{dA}{dx}(a)\right) \right) \\
 &= h \cdot d \ln(\det A(a)) \left(\det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) \right) \\
 &= h \det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) d \ln(\det A(a))(1) \\
 &= h \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)
 \end{aligned}$$

La différentielle cherchée en a est donc $h \mapsto h \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)$

Exercice 1.17

Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 1. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto f(xy) + g(\frac{x}{y})$ est différentiable en $(1, 1)$ et calculer sa différentielle en $(1, 1)$.

Soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ et $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

On dispose de U un voisinage de $(1, 1)$ et V un voisinage de 1 tel que $\alpha(U) \subset V$ et $\beta(U) \subset V$. $\alpha : U \rightarrow V$ et $\beta : U \rightarrow V$ sont différentiables en $(1, 1)$.

Le théorème de composition s'applique : $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ sont différentiables en $(1, 1)$, donc φ aussi, avec

$$\begin{aligned}
 d\varphi((1, 1))(h_1, h_2) &= d(f \circ \alpha)(1, 1)(h_1, h_2) + d(f \circ \beta)(1, 1)(h_1, h_2) \\
 &= (yh_1 + xh_2)f'(1) + \left(-\frac{y}{x^2}h_1 + \frac{h_2}{x}\right)g'(1)
 \end{aligned}$$

Exercice 1.18

Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ qui vérifient $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$ où $Z(x, y) = f(\frac{y}{x})$

?

Exercice 1.19

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \rightarrow F$ de classe C^2 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(tx) = t^2 f(x)$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $d^2 f(0)(x, x) = 2f(x)$.

On rappelle que $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$ s'identifie à l'espace des applications bilinéaires $\mathcal{L}_c(E \times E, F)$.

L'énoncé demande en réalité de montrer que pour tout $x \in E$,

$$d^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

Soit $x \in E$ fixé.

Posons $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow E, t \mapsto tx$ et $\beta : \mathbb{R} \rightarrow F, t \mapsto t^2 f(x)$. \mathbb{R} étant de dimension finie, toute application linéaire de \mathbb{R} dans E est continue. α est clairement différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto hx$.

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, $\beta(t+h) = \beta(t) + 2thf(x) + h^2 f(x)$ avec

$$\frac{\|h^2 f(x)\|_F}{|h|} = |h| \|f(x)\|_F \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

Donc β est différentiable en t de différentielle $h \mapsto 2thf(x)$

En différentiant l'égalité $f \circ \alpha = \beta$ en $t \in \mathbb{R}$ on a pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hdf(tx)(x) = 2thf(x)$ et donc

$$df(tx)(x) = 2tf(x) \quad (*)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $\Pi : \mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow F, L \mapsto L(x)$. Pour $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $H \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $\Pi(L+H) = (L+H)(x) = \Pi(x) + H(x)$.

Le candidat pour la différentielle en L est donc $H \mapsto H(x)$. Il suffit de montrer que cette application est continue.

Soit $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ qui dérive naturellement de $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Alors

$$\frac{\|H(x)\|_F}{\|H\|_{op}} \leq \frac{\|H\|_{op} \|x\|_E}{\|H\|_{op}} \leq \|x\|_E$$

D'où la continuité.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow F, t \mapsto 2tf(x)$. On montre facilement que γ est différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto 2hf(x)$.

L'égalité (*) se réécrit $\Pi \circ df \circ \alpha = \gamma$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(\Pi \circ df \circ \alpha)(t)(h) &= d\Pi(df \circ \alpha(t))(d(df \circ \alpha)(t)(h)) \\ &= d(df \circ \alpha)(t)(h)(x) \\ &= d(df)(tx)(hx)(x) \\ &= hd^2f(tx)(x)(x) \end{aligned}$$

On a donc pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hd^2f(tx)(x)(x) = 2hf(x)$, donc

$$d^2f(tx)(x)(x) = 2f(x)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. En $t = 0$ on a

$$d^2f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

comme voulu.

2. Applications de la notion de différentielle

3. Equations différentielles

4. Ensembles convexes

Exercice 4.1

Trouver K un convexe fermé et f une application affine telle que $f(K)$ soit un ouvert.

On considère simplement $\text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 4.2

Soit C un convexe non réduit à un point.

1. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
 - (a) $x_0 \in \text{Ri}(C)$
 - (b) $\forall x \in C, \exists y, x_0 \in [x, y[$
2. Montrer que si C n'est pas convexe, alors la réciproque est fausse.

?

Exercice 4.3

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ convexe de cardinal $n + 2$. Montrer qu'il existe une partition de K en $K_1 \cup K_2$ telles que les enveloppes convexes de K_1 et K_2 ne sont pas disjointes.

L'hypothèse K convexe est superflue. Ecrivons $K = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$ et considérons la matrice A à $n+1$ lignes et $n+2$ colonnes

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas inversible donc il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2})$ un élément non nul de $\ker A$, ce qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i a_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i &= 0 \end{aligned}$$

Soit $I \subset \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ l'ensemble des indices tels que $\alpha_i > 0$ et $J \subset \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ l'ensemble des indices tels que $\alpha_j \leq 0$. I et J sont non vides car $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}) \neq (0, \dots, 0)$ et $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$.

On a $\sum_{i \in I} \alpha_i a_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j) a_j$ et $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j)$.

Posons $S = \sum_{i \in I} \alpha_i$ qui est non nul. Alors

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} a_i = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} a_j$$

avec

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} = 1$$

$K_1 = (a_i)_{i \in I}$ et $K_2 = (a_j)_{j \in J}$ est donc une partition convenant.

Exercice 4.4

Soit K une partie convexe de E et M une variété affine de E telle que $M \cap \text{Ri}(K) \neq \emptyset$. On suppose M fermée.

1. Montrer que $\text{Ri}(M \cap K) = M \cap \text{Ri}(K)$
2. Montrer que $\overline{M \cap K} = \overline{M} \cap \overline{K}$

?

Exercice 4.5

Montrer que toute section plane d'un ensemble convexe est convexe.

Tout hyperplan est convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et l'intersection de deux convexes est convexe, donc toute section plane d'un convexe est convexe.

Exercice 4.6

Donner un exemple de fermé A d'un evn tel que $\text{co } A$ ne soit pas fermée.

On rappelle que $\text{co } A$ fait référence à l'enveloppe convexe de A . On se place dans \mathbb{R}^2 et on pose $A = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, \infty) \times \{0\})$ qui est fermé comme union de deux fermés.

Cependant $\text{co } A = ([0, \infty) \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$ (évident sur un dessin) qui n'est pas fermé.

Exercice 4.7

Soit X un fermé d'un evn E . Montrer l'équivalence des propositions suivantes

1. X convexe
2. $\forall x, y \in X, \frac{x+y}{2} \in X$

Donner un contre-exemple si X n'est pas fermé.

\implies Trivial.

\impliedby Soient $x, y \in X$ fixés. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\forall k \in [0, 2^n], \frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y \in X$$

• Pour $n = 1$, c'est une conséquence l'hypothèse $\forall x, y \in X, \frac{x+y}{2} \in X$.

• Supposons le résultat vrai pour $n \geq 1$ et prouvons le pour $n + 1$.

On remarque que

$$\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y = \frac{2k'}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k'}{2^{n+1}}\right)y$$

ce qui prouve le résultat pour tout k pair dans $\llbracket 0, 2^{n+1} \rrbracket$

Soit $k \in \llbracket 0, 2^{n+1} - 1 \rrbracket$ impair. Ecrivons $k = 2k' + 1$ où $k' \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y &= \frac{2k' + 1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k' + 1}{2^{n+1}}\right)y \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y}_{\in C} + \underbrace{\frac{k' + 1}{2^n}x + \left(1 - \frac{k' + 1}{2^n}\right)y}_{\in C} \right] \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

Soit $\lambda \in [0, 1]$. La suite $\frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}$ converge vers λ , de sorte que la suite des

$$\frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}x + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}\right)y$$

est une suite d'éléments de C qui converge vers $\lambda x + (1 - \lambda)y$. Comme C est fermé, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Ceci étant vrai pour tout x, y, λ , C est convexe.

Dans le cas où C n'est pas fermé, \mathbb{Q} fournit un contre-exemple évident à la réciproque.

Exercice 4.8

Soient A et B deux parties d'un evn E .
Montrer que $\text{co } A + \text{co } B = \text{co}(A + B)$.

\supset On montre facilement que si C et C' sont deux convexes de E , $C + C'$ est convexe. $\text{co } A$ et $\text{co } B$ étant convexes, $\text{co } A + \text{co } B$ est convexe. Par ailleurs, $A \subset \text{co } A$ et $B \subset \text{co } B$ donc $A + B \subset \text{co } A + \text{co } B$.
 $\text{co } A + \text{co } B$ est donc un convexe contenant $A + B$, donc $\text{co}(A + B) \subset \text{co } A + \text{co } B$.

\subset Soit $a + b \in \text{co } A + \text{co } B$. Il existe n et $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $a_i \in A$, $b_j \in B$ tels que $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, $b = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$.

Pour $1 \leq j \leq p$ on pose $c_j = b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i + b_j) \in \text{co}(A + B)$.

$$\text{Alors } \underbrace{\sum_{j=1}^p \beta_j c_j}_{\in \text{co}(\text{co}(A+B))} = \sum_{j=1}^p \beta_j (b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = a + b$$

Comme $\text{co}(A+B)$ est convexe, $\text{co}(\text{co}(A+B)) = \text{co}(A+B)$, donc $a+b \in \text{co}(A+B)$.

Exercice 4.9

On dit qu'un point $x \in A$ est un point exposé de A s'il existe un hyperplan d'appui H à A tel que $H \cap A = \{x\}$.

On note $\exp A$ l'ensemble des points exposés de A .

1. Montrer que si C est convexe, on a $\exp C \subset \text{ext } C$.
2. Donner un exemple de convexe C pour lequel $\exp C \subsetneq \text{ext } C$.
3. Donner un exemple dans \mathbb{R}^3 qui vérifie $\exp C \subsetneq \text{ext } C \subsetneq \overline{\exp C}$

1. Soit C un convexe. On rappelle que $\text{ext } C$ désigne l'ensemble des points extrémaux de C .

Soit $x^* \in \exp C$. Soit H l'hyperplan d'appui à C tel que $H \cap C = \{x^*\}$. Il existe $\ell \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue non-triviale et un réel α tels que $H = \{x \in E \mid \ell(x) = \alpha\}$. On suppose sans perte de généralité que $C \subset H^+ = \{x \in E \mid \ell(x) \geq \alpha\}$.

Comme $x^* \in H$, on a $\ell(x^*) = \alpha$. Si $x \in C$ est tel que $\ell(x) = \alpha$, alors $x \in C \cap H$ et donc $x = x^*$.

Si $x \in C$ et $x \neq x^*$ on a donc $\ell(x) > \alpha$.

Supposons par l'absurde que $x^* \notin \text{ext } C$. On dispose alors de $a, b \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $x^* = (1 - \lambda)a + \lambda b$.

Alors $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b)$.

Comme $\lambda \in]0, 1[$, $(1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b) > \min(\ell(a), \ell(b))$. Comme $a \neq x^*$ et $b \neq x^*$, $\min(\ell(a), \ell(b)) > \alpha$.

Donc $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b) > \alpha$ ce qui contredit $\ell(x^*) = \alpha$.

2. Dans \mathbb{R}^2 on considère l'ensemble A formé d'un demi arc de cercle au dessous duquel on colle une sorte de carré, comme sur la figure ci dessous.

Formellement $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\} \cup \{(-1, y) \mid y \in [0, -2]\} \cup \{(1, y) \mid y \in [0, -2]\} \cup \{(x, -2) \mid x \in [-1, 1]\}$. Le seul hyperplan d'appui contenant B est la droite $x = 1$ qui contient aussi $\{(1, y) \mid y \in [0, -2]\}$. Donc B n'est pas exposé.

Pourtant B est extrémal.

3. ?



Exercice 4.10

Soit C un convexe compact de \mathbb{R}^n .

1. Pour $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on considère $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\langle a, x \rangle$. Montrer que φ admet un maximum sur C atteint en un point x_0 .
2. Soit $H_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \langle a, x_0 \rangle\}$. Montrer que $H_a \cap C$ est un convexe non vide.

1. φ est continue sur \mathbb{R}^n (car linéaire à partir d'un espace de dimension finie), donc elle admet un maximum sur le compact C .

2. H_a contient x_0 . Montrons que H_a est convexe. Soit $x, y \in H_a$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors $\langle a, \lambda x + (1-\lambda)y \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + (1-\lambda) \langle a, y \rangle = \lambda \langle a, x_0 \rangle + (1-\lambda) \langle a, x_0 \rangle = \langle a, x_0 \rangle$ donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in H_a$ et H_a est convexe.

$H_a \cap C$ est donc convexe comme intersection de deux convexes et non vide car il contient x_0 .

Exercice 4.11

Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H .

1. On considère $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (d(x, C))^2$. Montrer que f est différentiable en tout point et calculer la différentielle de f en un point x de H . (On considérera le projecteur P de meilleure approximation sur C).
2. Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle f, x \rangle$ où $f \in H$ et $A \in \mathcal{L}_c(H, H)$ auto-adjointe. Déterminer le gradient de φ en x .

1. On rappelle que la projection sur un convexe fermé d'un Hilbert est unique

et on notera $p_C(x)$ le projeté de x sur C . On rappelle que p_C est 1-lipschitzienne.

Soit $x \in H$ fixé et $h \in H$. On a le développement

$$\begin{aligned} d(x+h, C)^2 &= \|x+h - p_C(x+h)\|^2 \\ &= \|x - p_C(x) + h + p_C(x) - p_C(x+h)\|^2 \\ &= d(x, C)^2 + 2\langle x - p_C(x), h \rangle + 2\langle x - p_C(x), p_C(x) - p_C(x+h) \rangle + \|p_C(x) - p_C(x+h) + h\|^2 \\ &= d(x, C)^2 + 2\langle x - p_C(x), h \rangle + 2\langle p_C(x) - p_C(x+h), h + x - p_C(x) \rangle + \|p_C(x) - p_C(x+h)\|^2 + \|h\|^2 \end{aligned}$$

Le candidat naturel pour la différentielle de f en x est donc $h \mapsto 2\langle x - p_C(x), h \rangle$. Sachant que p_C est 1-lipschitzienne il est facile de montrer que $\|p_C(x) - p_C(x+h)\|^2 + \|h\|^2 = o(\|h\|)$.

Cependant il est **remarquablement difficile** de prouver par des moyens élémentaires que $\langle p_C(x) - p_C(x+h), h + x - p_C(x) \rangle = o(\|h\|)$. (On peut montrer facilement que c'est un $O(\|h\|)$ mais c'est insuffisant).

On adopte une approche différente :

Lemme : Soit $f, g_1, g_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions différentiables en $x \in H$ avec U un voisinage de x et

$$\forall y \in U, g_1(y) \leq f(y) \leq g_2(y)$$

et $g_1(x) = g_2(x)$.

Alors $dg_1(x) = dg_2(x)$, f est différentiable en x et $df(x) = dg_1(x)$.

Preuve : Pour $h \in U - x$ on a $g_1(x+h) \leq g_2(x+h)$. On dispose de deux fonctions ε_1 et $\varepsilon_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$ nulles et continues en 0 telles que

$$g_1(x) + dg_1(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \leq g_2(x) + dg_2(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

ie

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) + \|h\|(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)) \geq 0$$

Pour $t > 0$ on remplace h par th et on obtient

$$t(dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h)) + t\|h\|(\varepsilon_2(th) - \varepsilon_1(th)) \geq 0$$

En simplifiant par t puis en faisant $t \rightarrow 0$,

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) \geq 0$$

En remplaçant h par $-h$ dans la dernière inégalité,

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) \leq 0$$

donc $dg_2(x)(h) = dg_1(x)(h)$, ceci étant vrai pour tout $h \in H$, donc $dg_2(x) = dg_1(x)$.

Posons $dg(x) := dg_1(x)$ et réécrivons l'inégalité $g_1(x+h) \leq f(x+h) \leq g_2(x+h)$:

$$f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \leq f(x+h) \leq f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

donc

$$\varepsilon_1(h) \leq \frac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \leq \varepsilon_2(h)$$

Par encadrement, on a pour $\|h\| \rightarrow 0$, $\frac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$.

□

Revenons au problème. Soit $x \in H \setminus C$ fixé. Posons $x^* = p_C(x)$, $e = \frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}$ et \mathcal{H} l'hyperplan d'appui en x^* de normale e , de sorte que

$$\mathcal{H} = \{y \in H, \langle y, e \rangle = \langle x^*, e \rangle\}$$

Lemme : On note $p_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale sur \mathcal{H} (qui est un sev fermé). Soit $y \in \mathcal{H}^+$ et $z \in \mathcal{H}^-$. Alors $\|y - p_{\mathcal{H}}(y)\| \leq \|y - y'\|$.

Preuve : C'est géométriquement évident (faire un dessin). Formellement, comme $\|y - y'\|^2 = \|y - p_{\mathcal{H}}(y) + p_{\mathcal{H}}(y) - y'\|^2$

$$= \|y - p_{\mathcal{H}}(y)\|^2 + \|p_{\mathcal{H}}(y) - y'\|^2 - 2\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), y' - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle$$

il suffit de prouver que $\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), y' - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle \leq 0$ (ce qui est encore une évidence géométrique).

Comme $y - p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}^\perp$ (cf théorème de la projection orthogonale sur un sev fermé), et que $\mathcal{H}^\perp = \text{Vect}(e)$ on peut écrire

$$y - p_{\mathcal{H}}(y) = \lambda e \text{ d'où } \langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle = \lambda \|e\|^2 = \lambda$$

$$= \langle y, e \rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle$$

$$\geq \langle x^*, e \rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle \quad \text{car } y \in \mathcal{H}^+$$

$$= \langle x^*, e \rangle - \langle x^*, e \rangle \quad \text{car } p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}$$

$$= 0$$

donc $\lambda \geq 0$.

$$\text{Finalement, } \langle y - p_{\mathcal{H}}(y), y' - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle = \lambda \langle e, y' - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle$$

$$= \lambda (\langle e, y' \rangle - \langle e, p_{\mathcal{H}}(y) \rangle)$$

$$\leq \lambda (\langle e, x^* \rangle - \langle e, x^* \rangle) \quad \text{car } \lambda \geq 0, \quad z \in \mathcal{H}^-, \quad p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}$$

$$= 0$$

comme souhaité. □

Dans notre problème on dispose d'un voisinage de x noté U tel que $U \subset \mathcal{H}^+$. Pour $y \in U$, comme $p_C(y) \in C \subset \mathcal{H}^-$, le lemme donne $(d(y, \mathcal{H}))^2 \leq (d(y, C))^2$. On a aussi la majoration triviale $(d(y, C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$. En bref

$$(d(y, \mathcal{H}))^2 \leq (d(y, C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$$

Par ailleurs $(d(y, \mathcal{H}))^2$ se réécrit simplement

$$\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle^2 = \langle y - x^*, e \rangle^2 = \langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \rangle^2$$

D'où l'encadrement

$$\underbrace{\langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \rangle^2}_{:=g_1(y)} \leq (d(y, C))^2 \leq \underbrace{\|y - x^*\|^2}_{:=g_2(y)}$$

On a bien $g_1(x) = g_2(x)$, g_1 différentiable en x et g_2 différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle h, x - x^* \rangle$ (application linéaire continue par Cauchy-Schwarz). D'après le lemme, f est différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle h, x - x^* \rangle$.

Il reste à traiter le cas où $x \in C$. Il suffit de noter qu'alors

$$(d(x + h, C))^2 \leq \|(x + h) - x\|^2 = \|h\|^2$$

Donc f est différentiable de différentielle nulle.

Exercice 4.12

Soit C un fermé de \mathbb{R}^n tel que $\forall x, y \in C,]x, y[\cap C \neq \emptyset$.
Montrer que C est convexe.

Supposons par l'absurde que C n'est pas convexe : on dispose alors de $x, y \in C$ et $\alpha \in]0, 1[$ tel que $(1 - \alpha)x + \alpha y \notin C$.

Considérons $\mu = \inf\{\lambda \geq \alpha \mid (1 - \lambda)x + \lambda y \in C\}$. On dispose de λ_n une suite qui décroît vers μ avec pour tout n , $(1 - \lambda_n)x + \lambda_n y \in C$ et $\lambda_n \geq \alpha$. En passant à la limite, comme C est fermé, on a $(1 - \mu)x + \mu y \in C$ et $\mu \geq \alpha$. Comme $(1 - \alpha)x + \alpha y \notin C$, l'inégalité est stricte : $\mu > \alpha$.

De même, on pose $\nu = \sup\{\lambda \leq \alpha \mid (1 - \lambda)x + \lambda y \in C\}$. On a encore $(1 - \nu)x + \nu y \in C$ et $\nu < \alpha$.

Posons $a = (1 - \mu)x + \mu y$ et $b = (1 - \nu)x + \nu y$. Alors $]a, b[\cap C \neq \emptyset$: on dispose de $\gamma \in]0, 1[$ tel que $(1 - \gamma)b + \gamma a \in C$.

Or $(1 - \gamma)b + \gamma a = (1 - [(1 - \gamma)\nu + \gamma\mu])x + [(1 - \gamma)\nu + \gamma\mu]y$ avec

$$(1 - \gamma)\nu + \gamma\mu \in]\nu, \mu[$$

Ceci contredit la définition de ν , absurde.