TD d'optimisation
ENSAE
1A

Gabriel Romon

Version du 17 janvier 2018 à 22:57

1. Différentielle

Exercice 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est C^1.
2. Montrer que f est C^2.

1. Les dérivées partielles de f en $(x,y) \neq (0,0)$ sont clairement définies et données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y^3(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
Comme pour tout $h \in \mathbb{R}$, $f(0,h) = f(h,0) = f(0,0) = 0$, les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont clairement continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$. Montrons que ces deux fonctions sont continues en $(0,0)$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $x = 0$ ou $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Dans la suite on supposera donc sans perte de généralité que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^3(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{|y|^3x^4}{(x^2+y^2)^2} + 3\frac{|y|^5x^2}{(x^2+y^2)^2} \leq |y|^3 + 3|y|x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x|^3 + 3|x|y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ par symétrie.
f admet donc des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. f est donc C^1.

2. $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ admettent clairement des dérivées partielles en tout $(x,y) \neq (0,0)$ données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2xy^5\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = \frac{x^2y^2\left(3x^4+14x^2y^2+3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

et par symétrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^5y\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{x^2y^2\left(3x^4+14x^2y^2+3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

Comme pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = \frac{\partial f}{\partial x}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,h) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = 0$$

Les quatre dérivées partielles sont clairement continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$.
Montrons qu'elles sont continues en $(0,0)$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme précédemment on peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Lemme : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \|(x,y)\|_2^2$
<u>Preuve</u> : Conséquence de l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ avec $a = |x|$ et $b = |y|$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| &= \left|\frac{2xy^5\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right| \leq \frac{2|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^3} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{2y^2(|xy|)^3}{\|(x,y)\|_2^6} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&\leq \underbrace{\frac{2y^2\|(x,y)\|_2^6}{\|(x,y)\|_2^6}}_{\text{Lemme}} + 6|x||y| \\
&= 2y^2 + 6|x||y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

La symétrie permet de conclure $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq 2x^2 + 6|x||y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
et une technique similaire donne

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y)\right| \leq 3y^2 + 14\|(x,y)\|_2^2 + 3x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. Donc f est C^2.

Exercice 1.2

> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
> Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

f admet clairement des dérivées partielles en tout $(x,y) \neq (0,0)$ données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} + \log\left(x^2+y^2\right)\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\left(x^2+y^2\right)^{x-1}$.
Par composition et multiplication de fonction continues, ces dérivées partielles sont continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$.
f est donc différentiable en tout $(x,y) \neq (0,0)$ et son gradient en (x,y) est

$$\left(\left(x^2+y^2\right)^x \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} + \log\left(x^2+y^2\right)\right), 2xy\left(x^2+y^2\right)^{x-1}\right)$$

Exercice 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Calculer la différentielle de f.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé et $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,
$f((x, y) + (h_1, h_2)) = f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ yh_1 + xh_2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}^T$
Le candidat pour la différentielle de f en (x, y) est donc $(h_1, h_2) \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right]^T$.
Il suffit de prouver que $\dfrac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \xrightarrow[\|(h_1,h_2)\| \to 0]{} 0$
Le choix de la norme n'importe pas étant donné l'équivalence des normes en dimension finie. On choisit par exemple la norme 2.
$\dfrac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} = \dfrac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |h_1| \to 0$
en minorant trivialement le dénominateur par $\sqrt{h_2^2}$.

Exercice 1.4

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), X \mapsto X^T X$. Calculer la différentielle de f.

Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X + H) = f(X) + X^T H + H^T X + H^T H$.
Le candidat pour la différentielle de f en X est donc $H \mapsto X^T H + H^T X$.
Il suffit de prouver que $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$.
Par équivalence des normes en dimension finie, on choisit n'importe quelle norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{R})$ (celle qui dérive de la norme 2 par exemple). Alors $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H^T\|\|H\|}{\|H\|} = \|H^T\|$. La transposée étant linéaire, elle est continue en 0, donc $\|H^T\| \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$ ce qui achève la preuve.

Exercice 1.5

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (f(x^2y, z^2x), g(x^y, zx))$
Calculer, si elle existe, la différentielle de f.

Posons $\gamma : (x, y, z) \mapsto (x^2y, z^2x)$ et $\delta : (x, y, z) \mapsto (x^y, zx)$.
γ et f sont différentiables en tous points de leurs domaines, donc $f \circ \gamma$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$ avec

$$d(f \circ \gamma)(x, y, z) = df(\gamma(x, y, z)) \circ d\gamma(x, y, z)$$

On calcule $\mathrm{Jac}(\gamma)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}$. En passant des applications linéaires aux matrices,

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}(f\circ\gamma)(x,y,z) &= \mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \mathrm{Jac}(\gamma)(x,y,z) \\ &= \mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

δ est définie et différentiable en (x,y,z) dès lors que $x>0$. On calcule de même $\mathrm{Jac}(\delta)(x,y,z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout (x,y,z) avec $x>0$,

$$\mathrm{Jac}(g\circ\delta)(x,y,z) = \mathrm{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

La différentielle de $f\circ\gamma$ en (x,y,z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T$$

et celle de $g\circ\delta$ en (x,y,z) avec $x>0$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\mathrm{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T$$

Soit (x,y,z) fixé avec $x>0$ et $h=(h_1,h_2,h_3)$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) &= \left(f\circ\gamma\left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix}\right), g\circ\delta\left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= (f\circ\gamma\left((x,y,z)\right) + d(f\circ\gamma)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right) + ||h||\varepsilon_1(||h||), \\ & g\circ\delta\left((x,y,z)\right) + d(g\circ\delta)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right) + ||h||\varepsilon_2(||h||)) \end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions telles que $\varepsilon_1(||h||) \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(||h||) \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$

$$\begin{aligned} &= \varphi((x,y,z)) + \left(d(f\circ\gamma)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right), d(g\circ\delta)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right)\right) \\ &\quad + ||h||\underbrace{\left(\varepsilon_1(||h||), \varepsilon_2(||h||)\right)}_{\xrightarrow[||h||\to 0]{} 0} \end{aligned}$$

La différentielle de φ en (x,y,z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left(\left[\mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T, \left[\mathrm{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T\right)$$

Exercice 1.6

Soit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $\varphi : E \to E, f \mapsto f^3$.
Montrer que φ est différentiable.

On n'est plus dans le cadre des espaces de dimension finie et la notion de différentielle est celle de Fréchet.
Pour $f \in E$ et $h \in E$, $\varphi(f+h) = \varphi(f) + 3f^2h + 3fh^2 + h^3$.
Le candidat pour la différentielle de φ en f est donc $h \mapsto 3f^2h$.
Il suffit de prouver que $h \mapsto 3f^2h$ est continue en 0 et que $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$.
Lemme : Pour $f,g \in E$, $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$.
Preuve : Par continuité de $|fg|$ sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\|fg\| = |f(c)g(c)| \leq |f(c)|\|g\| \leq \|f\|\|g\|$$

D'après le lemme, $\|3f^2h\| \leq 3\|f^2\|\|h\|$ ce qui prouve la continuité en 0.
On a $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\frac{\|fh^2\|}{\|h\|} + \frac{\|h^3\|}{\|h\|}$.
Le lemme donne $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\|f\|\|h\| + \|h\| \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$.

Exercice 1.7

Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec g'' bornée par $M \geq 0$.
Soit $I : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 (g \circ f)(t)dt$

1. Montrer que I est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que I est C^1.
3. Qu'en est-il si g est seulement C^1 ?

1. Pour $f \in E$ fixé et $h \in E$, $t \in [0,1]$, la formule de Taylor-Lagrange donne

$$g(f(t)+h(t)) = g(f(t)) + h(t)g'(f(t)) + \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$$

pour $\xi_{h,t} \in \mathbb{R}$ de sorte que $t \mapsto \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$ est continue sur $[0,1]$ et

$$I(f+h) = I(f) + \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt + \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt$$

Le candidat pour la différentielle de I en f est $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$.
Il suffit de prouver que $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$ est continue en 0 et

$$\frac{\left|\int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt\right|}{\|h\|} \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$$

On a $\left|\int_0^1 h(t)g'(f(t))dt\right| \leq \|h\| \underbrace{\int_0^1 |g'(f(t))|dt}_{\text{indépendant de } h}$ ce qui prouve la continuité en 0.

Comme $\left|\frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})\right| \leq \frac{M}{2}h(t)^2$,

$$\frac{\left|\int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt\right|}{\|h\|} \leq \frac{M}{2}\frac{\int_0^1 h(t)^2 dt}{\|h\|} \leq \frac{M}{2}\frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \frac{M}{2}\|h\| \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$$

2. Sur $\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ on institue la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{op}$ dérivant de la norme infinie.

Il s'agit de montrer la continuité de $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt \end{cases} \end{cases}$

Soit $f_0 \in E$ et $h \in E$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)| &= \left|\int_0^1 h(t)(g'(f(t)) - g'(f_0(t)))\right| \\ &\leq \int_0^1 |h(t)|M|f(t) - f_0(t)|dt \quad g'' \text{ est bornée par } M \text{ donc } g' \text{ est } M\text{-lipschitzienne} \\ &\leq M\|f - f_0\| \int_0^1 |h(t)|dt \\ &\leq M\|f - f_0\|\|h\| \end{aligned}$$

Donc $\frac{|\varphi(f)(h)-\varphi(f_0)(h)|}{\|h\|}$ est bornée par $M\|f - f_0\|$, d'où

$$\|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} = \sup_h \frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|} \leq M\|f - f_0\|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Avec $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$, $\|f - f_0\| \leq \delta \implies \|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} \leq \varepsilon$
ce qui prouve la continuité de φ en f_0.
3. Mon intuition me laisse penser que si g est deux fois dérivable sans être bornée (donc C^1), I n'est pas forcément différentiable. Obtenir un contre-exemple n'est pas évident, car I est tout de même continue (par uniforme continuité de g sur un compact).

Exercice 1.8

Soient E et F des evn avec F complet. Soit $D \subset E$ un ouvert.
On pose $B^2 = \{f : D \to F /\ f\ C^2, f \text{ bornée, } df \text{ bornée, et } d^2 f \text{ bornée}\}$ et

$$\|f\| = \sup_{x\in D}(\|f(x)\| + \|df(x)\| + \|d^2 f(x)\|)$$

Montrer que B^2 est complet.

Etant donné X un ensemble et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un evn, on note $B(X,Y)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans Y. On rappelle que si Y est complet, alors $B(X,Y)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,Y}$ définie par $\|f\|_{\infty,Y} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$.

On notera $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui dérive de $\|\cdot\|_F$. On rappelle que $(\mathcal{L}_c(E,F), \|\cdot\|_{op})$ est un Banach.

On notera $\|\cdot\|_{op'}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ qui dérive de $\|\cdot\|_{op}$, de sorte que $(\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F)), \|\cdot\|_{op'})$ est un Banach.

On rappelle que si $f \in B^2$ et $a \in D$, $df(a) \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $d^2f(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$. La norme définie dans l'énoncé est donc à prendre au sens suivant :

$$\|f\| = \sup_{x\in D} (\|f(x)\|_F + \|df(x)\|_{op} + \|d^2f(x)\|_{op'})$$

On prouve facilement les faits suivants : pour $f \in B^2$,
$\|f\| \geq \|f\|_{\infty,F}$
$\|f\| \geq \|df\|_{\infty,op}$
$\|f\| \geq \|d^2f\|_{\infty,op'}$

Soit (f_n) de Cauchy dans B^2 pour $\|\cdot\|$.
• D'après la remarque précédente, (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,F}$ dans $B(D,F)$ qui est complet, donc (f_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty,F}$ vers un $f \in B(D,F)$.
• D'après la remarque précédente, (df_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,op}$ dans $B(D, \mathcal{L}_c(E,F))$ qui est complet, donc (df_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty,op}$ vers un $\varphi \in B(D, \mathcal{L}_c(E,F))$.
• En tant que limites uniformes de fonctions continues, f et φ sont continues.
• Montrons que f est différentiable de différentielle φ.
Soit $\epsilon > 0$. Comme (df_n) est de Cauchy, il existe N tel que $n,m \geq N \implies \|df_n - df_m\|_{\infty,op} \leq \epsilon$, donc pour tout $x \in D$, $\|df_n(x) - df_m(x)\|_{op} \leq \epsilon$ soit encore $\|d(f_n - f_m)(x)\|_{op} \leq \epsilon$.
<u>Lemme</u> : Soient E et F des Banach, D un ouvert de E et $a, b \in D$. Si $f : E \to F$ est différentiable sur D et $[a,b] \subset D$,

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \|b-a\|_E \sup_{x\in[a,b]} \|df(x)\|_{op}$$

Preuve : proposition 3.3.1 dans *Calcul Différentiel* de E.Cartan.

Fixons $a \in D$. Comme D est ouvert, on dispose de $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset D$. Soit $n,m \geq N$. En appliquant le lemme à $f_n - f_m$ (dont la différentielle est bornée par ϵ d'après ce qui précède), on a pour $x \in B(a,r)$,

$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\|_F \leq \|x-a\|_E \cdot \epsilon$$

Posons $\phi_n : B(a,r) \setminus \{a\} \to F, x \mapsto \dfrac{f_n(x) - f_n(a) - df_n(a)(x-a)}{\|x-a\|}$.
L'inégalité précédente devient

$$\left\| \phi_n(x) + \frac{df_n(a)(x-a) - df_m(a)(x-a)}{\|x-a\|} - \phi_m(x) \right\|_F \leq \epsilon$$

et par inégalité triangulaire renversée,

$$\|\phi_n(x) - \phi_m(x)\|_F \leq \epsilon + \left\| \frac{df_n(a)(x-a) - df_m(a)(x-a)}{\|x-a\|} \right\|_F$$

Or $\left\| \dfrac{df_n(a)(x-a) - df_m(a)(x-a)}{\|x-a\|} \right\|_F \leq \|df_n(a) - df_m(a)\|_{op} \leq \epsilon$,
d'où pour $x \in B(a,r) \setminus \{a\}$ et $n, m \geq N$ on a $\|\phi_n(x) - \phi_m(x)\|_F \leq 2\epsilon$. D'après le critère uniforme de Cauchy, on déduit que ϕ_n converge uniformément sur $B(a,r) \setminus \{a\}$.
Déterminons la limite simple de ϕ_n (qui coincide nécessairement avec sa limite uniforme). On sait déjà que f_n converge simplement vers f, donc il reste à déterminer la limite simple de $x \mapsto df_n(a)(x-a)$. Il s'agit bien sûr de $x \mapsto \varphi(a)(x-a)$. En effet

$$\begin{aligned} \|\varphi(a)(x-a) - df_n(a)(x-a)\| &\leq \|\varphi(a) - df_n(a)\|_{op} \|x-a\|_E \\ &\leq \|\varphi - df_n\|_{\infty,op} \|x-a\|_E \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Donc ϕ_n converge uniformément sur $B(a,r) \setminus \{a\}$ vers $\psi : x \mapsto \frac{f(x) - f(a) - \varphi(a)(x-a)}{\|x-a\|}$.
Or a est un point adhérent à $B(a,r) \setminus \{a\}$ et pour tout n, $\lim\limits_{x \to a} \phi_x(a) = 0$ (définition de la différentielle). Le théorème de la double limite s'applique :

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = 0$$

qui signifie que f est différentiable en a de différentielle $\varphi(a)$. Ceci est vrai pour tout a, donc φ est la différentielle de f.

Preuve plus courte avec l'intégrale pour les fonctions à valeurs dans un Banach :
Soit $a \in D$. Pour $h \in D$, et n quelconque,

$$f_n(a+h) - f_n(a) = \int_0^1 df_n(a+th)(h)dt$$

La convergence des df_n vers φ étant uniforme, on a en passant à la limite

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \varphi(a+th)(h)dt$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} &= \frac{\|\int_0^1 \varphi(a+th)(h)-\varphi(a)(h)dt\|_F}{\|h\|_E}\\ &\leq \frac{\int_0^1 \|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op}\|h\|_E dt}{\|h\|_E}\\ &\leq \int_0^1 \|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op}dt\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est continue on dispose de $\delta > 0$ tel que $\|x\|_F \leq \delta \implies \|\varphi(a+x)-\varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$. Pour $\|h\| \leq \varepsilon$ et $t \in [0,1]$ on obtient

$$\|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$$

donc $\dfrac{\|f(a+h)-f(a)-\varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} \leq \varepsilon$ dès que $\|h\| \leq \delta$.
f est donc différentiable sur D et sa différentielle est φ, qui est continue d'après la remarque précédente.
• Un raisonnement identique en remplaçant f_n par df_n montre que df est différentiable sur D, on note d^2f sa différentielle qui est continue.
• f est donc C^2, bornée, de différentielles bornées. Il reste à prouver que (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.
Etant donné $\varepsilon > 0$, on dispose de N, N', N'' tels que

$$\begin{array}{lll}\forall x \in D,\ n \geq N & \implies & \|f(x)-f_n(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}\\ \qquad\quad n \geq N' & \implies & \|df(x)-df_n(x)\|_{op} \leq \frac{\varepsilon}{3}\\ \qquad\quad n \geq N'' & \implies & \|d^2f(x)-df_n^2(x)\|_{op'} \leq \frac{\varepsilon}{3}\end{array}$$

Pour $n \geq \max(N, N', N'')$,

$$\|f(x)-f_n(x)\|_F + \|df(x)-df_n(x)\|_{op} + \|d^2f(x)-df_n^2(x)\|_{op'} \leq \varepsilon$$

et ceci pour tout $x \in D$, donc $\|f-f_n\| \leq \varepsilon$. Ceci achève la preuve.

Exercice 1.9

Soit E un $\mathbb{R}$-evn, $D \subset E$ un ouvert et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$. On suppose $\overline{D}$ compact, f continue, nulle à la frontière de D et f différentiable sur D.
Montrer qu'il existe $a \in D$ tel que $df(a) = 0$.

f est continue sur le compact $\overline{D}$ donc elle admet un maximum M et un maximum m atteints respectivement en α et $\beta \in \overline{D}$.
Si $m = M = 0$, f est nulle sur D donc pour tout $x \in D$, $df(x) = 0$.
Sinon, $m < 0$ ou $M > 0$. On suppose par exemple $M > 0$. Comme f est nulle sur $\overline{D} \setminus \mathring{D} = \overline{D} \setminus D$, on a $\beta \in D$. En β, f admet un maximum global (donc local), d'où $df(\beta) = 0$.

Exercice 1.10

Soient $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f(x,y,z) = (x + \varphi(yz), y + \psi(\frac{x}{z}))$.
Calculer la différentielle de f.

La démarche est identique à celle de l'exercice 1.5. En posant $f_1 : (x,y,z) \mapsto x + \varphi(yz)$ et $f_2 : (x,y,z) \mapsto y + \psi(\frac{x}{z})$, il suffit de démontrer que f_1 et f_2 sont différentiables en (x,y,z) pour obtenir la différentielle de f en (x,y,z) :

$$df(x,y,z) : (h_1,h_2,h_3) \mapsto (df_1(x,y,z)(h_1,h_2,h_3), df_2(x,y,z)(h_1,h_2,h_3))$$

On calcule

$$\text{Jac}(f_1)(x,y,z) = (1, \varphi'(yz)z, \varphi'(yz)y)$$

et

$$\text{Jac}(f_2)(x,y,z) = \left(\psi(\frac{x}{z})\frac{1}{z}, 1, -\psi(\frac{x}{z})\frac{x}{z^2}\right)$$

Exercice 1.11

1. Soient E, F, G, H des $\mathbb{R}$-evn. B est une forme bilinéaire continue de $F \times G$ dans H, $f : E \to F$ et $g : E \to G$.
   On suppose que f et g sont différentiables en $a \in E$. Montrer que $C : E \to H, x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a.
2. Soit E un espace vectoriel euclidien.
   (a) Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.
   (b) Déterminer la différentielle de $\psi : x \mapsto \|x\|^2$.
   (c) Déterminer et interpréter la différentielle de φ.

1. Soit $a \in E$. Pour $h \in E$,

$$\begin{aligned} C(a+h) = & C(a) + B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a)) \\ & + \\ & B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) \end{aligned}$$

Le candidat pour la différentielle en a de f est $h \mapsto B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a))$.
Il suffit de prouver que

$$B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = o(\|h\|)$$

B étant bilinéaire continue, il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \|B(x,y)\| \leq K\|x\|\|y\|$$

On traite chaque terme de la somme séparément :
- $B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(f(a), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\to 0}$
- $\|B(df(a)(h), dg(a)(h))\| \leq K \|df(a)\|_{op} \|df(b)\|_{op} \|h\|^2$
- $B(df(a)(h), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(df(a)(h), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\to 0}$
- $B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h))}_{\to 0}$

La somme est bien $o(\|h\|)$.

2. a) $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est bilinéaire continue (d'après Cauchy-Schwarz). La question 1. implique que $\psi : x \mapsto \langle x, x \rangle$ est différentiable en tout $a \in E$. La fonction $\delta : x \mapsto \frac{1}{x}$ est différentiable en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc $\delta \circ \psi$ est différentiable en tout $a \in E \setminus \{0\}$.
$\pi : \mathbb{R} \times E \to E,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire continue, et d'après 1., $x \mapsto \pi(\delta \circ \psi(x), x)$ est différentiable en tout $x \in E \setminus \{0\}$.
Ceci s'écrit encore $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

b) Soit $x \in E$. Pour $h \in E$, $\psi(x+h) = \psi(x) + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2$.
La différentielle de ψ en x est donc $h \mapsto 2\langle x, h \rangle$.

c) D'après 1., la différentielle de φ en $x \neq 0$ est donnée par

$$\begin{aligned}
d\varphi(x)(h) &= \pi(\mathrm{Id}(x), d(\delta \circ \psi)(x)(h)) + \pi(d\,\mathrm{Id}(x)(h), \delta \circ \psi(x)) \\
&= x \cdot d\delta(\psi(x))(d\psi(x)(h)) + \frac{h}{\|x\|^2} \\
&= x \cdot -\frac{2\langle x, h \rangle}{(\|x\|^2)^2} + \frac{h}{\|x\|^2} \\
&= \frac{h}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, h \rangle x}{\|x\|^4}
\end{aligned}$$

Exercice 1.12

Déterminer toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

C'est un classique que l'on trouve dans n'importe quel livre de prépa.

Exercice 1.13

> En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction $g : (x, y) \mapsto \max(x^2, y)$ est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 > y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = x^2$ sur un voisinage de (x, y). g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto 2xh_1$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 < y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = y$ sur un voisinage de (x, y) g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto h_2$.

En $(0, 0)$: $\dfrac{g(0, \frac{1}{n}) - g(0, 0)}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\dfrac{g(0, -\frac{1}{n}) - g(0, 0)}{-\frac{1}{n}} = 0$ donc g n'admet pas de dérivée partielle selon y en $(0, 0)$ donc g n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x^2 = y$ et $x \neq 0$.

$$\frac{g(x + \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{\frac{1}{n}} = \frac{\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2x$$

$$\frac{g(x - \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{-\frac{1}{n}} = \frac{y - y}{-\frac{1}{n}} = 0 \neq 2x$$

donc g n'admet pas de dérivée partielle selon x en (x, y) donc g n'est pas différentiable en (x, y).

Exercice 1.14

> Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers.
> On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{x^n y^p}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
> Pour quelles valeurs de (n, p) f est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Quelles que soient les valeurs de n et p, f est différentiable en $(x, y) \neq (0, 0)$ par composition. f admet donc des dérivées partielles données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{nx^{n-1}y^p}{x^2 + y^2} - \frac{2x^{n+1}y^p}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{px^n y^{p-1}}{x^2 + y^2} - \frac{2x^n y^{p+1}}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

En $(0, 0)$: comme pour tout $h \in \mathbb{R}, f(0, h) = f(h, 0) = f(0, 0) = 0$, les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

On étudie plusieurs cas selon n et p. Si les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$, f est différentiable en $(0,0)$. Si ce n'est le pas on ne peut a priori rien dire.
On utilise les mêmes techniques de majoration que dans l'exercice 1.

1. Si $n \geq 4$: OK
2. Si $n = 3$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK
   (c) Si $p = 2$: OK
   (d) Si $p = 1$: OK
3. Si $n = 2$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
   (c) Si $p = 2$: OK
   (d) Si $p = 1$: Pour $t \in \mathbb{R}$ non nul,
   $$\frac{f((0,0) + t(1,1)) - f((0,0))}{t} = \frac{1}{2}$$
   f admet donc une dérivée directionnelle selon le vecteur $(1,1)$ qui vaut $\frac{1}{2}$.
   Si f était différentiable en $(0,0)$, son gradient donné par les dérivées partielles serait nul, donc la différentielle en $(0,0)$ serait aussi nulle, donc toutes les dérivées directionnelles seraient aussi nulles, ce qui n'est pas le cas. f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.
4. Si $n = 1$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
   (c) Si $p = 2$: Non par symétrie
   (d) Si $p = 1$: $f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, donc f n'est pas continue en 0, donc pas différentiable en $(0,0)$.

Conclusion : f est différentiable en $(0,0)$ pour tout $n \geq 1$ et $p \geq 1$ exceptés les couples $(n = 2, p = 1), (n = 1, p = 2), (n = 1, p = 1)$.

Exercice 1.15

Soit B dans $M_n(\mathbb{R})$.
Donner la différentielle de $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$

On choisit une norme d'opérateur $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère $V \subset GL_n(\mathbb{R})$ un voisinage de A tel que pour tout $X \in V$, $\|A^{-1}(X - A)\| < 1$. Calculons la différentielle de la fonction $M \to M^{-1}$ en A.
Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, $\|H\| \leq \delta \implies A + H \in V$.
Pour $\|H\| \leq \delta$, $(A + H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$.
Démontrons que $(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^k$. Comme $\|H\| \leq \delta$, $\|A^{-1}H\| < 1$ donc la série en question est absolument convergente, donc convergente. On a pour $N \geq 1$,

$$(I_n + A^{-1}H)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(A^{-1}H)^k = (-1)^N \underbrace{(A^{-1}H)^{N+1}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{}0} + I_n$$

En passant à la limite sur N on a l'égalité voulue.
Par conséquent

$$(A+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1}$$

La candidat pour la différentielle de l'inverse en A est donc $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
Il reste à remarquer que

$$\frac{\|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|}\|H\| \to 0$$

La fonction $A \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ étant linéaire, la différentielle de φ en A est donnée par $H \mapsto -\mathrm{Tr}(A^{-1}HA^{-1}B)$

Exercice 1.16

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R}), x \mapsto A(x)$
Calculer la différentielle de $x \mapsto \ln\det A(x)$

Il est classique (cf Gourdon Analyse ou Cassini Algèbre 2) que la différentielle du déterminant en A est donnée par $H \mapsto \mathrm{Tr}((\mathrm{com}\,A)^TH)$ qui devient $H \mapsto \det A\,\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$ lorsque A est inversible.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
d(\ln \circ \det \circ A)(a)(h) &= d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(h)) \\
&= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(1)) \\
&= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(\frac{dA}{dx}(a)) \\
&= h \cdot d\ln(\det A(a)) \left(d\det(A(a))(\frac{dA}{dx}(a)) \right) \\
&= h \cdot d\ln(\det A(a)) \left(\det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) \right) \\
&= h \det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) d\ln(\det A(a))(1) \\
&= h \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)
\end{aligned}$$

La différentielle cherchée en a est donc $h \mapsto h \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)$

Exercice 1.17

> Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 1. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto f(xy) + g(\frac{x}{y})$ est différentiable en $(1, 1)$ et calculer sa différentielle en $(1, 1)$.

Soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ et $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.
On dispose de U un voisinage de $(1, 1)$ et V un voisinage de 1 tel que $\alpha(U) \subset V$ et $\beta(U) \subset V$. $\alpha : U \to V$ et $\beta : U \to V$ sont différentiables en $(1, 1)$.
Le théorème de composition s'applique : $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ sont différentiables en $(1, 1)$, donc φ aussi, avec

$$\begin{aligned}
d\varphi((1, 1))(h_1, h_2) &= d(f \circ \alpha)(1, 1)(h_1, h_2) + d(f \circ \beta)(1, 1)(h_1, h_2) \\
&= (yh_1 + xh_2)f'(1) + (-\frac{y}{x^2}h_1 + \frac{h_2}{x})g'(1)
\end{aligned}$$

Exercice 1.18

> Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ qui vérifient $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$ où $Z(x, y) = f(\frac{y}{x})$

?

Exercice 1.19

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ de classe C^2 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(tx) = t^2 f(x)$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $d^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$.

On rappelle que $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ s'identifie à l'espace des applications bilinéaires $\mathcal{L}_c(E \times E, F)$.
L'énoncé demande en réalité de montrer que pour tout $x \in E$,

$$d^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

Soit $x \in E$ fixé.
Posons $\alpha : \mathbb{R} \to E, t \mapsto tx$ et $\beta : \mathbb{R} \to F, t \mapsto t^2 f(x)$. $\mathbb{R}$ étant de dimension finie, toute application linéaire de $\mathbb{R}$ dans E est continue. α est clairement différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto hx$.
Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, $\beta(t+h) = \beta(t) + 2thf(x) + h^2 f(x)$ avec

$$\frac{\|h^2 f(x)\|_F}{|h|} = |h| \|f(x)\|_F \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$$

Donc β est différentiable en t de différentielle $h \mapsto 2thf(x)$

En différentiant l'égalité $f \circ \alpha = \beta$ en $t \in \mathbb{R}$ on a pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hdf(tx)(x) = 2thf(x)$ et donc

$$df(tx)(x) = 2tf(x) \quad (*)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Soit $\Pi : \mathcal{L}_c(E,F) \to F, L \mapsto L(x)$. Pour $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $H \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $\Pi(L+H) = (L+H)(x) = \Pi(x) + H(x)$.
Le candidat pour la différentielle en L est donc $H \mapsto H(x)$. Il suffit de montrer que cette application est continue.
Soit $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui dérive naturellement de $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
Alors

$$\frac{\|H(x)\|_F}{\|H\|_{op}} \leq \frac{\|H\|_{op}\|x\|_E}{\|H\|_{op}} \leq \|x\|_E$$

D'où la continuité.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to F, t \mapsto 2tf(x)$. On montre facilement que γ est différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto 2hf(x)$.

L'égalité $(*)$ se réécrit $\Pi \circ df \circ \alpha = \gamma$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(\Pi \circ df \circ \alpha)(t)(h) &= d\Pi(df \circ \alpha(t))(d(df \circ \alpha)(t)(h)) \\ &= d(df \circ \alpha)(t)(h)(x) \\ &= d(df)(tx)(hx)(x) \\ &= hd^2 f(tx)(x)(x) \end{aligned}$$

On a donc pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hd^2 f(tx)(x)(x) = 2hf(x)$, donc

$$d^2 f(tx)(x)(x) = 2f(x)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. En $t = 0$ on a

$$d^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

comme voulu.

2. Applications de la notion de différentielle

3. Equations différentielles

4. Ensembles convexes

Exercice 4.1

Trouver K un convexe fermé et f une application affine telle que $f(K)$ soit un ouvert.

On considère simplement $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4.2

Soit C un convexe non réduit à un point.

1. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   (a) $x_0 \in \mathrm{Ri}(C)$
   (b) $\forall x \in C, \exists y,\ x_0 \in [x, y[$
2. Montrer que si C n'est pas convexe, alors la réciproque est fausse.

?

Exercice 4.3

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ convexe de cardinal $n+2$. Montrer qu'il existe une partition de K en $K_1 \cup K_2$ telles que les enveloppes convexes de K_1 et K_2 ne sont pas disjointes.

L'hypothèse K convexe est superflue. Ecrivons $K = \{a_1, \ldots, a_{n+2}\}$ et considérons la matrice A à $n+1$ lignes et $n+2$ colonnes

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas inversible donc il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ un élément non nul de $\ker A$, ce qu'on peut encore écrire

$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i a_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$$

Soit $I \subset [\![1, n+2]\!]$ l'ensemble des indices tels que $\alpha_i > 0$ et $J \subset [\![1, n+2]\!]$ l'ensemble des indices tels que $\alpha_j \leq 0$. I et J sont non vides car $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}) \neq (0, \ldots, 0)$ et $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$.

On a $\sum_{i \in I} \alpha_i a_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j) a_j$ et $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j)$.

Posons $S = \sum_{i \in I} \alpha_i$ qui est non nul. Alors

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} a_i = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} a_j$$

avec

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} = 1$$

$K_1 = (a_i)_{i \in I}$ et $K_2 = (a_j)_{i \in J}$ est donc une partition convenant.

Exercice 4.4

Soit K une partie convexe de E et M une variété affine de E telle que $M \cap \mathrm{Ri}(K) \neq \emptyset$. On suppose M fermée.

1. Montrer que $\mathrm{Ri}(M \cap K) = M \cap \mathrm{Ri}(K)$
2. Montrer que $\overline{M \cap K} = M \cap \overline{K}$

?

Exercice 4.5

Montrer que toute section plane d'un ensemble convexe est convexe.

Tout hyperplan est convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et l'intersection de deux convexes est convexe, donc toute section plane d'un convexe est convexe.

Exercice 4.6

Donner un exemple de fermé A d'un evn tel que $\operatorname{co} A$ ne soit pas fermée.

On rappelle que $\operatorname{co} A$ fait référence à l'enveloppe convexe de A. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on pose $A = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,\infty) \times \{0\})$ qui est fermé comme union de deux fermés.
Cependant $\operatorname{co} A = ([0,\infty) \times [0,1)) \cup \{(0,1)\}$ (évident sur un dessin) qui n'est pas fermé.

Exercice 4.7

Soit X un fermé d'un evn E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes

1. X convexe
2. $\forall x, y \in X,\ \frac{x+y}{2} \in C$

Donner un contre-exemple si X n'est pas fermé.

$\Longrightarrow$ Trivial.
$\Longleftarrow$ Soient $x, y \in C$ fixés. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\forall k \in [\![0, 2^n]\!], \frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) y \in C$$

• Pour $n = 1$, c'est une conséquence l'hypothèse $\forall x, y \in X,\ \frac{x+y}{2} \in C$.
• Supposons le résultat vrai pour $n \geq 1$ et prouvons le pour $n+1$.
On remarque que

$$\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right) y = \frac{2k'}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k'}{2^{n+1}}\right) y$$

ce qui prouve le résultat pour tout k pair dans $[\![0, 2^{n+1}]\!]$
Soit $k \in [\![0, 2^{n+1}-1]\!]$ impair. Ecrivons $k = 2k'+1$ où $k' \in [\![0, 2^n - 1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y &= \frac{2k'+1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k'+1}{2^{n+1}}\right)y \\ &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y}_{\in C} + \underbrace{\frac{k'+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'+1}{2^n}\right)y}_{\in C}\right]\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

Soit $\lambda \in [0,1]$. La suite $\dfrac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}$ converge vers λ, de sorte que la suite des

$$\frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}x + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}\right)y$$

est une suite d'éléments de C qui converge vers $\lambda x + (1-\lambda)y$. Comme C est fermé, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Ceci étant vrai pour tout x, y, λ, C est convexe.

Dans le cas où C n'est pas fermé, $\mathbb{Q}$ fournit un contre-exemple évident à la réciproque.

Exercice 4.8

> Soient A et B deux parties d'un evn E.
> Montrer que $\operatorname{co} A + \operatorname{co} B = \operatorname{co}(A+B)$.

$\supset$ On montre facilement que si C et C' sont deux convexes de E, $C + C'$ est convexe. $\operatorname{co} A$ et $\operatorname{co} B$ étant convexes, $\operatorname{co} A + \operatorname{co} B$ est convexe. Par ailleurs, $A \subset \operatorname{co} A$ et $B \subset \operatorname{co} B$ donc $A + B \subset \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.
$\operatorname{co} A + \operatorname{co} B$ est donc un convexe contenant $A+B$, donc $\operatorname{co}(A+B) \subset \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.

$\subset$ Soit $a + b \in \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$. Il existe n et $p \in \mathbb{N}$, α_i, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $a_i \in A$, $b_j \in B$ tels que $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, $b = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$.
Pour $1 \le j \le p$ on pose $c_j = b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i + b_j) \in \operatorname{co}(A+B)$.
Alors $\underbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^p \beta_j c_j}_{\in \operatorname{co}(\operatorname{co}(A+B))} = \sum_{j=1}^p \beta_j \left(b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = a+b$
Comme $\operatorname{co}(A+B)$ est convexe, $\operatorname{co}(\operatorname{co}(A+B)) = \operatorname{co}(A+B)$, donc $a+b \in \operatorname{co}(A+B)$.

Exercice 4.9

On dit qu'un point $x \in A$ est un point exposé de A s'il existe un hyperplan d'appui H à A tel que $H \cap A = \{x\}$.
On note $\exp A$ l'ensemble des points exposés de A.

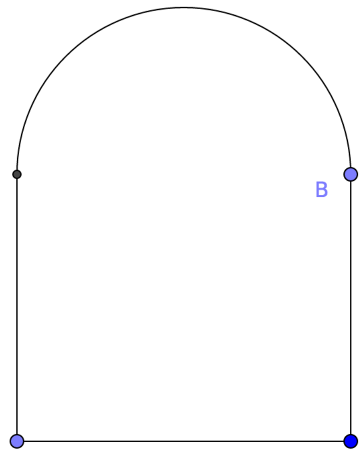
1. Montrer que si C est convexe, on a $\exp C \subset \operatorname{ext} C$.
2. Donner un exemple de convexe C pour lequel $\exp C \subsetneqq \operatorname{ext} C$.
3. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $\exp C \subsetneqq \operatorname{ext} C \subsetneqq \overline{\exp C}$

1. Soit C un convexe. On rappelle que $\operatorname{ext} C$ désigne l'ensemble des points extrémaux de C.
Soit $x^* \in \exp C$. Soit H l'hyperplan d'appui à C tel que $H \cap C = \{x^*\}$. Il existe $\ell \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue non-triviale et un réel α tels que $H = \{x \in E| \ \ell(x) = \alpha\}$. On suppose sans perte de généralité que $C \subset H^+ = \{x \in E| \ \ell(x) \geq \alpha\}$.
Comme $x^* \in H$, on a $\ell(x^*) = \alpha$. Si $x \in C$ est tel que $\ell(x) = \alpha$, alors $x \in C \cap H$ et donc $x = x^*$.
Si $x \in C$ et $x \neq x^*$ on a donc $\ell(x) > \alpha$.

Supposons par l'absurde que $x^* \notin \operatorname{ext} C$. On dispose alors de $a, b \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $x^* = (1 - \lambda)a + \lambda b$.
Alors $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b)$.
Comme $\lambda \in]0, 1[$, $(1-\lambda)\ell(a)+\lambda\ell(b) > \min(\ell(a), \ell(b))$. Comme $a \neq x^*$ et $b \neq x^*$, $\min(\ell(a), \ell(b)) > \alpha$.
Donc $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b) > \alpha$ ce qui contredit $\ell(x^*) = \alpha$.

2. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble A formé d'un demi arc de cercle au dessous duquel on colle une sorte de carré, comme sur la figure ci dessous.
Formellement $A = \{(x, y)| \ x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\} \cup \{(-1, y)| \ y \in [0, -2]\} \cup \{(1, y)| \ y \in [0, -2]\} \cup \{(x, -2)| \ x \in [-1, 1]\}$. Le seul hyperplan d'appui contenant B est la droite $x = 1$ qui contient aussi $\{(1, y)| \ y \in [0, -2]\}$. Donc B n'est pas exposé.
Pourtant B est extrémal.

3. ?



Exercice 4.10

Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on considère $\varphi : C \to \mathbb{R}, x \mapsto 2\langle a, x\rangle$. Montrer que φ admet un maximum sur C atteint en un point x_0.
2. Soit $H_a = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \langle a, x\rangle = \langle a, x_0\rangle\}$. Montrer que $H_a \cap C$ est un convexe non vide.

1. φ est continue sur $\mathbb{R}^n$ (car linéaire à partir d'un espace de dimension finie), donc elle admet un maximum sur le compact C.
2. H_a contient x_0. Montrons que H_a est convexe. Soit $x, y \in H_a$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors $\langle a, \lambda x+(1-\lambda)y\rangle = \lambda\langle a, x\rangle+(1-\lambda)\langle a, y\rangle = \lambda\langle a, x_0\rangle+(1-\lambda)\langle a, x_0\rangle = \langle a, x_0\rangle$ donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H_a$ et H_a est convexe.
$H_a \cap C$ est donc convexe comme intersection de deux convexes et non vide car il contient x_0.

Exercice 4.11

Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H.

1. On considère $f : H \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (d(x, C))^2$. Montrer que f est différentiable en tout point et calculer la différentielle de f en un point x de H. (On considérera le projecteur P de meilleure approximation sur C).
2. Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle f, x\rangle$ où $f \in H$ et $A \in \mathcal{L}_c(H, H)$ auto-adjointe. Déterminer le gradient de φ en x.

1. On rappelle que la projection sur un convexe fermé d'un Hilbert est unique

et on notera $p_C(x)$ le projeté de x sur C. On rappelle que p_C est 1-lipschitzienne.

Soit $x \in H$ fixé et $h \in H$. On a le développement

$$\begin{aligned}
d(x+h,C)^2 &= \|x+h-p_C(x+h)\|^2 \\
&= \|x-p_C(x)+h+p_C(x)-p_C(x+h)\|^2 \\
&= d(x,C)^2 + 2\langle x-p_C(x),h\rangle + 2\langle x-p_C(x), p_C(x)-p_C(x+h)\rangle + \|p_C(x)-p_C(x+h)+h\|^2 \\
&= d(x,C)^2 + 2\langle x-p_C(x),h\rangle + 2\langle p_C(x)-p_C(x+h), h+x-p_C(x)\rangle + \|p_C(x)-p_C(x+h)\|^2 + \|h\|^2
\end{aligned}$$

Le candidat naturel pour la différentielle de f en x est donc $h \mapsto 2\langle x-p_C(x),h\rangle$. Sachant que p_C est 1-lipschitzienne il facile de montrer que $\|p_C(x)-p_C(x+h)\|^2 + \|h\|^2 = o(\|h\|)$.

Cependant il est **remarquablement difficile** de prouver par des moyens élémentaires que $\langle p_C(x)-p_C(x+h), h+x-p_C(x)\rangle = o(\|h\|)$. (On peut montrer facilement que c'est un $O(\|h\|)$ mais c'est insuffisant).

On adopte une approche différente :
Lemme : Soit $f, g_1, g_2 : H \to \mathbb{R}$ trois fonctions différentiables en $x \in H$ avec U un voisinage de x et

$$\forall y \in U, g_1(y) \leq f(y) \leq g_2(y)$$

et $g_1(x) = g_2(x)$.
Alors $dg_1(x) = dg_2(x)$, f est différentiable en x et $df(x) = dg_1(x)$.

<u>Preuve</u> : Pour $h \in U - x$ on a $g_1(x+h) \leq g_2(x+h)$. On dispose de deux fonctions ε_1 et $\varepsilon_2 : H \to \mathbb{R}$ nulles et continues en 0 telles que

$$g_1(x) + dg_1(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \leq g_2(x) + dg_2(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

ie

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) + \|h\|(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)) \geq 0$$

Pour $t > 0$ on remplace h par th et on obtient

$$t(dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h)) + t\|h\|(\varepsilon_2(th) - \varepsilon_1(th)) \geq 0$$

En simplifiant par t puis en faisant $t \to 0$,

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) \geq 0$$

En remplaçant h par $-h$ dans la dernière inégalité,

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) \leq 0$$

donc $dg_2(x)(h) = dg_1(x)(h)$, ceci étant vrai pour tout $h \in H$, donc $dg_2(x) = dg_1(x)$.

Posons $dg(x) := dg_1(x)$ et réécrivons l'inégalité $g_1(x+h) \leq f(x+h) \leq g_2(x+h)$:

$$f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \leq f(x+h) \leq f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

donc

$$\varepsilon_1(h) \leq \frac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \leq \varepsilon_2(h)$$

Par encadrement, on a pour $\|h\| \to 0$, $\dfrac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \to 0$.

□

Revenons au problème. Soit $x \in H \setminus C$ fixé. Posons $x^* = p_C(x)$, $e = \frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}$ et $\mathcal{H}$ l'hyperplan d'appui en x^* de normale e, de sorte que

$$\mathcal{H} = \{y \in H, \langle y, e\rangle = \langle x^*, e\rangle\}$$

Lemme : On note $p_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$ (qui est un sev fermé). Soit $y \in \mathcal{H}^+$ et $z \in \mathcal{H}^-$. Alors $\|y - p_{\mathcal{H}}(y)\| \leq \|y - z\|$.

Preuve : C'est géométriquement évident (faire un dessin). Formellement, comme

$$\begin{aligned}\|y - z\|^2 &= \|y - p_{\mathcal{H}}(y) + p_{\mathcal{H}}(y) - z\|^2 \\ &= \|y - p_{\mathcal{H}}(y)\|^2 + \|p_{\mathcal{H}}(y) - z\|^2 - 2\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle\end{aligned}$$

il suffit de prouver que $\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle \leq 0$ (ce qui est encore une évidence géométrique).
Comme $y - p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}^\perp$ (cf théorème de la projection orthogonale sur un sev fermé), et que $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(e)$ on peut écrire
$y - p_{\mathcal{H}}(y) = \lambda e$ d'où

$$\begin{aligned}\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle &= \lambda\|e\|^2 = \lambda \\ &= \langle y, e\rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle \\ &\geq \langle x^*, e\rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle \quad \text{car } y \in \mathcal{H}^+ \\ &= \langle x^*, e\rangle - \langle x^*, e\rangle \quad \text{car } p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H} \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\lambda \geq 0$.
Finalement,

$$\begin{aligned}\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle &= \lambda\langle e, z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle \\ &= \lambda\left(\langle e, z\rangle - \langle e, p_{\mathcal{H}}(y)\rangle\right) \\ &\leq \lambda\left(\langle e, x^*\rangle - \langle e, x^*\rangle\right) \text{ car } \lambda \geq 0,\ z \in \mathcal{H}^-,\ p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H} \\ &= 0\end{aligned}$$

comme souhaité. □

Dans notre problème on dispose d'un voisinage de x noté U tel que $U \subset \mathcal{H}^+$. Pour $y \in U$, comme $p_C(y) \in C \subset \mathcal{H}^-$, le lemme donne $(d(y, \mathcal{H}))^2 \leq (d(y, C))^2$. On a aussi la majoration triviale $(d(y, C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$. En bref

$$(d(y, \mathcal{H}))^2 \leq (d(y, C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$$

Par ailleurs $(d(y,\mathcal{H}))^2$ se réécrit simplement

$$\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle^2 = \langle y - x^*, e\rangle^2 = \langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle^2$$

D'où l'encadrement

$$\underbrace{\langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle^2}_{:=g_1(y)} \leq (d(y,C))^2 \leq \underbrace{\|y - x^*\|^2}_{:=g_2(y)}$$

On a bien $g_1(x) = g_2(x)$, g_1 différentiable en x et g_2 différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle h, x - x^*\rangle$ (application linéaire continue par Cauchy-Schwarz). D'après le lemme, f est différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle h, x - x^*\rangle$.

Il reste à traiter le cas où $x \in C$. Il suffit de noter qu'alors

$$(d(x+h,C))^2 \leq \|(x+h) - x\|^2 = \|h\|^2$$

Donc f est différentiable de différentielle nulle.

2. Pour $x \in H$ on a le développement

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) &= \varphi(x) + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle f, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \\ &= \varphi(x) + \langle Ax, h\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle f, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \quad \text{car } A \text{ auto-adjointe} \\ &= \varphi(x) + \langle h, 2Ax + f\rangle + \langle Ah, h\rangle\end{aligned}$$

$h \mapsto \langle h, 2Ax + f\rangle$ est linéaire et continue (par Cauchy-Schwarz). Par ailleurs,

$$\frac{|\langle Ah, h\rangle|}{\|h\|} \leq \|Ah\| \leq \|A\|_{op}\|h\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

φ est donc différentiable en x, de gradient $2Ax + f$.

Exercice 4.12

Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. Pour $0 \geq b \geq a$, montrer que

$$aC - bC = (a-b)C + b(C - C)$$

$\subset$ Soit $ac - bc' \in aC - bC$. Alors

$$ac - bc' = (a-b)c + b(c - c') \in (a-b)C + b(C - C)$$

$\supset$ Soit $(a-b)c + b(c'-c'') \in (a-b)C + b(C-C)$. On a

$$\begin{aligned}(a-b)c + b(c'-c'') &= -\left((b-a)c + (-b)(c'-c'')\right)\\ &= -\left((-a)\underbrace{\left[\left(1-\frac{b}{a}\right)c + \frac{b}{a}c'\right]}_{\in C} + bc''\right)\\ &= a\left[\left(1-\frac{b}{a}\right)c + \frac{b}{a}c'\right] - bc''\\ &\in aC - bC\end{aligned}$$

Exercice 4.13

Soit C un fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall x, y \in C,\ ]x,y[\cap C \neq \emptyset$.
Montrer que C est convexe.

Supposons par l'absurde que C n'est pas convexe : on dispose alors de $x, y \in C$ et $\alpha \in]0,1[$ tel que $(1-\alpha)x + \alpha y \notin C$.

Considérons $\mu = \inf\{\lambda \geq \alpha | (1-\lambda)x + \lambda y \in C\}$. On dispose de λ_n une suite qui décroit vers μ avec pour tout n, $(1-\lambda_n)x + \lambda_n y \in C$ et $\lambda_n \geq \alpha$. En passant à la limite, comme C est fermé, on a $(1-\mu)x + \mu y \in C$ et $\mu \geq \alpha$. Comme $(1-\alpha)x + \alpha y \notin C$, l'inégalité est stricte : $\mu > \alpha$.

De même, on pose $\nu = \sup\{\lambda \leq \alpha | (1-\lambda)x + \lambda y \in C\}$. On a encore $(1-\nu)x + \nu y \in C$ et $\nu < \alpha$.

Posons $a = (1-\mu)x + \mu y$ et $b = (1-\nu)x + \nu y$. Alors $]a,b[\cap C \neq \emptyset$: on dispose de $\gamma \in]0,1[$ tel que $(1-\gamma)b + \gamma a \in C$.

Or $(1-\gamma)b + \gamma a = (1 - [(1-\gamma)\nu + \gamma\mu])x + [(1-\gamma)\nu + \gamma\mu]y$ avec

$$(1-\gamma)\nu + \gamma\mu \in]\nu, \mu[$$

Ceci contredit la définition de ν, absurde.

Exercice 4.14

Soit X un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $x \in X$. On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est une direction asymptotique de X en x si

$$\forall a \geq 0,\ x + av \in X$$

On note $K(X, x)$ l'ensemble des directions asymptotiques de X en x.

1. Montrer que $\forall x \in X,\ K(X, x)$ est un cône.
2. Si X est convexe, montrer que $K(X, x)$ est convexe et que si $x, x' \in X$, alors $K(X, x) = K(X, x')$.

1. Soit $x \in X$, $v \in K(X, x)$ et $\lambda \geq 0$. Montrons que $\lambda v \in K(X, x)$. Pour $a \geq 0$, $a\lambda \geq 0$ donc $x + a\lambda v \in X$, donc $\lambda v \in K(X, x)$.

2. On suppose X convexe. Montrons que $K(X, x)$ est convexe. Pour $v, v' \in K(X, x)$, $\lambda \in [0, 1]$ et $a \geq 0$

$$x + a[(1-\lambda)v + \lambda v'] = (1-\lambda)(\underbrace{x + av}_{\in X}) + \lambda(\underbrace{x + av'}_{\in X}) \in X$$

Donc $(1-\lambda)v + \lambda v' \in X$ et $K(X, x)$ est convexe.

Soient $x, x' \in X$. Montrons que $K(X, x) \subset K(X, x')$. Soit $v \in K(X, x)$ et $a \geq 0$. On remarque que

$$x' + av = \lim_n \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) x' + \frac{1}{n}(\underbrace{x + nav}_{\in X})}_{\in X} \right)$$

Comme X est fermé, $x' + av \in X$ donc $x' \in K(X, x)$ et $K(X, x) \subset K(X, x')$.
On a l'inclusion inverse par symétrie.

Exercice 4.15

Exercice 4.16

Soit X un convexe de $\mathbb{R}^n$ et A un convexe de $\mathbb{R}^+$ qui contient 0.
Montrer que $\bigcup_{a \in A} aX$ est convexe.

Soient $x, y \in \bigcup_{a\in A} aX$. On dispose de $a, b \in A$ et $x_1, x_2 \in X$ tels que $x = ax_1$ et $y = bx_2$. Soit $\lambda \in [0, 1]$.
Il s'agit de montrer que $(1-\lambda)ax_1 + \lambda bx_2 \in \bigcup_{a\in A} aX$.

Si $a = 0$ ou $b = 0$, en supposant par exemple que $a = 0$, il suffit de prouver que $\lambda bx_2 \in \bigcup_{a\in A} aX$. Comme $\lambda b = (1-\lambda)0 + \lambda b$, on a $\lambda bx_2 \in (\lambda b)X$.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on remarque qu'on a l'égalité

$$\underbrace{(\lambda a + (1-\lambda)b)}_{\in A} \underbrace{\left[\left(1 - \frac{(1-\lambda)b}{\lambda a + (1-\lambda)b}\right)x_1 + \frac{(1-\lambda)b}{\lambda a + (1-\lambda)b}x_2\right]}_{\in C} = (1-\lambda)ax_1 + \lambda bx_2$$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 4.17

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ à N éléments ($N > n+1$). Montrer qu'il est possible de partitionner X en deux parties X_1 et X_2 tels que
$$\mathrm{co}(X_1) \cap \mathrm{co}(X_2) \neq \emptyset$$
2. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ N parties convexes fermées de $\mathbb{R}^n$ avec $N > n$.
Montrer par récurrence sur N le théorème de Helly : si toute sous-famille de (X_i) à $n+1$ éléments a une intersection non vide, alors les N convexes de la famille (X_i) sont d'intersection non vide.

1. On adapte facilement la preuve du 4.3 avec $N \geq n+2$ au lieu de $N = n+2$.

2. On procède par récurrence sur $N \geq n+1$, n étant fixé dans toute la preuve.
L'initialisation est immédiate. Supposons le résultat vrai pour $N-1$ et prouvons le pour N. Supposons par l'absurde que toute sous-famille de (X_i) à $n+1$ éléments a une intersection non vide mais que $X_1, \ldots, X_N$ sont d'intersection vide.
D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à chaque sous-famille à $N-1$ éléments des (X_i), on dispose pour chaque $i \in [\![1, N]\!]$ de $x_i \in \bigcap_{j\neq i} X_j \setminus X_i$.
Posons $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$. D'après le résultat du 1., il exise une partition de A en $A_1 \cup A_2$ avec $\mathrm{co}(A_1) \cap \mathrm{co}(A_2) \neq \emptyset$.
Considérons $x \in \mathrm{co}(A_1) \cap \mathrm{co}(A_2)$ et montrons que $x \in \bigcap_{i=1}^N X_i$. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.
Si $x_i \in A_1$, A_2 ne contient que des x_j où $j \in [\![1, N]\!] \setminus \{i\}$, donc $A_2 \subset X_i$. Or X_i est convexe, donc $\mathrm{co}(A_2) \subset X_i$, donc $x \in X_i$. On procède similairement lorsque $x_i \in A_2$.
Donc $x \in \bigcap_{i=1}^N X_i$ ce qui est absurde.

Exercice 4.18

Montrer que l'ensemble suivant est convexe :

$$C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 |\ a > 0,\ b^2 - 4ac < 0\}$$

Soient (a, b, c), $(a', b', c') \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Il s'agit de montrer que $(1 - \lambda)(a, b, c) + \lambda(a', b', c') \in C$.
Considérons les polynômes $P(X) = aX^2 + bX + c$ et $Q(X) = a'X^2 + b'X + c'$.
Comme $(a, b, c) \in C$, P est un polynôme strictement positif, au sens où

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$$

De même, Q est strictement positif.

Or, pour deux réels strictement positifs $x > 0$ et $y > 0$, on a pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)x + \lambda y > 0$.

On en déduit que $(1 - \lambda)P + \lambda Q$ est un polynôme strictement positif dont les coefficients sont $((1 - \lambda)a + \lambda a', (1 - \lambda)b + \lambda b', (1 - \lambda)c + \lambda c')$.
Ceci implique $((1 - \lambda)a + \lambda a', (1 - \lambda)b + \lambda b', (1 - \lambda)c + \lambda c') \in C$, soit encore

$$(1 - \lambda)(a, b, c) + \lambda(a', b', c') \in C$$

5. Fonctions convexes

Exercice 5.1

Soient E un evn et $f : E \to \mathbb{R}$ convexe et impaire.

1. Montrer que $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$.
2. En déduire que $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
3. En déduire que f est linéaire.

1. On note que par imparité $f(0) = f(-0) = -f(0)$ donc $2f(0) = 0$ et $f(0) = 0$. Pour $x \in E$ et $\lambda \in]0,1[$ on a

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + (1-\lambda)\cdot 0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(0) = \lambda f(x)$$

2. Pour $x \in E$ et $\lambda \in]0,1[$, $-f(\lambda x) = f(\lambda(-x)) \leq \lambda f(-x) = -\lambda f(x)$ donc $f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$. En combinant avec l'inégalité de 1. on a l'égalité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

3. Il suffit de prouver que pour $\lambda > 1$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
On remarque que pour $\lambda > 1$, $\frac{1}{\lambda} < 1$ et

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)) &= \frac{1}{\lambda} f(\lambda x) \\ \implies f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

comme souhaité.

Exercice 5.2

Soit $f > 0$ positivement homogène sur C convexe. Montrer que f est convexe si et seulement si $B = \{x \in C |\ f(x) \leq 1\}$ est convexe.

Pour que f soit homogène, il faut pouvoir définir $f(\lambda x)$ pour tout $\lambda \geq 0$, ce qui nécessite une structure additionnelle sur C. On supposera donc que C est un $\mathbb{R}$-evn. Par positivement homogène l'énoncé veut dire homogène de degré 1.

$\Longleftarrow$ Supposons B convexe et montrons que $\operatorname{epi} f$ est convexe. On rappelle que

$$\operatorname{epi} f = \{(x,y) \in C \times \mathbb{R} |\ y \geq f(x)\}$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans $\operatorname{epi} f$ et $\lambda \in [0,1]$. f étant homogène de degré 1 et strictement positive, les inégalités $y_1 \geq f(x_1) > 0$ et $y_2 \geq f(x_2) > 0$ se réécrivent $1 \geq f(\frac{1}{y_1} x_1)$ et $1 \geq f(\frac{1}{y_2} x_2)$ donc $\frac{x_1}{y_1}$ et $\frac{x_2}{y_2}$ sont dans B.

B étant convexe et $\dfrac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1+\lambda y_2}$ étant dans $[0,1]$, on a

$$f\left(\left(1-\frac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1+\lambda y_2}\right)\frac{x_1}{y_1}+\frac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1+\lambda y_2}\frac{x_2}{y_2}\right)\leq 1$$

ce qui se réécrit

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leq(1-\lambda)y_1+\lambda y_2$$

ce qui équivaut à $((1-\lambda)x_1+\lambda x_2,(1-\lambda)y_1+\lambda y_2)\in \operatorname{epi} f$.
Donc $\operatorname{epi} f$ est convexe, donc f est convexe.

$\Longrightarrow$ On suppose f convexe. Montrons que B est convexe.
Soit $x,y\in C$ tel que $f(x)\leq 1$ et $f(y)\leq 1$ et $\lambda\in[0,1]$. Alors

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\leq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\leq 1$$

Donc B convexe.

Exercice 5.3

□

Exercice 5.4

Soient $x_i>0$, $\alpha_i\geq 0$ et $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\geq\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

Par concavité du log et l'inégalité de Jensen on a

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^n\alpha_i\ln(x_i)$$

et on a l'inégalité voulue en passant à l'exponentielle.

Exercice 5.5

Soit I un intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 2 fois dérivable.
Montrer que si $g:x\mapsto f(\frac{1}{x})$ est convexe dans I, alors $h:x\mapsto xf(x)$ est aussi convexe et réciproquement.

Il me semble nécessaire d'ajouter l'hypothèse $x \in I \implies \frac{1}{x} \in I$.

On note que

$$g''(x) = \frac{f''(\frac{1}{x}) + 2xf'(\frac{1}{x})}{x^4}$$

donc

$$g''(\frac{1}{x}) = x^3(xf''(x) + 2f'(x)) = x^3h''(x)$$

Pour $x \in I$, $g''(\frac{1}{x})$ et $h''(x)$ ont donc même signe. g est donc convexe si et seulement si h l'est.

Exercice 5.6

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée.
On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \inf_{x \in [a,b]}(-xt - f(x))$
Montrer que φ est concave.

Montrons que $\psi : t \mapsto \sup_{x \in [a,b]}(xt + f(x))$ est convexe.
Soient $t, t' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour $x \in [a, b]$, $xt+f(x) \leq \psi(t)$ et $xt'+f(x) \leq \psi(t')$ donc

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(xt + f(x)) + \lambda(xt' + f(x)) &\leq (1 - \lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t') \\ x((1 - \lambda)t + \lambda t') + f(x) &\leq (1 - \lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t') \end{aligned}$$

ceci étant vrai pour tout $x \in [a, b]$. En passant au sup on obtient

$$\psi((1 - \lambda)t + \lambda t') \leq (1 - \lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t')$$

ψ est donc convexe, donc $\varphi = -\psi$ est concave.

Exercice 5.7

Soient $t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \to \mathbb{R}, (x, t) \to f(x, t)$ telle que f est convexe en x et continue en t.
Montrer que $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$ est convexe.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour $t \in [a, b]$, par convexité de f en la première variable, $f((1 - \lambda)x + \lambda y, t) \leq (1 - \lambda)f(x, t) + \lambda f(y, t)$.
En intégrant cette inégalité selon t on trouve

$$g((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(y)$$

donc g est convexe.

Exercice 5.8

Soit A une partie fermée non vide d'un evn E.
Montrer que A est convexe si et seulement si $x \mapsto d(A,x)$ est convexe de E dans $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Supposons A convexe et montrons que $x \mapsto d(A,x)$ est convexe. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in]0,1[$.
Soit x', y' deux éléments quelconques de A. On a l'inégalité

$$(1-\lambda)\|x-x'\|+\lambda\|y-y'\| \geq \|(1-\lambda)x+\lambda y-\underbrace{((1-\lambda)x'+\lambda y')}_{\in A}\| \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)$$

donc

$$\|x-x'\| \geq \frac{1}{1-\lambda}(d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-\lambda\|y-y'\|)$$

Le membre de droite est indépendant de x', donc au passant à l'inf sur x' on a

$$d(A,x) \geq \frac{1}{1-\lambda}(d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-\lambda\|y-y'\|)$$

soit encore

$$(1-\lambda)d(A,x) \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-\lambda\|y-y'\|$$

qui devient

$$\lambda\|y-y'\| \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-(1-\lambda)d(A,x)$$

Un raisonnement similaire (passage à l'inf sur y') donne

$$\lambda d(A,y) \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-(1-\lambda)d(A,x)$$

soit

$$d(A,(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)d(A,x)+\lambda d(A,y)$$

Donc $x \mapsto d(A,x)$ est convexe.

$\Longleftarrow$ On suppose que $x \mapsto d(A,x)$ est convexe. Soient $x, y \in A$ et $\lambda \in [0,1]$.
On a $d(A,(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)d(A,x)+\lambda d(A,y) = (1-\lambda)\cdot 0+\lambda\cdot 0 = 0$.
Donc $d(A,(1-\lambda)x+\lambda y) = 0$ et comme A est fermé, $(1-\lambda)x+\lambda y \in A$, donc A convexe.

Exercice 5.9

Soit $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ une suite de fonctions convexes qui converge simplement vers $f :]0,1[\to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f_n converge vers f uniformément sur tout compact de $]0,1[$.

1. Soient $x, y \in]0,1[$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour tout n,

$$f_n((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)$$

et en passant à la limite sur n on a la convexité de f.

2. Etant donné K un compact de $]0,1[$, montrons que la famille des (f_n) est uniformément lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x, y \in K, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq A|x-y|$$

K étant compact il est inclus dans un segment $[a,b]$ avec $0 < a < b < 1$. Considérons $c < c' \in]0,a[$ et $d < d' \in]b,1[$.
Soient $x, y \in K$ et $n \geq 1$ quelconques. Par convexité de f,

$$\frac{f_n(c') - f_n(c)}{c' - c} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}$$

$\left(\frac{f_n(c') - f_n(c)}{c'-c}\right)_n$ et $\left(\frac{f_n(d') - f_n(d)}{d'-d}\right)_n$ convergent, donc sont bornées. On dispose donc de m et M des réels tels que

$$m \leq \frac{f_n(c') - f_n(c)}{c' - c} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d} \leq M$$

Pour tout $n \geq 1$ et $x, y \in K$ on a donc

$$m \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq M$$

En posant $A = \max(|m|, |M|)$ on a

$$\forall n \geq 1,\ \forall x, y \in K, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq A|x-y|$$

$\square$

En passant à la limite sur n dans l'inégalité précédente, on montre facilement que f est A-lipschitzienne.
Montrons que f_n converge vers f uniformément sur K.
Soit $\varepsilon > 0$.
Posons $N = \lfloor \frac{3A}{\varepsilon} \rfloor + 1$ et $x_k = \frac{k}{N}$ pour $k \in [\![1, N-1]\!]$.
Par convergence simple des f_n on dispose de N' tel que

$$n \geq N' \implies \forall k \in [\![1, N-1]\!], |f(x_k) - f_n(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Posons $N'' = \max(N, N')$ et considérons $n \geq N''$ et $x \in K$.
Par construction il existe $i \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{3A}$, de sorte que

$$\begin{aligned}|f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| \\ &\leq A|x - x_i| + \frac{\varepsilon}{3} + A|x - x_i| \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

On a donc montré que $\forall n \geq N'',\ \forall x \in K,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$, d'où la convergence uniforme.

Exercice 5.10

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions convexes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convexe et croissante en chaque variable.
Montrer que $F : x \mapsto g(f_1(x), \dots, f_n(x))$ est convexe sur $[a,b]$.

Soient $x, y \in [a,b]$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) = g(f_1((1-\lambda)x + \lambda y), \dots, f_n((1-\lambda)x + \lambda y)))$$

La convexité de chaque f_i et la croissance de g en chaque argument donne

$$\begin{aligned} F((1-\lambda)x + \lambda y) &\leq g((1-\lambda)f_1(x) + \lambda f_1(y), \dots, (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)) \\ &= g((1-\lambda)(f_1,(x), \dots, f_n(x)) + \lambda(f_1,(y), \dots, f_n(y))) \\ &\leq (1-\lambda)g(f_1,(x), \dots, f_n(x)) + \lambda g(f_1,(y), \dots, f_n(y)) \quad \text{par convexité de } g \\ &= (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y) \end{aligned}$$

Donc F convexe.

Exercice 5.11

Soit $n \geq 1$ et $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

Montrer que f est concave.

f admet clairement des dérivées partielles à l'ordre 1 données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{j \neq i} x_j \right)^{1/n} \frac{1}{n} \cdot x_i^{1/n-1} = \frac{1}{n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{x_i}$$

f admet alors clairement des dérivées partielles d'ordre 2 données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{n^2} \frac{1}{x_i x_j} & \text{si } i \neq j \\ -\frac{n-1}{n^2} f(x_1, \dots, x_n) \frac{1}{x_i^2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Chacune de ces fonctions est clairement continue, donc f est C^2.
Soit $(x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé dans la suite. La Hessienne de f en $(x_1, \dots, x_n)$ est donnée par

$$H(f)(x_1,\dots,x_n) = \frac{f(x_1,\dots,x_n)}{n^2}\begin{pmatrix} -\frac{n-1}{x_1^2} & & & & \\ & \ddots & & \frac{1}{x_ix_j} & \\ & & \ddots & & \\ & \frac{1}{x_ix_j} & & \ddots & \\ & & & & -\frac{n-1}{x_n^2} \end{pmatrix}$$

En posant $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{x_n^2} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\frac{1}{x_1^2},\dots,\frac{1}{x_n^2})$
on réécrit simplement

$$H(f)(x_1\dots,x_n) = \underbrace{\frac{f(x_1,\dots,x_n)}{n^2}}_{\text{constante positive}}(yy^T - nJ)$$

Il suffit de prouver que $yy^T - nJ$ est semi-définie négative. Considérons $v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} v^T(yy^T - nJ)v &= (y^Tv)^Ty^Tv - nv^TJv \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2} \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i} &= \sum_{i=1}^n 1\cdot\frac{v_i}{x_i} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2}} \end{aligned}$$

En passant au carré on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2} \leq 0$$

donc

$$v^T(yy^T - nJ)v \leq 0$$

d'où $H(f)(x_1,\dots,x_n)$ semi-définie négative, et ceci pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ donc f concave.

Exercice 5.12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy$.

1. Montrer que f est convexe.
2. On pose $x = r\cos(\alpha)$ et $y = r\sin(\alpha)$.
   Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

1. f est C^2 de Hessienne

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est 3, les deux valeurs propres sont donc de même signe et non nulles. Sa trace est 4, les deux valeurs propres sont donc strictement positives. Donc $H(f)(x, y)$ est symétrique définie positive, et ceci pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donc f est convexe.

2. Avec la formule de calcul des dérivées partielles d'une composée,

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos(\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -r\sin(\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exercice 5.13

Pour $x > 0$ et $y > 1$ on pose $F(x, y) = x^\alpha(\ln y)^\beta$ où α et β sont deux paramètres donnés.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de F.
2. Montrer que si F est concave alors $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \geq 0$.
3. Montrer que si $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \geq 0$ alors F est concave sur l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } \ln y > \frac{\beta}{1 - \alpha} - 1\}$$

4. Plus généralement, pour I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^2(J, \mathbb{R})$ on considère

$$F : I \times J \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

   (a) Montrer que si F est concave avec $f > 0$ et $g > 0$ alors f et g sont concaves.
   (b) Montrer que si $f > 0$, $g > 0$ avec f^2 et g^2 concaves, alors F est concave.

1. F est clairement C^2, de dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \alpha x^{\alpha-1}(\ln y)^{\beta} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \beta\frac{x^{\alpha}(\ln y)^{\beta-1}}{y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \alpha\beta\frac{x^{\alpha-1}(\ln y)^{\beta-1}}{y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) &= \frac{\beta x^{\alpha}(\ln y)^{\beta-2}}{y^2}(\beta-1-\ln y)
\end{aligned}$$

La Hessienne de F en (x,y) s'écrit donc

$$H(F)(x,y) = \underbrace{x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta-2}}_{\text{constante positive}}\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x\ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x\ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2}(\beta-1-\ln y)\end{pmatrix}$$

2. On suppose F concave, donc $H(F)(x,y)$ est semi-définie négative pour tout (x,y). Comme $x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta-2}$ est une constante positive, la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x\ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x\ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2}(\beta-1-\ln y)\end{pmatrix}$$

est semi-définie négative.
Son déterminant, qui est donc ≥ 0, vaut

$$\frac{\alpha\beta x^2(\ln y)^2((1-\alpha)\ln y+1-\alpha-\beta)}{y^2}$$

Ceci implique $\forall y>1,\ \alpha\beta((1-\alpha)\ln y+1-\alpha-\beta)\geq 0$
Par des considérations asymptotiques, le facteur devant le log doit être ≥ 0 ie $\alpha\beta(1-\alpha)\geq 0$.

On a aussi

$$(1,0)\cdot\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x\ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x\ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2}(\beta-1-\ln y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\leq 0$$

qui s'écrit $\alpha(\alpha-1)(\ln y)^2\leq 0$, donc $\alpha(\alpha-1)\leq 0$, donc $\alpha\in[0,1]$.
Par ailleurs, l'inégalité $\alpha\beta(1-\alpha)\geq 0$ devient $\beta\geq 0$.

3. On suppose $\alpha\in[0,1]$ et $\beta\geq 0$. Montrons que F est concave sur C. Comme C est un convexe ouvert, il suffit de montrer que $H(F)(x,y)$ est semi-définie

négative pour tout (x, y) dans C.
On rappelle le lemme très pratique en dimension 2 :
Lemme :(Conditions de Monge)
Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.
Si $rt - s^2 \geq 0$ et $r \geq 0$ alors A est semi-définie positive.
Si $rt - s^2 \geq 0$ et $r \leq 0$ alors A est semi-définie négative.

Preuve : A étant symétrique , elle est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. La condition $rt - s^2 \geq 0$ est équivalente à $\det A \geq 0$, ie $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0$ donc λ_1 et λ_2 de même signe. On a par ailleurs $rt \geq s^2 \geq 0$ donc r et t ont même signe. Or $\mathrm{Tr}(A) = r + t = \lambda_1 + \lambda_2$. Le signe de λ_1 est donc celui de r ce qui achève la preuve.

Dans notre cas, la condition $\ln y > \frac{\beta}{1-\alpha} - 1$ implique $(1-\alpha)\ln y + 1 - \alpha - \beta > 0$, donc $\alpha\beta((1-\alpha)\ln y + 1 - \alpha - \beta) \geq 0$ d'où $\det(H(F)(x, y)) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in C$.
Enfin, $H(F)(x, y)_{11} = x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta-2}\alpha \underbrace{(\alpha - 1)}_{\leq 0}(\ln y)^2 \leq 0$ et d'après le lemme, $H(F)(x, y)$ est semi-définie négative.

4. a) On suppose F concave. On a

$$H(F)(x, y) = \begin{pmatrix} f''(x)g(y) & f'(x)g'(y) \\ f'(x)g'(y) & f(x)g''(y) \end{pmatrix}$$

Comme $H(F)(x, y)$ est semi-définie négative,

$$(1, 0) \cdot H(F)(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

ie $f''(x)g(y) \leq 0$. Comme $g > 0$, $f''(x) \leq 0$ et ceci pour tout $x \in I$. Donc f concave.
De même on prouve que g est concave.

b) f^2 et g^2 étant concaves et C^2 sur des intervalles ouverts, on a $(f^2)'' = 2(f'^2 + ff'') \leq 0$ ie $0 \leq f'^2 \leq ff''$ et $0 \leq g'^2 \leq gg''$ En multipliant ces deux dernières inégalités entre elles on a

$$\forall (x, y) \in I \times J,\ (f''(x)g(y))(f(x)g''(y)) \geq (f'(x)g'(y))^2$$

ie $\det(H(F)(x, y)) \geq 0$.
Par ailleurs, $f'^2(x) \leq f(x)f''(x)$ implique $f(x)f''(x) \leq -f'^2(x) \leq 0$ et comme $f > 0$, on a $f''(x) \leq 0$. Donc

$$H(F)(x, y)_{11} = f''(x)g(y) \leq 0 \quad \text{car } g > 0$$

D'après le lemme, $H(F)(x, y)$ est semi-définie négative, et ceci pour tout $(x, y) \in I \times J$ (qui est un ouvert convexe), donc F est concave sur $I \times J$.

Exercice 5.14

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

1. φ étant à support compact, montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(t)dt$ est convexe.
2. On suppose $f > 0$ croissante et C^1 sur $[a, b]$.
   Montrer que l'on peut prolonger f à $]-\infty, b]$ de manière à ce que la fonction prolongée soit encore convexe, croissante, strictement positive, C^1, et constante sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha]$.
3. Soient f, g convexes, strictement positives, croissantes et $\mathbb{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que fg est convexe sur $[a, b]$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a par convexité de f,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y - t) = f((1-\lambda)(x-t) + \lambda(y-t)) \leq (1-\lambda)f(x-t) + \lambda f(y-t)$$

En intégrant cette inégalité suivant t on obtient le résultat voulu.

2. *Correction proposée par Yannick Guyonvarch*

On définit pour tout y

$$f'_+(y) = \lim_{x \to y, x \geq y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$
$$f'_-(y) = \lim_{x \to y, x \leq y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Si $f'_+(a) = 0$, le résultat est immédiat car en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in]-\infty, a]$ on a construit un prolongement C^1 de f qui vérifie toutes les contraintes du problème.

Nous nous intéressons donc au cas où $f'_+(a) > 0$. Posons $g : x \mapsto e(x-\alpha)^2 + d$ avec $\alpha < a$ le point à déterminer tel que pour tout $x \leq \alpha$, on prolonge f par $h : x \mapsto g(\alpha) = d$. Nous devons donc trouver un triplet (e, α, d) qui satisfait au contraintes du problème, à savoir

$$g \text{ croissante et } C^1, \quad g'(\alpha) = 0, \quad g'(a) = f'(a), \quad 0 < g(\alpha) < f(a), \quad g(a) = f(a), \quad \alpha < a$$

g est bien C^1 et $g'(\alpha) = 0$. Par ailleurs

$$g'(a) = f'(a) \iff 2e(a-\alpha) = f'(a) \iff e = \frac{f'(a)}{2(a-\alpha)}$$
$$g(a) = f(a) \iff e(a-\alpha)^2 + d = f(a) \iff d = f(a) - \frac{f'(a)(a-\alpha)}{2}$$

e respecte la contrainte $e > 0$ (pour avoir g croissante) dès que $\alpha < a$. De la même manière $d < f(a)$ à la même condition.

Trouvons $\alpha < a$ tel que $0 < d$

$$d > 0 \iff \alpha > a - \frac{2f(a)}{f'(a)}$$

Ainsi en prenant $\alpha \in]a - \frac{2f(a)}{f'(a)}, a[$ on a bien construit un prolongement C^1 de f qui vérifie toutes les conditions.

3. *Correction proposée par Yannick Guyonvarch*
Pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)g(x) > 0$ et $h : x \mapsto f(x)g(x)$ admet une dérivée $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
Soit $x_1 \leq x_2$.

$$\begin{aligned} h'(x_1) &= f'(x_1)g(x_1) + f(x_1)g'(x_1) \\ &\leq f'(x_1)g(x_2) + f(x_2)g'(x_1) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont croissantes} \\ &\leq f'(x_2)g(x_2) + f(x_2)g'(x_2) \text{ car } f \text{ et } g \text{ de dérivée croissante} \\ &= h'(x_2) \end{aligned}$$

h' est donc croissante sur $[a, b]$ donc $f \times g$ est convexe sur $[a, b]$.

Exercice 5.15

Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et P la projection sur K.
Montrer que $\varphi : x \mapsto \|x - P(x)\|$ est convexe.

Soient $x, y \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Comme K est convexe, $(1 - \lambda)P(x) + \lambda P(y) \in K$, donc par définition de P,

$$\begin{aligned} \varphi((1-\lambda)x + \lambda y) &= \|(1-\lambda)x + \lambda y - P((1-\lambda)x + \lambda y)\| \\ &\leq \|(1-\lambda)x + \lambda y - [(1-\lambda)P(x) + \lambda P(y)]\| \\ &= \|(1-\lambda)(x - P(x)) + \lambda(y - P(y))\| \\ &\leq (1-\lambda)\|x - P(x)\| + \lambda\|y - P(y)\| \\ &= (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \end{aligned}$$

Donc φ convexe.

Exercice 5.16

> Soient $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = x^\alpha + y^\beta$ et $g(x,y) = x^\alpha y^\beta$
> Etudier la concavité et la convexité de f et g.

f est clairement C^2 de Hessienne $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & \beta(\beta-1)y^{\beta-2} \end{pmatrix}$

Cette matrice est diagonale.

$$\begin{aligned} f \text{ est concave} &\iff H(f)(x,y) \text{ semi-définie négative pour tout } (x,y) \\ &\iff \alpha(\alpha-1) \leq 0 \text{ et } \beta(\beta-1) \leq 0 \quad (\text{car } x > 0 \text{ et } y > 0) \\ &\iff \alpha \in [0,1] \text{ et } \beta \in [0,1] \\ f \text{ est convexe} &\iff H(f)(x,y) \text{ semi-définie positive pour tout } (x,y) \\ &\iff \alpha(\alpha-1) \geq 0 \text{ et } \beta(\beta-1) \geq 0 \quad (\text{car } x > 0 \text{ et } y > 0) \\ &\iff \alpha \notin]0,1[\text{ et } \beta \notin]0,1[\end{aligned}$$

g est clairement C^2 de Hessienne $H(g)(x,y) = x^{\alpha-2}y^{\beta-2} \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)y^2 & \alpha\beta xy \\ \alpha\beta xy & \beta(\beta-1)x^2 \end{pmatrix}$

Posons donc $A(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)y^2 & \alpha\beta xy \\ \alpha\beta xy & \beta(\beta-1)x^2 \end{pmatrix}$ de sorte que $H(g)(x,y)$ est semi-définie positive/négative si et seulement si $A(x,y)$ l'est (car $x^{\alpha-2}y^{\beta-2} \geq 0$).

Le lemme du 5.13 (qui admet une réciproque facile à montrer) permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} g \text{ est concave} &\iff H(g)(x,y) \text{ semi-définie négative pour tout } (x,y) \\ &\iff A(x,y) \text{ semi-définie négative pour tout } (x,y) \\ &\iff \det A \geq 0 \text{ et } A(x,y)_{11} \leq 0 \text{ pour tout } (x,y) \\ &\iff \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0 \text{ et } \alpha(\alpha-1) \leq 0 \\ &\iff \alpha \in [0,1] \text{ et } \beta \in [0, 1-\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \text{ est convexe} &\iff H(g)(x,y) \text{ semi-définie positive pour tout } (x,y) \\ &\iff A(x,y) \text{ semi-définie positive pour tout } (x,y) \\ &\iff \det A \geq 0 \text{ et } A(x,y)_{11} \geq 0 \text{ pour tout } (x,y) \\ &\iff \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0 \text{ et } \alpha(\alpha-1) \geq 0 \\ &\iff \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta \geq 1-\alpha \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha \geq 1 \\ 1-\alpha \leq \beta \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 5.17

> Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P est convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que P admet au plus deux racines réelles.

On suppose par l'absurde que P admet 3 racines réelles distinctes : $a < b < c$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a,b[$ et $\zeta \in]b,c[$ tels que $P'(\xi) =$

$P'(\zeta) = 0$. Or P est convexe sur $\mathbb{R}$, donc P' est croissante, donc $P'(x) = 0$ pour tout $x \in [\xi, \zeta]$. P' est donc un polynôme qui admet une infinité de racines, absurde.

Exercice 5.18

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x,y) \to \sqrt{xy}$

1. Montrer que f est quasi-concave sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
2. Montrer que f est strictement quasi-concave.
3. Montrer que f est concave.

1. Montrons que les upper-contour sets de f sont convexes ie que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $S(a) := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ f(x,y) \geq a\}$ est convexe.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, $S(a) = \emptyset$. Si $a = 0$, $S(a) = (\mathbb{R}_+)^2$.
Si $a > 0$, $S(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ y \geq \frac{a}{x^2}\}$ Il s'agit de l'épigraphe de la fonction convexe $x \mapsto \frac{a}{x^2}$, donc $S(a)$ est convexe.

2. On peut reprendre le cheminement du 1. de l'exercice 5.19 : montrer que $\ln f$ est strictement concave, puis composer par exp.

3. f est C^2 sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, de Hessienne

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{4(xy)^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy}{4(xy)^{3/2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy}{4(xy)^{3/2}} & -\frac{x^2}{4(xy)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est 0 et $H(f)(x,y)_{11} \leq 0$. Le lemme du 5.13 permet de conclure que f est concave sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, donc concave sur l'intérieur de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
On obtient la concavité aux points de la frontière en les approchant par des points de l'intérieur et en utilisant la continuité de f sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Exercice 5.19

Etudier la concavité et la quasi-concavité (stricte ou non) des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^n$

1. $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ où $\alpha_i > 0$
2. $f(x) = \min(\frac{x_i}{\alpha_i})$ où $\alpha_i > 0$

1. On introduit quelques notions adéquates :
• On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est strictement concave si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$, pour tout $\lambda \in]0,1[$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

• **Lemme 1** : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est strictement concave et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors $\varphi \circ f$ est strictement quasi-concave.
Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$. Par stricte concavité de f, $f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ et en composant par φ,

$$\varphi(f((1-\lambda)x+\lambda y)) > \varphi((1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)) > \varphi(\min(f(x), f(y))) = \min(\varphi(f(x)), \varphi(f(y)))$$

donc $\varphi \circ f$ strictement quasi-concave.
• **Lemme 2** : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Si $H(f)(x)$ est définie négative pour tout $x \in U$, alors f est strictement concave sur U.
Preuve : Résultat classique qu'on trouvera dans n'importe quel livre d'analyse convexe.

• Revenons au problème. On se limite d'abord à l'étude sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
On va montrer que $\ln f$ est strictement concave. Par le lemme 1, on aura f strictement quasi-concave. La Hessienne de $\ln f$ est très facile à calculer :

$$H(\ln f)(x) = \mathrm{diag}(-\frac{\alpha_1}{x_1^2}, \ldots, -\frac{\alpha_n}{x_n^2})$$

Les valeurs propres sont < 0, donc $H(\ln f)(x)$ est définie négative pour tout $x \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et d'après le lemme 2, $\ln f$ est strictement concave. f est donc strictement quasi-concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
Le résultat tombe en défaut sur $\mathbb{R}^n$: on considère $x = (0, \ldots, 0)$, $y = (0, \ldots, 0, 1)$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ Alors

$$f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = f(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}) = 0 = f(x) = f(y)$$

• On étudie ensuite la concavité de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
On calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x) = \alpha_i(\alpha_i - 1)\frac{f(x)}{x_i^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \alpha_i \alpha_j \frac{f(x)}{x_i x_j}$$

Posons $y = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\frac{\alpha_1}{x_1^2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{x_n^2})$, de sorte que

$$H(f)(x) = f(x)(yy^T - D)$$

et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} v^T H(f)(x) v &= f(x)[(y^T v)^T (y^T v) - v^T D v] \\ &= f(x)\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i}{x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2}\right] \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i v_i}{x_i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i}\frac{\sqrt{\alpha_i} v_i}{x_i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2}\right)$$

Donc

$$v^T H(f)(x) v \leq f(x)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) - 1\right] \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2}$$

Par conséquent, si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$, $v^T H(f)(x) v \leq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et $x \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, donc f est concave.

• Pour $n = 1$, f est clairement convexe si $\alpha_1 \geq 1$ et concave si $\alpha_1 \leq 1$.

• Il reste à prouver que f n'est ni concave ni convexe lorsque $n \geq 2$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$.

On suppose par l'absurde que f est convexe ou concave. Notons $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x) \; ? \; f(\mathbf{1}) + df(\mathbf{1})(x - \mathbf{1})$$

où le signe ? dénote $\geq$ ou $\leq$ selon que f est convexe ou concave, respectivement. En notant que $\nabla(f)(x) = f(x)(\frac{\alpha_1}{x_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{x_n})$, on réécrit

$$f(x) \; ? \; f(\mathbf{1}) + \langle \nabla(f)(1), x - \mathbf{1} \rangle$$

ie

$$f(x) \; ? \; 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - 1)$$

En évaluant en $x = 0$,

$$0 \; ? \; 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Avec l'hypothèse qu'on a faite sur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, on en déduit que ? doit être remplacé par $\geq$, de sorte qu'on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - 1)$$

En évaluant pour $x = (a, 0, \ldots, 0)$,

$$0 \geq 1 + \alpha_1 (a - 1)$$

Avec $a \to \infty$ on obtient une contradiction. Donc f n'est ni concave, ni convexe.

2. f étant un minimum de fonctions concaves, elle est concave, donc quasi-concave.
f n'est pas strictement quasi-concave. Il suffit de considèrer $x = (0, \ldots, 0)$, $y = (0, \ldots, 0, 1)$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

Exercice 5.20

Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est concave si et seulement si
$$K := \{(x, z) \in C \times \mathbb{R},\ z < f(x)\}$$
est convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. On suppose f concave et x_0 un point intérieur à C. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in C$,
$$f(x) - f(x_0) \leq L(x - x_0)$$

1. $\Longrightarrow$ On suppose f concave. Soient (x_1, z_2), $(x_2, z_2) \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par concavité de f,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &\geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &> (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{aligned}$$

Donc $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2) \in K$ ie $(1-\lambda)(x_1, z_1) + \lambda(x_2, z_2) \in K$. Donc K convexe.

$\Longleftarrow$ On suppose K convexe. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Considérons z_1 et z_2 des réels tels que $f(x) > z_1$ et $f(y) > z_2$, de sorte que (x_1, z_1) et $(x_2, z_2) \in K$. Par convexité de K on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2$$

En faisant $z_1 \underset{<}{\longrightarrow} f(x_1)$ et $z_2 \underset{<}{\longrightarrow} f(x_2)$, on obtient

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Donc f concave.

2. On rappelle deux théorème importants qu'on va utiliser dans la suite :
Théorème 1 : Soit K un convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors $\overline{\overset{\circ}{K}} = \overset{\circ}{K}$.
Théorème 2 : Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et x_0 un point de la frontière de K. Alors il existe un hyperplan d'appui à K en x_0. Plus précisément, il existe

$e \in \mathbb{R}^n$ tel que $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle e, x - x_0\rangle \geq 0\}$

Par continuité de f en x_0 (qui est bien intérieur à C), on montre facilement que $(x_0, f(x_0)) \notin \mathring{K}$. Par ailleurs, on a $(x_0, f(x_0)) \in K$. Donc

$$(x_0, f(x_0)) \in K \setminus \mathring{K} \subset \overline{K} \setminus \mathring{K}$$

Par le théorème 1 on a

$$(x_0, f(x_0)) \in \overline{K} \setminus \mathring{\overline{K}}$$

Or $\overline{K} \setminus \mathring{\overline{K}}$ est précisément la frontière de $\overline{K}$, qui est un convexe fermé.
Par le théorème 2, on dispose donc de $(u^*, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que

$$\overline{K} \subset \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},\ \langle (u^*, \alpha), (x, z) - (x_0, f(x_0))\rangle \geq 0\}$$

ce qu'on réécrit

$$\overline{K} \subset \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},\ \langle u^*, x - x_0\rangle \geq \alpha(f(x_0) - z)\}$$

Soit $x \in C$ fixé. Considérons $z \in \mathbb{R}$ tel que $z < f(x)$, de sorte que $(x, z) \in K \subset \overline{K}$.
On a donc $\langle u^*, x - x_0\rangle \geq \alpha(f(x_0) - z) \qquad (*)$
Choisissons z tel que $z < \min(f(x), f(x_0))$, de sorte que $f(x_0) - z > 0$ et $(x, z) \in K$.

Si $\alpha \geq 0$, $(*)$ implique $\langle u^*, x - x_0\rangle \geq 0$, ceci étant vrai pour tout $x \in K$.
Comme $x_0 \in \mathring{K}$, l'inégalité reste vraie sur un voisinage de x_0, de sorte que pour $t > 0$ suffisamment petit on a

$$\langle u^*, (x_0 - tu^*) - x_0\rangle \geq 0$$

ie $-\|u^*\|^2 \leq 0$, donc $\|u^*\| = 0$ et $u^* = 0$.
$(*)$ donne alors $0 \geq \alpha(f(x_0) - z)$, donc $z \geq f(x_0)$, en contradiction avec la définition de z.

Donc $\alpha < 0$. On considère $z \in \mathbb{R}$ tel que $z < f(x)$ et on réécrit alors $(*)$ sous la forme

$$\langle \frac{u^*}{\alpha}, x - x_0\rangle \leq f(x_0) - z$$

En faisant $z \underset{<}{\longrightarrow} f(x)$, on a

$$\langle \frac{u^*}{\alpha}, x - x_0\rangle \leq f(x_0) - f(x)$$

donc

$$\langle -\frac{u^*}{\alpha}, x - x_0\rangle \geq f(x) - f(x_0)$$

En posant $L : x \mapsto \langle -\frac{u^*}{\alpha}, x\rangle$, on a le résultat.

Exercice 5.21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq a$. Montrer que f est constante.

Supposons par l'absurde que f n'est pas constante. On dispose alors de a et b tel que $f(a) < f(b)$. Sans perte de généralité on suppose que $a < b$. Par croissance des pentes on a pour tout $x > b$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc

$$f(x) \geq (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$$

Le membre de droite tends vers ∞ lorsque $x \to \infty$, absurde.

Exercice 5.22

Soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$ par

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$$

A quelle condition f est-elle convexe, concave ?

Dans la suite on notera $S = \sum_{i=1}^n x_i^p$.
f est clairement C^2 en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^n$, de dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x_1, \ldots, x_n) = S^{1/p-2}(1 - p)x_i^{2p-2} + S^{1/p-1}(p - 1)x_i^{p-2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = S^{1/p-2}(1 - p)x_i^{p-1}x_j^{p-1}$$

En posant $y = \begin{pmatrix} x_1^{p-1} \\ \vdots \\ x_n^{p-1} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} x_1^{p-2} & & \\ & \ddots & \\ & & x_n^{p-2} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(x_1^{p-2}, \ldots, x_n^{p-2})$,

la Hessienne de f s'écrit $S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D$. On a, pour $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} v^T(S^{1/p-2}(1 - p)yy^T + S^{1/p-1}(p - 1)D)v &= S^{1/p-2}(p - 1)\left[Sv^T Dv - (y^T v)^T(y^T v)\right] \\ &= S^{1/p-2}(p - 1)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p \sum_{i=1}^{n} x_i^{p-2}v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}v_i\right)^2\right] \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}v_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^{p/2-1}v_i)x_i^{p/2}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-2}v_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{p}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v$$

a même signe que

$$S^{1/p-2}(p-1)$$

Or $S^{1/p-2}$ est ≥ 0, donc $v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v$ a le signe de $p-1$, quel que soit v.

En conclusion, f est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ si et seulement si $p-1 \geq 0$ et concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ si et seulement si $p-1 \leq 0$.
La convexité/concavité au bord s'obtient dans les deux cas en approchant par des éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ puis en utilisant la continuité de f.

Exercice 5.23

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On définit $f : \mathbb{R}^n \to R, x \mapsto \|Ax\|^2 + 2\|Bx\|^{3/2}$. Montrer que f est convexe.

Il suffit de remarquer que $x \mapsto \|Ax\|$ est convexe (conséquence directe de l'inégalité triangulaire). On utilise ensuite le lemme
Lemme : Si $f : \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$ est convexe et $g : f(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est convexe et croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$. L'inégalité de convexité $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ composée par g donne

$$g(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq g((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) \leq (1-\lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y))$$

Donc $g \circ f$ convexe.

Ici on compose avec $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ qui est convexe, donc $x \mapsto \|Ax\|^2$ est convexe.
Pour les mêmes raisons, $x \mapsto 2\|Ax\|^{3/2}$ est convexe, donc f est convexe, comme somme de deux fonctions convexes.

Exercice 5.24

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, Ax\rangle$. Montrer que si f est quasi-convexe, alors f est convexe.

Exercice 5.25

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convexe, continue, strictement monotone sur $[a,b]$.
Que de la convexité/concavité de f^{-1} ?

Correction proposée par Yannick Guyonvarch

Ici on ne suppose pas a priori la dérivabilité de f.
Par convexité, on a pour tout $(x_1,x_2) \in [a,b]^2$ et tout $\lambda \in]0,1[$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

On pose $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ (N.B : ceci est possible car f est continue strictement croissante, donc elle vérifie $x = f^{-1}(f(x))$ pour tout x).
Ainsi

$$f(\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2)) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$$

f continue strictement croissante sur $[a,b] \implies f^{-1}$ continue, strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$. En appliquant f^{-1} à l'inégalité, on en préserve le sens et on obtient

$$\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$$

$\implies f^{-1}$ concave.

6. Compléments

7. Optimisation dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 7.1

Etudier les extrema locaux de $f : x \mapsto x^2 + \lambda x + \mu$ sur $[a, b]$

On distingue plusieurs cas :
• Si $\frac{-\lambda}{2} \geq b$: f est strictement décroissante sur $[a, b]$ donc admet un maximum global strict en a et un minimum global strict en b. Il n'y pas d'autres extrema locaux.
• Si $\frac{-\lambda}{2} \leq a$: f est strictement croissante sur $[a, b]$ donc admet un maximum global strict en b et un minimum global strict en a. Il n'y pas d'autres extrema locaux.
• Si $a < \frac{-\lambda}{2} < b$, f admet un minimum global strict en $\frac{-\lambda}{2}$, f est strictement décroissante sur $[a, \frac{-\lambda}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{-\lambda}{2}, b]$ donc f admet un maximum local strict en a et b. Il n'y a pas d'autres extremas locaux.

Exercice 7.2

Quels sont les extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$?

On cherche d'abord les points critiques de f. Le gradient de f en (x, y) est donné par

$$\left(-\frac{x^2 - y^2 - 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\right)$$

Il est nul si et seulement si $(x, y) \in \{(-1, 0), (1, 0)\}$.

On rappelle la démarche : si f admet un extremum local, c'est un point critique. Les (**éventuels**) extrema locaux de f se trouvent donc parmi les points critiques On utilise ensuite les conditions du deuxième ordre pour caractériser les points critiques qu'on a trouvés.

La Hessienne de f en (x, y) est donnée par $H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x(x^2-3y^2-3)}{(x^2+y^2+1)^3} & \frac{2y(3x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \frac{2y(3x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3} & -\frac{2x(x^2-3y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3} \end{pmatrix}$.
En $(1, 0)$, $H(f)(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui est symétrique définie négative. Donc $(1, 0)$ est un maximum local strict de f.
En $(-1, 0)$, $H(f)(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui est symétrique définie positive. Donc $(-1, 0)$ est un minimum local strict de f.

Conclusion : f admet un unique maximum local en $(1,0)$ et unique minimum local en $(-1,0)$.

Exercice 7.3

Quels sont les extrema $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$?

• Le gradient de f en (x,y) est donné par $\left(3\left(x^2-y\right), -3\left(x-y^2\right)\right)$ et les points critiques par $\{(0,0),(1,1)\}$.

La Hessienne de f en (x,y) est donnée par $\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

En $(0,0)$, elle vaut $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $9 < 0$. Elle n'est donc ni semi-définie positive, ni semi-définie négative, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local (c'est un point-selle en vérité).

En $(1,1)$, elle vaut $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $27 > 0$ et la trace $12 > 0$. Elle est donc définie positive. $(1,1)$ est donc un minimum local strict de f.

• Par ailleurs, $f(n,0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ donc f n'admet pas de maximum global.

De même $f(-n,0) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ donc f n'admet pas de minimum global.

Conclusion : f admet un unique minimum local en $(1,1)$ et aucun maximum local. Elle n'admet aucun extremum global.

Exercice 7.4

Quels sont les extrema $f : (x,y) \mapsto x(y^2 + \ln^2(x))$?

• Le gradient de f en (x,y) est donné par $\left(\log^2(x) + 2\log(x) + y^2, 2xy\right)$ et les points critiques par $\{(1,0),(e^{-2},0)\}$.

La Hessienne de f en (x,y) est donnée par $\begin{pmatrix} \frac{2(\log(x)+1)}{x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$.

En $(1,0)$ elle vaut $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est définie positive. Donc $(1,0)$ est un minimum local strict de f.

En $(e^{-2},0)$ elle vaut $\begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$ qui n'est ni semi-définie positive, ni semi-défine négative. Donc $(e^{-2},0)$ n'est pas un extremum local.

• Par ailleurs, $f(n,0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ donc f n'admet pas de maximum global.

Comme x est astreint à être > 0, on a $f(x,y) \geq 0$ pour tout (x,y) dans le domaine, donc $(1,0)$ est un minimum global.

Conclusion : f admet un unique minimum local en $(1,0)$. Elle n'admet pas de maximum local. Elle admet un minimum global atteint en $(1,0)$. Elle n'admet pas de maximum global.

Exercice 7.5

Etudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $f : (x,y) \mapsto x\sin(y) + \cos(x)$
2. l'énoncé manuscrit n'est pas clair
3. $h : (x,y) \mapsto x(\ln^2(x) + y^2)$
4. $\varphi : (x,y,z) \mapsto \dfrac{x^2}{2} + xyz + y + z$

1. • Le gradient de f en (x,y) est donné par $(\sin(y) - \sin(x), x\cos(y))$ et l'ensemble des points critiques est donné par

$$\{(0,y),\ \sin(y) = 0\} \cup \{(x,y),\ \sin(x) = 1 \text{ et } \cos(y) = 0\}$$

La Hessienne de f en (x,y) est donnée par $\begin{pmatrix} -\cos(x) & \cos(y) \\ \cos(y) & -x\sin(y) \end{pmatrix}$.

$\star$ Si $x = 0$ et $\sin(y) = 0$, elle vaut $\begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est -1. Elle n'est ni semi-définie positive, ni semi-défine négative, donc les éléments de $\{(0,y),\ \sin(y) = 0\}$ ne sont pas des extrema locaux de f.

$\star$ Si $\sin(x) = 1$ et $\cos(y) = 0$, la Hessienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm x \end{pmatrix}$. Elle est **semi-**définie positive ou négative selon le signe de $\pm x$, donc on ne peut a priori rien déduire concernant le fait que (x,y) soit un extremum local. En (x,y), f vaut $\pm x$ On distingue plusieurs cas :

∘ si $\sin(y) = 1$: dans ce cas $f(x,y) = x$ et

$$\begin{aligned} f(x + \frac{1}{n}, y) &= x + \frac{1}{n} + \cos\left(x + \frac{1}{n}\right) \\ &= x + \frac{1}{n} + \cos(x) - \frac{\sin(x)}{n} - \frac{\cos(x)}{2n^2} + \frac{\sin(x)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= x + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Donc $f(x + \frac{1}{n}, y) - f(x,y) \sim \frac{1}{6n^3}$, donc $f(x + \frac{1}{n}, y) - f(x,y) > 0$ à partir d'un certain rang.

Un calcul similaire donne

$$f(x + \frac{1}{n}, y) = x - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Donc $f(x+\frac{1}{n},y)-f(x,y)<0$ à partir d'un certain rang.
Tout voisinage de (x,y) contient donc des points (x',y') et (x'',y'') où $f(x,y) < f(x',y')$ et $f(x'',y'') < f(x,y)$, donc (x,y) n'est pas un extremum local.
∘ si $\sin(y)=-1$: dans ce cas $f(x,y)=-x$ et

$$\begin{aligned} f(x+\frac{1}{n},y) &= -x-\frac{1}{n}+\cos\left(x+\frac{1}{n}\right) \\ &= -x-\frac{1}{n}+\cos(x)-\frac{\sin(x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -x-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc $f(x+\frac{1}{n},y)-f(x,y)\sim-\frac{2}{n}$, donc $f(x+\frac{1}{n},y)-f(x,y)<0$ à partir d'un certain rang. De même $f(x-\frac{1}{n},y)-f(x,y)\sim\frac{2}{n}$, donc $f(x-\frac{1}{n},y)-f(x,y)<0$ à partir d'un certain rang. Par le même argument que précédemmment, (x,y) n'est pas un extremum local.

• Par ailleurs, $f(n,\frac{\pi}{2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et $f(-n,\frac{\pi}{2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ donc f n'admet pas ni maximum global ni minimum global.

<u>Conclusion</u> : f n'admet ni minimum local, ni maximum local, ni minimum global, ni maximum global.

3. A déjà été traité dans 7.4

4. • Le gradient de φ en (x,y) est donné par $(x+yz, xz+1, xy+1)$ et les points critiques par $\{(-1,1,1)\}$. La Hessienne de φ en (x,y) est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$.

En $(-1,1,1)$ elle vaut $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont (après calcul du polynôme caractéristique) 1, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Elle n'est donc ni semi-définie positive, ni semi-définie négative, donc $(-1,1,1)$ n'est pas un extremum local.

• Par ailleurs $\varphi(n,0,0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et $\varphi(0,0,-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ donc f n'admet ni maximum global, ni minimum global.

<u>Conclusion</u> : f n'admet ni minimum local, ni maximum local, ni minimum global, ni maximum global.

Exercice 7.6

Trouver la plus petite distance entre $(0,1)$ et la parabole d'équation $x^2=2y$.

Le problème à résoudre est le suivant

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|(x,y)-(0,1)\| \quad \text{s.c. } y=\frac{x^2}{2}$$

qu'on peut réécrire, en passant au carré,

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \|(x,\frac{x^2}{2})-(0,1)\|^2$$

ie

$$\min_{x\in\mathbb{R}} x^2+(\frac{x^2}{2}-1)^2$$

ie

$$\min_{x\in\mathbb{R}} x^4+1$$

Le min est atteint en $x=0$, où la distance à la parabole vaut 1.

Exercice 7.7

> Soit $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice symétrique A.
> Déterminer $\max_{\|x\|=1} x^T Ax$ et $\min_{\|x\|=1} x^T Ax$.

A étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée : on dispose de $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille orthonormée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

En écrivant $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, on a
$$\begin{aligned} x^TAx = \langle x, Ax\rangle &= \langle \sum_{i=1}^n x_ie_i, A\left(\sum_{j=1}^n x_je_j\right)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_j x_i x_j \langle e_i,e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

Donc $\lambda_n\|x\|^2 \leq x^TAx \leq \lambda_1\|x\|^2$. Lorsque $\|x\|=1$, on obtient $\lambda_n \leq x^TAx \leq \lambda_1$. Ces bornes sont atteintes lorsque $x=e_1$ et $x=e_n$, donc $\max_{\|x\|=1} x^TAx=\lambda_1$ et $\min_{\|x\|=1} x^TAx=\lambda_n$.

Exercice 7.8

Soit $L : \mathbb{R}^n \times R \to \mathbb{R}_+, (x_1, \dots, x_n, \theta) \to L(x_1, \dots, x_n, \theta)$.
On suppose L de classe C^2 par rapport à θ. On cherche $\hat{\theta}$ tel que $L(x_1, \dots, x_n, \hat{\theta}) = \max_\theta L(x_1, \dots, x_n, \theta)$.

1. Montrer que $\hat{\theta}$ est solution du système

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} < 0$$

2. Déterminer $\hat{\theta}$ dans les cas suivants :
   (a) $L(x, \theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ où $x \in [\![0, n]\!]$.
   (b) $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = e^{-n\theta}\dfrac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$ où $x_i \in \mathbb{N}$.
   (c) $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \frac{1}{\theta^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\theta^2}}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Sans hypothèse de concavité en θ sur L, tout ce qu'on peut affirmer est que si $\frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\hat{\theta}) = 0$ et $\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2}(\hat{\theta}) < 0$, alors $\hat{\theta}$ est un maximum local de $\log L$, donc un maximum local de L.
2. a) Pour $x \in [\![0, n]\!]$ fixé, on cherche $\max_{\theta \in [0,1]} L(x, \theta)$. Il suffit de chercher $\max_{\theta \in]0,1[} \log L(x, \theta)$ (par continuité de $L(x, \cdot)$, le maximum obtenu majorera aussi les bords).
On a $\log L(x, \theta) = \ln \binom{n}{x} + x\ln(\theta) + (n-x)\ln(1-\theta)$, de sorte que

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta}$$

qui est > 0 si et seulement si $\theta < \frac{x}{n}$ et nul en $\frac{x}{n}$. $\log L$ admet donc un maximum global en $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$.
Donc $L(x, \cdot)$ a un maximum global en $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$.

b) Pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ fixés, on cherche $\max\limits_{\theta > 0} L(x_1, \dots, x_n, \theta)$. On a

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\theta^{(\sum_{i=1}^n x_i)-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta\right)}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

Donc $\frac{\partial L}{\partial \theta} > 0$ si et seulement si $\theta < \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ avec égalité en $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.
La fonction admet donc un maximum global en $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

c) Pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ fixés, on cherche $\max\limits_{\theta > 0} L(x_1, \dots, x_n, \theta)$. Il suffit de chercher $\max_{\theta>0} \log L(x,\theta)$. On a

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$

et $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} > 0 \iff \theta < \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{n}}$.

La fonction admet donc un maximum global en $\hat{\theta} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n}}$.

Exercice 7.9

Soit $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+^*, (x,\theta) \mapsto L(x,\theta)$ C^2 par rapport à θ.
On cherche $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^p$ tel que $L(x,\hat{\theta}) \geq L(x,\theta)\ \forall \theta \in \mathbb{R}^p$.

1. Montrer que $\hat{\theta}$ est solution du système

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \text{ est définie négative}$$

2. Posons $\theta = (m, \sigma^2)$ et $L(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\sigma^2}}$
Déterminer $\hat{\theta}$.

1. Sans hypothèse de concavité en θ sur L, tout ce qu'on peut affirmer est que si $\hat{\theta}$ est solution du système de l'énoncé, alors $\hat{\theta}$ est un maximum local de $\log L$, donc un maximum local de L.

2.Posons $\varphi(m,\delta) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\delta} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\delta}}$.
On cherche $\max\limits_{\delta>0, m\in\mathbb{R}} \varphi(m,\delta)$.
Posons $\psi : (m,\delta) \mapsto -\ln(\delta) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\delta}$. Le problème précédent est équivalent à chercher $\max_{\delta>0, m\in\mathbb{R}} \psi(m,\delta)$.
Le gradient de ψ en (m,δ) est donné par

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)}{\delta}, -\frac{1}{\delta} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{2\delta^2}\right)$$

et l'ensemble des points critiques par $\{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right]\right)^2)\}$.
La Hessienne de ψ en (m,δ) est donnée par

$$\frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} -n & -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)}{\delta} \\ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)}{\delta} & \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{\delta}\right) \end{pmatrix}$$

Au point critique $(\hat{m}, \hat{\delta})$, cette matrice devient $\frac{1}{\hat{\delta}} \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\hat{\delta}} \end{pmatrix}$ qui est définie négative, donc $(\hat{m}, \hat{\delta})$ est un maximum local.
Pour déduire que c'est un maximum global, il faudrait que ψ soit concave, ie que sa Hessienne soit définie négative en tout point. Or ce n'est pas vrai : le déterminant de la Hessienne est donné par

$$\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{-n}{\delta} + \frac{n\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \left(\sum_{i=1}^n (x_i - m)\right)^2}{\delta^2}\right)$$

qui est ≥ 0 si et seulement si

$$\frac{n\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \left(\sum_{i=1}^n (x_i - m)\right)^2}{\delta} \geq n$$

Or à m fixé, lorsque $\delta \to \infty$, le membre de gauche tend vers 0.
La concavité est donc une impasse.

Soit $\delta > 0$ fixé. Cherchons le maximum de $\psi_\delta : m \mapsto \psi(m, \delta)$. Il s'agit d'une parabole de degré 2 qui atteint son maximum en $M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$. Notons que M est indépendant de δ, donc

$$\forall \delta > 0, \forall m \in \mathbb{R}, \psi(m, \delta) \leq \psi(M, \delta)$$

et il reste à maximiser $\delta \mapsto \psi(M, \delta)$. Il s'agit d'une fonction d'une variable et on montre facilement que l'annulation de la dérivée fournit un maximum global en $\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - M)$.
En conclusion, $\hat{\theta} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right]\right)^2)$

Exercice 7.10

Soient $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\beta \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ et $X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose $X^T X$ inversible. Résoudre $\min_\beta (y - X\beta)^T (y - X\beta)$.

Comme $(y - X\beta)^T(y - X\beta) = \|y - X\beta\|^2$, le problème revient à chercher la distance de y à $\operatorname{Im} X$.
On sait que cette distance est réalisée pour la projection orthogonale de y sur $\operatorname{Im} X$. Soit $x, z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle Xz, y - Xx\rangle &= \langle Xz, y\rangle - \langle Xz, Xx\rangle \\ &= z^T X^T y - z^T X^T X x \\ &= z^T (X^T y - X^T X x) \end{aligned}$$

La quantité précédente est nulle quel que soit z dès lors que $X^T y - X^T X x = 0$.
Il suffit donc de poser $x = (X^T X)^{-1} X^T y$.

Avec le calcul précédent et la caractérisation de la projection orthogonale, le β cherché est $(X^TX)^{-1}X^Ty$ et la distance minimale vaut

$$\|y - X(X^TX)^{-1}X^Ty\|^2$$

Exercice 7.11

Pour $y \in \mathbb{R}$, étudier $f : x \mapsto \dfrac{e^{y-x}}{(1+e^{y-x})^2}$.

La dérivée de f en x est donnée par $\dfrac{e^{x+y}\left(e^y - e^x\right)}{\left(e^x + e^y\right)^3}$.
Elle est > 0 tant $x < y$, < 0 lorsque $x > y$ et nulle en $x = y$. f admet donc un maximum global en y. Comme sa limite en $\pm\infty$ est 0, elle n'admet pas de minimum local ou global.

Exercice 7.12

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Résoudre $\max_\theta e^{-\sum_{i=1}^n x_i}\mathbb{1}_{\theta \leq \inf_i x_i}$

La fonction objectif vaut $e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$ tant que $\theta \leq \min_i x_i$ et 0 si $\theta > \min_i x_i$. Son maximum est donc $e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$.

Exercice 7.13

$\square$

Très calculatoire. On trouvera des calculs similaires dans les exercices 1.15 et 1.16.

Exercice 7.14

$\square$

Il s'agit du maximum de vraisemblance de la loi normale multivariée. Le calcul est classique mais difficile à mener sans les outils adéquats. On trouvera les détails dans Magnus, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics* au Chapitre 15.

Exercice 7.15

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{q}\|y\|_2^q = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{p}\|x\|_2^p \right)$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Discuter selon que $\langle a, y \rangle$ est ≥ 0 ou ≤ 0 de la solution du problème

$$\max_{\langle a,x \rangle \leq 0} \left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{p}\|x\|_2^p \right)$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Posons $f : x \mapsto \langle x, y \rangle - \frac{1}{p}\|x\|_2^p$. f est concave comme combinaison à coefficients positifs de deux fonctions concaves : $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire donc concave et $x \mapsto \|x\|_2^p$ est convexe :

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_2^p &\leq ((1-\lambda)\|x\|_2 + \lambda\|y\|_2)^p \quad \text{par inégalité triangulaire et croissance de } x^p \\
&\leq (1-\lambda)\|x\|_2^p + \lambda\|y\|_2^p \quad \text{par convexité de } x^p \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ pour } x \geq 0
\end{aligned}$$

de sorte que $x \mapsto -\|x\|_2^p$ est concave.

En composant $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2^2$ et $\gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{p/2}$, la fonction $x \mapsto \|x\|_2^p$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et son gradient est donné par $px\|x\|_2^{p-2}$.
Le gradient de $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est donné par y, de sorte que le gradient de f en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est donné par

$$\nabla f(x) = y - x\|x\|_2^{p-2}$$

On note que

$$\nabla f(x) = 0 \implies y = x\|x\|_2^{p-2} \implies \|y\|_2 = \|x\|_2^{p-1} \implies \|x\|_2 = \|y\|_2^{\frac{1}{p-1}}$$

• Si $y = 0$, le problème est trivial.
• Si $y \neq 0$, $\left(\|y\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} y \right)$ est un point $\neq 0$ qui annule le gradient. Par concavité de f, c'est un maximum local, donc un maximum global. Par ailleurs,

$$f(\|y\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} y) = \frac{1}{q}\|y\|_2^q$$

comme voulu.

2. Dans cette question on occulte le fait que f n'est a priori pas différentiable en 0 (on peut par exemple supposer que $p \geq 2$, auquel cas $x \mapsto x^{p/2}$ est dérivable

en 0).
Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Le problème posé s'écrit $\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.c. } \langle a, x\rangle \leq 0$.

f est concave et la contrainte est affine : on a qualification en tout x et toute solution du système KKT est un maximum de f sur l'ensemble des contraintes.

Le système en (x, λ) s'écrit $\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \langle a, x\rangle \leq 0 \\ \lambda\langle a, x\rangle = 0 \\ y - x\|x\|_2^{p-2} - \lambda a = 0 \end{cases}$

1. Si $\lambda = 0$:
   On retombe sur le problème non contraint, donc $x = \|y\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} y$.
   Alors $\langle a, x\rangle \leq 0 \iff \langle a, y\rangle \leq 0$. Par conséquent, si $\langle a, y\rangle \leq 0$, $(x, \lambda) = (\|y\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} y, 0)$ est solution du système.

2. Si $\langle a, x\rangle = 0$:
   De $y - x\|x\|_2^{p-2} - \lambda a = 0$ on tire $\langle y, a\rangle = \lambda\|a\|_2^2$
   (a) Si $a = 0$: On retombe sur le problème non contraint et $\langle a, x\rangle \leq 0$ est satisfaite. $(\|y\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} y, \lambda)$ où λ est ≥ 0 quelconque est alors solution du système.

   (b) Si $a \neq 0$: On a $\lambda = \frac{\langle y,a\rangle}{\|a\|_2^2}$
      i. Si $\langle y, a\rangle < 0$: $\lambda < 0$ et le système n'admet pas de solution.
      ii. Si $\langle y, a\rangle \geq 0$: on a $x\|x\|_2^{p-2} = y - \frac{\langle y,a\rangle}{\|a\|_2^2} a$. Le membre de droite est la projection orthogonale de y sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$, on le note $p_a(y)$. Alors $x = \|p_a(y)\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} p_a(y)$ et $\lambda = \frac{\langle y,a\rangle}{\|a\|_2^2}$.

Conclusion :
Si $\langle y, a\rangle \leq 0$: le maximum cherché est atteint en $\|y\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} y$ et vaut $\frac{1}{q}\|y\|_2^q$.
Si $\langle y, a\rangle \geq 0$: le maximum cherché est atteint en $\|p_a(y)\|_2^{\frac{2-p}{p-1}} p_a(y)$ et vaut $\frac{1}{q}\|p_a(y)\|_2^q$
On remarque que ces quantités coincident lorsque $\langle y, a\rangle = 0$.

Exercice 7.16

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que si f est majorée sur $\mathbb{R}^n$, alors f est constante.
2. Montrer qu'une fonction f définie sur K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe sur K, atteint son maximum en un point extrême de K.

1. Si f est majorée sur $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(tv)$ est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme elle est majorée, d'après l'exercice 5.21, elle est constante. Il existe alors C_v telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tv) = C_v$.
Pour $v, v' \in \mathbb{R}$, $C_v = f(0 \cdot v) = f(0) = f(0 \cdot v') = C_{v'}$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}^n$.

2. f étant continue sur le compact K, elle admet un maximum, atteint en x_0. Supposons par l'absurde que x_0 n'est pas un point extrême. Alors on dispose de $y, z \in K$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $x_0 = (1-\lambda)y + \lambda z$. Donc

$$f(x_0) = f((1-\lambda)y + \lambda z) \leq (1-\lambda)f(y) + \lambda f(z) < \max(f(y), f(z))$$

ce qui contredit la maximalité de $f(x_0)$.
Tous les points où f atteint son maximum sont donc extrêmes.

8. Optimisation sous contraintes

Exercice 8.1

Résoudre

1. $\max x+y$ s.c. $y \leq 0,\ y \geq x^3$
2. $\max x+2yx+2y-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$ s.c. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1$
3. $\min x^3+y^2$ s.c. $x^2+y^2 \leq \left(\frac{5}{4}\right)^2,\ 2x+y+\frac{5}{4} \geq 0$
4. $\min x$ s.c. $x \leq 0,\ y \geq 0,\ y \leq (1+x)^3$
5. $\max xy-x^2-y^2$ s.c. $2x+y \geq 5,\ y \geq 3$

1. Soit (x,y) tel que $y \leq 0$ et $y \geq x^3$. Alors $x^3 \leq 0$ donc $x \leq 0$ et $x+y \leq 0$. Cette borne est atteinte en $(0,0)$ par exemple. Le maximum cherché est donc 0.

2. On note $f : (x,y) \mapsto x+2yx+2y-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$ et $K = \{(x,y),\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. f est continue, K est borné (inclus dans $[0,1]^2$) et fermé (intersection de fermés), donc compact. Ceci fournit l'existence du maximum cherché. Les contraintes sont affines, on a donc qualification en tout point. Par conséquent, tout maximum local de f sur K est solution du système KKT.

Le système s'écrit $\begin{cases} \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 1 \\ \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_2 y = 0 \\ \lambda_3(1-x-y) = 0 \\ 1+2y-x+\lambda_1-\lambda_3 = 0 \\ 2x+2-y+\lambda_2-\lambda_3 = 0 \end{cases}$

1. Si $\lambda_1 = 0$:
   $\lambda_3 = 1+2y-x$ et $\lambda_2 = \lambda_3-2x-2+y = -3x+3y-1$
   (a) Si $\lambda_2 = 0$:
   Alors $x = y-\frac{1}{3}$
      i. Si $\lambda_3 = 0$:
      $x = 2y+1$ donc $y-\frac{1}{3} = 2y+1$ ie $y = -\frac{4}{3}$ NON
      ii. Si $1-x-y = 0$:
      $x = 1-y$ donc $y-\frac{1}{3} = 1-y$ ie $y = \frac{2}{3}$ et $x = \frac{1}{3}$, ce qui donne $\lambda_3 = 2$. Réciproquement, on vérifie que ce 5−uplet est bien solution.
   (b) Si $y = 0$:
   $\lambda_3 = 1-x$ et $\lambda_2 = -3x-1$

   i. Si $\lambda_3 = 0$:
      $x = 1$ et $\lambda_2 = -4$ NON
   ii. Si $1 - x = 0$:
      $x = 1$ et $\lambda_2 = -4$ NON
2. Si $x = 0$:
   (a) Si $\lambda_2 = 0$:
      $\lambda_3 = \lambda_1 + 2y + 1$ et $\lambda_3 = 2 - y$
      i. Si $\lambda_3 = 0$:
         $y = 2$ donc $\lambda_1 = -5$ NON
      ii. Si $1 - y = 0$:
         $y = 1$ donc $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_1 = -2$ NON
   (b) Si $y = 0$:
      $\lambda_3 = 0$ donc $\lambda_1 = -1$ NON

<u>Conclusion</u> : Le système admet une unique solution : $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$. f admet donc un unique maximum local sur K, qui est donc aussi le maximum global de f sur K. On a $f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{11}{6}$.

3. Posons $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^2$, $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2$, $g_2 : (x, y) \mapsto -2x - y - \frac{5}{4}$ et $K = \{(x, y),\ g_1(x, y) \leq 0\ , g_2(x, y) \leq 0\}$.

f est continue, K est fermé (intersection de fermés) et borné (inclus dans le disque centré en 0 de rayon 5/4) donc compact. f admet donc un minimum global sur K.

g_1 est convexe (trivial après calcul de la Hessienne) et g_2 est affine donc convexe. Par ailleurs, au point $(-\frac{5}{8}, \frac{5}{8})$, g_1 vaut $\frac{25}{64} + \frac{25}{64} - \frac{25}{16} < 0$ et g_2 vaut $-\frac{5}{8} < 0$. Les conditions de Slater sont donc satisfaites, donc la contrainte est qualifiée est en tout point de K. Tout minimum local de f sur K est donc solution du système KKT.

Le système s'écrit $\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\ 2x + y + \frac{5}{4} \geq 0 \\ \lambda_1(x^2 + y^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2) = 0 \\ \lambda_2(2x + y + \frac{5}{4}) = 0 \\ 3x^2 + 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 = 0 \\ 2y + 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \end{cases}$

1. Si $\lambda_1 = 0$:
   Alors $3x^2 = 2\lambda_2$ et $\lambda_2 = 2y$ donc $3x^2 = 4y$.
   (a) Si $\lambda_2 = 0$:
      Alors $x = y = 0$. Réciproquement, on vérifie que ce quadruplet est bien solution du système.

   (b) Si $2x+y+\frac{5}{4}=0$:
   $y=-2x-\frac{5}{4}$ donc $3x^2=-8x-5$ donc $x\in\{-1,-\frac{5}{3}\}$.
   Pour $x=-1$, on a $y=\frac{3}{4}$, $\lambda_2=\frac{3}{2}$. Réciproquement, on vérifie que ce quadruplet est bien solution du système.
   Pour $x=-\frac{5}{3}$, on a $y=\frac{25}{12}$ et on vérifie que $g_1(-\frac{5}{3},\frac{25}{12})>0$ NON

2. Si $x^2+y^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2$:

   (a) Si $\lambda_2=0$:
   $2y(1+\lambda_1)=0$ donc $y=0$ donc $x\in\{\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\}$.
   De $3x^2+2\lambda_1 x=0$ on a $x\leq 0$ donc $x=-\frac{5}{4}$.
   Alors $g_2(-\frac{5}{4},0)=\frac{5}{4}>0$ NON

   (b) Si $2x+y+\frac{5}{4}=0$:
   $y=-2x-\frac{5}{4}$ donc $x^2+(2x+\frac{5}{4})^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2$ ie $x\in\{-1,0\}$.
   Si $x=-1$, alors $y=\frac{3}{4}$, $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=\frac{3}{2}$ (solution qui a déjà été trouvée).
   Si $x=0$, alors $y=-\frac{5}{4}$, $\lambda_2=0$ et $\lambda_1=-1$ NON

<u>Conclusion</u> : Le système admet deux solutions : $x=y=\lambda_1=\lambda_2=0$ et $x=-1$, $y=\frac{3}{4}$, $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=\frac{3}{2}$. On sait que parmi ces deux solutions se trouve celle qui réalise le minimum global de f sur K. Or on a $f(0,0)=0>f(-1,\frac{3}{4})=-\frac{7}{16}$. Le minimum cherché vaut donc $\frac{-7}{16}$ et est atteint en $(-1,\frac{3}{4})$.

4. Soit (x,y) tel que $x\leq 0$, $y\geq 0$ et $y\leq(1+x)^3$. Alors $(1+x)^3\geq 0$, donc $1+x\geq 0$ donc $x\geq -1$. Cette borne est atteinte en $(-1,0)$ qui vérifie par ailleurs toutes les contraintes. Le minimum cherché est donc -1.

5. Posons $f:(x,y)\mapsto xy-x^2-y^2$ et $K=\{(x,y)\ 2x+y\geq 5,\ y\geq 3\}$.
f est continue et K est fermé. Par ailleurs, f est négativement coercive, au sens où $f(x,y)\xrightarrow[\|(x,y)\|\to\infty]{}-\infty$. En effet,

$$f(x,y)=-(x^2+y^2)+xy\leq-(x^2+y^2)+\frac{x^2+y^2}{2}=-\frac{x^2+y^2}{2}\xrightarrow[\|(x,y)\|\to\infty]{}-\infty$$

f admet donc un maximum global sur K.

Les contraintes sont affines, donc il y a qualification en tout point de K. Tout maximum local de f sur K est donc solution du système KKT.

Le système s'écrit $\begin{cases}\lambda_1,\lambda_2\geq 0\\ 2x+y\geq 5\\ y\geq 3\\ \lambda_1(2x+y-5)=0\\ \lambda_2(y-3)=0\\ y-2x+2\lambda_1=0\\ x-2y+\lambda_2=0\end{cases}$

1. Si $\lambda_1 = 0$:
   On a $y = 2x$.
   (a) Si $\lambda_2 = 0$:
   $x = 2y$ donc $y = 4y$ ie $y = 0$ NON
   (b) Si $y = 3$:
   Alors $x = \frac{3}{2}$ et $\lambda_2 = 2y - x = \frac{9}{2}$. Réciproquement on vérifie que le quadruplet est solution du système.
2. Si $2x + y = 5$:
   (a) Si $\lambda_2 = 0$:
   $x = 2y$ donc $y = 5 - 4y$ ie $y = 1$ NON
   (b) Si $y = 3$:
   $x = 1$ donc $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ NON

Conclusion : Le système admet une unique solution $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{9}{2}$. f admet donc un unique maximum local, qui aussi le maximum global de f sur K, réalisé en $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$. Par ailleurs, $f(\frac{3}{2}, 3) = -\frac{27}{4}$.

Exercice 8.2

Soient $\alpha \in]0,1[$, $\beta \in]0,1[$, $p > 0$, $q > 0$ et $w > 0$.
Résoudre $\max x^\alpha y^\beta \quad$ s.c. $\quad px + qy = w$

Afin que x^α et y^β soient bien définis, on ajoute les contraintes $x \geq 0$ et $y \geq 0$. La fonction objectif n'étant potentiellement pas différentiable en $(0,0)$, on évite d'utiliser Lagrange ou KKT.

Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, y \geq 0, px + qy = w\}$. Alors K fermé et inclus dans $[0, \frac{w}{p}] \times [0, \frac{w}{q}]$ donc borné. La fonction objectif étant continue, le problème admet une solution.

Considérons le problème $\max \frac{x^\alpha (w-px)^\beta}{q^\beta} \quad$ s.c. $\quad x \in [0, \frac{w}{p}]$. Par le même argument, il admet une solution. Montrons que toute solution de ce problème est solution du problème de départ (ie que le maximum du second problème est le maximum du problème de départ).
Soit $x_0 \in [0, \frac{w}{p}]$ qui maximise $\frac{x^\alpha (w-px)^\beta}{q^\beta}$ sur $[0, \frac{w}{p}]$. Montrons que $(x_0, \frac{w-px_0}{q})$ réalise le maximum dans le premier problème : soit $(x,y) \in K$, alors $y = \frac{w-px}{q}$, donc $x^\alpha y^\beta = \frac{x^\alpha (w-px)^\beta}{q^\beta}$ avec $x \in [0, \frac{w}{p}]$. Donc $x^\alpha y^\beta \leq \frac{x_0^\alpha (w-px_0)^\beta}{q^\beta}$. Cette borne est par ailleurs atteinte en $(x_0, \frac{w-px_0}{q})$ qui est bien dans K.

Il reste à résoudre $\max \frac{x^\alpha (w-px)^\beta}{q^\beta} \quad$ s.c. $\quad x \in [0, \frac{w}{p}]$. C'est un problème à une variable qu'on résoud par en passant au log (pour $x \in]0, \frac{w}{p}[$) puis en calculant la dérivée.

Le maximum est atteint en $\frac{w}{p}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et il vaut

$$\left(\frac{w}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{q}\right)^{\beta}$$

Exercice 8.3

On considère $\max xy \quad \text{s.c.} \quad 2x^2+y\leq 4,\ x+y^2\leq 5,\ x\geq 0,\ y\geq 0$
Représenter le domaine des contraintes et montrer qu'il existe une solution de KKT et que cette solution est encore parmi celles qu'on obtient en supprimant les conditions $x\geq 0$ et $y\geq 0$.

Soit $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+y\leq 4,\ x+y^2\leq 5,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$. Pour $(x,y)\in K$, $0\leq x\leq x+y^2\leq 5$ et $0\leq y\leq y+2x^2\leq 4$ donc K est borné et fermé, donc compact et le problème admet une solution.

Posons $g_1:(x,y)\mapsto 2x^2+y-4$, $g_2:(x,y)\mapsto x+y^2-5$, $g_3:(x,y)\mapsto -x$ et $g_4(x,y)\mapsto -y$. g_1,g_2,g_3,g_4 sont convexes et en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in K$, $g_i(\frac{1}{2},\frac{1}{2})<0$ pour tout i. La condition de Slater est satisfiée et la contrainte est donc qualifiée en tout point.
Le maximum cherché est donc solution du système KKT

$$\begin{cases}\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\geq 0\\ 2x^2+y\leq 4\\ x+y^2\leq 5\\ x\geq 0\\ y\geq 0\\ \lambda_1(2x^2+y-4)=0\\ \lambda_2(x+y^2-5)=0\\ \lambda_3x=0\\ \lambda_4y=0\\ y-4\lambda_1x-\lambda_2+\lambda_3=0\\ x-\lambda_1-2\lambda_2y+\lambda_4=0\end{cases}$$

Or, si $x=0$ ou $y=0$, la fonction objectif xy est nulle et (x,y) ne réalise le maximum de xy sur K (en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ la fonction vaut $\frac{1}{4}>0$). Pour le 6-uplet $(x_0,y_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ solution du système réalisant le maximum cherché, on doit donc avoir $x_0\neq 0$ et $y_0\neq 0$, ce qui implique $\lambda_3=0$ et $\lambda_4=0$.

$(x_0, y_0, \lambda_1, \lambda_2)$ est donc solution du système $\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ 2x^2 + y \leq 4 \\ x + y^2 \leq 5 \\ \lambda_1(2x^2 + y - 4) = 0 \\ \lambda_2(x + y^2 - 5) = 0 \\ y - 4\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ x - \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \end{cases}$

qui est le système KKT associé au problème

$$\max xy \quad \text{s.c.} \quad 2x^2 + y \leq 4,\ x + y^2 \leq 5$$

Exercice 8.4

Résoudre $\max xy \quad \text{s.c.} \quad x + 2y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq x_0$ en discutant selon x_0.

Posons $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq x_0\}$.
On note que pour $(x, y) \in K$, comme $y \geq 0$, $0 \leq x \leq x + 2y \leq 4$ et comme $x \geq 0$, $0 \leq 2y \leq x + 2y \leq 4$ donc $0 \leq y \leq 2$. K est donc borné et fermé, donc compact.
Par ailleurs, les contraintes sont affines donc on a qualification en tout point.

Si $x_0 < 0$, $K = \emptyset$.
Si $x_0 > 4$, $K = \emptyset$ puisque $(x, y) \in K \implies x \leq 4$.
Si $x_0 = 0$, alors $(x, y) \in K \implies x = 0 \implies xy = 0$ et le maximum cherché vaut 0.
Si $x_0 \in]0, 4]$, on considère $x \in]0, \min(4, x_0)[$ et $y = \frac{4-x}{2}$. Alors $(x, y) \in K$ et $xy > 0$. Le même argument que dans l'exercice 8.3 implique que le maximum cherché est parmi les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ x \leq x_0 \\ \lambda_1(x + 2y - 4) = 0 \\ \lambda_2(x - x_0) = 0 \\ y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x - 2\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

1. Si $\lambda_1 = 0$:
   Alors $x = 0$
   (a) Si $\lambda_2 = 0$:
   $y = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad$ OK
   (b) Si $x = x_0$: Alors $x_0 = 0 \quad$ NON

2. Si $x+2y=4$:
   (a) Si $\lambda_2 = 0$:
   $y=\lambda_1$ et $x=2\lambda_1$ donc $y=\frac{1}{2}(4-2y)$ donc $y=1$ et $x=2$ et $\lambda_1=1$.
   On vérifie réciproquement que le quadruplet $(2,1,1,0)$ est bien solution du système, **à condition que $\mathbf{x_0} \geq \mathbf{2}$**.
   (b) Si $x=x_0$:
   Alors $y=\frac{4-x_0}{2}$, $\lambda_1=\frac{x_0}{2}$ et $\lambda_2=y-\lambda_1=2-x_0$.
   On vérifie réciproquement que le quadruplet $(x_0, \frac{4-x_0}{2}, \frac{x_0}{2}, 2-x_0)$ est bien solution du système, **à condition que $\mathbf{x_0} \leq \mathbf{2}$**

En conclusion, si $x_0 \in]0,2]$ le problème admet une solution en $(2,1)$ et le maximum cherché vaut 2.
Si $x_0 \in [2,4]$, le problème admet une solution en $(x_0, \frac{4-x_0}{2})$ et le maximum cherché vaut $\frac{x_0(4-x_0)}{2}$.

Exercice 8.5

□

Exercice 8.6

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $p>0$. Déterminer

$$\min e^{\|x\|^2} + \langle a, x\rangle \quad \text{s.c.} \quad \|x\| \leq p$$

Posons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\|x\|^2} + \langle a, x\rangle$. La fonction $x \mapsto \|x\|^2$ étant différentiable sur $\mathbb{R}^n$, f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Le gradient de f en $x \in \mathbb{R}^n$ vaut par ailleurs $2e^{\|x\|^2}x + a$ (cf chapitre 1 pour la méthode de calcul).
Remarquons que le problème se réécrit

$$\min e^{\|x\|^2} + \langle a, x\rangle \quad \text{s.c.} \quad \|x\|^2 \leq p^2$$

et posons $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|^2 - p^2$, de sorte que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, de gradient en x donné par $2x$.

Avec $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$, K est fermé et borné par p, donc compact, donc f admet un minimum sur K.
Par ailleurs, g est convexe ($\|\cdot\|$ est convexe par inégalité triangulaire et $x \mapsto x^2$ est croissante et convexe) et comme $p>0$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x) < 0$. La condition de Slater est satisfaite et la contrainte est qualifiée en tout point.

Le minimum cherché doit donc apparaitre comme solution du système KKT

(*Remarque* : comme f est convexe (somme de deux fonctions convexes), toute solution du système KKT est un minimum global de f sur K.)

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \|x\|^2 \leq p^2 \\ \lambda(\|x\|^2 - p^2) = 0 \\ 2e^{\|x\|^2}x + a + 2\lambda x = 0 \end{cases}$$

1. Si $\lambda = 0$:
   $2e^{\|x\|^2}x = -a$ donc $2\|x\|e^{\|x\|^2} = \|a\|$. Posons donc $\varphi : x \mapsto 2xe^{x^2}$ et notons que φ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que $\|x\| = \varphi^{-1}(\|a\|)$, d'où

   $$x = -\frac{e^{-\varphi^{-1}(\|a\|)^2}}{2}a$$

   Le couple $(-\dfrac{e^{-\varphi^{-1}(\|a\|)^2}}{2}a, 0)$ est solution du système à condition que la norme de la première composante (qui vaut $\varphi^{-1}(\|a\|)$ d'après le calcul précédent) est inférieure à p, ie $\varphi^{-1}(\|a\|) \leq p$ soit encore $\|a\| \leq 2pe^{p^2}$.
2. Si $\|x\| = p$:
   Alors $(\underbrace{2e^{p^2} + \lambda}_{>0})x = -a$, donc $(2e^{p^2} + \lambda)p = \|a\|$ ie $\lambda = \frac{\|a\|}{p} - 2e^{p^2}$.

   Donc $\frac{\|a\|}{p}x = -a$ ie $x = -\frac{p}{\|a\|}a$. Le couple $(-\dfrac{p}{\|a\|}a, \dfrac{\|a\|}{p} - 2e^{p^2})$ est solution du système à condition que la seconde composante soit ≥ 0 ie $\|a\| \geq 2pe^{p^2}$

<u>Conclusion</u> : Si $\|a\| \leq 2pe^{p^2}$, le problème admet une solution en $-\dfrac{e^{-\varphi^{-1}(\|a\|)^2}}{2}a$ et le minimum cherché vaut $e^{\varphi^{-1}(\|a\|)^2} - \frac{\|a\|^2}{2}e^{-\varphi^{-1}(\|a\|)^2}$.
Si $\|a\| \geq 2pe^{p^2}$, le problème admet une solution en $-\dfrac{p}{\|a\|}a$ et le minimum cherché vaut $e^{p^2} - p\|a\|$.

Exercice 8.7

□

Correspond exactement au 7.7

Exercice 8.8

Résoudre

1. Extr $x^2 + y^2$ s.c. $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$
2. $\max x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ s.c. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
3. $\max xy^2z^3$ s.c. $x + y + z = 6,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$

1. *Correction proposée par Théo Compérot*

On remarque assez rapidement que les conditions KKT semblent difficiles à résoudre et qu'une méthode géométrique semble plus adaptée. La contrainte $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4xy + 6y^2\}$ peut s'écrire comme l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$^tXAX = 1 \quad (*)$$

avec $A = \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ qui est symétrique définie positive : la contrainte K est donc une ellipse (qui est compacte, ce qui garantit l'existence d'une solution par continuité de la fonction objectif) dont les vecteurs propres donnent la direction des axes principaux de l'ellipse. Graphiquement (voir le graphique ci-dessous), il suffit de trouver la valeur des demi-petit axe et demi-grand axe de l'ellipse (qui correspondent respectivement à la demi-"hauteur" et la demi-"largeur" de l'ellipse) pour conclure. En effet le problème consiste à trouver les rayon du plus petit et du plus grand cercle tangents à l'ellipse. Le carré du demi-petit axe correspondra à la solution du problème de minimisation et le carré du demi-grand axe correspondra à solution du problème de maximisation. Pour trouver ces valeurs il suffit de diagonaliser A. En calculant son polynôme caractéristique, on trouve facilement une base orthonormée de vecteurs propres de A : $\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right)$ associée aux vecteurs propres $\lambda_1 = \frac{2}{140} = \frac{1}{70}$ et $\lambda_2 = \frac{7}{140} = \frac{1}{20}$. On peut donc écrire $A = PD^tP$ avec $A = \mathrm{diag}(\frac{1}{70}, \frac{1}{20})$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. En posant $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'équation $(*)$ se réécrit :

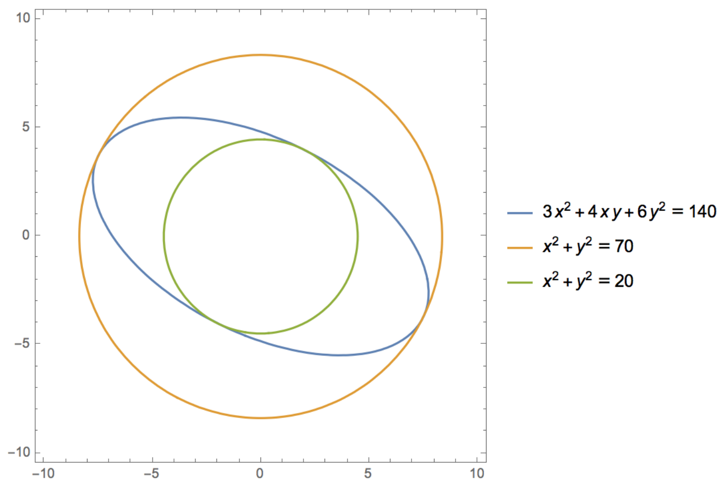
$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1$$

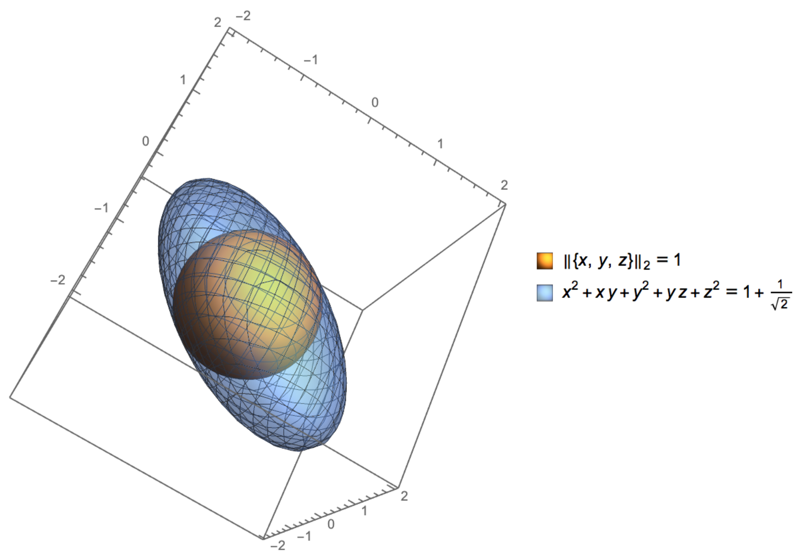
Soit :

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

où $a = \sqrt{70}$ et $b = \sqrt{20}$ sont (par définition) respectivement les demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse. La solution du problème de minimum est donc 20 atteinte en $\sqrt{20}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $-\sqrt{20}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

et celle du problème de maximum 70 atteinte en $\sqrt{70}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{14}\\-\sqrt{14}\end{pmatrix}$ et $-\sqrt{70}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\sqrt{14}\\\sqrt{14}\end{pmatrix}$.





2. *Correction proposée par Théo Compérot*

Ici le problème est inversé : on cherche à trouver l'ellipsoïde le plus "gros" qui soit tangent à la sphère unité (voir le graphique ci-dessus).

On note tout d'abord que la sphère unité est compacte, ce qui garantit l'existence d'une solution au problème (la fonction objectif est continue). La solution correspond au demi-petit axe de l'ellipsoïde qui sera atteinte en les deux vecteurs propres normés donnant la direction du demi-petit axe. Ici la forme quadratique q associée à la contrainte peut s'écrire $q(X) = {}^tXAX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. A est bien symétrique définie positive de valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. En posant comme précédemment P la matrice orthogonale constituée de vecteurs propres de A on peut réécrire la forme quadratique sous la forme :

$$q(u, v, w) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$$

On cherche la valeur de $k^2 > 0$ tel que l'ellipsoïde d'équation :

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2 = k^2$$

ait un demi-petit axe égal à 1. On obtient donc $k^2 = \lambda_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ solution du problème de maximisation, atteinte en les deux vecteurs propres normés associés à λ_1 : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $-\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. *Correction proposée par Théo Compérot*

L'ensemble $K' = \{(x,y) : x+y+z=6,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$ est compact car il est fermé (comme intersection de l'image réciproque d'un singleton par une application polynomiale et d'un octant de $\mathbb{R}^3$) et borné car $(x,y,z) \in [0,6]^3$. Le problème de maximisation sous la contrainte K' admet donc une solution. Notons que cette solution est strictement positive car pour $x=y=z=2$, on a $2 \times 2^2 \times 2^3 > 0$. Le problème de maximisation initial admet donc une solution. A fortiori, le problème de maximisation sous la contrainte $K'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y+z=6\}$ admet aussi une solution. La contrainte K'' est qualifiée en tout point (contrainte affine) et les conditions KKT pour le problème de maximisation sous K'' donnent :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ y^2z^3+\lambda=0 \\ 2xyz^3+\lambda=0 \\ 3xy^2z^2+\lambda=0 \end{cases}$$

On obtient donc $y^2z^3 = 2xyz^3 = 3xy^2z^2 \quad (*)$. Puisque $xyz \neq 0$ (solution strictement positive), le système $(*)$ conduit à $y=2x$ et $z=3x$. La condition d'appartenance à la contrainte K'' conduit finalement à une unique solution $1 \times 2^2 \times 3^3 = 108$ atteinte en $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.9

Déterminer $\max_{g \in E} \int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx$ où

$$E = \left\{ g \in L^2([-1,1]),\ \int_{-1}^{1} g^2(x)dx = 1,\ \int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2g(x)dx = 0 \right\}$$

$L^2([-1,1])$ est muni du produit scalaire classique $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
Soit $g \in E$. On tire parti de l'hypothèse

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2g(x)dx = 0$$

en introduisant $a,b,c \in \mathbb{R}$ quelconques et en écrivant

$$\int_{-1}^{1} x^3g(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)g(x)dx$$

Il est naturel d'appliquer Cauchy-Schwarz, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx &\leq \left(\int_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)^2dx\right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} g^2(x)dx\right)^{1/2}}_{=1}\\ &= \left(\int_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)^2dx\right)^{1/2}\end{aligned}$$

On cherche donc à minimiser le membre de droite sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et on montrera que le minimum est effectivement atteint pour une certaine fonction $g\in E$.

Or $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)^2dx$ est le carré de la distance de X^3 à $\text{Vect}(1,X,X^2)$, qui est réalisée pour la projection orthogonale de X^3 sur $\text{Vect}(1,X,X^2)$. On cherche donc une base orthonormée de $\text{Vect}(1,X,X^2)$. La famille en question étant échelonnée, elle est libre, et il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt : on trouve que $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{30}{7}}\left(X^2-\frac{1}{6}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(1,X,X^2)$.
Par Pythagore,

$$\begin{aligned}d(X^3,\text{Vect}(1,X,X^2))^2 &= \left\|X^3\right\|^2 - \left\langle X^3,\frac{1}{2}\right\rangle^2 - \left\langle X^3,\sqrt{\frac{3}{2}}X\right\rangle^2 - \left\langle X^3,\sqrt{\frac{30}{7}}\left(X^2-\frac{1}{6}\right)\right\rangle^2\\ &= \frac{2}{7} - 0 - \left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)^2 - 0\\ &= \frac{8}{175}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx &\leq \left(\int_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)^2dx\right)^{1/2}\\ &\leq \sqrt{\frac{8}{175}}\end{aligned}$$

On vérifie qu'il y a égalité dans cette inégalité pour $g = \dfrac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\left(X^3-\dfrac{3}{5}X\right)$
Remarque : $X^3-\frac{3}{5}X$ est le projeté de X^3 sur l'orthogonal de $\text{Vect}(1,X,X^2)$.

En conclusion, $\max\limits_{g\in E}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx = \sqrt{\frac{8}{175}}$