TD d'optimisation
ENSAE
1A

Gabriel Romon

Version du 23 février 2017

1. Différentielle

Exercice 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est C^1.
2. Montrer que f est C^2.

1. Les dérivées partielles de f en $(x,y) \neq (0,0)$ sont clairement définies et données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y^3\left(x^2+3y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3y^2\left(3x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$.
Comme pour tout $h \in \mathbb{R}$, $f(0,h) = f(h,0) = f(0,0) = 0$, les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont clairement continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$. Montrons que ces deux fonctions sont continues en $(0,0)$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $x = 0$ ou $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Dans la suite on supposera donc sans perte de généralité que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^3\left(x^2+3y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{|y|^3x^4}{(x^2+y^2)^2} + 3\frac{|y|^5x^2}{(x^2+y^2)^2} \leq |y|^3 + 3|y|x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x|^3 + 3|x|y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ par symétrie.
f admet donc des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. f est donc C^1.

2. $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ admettent clairement des dérivées partielles en tout $(x,y) \neq (0,0)$ données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2xy^5\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = \frac{x^2y^2\left(3x^4+14x^2y^2+3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

et par symétrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^5y\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{x^2y^2\left(3x^4+14x^2y^2+3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

Comme pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = \frac{\partial f}{\partial x}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,h) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = 0$$

Les quatre dérivées partielles sont clairement continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$.
Montrons qu'elles sont continues en $(0,0)$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme précédemment on peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Lemme : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \|(x,y)\|_2^2$
<u>Preuve</u> : Conséquence de l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ avec $a = |x|$ et $b = |y|$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| = \left|\frac{2xy^5\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right| &\leq \frac{2|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^3} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{2y^2(|xy|)^3}{\|(x,y)\|_2^6} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&\leq \underbrace{\frac{2y^2\|(x,y)\|_2^6}{\|(x,y)\|_2^6}}_{\text{Lemme}} + 6|x||y| \\
&= 2y^2 + 6|x||y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

La symétrie permet de conclure $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq 2x^2 + 6|x||y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
et une technique similaire donne

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y)\right| \leq 3y^2 + 14\|(x,y)\|_2^2 + 3x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. Donc f est C^2.

Exercice 1.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

f admet clairement des dérivées partielles en tout $(x,y) \neq (0,0)$ données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} + \log\left(x^2+y^2\right)\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\left(x^2+y^2\right)^{x-1}$.
Par composition et multiplication de fonction continues, ces dérivées partielles sont continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$.
f est donc différentiable en tout $(x,y) \neq (0,0)$ et son gradient en (x,y) est

$$\left(\left(x^2+y^2\right)^x \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} + \log\left(x^2+y^2\right)\right), 2xy\left(x^2+y^2\right)^{x-1}\right)$$

Exercice 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Calculer la différentielle de f.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé et $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,
$f((x, y) + (h_1, h_2)) = f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ yh_1 + xh_2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}^T$
Le candidat pour la différentielle de f en (x, y) est donc $(h_1, h_2) \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right]^T$.
Il suffit de prouver que $\dfrac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \xrightarrow[\|(h_1,h_2)\|\to 0]{} 0$
Le choix de la norme n'importe pas étant donné l'équivalence des normes en dimension finie. On choisit par exemple la norme 2.
$\dfrac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} = \dfrac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |h_1| \to 0$
en minorant trivialement le dénominateur par $\sqrt{h_2^2}$.

Exercice 1.4

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), X \mapsto X^T X$. Calculer la différentielle de f.

Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X + H) = f(X) + X^T H + H^T X + H^T H$.
Le candidat pour la différentielle de f en X est donc $H \mapsto X^T H + H^T X$.
Il suffit de prouver que $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \xrightarrow[\|H\|\to 0]{} 0$.
Par équivalence des normes en dimension finie, on choisit n'importe quelle norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{R})$ (celle qui dérive de la norme 2 par exemple). Alors $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H^T\|\|H\|}{\|H\|} = \|H^T\|$. La transposée étant linéaire, elle est continue en 0, donc $\|H^T\| \xrightarrow[\|H\|\to 0]{} 0$ ce qui achève la preuve.

Exercice 1.5

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (f(x^2y, z^2x), g(x^y, zx))$
Calculer, si elle existe, la différentielle de f.

Posons $\gamma : (x, y, z) \mapsto (x^2y, z^2x)$ et $\delta : (x, y, z) \mapsto (x^y, zx)$.
γ et f sont différentiables en tous points de leurs domaines, donc $f \circ \gamma$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$ avec

$$d(f \circ \gamma)(x, y, z) = df(\gamma(x, y, z)) \circ d\gamma(x, y, z)$$

On calcule $\operatorname{Jac}(\gamma)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}$. En passant des applications linéaires aux matrices,

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}(f\circ\gamma)(x,y,z) &= \operatorname{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \operatorname{Jac}(\gamma)(x,y,z)\\ &= \operatorname{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\end{aligned}$$

δ est définie et différentiable en (x,y,z) dès lors que $x > 0$. On calcule de même $\operatorname{Jac}(\delta)(x,y,z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout (x,y,z) avec $x > 0$,

$$\operatorname{Jac}(g\circ\delta)(x,y,z) = \operatorname{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

La différentielle de $f\circ\gamma$ en (x,y,z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\operatorname{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T$$

et celle de $g\circ\delta$ en (x,y,z) avec $x > 0$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\operatorname{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T$$

Soit (x,y,z) fixé avec $x > 0$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) &= \left(f\circ\gamma\left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix}\right), g\circ\delta\left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix}\right)\right)\\ &= (f\circ\gamma\left((x,y,z)\right) + d(f\circ\gamma)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right) + ||h||\varepsilon_1(||h||),\\ &\quad g\circ\delta\left((x,y,z)\right) + d(g\circ\delta)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right) + ||h||\varepsilon_2(||h||))\end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions telles que $\varepsilon_1(||h||) \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(||h||) \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$

$$\begin{aligned}&= \varphi((x,y,z)) + \left(d(f\circ\gamma)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right), d(g\circ\delta)\left(x,y,z\right)\left(h_1,h_2,h_3\right)\right)\\ &\qquad + ||h||\underbrace{\left(\varepsilon_1(||h||), \varepsilon_2(||h||)\right)}_{\xrightarrow[||h||\to 0]{} 0}\end{aligned}$$

La différentielle de φ en (x,y,z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left(\left[\operatorname{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T, \left[\operatorname{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T\right)$$

Exercice 1.6

Soit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $\varphi : E \to E, f \mapsto f^3$.
Montrer que φ est différentiable.

On n'est plus dans le cadre des espaces de dimension finie et la notion de différentielle est celle de Fréchet.
Pour $f \in E$ et $h \in E$, $\varphi(f+h) = \varphi(f) + 3f^2h + 3fh^2 + h^3$.
Le candidat pour la différentielle de φ en f est donc $h \mapsto 3f^2h$.
Il suffit de prouver que $h \mapsto 3f^2h$ est continue en 0 et que $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$.
Lemme : Pour $f, g \in E$, $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$.
Preuve : Par continuité de $|fg|$ sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\|fg\| = |f(c)g(c)| \leq |f(c)|\|g\| \leq \|f\|\|g\|$$

D'après le lemme, $\|3f^2h\| \leq 3\|f^2\|\|h\|$ ce qui prouve la continuité en 0.
On a $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\frac{\|fh^2\|}{\|h\|} + \frac{\|h^3\|}{\|h\|}$.
Le lemme donne $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\|f\|\|h\| + \|h\| \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$.

Exercice 1.7

Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec g'' bornée par $M \geq 0$.
Soit $I : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 (g \circ f)(t)dt$

1. Montrer que I est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que I est C^1.
3. Qu'en est-il si g est seulement C^1 ?

1. Pour $f \in E$ fixé et $h \in E$, $t \in [0,1]$, la formule de Taylor-Lagrange donne

$$g(f(t)+h(t)) = g(f(t)) + h(t)g'(t) + \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$$

où $\xi_t \in \mathbb{R}$ de sorte que $t \mapsto \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$ est continue sur $[0,1]$ et

$$I(f+h) = I(f) + \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt + \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt$$

Le candidat pour la différentielle de I en f est $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$.
Il suffit de prouver que $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$ est continue en 0 et

$$\frac{\left|\int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt\right|}{\|h\|} \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$$

On a $\left|\int_0^1 h(t)g'(f(t))dt\right| \leq \|h\| \underbrace{\int_0^1 |g'(f(t))|dt}_{\text{indépendant de } h}$ ce qui prouve la continuité en 0.

Comme $\left|\frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})\right| \leq \frac{M}{2}h(t)^2$,

$$\frac{\left|\int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt\right|}{\|h\|} \leq \frac{M}{2}\frac{\int_0^1 h(t)^2 dt}{\|h\|} \leq \frac{M}{2}\frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \frac{M}{2}\|h\| \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$$

2. Sur $\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ on institue la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{op}$ dérivant de la norme infinie.

Il s'agit de montrer la continuité de $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt \end{cases} \end{cases}$

Soit $f_0 \in E$ et $h \in E$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)| &= \left|\int_0^1 h(t)(g'(f(t)) - g'(f_0(t)))\right| \\ &\leq \int_0^1 |h(t)|M|f(t) - f_0(t)|dt \quad g'' \text{ est bornée par } M \text{ donc } g' \text{ est } M\text{-lipschitzienne} \\ &\leq M\|f - f_0\| \int_0^1 |h(t)|dt \\ &\leq M\|f - f_0\|\|h\| \end{aligned}$$

Donc $\frac{|\varphi(f)(h)-\varphi(f_0)(h)|}{\|h\|}$ est bornée par $M\|f - f_0\|$, d'où

$$\|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} = \sup_h \frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|} \leq M\|f - f_0\|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Avec $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$, $\|f - f_0\| \leq \delta \implies \|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} \leq \varepsilon$
ce qui prouve la continuité de φ en f_0.
3. Mon intuition me laisse penser que si g est deux fois dérivable sans être bornée (donc C^1), I n'est pas forcément différentiable. Obtenir un contre-exemple n'est pas évident, car I est tout de même continue (par uniforme continuité de g sur un compact).

Exercice 1.8

Soient E et F des evn avec F complet. Soit $D \subset E$ un ouvert.
On pose $B^2 = \{f : D \to F/\ f\ C^2, f \text{ bornée}, df \text{ bornée, et } d^2f \text{ bornée}\}$ et

$$\|f\| = \sup_{x\in D}(\|f(x)\| + \|df(x)\| + \|d^2f(x)\|)$$

Montrer que B^2 est complet.

On trouvera une présentation de l'intégrale des fonctions à valeurs dans un espace de Banach à l'adresse
`http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture_Notes/chap4.pdf`

Etant donné X un ensemble et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un evn, on note $B(X,Y)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans Y. On rappelle que si Y est complet, alors $B(X,Y)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,Y}$ définie par $\|f\|_{\infty,Y} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$.

On notera $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui dérive de $\|\cdot\|_F$. On rappelle que $(\mathcal{L}_c(E,F), \|\cdot\|_{op})$ est un Banach.

On notera $\|\cdot\|_{op'}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ qui dérive de $\|\cdot\|_{op}$, de sorte que $(\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F)), \|\cdot\|_{op'})$ est un Banach.

On rappelle que si $f \in B^2$ et $a \in D$, $df(a) \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $d^2f(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$. La norme définie dans l'énoncé est donc à prendre au sens suivant :

$$\|f\| = \sup_{x\in D}(\|f(x)\|_F + \|df(x)\|_{op} + \|d^2f(x)\|_{op'})$$

On prouve facilement les faits suivants : pour $f \in B^2$,
$\|f\| \geq \|f\|_{\infty,F}$
$\|f\| \geq \|df\|_{\infty,op}$
$\|f\| \geq \|d^2f\|_{\infty,op'}$

Soit (f_n) de Cauchy dans B^2 pour $\|\cdot\|$.
• D'après la remarque précédente, (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,F}$ dans $B(D,F)$ qui est complet, donc (f_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty,F}$ vers un $f \in B(D,F)$.
• D'après la remarque précédente, (df_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,op}$ dans $B(D, \mathcal{L}_c(E,F))$ qui est complet, donc (df_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty,op}$ vers un $\varphi \in B(D, \mathcal{L}_c(E,F))$.
• En tant que limites uniformes de fonctions continues, f et φ sont continues.
• Montrons que f est différentiable de différentielle φ.
Soit $a \in D$. Pour $h \in D$, et n quelconque,

$$f_n(a+h) - f_n(a) = \int_0^1 df_n(a+th)dt$$

La convergence des df_n vers φ étant uniforme, on a en passant à la limite

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \varphi(a+th)dt$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} &= \frac{\|\int_0^1 \varphi(a+th)-\varphi(a)(h)dt\|_F}{\|h\|_E} \\ &\leq \frac{\int_0^1 \|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op}\|h\|_E dt}{\|h\|_E} \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op} dt\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est continue on dispose de $\delta > 0$ tel que $\|x\|_F \leq \delta \implies \|\varphi(a+x)-\varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$. Pour $\|h\| \leq \varepsilon$ et $t \in [0,1]$ on obtient

$$\|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$$

donc $\dfrac{\|f(a+h)-f(a)-\varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} \leq \varepsilon$ dès que $\|h\| \leq \delta$.
f est donc différentiable sur D et sa différentielle est φ, qui est continue d'après la remarque précédente.
• Un raisonnement identique en remplaçant f_n par df_n montre que df est différentiable sur D, on note d^2f sa différentielle qui est continue.
• f est donc C^2, bornée, de différentielles bornées. Il reste à prouver que (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.
Etant donné $\varepsilon > 0$, on dispose de N, N', N'' tels que

$$\begin{array}{lll}\forall x \in D,\ n \geq N & \implies & \|f(x)-f_n(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ n \geq N' & \implies & \|df(x)-df_n(x)\|_{op} \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ n \geq N'' & \implies & \|d^2f(x)-df_n^2(x)\|_{op'} \leq \frac{\varepsilon}{3}\end{array}$$

Pour $n \geq \max(N, N', N'')$,

$$\|f(x)-f_n(x)\|_F + \|df(x)-df_n(x)\|_{op} + \|d^2f(x)-df_n^2(x)\|_{op'} \leq \varepsilon$$

et ceci pour tout $x \in D$, donc $\|f-f_n\| \leq \varepsilon$. Ceci achève la preuve.

Exercice 1.9

Soit E un $\mathbb{R}$-evn, $D \subset E$ un ouvert et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$. On suppose $\overline{D}$ compact, f continue, nulle à la frontière de D et f différentiable sur D.
Montrer qu'il existe $a \in D$ tel que $df(a) = 0$.

f est continue sur le compact $\overline{D}$ donc elle admet un maximum M et un maximum m atteints respectivement en α et $\beta \in \overline{D}$.
Si $m = M = 0$, f est nulle sur D donc pour tout $x \in D$, $df(x) = 0$.
Sinon, $m < 0$ ou $M > 0$. On suppose par exemple $M > 0$. Comme f est nulle sur $\overline{D} \setminus \mathring{D} = \overline{D} \setminus D$, on a $\beta \in D$. En β, f admet un maximum global (donc local), d'où $df(\beta) = 0$.

Exercice 1.10

Soient $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f(x,y,z) = (x + \varphi(yz), y + \psi(\frac{x}{z}))$.
Calculer la différentielle de f.

La démarche est identique à celle de l'exercice 1.5. En posant $f_1 : (x,y,z) \mapsto x + \varphi(yz)$ et $f_2 : (x,y,z) \mapsto y + \psi(\frac{x}{z})$, il suffit de démontrer que f_1 et f_2 sont différentiables en (x,y,z) pour obtenir la différentielle de f en (x,y,z) :

$$df(x,y,z) : (h_1,h_2,h_3) \mapsto (df_1(x,y,z)(h_1,h_2,h_3), df_2(x,y,z)(h_1,h_2,h_3))$$

On calcule

$$\mathrm{Jac}(f_1)(x,y,z) = (1, \varphi'(yz)z, \varphi'(yz)y)$$

et

$$\mathrm{Jac}(f_2)(x,y,z) = \left(\psi(\frac{x}{z})\frac{1}{z}, 1, -\psi(\frac{x}{z})\frac{x}{z^2}\right)$$

Exercice 1.11

1. Soient E, F, G, H des $\mathbb{R}$-evn. B est une forme bilinéaire continue de $F \times G$ dans H, $f : E \to F$ et $g : E \to G$.
   On suppose que f et g sont différentiables en $a \in E$. Montrer que $C : E \to H, x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a.
2. Soit E un espace vectoriel euclidien.
   (a) Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.
   (b) Déterminer la différentielle de $\psi : x \mapsto \|x\|^2$.
   (c) Déterminer et interpréter la différentielle de φ.

1. Soit $a \in E$. Pour $h \in E$,

$$\begin{aligned} C(a+h) =& C(a) + B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a)) \\ &+ \\ & B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) \end{aligned}$$

Le candidat pour la différentielle en a de f est $h \mapsto B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a))$.
Il suffit de prouver que

$$B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = o(\|h\|)$$

B étant bilinéaire continue, il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \|B(x,y)\| \leq K\|x\|\|y\|$$

On traite chaque terme de la somme séparément :

- $B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(f(a), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\to 0}$
- $\|B(df(a)(h), dg(a)(h))\| \leq K\|df(a)\|_{op}\|df(b)\|_{op}\|h\|^2$
- $B(df(a)(h), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(df(a)(h), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\to 0}$
- $B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h))}_{\to 0}$

La somme est bien $o(\|h\|)$.

2. a) $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire continue (d'après Cauchy-Schwarz). La question 1. implique que $\psi : x \mapsto \langle x, x\rangle$ est différentiable en tout $a \in E$. La fonction $\delta : x \mapsto \frac{1}{x}$ est différentiable en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc $\delta \circ \psi$ est différentiable en tout $a \in E \setminus \{0\}$.
$\pi : \mathbb{R} \times E \to E,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire continue, et d'après 1., $x \mapsto \pi(\delta \circ \psi(x), x)$ est différentiable en tout $x \in E \setminus \{0\}$.
Ceci s'écrit encore $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

b) Soit $x \in E$. Pour $h \in E$, $\psi(x+h) = \psi(x) + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2$.
La différentielle de ψ en x est donc $h \mapsto 2\langle x, h\rangle$.

c) D'après 1., la différentielle de φ en $x \neq 0$ est donnée par

$$\begin{aligned}
d\varphi(x)(h) &= \pi(\mathrm{Id}(x), d(\delta \circ \psi)(x)(h)) + \pi(d\,\mathrm{Id}(x)(h), \delta \circ \psi(x)) \\
&= x \cdot d\delta(\psi(x))(d\psi(x)(h)) + \frac{h}{\|x\|^2} \\
&= x \cdot -\frac{2\langle x, h\rangle}{(\|x\|^2)^2} + \frac{h}{\|x\|^2} \\
&= \frac{h}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, h\rangle x}{\|x\|^4}
\end{aligned}$$

Exercice 1.12

Déterminer toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

C'est un classique que l'on trouve dans n'importe quel livre de prépa.

Exercice 1.13

En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction $g : (x, y) \mapsto \max(x^2, y)$ est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 > y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = x^2$ sur un voisinage de (x, y). g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto 2xh_1$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 < y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = y$ sur un voisinage de (x, y) g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto h_2$.

En $(0, 0)$: $\dfrac{g(0, \frac{1}{n}) - g(0, 0)}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\dfrac{g(0, -\frac{1}{n}) - g(0, 0)}{-\frac{1}{n}} = 0$ donc g n'admet pas de dérivée partielle selon y en $(0, 0)$ donc g n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x^2 = y$ et $x \neq 0$.

$$\frac{g(x + \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{\frac{1}{n}} = \frac{\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2x$$

$$\frac{g(x - \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{-\frac{1}{n}} = \frac{y - y}{-\frac{1}{n}} = 0 \neq 2x$$

donc g n'admet pas de dérivée partielle selon x en (x, y) donc g n'est pas différentiable en (x, y).

Exercice 1.14

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers.
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{x^n y^p}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
Pour quelles valeurs de (n, p) f est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Quelles que soient les valeurs de n et p, f est différentiable en $(x, y) \neq (0, 0)$ par composition. f admet donc des dérivées partielles données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{nx^{n-1}y^p}{x^2 + y^2} - \frac{2x^{n+1}y^p}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{px^n y^{p-1}}{x^2 + y^2} - \frac{2x^n y^{p+1}}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

En $(0, 0)$: comme pour tout $h \in \mathbb{R}, f(0, h) = f(h, 0) = f(0, 0) = 0$, les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

On étudie plusieurs cas selon n et p. Si les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$, f est différentiable en $(0,0)$. Si ce n'est le pas on ne peut a priori rien dire.
On utilise les mêmes techniques de majoration que dans l'exercice 1.

1. Si $n \geq 4$: OK
2. Si $n = 3$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK
   (c) Si $p = 2$: OK
   (d) Si $p = 1$: OK
3. Si $n = 2$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
   (c) Si $p = 2$: OK
   (d) Si $p = 1$: Pour $t \in \mathbb{R}$ non nul,
   $$\frac{f\left((0,0) + t(1,1)\right) - f((0,0))}{t} = \frac{1}{2}$$
   f admet donc une dérivée directionnelle selon le vecteur $(1,1)$ qui vaut $\frac{1}{2}$.
   Si f était différentiable en $(0,0)$, son gradient donné par les dérivées partielles serait nul, donc la différentielle en $(0,0)$ serait aussi nulle, donc toutes les dérivées directionnelles seraient aussi nulles, ce qui n'est pas le cas. f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.
4. Si $n = 1$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
   (c) Si $p = 2$: Non par symétrie
   (d) Si $p = 1$: $f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, donc f n'est pas continue en 0, donc pas différentiable en $(0,0)$.

Conclusion : f est différentiable en $(0,0)$ pour tout $n \geq 1$ et $p \geq 1$ exceptés les couples $(n=2, p=1), (n=1, p=2), (n=1, p=1)$.

Exercice 1.15

Soit B dans $M_n(\mathbb{R})$.
Donner la différentielle de $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$

On choisit une norme d'opérateur $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère $V \subset GL_n(\mathbb{R})$ un voisinage de A tel que pour tout $X \in V$, $\|A^{-1}(X-A)\| < 1$. Calculons la différentielle de la fonction $M \to M^{-1}$ en A.
Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, $\|H\| \leq \delta \implies A + H \in V$.
Pour $\|H\| \leq \delta$, $(A+H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$.
Démontrons que $(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^k$. Comme $\|H\| \leq \delta$, $\|A^{-1}H\| < 1$ donc la série en question est absolument convergente, donc convergente. On a pour $N \geq 1$,

$$(I_n + A^{-1}H)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(A^{-1}H)^k = (-1)^N \underbrace{(A^{-1}H)^{N+1}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{}0} + I_n$$

En passant à la limite sur N on a l'égalité voulue.
Par conséquent

$$(A+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1}$$

La candidat pour la différentielle de l'inverse en A est donc $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
Il reste à remarquer que

$$\frac{\|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|}\|H\| \to 0$$

La fonction $A \mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ étant linéaire, la différentielle de φ en A est donnée par $H \mapsto -\operatorname{Tr}(A^{-1}HA^{-1}B)$

Exercice 1.16

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R}), x \mapsto A(x)$
Calculer la différentielle de $x \mapsto \ln\det A(x)$

Il est classique (cf Gourdon Analyse ou Cassini Algèbre 2) que la différentielle du déterminant en A est donnée par $H \mapsto \operatorname{Tr}((\operatorname{com} A)^T H)$ qui devient $H \mapsto \det A \operatorname{Tr}(A^{-1}H)$ lorsque A est inversible.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
d(\ln \circ \det \circ A)(a)(h) &= d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(h)) \\
&= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(1)) \\
&= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(\frac{dA}{dx}(a)) \\
&= h \cdot d\ln(\det A(a)) \left(d\det(A(a))(\frac{dA}{dx}(a)) \right) \\
&= h \cdot d\ln(\det A(a)) \left(d\det(A(a)) \left(\det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) \right) \right) \\
&= h \det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) d\ln(\det A(a))(1) \\
&= h \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)
\end{aligned}$$

La différentielle cherchée en a est donc $h \mapsto h \operatorname{Tr}\left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a)\right)$

Exercice 1.17

Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 1. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto f(xy) + g(\frac{x}{y})$ est différentiable en $(1, 1)$ et calculer sa différentielle en $(1, 1)$.

Soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ et $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.
On dispose de U un voisinage de $(1, 1)$ et V un voisinage de 1 tel que $\alpha(U) \subset V$ et $\beta(U) \subset V$. $\alpha : U \to V$ et $\beta : U \to V$ sont différentiables en $(1, 1)$.
Le théorème de composition s'applique : $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ sont différentiables en $(1, 1)$, donc φ aussi, avec

$$\begin{aligned}
d\varphi((1,1))(h_1, h_2) &= d(f \circ \alpha)(1,1)(h_1, h_2) + d(f \circ \beta)(1,1)(h_1, h_2) \\
&= (yh_1 + xh_2)f'(1) + (-\frac{y}{x^2}h_1 + \frac{h_2}{x})g'(1)
\end{aligned}$$

Exercice 1.18

Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ qui vérifient $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$ où $Z(x, y) = f(\frac{y}{x})$

?

Exercice 1.19

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ de classe C^2 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(tx) = t^2 f(x)$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $d^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$.

On rappelle que $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ s'identifie à l'espace des applications bilinéaires $\mathcal{L}_c(E \times E, F)$.
L'énoncé demande en réalité de montrer que pour tout $x \in E$,

$$d^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

Soit $x \in E$ fixé.
Posons $\alpha : \mathbb{R} \to E, t \mapsto tx$ et $\beta : \mathbb{R} \to F, t \mapsto t^2 f(x)$. $\mathbb{R}$ étant de dimension finie, toute application linéaire de $\mathbb{R}$ dans E est continue. α est clairement différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto hx$.
Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, $\beta(t+h) = \beta(t) + 2thf(x) + h^2 f(x)$ avec

$$\frac{\|h^2 f(x)\|_F}{|h|} = |h|\|f(x)\|_F \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$$

Donc β est différentiable en t de différentielle $h \mapsto 2thf(x)$

En différentiant l'égalité $f \circ \alpha = \beta$ en $t \in \mathbb{R}$ on a pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hdf(tx)(x) = 2thf(x)$ et donc

$$df(tx)(x) = 2tf(x) \quad (*)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Soit $\Pi : \mathcal{L}_c(E,F) \to F, L \mapsto L(x)$. Pour $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $H \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $\Pi(L+H) = (L+H)(x) = \Pi(x) + H(x)$.
Le candidat pour la différentielle en L est donc $H \mapsto H(x)$. Il suffit de montrer que cette application est continue.
Soit $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui dérive naturellement de $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
Alors

$$\frac{\|H(x)\|_F}{\|H\|_{op}} \leq \frac{\|H\|_{op}\|x\|_E}{\|H\|_{op}} \leq \|x\|_E$$

D'où la continuité.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to F, t \mapsto 2tf(x)$. On montre facilement que γ est différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto 2hf(x)$.

L'égalité $(*)$ se réécrit $\Pi \circ df \circ \alpha = \gamma$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(\Pi \circ df \circ \alpha)(t)(h) &= d\Pi(df \circ \alpha(t))(d(df \circ \alpha)(t)(h)) \\ &= d(df \circ \alpha)(t)(h)(x) \\ &= d(df)(tx)(hx)(x) \\ &= hd^2 f(tx)(x)(x) \end{aligned}$$

On a donc pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hd^2 f(tx)(x)(x) = 2hf(x)$, donc

$$d^2 f(tx)(x)(x) = 2f(x)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. En $t = 0$ on a

$$d^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

comme voulu.