TD d'optimisation
ENSAE
1A

Gabriel Romon

Version du 9 mars 2017

1. Différentielle

Exercice 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est C^1.
2. Montrer que f est C^2.

1. Les dérivées partielles de f en $(x,y) \neq (0,0)$ sont clairement définies et données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y^3(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
Comme pour tout $h \in \mathbb{R}, f(0,h) = f(h,0) = f(0,0) = 0$, les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont clairement continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$. Montrons que ces deux fonctions sont continues en $(0,0)$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $x = 0$ ou $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Dans la suite on supposera donc sans perte de généralité que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^3(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{|y|^3x^4}{(x^2+y^2)^2} + 3\frac{|y|^5x^2}{(x^2+y^2)^2} \leq |y|^3 + 3|y|x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x|^3 + 3|x|y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ par symétrie.
f admet donc des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. f est donc C^1.

2. $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ admettent clairement des dérivées partielles en tout $(x,y) \neq (0,0)$ données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2xy^5\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = \frac{x^2y^2\left(3x^4+14x^2y^2+3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

et par symétrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^5y\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{x^2y^2\left(3x^4+14x^2y^2+3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

Comme pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = \frac{\partial f}{\partial x}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,h) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = 0$$

Les quatre dérivées partielles sont clairement continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$.
Montrons qu'elles sont continues en $(0,0)$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme précédemment on peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Lemme : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \|(x,y)\|_2^2$
Preuve : Conséquence de l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ avec $a = |x|$ et $b = |y|$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| = \left|\frac{2xy^5\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right| &\leq \frac{2|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^3} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{2y^2(|xy|)^3}{\|(x,y)\|_2^6} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&\leq \underbrace{\frac{2y^2\|(x,y)\|_2^6}{\|(x,y)\|_2^6}}_{\text{Lemme}} + 6|x||y| \\
&= 2y^2 + 6|x||y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

La symétrie permet de conclure $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq 2x^2 + 6|x||y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
et une technique similaire donne

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y)\right| \leq 3y^2 + 14\|(x,y)\|_2^2 + 3x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. Donc f est C^2.

Exercice 1.2

> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
> Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

f admet clairement des dérivées partielles en tout $(x,y) \neq (0,0)$ données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} + \log\left(x^2+y^2\right)\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\left(x^2+y^2\right)^{x-1}$.
Par composition et multiplication de fonction continues, ces dérivées partielles sont continues en tout $(x,y) \neq (0,0)$.
f est donc différentiable en tout $(x,y) \neq (0,0)$ et son gradient en (x,y) est

$$\left(\left(x^2+y^2\right)^x \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} + \log\left(x^2+y^2\right)\right), 2xy\left(x^2+y^2\right)^{x-1}\right)$$

Exercice 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Calculer la différentielle de f.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé et $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,
$f((x, y) + (h_1, h_2)) = f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ yh_1 + xh_2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}^T$
Le candidat pour la différentielle de f en (x, y) est donc $(h_1, h_2) \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right]^T$.
Il suffit de prouver que $\dfrac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \xrightarrow[\|(h_1,h_2)\| \to 0]{} 0$
Le choix de la norme n'importe pas étant donné l'équivalence des normes en dimension finie. On choisit par exemple la norme 2.
$\dfrac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} = \dfrac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |h_1| \to 0$
en minorant trivialement le dénominateur par $\sqrt{h_2^2}$.

Exercice 1.4

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), X \mapsto X^T X$. Calculer la différentielle de f.

Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X + H) = f(X) + X^T H + H^T X + H^T H$.
Le candidat pour la différentielle de f en X est donc $H \mapsto X^T H + H^T X$.
Il suffit de prouver que $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$.
Par équivalence des normes en dimension finie, on choisit n'importe quelle norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{R})$ (celle qui dérive de la norme 2 par exemple). Alors $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H^T\|\|H\|}{\|H\|} = \|H^T\|$. La transposée étant linéaire, elle est continue en 0, donc $\|H^T\| \xrightarrow[\|H\| \to 0]{} 0$ ce qui achève la preuve.

Exercice 1.5

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (f(x^2y, z^2x), g(x^y, zx))$
Calculer, si elle existe, la différentielle de f.

Posons $\gamma : (x, y, z) \mapsto (x^2y, z^2x)$ et $\delta : (x, y, z) \mapsto (x^y, zx)$.
γ et f sont différentiables en tous points de leurs domaines, donc $f \circ \gamma$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$ avec

$$d(f \circ \gamma)(x, y, z) = df(\gamma(x, y, z)) \circ d\gamma(x, y, z)$$

On calcule $\mathrm{Jac}(\gamma)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}$. En passant des applications linéaires aux matrices,

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}(f\circ\gamma)(x,y,z) &= \mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \mathrm{Jac}(\gamma)(x,y,z) \\ &= \mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\end{aligned}$$

δ est définie et différentiable en (x,y,z) dès lors que $x > 0$. On calcule de même $\mathrm{Jac}(\delta)(x,y,z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout (x,y,z) avec $x > 0$,

$$\mathrm{Jac}(g\circ\delta)(x,y,z) = \mathrm{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

La différentielle de $f\circ\gamma$ en (x,y,z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T$$

et celle de $g\circ\delta$ en (x,y,z) avec $x > 0$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[\mathrm{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T$$

Soit (x,y,z) fixé avec $x > 0$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) &= \left(f\circ\gamma\left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix}\right), g\circ\delta\left(\begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= (f\circ\gamma\left((x,y,z)\right) + d(f\circ\gamma)(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) + ||h||\varepsilon_1(||h||), \\ &\quad g\circ\delta\left((x,y,z)\right) + d(g\circ\delta)(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) + ||h||\varepsilon_2(||h||))\end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions telles que $\varepsilon_1(||h||) \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(||h||) \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$

$$\begin{aligned}&= \varphi((x,y,z)) + \left(d(f\circ\gamma)(x,y,z)(h_1,h_2,h_3), d(g\circ\delta)(x,y,z)(h_1,h_2,h_3)\right) \\ &\quad + ||h||\underbrace{(\varepsilon_1(||h||), \varepsilon_2(||h||))}_{\xrightarrow[||h||\to 0]{} 0}\end{aligned}$$

La différentielle de φ en (x,y,z) est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left(\left[\mathrm{Jac}(f)(x^2y, z^2x)\cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T, \left[\mathrm{Jac}(g)(x^y, zx)\cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right]^T\right)$$

Exercice 1.6

Soit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $\varphi : E \to E, f \mapsto f^3$.
Montrer que φ est différentiable.

On n'est plus dans le cadre des espaces de dimension finie et la notion de différentielle est celle de Fréchet.
Pour $f \in E$ et $h \in E$, $\varphi(f+h) = \varphi(f) + 3f^2h + 3fh^2 + h^3$.
Le candidat pour la différentielle de φ en f est donc $h \mapsto 3f^2h$.
Il suffit de prouver que $h \mapsto 3f^2h$ est continue en 0 et que $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$.
Lemme : Pour $f, g \in E$, $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$.
Preuve : Par continuité de $|fg|$ sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\|fg\| = |f(c)g(c)| \leq |f(c)|\|g\| \leq \|f\|\|g\|$$

D'après le lemme, $\|3f^2h\| \leq 3\|f^2\|\|h\|$ ce qui prouve la continuité en 0.
On a $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\frac{\|fh^2\|}{\|h\|} + \frac{\|h^3\|}{\|h\|}$.
Le lemme donne $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\|f\|\|h\| + \|h\| \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$.

Exercice 1.7

Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec g'' bornée par $M \geq 0$.
Soit $I : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 (g \circ f)(t)dt$

1. Montrer que I est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que I est C^1.
3. Qu'en est-il si g est seulement C^1 ?

1. Pour $f \in E$ fixé et $h \in E$, $t \in [0,1]$, la formule de Taylor-Lagrange donne

$$g(f(t)+h(t)) = g(f(t)) + h(t)g'(t) + \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$$

où $\xi_t \in \mathbb{R}$ de sorte que $t \mapsto \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$ est continue sur $[0,1]$ et

$$I(f+h) = I(f) + \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt + \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt$$

Le candidat pour la différentielle de I en f est $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$.
Il suffit de prouver que $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$ est continue en 0 et

$$\frac{\left|\int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt\right|}{\|h\|} \xrightarrow[||h||\to 0]{} 0$$

On a $\left|\int_0^1 h(t)g'(f(t))dt\right| \leq \|h\| \underbrace{\int_0^1 |g'(f(t))|dt}_{\text{indépendant de } h}$ ce qui prouve la continuité en 0.

Comme $\left|\frac{h(t)^2}{2} g''(\xi_{h,t})\right| \leq \frac{M}{2} h(t)^2$,

$$\frac{\left|\int_0^1 \frac{h(t)^2}{2} g''(\xi_{h,t})dt\right|}{\|h\|} \leq \frac{M}{2} \frac{\int_0^1 h(t)^2 dt}{\|h\|} \leq \frac{M}{2} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \frac{M}{2}\|h\| \xrightarrow[||h|| \to 0]{} 0$$

2. Sur $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ on institue la norme d'opérateur $\| \cdot \|_{op}$ dérivant de la norme infinie.

Il s'agit de montrer la continuité de $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt \end{cases} \end{cases}$

Soit $f_0 \in E$ et $h \in E$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)| &= \left| \int_0^1 h(t)(g'(f(t)) - g'(f_0(t))) \right| \\ &\leq \int_0^1 |h(t)|M|f(t) - f_0(t)|dt \quad g'' \text{ est bornée par } M \text{ donc } g' \text{ est } M\text{-lipschitzienne} \\ &\leq M\|f - f_0\| \int_0^1 |h(t)|dt \\ &\leq M\|f - f_0\|\|h\| \end{aligned}$$

Donc $\frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|}$ est bornée par $M\|f - f_0\|$, d'où

$$\|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} = \sup_h \frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|} \leq M\|f - f_0\|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Avec $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$, $\|f - f_0\| \leq \delta \implies \|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} \leq \varepsilon$
ce qui prouve la continuité de φ en f_0.
3. Mon intuition me laisse penser que si g est deux fois dérivable sans être bornée (donc C^1), I n'est pas forcément différentiable. Obtenir un contre-exemple n'est pas évident, car I est tout de même continue (par uniforme continuité de g sur un compact).

Exercice 1.8

Soient E et F des evn avec F complet. Soit $D \subset E$ un ouvert.
On pose $B^2 = \{f : D \to F / \ f \ C^2, f \text{ bornée}, df \text{ bornée, et } d^2 f \text{ bornée}\}$ et

$$\|f\| = \sup_{x \in D} (\|f(x)\| + \|df(x)\| + \|d^2 f(x)\|)$$

Montrer que B^2 est complet.

On trouvera une présentation de l'intégrale des fonctions à valeurs dans un espace de Banach à l'adresse
`http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture_Notes/chap4.pdf`

Etant donné X un ensemble et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un evn, on note $B(X,Y)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans Y. On rappelle que si Y est complet, alors $B(X,Y)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,Y}$ définie par $\|f\|_{\infty,Y} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$.

On notera $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui dérive de $\|\cdot\|_F$. On rappelle que $(\mathcal{L}_c(E,F), \|\cdot\|_{op})$ est un Banach.

On notera $\|\cdot\|_{op'}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ qui dérive de $\|\cdot\|_{op}$, de sorte que $(\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F)), \|\cdot\|_{op'})$ est un Banach.

On rappelle que si $f \in B^2$ et $a \in D$, $df(a) \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $d^2f(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$. La norme définie dans l'énoncé est donc à prendre au sens suivant :

$$\|f\| = \sup_{x\in D}(\|f(x)\|_F + \|df(x)\|_{op} + \|d^2f(x)\|_{op'})$$

On prouve facilement les faits suivants : pour $f \in B^2$,
$\|f\| \geq \|f\|_{\infty,F}$
$\|f\| \geq \|df\|_{\infty,op}$
$\|f\| \geq \|d^2f\|_{\infty,op'}$

Soit (f_n) de Cauchy dans B^2 pour $\|\cdot\|$.
• D'après la remarque précédente, (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,F}$ dans $B(D,F)$ qui est complet, donc (f_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty,F}$ vers un $f \in B(D,F)$.
• D'après la remarque précédente, (df_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,op}$ dans $B(D, \mathcal{L}_c(E,F))$ qui est complet, donc (df_n) converge pour $\|\cdot\|_{\infty,op}$ vers un $\varphi \in B(D, \mathcal{L}_c(E,F))$.
• En tant que limites uniformes de fonctions continues, f et φ sont continues.
• Montrons que f est différentiable de différentielle φ.
Soit $a \in D$. Pour $h \in D$, et n quelconque,

$$f_n(a+h) - f_n(a) = \int_0^1 df_n(a+th)dt$$

La convergence des df_n vers φ étant uniforme, on a en passant à la limite

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \varphi(a+th)dt$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} &= \frac{\|\int_0^1 \varphi(a+th)-\varphi(a)(h)dt\|_F}{\|h\|_E}\\ &\leq \frac{\int_0^1 \|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op}\|h\|_E dt}{\|h\|_E}\\ &\leq \int_0^1 \|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op}dt\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est continue on dispose de $\delta > 0$ tel que $\|x\|_F \leq \delta \implies \|\varphi(a+x)-\varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$. Pour $\|h\| \leq \varepsilon$ et $t \in [0,1]$ on obtient

$$\|\varphi(a+th)-\varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$$

donc $\dfrac{\|f(a+h)-f(a)-\varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} \leq \varepsilon$ dès que $\|h\| \leq \delta$.
f est donc différentiable sur D et sa différentielle est φ, qui est continue d'après la remarque précédente.
• Un raisonnement identique en remplaçant f_n par df_n montre que df est différentiable sur D, on note d^2f sa différentielle qui est continue.
• f est donc C^2, bornée, de différentielles bornées. Il reste à prouver que (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.
Etant donné $\varepsilon > 0$, on dispose de N, N', N'' tels que

$$\begin{array}{lll}\forall x \in D,\ n \geq N & \implies & \|f(x)-f_n(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}\\ n \geq N' & \implies & \|df(x)-df_n(x)\|_{op} \leq \frac{\varepsilon}{3}\\ n \geq N'' & \implies & \|d^2f(x)-df_n^2(x)\|_{op'} \leq \frac{\varepsilon}{3}\end{array}$$

Pour $n \geq \max(N, N', N'')$,

$$\|f(x)-f_n(x)\|_F + \|df(x)-df_n(x)\|_{op} + \|d^2f(x)-df_n^2(x)\|_{op'} \leq \varepsilon$$

et ceci pour tout $x \in D$, donc $\|f-f_n\| \leq \varepsilon$. Ceci achève la preuve.

Exercice 1.9

Soit E un $\mathbb{R}$-evn, $D \subset E$ un ouvert et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$. On suppose $\overline{D}$ compact, f continue, nulle à la frontière de D et f différentiable sur D.
Montrer qu'il existe $a \in D$ tel que $df(a) = 0$.

f est continue sur le compact $\overline{D}$ donc elle admet un maximum M et un maximum m atteints respectivement en α et $\beta \in \overline{D}$.
Si $m = M = 0$, f est nulle sur D donc pour tout $x \in D$, $df(x) = 0$.
Sinon, $m < 0$ ou $M > 0$. On suppose par exemple $M > 0$. Comme f est nulle sur $\overline{D} \setminus \mathring{D} = \overline{D} \setminus D$, on a $\beta \in D$. En β, f admet un maximum global (donc local), d'où $df(\beta) = 0$.

Exercice 1.10

Soient $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f(x,y,z) = (x + \varphi(yz), y + \psi(\frac{x}{z}))$.
Calculer la différentielle de f.

La démarche est identique à celle de l'exercice 1.5. En posant $f_1 : (x,y,z) \mapsto x + \varphi(yz)$ et $f_2 : (x,y,z) \mapsto y + \psi(\frac{x}{z})$, il suffit de démontrer que f_1 et f_2 sont différentiables en (x,y,z) pour obtenir la différentielle de f en (x,y,z) :

$$df(x,y,z) : (h_1,h_2,h_3) \mapsto (df_1(x,y,z)(h_1,h_2,h_3), df_2(x,y,z)(h_1,h_2,h_3))$$

On calcule

$$\mathrm{Jac}(f_1)(x,y,z) = (1, \varphi'(yz)z, \varphi'(yz)y)$$

et

$$\mathrm{Jac}(f_2)(x,y,z) = \left(\psi(\frac{x}{z})\frac{1}{z}, 1, -\psi(\frac{x}{z})\frac{x}{z^2}\right)$$

Exercice 1.11

1. Soient E, F, G, H des $\mathbb{R}$-evn. B est une forme bilinéaire continue de $F \times G$ dans H, $f : E \to F$ et $g : E \to G$.
   On suppose que f et g sont différentiables en $a \in E$. Montrer que $C : E \to H, x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a.
2. Soit E un espace vectoriel euclidien.
   (a) Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.
   (b) Déterminer la différentielle de $\psi : x \mapsto \|x\|^2$.
   (c) Déterminer et interpréter la différentielle de φ.

1. Soit $a \in E$. Pour $h \in E$,

$$\begin{aligned} C(a+h) =& C(a) + B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a)) \\ &+ \\ &B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) \end{aligned}$$

Le candidat pour la différentielle en a de f est $h \mapsto B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a))$.
Il suffit de prouver que

$$B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) + B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = o(\|h\|)$$

B étant bilinéaire continue, il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \|B(x,y)\| \leq K\|x\|\|y\|$$

On traite chaque terme de la somme séparément :

- $B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(f(a), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\to 0}$
- $\|B(df(a)(h), dg(a)(h))\| \leq K\|df(a)\|_{op}\|df(b)\|_{op}\|h\|^2$
- $B(df(a)(h), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(df(a)(h), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\to 0}$
- $B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h))}_{\to 0}$

La somme est bien $o(\|h\|)$.

2. a) $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire continue (d'après Cauchy-Schwarz). La question 1. implique que $\psi : x \mapsto \langle x, x\rangle$ est différentiable en tout $a \in E$. La fonction $\delta : x \mapsto \frac{1}{x}$ est différentiable en tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc $\delta \circ \psi$ est différentiable en tout $a \in E \setminus \{0\}$.
$\pi : \mathbb{R} \times E \to E,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire continue, et d'après 1., $x \mapsto \pi(\delta \circ \psi(x), x)$ est différentiable en tout $x \in E \setminus \{0\}$.
Ceci s'écrit encore $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

b) Soit $x \in E$. Pour $h \in E$, $\psi(x+h) = \psi(x) + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2$.
La différentielle de ψ en x est donc $h \mapsto 2\langle x, h\rangle$.

c) D'après 1., la différentielle de φ en $x \neq 0$ est donnée par

$$\begin{aligned}
d\varphi(x)(h) &= \pi(\mathrm{Id}(x), d(\delta \circ \psi)(x)(h)) + \pi(d\,\mathrm{Id}(x)(h), \delta \circ \psi(x)) \\
&= x \cdot d\delta(\psi(x))(d\psi(x)(h)) + \frac{h}{\|x\|^2} \\
&= x \cdot -\frac{2\langle x, h\rangle}{(\|x\|^2)^2} + \frac{h}{\|x\|^2} \\
&= \frac{h}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, h\rangle x}{\|x\|^4}
\end{aligned}$$

Exercice 1.12

Déterminer toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

C'est un classique que l'on trouve dans n'importe quel livre de prépa.

Exercice 1.13

> En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction $g : (x, y) \mapsto \max(x^2, y)$ est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 > y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = x^2$ sur un voisinage de (x, y). g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto 2xh_1$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 < y$. Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de (x, y) de sorte que $g(x, y) = y$ sur un voisinage de (x, y) g est donc différentiable en (x, y) de différentielle $(h_1, h_2) \mapsto h_2$.

En $(0, 0)$: $\dfrac{g(0, \frac{1}{n}) - g(0, 0)}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\dfrac{g(0, -\frac{1}{n}) - g(0, 0)}{-\frac{1}{n}} = 0$ donc g n'admet pas de dérivée partielle selon y en $(0, 0)$ donc g n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x^2 = y$ et $x \neq 0$.

$$\frac{g(x + \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{\frac{1}{n}} = \frac{\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2x$$

$$\frac{g(x - \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{-\frac{1}{n}} = \frac{y - y}{-\frac{1}{n}} = 0 \neq 2x$$

donc g n'admet pas de dérivée partielle selon x en (x, y) donc g n'est pas différentiable en (x, y).

Exercice 1.14

> Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers.
> On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{x^n y^p}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
> Pour quelles valeurs de (n, p) f est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Quelles que soient les valeurs de n et p, f est différentiable en $(x, y) \neq (0, 0)$ par composition. f admet donc des dérivées partielles données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{nx^{n-1}y^p}{x^2 + y^2} - \frac{2x^{n+1}y^p}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{px^n y^{p-1}}{x^2 + y^2} - \frac{2x^n y^{p+1}}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

En $(0, 0)$: comme pour tout $h \in \mathbb{R}, f(0, h) = f(h, 0) = f(0, 0) = 0$, les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

On étudie plusieurs cas selon n et p. Si les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$, f est différentiable en $(0,0)$. Si ce n'est le pas on ne peut a priori rien dire.
On utilise les mêmes techniques de majoration que dans l'exercice 1.

1. Si $n \geq 4$: OK
2. Si $n = 3$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK
   (c) Si $p = 2$: OK
   (d) Si $p = 1$: OK
3. Si $n = 2$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
   (c) Si $p = 2$: OK
   (d) Si $p = 1$: Pour $t \in \mathbb{R}$ non nul,
   $$\frac{f\left((0,0) + t(1,1)\right) - f((0,0))}{t} = \frac{1}{2}$$
   f admet donc une dérivée directionnelle selon le vecteur $(1,1)$ qui vaut $\frac{1}{2}$.
   Si f était différentiable en $(0,0)$, son gradient donné par les dérivées partielles serait nul, donc la différentielle en $(0,0)$ serait aussi nulle, donc toutes les dérivées directionnelles seraient aussi nulles, ce qui n'est pas le cas. f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.
4. Si $n = 1$:
   (a) Si $p \geq 4$: OK par symétrie
   (b) Si $p = 3$: OK par symétrie
   (c) Si $p = 2$: Non par symétrie
   (d) Si $p = 1$: $f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, donc f n'est pas continue en 0, donc pas différentiable en $(0,0)$.

Conclusion : f est différentiable en $(0,0)$ pour tout $n \geq 1$ et $p \geq 1$ exceptés les couples $(n = 2, p = 1), (n = 1, p = 2), (n = 1, p = 1)$.

Exercice 1.15

Soit B dans $M_n(\mathbb{R})$.
Donner la différentielle de $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$

On choisit une norme d'opérateur $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère $V \subset GL_n(\mathbb{R})$ un voisinage de A tel que pour tout $X \in V$, $\|A^{-1}(X-A)\| < 1$. Calculons la différentielle de la fonction $M \to M^{-1}$ en A.
Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, $\|H\| \leq \delta \implies A + H \in V$.
Pour $\|H\| \leq \delta$, $(A+H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$.
Démontrons que $(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^k$. Comme $\|H\| \leq \delta$, $\|A^{-1}H\| < 1$ donc la série en question est absolument convergente, donc convergente. On a pour $N \geq 1$,

$$(I_n + A^{-1}H)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k(A^{-1}H)^k = (-1)^N \underbrace{(A^{-1}H)^{N+1}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{}0} + I_n$$

En passant à la limite sur N on a l'égalité voulue.
Par conséquent

$$(A+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1}$$

La candidat pour la différentielle de l'inverse en A est donc $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
Il reste à remarquer que

$$\frac{\|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|}\|H\| \to 0$$

La fonction $A \mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ étant linéaire, la différentielle de φ en A est donnée par $H \mapsto -\operatorname{Tr}(A^{-1}HA^{-1}B)$

Exercice 1.16

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R}), x \mapsto A(x)$
Calculer la différentielle de $x \mapsto \ln \det A(x)$

Il est classique (cf Gourdon Analyse ou Cassini Algèbre 2) que la différentielle du déterminant en A est donnée par $H \mapsto \operatorname{Tr}((\operatorname{com} A)^T H)$ qui devient $H \mapsto \det A \operatorname{Tr}(A^{-1}H)$ lorsque A est inversible.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
d(\ln \circ \det \circ A)(a)(h) &= d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(h)) \\
&= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(1)) \\
&= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(\frac{dA}{dx}(a)) \\
&= h \cdot d\ln(\det A(a)) \left(d\det(A(a))(\frac{dA}{dx}(a)) \right) \\
&= h \cdot d\ln(\det A(a)) \left(\det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) \right) \\
&= h \det A(a) \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) d\ln(\det A(a))(1) \\
&= h \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)
\end{aligned}$$

La différentielle cherchée en a est donc $h \mapsto h \operatorname{Tr} \left(A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)$

Exercice 1.17

Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 1. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto f(xy) + g(\frac{x}{y})$ est différentiable en $(1, 1)$ et calculer sa différentielle en $(1, 1)$.

Soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ et $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.
On dispose de U un voisinage de $(1, 1)$ et V un voisinage de 1 tel que $\alpha(U) \subset V$ et $\beta(U) \subset V$. $\alpha : U \to V$ et $\beta : U \to V$ sont différentiables en $(1, 1)$.
Le théorème de composition s'applique : $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ sont différentiables en $(1, 1)$, donc φ aussi, avec

$$\begin{aligned}
d\varphi((1,1))(h_1, h_2) &= d(f \circ \alpha)(1,1)(h_1, h_2) + d(f \circ \beta)(1,1)(h_1, h_2) \\
&= (yh_1 + xh_2) f'(1) + (-\frac{y}{x^2} h_1 + \frac{h_2}{x}) g'(1)
\end{aligned}$$

Exercice 1.18

Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ qui vérifient $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$ où $Z(x, y) = f(\frac{y}{x})$

?

Exercice 1.19

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ de classe C^2 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(tx) = t^2 f(x)$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $d^2f(0)(x,x) = 2f(x)$.

On rappelle que $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ s'identifie à l'espace des applications bilinéaires $\mathcal{L}_c(E \times E, F)$.
L'énoncé demande en réalité de montrer que pour tout $x \in E$,

$$d^2f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

Soit $x \in E$ fixé.
Posons $\alpha : \mathbb{R} \to E, t \mapsto tx$ et $\beta : \mathbb{R} \to F, t \mapsto t^2 f(x)$. $\mathbb{R}$ étant de dimension finie, toute application linéaire de $\mathbb{R}$ dans E est continue. α est clairement différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto hx$.
Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, $\beta(t+h) = \beta(t) + 2thf(x) + h^2 f(x)$ avec

$$\frac{\|h^2 f(x)\|_F}{|h|} = |h| \|f(x)\|_F \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$$

Donc β est différentiable en t de différentielle $h \mapsto 2thf(x)$

En différentiant l'égalité $f \circ \alpha = \beta$ en $t \in \mathbb{R}$ on a pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hdf(tx)(x) = 2thf(x)$ et donc

$$df(tx)(x) = 2tf(x) \quad (*)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Soit $\Pi : \mathcal{L}_c(E,F) \to F, L \mapsto L(x)$. Pour $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $H \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $\Pi(L+H) = (L+H)(x) = \Pi(x) + H(x)$.
Le candidat pour la différentielle en L est donc $H \mapsto H(x)$. Il suffit de montrer que cette application est continue.
Soit $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui dérive naturellement de $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
Alors

$$\frac{\|H(x)\|_F}{\|H\|_{op}} \leq \frac{\|H\|_{op}\|x\|_E}{\|H\|_{op}} \leq \|x\|_E$$

D'où la continuité.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to F, t \mapsto 2tf(x)$. On montre facilement que γ est différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle $h \mapsto 2hf(x)$.

L'égalité $(*)$ se réécrit $\Pi \circ df \circ \alpha = \gamma$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(\Pi \circ df \circ \alpha)(t)(h) &= d\Pi(df \circ \alpha(t))(d(df \circ \alpha)(t)(h)) \\ &= d(df \circ \alpha)(t)(h)(x) \\ &= d(df)(tx)(hx)(x) \\ &= hd^2 f(tx)(x)(x) \end{aligned}$$

On a donc pour tout $h \in \mathbb{R}$, $hd^2 f(tx)(x)(x) = 2hf(x)$, donc

$$d^2 f(tx)(x)(x) = 2f(x)$$

ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. En $t = 0$ on a

$$d^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

comme voulu.

2. Applications de la notion de différentielle

3. Equations différentielles

4. Ensembles convexes

Exercice 4.1

Trouver K un convexe fermé et f une application affine telle que $f(K)$ soit un ouvert.

On considère simplement $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4.2

Soit C un convexe non réduit à un point.

1. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   (a) $x_0 \in \mathrm{Ri}(C)$
   (b) $\forall x \in C, \exists y,\ x_0 \in [x, y[$
2. Montrer que si C n'est pas convexe, alors la réciproque est fausse.

?

Exercice 4.3

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ convexe de cardinal $n+2$. Montrer qu'il existe une partition de K en $K_1 \cup K_2$ telles que les enveloppes convexes de K_1 et K_2 ne sont pas disjointes.

L'hypothèse K convexe est superflue. Ecrivons $K = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$ et considérons la matrice A à $n+1$ lignes et $n+2$ colonnes

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas inversible donc il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2})$ un élément non nul de $\ker A$, ce qu'on peut encore écrire

$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i a_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$$

Soit $I \subset [\![1, n+2]\!]$ l'ensemble des indices tels que $\alpha_i > 0$ et $J \subset [\![1, n+2]\!]$ l'ensemble des indices tels que $\alpha_j \leq 0$. I et J sont non vides car $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}) \neq (0, \dots, 0)$ et $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$.

On a $\sum_{i \in I} \alpha_i a_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j) a_j$ et $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j)$.

Posons $S = \sum_{i \in I} \alpha_i$ qui est non nul. Alors

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} a_i = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} a_j$$

avec

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} = 1$$

$K_1 = (a_i)_{i \in I}$ et $K_2 = (a_j)_{i \in J}$ est donc une partition convenant.

Exercice 4.4

Soit K une partie convexe de E et M une variété affine de E telle que $M \cap \mathrm{Ri}(K) \neq \emptyset$. On suppose M fermée.

1. Montrer que $\mathrm{Ri}(M \cap K) = M \cap \mathrm{Ri}(K)$
2. Montrer que $\overline{M \cap K} = M \cap \overline{K}$

?

Exercice 4.5

Montrer que toute section plane d'un ensemble convexe est convexe.

Tout hyperplan est convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et l'intersection de deux convexes est convexe, donc toute section plane d'un convexe est convexe.

Exercice 4.6

Donner un exemple de fermé A d'un evn tel que $\operatorname{co} A$ ne soit pas fermée.

On rappelle que $\operatorname{co} A$ fait référence à l'enveloppe convexe de A. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on pose $A = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,\infty) \times \{0\})$ qui est fermé comme union de deux fermés.
Cependant $\operatorname{co} A = ([0,\infty) \times [0,1)) \cup \{(0,1)\}$ (évident sur un dessin) qui n'est pas fermé.

Exercice 4.7

Soit X un fermé d'un evn E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes

1. X convexe
2. $\forall x, y \in X,\ \frac{x+y}{2} \in C$

Donner un contre-exemple si X n'est pas fermé.

$\Longrightarrow$ Trivial.
$\Longleftarrow$ Soient $x, y \in C$ fixés. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\forall k \in [\![0, 2^n]\!], \frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) y \in C$$

• Pour $n = 1$, c'est une conséquence l'hypothèse $\forall x, y \in X,\ \frac{x+y}{2} \in C$.
• Supposons le résultat vrai pour $n \geq 1$ et prouvons le pour $n+1$.
On remarque que

$$\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right) y = \frac{2k'}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k'}{2^{n+1}}\right) y$$

ce qui prouve le résultat pour tout k pair dans $[\![0, 2^{n+1}]\!]$
Soit $k \in [\![0, 2^{n+1}-1]\!]$ impair. Ecrivons $k = 2k'+1$ où $k' \in [\![0, 2^n - 1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y &= \frac{2k'+1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k'+1}{2^{n+1}}\right)y \\ &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y}_{\in C} + \underbrace{\frac{k'+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'+1}{2^n}\right)y}_{\in C}\right]\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

Soit $\lambda \in [0,1]$. La suite $\dfrac{\lfloor 2^n\lambda \rfloor}{2^n}$ converge vers λ, de sorte que la suite des

$$\frac{\lfloor 2^n\lambda \rfloor}{2^n}x + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n\lambda \rfloor}{2^n}\right)y$$

est une suite d'éléments de C qui converge vers $\lambda x + (1-\lambda)y$. Comme C est fermé, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Ceci étant vrai pour tout x, y, λ, C est convexe.

Dans le cas où C n'est pas fermé, $\mathbb{Q}$ fournit un contre-exemple évident à la réciproque.

Exercice 4.8

Soient A et B deux parties d'un evn E.
Montrer que $\operatorname{co} A + \operatorname{co} B = \operatorname{co}(A+B)$.

$\supset$ On montre facilement que si C et C' sont deux convexes de E, $C + C'$ est convexe. $\operatorname{co} A$ et $\operatorname{co} B$ étant convexes, $\operatorname{co} A + \operatorname{co} B$ est convexe. Par ailleurs, $A \subset \operatorname{co} A$ et $B \subset \operatorname{co} B$ donc $A + B \subset \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.
$\operatorname{co} A + \operatorname{co} B$ est donc un convexe contenant $A+B$, donc $\operatorname{co}(A+B) \subset \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.

$\subset$ Soit $a + b \in \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$. Il existe n et $p \in \mathbb{N}$, α_i, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $a_i \in A$, $b_j \in B$ tels que $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, $b = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$.
Pour $1 \leq j \leq p$ on pose $c_j = b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i + b_j) \in \operatorname{co}(A+B)$.
Alors $\underbrace{\sum_{j=1}^p \beta_j c_j}_{\in \operatorname{co}(\operatorname{co}(A+B))} = \sum_{j=1}^p \beta_j \left(b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = a+b$
Comme $\operatorname{co}(A+B)$ est convexe, $\operatorname{co}(\operatorname{co}(A+B)) = \operatorname{co}(A+B)$, donc $a+b \in \operatorname{co}(A+B)$.

Exercice 4.9

On dit qu'un point $x \in A$ est un point exposé de A s'il existe un hyperplan d'appui H à A tel que $H \cap A = \{x\}$.
On note $\exp A$ l'ensemble des points exposés de A.

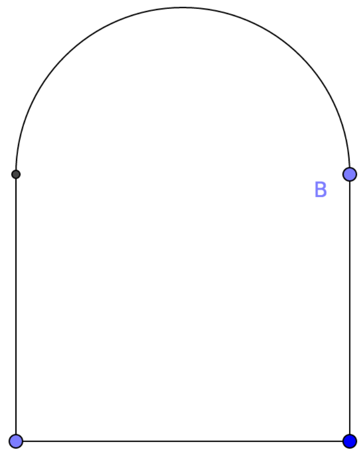
1. Montrer que si C est convexe, on a $\exp C \subset \operatorname{ext} C$.
2. Donner un exemple de convexe C pour lequel $\exp C \subsetneqq \operatorname{ext} C$.
3. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $\exp C \subsetneqq \operatorname{ext} C \subsetneqq \overline{\exp C}$

1. Soit C un convexe. On rappelle que $\operatorname{ext} C$ désigne l'ensemble des points extrémaux de C.
Soit $x^* \in \exp C$. Soit H l'hyperplan d'appui à C tel que $H \cap C = \{x^*\}$. Il existe $\ell \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue non-triviale et un réel α tels que $H = \{x \in E | \ \ell(x) = \alpha\}$. On suppose sans perte de généralité que $C \subset H^+ = \{x \in E | \ \ell(x) \geq \alpha\}$.
Comme $x^* \in H$, on a $\ell(x^*) = \alpha$. Si $x \in C$ est tel que $\ell(x) = \alpha$, alors $x \in C \cap H$ et donc $x = x^*$.
Si $x \in C$ et $x \neq x^*$ on a donc $\ell(x) > \alpha$.

Supposons par l'absurde que $x^* \notin \operatorname{ext} C$. On dispose alors de $a, b \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $x^* = (1 - \lambda)a + \lambda b$.
Alors $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b)$.
Comme $\lambda \in]0, 1[$, $(1-\lambda)\ell(a)+\lambda\ell(b) > \min(\ell(a), \ell(b))$. Comme $a \neq x^*$ et $b \neq x^*$, $\min(\ell(a), \ell(b)) > \alpha$.
Donc $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b) > \alpha$ ce qui contredit $\ell(x^*) = \alpha$.

2. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble A formé d'un demi arc de cercle au dessous duquel on colle une sorte de carré, comme sur la figure ci dessous.
Formellement $A = \{(x, y)| \ x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\} \cup \{(-1, y)| \ y \in [0, -2]\} \cup \{(1, y)| \ y \in [0, -2]\} \cup \{(x, -2)| \ x \in [-1, 1]\}$. Le seul hyperplan d'appui contenant B est la droite $x = 1$ qui contient aussi $\{(1, y)| \ y \in [0, -2]\}$. Donc B n'est pas exposé.
Pourtant B est extrémal.

3. ?



Exercice 4.10

Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on considère $\varphi : C \to \mathbb{R}, x \mapsto 2\langle a, x\rangle$. Montrer que φ admet un maximum sur C atteint en un point x_0.
2. Soit $H_a = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \langle a, x\rangle = \langle a, x_0\rangle\}$. Montrer que $H_a \cap C$ est un convexe non vide.

1. φ est continue sur $\mathbb{R}^n$ (car linéaire à partir d'un espace de dimension finie), donc elle admet un maximum sur le compact C.
2. H_a contient x_0. Montrons que H_a est convexe. Soit $x, y \in H_a$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors $\langle a, \lambda x+(1-\lambda)y\rangle = \lambda\langle a, x\rangle+(1-\lambda)\langle a, y\rangle = \lambda\langle a, x_0\rangle+(1-\lambda)\langle a, x_0\rangle = \langle a, x_0\rangle$ donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in H_a$ et H_a est convexe.
$H_a \cap C$ est donc convexe comme intersection de deux convexes et non vide car il contient x_0.

Exercice 4.11

Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H.

1. On considère $f : H \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (d(x, C))^2$. Montrer que f est différentiable en tout point et calculer la différentielle de f en un point x de H. (On considérera le projecteur P de meilleure approximation sur C).
2. Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle f, x\rangle$ où $f \in H$ et $A \in \mathcal{L}_c(H, H)$ auto-adjointe. Déterminer le gradient de φ en x.

1. On rappelle que la projection sur un convexe fermé d'un Hilbert est unique

et on notera $p_C(x)$ le projeté de x sur C. On rappelle que p_C est 1-lipschitzienne.

Soit $x \in H$ fixé et $h \in H$. On a le développement

$$\begin{aligned} d(x+h,C)^2 &= \|x+h-p_C(x+h)\|^2 \\ &= \|x-p_C(x)+h+p_C(x)-p_C(x+h)\|^2 \\ &= d(x,C)^2+2\langle x-p_C(x),h\rangle+2\langle x-p_C(x),p_C(x)-p_C(x+h)\rangle+\|p_C(x)-p_C(x+h)+h\|^2 \\ &= d(x,C)^2+2\langle x-p_C(x),h\rangle+2\langle p_C(x)-p_C(x+h),h+x-p_C(x)\rangle+\|p_C(x)-p_C(x+h)\|^2+\|h\|^2 \end{aligned}$$

Le candidat naturel pour la différentielle de f en x est donc $h \mapsto 2\langle x-p_C(x),h\rangle$. Sachant que p_C est 1-lipschitzienne il facile de montrer que $\|p_C(x)-p_C(x+h)\|^2+\|h\|^2 = o(\|h\|)$.

Cependant il est **remarquablement difficile** de prouver par des moyens élémentaires que $\langle p_C(x)-p_C(x+h),h+x-p_C(x)\rangle = o(\|h\|)$. (On peut montrer facilement que c'est un $O(\|h\|)$ mais c'est insuffisant).

On adopte une approche différente :
Lemme : Soit $f,g_1,g_2 : H \to \mathbb{R}$ trois fonctions différentiables en $x \in H$ avec U un voisinage de x et

$$\forall y \in U, g_1(y) \leq f(y) \leq g_2(y)$$

et $g_1(x) = g_2(x)$.
Alors $dg_1(x) = dg_2(x)$, f est différentiable en x et $df(x) = dg_1(x)$.

<u>Preuve</u> : Pour $h \in U-x$ on a $g_1(x+h) \leq g_2(x+h)$. On dispose de deux fonctions ε_1 et $\varepsilon_2 : H \to \mathbb{R}$ nulles et continues en 0 telles que

$$g_1(x)+dg_1(x)(h)+\|h\|\varepsilon_1(h) \leq g_2(x)+dg_2(x)(h)+\|h\|\varepsilon_2(h)$$

ie

$$dg_2(x)(h)-dg_1(x)(h)+\|h\|(\varepsilon_2(h)-\varepsilon_1(h)) \geq 0$$

Pour $t>0$ on remplace h par th et on obtient

$$t(dg_2(x)(h)-dg_1(x)(h))+t\|h\|(\varepsilon_2(th)-\varepsilon_1(th)) \geq 0$$

En simplifiant par t puis en faisant $t \to 0$,

$$dg_2(x)(h)-dg_1(x)(h) \geq 0$$

En remplaçant h par $-h$ dans la dernière inégalité,

$$dg_2(x)(h)-dg_1(x)(h) \leq 0$$

donc $dg_2(x)(h) = dg_1(x)(h)$, ceci étant vrai pour tout $h \in H$, donc $dg_2(x) = dg_1(x)$.

Posons $dg(x) := dg_1(x)$ et réécrivons l'inégalité $g_1(x+h) \leq f(x+h) \leq g_2(x+h)$:

$$f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \leq f(x+h) \leq f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

donc

$$\varepsilon_1(h) \leq \frac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \leq \varepsilon_2(h)$$

Par encadrement, on a pour $\|h\| \to 0$, $\dfrac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \to 0$.

$\square$

Revenons au problème. Soit $x \in H \setminus C$ fixé. Posons $x^* = p_C(x)$, $e = \frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}$ et $\mathcal{H}$ l'hyperplan d'appui en x^* de normale e, de sorte que

$$\mathcal{H} = \{y \in H, \langle y, e\rangle = \langle x^*, e\rangle\}$$

Lemme : On note $p_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$ (qui est un sev fermé). Soit $y \in \mathcal{H}^+$ et $z \in \mathcal{H}^-$. Alors $\|y - p_{\mathcal{H}}(y)\| \leq \|y - z\|$.

Preuve : C'est géométriquement évident (faire un dessin). Formellement, comme

$$\begin{aligned}\|y-z\|^2 &= \|y - p_{\mathcal{H}}(y) + p_{\mathcal{H}}(y) - z\|^2 \\ &= \|y - p_{\mathcal{H}}(y)\|^2 + \|p_{\mathcal{H}}(y) - z\|^2 - 2\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle\end{aligned}$$

il suffit de prouver que $\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle \leq 0$ (ce qui est encore une évidence géométrique).

Comme $y - p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}^\perp$ (cf théorème de la projection orthogonale sur un sev fermé), et que $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(e)$ on peut écrire

$y - p_{\mathcal{H}}(y) = \lambda e$ d'où

$$\begin{aligned}\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle &= \lambda\|e\|^2 = \lambda \\ &= \langle y, e\rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle \\ &\geq \langle x^*, e\rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle \quad \text{car } y \in \mathcal{H}^+ \\ &= \langle x^*, e\rangle - \langle x^*, e\rangle \quad \text{car } p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H} \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\lambda \geq 0$.

Finalement,

$$\begin{aligned}\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle &= \lambda\langle e, z - p_{\mathcal{H}}(y)\rangle \\ &= \lambda\left(\langle e, z\rangle - \langle e, p_{\mathcal{H}}(y)\rangle\right) \\ &\leq \lambda\left(\langle e, x^*\rangle - \langle e, x^*\rangle\right) \text{ car } \lambda \geq 0,\ z \in \mathcal{H}^-,\ p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H} \\ &= 0\end{aligned}$$

comme souhaité. $\square$

Dans notre problème on dispose d'un voisinage de x noté U tel que $U \subset \mathcal{H}^+$. Pour $y \in U$, comme $p_C(y) \in C \subset \mathcal{H}^-$, le lemme donne $(d(y,\mathcal{H}))^2 \leq (d(y,C))^2$. On a aussi la majoration triviale $(d(y,C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$. En bref

$$(d(y,\mathcal{H}))^2 \leq (d(y,C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$$

Par ailleurs $(d(y,\mathcal{H}))^2$ se réécrit simplement

$$\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e\rangle^2 = \langle y - x^*, e\rangle^2 = \langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle^2$$

D'où l'encadrement

$$\underbrace{\langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle^2}_{:=g_1(y)} \leq (d(y,C))^2 \leq \underbrace{\|y - x^*\|^2}_{:=g_2(y)}$$

On a bien $g_1(x) = g_2(x)$, g_1 différentiable en x et g_2 différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle h, x - x^*\rangle$ (application linéaire continue par Cauchy-Schwarz). D'après le lemme, f est différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle h, x - x^*\rangle$.

Il reste à traiter le cas où $x \in C$. Il suffit de noter qu'alors

$$(d(x+h,C))^2 \leq \|(x+h) - x\|^2 = \|h\|^2$$

Donc f est différentiable de différentielle nulle.

2. Pour $x \in H$ on a le développement

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) &= \varphi(x) + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle f, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \\ &= \varphi(x) + \langle Ax, h\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle f, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \quad \text{car } A \text{ auto-adjointe} \\ &= \varphi(x) + \langle h, 2Ax + f\rangle + \langle Ah, h\rangle\end{aligned}$$

$h \mapsto \langle h, 2Ax + f\rangle$ est linéaire et continue (par Cauchy-Schwarz). Par ailleurs,

$$\frac{|\langle Ah, h\rangle|}{\|h\|} \leq \|Ah\| \leq \|A\|_{op}\|h\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

φ est donc différentiable en x, de gradient $2Ax + f$.

Exercice 4.12

Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. Pour $0 \geq b \geq a$, montrer que

$$aC - bC = (a-b)C + b(C - C)$$

$\subset$ Soit $ac - bc' \in aC - bC$. Alors

$$ac - bc' = (a-b)c + b(c - c') \in (a-b)C + b(C-C)$$

$\supset$ Soit $(a-b)c+b(c'-c'') \in (a-b)C+b(C-C)$. On a

$$\begin{aligned}
(a-b)c+b(c'-c'') &= -\left((b-a)c+(-b)(c'-c'')\right) \\
&= -\left((-a)\underbrace{\left[\left(1-\frac{b}{a}\right)c+\frac{b}{a}c'\right]}_{\in C}+bc''\right) \\
&= a\left[\left(1-\frac{b}{a}\right)c+\frac{b}{a}c'\right]-bc'' \\
&\in aC-bC
\end{aligned}$$

Exercice 4.13

Soit C un fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall x,y\in C,\ ]x,y[\cap C\neq\emptyset$.
Montrer que C est convexe.

Supposons par l'absurde que C n'est pas convexe : on dispose alors de $x,y\in C$ et $\alpha\in]0,1[$ tel que $(1-\alpha)x+\alpha y\notin C$.

Considérons $\mu=\inf\{\lambda\geq\alpha|(1-\lambda)x+\lambda y\in C\}$. On dispose de λ_n une suite qui décroit vers μ avec pour tout n, $(1-\lambda_n)x+\lambda_n y\in C$ et $\lambda_n\geq\alpha$. En passant à la limite, comme C est fermé, on a $(1-\mu)x+\mu y\in C$ et $\mu\geq\alpha$. Comme $(1-\alpha)x+\alpha y\notin C$, l'inégalité est stricte : $\mu>\alpha$.

De même, on pose $\nu=\sup\{\lambda\leq\alpha|(1-\lambda)x+\lambda y\in C\}$. On a encore $(1-\nu)x+\nu y\in C$ et $\nu<\alpha$.

Posons $a=(1-\mu)x+\mu y$ et $b=(1-\nu)x+\nu y$. Alors $]a,b[\cap C\neq\emptyset$: on dispose de $\gamma\in]0,1[$ tel que $(1-\gamma)b+\gamma a\in C$.

Or $(1-\gamma)b+\gamma a=(1-[(1-\gamma)\nu+\gamma\mu])x+[(1-\gamma)\nu+\gamma\mu]y$ avec

$$(1-\gamma)\nu+\gamma\mu\in]\nu,\mu[$$

Ceci contredit la définition de ν, absurde.

Exercice 4.14

Soit X un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $x \in X$. On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est une direction asymptotique de X en x si

$$\forall a \geq 0,\ x + av \in X$$

On note $K(X, x)$ l'ensemble des directions asymptotiques de X en x.

1. Montrer que $\forall x \in X,\ K(X, x)$ est un cône.
2. Si X est convexe, montrer que $K(X, x)$ est convexe et que si $x, x' \in X$, alors $K(X, x) = K(X, x')$.

1. Soit $x \in X$, $v \in K(X, x)$ et $\lambda \geq 0$. Montrons que $\lambda v \in K(X, x)$. Pour $a \geq 0$, $a\lambda \geq 0$ donc $x + a\lambda v \in X$, donc $\lambda v \in K(X, x)$.

2. On suppose X convexe. Montrons que $K(X, x)$ est convexe. Pour $v, v' \in K(X, x)$, $\lambda \in [0, 1]$ et $a \geq 0$

$$x + a[(1-\lambda)v + \lambda v'] = (1-\lambda)(\underbrace{x + av}_{\in X}) + \lambda(\underbrace{x + av'}_{\in X}) \in X$$

Donc $(1-\lambda)v + \lambda v' \in X$ et $K(X, x)$ est convexe.

Soient $x, x' \in X$. Montrons que $K(X, x) \subset K(X, x')$. Soit $v \in K(X, x)$ et $a \geq 0$. On remarque que

$$x' + av = \lim_n \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) x' + \frac{1}{n}(\underbrace{x + nav}_{\in X})}_{\in X} \right)$$

Comme X est fermé, $x' + av \in X$ donc $x' \in K(X, x)$ et $K(X, x) \subset K(X, x')$.
On a l'inclusion inverse par symétrie.

Exercice 4.15

$\square$

Exercice 4.16

Soit X un convexe de $\mathbb{R}^n$ et A un convexe de $\mathbb{R}^+$ qui contient 0.
Montrer que $\bigcup_{a \in A} aX$ est convexe.

Soient $x, y \in \bigcup_{a\in A} aX$. On dispose de $a, b \in A$ et $x_1, x_2 \in X$ tels que $x = ax_1$ et $y = bx_2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.
Il s'agit de montrer que $(1-\lambda)ax_1 + \lambda bx_2 \in \bigcup_{a\in A} aX$.

Si $a = 0$ ou $b = 0$, en supposant par exemple que $a = 0$, il suffit de prouver que $\lambda bx_2 \in \bigcup_{a\in A} aX$. Comme $\lambda b = (1-\lambda)0 + \lambda b$, on a $\lambda bx_2 \in (\lambda b)X$.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on remarque qu'on a l'égalité

$$\underbrace{(\lambda a + (1-\lambda)b)}_{\in A} \underbrace{\left[\left(1 - \frac{(1-\lambda)b}{\lambda a + (1-\lambda)b}\right) x_1 + \frac{(1-\lambda)b}{\lambda a + (1-\lambda)b} x_2\right]}_{\in C} = (1-\lambda)ax_1 + \lambda bx_2$$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 4.17

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ à N éléments ($N > n+1$). Montrer qu'il est possible de partitionner X en deux parties X_1 et X_2 tels que

$$\mathrm{co}(X_1) \cap \mathrm{co}(X_2) \neq \emptyset$$

2. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ N parties convexes fermées de $\mathbb{R}^n$ avec $N > n$.
Montrer par récurrence sur N le théorème de Helly : si toute sous-famille de (X_i) à $n+1$ éléments a une intersection non vide, alors les N convexes de la famille (X_i) sont d'intersection non vide.

1. On adapte facilement la preuve du 4.3 avec $N \geq n+2$ au lieu de $N = n+2$.

2. On procède par récurrence sur $N \geq n+1$, n étant fixé dans toute la preuve. L'initialisation est immédiate. Supposons le résultat vrai pour $N-1$ et prouvons le pour N. Supposons par l'absurde que toute sous-famille de (X_i) à $n+1$ éléments a une intersection non vide mais que $X_1, \dots, X_N$ sont d'intersection vide.
D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à chaque sous-famille à $N-1$ éléments des (X_i), on dispose pour chaque $i \in [\![1,N]\!]$ de $x_i \in \bigcap_{j\neq i} X_j \setminus X_i$.
Posons $A = \{x_1, \dots, x_N\}$. D'après le résultat du 1., il exise une partition de A en $A_1 \cup A_2$ avec $\mathrm{co}(A_1) \cap \mathrm{co}(A_2) \neq \emptyset$.
Considérons $x \in \mathrm{co}(A_1) \cap \mathrm{co}(A_2)$ et montrons que $x \in \bigcap_{i=1}^N X_i$. Soit $i \in [\![1,N]\!]$.
Si $x_i \in A_1$, A_2 ne contient que des x_j où $j \in [\![1,N]\!] \setminus \{i\}$, donc $A_2 \subset X_i$. Or X_i est convexe, donc $\mathrm{co}(A_2) \subset X_i$, donc $x \in X_i$. On procède similairement lorsque $x_i \in A_2$.
Donc $x \in \bigcap_{i=1}^N X_i$ ce qui est absurde.

Exercice 4.18

Montrer que l'ensemble suivant est convexe :

$$C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 |\ a > 0,\ b^2 - 4ac < 0\}$$

Soient (a, b, c), $(a', b', c') \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Il s'agit de montrer que $(1 - \lambda)(a, b, c) + \lambda(a', b', c') \in C$.
Considérons les polynômes $P(X) = aX^2 + bX + c$ et $Q(X) = a'X^2 + b'X + c'$.
Comme $(a, b, c) \in C$, P est un polynôme strictement positif, au sens où

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$$

De même, Q est strictement positif.

Or, pour deux réels strictement positifs $x > 0$ et $y > 0$, on a pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)x + \lambda y > 0$.

On en déduit que $(1 - \lambda)P + \lambda Q$ est un polynôme strictement positif dont les coefficients sont $((1 - \lambda)a + \lambda a', (1 - \lambda)b + \lambda b', (1 - \lambda)c + \lambda c')$.
Ceci implique $((1 - \lambda)a + \lambda a', (1 - \lambda)b + \lambda b', (1 - \lambda)c + \lambda c') \in C$, soit encore

$$(1 - \lambda)(a, b, c) + \lambda(a', b', c') \in C$$

5. Fonctions convexes

Exercice 5.1

Soient E un evn et $f : E \to \mathbb{R}$ convexe et impaire.

1. Montrer que $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$.
2. En déduire que $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
3. En déduire que f est linéaire.

1. On note que par imparité $f(0) = f(-0) = -f(0)$ donc $2f(0) = 0$ et $f(0) = 0$. Pour $x \in E$ et $\lambda \in]0,1[$ on a

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + (1-\lambda)\cdot 0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(0) = \lambda f(x)$$

2. Pour $x \in E$ et $\lambda \in]0,1[$, $-f(\lambda x) = f(\lambda(-x)) \leq \lambda f(-x) = -\lambda f(x)$ donc $f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$. En combinant avec l'inégalité de 1. on a l'égalité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

3. Il suffit de prouver que pour $\lambda > 1$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
On remarque que pour $\lambda > 1$, $\frac{1}{\lambda} < 1$ et

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)) &= \frac{1}{\lambda} f(\lambda x) \\ \Longrightarrow\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

comme souhaité.

Exercice 5.2

Soit $f > 0$ positivement homogène sur C convexe. Montrer que f est convexe si et seulement si $B = \{x \in C |\ f(x) \leq 1\}$ est convexe.

Pour que f soit homogène, il faut pouvoir définir $f(\lambda x)$ pour tout $\lambda \geq 0$, ce qui nécessite une structure additionnelle sur C. On supposera donc que C est un $\mathbb{R}$-evn. Par positivement homogène l'énoncé veut dire homogène de degré 1.

$\Longleftarrow$ Supposons B convexe et montrons que $\operatorname{epi} f$ est convexe. On rappelle que

$$\operatorname{epi} f = \{(x,y) \in C \times \mathbb{R} |\ y \geq f(x)\}$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans $\operatorname{epi} f$ et $\lambda \in [0,1]$. f étant homogène de degré 1 et strictement positive, les inégalités $y_1 \geq f(x_1) > 0$ et $y_2 \geq f(x_2) > 0$ se réécrivent $1 \geq f(\frac{1}{y_1}x_1)$ et $1 \geq f(\frac{1}{y_2}x_2)$ donc $\frac{x_1}{y_1}$ et $\frac{x_2}{y_2}$ sont dans B.

B étant convexe et $\dfrac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1+\lambda y_2}$ étant dans $[0,1]$, on a

$$f\left(\left(1-\frac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1+\lambda y_2}\right)\frac{x_1}{y_1}+\frac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1+\lambda y_2}\frac{x_2}{y_2}\right)\leq 1$$

ce qui se réécrit

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leq(1-\lambda)y_1+\lambda y_2$$

ce qui équivaut à $((1-\lambda)x_1+\lambda x_2,(1-\lambda)y_1+\lambda y_2)\in \operatorname{epi} f$.
Donc $\operatorname{epi} f$ est convexe, donc f est convexe.

$\Longrightarrow$ On suppose f convexe. Montrons que B est convexe.
Soit $x,y\in C$ tel que $f(x)\leq 1$ et $f(y)\leq 1$ et $\lambda\in[0,1]$. Alors

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\leq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\leq 1$$

Donc B convexe.

Exercice 5.3

$\square$

Exercice 5.4

Soient $x_i>0$, $\alpha_i\geq 0$ et $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\geq\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

Par concavité du log et l'inégalité de Jensen on a

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^n\alpha_i\ln(x_i)$$

et on a l'inégalité voulue en passant à l'exponentielle.

Exercice 5.5

Soit I un intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 2 fois dérivable.
Montrer que si $g:x\mapsto f(\frac{1}{x})$ est convexe dans I, alors $h:x\mapsto xf(x)$ est aussi convexe et réciproquement.

Il me semble nécessaire d'ajouter l'hypothèse $x \in I \implies \frac{1}{x} \in I$.

On note que

$$g''(x) = \frac{f''(\frac{1}{x}) + 2xf'(\frac{1}{x})}{x^4}$$

donc

$$g''(\frac{1}{x}) = x^3(xf''(x) + 2f'(x)) = x^3 h''(x)$$

Pour $x \in I$, $g''(\frac{1}{x})$ et $h''(x)$ ont donc même signe. g est donc convexe si et seulement si h l'est.

Exercice 5.6

> Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée.
> On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \inf_{x\in[a,b]}(-xt - f(x))$
> Montrer que φ est concave.

Montrons que $\psi : t \mapsto \sup_{x\in[a,b]}(xt + f(x))$ est convexe.
Soient $t, t' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour $x \in [a,b]$, $xt+f(x) \leq \psi(t)$ et $xt'+f(x) \leq \psi(t')$ donc

$$(1-\lambda)(xt + f(x)) + \lambda(xt' + f(x)) \leq (1-\lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t')$$
$$x((1-\lambda)t + \lambda t') + f(x) \leq (1-\lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t')$$

ceci étant vrai pour tout $x \in [a,b]$. En passant au sup on obtient

$$\psi((1-\lambda)t + \lambda t') \leq (1-\lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t')$$

ψ est donc convexe, donc $\varphi = -\psi$ est concave.

Exercice 5.7

> Soient $t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}, (x,t) \to f(x,t)$ telle que
> f est convexe en x et continue en t.
> Montrer que $g : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est convexe.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour $t \in [a,b]$, par convexité de f en la première variable, $f((1-\lambda)x + \lambda y, t) \leq (1-\lambda)f(x,t) + \lambda f(y,t)$.
En intégrant cette inégalité selon t on trouve

$$g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)$$

donc g est convexe.

Exercice 5.8

Soit A une partie fermée non vide d'un evn E.
Montrer que A est convexe si et seulement si $x \mapsto d(A,x)$ est convexe de E dans $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Supposons A convexe et montrons que $x \mapsto d(A,x)$ est convexe. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in]0,1[$.
Soit x', y' deux éléments quelconques de A. On a l'inégalité

$$(1-\lambda)\|x-x'\|+\lambda\|y-y'\| \geq \|(1-\lambda)x+\lambda y-\underbrace{((1-\lambda)x'+\lambda y')}_{\in A}\| \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)$$

donc

$$\|x-x'\| \geq \frac{1}{1-\lambda}(d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-\lambda\|y-y'\|)$$

Le membre de droite est indépendant de x', donc au passant à l'inf sur x' on a

$$d(A,x) \geq \frac{1}{1-\lambda}(d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-\lambda\|y-y'\|)$$

soit encore

$$(1-\lambda)d(A,x) \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-\lambda\|y-y'\|$$

qui devient

$$\lambda\|y-y'\| \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-(1-\lambda)d(A,x)$$

Un raisonnement similaire (passage à l'inf sur y') donne

$$\lambda d(A,y) \geq d(A,(1-\lambda)x+\lambda y)-(1-\lambda)d(A,x)$$

soit

$$d(A,(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)d(A,x)+\lambda d(A,y)$$

Donc $x \mapsto d(A,x)$ est convexe.

$\Longleftarrow$ On suppose que $x \mapsto d(A,x)$ est convexe. Soient $x, y \in A$ et $\lambda \in [0,1]$.
On a $d(A,(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)d(A,x)+\lambda d(A,y) = (1-\lambda)\cdot 0+\lambda\cdot 0 = 0$.
Donc $d(A,(1-\lambda)x+\lambda y) = 0$ et comme A est fermé, $(1-\lambda)x+\lambda y \in A$, donc A convexe.

Exercice 5.9

Soit $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ une suite de fonctions convexes qui converge simplement vers $f :]0,1[\to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f_n converge vers f uniformément sur tout compact de $]0,1[$.

1. Soient $x, y \in]0,1[$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour tout n,

$$f_n((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)$$

et en passant à la limite sur n on a la convexité de f.

2. Etant donné K un compact de $]0,1[$, montrons que la famille des (f_n) est uniformément lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x, y \in K, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq A|x-y|$$

K étant compact il est inclus dans un segment $[a,b]$ avec $0 < a < b < 1$. Considérons $c < c' \in]0,a[$ et $d < d' \in]b,1[$.
Soient $x, y \in K$ et $n \geq 1$ quelconques. Par convexité de f,

$$\frac{f_n(c') - f_n(c)}{c' - c} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}$$

$\left(\frac{f_n(c')-f_n(c)}{c'-c}\right)_n$ et $\left(\frac{f_n(d')-f_n(d)}{d'-d}\right)_n$ convergent, donc sont bornées. On dispose donc de m et M des réels tels que

$$m \leq \frac{f_n(c') - f_n(c)}{c' - c} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d} \leq M$$

Pour tout $n \geq 1$ et $x, y \in K$ on a donc

$$m \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq M$$

En posant $A = \max(|m|, |M|)$ on a

$$\forall n \geq 1,\ \forall x, y \in K, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq A|x-y|$$

□

En passant à la limite sur n dans l'inégalité précédente, on montre facilement que f est A-lipschitzienne.
Montrons que f_n converge vers f uniformément sur K.
Soit $\varepsilon > 0$.
Posons $N = \lfloor \frac{3A}{\varepsilon} \rfloor + 1$ et $x_k = \frac{k}{N}$ pour $k \in [\![1, N-1]\!]$.
Par convergence simple des f_n on dispose de N' tel que

$$n \geq N' \implies \forall k \in [\![1, N-1]\!], |f(x_k) - f_n(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Posons $N'' = \max(N, N')$ et considérons $n \geq N''$ et $x \in K$.
Par construction il existe $i \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{3A}$, de sorte que

$$\begin{aligned}|f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| \\ &\leq A|x - x_i| + \frac{\varepsilon}{3} + A|x - x_i| \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

On a donc montré que $\forall n \geq N'',\ \forall x \in K,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$, d'où la convergence uniforme.

Exercice 5.10

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions convexes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convexe et croissante en chaque variable.
Montrer que $F : x \mapsto g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ est convexe sur $[a,b]$.

Soient $x, y \in [a,b]$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) = g(f_1((1-\lambda)x + \lambda y), \ldots, f_n((1-\lambda)x + \lambda y)))$$

La convexité de chaque f_i et la croissance de g en chaque argument donne

$$\begin{aligned} F((1-\lambda)x + \lambda y) &\leq g((1-\lambda)f_1(x) + \lambda f_1(y), \ldots, (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)) \\ &= g((1-\lambda)(f_1,(x), \ldots, f_n(x)) + \lambda(f_1,(y), \ldots, f_n(y))) \\ &\leq (1-\lambda)g(f_1,(x), \ldots, f_n(x)) + \lambda g(f_1,(y), \ldots, f_n(y)) \quad \text{par convexité de } g \\ &= (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y) \end{aligned}$$

Donc F convexe.

Exercice 5.11

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

Montrer que f est concave.

f admet clairement des dérivées partielles à l'ordre 1 données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{j \neq i} x_j \right)^{1/n} \frac{1}{n} \cdot x_i^{1/n - 1} = \frac{1}{n} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{x_i}$$

f admet alors clairement des dérivées partielles d'ordre 2 données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{n^2} \frac{1}{x_i x_j} & \text{si } i \neq j \\ -\frac{n-1}{n^2} f(x_1, \ldots, x_n) \frac{1}{x_i^2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Chacune de ces fonctions est clairement continue, donc f est C^2.
Soit $(x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé dans la suite. La Hessienne de f en $(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par

$$H(f)(x_1,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{n^2}\begin{pmatrix} -\frac{n-1}{x_1^2} & & & & \\ & \ddots & & \frac{1}{x_ix_j} & \\ & & \ddots & & \\ & \frac{1}{x_ix_j} & & \ddots & \\ & & & & -\frac{n-1}{x_n^2} \end{pmatrix}$$

En posant $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{x_n^2} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\frac{1}{x_1^2},\ldots,\frac{1}{x_n^2})$
on réécrit simplement

$$H(f)(x_1\ldots,x_n) = \underbrace{\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{n^2}}_{\text{constante positive}}(yy^T - nJ)$$

Il suffit de prouver que $yy^T - nJ$ est semi-définie négative. Considérons $v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} v^T(yy^T - nJ)v &= (y^Tv)^Ty^Tv - nv^TJv \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2} \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i} &= \sum_{i=1}^n 1\cdot\frac{v_i}{x_i} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2}} \end{aligned}$$

En passant au carré on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2} \leq 0$$

donc

$$v^T(yy^T - nJ)v \leq 0$$

d'où $H(f)(x_1,\ldots,x_n)$ semi-définie négative, donc f concave.

Exercice 5.12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy$.

1. Montrer que f est convexe.
2. On pose $x = r\cos(\alpha)$ et $y = r\sin(\alpha)$.
   Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

1. f est C^2 de Hessienne

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est 3, les deux valeurs propres sont donc de même signe et non nulles. Sa trace est 4, les deux valeurs propres sont donc strictement positives. Donc $H(f)(x, y)$ est symétrique définie positive, donc f est convexe.

2. Avec la formule de calcul des dérivées partielles d'une composée,

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos(\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -r\sin(\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exercice 5.13

Pour $x > 0$ et $y > 1$ on pose $F(x, y) = x^\alpha(\ln y)^\beta$ où α et β sont deux paramètres donnés.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de F.
2. Montrer que si F est concave alors $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \geq 0$.
3. Montrer que si $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \geq 0$ alors F est concave sur l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } \ln y > \frac{\beta}{1 - \alpha} - 1\}$$

4. Plus généralement, pour I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^2(J, \mathbb{R})$ on considère

$$F : I \times J \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

   (a) Montrer que si F est concave avec $f > 0$ et $g > 0$ alors f et g sont concaves.

   (b) Montrer que si $f > 0$, $g > 0$ avec f^2 et g^2 concaves, alors F est concave.

1. F est clairement C^2, de dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \alpha x^{\alpha-1}(\ln y)^{\beta} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \beta \frac{x^{\alpha}(\ln y)^{\beta-1}}{y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \alpha\beta \frac{x^{\alpha-1}(\ln y)^{\beta-1}}{y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) &= \frac{\beta x^{\alpha}(\ln y)^{\beta-2}}{y^2}(\beta - 1 - \ln y)
\end{aligned}$$

La Hessienne de F en (x,y) s'écrit donc

$$H(F)(x,y) = \underbrace{x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta-2}}_{\text{constante positive}} \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2}(\beta-1-\ln y) \end{pmatrix}$$

2. On suppose F concave, donc $H(F)(x,y)$ est semi-définie négative pour tout (x,y). Comme $x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta-2}$ est une constante positive, la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2}(\beta-1-\ln y) \end{pmatrix}$$

est semi-définie négative.
Son déterminant, qui est donc ≥ 0, vaut

$$\frac{\alpha\beta x^2(\ln y)^2((1-\alpha)\ln y + 1 - \alpha - \beta)}{y^2}$$

Ceci implique $\forall y > 1,\ \alpha\beta((1-\alpha)\ln y + 1 - \alpha - \beta) \geq 0$
Par des considérations asymptotiques, le facteur devant le log doit être ≥ 0 ie $\alpha\beta(1-\alpha) \geq 0$.

On a aussi

$$(1,0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2}(\beta-1-\ln y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

qui s'écrit $\alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 \leq 0$, donc $\alpha(\alpha-1) \leq 0$, donc $\alpha \in [0,1]$.
Par ailleurs, l'inégalité $\alpha\beta(1-\alpha) \geq 0$ devient $\beta \geq 0$.

3. On suppose $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \geq 0$. Montrons que F est concave sur C. Comme C est un convexe ouvert, il suffit de montrer que $H(F)(x,y)$ est semi-définie

négative pour tout (x, y) dans C.
On rappelle le lemme très pratique en dimension 2 :
Lemme :(Conditions de Monge)
Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.
Si $rt - s^2 \geq 0$ et $r \geq 0$ alors A est semi-définie positive.
Si $rt - s^2 \geq 0$ et $r \leq 0$ alors A est semi-définie négative.

<u>Preuve</u> : A étant symétrique , elle est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. La condition $rt - s^2 \geq 0$ est équivalente à $\det A \geq 0$, ie $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0$ donc λ_1 et λ_2 de même signe. On a par ailleurs $rt \geq s^2 \geq 0$ donc r et t ont même signe. Or $\mathrm{Tr}(A) = r + t = \lambda_1 + \lambda_2$. Le signe de λ_1 est donc celui de r ce qui achève la preuve.

Dans notre cas, la condition $\ln y > \frac{\beta}{1-\alpha} - 1$ implique $(1-\alpha)\ln y + 1 - \alpha - \beta > 0$, donc $\alpha\beta((1-\alpha)\ln y + 1 - \alpha - \beta) \geq 0$ d'où $\det(H(F)(x, y)) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in C$.
Enfin, $H(F)(x, y)_{11} = x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta-2}\alpha \underbrace{(\alpha - 1)}_{\leq 0}(\ln y)^2 \leq 0$ et d'après le lemme, $H(F)(x, y)$ est semi-définie négative.

4. a) On suppose F concave. On a

$$H(F)(x, y) = \begin{pmatrix} f''(x)g(y) & f'(x)g'(y) \\ f'(x)g'(y) & f(x)g''(y) \end{pmatrix}$$

Comme $H(F)(x, y)$ est semi-définie négative,

$$(1, 0) \cdot H(F)(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

ie $f''(x)g(y) \leq 0$. Comme $g > 0$, $f''(x) \leq 0$ et ceci pour tout $x \in I$. Donc f concave.
De même on prouve que g est concave.

b) f^2 et g^2 étant concaves et C^2 sur des intervalles ouverts, on a $(f^2)'' = 2(f'^2 + ff'') \leq 0$ ie $0 \leq f'^2 \leq ff''$ et $0 \leq g'^2 \leq gg''$ En multipliant ces deux dernières inégalités entre elles on a

$$\forall (x, y) \in I \times J,\ (f''(x)g(y))(f(x)g''(y)) \geq (f'(x)g'(y))^2$$

ie $\det(H(F)(x, y)) \geq 0$.
Par ailleurs, $f'^2(x) \leq f(x)f''(x)$ implique $f(x)f''(x) \leq -f'^2(x) \leq 0$ et comme $f > 0$, on a $f''(x) \leq 0$. Donc

$$H(F)(x, y)_{11} = f''(x)g(y) \leq 0 \quad \text{car } g > 0$$

D'après le lemme, $H(F)(x, y)$ est semi-définie négative, et ceci pour tout $(x, y) \in I \times J$ (qui est un ouvert convexe), donc F est concave sur $I \times J$.

Exercice 5.14

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

1. φ étant à support compact, montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(t)dt$ est convexe.
2. On suppose $f > 0$ croissante et C^1 sur $[a, b]$.
   Montrer que l'on peut prolonger f à $]-\infty, b]$ de manière à ce que la fonction prolongée soit encore convexe, croissante, strictement positive, C^1, et constante sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha]$.
3. Soient f, g convexes, strictement positives, croissantes et $\mathbb{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que fg est convexe sur $[a, b]$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a par convexité de f,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y - t) = f((1-\lambda)(x-t) + \lambda(y-t)) \leq (1-\lambda)f(x-t) + \lambda f(y-t)$$

En intégrant cette inégalité suivant t on obtient le résultat voulu.

2. *Correction proposée par Yannick Guyonvarch*

On définit pour tout y

$$f'_+(y) = \lim_{x \to y, x \geq y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$
$$f'_-(y) = \lim_{x \to y, x \leq y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Si $f'_+(a) = 0$, le résultat est immédiat car en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in]-\infty, a]$ on a construit un prolongement C^1 de f qui vérifie toutes les contraintes du problème.

Nous nous intéressons donc au cas où $f'_+(a) > 0$. Posons $g : x \mapsto e(x-\alpha)^2 + d$ avec $\alpha < a$ le point à déterminer tel que pour tout $x \leq \alpha$, on prolonge f par $h : x \mapsto g(\alpha) = d$. Nous devons donc trouver un triplet (e, α, d) qui satisfait au contraintes du problème, à savoir

$$g \text{ croissante et } C^1, \quad g'(\alpha) = 0, \quad g'(a) = f'(a), \quad 0 < g(\alpha) < f(a), \quad g(a) = f(a), \quad \alpha < a$$

g est bien C^1 et $g'(\alpha) = 0$. Par ailleurs

$$g'(a) = f'(a) \iff 2e(a-\alpha) = f'(a) \iff e = \frac{f'(a)}{2(a-\alpha)}$$
$$g(a) = f(a) \iff e(a-\alpha)^2 + d = f(a) \iff d = f(a) - \frac{f'(a)(a-\alpha)}{2}$$

e respecte la contrainte $e > 0$ (pour avoir g croissante) dès que $\alpha < a$. De la même manière $d < f(a)$ à la même condition.

Trouvons $\alpha < a$ tel que $0 < d$

$$d > 0 \iff \alpha > a - \frac{2f(a)}{f'(a)}$$

Ainsi en prenant $\alpha \in]a - \frac{2f(a)}{f'(a)}, a[$ on a bien construit un prolongement C^1 de f qui vérifie toutes les conditions.

3. *Correction proposée par Yannick Guyonvarch*

Pour tout $x \in [a,b]$, $f(x)g(x) > 0$ et $h : x \mapsto f(x)g(x)$ admet une dérivée $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
Soit $x_1 \leq x_2$.

$$\begin{aligned} h'(x_1) &= f'(x_1)g(x_1) + f(x_1)g'(x_1) \\ &\leq f'(x_1)g(x_2) + f(x_2)g'(x_1) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont croissantes} \\ &\leq f'(x_2)g(x_2) + f(x_2)g'(x_2) \text{ car } f \text{ et } g \text{ de dérivée croissante} \\ &= h'(x_2) \end{aligned}$$

h' est donc croissante sur $[a,b]$ donc $f \times g$ est convexe sur $[a,b]$.

Exercice 5.15

Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et P la projection sur K.
Montrer que $\varphi : x \mapsto \|x - P(x)\|$ est convexe.

Soient $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$.
Comme K est convexe, $(1-\lambda)P(x) + \lambda P(y) \in K$, donc par définition de P,

$$\begin{aligned} \varphi((1-\lambda)x + \lambda y) &= \|(1-\lambda)x + \lambda y - P((1-\lambda)x + \lambda y)\| \\ &\leq \|(1-\lambda)x + \lambda y - [(1-\lambda)P(x) + \lambda P(y)]\| \\ &= \|(1-\lambda)(x - P(x)) + \lambda(y - P(y))\| \\ &\leq (1-\lambda)\|x - P(x)\| + \lambda\|y - P(y)\| \\ &= (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \end{aligned}$$

Donc φ convexe.

Exercice 5.16

Soient $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = x^\alpha + y^\beta$ et $g(x,y) = x^\alpha y^\beta$
Etudier la concavité et la convexité de f et g.

f est clairement C^2 de Hessienne $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & \beta(\beta-1)y^{\beta-2} \end{pmatrix}$
Cette matrice est diagonale.

$$\begin{aligned}
f \text{ est concave} &\iff H(f)(x,y) \text{ semi-définie négative pour tout } (x,y) \\
&\iff \alpha(\alpha-1) \leq 0 \text{ et } \beta(\beta-1) \leq 0 \quad (\text{car } x>0 \text{ et } y>0) \\
&\iff \alpha \in [0,1] \text{ et } \beta \in [0,1] \\
f \text{ est convexe} &\iff H(f)(x,y) \text{ semi-définie positive pour tout } (x,y) \\
&\iff \alpha(\alpha-1) \geq 0 \text{ et } \beta(\beta-1) \geq 0 \quad (\text{car } x>0 \text{ et } y>0) \\
&\iff \alpha \notin]0,1[\text{ et } \beta \notin]0,1[
\end{aligned}$$

g est clairement C^2 de Hessienne $H(g)(x,y) = x^{\alpha-2}y^{\beta-2}\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)y^2 & \alpha\beta xy \\ \alpha\beta xy & \beta(\beta-1)x^2 \end{pmatrix}$
Posons donc $A(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)y^2 & \alpha\beta xy \\ \alpha\beta xy & \beta(\beta-1)x^2 \end{pmatrix}$ de sorte que $H(g)(x,y)$ est semi-définie positive/négative si et seulement si $A(x,y)$ l'est (car $x^{\alpha-2}y^{\beta-2} \geq 0$).

Le lemme du 5.13 (qui admet une réciproque facile à montrer) permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}
g \text{ est concave} &\iff H(g)(x,y) \text{ semi-définie négative pour tout } (x,y) \\
&\iff A(x,y) \text{ semi-définie négative pour tout } (x,y) \\
&\iff \det A \geq 0 \text{ et } A(x,y)_{11} \leq 0 \text{ pour tout } (x,y) \\
&\iff \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0 \text{ et } \alpha(\alpha-1) \leq 0 \\
&\iff \alpha \in [0,1] \text{ et } \beta \in [0, 1-\alpha]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g \text{ est convexe} &\iff H(g)(x,y) \text{ semi-définie positive pour tout } (x,y) \\
&\iff A(x,y) \text{ semi-définie positive pour tout } (x,y) \\
&\iff \det A \geq 0 \text{ et } A(x,y)_{11} \geq 0 \text{ pour tout } (x,y) \\
&\iff \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0 \text{ et } \alpha(\alpha-1) \geq 0 \\
&\iff \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta \geq 1-\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha \geq 1 \\ 1-\alpha \leq \beta \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 5.17

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P est convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que P admet au plus deux racines réelles.

On suppose par l'absurde que P admet 3 racines réelles distinctes : $a < b < c$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a,b[$ et $\zeta \in]b,c[$ tels que $P'(\xi) =$

$P'(\zeta) = 0$. Or P est convexe sur $\mathbb{R}$, donc P' est croissante, donc $P'(x) = 0$ pour tout $x \in [\xi, \zeta]$. P' est donc un polynôme qui admet une infinité de racines, absurde.

Exercice 5.18

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x, y) \to \sqrt{xy}$

1. Montrer que f est quasi-concave sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
2. Montrer que f est strictement quasi-concave.
3. Montrer que f est concave.

1. Montrons que les upper-contour sets de f sont convexes ie que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $S(a) := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ f(x, y) \geq a\}$ est convexe.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, $S(a) = \emptyset$. Si $a = 0$, $S(a) = (\mathbb{R}_+)^2$.
Si $a > 0$, $S(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ y \geq \frac{a}{x^2}\}$ Il s'agit de l'épigraphe de la fonction convexe $x \mapsto \frac{a}{x^2}$, donc $S(a)$ est convexe.

2. On peut reprendre le cheminement du 1. de l'exercice 5.19 : montrer que $\ln f$ est strictement concave, puis composer par exp.

3. f est C^2 sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, de Hessienne

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{4(xy)^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy}{4(xy)^{3/2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy}{4(xy)^{3/2}} & -\frac{x^2}{4(xy)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est 0 et $H(f)(x, y)_{11} \leq 0$. Le lemme du 5.13 permet de conclure que f est concave sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, donc concave sur l'intérieur de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
On obtient la concavité aux points de la frontière en les approchant par des points de l'intérieur et en utilisant la continuité de f sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Exercice 5.19

Etudier la concavité et la quasi-concavité (stricte ou non) des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^n$

1. $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ où $\alpha_i > 0$
2. $f(x) = \min(\frac{x_i}{\alpha_i})$ où $\alpha_i > 0$

1. On introduit quelques notions adéquates :
• On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est strictement concave si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) > (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

• **Lemme 1** : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est strictement concave et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors $\varphi \circ f$ est strictement quasi-concave.
Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$. Par stricte concavité de f, $f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ et en composant par φ,

$$\varphi(f((1-\lambda)x+\lambda y)) > \varphi((1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)) > \varphi(\min(f(x), f(y))) = \min(\varphi(f(x)), \varphi(f(y)))$$

donc $\varphi \circ f$ strictement quasi-concave.
• **Lemme 2** : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Si $H(f)(x)$ est définie négative pour tout $x \in U$, alors f est strictement concave sur U.
Preuve : Résultat classique qu'on trouvera dans n'importe quel livre d'analyse convexe.

• Revenons au problème. On se limite d'abord à l'étude sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
On va montrer que $\ln f$ est strictement concave. Par le lemme 1, on aura f strictement quasi-concave. La Hessienne de $\ln f$ est très facile à calculer :

$$H(\ln f)(x) = \operatorname{diag}(-\frac{\alpha_1}{x_1^2}, \ldots, -\frac{\alpha_n}{x_n^2})$$

Les valeurs propres sont < 0, donc $H(\ln f)(x)$ est définie négative pour tout $x \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et d'après le lemme 2, $\ln f$ est strictement concave. f est donc strictement quasi-concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
Le résultat tombe en défaut sur $\mathbb{R}^n$: on considère $x = (0, \ldots, 0)$, $y = (0, \ldots, 0, 1)$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ Alors

$$f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = f(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}) = 0 = f(x) = f(y)$$

• On étudie ensuite la concavité de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
On calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x) = \alpha_i(\alpha_i - 1)\frac{f(x)}{x_i^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \alpha_i \alpha_j \frac{f(x)}{x_i x_j}$$

Posons $y = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\frac{\alpha_1}{x_1^2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{x_n^2})$, de sorte que

$$H(f)(x) = f(x)(yy^T - D)$$

et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} v^T H(f)(x) v &= f(x)[(y^T v)^T (y^T v) - v^T D v] \\ &= f(x) \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i}{x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2} \right] \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i}{x_i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i}\frac{\sqrt{\alpha_i} v_i}{x_i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2}\right)$$

Donc

$$v^T H(f)(x)v \leq f(x)\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) - 1\right]\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2}$$

Par conséquent, si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$, $v^T H(f)(x)v \leq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, donc f est concave.

• Il reste à prouver que f n'est ni concave ni convexe lorsque $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i > 1$.
C'est facile à montrer lorsque n est pair : il suffit alors d'exhiber x tel que $\det(H(f)(x)) < 0$.
Pour $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un calcul de déterminant assez classique donne

$$\det H(f)(x) = (f(x))^n \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n \alpha_i}\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) - 1\right] < 0$$

Il reste donc à traiter le cas n impair.

2. f étant un minimum de fonctions concaves, elle est concave. La quasi-concavité est connue (cf courbes d'indifférence de Leontieff en microéconomie) mais semble difficile à prouver (la fonction considérée n'est pas différentiable). On sait encore grâce au cours de micro que f n'est pas strictement quasi-concave.

Exercice 5.20

Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est concave si et seulement si

$$K := \{(x, z) \in C \times \mathbb{R},\ z < f(x)\}$$

est convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. On suppose f concave et x_0 un point intérieur à C. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in C$,

$$f(x) - f(x_0) \leq L(x - x_0)$$

1. $\Longrightarrow$ On suppose f concave. Soient (x_1, z_2), $(x_2, z_2) \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par concavité de f,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &\geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &> (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{aligned}$$

Donc $((1-\lambda)x_1+\lambda x_2,(1-\lambda)z_1+\lambda z_2)\in K$ ie $(1-\lambda)(x_1,z_1)+\lambda(x_2,z_2)\in K$. Donc K convexe.

$\Longleftarrow$ On suppose K convexe. Soient $x,y\in C$ et $\lambda\in[0,1]$. Considérons z_1 et z_2 des réels tels que $f(x)>z_1$ et $f(y)>z_2$, de sorte que (x_1,z_1) et $(x_2,z_2)\in K$. Par convexité de K on a

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)>(1-\lambda)z_1+\lambda z_2$$

En faisant $z_1 \underset{<}{\longrightarrow} f(x_1)$ et $z_2 \underset{<}{\longrightarrow} f(x_2)$, on obtient

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\geq(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$$

Donc f concave.

2. On rappelle deux théorème importants qu'on va utiliser dans la suite :
Théorème 1 : Soit K un convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors $\overset{\circ}{\overline{K}}=\overset{\circ}{K}$.
Théorème 2 : Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et x_0 un point de la frontière de K. Alors il existe un hyperplan d'appui à K en x_0. Plus précisément, il existe $e\in\mathbb{R}^n$ tel que $K\subset\{x\in\mathbb{R}^n,\ \langle e,x-x_0\rangle\geq 0\}$

Par continuité de f en x_0 (qui est bien intérieur à C), on montre facilement que $(x_0,f(x_0))\notin\overset{\circ}{K}$. Par ailleurs, on a $(x_0,f(x_0))\in K$. Donc

$$(x_0,f(x_0))\in K\setminus\overset{\circ}{K}\subset\overline{K}\setminus\overset{\circ}{K}$$

Par le théorème 1 on a

$$(x_0,f(x_0))\in\overline{K}\setminus\overset{\circ}{\overline{K}}$$

Or $\overline{K}\setminus\overset{\circ}{\overline{K}}$ est précisément la frontière de $\overline{K}$, qui est un convexe fermé.
Par le théorème 2, on dispose donc de $(u^*,\alpha)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ tel que

$$\overline{K}\subset\{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\ \langle(u^*,\alpha),(x,z)-(x_0,f(x_0))\rangle\geq 0\}$$

ce qu'on réécrit

$$\overline{K}\subset\{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\ \langle u^*,x-x_0\rangle\geq\alpha(f(x_0)-z)\}$$

Soit $x\in C$ fixé. Considérons $z\in\mathbb{R}$ tel que $z<f(x)$, de sorte que $(x,z)\in K\subset\overline{K}$.
On a donc $\langle u^*,x-x_0\rangle\geq\alpha(f(x_0)-z)\qquad(*)$
Choisissons z tel que $z<\min(f(x),f(x_0))$, de sorte que $f(x_0)-z>0$ et $(x,z)\in K$.

Si $\alpha\geq 0$, $(*)$ implique $\langle u^*,x-x_0\rangle\geq 0$, ceci étant vrai pour tout $x\in K$.
Comme $x_0\in\overset{\circ}{K}$, l'inégalité reste vraie sur un voisinage de x_0, de sorte que pour $t>0$ suffisamment petit on a

$$\langle u^*,(x_0-tu^*)-x_0\rangle\geq 0$$

ie $-\|u^*\|^2 \leq 0$, donc $\|u^*\| = 0$ et $u^* = 0$.
$(*)$ donne alors $0 \geq \alpha(f(x_0) - z)$, donc $z \geq f(x_0)$, en contradiction avec la définition de z.

Donc $\alpha < 0$. On considère $z \in \mathbb{R}$ tel que $z < f(x)$ et on réécrit alors $(*)$ sous la forme

$$\langle \frac{u^*}{\alpha}, x - x_0 \rangle \leq f(x_0) - z$$

En faisant $z \underset{<}{\longrightarrow} f(x)$, on a

$$\langle \frac{u^*}{\alpha}, x - x_0 \rangle \leq f(x_0) - f(x)$$

donc

$$\langle -\frac{u^*}{\alpha}, x - x_0 \rangle \geq f(x) - f(x_0)$$

En posant $L : x \mapsto \langle -\frac{u^*}{\alpha}, x \rangle$, on a le résultat.

Exercice 5.21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq a$. Montrer que f est constante.

Supposons par l'absurde que f n'est pas constante. On dispose alors de a et b tel que $f(a) < f(b)$. Sans perte de généralité on suppose que $a < b$. Par croissance des pentes on a pour tout $x > b$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc

$$f(x) \geq (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$$

Le membre de droite tends vers ∞ lorsque $x \to \infty$, absurde.

Exercice 5.22

Soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$ par

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$$

A quelle condition f est-elle convexe, concave ?

Dans la suite on notera $S = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$.
f est clairement C^2 en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^n$, de dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x_1,\ldots,x_n) &= S^{1/p-2}(1-p)x_i^{2p-2} + S^{1/p-1}(p-1)x_i^{p-2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) &= S^{1/p-2}(1-p)x_i^{p-1}x_j^{p-1}
\end{aligned}$$

En posant $y = \begin{pmatrix} x_1^{p-1} \\ \vdots \\ x_n^{p-1} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} x_1^{p-2} & & \\ & \ddots & \\ & & x_n^{p-2} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(x_1^{p-2},\ldots,x_n^{p-2})$,

la Hessienne de f s'écrit $S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D$. On a, pour $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v &= S^{1/p-2}(p-1)\left[Sv^TDv - (y^Tv)^T(y^Tv)\right] \\
&= S^{1/p-2}(p-1)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p \sum_{i=1}^{n} x_i^{p-2}v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}v_i\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}v_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^{p/2-1}v_i)x_i^{p/2}\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-2}v_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v$$

a même signe que

$$S^{1/p-2}(p-1)$$

Or $S^{1/p-2}$ est ≥ 0, donc $v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v$ a le signe de $p-1$, quel que soit v.

En conclusion, f est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ si et seulement si $p-1 \geq 0$ et concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ si et seulement si $p-1 \leq 0$.
La convexité/concavité au bord s'obtient dans les deux cas en approchant par des éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ puis en utilisant la continuité de f.

Exercice 5.23

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On définit $f : \mathbb{R}^n \to R, x \mapsto \|Ax\|^2 + 2\|Bx\|^{3/2}$. Montrer que f est convexe.

Il suffit de remarquer que $x \mapsto \|Ax\|$ est convexe (conséquence directe de l'inégalité triangulaire). On utilise ensuite le lemme
Lemme : Si $f : \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$ est convexe et $g : f(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est convexe et croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$. L'inégalité de convexité $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ composée par g donne

$$g(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \leq g((1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)) \leq (1-\lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y))$$

Donc $g \circ f$ convexe.

Ici on compose avec $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ qui est convexe, donc $x \mapsto \|Ax\|^2$ est convexe.
Pour les mêmes raisons, $x \mapsto 2\|Ax\|^{3/2}$ est convexe, donc f est convexe, comme somme de deux fonctions convexes.

Exercice 5.24

Exercice 5.25

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convexe, continue, strictement monotone sur $[a,b]$.
Que de la convexité/concavité de f^{-1} ?

Correction proposée par Yannick Guyonvarch

Ici on ne suppose pas a priori la dérivabilité de f.
Par convexité, on a pour tout $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$ et tout $\lambda \in]0,1[$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

On pose $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ (N.B : ceci est possible car f est continue strictement croissante, donc elle vérifie $x = f^{-1}(f(x))$ pour tout x).
Ainsi

$$f(\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2)) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$$

f continue strictement croissante sur $[a,b] \implies f^{-1}$ continue, strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$. En appliquant f^{-1} à l'inégalité, on en préserve le sens et on obtient

$$\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$$

$\implies f^{-1}$ concave.