

TD d'optimisation  
ENSAE  
1A

Gabriel Romon

Version du 9 mars 2017

**1. Différentielle****Exercice 1.1**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

1. Montrer que  $f$  est  $C^1$ .
2. Montrer que  $f$  est  $C^2$ .

1. Les dérivées partielles de  $f$  en  $(x, y) \neq (0, 0)$  sont clairement définies et données par  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y^3 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 y^2 (3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ . Comme pour tout  $h \in \mathbb{R}, f(0, h) = f(h, 0) = f(0, 0) = 0$ , les dérivées partielles de  $f$  existent en  $(0, 0)$  avec  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  sont clairement continues en tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Montrons que ces deux fonctions sont continues en  $(0, 0)$ .

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , si  $x = 0$  ou  $y = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ . Dans la suite on supposera donc sans perte de généralité que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ .

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{x^2 y^3 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{|y|^3 x^4}{(x^2 + y^2)^2} + 3 \frac{|y|^5 x^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y|^3 + 3|y|x^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |x|^3 + 3|x|y^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \text{ par symétrie.}$$

$f$  admet donc des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .  $f$  est donc  $C^1$ .

2.  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  admettent clairement des dérivées partielles en tout  $(x, y) \neq (0, 0)$  données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2xy^5(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) = \frac{x^2 y^2 (3x^4 + 14x^2 y^2 + 3y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$$

et par symétrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^5 y (3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) = \frac{x^2 y^2 (3x^4 + 14x^2 y^2 + 3y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$$

Comme pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) = \frac{\partial f}{\partial x}(h, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, h) = \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

## 1.. DIFFÉRENTIELLE

---

les dérivées partielles de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent en  $(0, 0)$  avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) = 0$$

Les quatre dérivées partielles sont clairement continues en tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Montrons qu'elles sont continues en  $(0, 0)$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Comme précédemment on peut supposer que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ .

**Lemme :**  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \|(x, y)\|_2^2$

Preuve : Conséquence de l'inégalité  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$  avec  $a = |x|$  et  $b = |y|$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right| &= \left| \frac{2xy^5(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \right| \leq \frac{2|x|^3|y|^5}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{2y^2(|xy|)^3}{\|(x, y)\|_2^6} + \frac{6|x||y|^7}{(x^2 + y^2)^3} \\ &\leq \underbrace{\frac{2y^2\|(x, y)\|_2^6}{\|(x, y)\|_2^6}}_{\text{Lemme}} + 6|x||y| \\ &= 2y^2 + 6|x||y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \end{aligned}$$

La symétrie permet de conclure  $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right| \leq 2x^2 + 6|x||y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$

et une technique similaire donne

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) \right| \leq 3y^2 + 14\|(x, y)\|_2^2 + 3x^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  admettent des dérivées partielles qui sont définies et continues en tout point de  $\mathbb{R}^2$ . Donc  $f$  est  $C^2$ .

### Exercice 1.2

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^x$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
Montrer que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

$f$  admet clairement des dérivées partielles en tout  $(x, y) \neq (0, 0)$  données par  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^2 + y^2)^x \left( \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \log(x^2 + y^2) \right)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy(x^2 + y^2)^{x-1}$ . Par composition et multiplication de fonction continues, ces dérivées partielles sont continues en tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$f$  est donc différentiable en tout  $(x, y) \neq (0, 0)$  et son gradient en  $(x, y)$  est

$$\left( (x^2 + y^2)^x \left( \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \log(x^2 + y^2) \right), 2xy(x^2 + y^2)^{x-1} \right)$$

**Exercice 1.3**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ . Calculer la différentielle de  $f$ .

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixé et  $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f((x, y) + (h_1, h_2)) = f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ yh_1 + xh_2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}^T$$

Le candidat pour la différentielle de  $f$  en  $(x, y)$  est donc  $(h_1, h_2) \mapsto \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right]^T$ .

Il suffit de prouver que  $\frac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \xrightarrow{\|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0} 0$

Le choix de la norme n'importe pas étant donné l'équivalence des normes en dimension finie. On choisit par exemple la norme 2.

$$\frac{\|(0, h_1h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} = \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |h_1| \rightarrow 0$$

en minorant trivialement le dénominateur par  $\sqrt{h_2^2}$ .

**Exercice 1.4**

Soit  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), X \mapsto X^T X$ . Calculer la différentielle de  $f$ .

Pour  $X \in M_n(\mathbb{R})$  et  $H \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $f(X + H) = f(X) + X^T H + H^T X + H^T H$ .

Le candidat pour la différentielle de  $f$  en  $X$  est donc  $H \mapsto X^T H + H^T X$ .

Il suffit de prouver que  $\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \xrightarrow{\|H\| \rightarrow 0} 0$ .

Par équivalence des normes en dimension finie, on choisit n'importe quelle norme d'opérateur sur  $M_n(\mathbb{R})$  (celle qui dérive de la norme 2 par exemple). Alors

$\frac{\|H^T H\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H^T\| \|H\|}{\|H\|} = \|H^T\|$ . La transposée étant linéaire, elle est continue en 0, donc  $\|H^T\| \xrightarrow{\|H\| \rightarrow 0} 0$  ce qui achève la preuve.

**Exercice 1.5**

Soient  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (f(x^2y, z^2x), g(x^y, zx))$ . Calculer, si elle existe, la différentielle de  $f$ .

Posons  $\gamma : (x, y, z) \mapsto (x^2y, z^2x)$  et  $\delta : (x, y, z) \mapsto (x^y, zx)$ .

$\gamma$  et  $f$  sont différentiables en tous points de leurs domaines, donc  $f \circ \gamma$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^3$  avec

$$d(f \circ \gamma)(x, y, z) = df(\gamma(x, y, z)) \circ d\gamma(x, y, z)$$

On calcule  $\text{Jac}(\gamma)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix}$ . En passant des applications linéaires aux matrices,

$$\begin{aligned} \text{Jac}(f \circ \gamma)(x, y, z) &= \text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \text{Jac}(\gamma)(x, y, z) \\ &= \text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\delta$  est définie et différentiable en  $(x, y, z)$  dès lors que  $x > 0$ . On calcule de même  $\text{Jac}(\delta)(x, y, z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$  de sorte que pour tout  $(x, y, z)$  avec  $x > 0$ ,

$$\text{Jac}(g \circ \delta)(x, y, z) = \text{Jac}(g)(x^y, zx) \cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

La différentielle de  $f \circ \gamma$  en  $(x, y, z)$  est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[ \text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T$$

et celle de  $g \circ \delta$  en  $(x, y, z)$  avec  $x > 0$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left[ \text{Jac}(g)(x^y, zx) \cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T$$

Soit  $(x, y, z)$  fixé avec  $x > 0$  et  $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$\begin{aligned} \varphi \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right) &= \left( f \circ \gamma \left( \begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix} \right), g \circ \delta \left( \begin{pmatrix} x+h_1 \\ y+h_2 \\ z+h_3 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= (f \circ \gamma((x, y, z)) + d(f \circ \gamma)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) + \|h\| \varepsilon_1(\|h\|), \\ &\quad g \circ \delta((x, y, z)) + d(g \circ \delta)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) + \|h\| \varepsilon_2(\|h\|)) \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des fonctions telles que  $\varepsilon_1(\|h\|) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$  et  $\varepsilon_2(\|h\|) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$

$$\begin{aligned} &= \varphi((x, y, z)) + (d(f \circ \gamma)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3), d(g \circ \delta)(x, y, z)(h_1, h_2, h_3)) \\ &\quad + \|h\| \underbrace{(\varepsilon_1(\|h\|), \varepsilon_2(\|h\|))}_{\xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

La différentielle de  $\varphi$  en  $(x, y, z)$  est donc

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \left( \left[ \text{Jac}(f)(x^2y, z^2x) \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2zx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T, \left[ \text{Jac}(g)(x^y, zx) \cdot \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right]^T \right)$$

**Exercice 1.6**

Soit  $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$  muni de la norme infinie  $\|\cdot\|$  et  $\varphi : E \rightarrow E, f \mapsto f^3$ .  
Montrer que  $\varphi$  est différentiable.

On n'est plus dans le cadre des espaces de dimension finie et la notion de différentielle est celle de Fréchet.

Pour  $f \in E$  et  $h \in E$ ,  $\varphi(f+h) = \varphi(f) + 3f^2h + 3fh^2 + h^3$ .

Le candidat pour la différentielle de  $\varphi$  en  $f$  est donc  $h \mapsto 3f^2h$ .

Il suffit de prouver que  $h \mapsto 3f^2h$  est continue en 0 et que  $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$ .

**Lemme :** Pour  $f, g \in E$ ,  $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ .

Preuve : Par continuité de  $|fg|$  sur  $[a, b]$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\|fg\| = |f(c)g(c)| \leq |f(c)|\|g\| \leq \|f\|\|g\|$$

D'après le lemme,  $\|3f^2h\| \leq 3\|f^2\|\|h\|$  ce qui prouve la continuité en 0.

On a  $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\frac{\|fh^2\|}{\|h\|} + \frac{\|h^3\|}{\|h\|}$ .

Le lemme donne  $\frac{\|3fh^2+h^3\|}{\|h\|} \leq 3\|f\|\|h\| + \|h\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$ .

**Exercice 1.7**

Soit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme infinie  $\|\cdot\|$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable avec  $g''$  bornée par  $M \geq 0$ .

Soit  $I : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 (g \circ f)(t) dt$

1. Montrer que  $I$  est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que  $I$  est  $C^1$ .
3. Qu'en est-il si  $g$  est seulement  $C^1$  ?

1. Pour  $f \in E$  fixé et  $h \in E$ ,  $t \in [0, 1]$ , la formule de Taylor-Lagrange donne

$$g(f(t) + h(t)) = g(f(t)) + h(t)g'(f(t)) + \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$$

où  $\xi_t \in \mathbb{R}$  de sorte que  $t \mapsto \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})$  est continue sur  $[0, 1]$  et

$$I(f+h) = I(f) + \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt + \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt$$

Le candidat pour la différentielle de  $I$  en  $f$  est  $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$ .

Il suffit de prouver que  $h \mapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt$  est continue en 0 et

$$\frac{\left| \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2}g''(\xi_{h,t})dt \right|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

On a  $\left| \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt \right| \leq \|h\| \underbrace{\int_0^1 |g'(f(t))|dt}_{\text{indépendant de } h}$  ce qui prouve la continuité en 0.

Comme  $\left| \frac{h(t)^2}{2} g''(\xi_{h,t}) \right| \leq \frac{M}{2} h(t)^2$ ,

$$\frac{\left| \int_0^1 \frac{h(t)^2}{2} g''(\xi_{h,t}) dt \right|}{\|h\|} \leq \frac{M}{2} \frac{\int_0^1 h(t)^2 dt}{\|h\|} \leq \frac{M}{2} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \frac{M}{2} \|h\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

2. Sur  $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$  on institue la norme d'opérateur  $\|\cdot\|_{op}$  dérivant de la norme infinie.

Il s'agit de montrer la continuité de  $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto \int_0^1 h(t)g'(f(t))dt \end{cases} \end{cases}$

Soit  $f_0 \in E$  et  $h \in E$ . On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)| &= \left| \int_0^1 h(t)(g'(f(t)) - g'(f_0(t))) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |h(t)| M |f(t) - f_0(t)| dt \quad g'' \text{ est bornée par } M \text{ donc } g' \text{ est } M\text{-lipschitzienne} \\ &\leq M \|f - f_0\| \int_0^1 |h(t)| dt \\ &\leq M \|f - f_0\| \|h\| \end{aligned}$$

Donc  $\frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|}$  est bornée par  $M\|f - f_0\|$ , d'où

$$\|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} = \sup_h \frac{|\varphi(f)(h) - \varphi(f_0)(h)|}{\|h\|} \leq M\|f - f_0\|$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Avec  $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ ,  $\|f - f_0\| \leq \delta \implies \|\varphi(f) - \varphi(f_0)\|_{op} \leq \varepsilon$   
ce qui prouve la continuité de  $\varphi$  en  $f_0$ .

3. Mon intuition me laisse penser que si  $g$  est deux fois dérivable sans être bornée (donc  $C^1$ ),  $I$  n'est pas forcément différentiable. Obtenir un contre-exemple n'est pas évident, car  $I$  est tout de même continue (par uniforme continuité de  $g$  sur un compact).

### Exercice 1.8

Soient  $E$  et  $F$  des evn avec  $F$  complet. Soit  $D \subset E$  un ouvert.

On pose  $B^2 = \{f : D \rightarrow F / f \text{ } C^2, f \text{ bornée, } df \text{ bornée, et } d^2f \text{ bornée}\}$  et

$$\|f\| = \sup_{x \in D} (\|f(x)\| + \|df(x)\| + \|d^2f(x)\|)$$

Montrer que  $B^2$  est complet.

On trouvera une présentation de l'intégrale des fonctions à valeurs dans un espace de Banach à l'adresse  
[http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture\\_Notes/chap4.pdf](http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture_Notes/chap4.pdf)

Etant donné  $X$  un ensemble et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  un evn, on note  $B(X, Y)$  l'ensemble des fonctions bornées de  $X$  dans  $Y$ . On rappelle que si  $Y$  est complet, alors  $B(X, Y)$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty, Y}$  définie par  $\|f\|_{\infty, Y} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$ .

On notera  $\|\cdot\|_{op}$  la norme d'opérateur sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$  qui dérive de  $\|\cdot\|_F$ . On rappelle que  $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|_{op})$  est un Banach.

On notera  $\|\cdot\|_{op'}$  la norme d'opérateur sur  $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$  qui dérive de  $\|\cdot\|_{op}$ , de sorte que  $(\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F)), \|\cdot\|_{op'})$  est un Banach.

On rappelle que si  $f \in B^2$  et  $a \in D$ ,  $df(a) \in \mathcal{L}_c(E, F)$  et  $d^2f(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$ . La norme définie dans l'énoncé est donc à prendre au sens suivant :

$$\|f\| = \sup_{x \in D} (\|f(x)\|_F + \|df(x)\|_{op} + \|d^2f(x)\|_{op'})$$

On prouve facilement les faits suivants : pour  $f \in B^2$ ,

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \|f\|_{\infty, F} \\ \|f\| &\geq \|df\|_{\infty, op} \\ \|f\| &\geq \|d^2f\|_{\infty, op'} \end{aligned}$$

Soit  $(f_n)$  de Cauchy dans  $B^2$  pour  $\|\cdot\|$ .

- D'après la remarque précédente,  $(f_n)$  est de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{\infty, F}$  dans  $B(D, F)$  qui est complet, donc  $(f_n)$  converge pour  $\|\cdot\|_{\infty, F}$  vers un  $f \in B(D, F)$ .
  - D'après la remarque précédente,  $(df_n)$  est de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{\infty, op}$  dans  $B(D, \mathcal{L}_c(E, F))$  qui est complet, donc  $(df_n)$  converge pour  $\|\cdot\|_{\infty, op}$  vers un  $\varphi \in B(D, \mathcal{L}_c(E, F))$ .
  - En tant que limites uniformes de fonctions continues,  $f$  et  $\varphi$  sont continues.
  - Montrons que  $f$  est différentiable de différentielle  $\varphi$ .
- Soit  $a \in D$ . Pour  $h \in D$ , et  $n$  quelconque,

$$f_n(a+h) - f_n(a) = \int_0^1 df_n(a+th)dt$$

La convergence des  $df_n$  vers  $\varphi$  étant uniforme, on a en passant à la limite

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \varphi(a+th)dt$$



donc

$$\begin{aligned} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} &= \frac{\|\int_0^1 \varphi(a+th) - \varphi(a)(h) dt\|_F}{\|h\|_E} \\ &\leq \frac{\int_0^1 \|\varphi(a+th) - \varphi(a)\|_{op} \|h\|_E dt}{\|h\|_E} \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi(a+th) - \varphi(a)\|_{op} dt \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\varphi$  est continue on dispose de  $\delta > 0$  tel que  $\|x\|_F \leq \delta \implies \|\varphi(a+x) - \varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$ . Pour  $\|h\| \leq \varepsilon$  et  $t \in [0, 1]$  on obtient

$$\|\varphi(a+th) - \varphi(a)\|_{op} \leq \varepsilon$$

donc  $\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} \leq \varepsilon$  dès que  $\|h\| \leq \delta$ .

$f$  est donc différentiable sur  $D$  et sa différentielle est  $\varphi$ , qui est continue d'après la remarque précédente.

- Un raisonnement identique en remplaçant  $f_n$  par  $df_n$  montre que  $df$  est différentiable sur  $D$ , on note  $d^2f$  sa différentielle qui est continue.
- $f$  est donc  $C^2$ , bornée, de différentielles bornées. Il reste à prouver que  $(f_n)$  converge vers  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Etant donné  $\varepsilon > 0$ , on dispose de  $N, N', N''$  tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad n \geq N &\implies \|f(x) - f_n(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ n \geq N' &\implies \|df(x) - df_n(x)\|_{op} \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ n \geq N'' &\implies \|d^2f(x) - d^2f_n(x)\|_{op'} \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Pour  $n \geq \max(N, N', N'')$ ,

$$\|f(x) - f_n(x)\|_F + \|df(x) - df_n(x)\|_{op} + \|d^2f(x) - d^2f_n(x)\|_{op'} \leq \varepsilon$$

et ceci pour tout  $x \in D$ , donc  $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$ . Ceci achève la preuve.

### Exercice 1.9

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -evn,  $D \subset E$  un ouvert et  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose  $\overline{D}$  compact,  $f$  continue, nulle à la frontière de  $D$  et  $f$  différentiable sur  $D$ .  
Montrer qu'il existe  $a \in D$  tel que  $df(a) = 0$ .

$f$  est continue sur le compact  $\overline{D}$  donc elle admet un maximum  $M$  et un maximum  $m$  atteints respectivement en  $\alpha$  et  $\beta \in \overline{D}$ .

Si  $m = M = 0$ ,  $f$  est nulle sur  $D$  donc pour tout  $x \in D$ ,  $df(x) = 0$ .

Sinon,  $m < 0$  ou  $M > 0$ . On suppose par exemple  $M > 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $\overline{D} \setminus \overset{\circ}{D} = \overline{D} \setminus D$ , on a  $\beta \in D$ . En  $\beta$ ,  $f$  admet un maximum global (donc local), d'où  $df(\beta) = 0$ .

### Exercice 1.10

Soient  $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $f(x, y, z) = (x + \varphi(yz), y + \psi(\frac{x}{z}))$ .  
Calculer la différentielle de  $f$ .

La démarche est identique à celle de l'exercice 1.5. En posant  $f_1 : (x, y, z) \mapsto x + \varphi(yz)$  et  $f_2 : (x, y, z) \mapsto y + \psi(\frac{x}{z})$ , il suffit de démontrer que  $f_1$  et  $f_2$  sont différentiables en  $(x, y, z)$  pour obtenir la différentielle de  $f$  en  $(x, y, z)$  :

$$df(x, y, z) : (h_1, h_2, h_3) \mapsto (df_1(x, y, z)(h_1, h_2, h_3), df_2(x, y, z)(h_1, h_2, h_3))$$

On calcule

$$\text{Jac}(f_1)(x, y, z) = (1, \varphi'(yz)z, \varphi'(yz)y)$$

et

$$\text{Jac}(f_2)(x, y, z) = \left( \psi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{1}{z}, 1, -\psi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{x}{z^2} \right)$$

### Exercice 1.11

1. Soient  $E, F, G, H$  des  $\mathbb{R}$ -evn.  $B$  est une forme bilinéaire continue de  $F \times G$  dans  $H$ ,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : E \rightarrow G$ .  
On suppose que  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a \in E$ . Montrer que  $C : E \rightarrow H, x \mapsto B(f(x), g(x))$  est différentiable en  $a$ .
2. Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien.
  - (a) Montrer que  $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$  est différentiable sur  $E \setminus \{0\}$ .
  - (b) Déterminer la différentielle de  $\psi : x \mapsto \|x\|^2$ .
  - (c) Déterminer et interpréter la différentielle de  $\varphi$ .

1. Soit  $a \in E$ . Pour  $h \in E$ ,

$$\begin{aligned} C(a+h) &= C(a) + B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a)) \\ &\quad + \\ &\quad B(f(a), \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(\|h\|_{\varepsilon_f}(\|h\|), g(a+h)) \end{aligned}$$

Le candidat pour la différentielle en  $a$  de  $f$  est  $h \mapsto B(f(a), dg(a)(h)) + B(df(a)(h), g(a))$ .  
Il suffit de prouver que

$$B(f(a), \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(df(a)(h), dg(a)(h) + \|h\|_{\varepsilon_g}(\|h\|)) + B(\|h\|_{\varepsilon_f}(\|h\|), g(a+h)) = o(\|h\|)$$

$B$  étant bilinéaire continue, il existe  $K \geq 0$  tel que

$$\forall x, y \in E, \|B(x, y)\| \leq K\|x\|\|y\|$$

On traite chaque terme de la somme séparément :

- $B(f(a), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(f(a), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\rightarrow 0}$
- $\|B(df(a)(h), dg(a)(h))\| \leq K\|df(a)\|_{op}\|df(b)\|_{op}\|h\|^2$
- $B(df(a)(h), \|h\|\varepsilon_g(\|h\|)) = \|h\| \underbrace{B(df(a)(h), \varepsilon_g(\|h\|))}_{\rightarrow 0}$
- $B(\|h\|\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h)) = \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_f(\|h\|), g(a+h))}_{\rightarrow 0}$

La somme est bien  $o(\|h\|)$ .

2. a)  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  est bilinéaire continue (d'après Cauchy-Schwarz). La question 1. implique que  $\psi : x \mapsto \langle x, x \rangle$  est différentiable en tout  $a \in E$ . La fonction  $\delta : x \mapsto \frac{1}{x}$  est différentiable en tout  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  donc  $\delta \circ \psi$  est différentiable en tout  $a \in E \setminus \{0\}$ .

$\pi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ ,  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  est bilinéaire continue, et d'après 1.,  $x \mapsto \pi(\delta \circ \psi(x), x)$  est différentiable en tout  $x \in E \setminus \{0\}$ .

Ceci s'écrit encore  $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$  est différentiable sur  $E \setminus \{0\}$ .

b) Soit  $x \in E$ . Pour  $h \in E$ ,  $\psi(x+h) = \psi(x) + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2$ .  
La différentielle de  $\psi$  en  $x$  est donc  $h \mapsto 2\langle x, h \rangle$ .

c) D'après 1., la différentielle de  $\varphi$  en  $x \neq 0$  est donnée par

$$\begin{aligned} d\varphi(x)(h) &= \pi(\text{Id}(x), d(\delta \circ \psi)(x)(h)) + \pi(d\text{Id}(x)(h), \delta \circ \psi(x)) \\ &= x \cdot d\delta(\psi(x))(d\psi(x)(h)) + \frac{h}{\|x\|^2} \\ &= x \cdot -\frac{2\langle x, h \rangle}{(\|x\|^2)^2} + \frac{h}{\|x\|^2} \\ &= \frac{h}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, h \rangle x}{\|x\|^4} \end{aligned}$$

### Exercice 1.12

Déterminer toutes les fonctions  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

C'est un classique que l'on trouve dans n'importe quel livre de prépa.

**Exercice 1.13**

En quels points de  $\mathbb{R}^2$  la fonction  $g : (x, y) \mapsto \max(x^2, y)$  est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x^2 > y$ . Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de  $(x, y)$  de sorte que  $g(x, y) = x^2$  sur un voisinage de  $(x, y)$ .  $g$  est donc différentiable en  $(x, y)$  de différentielle  $(h_1, h_2) \mapsto 2xh_1$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x^2 < y$ . Cette relation reste vérifiée sur un voisinage de  $(x, y)$  de sorte que  $g(x, y) = y$  sur un voisinage de  $(x, y)$   $g$  est donc différentiable en  $(x, y)$  de différentielle  $(h_1, h_2) \mapsto h_2$ .

En  $(0, 0)$  :  $\frac{g(0, \frac{1}{n}) - g(0, 0)}{\frac{1}{n}} = 1$  et  $\frac{g(0, -\frac{1}{n}) - g(0, 0)}{-\frac{1}{n}} = 0$  donc  $g$  n'admet pas de dérivée partielle selon  $y$  en  $(0, 0)$  donc  $g$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $x^2 = y$  et  $x \neq 0$ .

$$\frac{g(x + \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{\frac{1}{n}} = \frac{(x + \frac{1}{n})^2 - x^2}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2x$$
$$\frac{g(x - \frac{1}{n}, y) - g(x, y)}{-\frac{1}{n}} = \frac{y - y}{-\frac{1}{n}} = 0 \neq 2x$$

donc  $g$  n'admet pas de dérivée partielle selon  $x$  en  $(x, y)$  donc  $g$  n'est pas différentiable en  $(x, y)$ .

**Exercice 1.14**

Soient  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$  des entiers.

On définit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^n y^p}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

Pour quelles valeurs de  $(n, p)$   $f$  est-elle différentiable dans  $\mathbb{R}^2$  ?

Quelles que soient les valeurs de  $n$  et  $p$ ,  $f$  est différentiable en  $(x, y) \neq (0, 0)$  par composition.  $f$  admet donc des dérivées partielles données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{nx^{n-1}y^p}{x^2 + y^2} - \frac{2x^{n+1}y^p}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{px^n y^{p-1}}{x^2 + y^2} - \frac{2x^n y^{p+1}}{(x^2 + y^2)^2}$$

En  $(0, 0)$  : comme pour tout  $h \in \mathbb{R}, f(0, h) = f(h, 0) = f(0, 0) = 0$ , les dérivées

## 1.. DIFFÉRENTIELLE

---

partielles de  $f$  existent en  $(0, 0)$  avec  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

On étudie plusieurs cas selon  $n$  et  $p$ . Si les dérivées partielles sont continues en  $(0, 0)$ ,  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ . Si ce n'est le pas on ne peut a priori rien dire.

On utilise les mêmes techniques de majoration que dans l'exercice 1.

1. Si  $n \geq 4$  : OK
2. Si  $n = 3$  :
  - (a) Si  $p \geq 4$  : OK par symétrie
  - (b) Si  $p = 3$  : OK
  - (c) Si  $p = 2$  : OK
  - (d) Si  $p = 1$  : OK
3. Si  $n = 2$  :
  - (a) Si  $p \geq 4$  : OK par symétrie
  - (b) Si  $p = 3$  : OK par symétrie
  - (c) Si  $p = 2$  : OK
  - (d) Si  $p = 1$  : Pour  $t \in \mathbb{R}$  non nul,

$$\frac{f((0, 0) + t(1, 1)) - f((0, 0))}{t} = \frac{1}{2}$$

$f$  admet donc une dérivée directionnelle selon le vecteur  $(1, 1)$  qui vaut  $\frac{1}{2}$ .

Si  $f$  était différentiable en  $(0, 0)$ , son gradient donné par les dérivées partielles serait nul, donc la différentielle en  $(0, 0)$  serait aussi nulle, donc toutes les dérivées directionnelles seraient aussi nulles, ce qui n'est pas le cas.  $f$  n'est donc pas différentiable en  $(0, 0)$ .

4. Si  $n = 1$  :
  - (a) Si  $p \geq 4$  : OK par symétrie
  - (b) Si  $p = 3$  : OK par symétrie
  - (c) Si  $p = 2$  : Non par symétrie
  - (d) Si  $p = 1$  :  $f(0, \frac{1}{n}) = 0$  et  $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ , donc  $f$  n'est pas continue en 0, donc pas différentiable en  $(0, 0)$ .

**Conclusion** :  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  pour tout  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$  exceptés les couples  $(n = 2, p = 1)$ ,  $(n = 1, p = 2)$ ,  $(n = 1, p = 1)$ .

### Exercice 1.15

Soit  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

Donner la différentielle de  $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Tr}(A^{-1}B)$

On choisit une norme d'opérateur  $\|\cdot\|$  sur  $M_n(\mathbb{R})$ . On rappelle que  $GL_n(\mathbb{R})$  est ouvert.

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . On considère  $V \subset GL_n(\mathbb{R})$  un voisinage de  $A$  tel que pour tout  $X \in V$ ,  $\|A^{-1}(X - A)\| < 1$ . Calculons la différentielle de la fonction  $M \rightarrow M^{-1}$  en  $A$ .

Il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $H \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\|H\| \leq \delta \implies A + H \in V$ .

Pour  $\|H\| \leq \delta$ ,  $(A + H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$ .

Démontrons que  $(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k$ . Comme  $\|H\| \leq \delta$ ,  $\|A^{-1}H\| < 1$  donc la série en question est absolument convergente, donc convergente. On a pour  $N \geq 1$ ,

$$(I_n + A^{-1}H) \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k = (-1)^N \underbrace{(A^{-1}H)^{N+1}}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0} + I_n$$

En passant à la limite sur  $N$  on a l'égalité voulue.

Par conséquent

$$(A+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1}$$

La candidat pour la différentielle de l'inverse en  $A$  est donc  $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ .

Il reste à remarquer que

$$\frac{\|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|} \|H\| \rightarrow 0$$

La fonction  $A \mapsto \text{Tr}(AB)$  étant linéaire, la différentielle de  $\varphi$  en  $A$  est donnée par  $H \mapsto -\text{Tr}(A^{-1}HA^{-1}B)$

### Exercice 1.16

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ ,  $x \mapsto A(x)$   
Calculer la différentielle de  $x \mapsto \ln \det A(x)$

Il est classique (cf Gourdon Analyse ou Cassini Algèbre 2) que la différentielle du déterminant en  $A$  est donnée par  $H \mapsto \text{Tr}((\text{com } A)^T H)$  qui devient  $H \mapsto \det A \text{Tr}(A^{-1}H)$  lorsque  $A$  est inversible.

Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 d(\ln \circ \det \circ A)(a)(h) &= d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(h)) \\
 &= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))(dA(a)(1)) \\
 &= h \cdot d(\ln \circ \det)(A(a))\left(\frac{dA}{dx}(a)\right) \\
 &= h \cdot d \ln(\det A(a)) \left( d \det(A(a))\left(\frac{dA}{dx}(a)\right) \right) \\
 &= h \cdot d \ln(\det A(a)) \left( \det A(a) \operatorname{Tr} \left( A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) \right) \\
 &= h \det A(a) \operatorname{Tr} \left( A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right) d \ln(\det A(a))(1) \\
 &= h \operatorname{Tr} \left( A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)
 \end{aligned}$$

La différentielle cherchée en  $a$  est donc  $h \mapsto h \operatorname{Tr} \left( A(a)^{-1} \frac{dA}{dx}(a) \right)$

### Exercice 1.17

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables en 1. Montrer que  $\varphi : (x, y) \mapsto f(xy) + g(\frac{x}{y})$  est différentiable en  $(1, 1)$  et calculer sa différentielle en  $(1, 1)$ .

Soient  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$  et  $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ .

On dispose de  $U$  un voisinage de  $(1, 1)$  et  $V$  un voisinage de 1 tel que  $\alpha(U) \subset V$  et  $\beta(U) \subset V$ .  $\alpha : U \rightarrow V$  et  $\beta : U \rightarrow V$  sont différentiables en  $(1, 1)$ .

Le théorème de composition s'applique :  $f \circ \alpha$  et  $f \circ \beta$  sont différentiables en  $(1, 1)$ , donc  $\varphi$  aussi, avec

$$\begin{aligned}
 d\varphi((1, 1))(h_1, h_2) &= d(f \circ \alpha)(1, 1)(h_1, h_2) + d(f \circ \beta)(1, 1)(h_1, h_2) \\
 &= (yh_1 + xh_2)f'(1) + \left(-\frac{y}{x^2}h_1 + \frac{h_2}{x}\right)g'(1)
 \end{aligned}$$

### Exercice 1.18

Déterminer toutes les fonctions  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  qui vérifient  $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$  où  $Z(x, y) = f(\frac{y}{x})$

?

**Exercice 1.19**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Soit  $f : E \rightarrow F$  de classe  $C^2$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(tx) = t^2 f(x)$$

Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $d^2 f(0)(x, x) = 2f(x)$ .

On rappelle que  $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$  s'identifie à l'espace des applications bilinéaires  $\mathcal{L}_c(E \times E, F)$ .

L'énoncé demande en réalité de montrer que pour tout  $x \in E$ ,

$$d^2 f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

Soit  $x \in E$  fixé.

Posons  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow E, t \mapsto tx$  et  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow F, t \mapsto t^2 f(x)$ .  $\mathbb{R}$  étant de dimension finie, toute application linéaire de  $\mathbb{R}$  dans  $E$  est continue.  $\alpha$  est clairement différentiable en tout  $t \in \mathbb{R}$  de différentielle  $h \mapsto hx$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ ,  $\beta(t+h) = \beta(t) + 2thf(x) + h^2 f(x)$  avec

$$\frac{\|h^2 f(x)\|_F}{|h|} = |h| \|f(x)\|_F \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

Donc  $\beta$  est différentiable en  $t$  de différentielle  $h \mapsto 2thf(x)$

En différentiant l'égalité  $f \circ \alpha = \beta$  en  $t \in \mathbb{R}$  on a pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ,  $hdf(tx)(x) = 2thf(x)$  et donc

$$df(tx)(x) = 2tf(x) \quad (*)$$

ceci étant vrai pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\Pi : \mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow F, L \mapsto L(x)$ . Pour  $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$  et  $H \in \mathcal{L}_c(E, F)$ ,  $\Pi(L+H) = (L+H)(x) = \Pi(x) + H(x)$ .

Le candidat pour la différentielle en  $L$  est donc  $H \mapsto H(x)$ . Il suffit de montrer que cette application est continue.

Soit  $\|\cdot\|_{op}$  la norme d'opérateur sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$  qui dérive naturellement de  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$ .

Alors

$$\frac{\|H(x)\|_F}{\|H\|_{op}} \leq \frac{\|H\|_{op} \|x\|_E}{\|H\|_{op}} \leq \|x\|_E$$

D'où la continuité.

Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow F, t \mapsto 2tf(x)$ . On montre facilement que  $\gamma$  est différentiable en tout  $t \in \mathbb{R}$  de différentielle  $h \mapsto 2hf(x)$ .



L'égalité (\*) se réécrit  $\Pi \circ df \circ \alpha = \gamma$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} d(\Pi \circ df \circ \alpha)(t)(h) &= d\Pi(df \circ \alpha(t))(d(df \circ \alpha)(t)(h)) \\ &= d(df \circ \alpha)(t)(h)(x) \\ &= d(df)(tx)(hx)(x) \\ &= hd^2f(tx)(x)(x) \end{aligned}$$

On a donc pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ,  $hd^2f(tx)(x)(x) = 2hf(x)$ , donc

$$d^2f(tx)(x)(x) = 2f(x)$$

ceci étant vrai pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En  $t = 0$  on a

$$d^2f(0)(x)(x) = 2f(x)$$

comme voulu.

## 2. Applications de la notion de différentielle

### 3. Equations différentielles

### 4. Ensembles convexes

#### Exercice 4.1

Trouver  $K$  un convexe fermé et  $f$  une application affine telle que  $f(K)$  soit un ouvert.

On considère simplement  $\text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Exercice 4.2

Soit  $C$  un convexe non réduit à un point.

1. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
  - (a)  $x_0 \in \text{Ri}(C)$
  - (b)  $\forall x \in C, \exists y, x_0 \in [x, y[$
2. Montrer que si  $C$  n'est pas convexe, alors la réciproque est fausse.

?

#### Exercice 4.3

Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  convexe de cardinal  $n + 2$ . Montrer qu'il existe une partition de  $K$  en  $K_1 \cup K_2$  telles que les enveloppes convexes de  $K_1$  et  $K_2$  ne sont pas disjointes.

L'hypothèse  $K$  convexe est superflue. Ecrivons  $K = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$  et considérons la matrice  $A$  à  $n+1$  lignes et  $n+2$  colonnes

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas inversible donc il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2})$  un élément non nul de  $\ker A$ , ce qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i a_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i &= 0 \end{aligned}$$

Soit  $I \subset \llbracket 1, n+2 \rrbracket$  l'ensemble des indices tels que  $\alpha_i > 0$  et  $J \subset \llbracket 1, n+2 \rrbracket$  l'ensemble des indices tels que  $\alpha_j \leq 0$ .  $I$  et  $J$  sont non vides car  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}) \neq (0, \dots, 0)$  et  $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$ .

On a  $\sum_{i \in I} \alpha_i a_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j) a_j$  et  $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j)$ .

Posons  $S = \sum_{i \in I} \alpha_i$  qui est non nul. Alors

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} a_i = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} a_j$$

avec

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{S} = \sum_{j \in J} \frac{(-\alpha_j)}{S} = 1$$

$K_1 = (a_i)_{i \in I}$  et  $K_2 = (a_j)_{j \in J}$  est donc une partition convenant.

#### Exercice 4.4

Soit  $K$  une partie convexe de  $E$  et  $M$  une variété affine de  $E$  telle que  $M \cap \text{Ri}(K) \neq \emptyset$ . On suppose  $M$  fermée.

1. Montrer que  $\text{Ri}(M \cap K) = M \cap \text{Ri}(K)$
2. Montrer que  $\overline{M \cap K} = \overline{M} \cap \overline{K}$

?

### Exercice 4.5

Montrer que toute section plane d'un ensemble convexe est convexe.

Tout hyperplan est convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et l'intersection de deux convexes est convexe, donc toute section plane d'un convexe est convexe.

### Exercice 4.6

Donner un exemple de fermé  $A$  d'un evn tel que  $\text{co } A$  ne soit pas fermée.

On rappelle que  $\text{co } A$  fait référence à l'enveloppe convexe de  $A$ . On se place dans  $\mathbb{R}^2$  et on pose  $A = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, \infty) \times \{0\})$  qui est fermé comme union de deux fermés.

Cependant  $\text{co } A = ([0, \infty) \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$  (évident sur un dessin) qui n'est pas fermé.

### Exercice 4.7

Soit  $X$  un fermé d'un evn  $E$ . Montrer l'équivalence des propositions suivantes

1.  $X$  convexe
2.  $\forall x, y \in X, \frac{x+y}{2} \in X$

Donner un contre-exemple si  $X$  n'est pas fermé.

$\implies$  Trivial.

$\impliedby$  Soient  $x, y \in X$  fixés. Montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  que

$$\forall k \in [0, 2^n], \frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y \in X$$

• Pour  $n = 1$ , c'est une conséquence l'hypothèse  $\forall x, y \in X, \frac{x+y}{2} \in X$ .

• Supposons le résultat vrai pour  $n \geq 1$  et prouvons le pour  $n + 1$ .

On remarque que

$$\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y = \frac{2k'}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k'}{2^{n+1}}\right)y$$

#### 4.. ENSEMBLES CONVEXES

---

ce qui prouve le résultat pour tout  $k$  pair dans  $\llbracket 0, 2^{n+1} \rrbracket$

Soit  $k \in \llbracket 0, 2^{n+1} - 1 \rrbracket$  impair. Ecrivons  $k = 2k' + 1$  où  $k' \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y &= \frac{2k' + 1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{2k' + 1}{2^{n+1}}\right)y \\ &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y}_{\in C} + \underbrace{\frac{k' + 1}{2^n}x + \left(1 - \frac{k' + 1}{2^n}\right)y}_{\in C} \right] \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . La suite  $\frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}$  converge vers  $\lambda$ , de sorte que la suite des

$$\frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}x + \left(1 - \frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}\right)y$$

est une suite d'éléments de  $C$  qui converge vers  $\lambda x + (1 - \lambda)y$ . Comme  $C$  est fermé,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ . Ceci étant vrai pour tout  $x, y, \lambda$ ,  $C$  est convexe.

Dans le cas où  $C$  n'est pas fermé,  $\mathbb{Q}$  fournit un contre-exemple évident à la réciproque.

#### Exercice 4.8

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un evn  $E$ .  
Montrer que  $\text{co } A + \text{co } B = \text{co}(A + B)$ .

$\supset$  On montre facilement que si  $C$  et  $C'$  sont deux convexes de  $E$ ,  $C + C'$  est convexe.  $\text{co } A$  et  $\text{co } B$  étant convexes,  $\text{co } A + \text{co } B$  est convexe. Par ailleurs,  $A \subset \text{co } A$  et  $B \subset \text{co } B$  donc  $A + B \subset \text{co } A + \text{co } B$ .  
 $\text{co } A + \text{co } B$  est donc un convexe contenant  $A + B$ , donc  $\text{co}(A + B) \subset \text{co } A + \text{co } B$ .

$\subset$  Soit  $a + b \in \text{co } A + \text{co } B$ . Il existe  $n$  et  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \in A$ ,  $b_j \in B$  tels que  $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ ,  $b = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ .

Pour  $1 \leq j \leq p$  on pose  $c_j = b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i + b_j) \in \text{co}(A + B)$ .

$$\text{Alors } \underbrace{\sum_{j=1}^p \beta_j c_j}_{\in \text{co}(\text{co}(A+B))} = \sum_{j=1}^p \beta_j (b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = \sum_{j=1}^p \beta_j b_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = a + b$$

Comme  $\text{co}(A+B)$  est convexe,  $\text{co}(\text{co}(A+B)) = \text{co}(A+B)$ , donc  $a+b \in \text{co}(A+B)$ .

### Exercice 4.9

On dit qu'un point  $x \in A$  est un point exposé de  $A$  s'il existe un hyperplan d'appui  $H$  à  $A$  tel que  $H \cap A = \{x\}$ .

On note  $\exp A$  l'ensemble des points exposés de  $A$ .

1. Montrer que si  $C$  est convexe, on a  $\exp C \subset \text{ext } C$ .
2. Donner un exemple de convexe  $C$  pour lequel  $\exp C \subsetneq \text{ext } C$ .
3. Donner un exemple dans  $\mathbb{R}^3$  qui vérifie  $\exp C \subsetneq \text{ext } C \subsetneq \overline{\exp C}$

1. Soit  $C$  un convexe. On rappelle que  $\text{ext } C$  désigne l'ensemble des points extrémaux de  $C$ .

Soit  $x^* \in \exp C$ . Soit  $H$  l'hyperplan d'appui à  $C$  tel que  $H \cap C = \{x^*\}$ . Il existe  $\ell \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$  une forme linéaire continue non-triviale et un réel  $\alpha$  tels que  $H = \{x \in E \mid \ell(x) = \alpha\}$ . On suppose sans perte de généralité que  $C \subset H^+ = \{x \in E \mid \ell(x) \geq \alpha\}$ .

Comme  $x^* \in H$ , on a  $\ell(x^*) = \alpha$ . Si  $x \in C$  est tel que  $\ell(x) = \alpha$ , alors  $x \in C \cap H$  et donc  $x = x^*$ .

Si  $x \in C$  et  $x \neq x^*$  on a donc  $\ell(x) > \alpha$ .

Supposons par l'absurde que  $x^* \notin \text{ext } C$ . On dispose alors de  $a, b \in C$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  tels que  $x^* = (1 - \lambda)a + \lambda b$ .

Alors  $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b)$ .

Comme  $\lambda \in ]0, 1[$ ,  $(1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b) > \min(\ell(a), \ell(b))$ . Comme  $a \neq x^*$  et  $b \neq x^*$ ,  $\min(\ell(a), \ell(b)) > \alpha$ .

Donc  $\ell(x^*) = (1 - \lambda)\ell(a) + \lambda\ell(b) > \alpha$  ce qui contredit  $\ell(x^*) = \alpha$ .

2. Dans  $\mathbb{R}^2$  on considère l'ensemble  $A$  formé d'un demi arc de cercle au dessous duquel on colle une sorte de carré, comme sur la figure ci dessous.

Formellement  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\} \cup \{(-1, y) \mid y \in [0, -2]\} \cup \{(1, y) \mid y \in [0, -2]\} \cup \{(x, -2) \mid x \in [-1, 1]\}$ . Le seul hyperplan d'appui contenant  $B$  est la droite  $x = 1$  qui contient aussi  $\{(1, y) \mid y \in [0, -2]\}$ . Donc  $B$  n'est pas exposé.

Pourtant  $B$  est extrémal.

3. ?



### Exercice 4.10

Soit  $C$  un convexe compact de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Pour  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  on considère  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\langle a, x \rangle$ . Montrer que  $\varphi$  admet un maximum sur  $C$  atteint en un point  $x_0$ .
2. Soit  $H_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \langle a, x_0 \rangle\}$ . Montrer que  $H_a \cap C$  est un convexe non vide.

1.  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$  (car linéaire à partir d'un espace de dimension finie), donc elle admet un maximum sur le compact  $C$ .

2.  $H_a$  contient  $x_0$ . Montrons que  $H_a$  est convexe. Soit  $x, y \in H_a$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors  $\langle a, \lambda x + (1-\lambda)y \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + (1-\lambda) \langle a, y \rangle = \lambda \langle a, x_0 \rangle + (1-\lambda) \langle a, x_0 \rangle = \langle a, x_0 \rangle$  donc  $\lambda x + (1-\lambda)y \in H_a$  et  $H_a$  est convexe.

$H_a \cap C$  est donc convexe comme intersection de deux convexes et non vide car il contient  $x_0$ .

### Exercice 4.11

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $H$ .

1. On considère  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = (d(x, C))^2$ . Montrer que  $f$  est différentiable en tout point et calculer la différentielle de  $f$  en un point  $x$  de  $H$ . (On considérera le projecteur  $P$  de meilleure approximation sur  $C$ ).
2. Soit  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle f, x \rangle$  où  $f \in H$  et  $A \in \mathcal{L}_c(H, H)$  auto-adjointe. Déterminer le gradient de  $\varphi$  en  $x$ .

1. On rappelle que la projection sur un convexe fermé d'un Hilbert est unique

et on notera  $p_C(x)$  le projeté de  $x$  sur  $C$ . On rappelle que  $p_C$  est 1-lipschitzienne.

Soit  $x \in H$  fixé et  $h \in H$ . On a le développement

$$\begin{aligned} d(x+h, C)^2 &= \|x+h - p_C(x+h)\|^2 \\ &= \|x - p_C(x) + h + p_C(x) - p_C(x+h)\|^2 \\ &= d(x, C)^2 + 2\langle x - p_C(x), h \rangle + 2\langle x - p_C(x), p_C(x) - p_C(x+h) \rangle + \|p_C(x) - p_C(x+h) + h\|^2 \\ &= d(x, C)^2 + 2\langle x - p_C(x), h \rangle + 2\langle p_C(x) - p_C(x+h), h + x - p_C(x) \rangle + \|p_C(x) - p_C(x+h)\|^2 + \|h\|^2 \end{aligned}$$

Le candidat naturel pour la différentielle de  $f$  en  $x$  est donc  $h \mapsto 2\langle x - p_C(x), h \rangle$ . Sachant que  $p_C$  est 1-lipschitzienne il est facile de montrer que  $\|p_C(x) - p_C(x+h)\|^2 + \|h\|^2 = o(\|h\|)$ .

Cependant il est **remarquablement difficile** de prouver par des moyens élémentaires que  $\langle p_C(x) - p_C(x+h), h + x - p_C(x) \rangle = o(\|h\|)$ . (On peut montrer facilement que c'est un  $O(\|h\|)$  mais c'est insuffisant).

On adopte une approche différente :

**Lemme** : Soit  $f, g_1, g_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions différentiables en  $x \in H$  avec  $U$  un voisinage de  $x$  et

$$\forall y \in U, g_1(y) \leq f(y) \leq g_2(y)$$

et  $g_1(x) = g_2(x)$ .

Alors  $dg_1(x) = dg_2(x)$ ,  $f$  est différentiable en  $x$  et  $df(x) = dg_1(x)$ .

Preuve : Pour  $h \in U - x$  on a  $g_1(x+h) \leq g_2(x+h)$ . On dispose de deux fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$  nulles et continues en 0 telles que

$$g_1(x) + dg_1(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \leq g_2(x) + dg_2(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

ie

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) + \|h\|(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)) \geq 0$$

Pour  $t > 0$  on remplace  $h$  par  $th$  et on obtient

$$t(dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h)) + t\|h\|(\varepsilon_2(th) - \varepsilon_1(th)) \geq 0$$

En simplifiant par  $t$  puis en faisant  $t \rightarrow 0$ ,

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) \geq 0$$

En remplaçant  $h$  par  $-h$  dans la dernière inégalité,

$$dg_2(x)(h) - dg_1(x)(h) \leq 0$$

donc  $dg_2(x)(h) = dg_1(x)(h)$ , ceci étant vrai pour tout  $h \in H$ , donc  $dg_2(x) = dg_1(x)$ .

Posons  $dg(x) := dg_1(x)$  et réécrivons l'inégalité  $g_1(x+h) \leq f(x+h) \leq g_2(x+h)$  :

$$f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \leq f(x+h) \leq f(x) + dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

donc

$$\varepsilon_1(h) \leq \frac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \leq \varepsilon_2(h)$$

Par encadrement, on a pour  $\|h\| \rightarrow 0$ ,  $\frac{f(x+h) - f(x) - dg(x)(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

□

Revenons au problème. Soit  $x \in H \setminus C$  fixé. Posons  $x^* = p_C(x)$ ,  $e = \frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}$  et  $\mathcal{H}$  l'hyperplan d'appui en  $x^*$  de normale  $e$ , de sorte que

$$\mathcal{H} = \{y \in H, \langle y, e \rangle = \langle x^*, e \rangle\}$$

**Lemme :** On note  $p_{\mathcal{H}}$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{H}$  (qui est un sev fermé). Soit  $y \in \mathcal{H}^+$  et  $z \in \mathcal{H}^-$ . Alors  $\|y - p_{\mathcal{H}}(y)\| \leq \|y - z\|$ .

Preuve : C'est géométriquement évident (faire un dessin). Formellement, comme  $\|y - z\|^2 = \|y - p_{\mathcal{H}}(y) + p_{\mathcal{H}}(y) - z\|^2$

$$= \|y - p_{\mathcal{H}}(y)\|^2 + \|p_{\mathcal{H}}(y) - z\|^2 - 2\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle$$

il suffit de prouver que  $\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle \leq 0$  (ce qui est encore une évidence géométrique).

Comme  $y - p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}^\perp$  (cf théorème de la projection orthogonale sur un sev fermé), et que  $\mathcal{H}^\perp = \text{Vect}(e)$  on peut écrire

$$y - p_{\mathcal{H}}(y) = \lambda e \text{ d'où } \langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle = \lambda \|e\|^2 = \lambda$$

$$= \langle y, e \rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle$$

$$\geq \langle x^*, e \rangle - \langle p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle \quad \text{car } y \in \mathcal{H}^+$$

$$= \langle x^*, e \rangle - \langle x^*, e \rangle \quad \text{car } p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}$$

$$= 0$$

donc  $\lambda \geq 0$ .

$$\text{Finalement, } \langle y - p_{\mathcal{H}}(y), z - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle = \lambda \langle e, z - p_{\mathcal{H}}(y) \rangle$$

$$= \lambda (\langle e, z \rangle - \langle e, p_{\mathcal{H}}(y) \rangle)$$

$$\leq \lambda (\langle e, x^* \rangle - \langle e, x^* \rangle) \quad \text{car } \lambda \geq 0, z \in \mathcal{H}^-, p_{\mathcal{H}}(y) \in \mathcal{H}$$

$$= 0$$

comme souhaité.

□

Dans notre problème on dispose d'un voisinage de  $x$  noté  $U$  tel que  $U \subset \mathcal{H}^+$ . Pour  $y \in U$ , comme  $p_C(y) \in C \subset \mathcal{H}^-$ , le lemme donne  $(d(y, \mathcal{H}))^2 \leq (d(y, C))^2$ . On a aussi la majoration triviale  $(d(y, C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$ . En bref

$$(d(y, \mathcal{H}))^2 \leq (d(y, C))^2 \leq \|y - x^*\|^2$$



Par ailleurs  $(d(y, \mathcal{H}))^2$  se réécrit simplement

$$\langle y - p_{\mathcal{H}}(y), e \rangle^2 = \langle y - x^*, e \rangle^2 = \langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \rangle^2$$

D'où l'encadrement

$$\underbrace{\langle y - x^*, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \rangle^2}_{:=g_1(y)} \leq (d(y, C))^2 \leq \underbrace{\|y - x^*\|^2}_{:=g_2(y)}$$

On a bien  $g_1(x) = g_2(x)$ ,  $g_1$  différentiable en  $x$  et  $g_2$  différentiable en  $x$  de différentielle  $h \mapsto 2\langle h, x - x^* \rangle$  (application linéaire continue par Cauchy-Schwarz). D'après le lemme,  $f$  est différentiable en  $x$  de différentielle  $h \mapsto 2\langle h, x - x^* \rangle$ .

Il reste à traiter le cas où  $x \in C$ . Il suffit de noter qu'alors

$$(d(x + h, C))^2 \leq \|(x + h) - x\|^2 = \|h\|^2$$

Donc  $f$  est différentiable de différentielle nulle.

2. Pour  $x \in H$  on a le développement

$$\begin{aligned} \varphi(x + h) &= \varphi(x) + \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle f, h \rangle + \langle Ah, h \rangle \\ &= \varphi(x) + \langle Ax, h \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle f, h \rangle + \langle Ah, h \rangle \quad \text{car } A \text{ auto-adjointe} \\ &= \varphi(x) + \langle h, 2Ax + f \rangle + \langle Ah, h \rangle \end{aligned}$$

$h \mapsto \langle h, 2Ax + f \rangle$  est linéaire et continue (par Cauchy-Schwarz). Par ailleurs,

$$\frac{|\langle Ah, h \rangle|}{\|h\|} \leq \|Ah\| \leq \|A\|_{op} \|h\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

$\varphi$  est donc différentiable en  $x$ , de gradient  $2Ax + f$ .

### Exercice 4.12

Soit  $C$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $0 \geq b \geq a$ , montrer que

$$aC - bC = (a - b)C + b(C - C)$$

⊂ Soit  $ac - bc' \in aC - bC$ . Alors

$$ac - bc' = (a - b)c + b(c - c') \in (a - b)C + b(C - C)$$

⊃ Soit  $(a - b)c + b(c' - c'') \in (a - b)C + b(C - C)$ . On a

$$\begin{aligned} (a - b)c + b(c' - c'') &= -((b - a)c + (-b)(c' - c'')) \\ &= - \left( (-a) \underbrace{\left[ \left(1 - \frac{b}{a}\right)c + \frac{b}{a}c' \right]}_{\in C} + bc'' \right) \\ &= a \left[ \left(1 - \frac{b}{a}\right)c + \frac{b}{a}c' \right] - bc'' \\ &\in aC - bC \end{aligned}$$

### Exercice 4.13

Soit  $C$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\forall x, y \in C, ]x, y[ \cap C \neq \emptyset$ .  
Montrer que  $C$  est convexe.

Supposons par l'absurde que  $C$  n'est pas convexe : on dispose alors de  $x, y \in C$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $(1 - \alpha)x + \alpha y \notin C$ .

Considérons  $\mu = \inf\{\lambda \geq \alpha \mid (1 - \lambda)x + \lambda y \in C\}$ . On dispose de  $\lambda_n$  une suite qui décroît vers  $\mu$  avec pour tout  $n$ ,  $(1 - \lambda_n)x + \lambda_n y \in C$  et  $\lambda_n \geq \alpha$ . En passant à la limite, comme  $C$  est fermé, on a  $(1 - \mu)x + \mu y \in C$  et  $\mu \geq \alpha$ . Comme  $(1 - \alpha)x + \alpha y \notin C$ , l'inégalité est stricte :  $\mu > \alpha$ .

De même, on pose  $\nu = \sup\{\lambda \leq \alpha \mid (1 - \lambda)x + \lambda y \in C\}$ . On a encore  $(1 - \nu)x + \nu y \in C$  et  $\nu < \alpha$ .

Posons  $a = (1 - \mu)x + \mu y$  et  $b = (1 - \nu)x + \nu y$ . Alors  $]a, b[ \cap C \neq \emptyset$  : on dispose de  $\gamma \in ]0, 1[$  tel que  $(1 - \gamma)b + \gamma a \in C$ .

Or  $(1 - \gamma)b + \gamma a = (1 - [(1 - \gamma)\nu + \gamma\mu])x + [(1 - \gamma)\nu + \gamma\mu]y$  avec

$$(1 - \gamma)\nu + \gamma\mu \in ]\nu, \mu[$$

Ceci contredit la définition de  $\nu$ , absurde.

### Exercice 4.14

Soit  $X$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in X$ . On dit que  $v \in \mathbb{R}^n$  est une direction asymptotique de  $X$  en  $x$  si

$$\forall a \geq 0, x + av \in X$$

On note  $K(X, x)$  l'ensemble des directions asymptotiques de  $X$  en  $x$ .

1. Montrer que  $\forall x \in X, K(X, x)$  est un cône.
2. Si  $X$  est convexe, montrer que  $K(X, x)$  est convexe et que si  $x, x' \in X$ , alors  $K(X, x) = K(X, x')$ .

1. Soit  $x \in X, v \in K(X, x)$  et  $\lambda \geq 0$ . Montrons que  $\lambda v \in K(X, x)$ . Pour  $a \geq 0, a\lambda \geq 0$  donc  $x + a\lambda v \in X$ , donc  $\lambda v \in K(X, x)$ .

2. On suppose  $X$  convexe. Montrons que  $K(X, x)$  est convexe. Pour  $v, v' \in K(X, x), \lambda \in [0, 1]$  et  $a \geq 0$

$$x + a[(1 - \lambda)v + \lambda v'] = (1 - \lambda)\underbrace{(x + av)}_{\in X} + \lambda\underbrace{(x + av')}_{\in X} \in X$$

Donc  $(1 - \lambda)v + \lambda v' \in K(X, x)$  et  $K(X, x)$  est convexe.

Soient  $x, x' \in X$ . Montrons que  $K(X, x) \subset K(X, x')$ . Soit  $v \in K(X, x)$  et  $a \geq 0$ . On remarque que

$$x' + av = \lim_n \left( \underbrace{\left( \left(1 - \frac{1}{n}\right)x' + \frac{1}{n}\underbrace{(x + nav)}_{\in X} \right)}_{\in X} \right)$$

Comme  $X$  est fermé,  $x' + av \in X$  donc  $x' \in K(X, x)$  et  $K(X, x) \subset K(X, x')$ . On a l'inclusion inverse par symétrie.

### Exercice 4.15

□

### Exercice 4.16

Soit  $X$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $A$  un convexe de  $\mathbb{R}^+$  qui contient 0. Montrer que  $\bigcup_{a \in A} aX$  est convexe.

Soient  $x, y \in \bigcup_{a \in A} aX$ . On dispose de  $a, b \in A$  et  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $x = ax_1$  et  $y = bx_2$ . Soit  $\lambda \in [0, 1]$ .

Il s'agit de montrer que  $(1 - \lambda)ax_1 + \lambda bx_2 \in \bigcup_{a \in A} aX$ .

Si  $a = 0$  ou  $b = 0$ , en supposant par exemple que  $a = 0$ , il suffit de prouver que  $\lambda bx_2 \in \bigcup_{a \in A} aX$ . Comme  $\lambda b = (1 - \lambda)0 + \lambda b$ , on a  $\lambda bx_2 \in (\lambda b)X$ .

Si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , on remarque qu'on a l'égalité

$$\underbrace{(\lambda a + (1 - \lambda)b)}_{\in A} \underbrace{\left[ \left( 1 - \frac{(1 - \lambda)b}{\lambda a + (1 - \lambda)b} \right) x_1 + \frac{(1 - \lambda)b}{\lambda a + (1 - \lambda)b} x_2 \right]}_{\in C} = (1 - \lambda)ax_1 + \lambda bx_2$$

ce qui prouve le résultat.

### Exercice 4.17

1. Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  à  $N$  éléments ( $N > n + 1$ ). Montrer qu'il est possible de partitionner  $X$  en deux parties  $X_1$  et  $X_2$  tels que

$$\text{co}(X_1) \cap \text{co}(X_2) \neq \emptyset$$

2. Soit  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$   $N$  parties convexes fermées de  $\mathbb{R}^n$  avec  $N > n$ . Montrer par récurrence sur  $N$  le théorème de Helly : si toute sous-famille de  $(X_i)$  à  $n + 1$  éléments a une intersection non vide, alors les  $N$  convexes de la famille  $(X_i)$  sont d'intersection non vide.

1. On adapte facilement la preuve du 4.3 avec  $N \geq n + 2$  au lieu de  $N = n + 2$ .

2. On procède par récurrence sur  $N \geq n + 1$ ,  $n$  étant fixé dans toute la preuve. L'initialisation est immédiate. Supposons le résultat vrai pour  $N - 1$  et prouvons le pour  $N$ . Supposons par l'absurde que toute sous-famille de  $(X_i)$  à  $n + 1$  éléments a une intersection non vide mais que  $X_1, \dots, X_N$  sont d'intersection vide.

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à chaque sous-famille à  $N - 1$  éléments des  $(X_i)$ , on dispose pour chaque  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  de  $x_i \in \bigcap_{j \neq i} X_j \setminus X_i$ .

Posons  $A = \{x_1, \dots, x_N\}$ . D'après le résultat du 1., il existe une partition de  $A$  en  $A_1 \cup A_2$  avec  $\text{co}(A_1) \cap \text{co}(A_2) \neq \emptyset$ .

Considérons  $x \in \text{co}(A_1) \cap \text{co}(A_2)$  et montrons que  $x \in \bigcap_{i=1}^N X_i$ . Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Si  $x_i \in A_1$ ,  $A_2$  ne contient que des  $x_j$  où  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\}$ , donc  $A_2 \subset X_i$ . Or  $X_i$  est convexe, donc  $\text{co}(A_2) \subset X_i$ , donc  $x \in X_i$ . On procède similairement lorsque  $x_i \in A_2$ .

Donc  $x \in \bigcap_{i=1}^N X_i$  ce qui est absurde.

**Exercice 4.18**

Montrer que l'ensemble suivant est convexe :

$$C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a > 0, b^2 - 4ac < 0\}$$

Soient  $(a, b, c), (a', b', c') \in C$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

Il s'agit de montrer que  $(1 - \lambda)(a, b, c) + \lambda(a', b', c') \in C$ .

Considérons les polynômes  $P(X) = aX^2 + bX + c$  et  $Q(X) = a'X^2 + b'X + c'$ .

Comme  $(a, b, c) \in C$ ,  $P$  est un polynôme strictement positif, au sens où

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$$

De même,  $Q$  est strictement positif.

Or, pour deux réels strictement positifs  $x > 0$  et  $y > 0$ , on a pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $(1 - \lambda)x + \lambda y > 0$ .

On en déduit que  $(1 - \lambda)P + \lambda Q$  est un polynôme strictement positif dont les coefficients sont  $((1 - \lambda)a + \lambda a', (1 - \lambda)b + \lambda b', (1 - \lambda)c + \lambda c')$ .

Ceci implique  $((1 - \lambda)a + \lambda a', (1 - \lambda)b + \lambda b', (1 - \lambda)c + \lambda c') \in C$ , soit encore

$$(1 - \lambda)(a, b, c) + \lambda(a', b', c') \in C$$

## 5. Fonctions convexes

### Exercice 5.1

Soient  $E$  un evn et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et impaire.

1. Montrer que  $\forall x \in E, \forall \lambda \in ]0, 1[, f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ .
2. En déduire que  $\forall x \in E, \forall \lambda \in ]0, 1[, f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .
3. En déduire que  $f$  est linéaire.

1. On note que par imparité  $f(0) = f(-0) = -f(0)$  donc  $2f(0) = 0$  et  $f(0) = 0$ .  
Pour  $x \in E$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  on a

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + (1 - \lambda) \cdot 0) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(0) = \lambda f(x)$$

2. Pour  $x \in E$  et  $\lambda \in ]0, 1[, -f(\lambda x) = f(\lambda(-x)) \leq \lambda f(-x) = -\lambda f(x)$  donc  $f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$ . En combinant avec l'inégalité de 1. on a l'égalité  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

3. Il suffit de prouver que pour  $\lambda > 1, f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .  
On remarque que pour  $\lambda > 1, \frac{1}{\lambda} < 1$  et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)\right) &= \frac{1}{\lambda} f(\lambda x) \\ \implies f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

comme souhaité.

### Exercice 5.2

Soit  $f > 0$  positivement homogène sur  $C$  convexe. Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si  $B = \{x \in C \mid f(x) \leq 1\}$  est convexe.

Pour que  $f$  soit homogène, il faut pouvoir définir  $f(\lambda x)$  pour tout  $\lambda \geq 0$ , ce qui nécessite une structure additionnelle sur  $C$ . On supposera donc que  $C$  est un  $\mathbb{R}$ -evn. Par positivement homogène l'énoncé veut dire homogène de degré 1.

$\Leftarrow$  Supposons  $B$  convexe et montrons que  $\text{epi } f$  est convexe. On rappelle que

$$\text{epi } f = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

Soient  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  dans  $\text{epi } f$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .  $f$  étant homogène de degré 1 et strictement positive, les inégalités  $y_1 \geq f(x_1) > 0$  et  $y_2 \geq f(x_2) > 0$  se réécrivent  $1 \geq f(\frac{1}{y_1}x_1)$  et  $1 \geq f(\frac{1}{y_2}x_2)$  donc  $\frac{x_1}{y_1}$  et  $\frac{x_2}{y_2}$  sont dans  $B$ .

$B$  étant convexe et  $\frac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2}$  étant dans  $[0, 1]$ , on a

$$f\left(\left(1 - \frac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2}\right) \frac{x_1}{y_1} + \frac{\lambda y_2}{(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2} \frac{x_2}{y_2}\right) \leq 1$$

ce qui se réécrit

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$$

ce qui équivaut à  $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in \text{epi } f$ .

Donc  $\text{epi } f$  est convexe, donc  $f$  est convexe.

$\implies$  On suppose  $f$  convexe. Montrons que  $B$  est convexe.

Soit  $x, y \in C$  tel que  $f(x) \leq 1$  et  $f(y) \leq 1$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq 1$$

Donc  $B$  convexe.

### Exercice 5.3

□

### Exercice 5.4

Soient  $x_i > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

Par concavité du log et l'inégalité de Jensen on a

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(x_i)$$

et on a l'inégalité voulue en passant à l'exponentielle.

### Exercice 5.5

Soit  $I$  un intervalle contenu dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  2 fois dérivable.

Montrer que si  $g : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  est convexe dans  $I$ , alors  $h : x \mapsto xf(x)$  est aussi convexe et réciproquement.

Il me semble nécessaire d'ajouter l'hypothèse  $x \in I \implies \frac{1}{x} \in I$ .

On note que

$$g''(x) = \frac{f''(\frac{1}{x}) + 2xf'(\frac{1}{x})}{x^4}$$

donc

$$g''(\frac{1}{x}) = x^3(xf''(x) + 2f'(x)) = x^3h''(x)$$

Pour  $x \in I$ ,  $g''(\frac{1}{x})$  et  $h''(x)$  ont donc même signe.  $g$  est donc convexe si et seulement si  $h$  l'est.

### Exercice 5.6

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée.  
 On définit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\varphi(t) = \inf_{x \in [a, b]} (-xt - f(x))$   
 Montrer que  $\varphi$  est concave.

Montrons que  $\psi : t \mapsto \sup_{x \in [a, b]} (xt + f(x))$  est convexe.

Soient  $t, t' \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Pour  $x \in [a, b]$ ,  $xt + f(x) \leq \psi(t)$  et  $xt' + f(x) \leq \psi(t')$   
 donc

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(xt + f(x)) + \lambda(xt' + f(x)) &\leq (1 - \lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t') \\ x((1 - \lambda)t + \lambda t') + f(x) &\leq (1 - \lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t') \end{aligned}$$

ceci étant vrai pour tout  $x \in [a, b]$ . En passant au sup on obtient

$$\psi((1 - \lambda)t + \lambda t') \leq (1 - \lambda)\psi(t) + \lambda\psi(t')$$

$\psi$  est donc convexe, donc  $\varphi = -\psi$  est concave.

### Exercice 5.7

Soient  $t \in [a, b]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  telle que  
 $f$  est convexe en  $x$  et continue en  $t$ .  
 Montrer que  $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$  est convexe.

Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Pour  $t \in [a, b]$ , par convexité de  $f$  en la première variable,  $f((1 - \lambda)x + \lambda y, t) \leq (1 - \lambda)f(x, t) + \lambda f(y, t)$ .

En intégrant cette inégalité selon  $t$  on trouve

$$g((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(y)$$

donc  $g$  est convexe.



### Exercice 5.8

Soit  $A$  une partie fermée non vide d'un evn  $E$ .  
 Montrer que  $A$  est convexe si et seulement si  $x \mapsto d(A, x)$  est convexe de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow$  Supposons  $A$  convexe et montrons que  $x \mapsto d(A, x)$  est convexe. Soient  $x, y \in E$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ .

Soit  $x', y'$  deux éléments quelconques de  $A$ . On a l'inégalité

$$(1-\lambda)\|x-x'\| + \lambda\|y-y'\| \geq \|(1-\lambda)x + \lambda y - \underbrace{((1-\lambda)x' + \lambda y')}_{\in A}\| \geq d(A, (1-\lambda)x + \lambda y)$$

donc

$$\|x - x'\| \geq \frac{1}{1-\lambda} (d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) - \lambda\|y - y'\|)$$

Le membre de droite est indépendant de  $x'$ , donc au passant à l'inf sur  $x'$  on a

$$d(A, x) \geq \frac{1}{1-\lambda} (d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) - \lambda\|y - y'\|)$$

soit encore

$$(1-\lambda)d(A, x) \geq d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) - \lambda\|y - y'\|$$

qui devient

$$\lambda\|y - y'\| \geq d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)d(A, x)$$

Un raisonnement similaire (passage à l'inf sur  $y'$ ) donne

$$\lambda d(A, y) \geq d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)d(A, x)$$

soit

$$d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)d(A, x) + \lambda d(A, y)$$

Donc  $x \mapsto d(A, x)$  est convexe.

$\Leftarrow$  On suppose que  $x \mapsto d(A, x)$  est convexe. Soient  $x, y \in A$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

On a  $d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)d(A, x) + \lambda d(A, y) = (1-\lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = 0$ .

Donc  $d(A, (1-\lambda)x + \lambda y) = 0$  et comme  $A$  est fermé,  $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$ , donc  $A$  convexe.

### Exercice 5.9

Soit  $f_n : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions convexes qui converge simplement vers  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  est convexe.
2. Montrer que  $f_n$  converge vers  $f$  uniformément sur tout compact de  $]0, 1[$ .

1. Soient  $x, y \in ]0, 1[$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Pour tout  $n$ ,

$$f_n((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)$$

et en passant à la limite sur  $n$  on a la convexité de  $f$ .

2. Etant donné  $K$  un compact de  $]0, 1[$ , montrons que la famille des  $(f_n)$  est uniformément lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe  $A \geq 0$  tel que

$$\forall n \geq 1, \forall x, y \in K, |f_n(x) - f_n(y)| \leq A|x - y|$$

$K$  étant compact il est inclus dans un segment  $[a, b]$  avec  $0 < a < b < 1$ . Considérons  $c < c' \in ]0, a[$  et  $d < d' \in ]b, 1[$ .

Soient  $x, y \in K$  et  $n \geq 1$  quelconques. Par convexité de  $f$ ,

$$\frac{f_n(c') - f_n(c)}{c' - c} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}$$

$\left(\frac{f_n(c') - f_n(c)}{c' - c}\right)_n$  et  $\left(\frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}\right)_n$  convergent, donc sont bornées. On dispose donc de  $m$  et  $M$  des réels tels que

$$m \leq \frac{f_n(c') - f_n(c)}{c' - c} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d} \leq M$$

Pour tout  $n \geq 1$  et  $x, y \in K$  on a donc

$$m \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq M$$

En posant  $A = \max(|m|, |M|)$  on a

$$\forall n \geq 1, \forall x, y \in K, |f_n(x) - f_n(y)| \leq A|x - y|$$

□

En passant à la limite sur  $n$  dans l'inégalité précédente, on montre facilement que  $f$  est  $A$ -lipschitzienne.

Montrons que  $f_n$  converge vers  $f$  uniformément sur  $K$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Posons  $N = \lfloor \frac{3A}{\varepsilon} \rfloor + 1$  et  $x_k = \frac{k}{N}$  pour  $k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ .

Par convergence simple des  $f_n$  on dispose de  $N'$  tel que

$$n \geq N' \implies \forall k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, |f(x_k) - f_n(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Posons  $N'' = \max(N, N')$  et considérons  $n \geq N''$  et  $x \in K$ .

Par construction il existe  $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$  tel que  $|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{3A}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| \\ &\leq A|x - x_i| + \frac{\varepsilon}{3} + A|x - x_i| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc montré que  $\forall n \geq N'', \forall x \in K, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ , d'où la convergence uniforme.

### Exercice 5.10

Soit  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions convexes de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , convexe et croissante en chaque variable.  
 Montrer que  $F : x \mapsto g(f_1(x), \dots, f_n(x))$  est convexe sur  $[a, b]$ .

Soient  $x, y \in [a, b]$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . On a

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) = g(f_1((1 - \lambda)x + \lambda y), \dots, f_n((1 - \lambda)x + \lambda y))$$

La convexité de chaque  $f_i$  et la croissance de  $g$  en chaque argument donne

$$\begin{aligned} F((1 - \lambda)x + \lambda y) &\leq g((1 - \lambda)f_1(x) + \lambda f_1(y), \dots, (1 - \lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)) \\ &= g((1 - \lambda)(f_1(x), \dots, f_n(x)) + \lambda(f_1(y), \dots, f_n(y))) \\ &\leq (1 - \lambda)g(f_1(x), \dots, f_n(x)) + \lambda g(f_1(y), \dots, f_n(y)) \quad \text{par convexité de } g \\ &= (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y) \end{aligned}$$

Donc  $F$  convexe.

### Exercice 5.11

Soit  $n \geq 1$  et  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

Montrer que  $f$  est concave.

$f$  admet clairement des dérivées partielles à l'ordre 1 données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \left( \prod_{j \neq i} x_j \right)^{1/n} \cdot \frac{1}{n} \cdot x_i^{1/n-1} = \frac{1}{n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{x_i}$$

$f$  admet alors clairement des dérivées partielles d'ordre 2 données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{n^2} \frac{1}{x_i x_j} & \text{si } i \neq j \\ -\frac{n-1}{n^2} f(x_1, \dots, x_n) \frac{1}{x_i^2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Chacune de ces fonctions est clairement continue, donc  $f$  est  $C^2$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  fixé dans la suite. La Hessienne de  $f$  en  $(x_1, \dots, x_n)$  est donnée par

$$H(f)(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{n^2} \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{x_1^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{x_i x_j} & & \\ & & & \ddots & \\ & \frac{1}{x_i x_j} & & & -\frac{n-1}{x_n^2} \end{pmatrix}$$

En posant  $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{x_n^2} \end{pmatrix} = \text{diag}(\frac{1}{x_1^2}, \dots, \frac{1}{x_n^2})$   
on réécrit simplement

$$H(f)(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{n^2}}_{\text{constante positive}} (yy^T - nJ)$$

Il suffit de prouver que  $yy^T - nJ$  est semi-définie négative. Considérons  $v \in \mathbb{R}^n$ .  
On a

$$\begin{aligned} v^T (yy^T - nJ) v &= (y^T v)^T y^T v - n v^T J v \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2} \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire euclidien canonique,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i} &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{v_i}{x_i} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2}} \end{aligned}$$

En passant au carré on obtient

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{x_i} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i^2} \leq 0$$

donc

$$v^T (yy^T - nJ) v \leq 0$$

d'où  $H(f)(x_1, \dots, x_n)$  semi-définie négative, donc  $f$  concave.

**Exercice 5.12**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy$ .

1. Montrer que  $f$  est convexe.
2. On pose  $x = r \cos(\alpha)$  et  $y = r \sin(\alpha)$ .  
Exprimer  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en fonction de  $\frac{\partial f}{\partial r}$  et  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

1.  $f$  est  $C^2$  de Hessienne

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est 3, les deux valeurs propres sont donc de même signe et non nulles. Sa trace est 4, les deux valeurs propres sont donc strictement positives. Donc  $H(f)(x, y)$  est symétrique définie positive, donc  $f$  est convexe.

2. Avec la formule de calcul des dérivées partielles d'une composée,

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos(\alpha) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -r \sin(\alpha) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y}$$

**Exercice 5.13**

Pour  $x > 0$  et  $y > 1$  on pose  $F(x, y) = x^\alpha (\ln y)^\beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres donnés.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de  $F$ .
2. Montrer que si  $F$  est concave alors  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\beta \geq 0$ .
3. Montrer que si  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\beta \geq 0$  alors  $F$  est concave sur l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } \ln y > \frac{\beta}{1-\alpha} - 1\}$$

4. Plus généralement, pour  $I$  et  $J$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(I, \mathbb{R})$  et  $g \in C^2(J, \mathbb{R})$  on considère

$$F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

- (a) Montrer que si  $F$  est concave avec  $f > 0$  et  $g > 0$  alors  $f$  et  $g$  sont concaves.
- (b) Montrer que si  $f > 0$ ,  $g > 0$  avec  $f^2$  et  $g^2$  concaves, alors  $F$  est concave.

1.  $F$  est clairement  $C^2$ , de dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \alpha x^{\alpha-1} (\ln y)^\beta \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \beta \frac{x^\alpha (\ln y)^{\beta-1}}{y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) &= \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} (\ln y)^\beta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \alpha \beta \frac{x^{\alpha-1} (\ln y)^{\beta-1}}{y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) &= \frac{\beta x^\alpha (\ln y)^{\beta-2}}{y^2} (\beta - 1 - \ln y)\end{aligned}$$

La Hessienne de  $F$  en  $(x, y)$  s'écrit donc

$$H(F)(x, y) = \underbrace{x^{\alpha-2} (\ln y)^{\beta-2}}_{\text{constante positive}} \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2} (\beta - 1 - \ln y) \end{pmatrix}$$

2. On suppose  $F$  concave, donc  $H(F)(x, y)$  est semi-définie négative pour tout  $(x, y)$ . Comme  $x^{\alpha-2} (\ln y)^{\beta-2}$  est une constante positive, la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2} (\beta - 1 - \ln y) \end{pmatrix}$$

est semi-définie négative.

Son déterminant, qui est donc  $\geq 0$ , vaut

$$\frac{\alpha\beta x^2 (\ln y)^2 ((1-\alpha) \ln y + 1 - \alpha - \beta)}{y^2}$$

Ceci implique  $\forall y > 1$ ,  $\alpha\beta((1-\alpha) \ln y + 1 - \alpha - \beta) \geq 0$

Par des considérations asymptotiques, le facteur devant le log doit être  $\geq 0$  ie  $\alpha\beta(1-\alpha) \geq 0$ .

On a aussi

$$(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 & \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} \\ \frac{\alpha\beta x \ln y}{y} & \frac{\beta x^2}{y^2} (\beta - 1 - \ln y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

qui s'écrit  $\alpha(\alpha-1)(\ln y)^2 \leq 0$ , donc  $\alpha(\alpha-1) \leq 0$ , donc  $\alpha \in [0, 1]$ .

Par ailleurs, l'inégalité  $\alpha\beta(1-\alpha) \geq 0$  devient  $\beta \geq 0$ .

3. On suppose  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\beta \geq 0$ . Montrons que  $F$  est concave sur  $C$ . Comme  $C$  est un convexe ouvert, il suffit de montrer que  $H(F)(x, y)$  est semi-définie

négative pour tout  $(x, y)$  dans  $C$ .

On rappelle le lemme très pratique en dimension 2 :

**Lemme :** (Conditions de Monge)

Soit  $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$  une matrice symétrique.

Si  $rt - s^2 \geq 0$  et  $r \geq 0$  alors  $A$  est semi-définie positive.

Si  $rt - s^2 \geq 0$  et  $r \leq 0$  alors  $A$  est semi-définie négative.

Preuve :  $A$  étant symétrique, elle est semblable à  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . La condition  $rt - s^2 \geq 0$  est équivalente à  $\det A \geq 0$ , ie  $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0$  donc  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de même signe. On a par ailleurs  $rt \geq s^2 \geq 0$  donc  $r$  et  $t$  ont même signe. Or  $\text{Tr}(A) = r + t = \lambda_1 + \lambda_2$ . Le signe de  $\lambda_1$  est donc celui de  $r$  ce qui achève la preuve.

Dans notre cas, la condition  $\ln y > \frac{\beta}{1-\alpha} - 1$  implique  $(1-\alpha) \ln y + 1 - \alpha - \beta > 0$ , donc  $\alpha\beta((1-\alpha) \ln y + 1 - \alpha - \beta) \geq 0$  d'où  $\det(H(F)(x, y)) \geq 0$  pour tout  $(x, y) \in C$ .

Enfin,  $H(F)(x, y)_{11} = x^{\alpha-2}(\ln y)^{\beta-2} \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{\leq 0} (\ln y)^2 \leq 0$  et d'après le lemme,

$H(F)(x, y)$  est semi-définie négative.

4. a) On suppose  $F$  concave. On a

$$H(F)(x, y) = \begin{pmatrix} f''(x)g(y) & f'(x)g'(y) \\ f'(x)g'(y) & f(x)g''(y) \end{pmatrix}$$

Comme  $H(F)(x, y)$  est semi-définie négative,

$$(1, 0) \cdot H(F)(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

ie  $f''(x)g(y) \leq 0$ . Comme  $g > 0$ ,  $f''(x) \leq 0$  et ceci pour tout  $x \in I$ . Donc  $f$  concave.

De même on prouve que  $g$  est concave.

b)  $f^2$  et  $g^2$  étant concaves et  $C^2$  sur des intervalles ouverts, on a  $(f^2)'' = 2(f'^2 + ff'') \leq 0$  ie  $0 \leq f'^2 \leq ff''$  et  $0 \leq g'^2 \leq gg''$ . En multipliant ces deux dernières inégalités entre elles on a

$$\forall (x, y) \in I \times J, (f''(x)g(y))(f(x)g''(y)) \geq (f'(x)g'(y))^2$$

ie  $\det(H(F)(x, y)) \geq 0$ .

Par ailleurs,  $f'^2(x) \leq f(x)f''(x)$  implique  $f(x)f''(x) \leq -f'^2(x) \leq 0$  et comme  $f > 0$ , on a  $f''(x) \leq 0$ . Donc

$$H(F)(x, y)_{11} = f''(x)g(y) \leq 0 \quad \text{car } g > 0$$

D'après le lemme,  $H(F)(x, y)$  est semi-définie négative, et ceci pour tout  $(x, y) \in I \times J$  (qui est un ouvert convexe), donc  $F$  est concave sur  $I \times J$ .

**Exercice 5.14**

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

1.  $\varphi$  étant à support compact, montrer que  $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(t)dt$  est convexe.
2. On suppose  $f > 0$  croissante et  $C^1$  sur  $[a, b]$ .  
Montrer que l'on peut prolonger  $f$  à  $]-\infty, b]$  de manière à ce que la fonction prolongée soit encore convexe, croissante, strictement positive,  $C^1$ , et constante sur un intervalle de la forme  $]-\infty, \alpha]$ .
3. Soient  $f, g$  convexes, strictement positives, croissantes et  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Montrer que  $fg$  est convexe sur  $[a, b]$ .

1. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a par convexité de  $f$ ,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y - t) = f((1-\lambda)(x-t) + \lambda(y-t)) \leq (1-\lambda)f(x-t) + \lambda f(y-t)$$

En intégrant cette inégalité suivant  $t$  on obtient le résultat voulu.

2.

*Correction proposée par Yannick Guyonvarch*

On définit pour tout  $y$

$$f'_+(y) = \lim_{x \rightarrow y, x \geq y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$
$$f'_-(y) = \lim_{x \rightarrow y, x \leq y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Si  $f'_+(a) = 0$ , le résultat est immédiat car en posant  $f(x) = f(a)$  pour tout  $x \in ]-\infty, a]$  on a construit un prolongement  $C^1$  de  $f$  qui vérifie toutes les contraintes du problème.

Nous nous intéressons donc au cas où  $f'_+(a) > 0$ . Posons  $g : x \mapsto e(x - \alpha)^2 + d$  avec  $\alpha < a$  le point à déterminer tel que pour tout  $x \leq \alpha$ , on prolonge  $f$  par  $h : x \mapsto g(\alpha) = d$ . Nous devons donc trouver un triplet  $(e, \alpha, d)$  qui satisfait au contraintes du problème, à savoir

$$g \text{ croissante et } C^1, \quad g'(\alpha) = 0, \quad g'(a) = f'(a), \quad 0 < g(\alpha) < f(a), \quad g(a) = f(a), \quad \alpha < a$$

$g$  est bien  $C^1$  et  $g'(\alpha) = 0$ . Par ailleurs

$$g'(a) = f'(a) \iff 2e(a - \alpha) = f'(a) \iff e = \frac{f'(a)}{2(a - \alpha)}$$
$$g(a) = f(a) \iff e(a - \alpha)^2 + d = f(a) \iff d = f(a) - \frac{f'(a)(a - \alpha)}{2}$$



$e$  respecte la contrainte  $e > 0$  (pour avoir  $g$  croissante) dès que  $\alpha < a$ . De la même manière  $d < f(a)$  à la même condition.

Trouvons  $\alpha < a$  tel que  $0 < d$

$$d > 0 \iff \alpha > a - \frac{2f(a)}{f'(a)}$$

Ainsi en prenant  $\alpha \in ]a - \frac{2f(a)}{f'(a)}, a[$  on a bien construit un prolongement  $C^1$  de  $f$  qui vérifie toutes les conditions.

3. *Correction proposée par Yannick Guyonvarch*  
 Pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x)g(x) > 0$  et  $h : x \mapsto f(x)g(x)$  admet une dérivée  $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .  
 Soit  $x_1 \leq x_2$ .

$$\begin{aligned} h'(x_1) &= f'(x_1)g(x_1) + f(x_1)g'(x_1) \\ &\leq f'(x_1)g(x_2) + f(x_2)g'(x_1) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont croissantes} \\ &\leq f'(x_2)g(x_2) + f(x_2)g'(x_2) \text{ car } f \text{ et } g \text{ de dérivée croissante} \\ &= h'(x_2) \end{aligned}$$

$h'$  est donc croissante sur  $[a, b]$  donc  $f \times g$  est convexe sur  $[a, b]$ .

### Exercice 5.15

Soit  $K$  un convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $P$  la projection sur  $K$ .  
 Montrer que  $\varphi : x \mapsto \|x - P(x)\|$  est convexe.

Soient  $x, y \in K$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

Comme  $K$  est convexe,  $(1 - \lambda)P(x) + \lambda P(y) \in K$ , donc par définition de  $P$ ,

$$\begin{aligned} \varphi((1 - \lambda)x + \lambda y) &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y - P((1 - \lambda)x + \lambda y)\| \\ &\leq \|(1 - \lambda)x + \lambda y - [(1 - \lambda)P(x) + \lambda P(y)]\| \\ &= \|(1 - \lambda)(x - P(x)) + \lambda(y - P(y))\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|x - P(x)\| + \lambda\|y - P(y)\| \\ &= (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  convexe.

### Exercice 5.16

Soient  $f, g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $f(x, y) = x^\alpha + y^\beta$  et  $g(x, y) = x^\alpha y^\beta$   
Etudier la concavité et la convexité de  $f$  et  $g$ .

$f$  est clairement  $C^2$  de Hessienne  $H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & \beta(\beta-1)y^{\beta-2} \end{pmatrix}$

Cette matrice est diagonale.

$f$  est concave  $\iff H(f)(x, y)$  semi-définie négative pour tout  $(x, y)$   
 $\iff \alpha(\alpha-1) \leq 0$  et  $\beta(\beta-1) \leq 0$  (car  $x > 0$  et  $y > 0$ )  
 $\iff \alpha \in [0, 1]$  et  $\beta \in [0, 1]$

$f$  est convexe  $\iff H(f)(x, y)$  semi-définie positive pour tout  $(x, y)$   
 $\iff \alpha(\alpha-1) \geq 0$  et  $\beta(\beta-1) \geq 0$  (car  $x > 0$  et  $y > 0$ )  
 $\iff \alpha \notin ]0, 1[$  et  $\beta \notin ]0, 1[$

$g$  est clairement  $C^2$  de Hessienne  $H(g)(x, y) = x^{\alpha-2}y^{\beta-2} \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)y^2 & \alpha\beta xy \\ \alpha\beta xy & \beta(\beta-1)x^2 \end{pmatrix}$

Posons donc  $A(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)y^2 & \alpha\beta xy \\ \alpha\beta xy & \beta(\beta-1)x^2 \end{pmatrix}$  de sorte que  $H(g)(x, y)$  est semi-définie positive/négative si et seulement si  $A(x, y)$  l'est (car  $x^{\alpha-2}y^{\beta-2} \geq 0$ ).

Le lemme du 5.13 (qui admet une réciproque facile à montrer) permet d'affirmer que

$g$  est concave  $\iff H(g)(x, y)$  semi-définie négative pour tout  $(x, y)$   
 $\iff A(x, y)$  semi-définie négative pour tout  $(x, y)$   
 $\iff \det A \geq 0$  et  $A(x, y)_{11} \leq 0$  pour tout  $(x, y)$   
 $\iff \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0$  et  $\alpha(\alpha-1) \leq 0$   
 $\iff \alpha \in [0, 1]$  et  $\beta \in [0, 1-\alpha]$

$g$  est convexe  $\iff H(g)(x, y)$  semi-définie positive pour tout  $(x, y)$   
 $\iff A(x, y)$  semi-définie positive pour tout  $(x, y)$   
 $\iff \det A \geq 0$  et  $A(x, y)_{11} \geq 0$  pour tout  $(x, y)$   
 $\iff \alpha\beta(1-\alpha-\beta) \geq 0$  et  $\alpha(\alpha-1) \geq 0$   
 $\iff \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta \geq 1-\alpha \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha \geq 1 \\ 1-\alpha \leq \beta \leq 0 \end{cases}$

### Exercice 5.17

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On suppose que  $P$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $P$  admet au plus deux racines réelles.

On suppose par l'absurde que  $P$  admet 3 racines réelles distinctes :  $a < b < c$ .  
D'après le théorème de Rolle, il existe  $\xi \in ]a, b[$  et  $\zeta \in ]b, c[$  tels que  $P'(\xi) =$

$P'(\zeta) = 0$ . Or  $P$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ , donc  $P'$  est croissante, donc  $P'(x) = 0$  pour tout  $x \in [\xi, \zeta]$ .  $P'$  est donc un polynôme qui admet une infinité de racines, absurde.

### Exercice 5.18

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \sqrt{xy}$

1. Montrer que  $f$  est quasi-concave sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
2. Montrer que  $f$  est strictement quasi-concave.
3. Montrer que  $f$  est concave.

1. Montrons que les upper-contour sets de  $f$  sont convexes ie que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $S(a) := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, f(x, y) \geq a\}$  est convexe.

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $a < 0$ ,  $S(a) = \emptyset$ . Si  $a = 0$ ,  $S(a) = (\mathbb{R}_+)^2$ .

Si  $a > 0$ ,  $S(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, y \geq \frac{a^2}{x^2}\}$  Il s'agit de l'épigraphe de la fonction convexe  $x \mapsto \frac{a}{x^2}$ , donc  $S(a)$  est convexe.

2. On peut reprendre le cheminement du 1. de l'exercice 5.19 : montrer que  $\ln f$  est strictement concave, puis composer par exp.

3.  $f$  est  $C^2$  sur tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  inclus dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , de Hessienne

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{4(xy)^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy}{4(xy)^{3/2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy}{4(xy)^{3/2}} & -\frac{x^2}{4(xy)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est 0 et  $H(f)(x, y)_{11} \leq 0$ . Le lemme du 5.13 permet de conclure que  $f$  est concave sur tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  inclus dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , donc concave sur l'intérieur de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

On obtient la concavité aux points de la frontière en les approchant par des points de l'intérieur et en utilisant la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

### Exercice 5.19

Etudier la concavité et la quasi-concavité (stricte ou non) des fonctions suivantes sur  $\mathbb{R}^n$

1.  $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$  où  $\alpha_i > 0$
2.  $f(x) = \min(\frac{x_i}{\alpha_i})$  où  $\alpha_i > 0$

1. On introduit quelques notions adéquates :

- On dit que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement concave si pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  avec  $x \neq y$ , pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ ,  $f((1 - \lambda)x + \lambda y) > (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ .

• **Lemme 1** : Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement concave et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante, alors  $\varphi \circ f$  est strictement quasi-concave.

Preuve : Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$  avec  $x \neq y$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . Par stricte concavité de  $f$ ,  $f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$  et en composant par  $\varphi$ ,

$$\varphi(f((1-\lambda)x + \lambda y)) > \varphi((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) > \varphi(\min(f(x), f(y))) = \min(\varphi(f(x)), \varphi(f(y)))$$

donc  $\varphi \circ f$  strictement quasi-concave.

• **Lemme 2** : Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $H(f)(x)$  est définie négative pour tout  $x \in U$ , alors  $f$  est strictement concave sur  $U$ .

Preuve : Résultat classique qu'on trouvera dans n'importe quel livre d'analyse convexe.

• Revenons au problème. On se limite d'abord à l'étude sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ .

On va montrer que  $\ln f$  est strictement concave. Par le lemme 1, on aura  $f$  strictement quasi-concave. La Hessienne de  $\ln f$  est très facile à calculer :

$$H(\ln f)(x) = \text{diag}\left(-\frac{\alpha_1}{x_1^2}, \dots, -\frac{\alpha_n}{x_n^2}\right)$$

Les valeurs propres sont  $< 0$ , donc  $H(\ln f)(x)$  est définie négative pour tout  $x \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  et d'après le lemme 2,  $\ln f$  est strictement concave.  $f$  est donc strictement quasi-concave sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ .

Le résultat tombe en défaut sur  $\mathbb{R}^n$  : on considère  $x = (0, \dots, 0)$ ,  $y = (0, \dots, 0, 1)$  et  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Alors

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = f\left(0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right) = 0 = f(x) = f(y)$$

• On étudie ensuite la concavité de  $f$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ .

On calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x) = \alpha_i(\alpha_i - 1) \frac{f(x)}{x_i^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \alpha_i \alpha_j \frac{f(x)}{x_i x_j}$$

Posons  $y = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\alpha_n}{x_n} \end{pmatrix} = \text{diag}\left(\frac{\alpha_1}{x_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{x_n}\right)$ , de sorte que

$$H(f)(x) = f(x)(yy^T - D)$$

et pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} v^T H(f)(x) v &= f(x)[(y^T v)^T (y^T v) - v^T D v] \\ &= f(x) \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i}{x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2} \right] \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i}{x_i} \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i} \frac{\sqrt{\alpha_i} v_i}{x_i} \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2} \right)$$

Donc

$$v^T H(f)(x) v \leq f(x) \left[ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) - 1 \right] \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2}$$

Par conséquent, si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ ,  $v^T H(f)(x) v \leq 0$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ , donc  $f$  est concave.

- Il reste à prouver que  $f$  n'est ni concave ni convexe lorsque  $\sum_{i=1}^n \alpha_i > 1$ .  
C'est facile à montrer lorsque  $n$  est pair : il suffit alors d'exhiber  $x$  tel que  $\det(H(f)(x)) < 0$ .

Pour  $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un calcul de déterminant assez classique donne

$$\det H(f)(x) = (f(x))^n \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n \alpha_i} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) - 1 \right] < 0$$

Il reste donc à traiter le cas  $n$  impair.

2.  $f$  étant un minimum de fonctions concaves, elle est concave, donc quasi-concave. On sait encore grâce au cours de micro que  $f$  n'est pas strictement quasi-concave.

$f$  n'est pas strictement quasi-concave. Il suffit de considérer  $x = (0, \dots, 0)$ ,  $y = (0, \dots, 0, 1)$  et  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 5.20

Soient  $C$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  est concave si et seulement si

$$K := \{(x, z) \in C \times \mathbb{R}, z < f(x)\}$$

est convexe dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

2. On suppose  $f$  concave et  $x_0$  un point intérieur à  $C$ . Montrer qu'il existe  $L \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $x \in C$ ,

$$f(x) - f(x_0) \leq L(x - x_0)$$

1.  $\implies$  On suppose  $f$  concave. Soient  $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in K$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Par concavité de  $f$ ,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &\geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &> (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{aligned}$$

Donc  $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2) \in K$  ie  $(1-\lambda)(x_1, z_1) + \lambda(x_2, z_2) \in K$ .  
Donc  $K$  convexe.

$\Leftarrow$  On suppose  $K$  convexe. Soient  $x, y \in C$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Considérons  $z_1$  et  $z_2$  des réels tels que  $f(x) > z_1$  et  $f(y) > z_2$ , de sorte que  $(x, z_1)$  et  $(y, z_2) \in K$ . Par convexité de  $K$  on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) > (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2$$

En faisant  $z_1 \nearrow f(x)$  et  $z_2 \nearrow f(y)$ , on obtient

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Donc  $f$  concave.

2. On rappelle deux théorèmes importants qu'on va utiliser dans la suite :

**Théorème 1 :** Soit  $K$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\bar{K} = \overset{\circ}{K}$ .

**Théorème 2 :** Soit  $K$  un convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0$  un point de la frontière de  $K$ . Alors il existe un hyperplan d'appui à  $K$  en  $x_0$ . Plus précisément, il existe  $e \in \mathbb{R}^n$  tel que  $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n, \langle e, x - x_0 \rangle \geq 0\}$

Par continuité de  $f$  en  $x_0$  (qui est bien intérieur à  $C$ ), on montre facilement que  $(x_0, f(x_0)) \notin \overset{\circ}{K}$ . Par ailleurs, on a  $(x_0, f(x_0)) \in K$ . Donc

$$(x_0, f(x_0)) \in K \setminus \overset{\circ}{K} \subset \bar{K} \setminus \overset{\circ}{K}$$

Par le théorème 1 on a

$$(x_0, f(x_0)) \in \bar{K} \setminus \overset{\circ}{K}$$

Or  $\bar{K} \setminus \overset{\circ}{K}$  est précisément la frontière de  $\bar{K}$ , qui est un convexe fermé.

Par le théorème 2, on dispose donc de  $(u^*, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tel que

$$\bar{K} \subset \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \langle (u^*, \alpha), (x, z) - (x_0, f(x_0)) \rangle \geq 0\}$$

ce qu'on réécrit

$$\bar{K} \subset \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \langle u^*, x - x_0 \rangle \geq \alpha(f(x_0) - z)\}$$

Soit  $x \in C$  fixé. Considérons  $z \in \mathbb{R}$  tel que  $z < f(x)$ , de sorte que  $(x, z) \in K \subset \bar{K}$ .

On a donc  $\langle u^*, x - x_0 \rangle \geq \alpha(f(x_0) - z)$  (\*)

Choisissons  $z$  tel que  $z < \min(f(x), f(x_0))$ , de sorte que  $f(x_0) - z > 0$  et

$(x, z) \in K$ .

Si  $\alpha \geq 0$ , (\*) implique  $\langle u^*, x - x_0 \rangle \geq 0$ , ceci étant vrai pour tout  $x \in K$ . Comme  $x_0 \in \tilde{K}$ , l'inégalité reste vraie sur un voisinage de  $x_0$ , de sorte que pour  $t > 0$  suffisamment petit on a

$$\langle u^*, (x_0 - tu^*) - x_0 \rangle \geq 0$$

ie  $-\|u^*\|^2 \leq 0$ , donc  $\|u^*\| = 0$  et  $u^* = 0$ .

(\*) donne alors  $0 \geq \alpha(f(x_0) - z)$ , donc  $z \geq f(x_0)$ , en contradiction avec la définition de  $z$ .

Donc  $\alpha < 0$ . On considère  $z \in \mathbb{R}$  tel que  $z < f(x)$  et on réécrit alors (\*) sous la forme

$$\langle \frac{u^*}{\alpha}, x - x_0 \rangle \leq f(x_0) - z$$

En faisant  $z \xrightarrow{<} f(x)$ , on a

$$\langle \frac{u^*}{\alpha}, x - x_0 \rangle \leq f(x_0) - f(x)$$

donc

$$\langle -\frac{u^*}{\alpha}, x - x_0 \rangle \geq f(x) - f(x_0)$$

En posant  $L : x \mapsto \langle -\frac{u^*}{\alpha}, x \rangle$ , on a le résultat.

### Exercice 5.21

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq a$ . Montrer que  $f$  est constante.

Supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas constante. On dispose alors de  $a$  et  $b$  tel que  $f(a) < f(b)$ . Sans perte de généralité on suppose que  $a < b$ . Par croissance des pentes on a pour tout  $x > b$ ,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc

$$f(x) \geq (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$$

Le membre de droite tends vers  $\infty$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ , absurde.

### Exercice 5.22

Soit  $f$  définie sur  $(\mathbb{R}_+)^n$  par

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}$$

A quelle condition  $f$  est-elle convexe, concave ?

Dans la suite on notera  $S = \sum_{i=1}^n x_i^p$ .  
 $f$  est clairement  $C^2$  en tout point de  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ , de dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x_1, \dots, x_n) &= S^{1/p-2}(1-p)x_i^{2p-2} + S^{1/p-1}(p-1)x_i^{p-2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) &= S^{1/p-2}(1-p)x_i^{p-1}x_j^{p-1} \end{aligned}$$

En posant  $y = \begin{pmatrix} x_1^{p-1} \\ \vdots \\ x_n^{p-1} \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} x_1^{p-2} & & \\ & \ddots & \\ & & x_n^{p-2} \end{pmatrix} = \text{diag}(x_1^{p-2}, \dots, x_n^{p-2})$ ,

la Hessienne de  $f$  s'écrit  $S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D$ . On a, pour  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v &= S^{1/p-2}(p-1) [Sv^T Dv - (y^T v)^T (y^T v)] \\ &= S^{1/p-2}(p-1) \left[ \sum_{i=1}^n x_i^p \sum_{i=1}^n x_i^{p-2} v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i^{p-1} v_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Or, par Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{p-1} v_i \right)^2 &= \left( \sum_{i=1}^n (x_i^{p/2-1} v_i) x_i^{p/2} \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^{p-2} v_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right) \end{aligned}$$

Donc

$$v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v$$

a même signe que

$$S^{1/p-2}(p-1)$$

Or  $S^{1/p-2}$  est  $\geq 0$ , donc  $v^T(S^{1/p-2}(1-p)yy^T + S^{1/p-1}(p-1)D)v$  a le signe de  $p-1$ , quel que soit  $v$ .

En conclusion,  $f$  est convexe sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$  si et seulement si  $p-1 \geq 0$  et concave



sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$  si et seulement si  $p - 1 \leq 0$ .

La convexité/concavité au bord s'obtient dans les deux cas en approchant par des éléments de  $(\mathbb{R}_+^*)^n$  puis en utilisant la continuité de  $f$ .

### Exercice 5.23

Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . On définit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|Ax\|^2 + 2\|Bx\|^{3/2}$ . Montrer que  $f$  est convexe.

Il suffit de remarquer que  $x \mapsto \|Ax\|$  est convexe (conséquence directe de l'inégalité triangulaire). On utilise ensuite le lemme

**Lemme :** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et croissante, alors  $g \circ f$  est convexe.

Preuve : Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . L'inégalité de convexité  $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$  composée par  $g$  donne

$$g(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq g((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) \leq (1-\lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y))$$

Donc  $g \circ f$  convexe.

Ici on compose avec  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  qui est convexe, donc  $x \mapsto \|Ax\|^2$  est convexe.

Pour les mêmes raisons,  $x \mapsto 2\|Bx\|^{3/2}$  est convexe, donc  $f$  est convexe, comme somme de deux fonctions convexes.

### Exercice 5.24

□

### Exercice 5.25

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , convexe, continue, strictement monotone sur  $[a, b]$ .  
Que de la convexité/concavité de  $f^{-1}$  ?

*Correction proposée par Yannick Guyonvarch*

Ici on ne suppose pas a priori la dérivabilité de  $f$ .

Par convexité, on a pour tout  $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$  et tout  $\lambda \in ]0, 1[$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

On pose  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ ,  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  et  $x_2 = f^{-1}(y_2)$  (N.B : ceci est possible car  $f$  est continue strictement croissante, donc elle vérifie  $x = f^{-1}(f(x))$ )

pour tout  $x$ ).

Ainsi

$$f(\lambda f^{-1}(y_1) + (1 - \lambda)f^{-1}(y_2)) \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$$

$f$  continue strictement croissante sur  $[a, b] \implies f^{-1}$  continue, strictement croissante sur  $[f(a), f(b)]$ . En appliquant  $f^{-1}$  à l'inégalité, on en préserve le sens et on obtient

$$\lambda f^{-1}(y_1) + (1 - \lambda)f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$$

$\implies f^{-1}$  concave.