



Analyse Numérique – Mini-projets

Compte rendu de TP

Pendule simple amorti

BUFFERNE Guillaume
MOREIRA DA SILVA Adrien

I - Introduction

Dans ce rapport, nous étudions le mouvement d'un pendule simple composé d'une bille de masse m suspendue à un fil de longueur l (et de masse négligeable) que l'on éloigne de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 et que l'on lance avec une vitesse angulaire initiale θ_0' .

Ce pendule est soumis à son poids, la tension du fil et les forces de frottement de l'air. On définit :

- Le coefficient tenant compte de la résistance à l'air γ .
- Le rayon de la bille r .
- La viscosité de l'air η .
- L'accélération de la pesanteur g .
- La longueur du pendule l .
- ω la fréquence propre d'oscillation du pendule $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, c'est-à-dire la fréquence lorsque $\gamma = 0$.

L'équation différentielle du pendule défini par la formule :

$$\theta''(t) + \gamma\theta'(t) + \omega^2\sin\theta(t) = 0$$

Cette équation est non-linéaire en raison du terme $\sin\theta(t)$. Cela rend l'analyse et la résolution du problème plus complexe que pour un pendule linéaire. Pour cette raison, nous résolvons cette équation de façon numérique et non pas analytique.

La résolution numérique de cette équation différentielle se fait avec la méthode d'Euler, de Runge-Kutta d'ordre 2 et de Runge-Kutta d'ordre 4. Afin de comparer les différentes méthodes, nous affichons la trajectoire du pendule, leur énergie cinétique, potentielle et totale, et visualisons leur trajectoire dans l'espace des phases (plan d'abscisse θ et d'ordonnée θ').

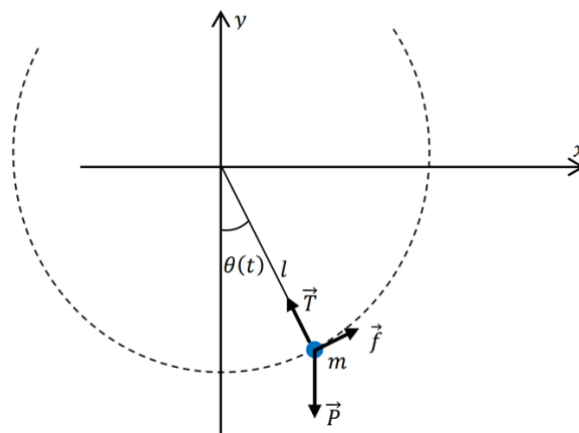


Figure 1 : pendule simple amorti

L'énergie totale d'un tel système est une fonction du temps, elle est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E(t) &= E_c(t) + E_p(t) \\ E_c(t) &= \frac{1}{2}ml^2\theta'(t)^2 \\ E_p(t) &= mgl(1 - \cos(\theta(t))) \end{aligned}$$

II – Méthodes

Méthode d'Euler explicite en 2 dimensions :

On calcule la solution approchée y_{n+1} au point t_{n+1} à partir de la solution approchée y_n au point t_n . La discrétisation du problème de Cauchy s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta'(t_n) &= f(t_n, \theta(t_n), z(t_n)), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ z'(t_n) &= g(t_n, \theta(t_n), z(t_n)), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Puis en remplaçant la dérivé $\theta'(t_n)$ et $z'(t_n)$ par leur taux de variation, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n)}{t_{n+1} - t_n} &= f(t_n, \theta(t_n), z(t_n)) \\ \frac{z(t_{n+1}) - z(t_n)}{t_{n+1} - t_n} &= g(t_n, \theta(t_n), z(t_n)) \end{aligned}$$

On fait l'approximation $\theta(t_n) \simeq \theta_n$; $z(t_n) \simeq z_n$ et on définit le pas temporel $h = t_{n+1} - t_n$.

On obtient ainsi le schéma d'Euler explicite :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + hf(t_n, \theta_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hg(t_n, \theta_n, z_n) \end{cases}$$

Résolution du pendule simple amorti :

$$\begin{cases} \theta''(t) + \gamma\theta'(t) + \omega^2\sin\theta(t) = 0, & 0 \leq t \leq 150 \\ \theta(0) = 1 & \text{(position initiale)} \\ \theta'(0) = 0 & \text{(vitesse initiale)} \end{cases}$$

C'est une équation linéaire d'ordre 2 que l'on peut ramener à un système de deux équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \theta'(t) = z(t) \\ z(t) = -\gamma\theta'(t) - \omega^2\sin\theta(t) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + hf(t_n, \theta_n, z_n) & \text{avec } f(t, \theta, z) = z \\ z_{n+1} = z_n + hg(t_n, \theta_n, z_n) & \text{avec } g(t, \theta, z) = -\gamma\theta'(t) - \omega^2\sin\theta(t) \end{cases}$$

Cette méthode est instable car, d'après le théorème de convergence, elle est d'ordre 1. Autrement dit, son erreur décroît linéairement.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 en 2 dimensions :

La méthode RK2 est une méthode numérique à un pas comme la méthode d'Euler où l'on fait cette fois-ci 2 évaluations des fonctions f et g sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Elle correspond à une moyenne pondérée des pentes de la solution aux points t_n et $t_n + \frac{h}{2\beta}$.

On rappelle que l'EDO $\theta''(t) + \gamma\theta'(t) + \omega^2\sin\theta(t) = 0$ peut s'écrire sous la forme de deux EDO d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \theta'(t) = z(t) \\ z(t) = -\gamma\theta'(t) - \omega^2\sin\theta(t) \end{cases}$$

On construit alors les variables et les suites suivantes :

$$\begin{cases} k_{1f} = f(t_n, \theta_n, z_n), & k_{2f} = f\left(t_n + \frac{h}{2\beta}, \theta_n + \frac{h}{2\beta}k_{1f}, z_n + \frac{h}{2\beta}k_{1g}\right) \\ k_{1g} = g(t_n, \theta_n, z_n), & k_{2g} = g\left(t_n + \frac{h}{2\beta}, \theta_n + \frac{h}{2\beta}k_{1f}, z_n + \frac{h}{2\beta}k_{1g}\right) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + h[(1-\beta)k_{1f} + \beta k_{2f}], & z_{n+1} = z_n + h[(1-\beta)k_{1g} + \beta k_{2g}] \end{cases}$$

Avec $f(t, \theta, z) = z$ et $g(t, \theta, z) = -\gamma\theta'(t) - \omega^2\sin\theta(t)$

Cette méthode est plus stable que la méthode d'Euler car, d'après le théorème de convergence, elle est d'ordre 2. Autrement dit, son erreur décroît quadratiquement.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en 2 dimensions :

La méthode RK4 est une méthode numérique à un pas comme la méthode d'Euler où l'on fait cette fois-ci 4 évaluations des fonctions f et g sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

On rappelle que l'EDO $\theta''(t) + \gamma\theta'(t) + \omega^2\sin\theta(t) = 0$ peut s'écrire sous la forme de deux EDO d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \theta'(t) = z(t) \\ z(t) = -\gamma\theta'(t) - \omega^2\sin\theta(t) \end{cases}$$

On construit alors les variables et les suites suivantes :

$$\begin{cases} k_{1f} = f(t_n, \theta_n, z_n) \\ k_{1g} = g(t_n, \theta_n, z_n) \\ k_{2f} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{1f}, z_n + \frac{h}{2}k_{1g}\right) \\ k_{2g} = g\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{1f}, z_n + \frac{h}{2}k_{1g}\right) \\ k_{3f} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{2f}, z_n + \frac{h}{2}k_{2g}\right) \\ k_{3g} = g\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{2f}, z_n + \frac{h}{2}k_{2g}\right) \\ k_{4f} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{3f}, z_n + \frac{h}{2}k_{3g}\right) \\ k_{4g} = g\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{3f}, z_n + \frac{h}{2}k_{3g}\right) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{h}{6}[k_{1f} + 2k_{2f} + 2k_{3f} + k_{4f}] \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}[k_{1g} + 2k_{2g} + 2k_{3g} + k_{4g}] \end{cases}$$

Avec $f(t, \theta, z) = z$ et $g(t, \theta, z) = -\gamma\theta'(t) - \omega^2\sin\theta(t)$

Cette méthode est plus stable que les deux autres car, d'après le théorème de convergence, elle est d'ordre 4.

III – Description des résultats et interprétation

Sauf contre-indication, les valeurs choisies pour les paramètres sont celles ci-dessous :

Choix des paramètres physiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \\ r = 0.02 \text{ m} \\ m = 0.1 \text{ kg} \\ l = 1 \text{ m} \\ g = 9.81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} \\ \theta_0 = 1 \text{ rad} \\ \theta'_0 = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{array} \right.$$

Choix des paramètres pour le calcul numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0.07 \text{ (pas temporel)} \\ \beta = 1 \text{ (pondération méthode RK2)} \end{array} \right.$$

Analysons le plan de phases des méthodes d'Euler, RK2 et RK4. Ce diagramme montre la relation entre l'angle θ et la vitesse angulaire θ' pour les trois méthodes numériques. Il permet d'analyser la stabilité et la précision des différentes méthodes.

Voici les résultats obtenus :

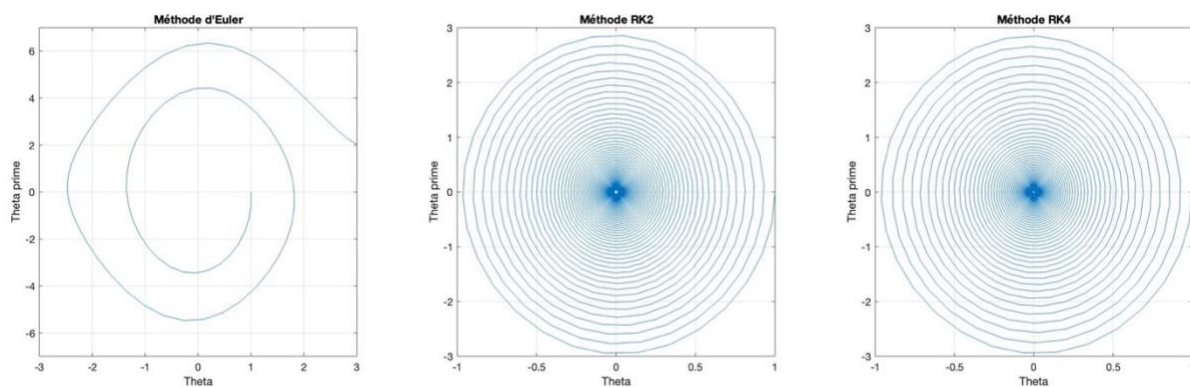


Figure 2 : Visualisation du pendule dans l'espace des phases pour les méthodes d'Euler, RK2 et RK4.

Visualisons la position du pendule au bout d'un temps $t = 3$ secondes :

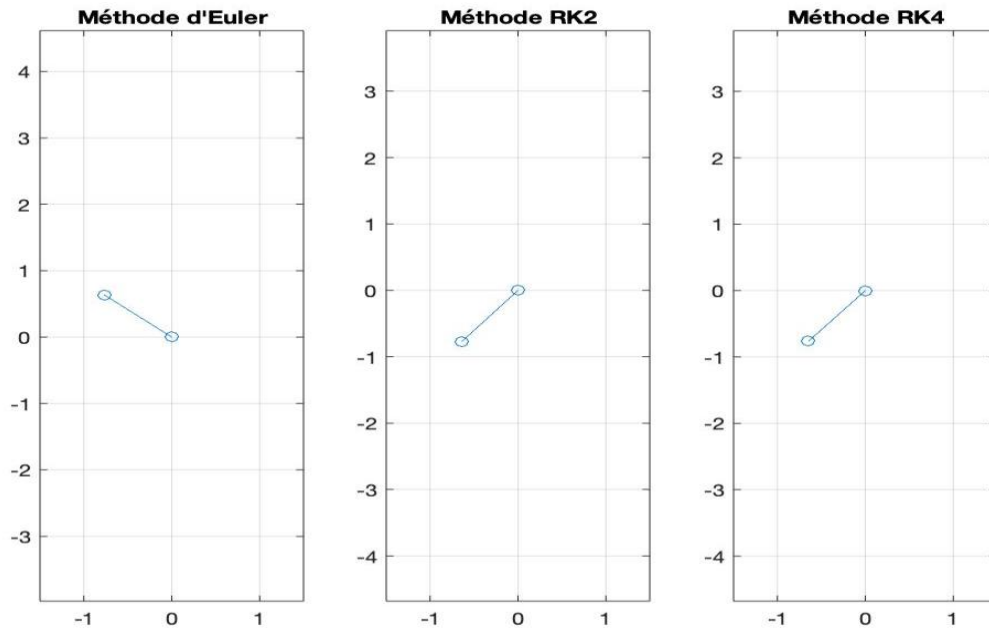


Figure 3 : Position du pendule au bout de 3 secondes

Le diagramme des phases montre, qu'effectivement, les 3 pendules sont initialisées en une position $\theta_0 = 1$ et une vitesse $\theta'_0 = 0$ (point présent en (1,0) sur chacun des 3 diagrammes).

Un pendule amorti réaliste a un diagramme des phases qui part de ces deux conditions et qui, au fil du temps, se rapproche de sa position d'équilibre (origine du plan, en (0,0)).

C'est ce que nous pouvons constater sur le plan des phases des méthodes RK2 et RK4. Leur trajectoire correspond à des cercles dont le rayon se réduit au cours du temps jusqu'à atteindre l'origine, montrant la convergence du pendule vers sa position d'équilibre.

La méthode RK2 montre donc un diagramme stable. Les oscillations sont bien capturées et les erreurs d'approximations sont minimales. Bien que la différence soit moindre, la méthode RK4 présente un diagramme de phase plus précis et stable que la méthode RK2.

En revanche, le diagramme de phase du modèle d'Euler montre que le pendule s'éloigne de cette position d'origine (son angle et sa vitesse augmentent au fil du temps). La divergence est due aux erreurs d'approximation de la dérivée qui s'accumulent et provoquent une instabilité numérique. Ce modèle n'est donc pas satisfaisant pour les paramètres choisis.

La figure 3 montre aussi l'instabilité du modèle d'Euler. Il est initialisé à une position $\theta_0 = 1 \text{ rad} = 57,3^\circ$. Le pendule étant amorti, son angle devrait varier entre $[-57,3^\circ \text{ et } 57,3^\circ]$. Or, au bout d'un temps $t = 3$ secondes, son angle θ se situe autour de -135° , ce qui montre très clairement que le modèle est non-réaliste.

Confirmons cela en visualisant les énergies cinétique, potentielles et totales de chacune des 3 méthodes :

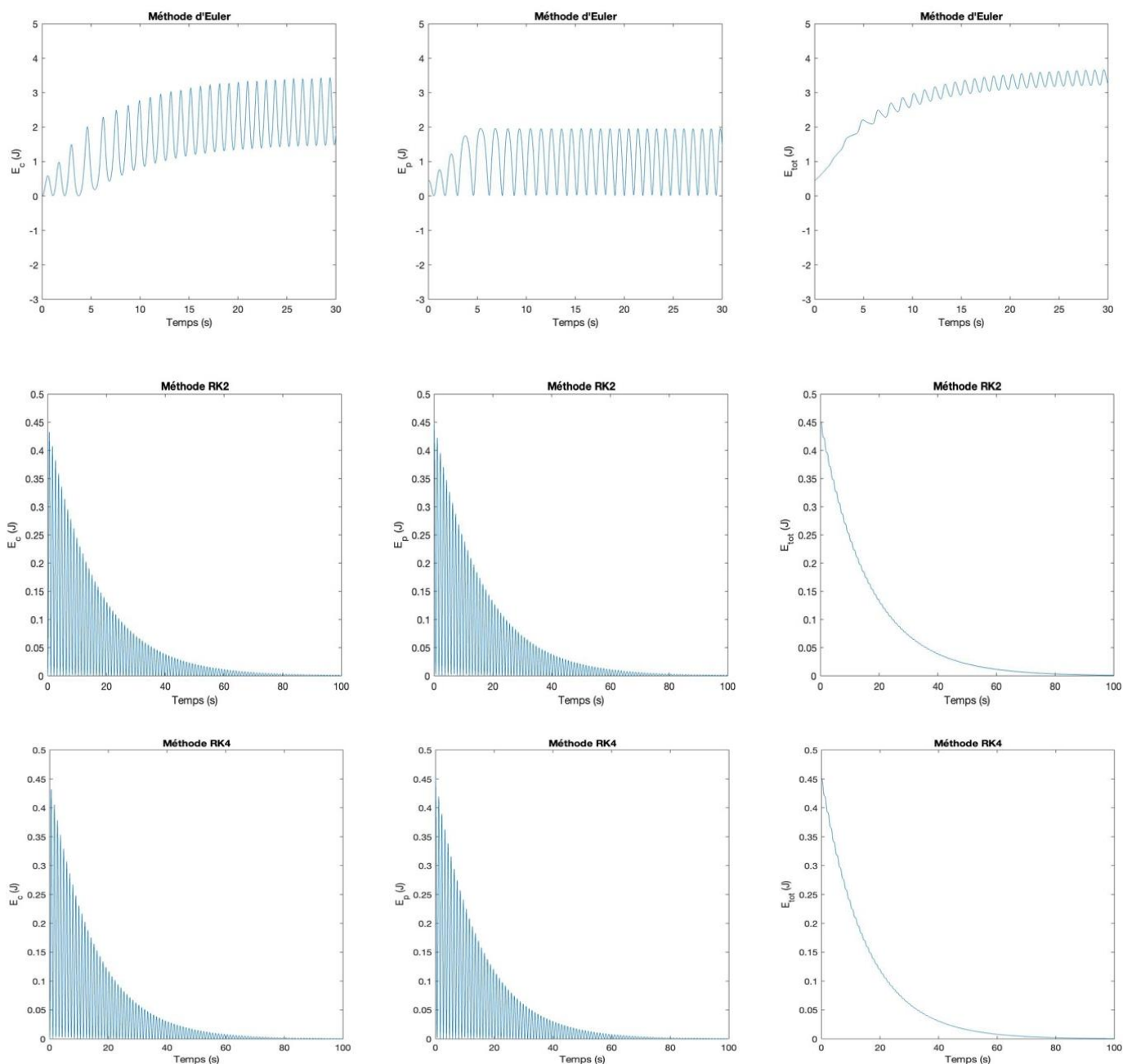


Figure 4 : Évolution des énergies cinétiques, potentielles et totales pour la méthode d'Euler, RK2 et RK4.

L'énergie totale décroît au fil du temps pour les méthodes RK2 et RK4 où le pendule atteint une position d'équilibre au bout d'un temps $t = 90$ secondes pour la méthode RK2 et $t = 80$ secondes pour la méthode RK4.

En revanche, pour la méthode d'Euler, l'énergie augmente jusqu'à osciller autour de 3 J au bout de 25 secondes. Autrement dit, au bout de 25 secondes, sa vitesse et sa trajectoire se stabilisent (vers des valeurs non nulles) et le pendule n'est plus en régime transitoire mais en régime permanent.

Étudions maintenant l'influence du pas temporel h sur la convergence de ces méthodes :

Changement de paramètre : $h = 0.02$

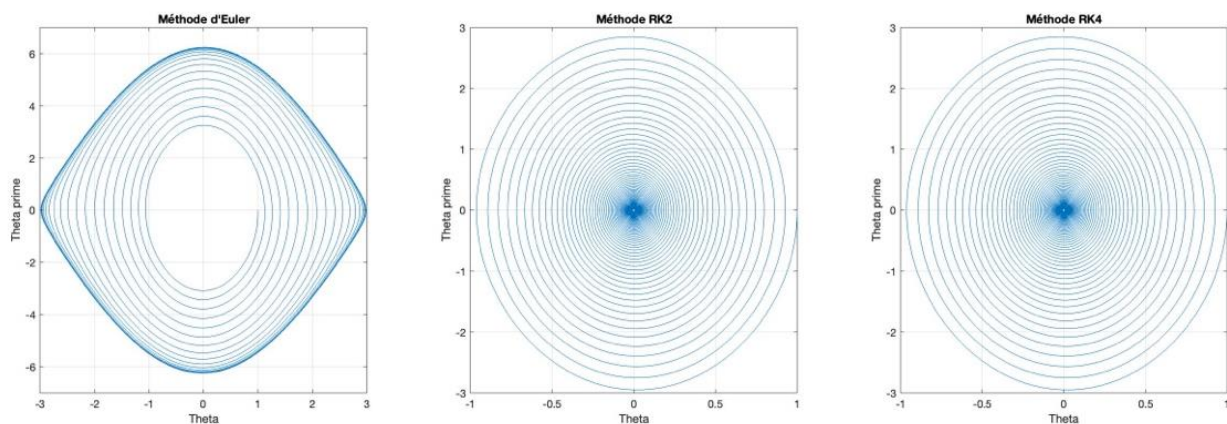


Figure 5 : Visualisation du pendule dans l'espace des phases pour les méthodes d'Euler, RK2 et RK4.

L'espace des phases montre que la méthode d'Euler, bien qu'elle ne fasse toujours pas converger le pendule vers une position d'équilibre, est très sensible au pas temporel h .

Son angle et sa vitesse augmentent plus lentement que pour le cas vu précédemment, et se stabilisent ensuite (comme le montre la courbe bleue plus épaisse que les autres).

Dans les 3 cas, tant qu'il n'est pas à l'équilibre, le pendule atteint une vitesse maximale (en valeur absolue), à chaque fois qu'il passe par la position $\theta = 0$. Par exemple, lors de la première trajectoire : $|\theta'| = 2.9 \text{ rad.s}^{-1}$ en $\theta = 0$ pour RK2 et RK4.

Ceci est cohérent puisque lorsque le pendule atteint un angle nul toute son énergie se transforme en énergie cinétique, ce qui rend maximale sa vitesse à cet instant.

Confirmons cela en visualisant les énergies cinétiques, potentielles et totales de chacune des 3 méthodes :

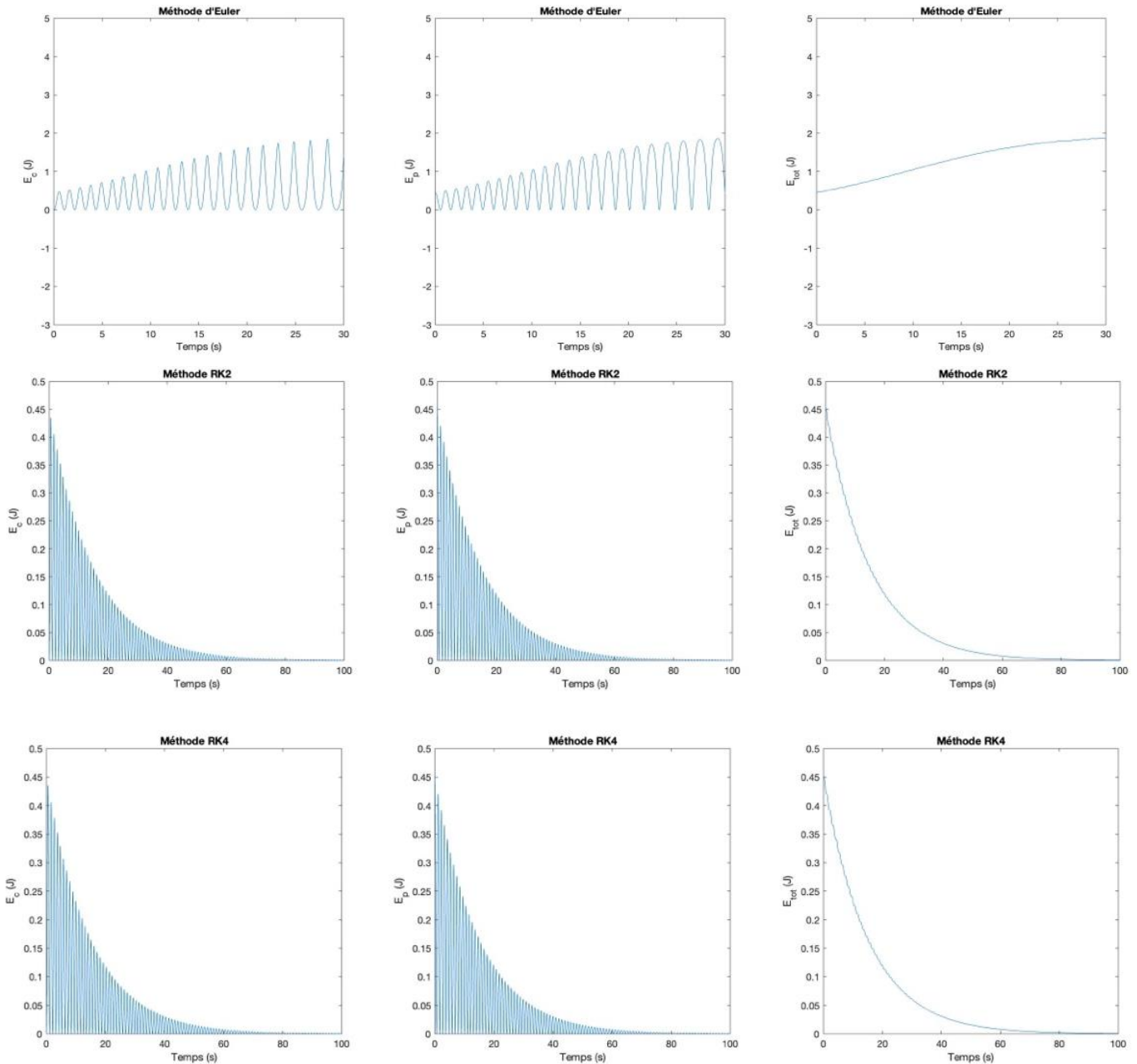


Figure 6 : Évolution des énergies cinétiques, potentielles et totales pour la méthode d'Euler, RK2 et RK4 pour un pas $h = 0.02$.

L'énergie totale du pendule décroît (légèrement) plus rapidement pour les méthodes RK2 et RK4. Le pendule atteint une position d'équilibre au bout d'un temps $t = 80$ secondes pour la méthode RK2 et $t = 75$ secondes pour la méthode RK4.

Pour la méthode d'Euler, l'énergie augmente jusqu'à osciller autour de 1.8 J au bout de 30 secondes. Ainsi, en diminuant le pas de $h = 0.07$ à 0.02 , l'énergie a diminué de 40% ($\varepsilon = \frac{3.0-1.8}{3.0} \times 100 = 40\%$).

En résumé, diminuer le pas temporel h revient à légèrement améliorer la stabilité des modèles RK2 et RK4 et à considérablement améliorer la stabilité du modèle d'Euler.

Cela vient du fait que, pour la méthode d'Euler, on ne calcule qu'une seule valeur de f et de g pour passer θ_{n+1} à θ_n et de z_{n+1} à z_n . En revanche on calcule f et g plusieurs fois pour les méthodes RK2 et RK4, ce qui les rend moins sensibles aux variations du pas de temps.

Étudions maintenant l'influence des paramètres physiques sur la convergence de ces modèles :

Changement de paramètre : $r = 0.2$ m

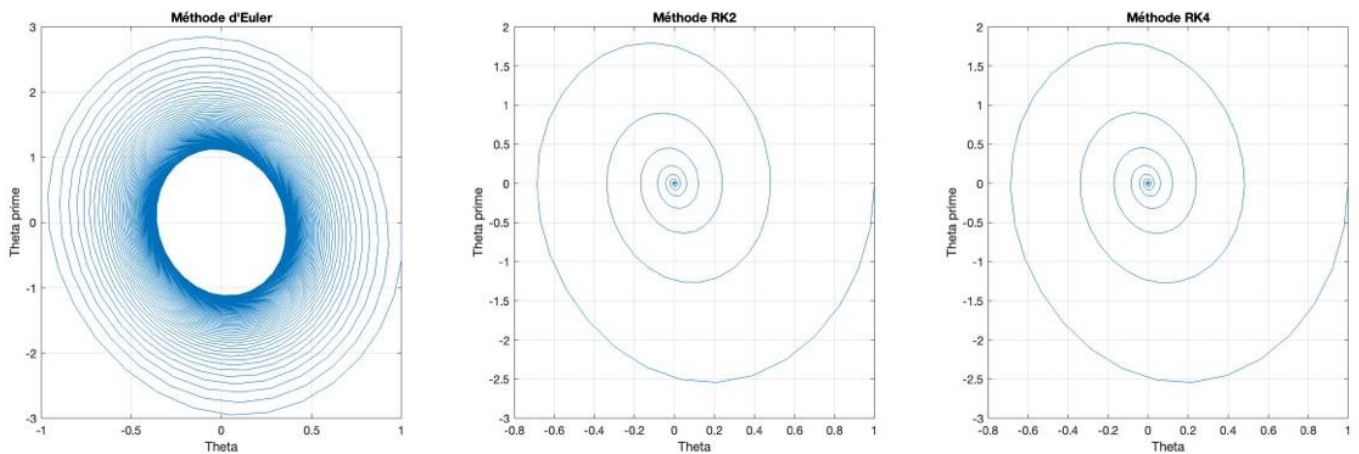


Figure 7 : Visualisation du pendule dans l'espace des phases pour les méthodes d'Euler, RK2 et RK4 pour un rayon $r = 0.2$ m

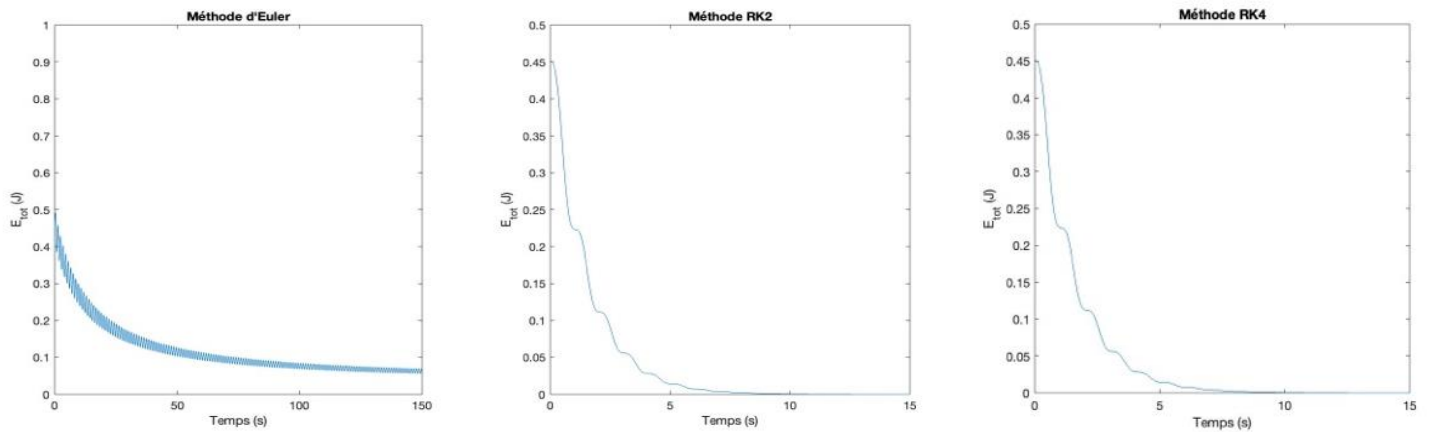


Figure 8 : Évolution des énergies cinétiques, potentielles et totales pour la méthode d'Euler, RK2 et RK4 pour un rayon $r = 0.2 \text{ m}$

Nous remarquons qu'un rayon plus grand de la bille entraîne une décroissance plus rapide de l'amplitude des oscillations. En effet, une plus grande surface est exposée à l'air, ce qui augmente le coefficient de résistance $\gamma = \frac{6\pi r\eta}{m}$.

Changement de paramètre : $m = 1 \text{ kg}$

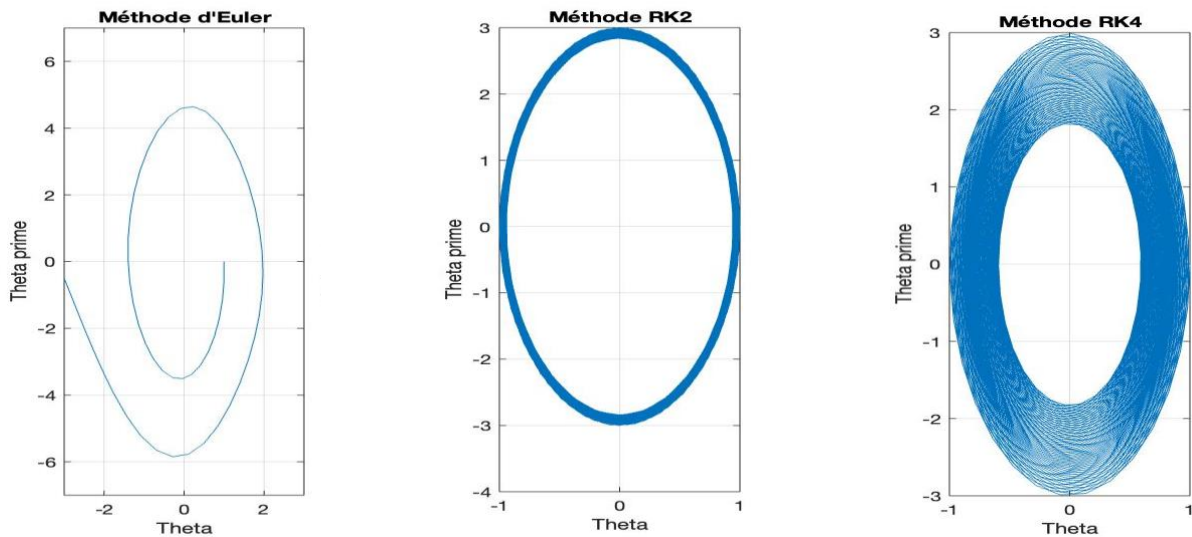


Figure 9 : Visualisation du pendule dans l'espace des phases pour les méthodes d'Euler, RK2 et RK4 pour une masse $m = 1 \text{ kg}$

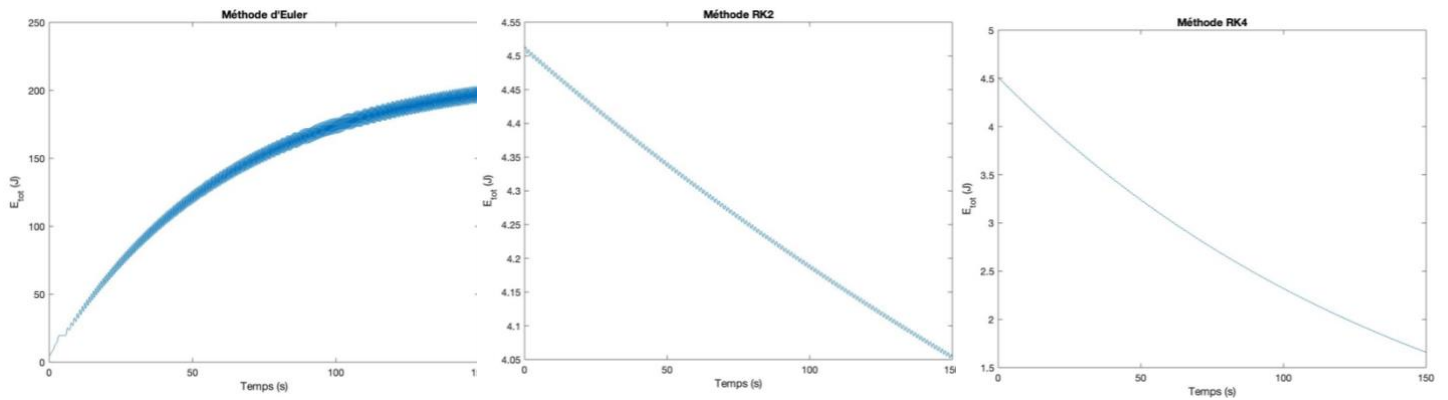


Figure 10 : Évolution des énergies cinétiques, potentielles et totales pour la méthode d'Euler, RK2 et RK4 pour une masse $m = 1 \text{ kg}$

Nous observons que la masse du pendule a un impact significatif sur son énergie cinétique et potentielle. Une masse plus importante implique une énergie cinétique et potentielle plus élevée car :

- L'énergie cinétique est proportionnelle à la masse.
- L'énergie potentielle est elle aussi proportionnelle à la masse.

Par conséquent, un pendule de masse plus importante nécessite plus d'énergie pour être mis en mouvement et pour atteindre des hauteurs plus élevées lors de ses oscillations.

De plus, un pendule plus massif met plus de temps à dissiper cette énergie supplémentaire à travers les forces de frottement. Ainsi, il met plus de temps pour arriver à sa position d'équilibre stable.

Changement de paramètre : $L = 20 \text{ m}$

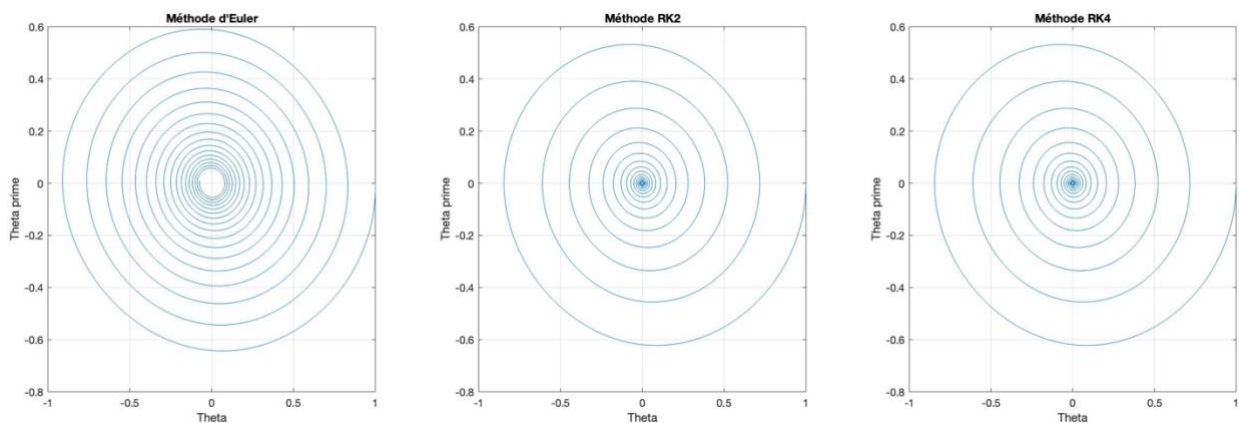


Figure 11 : Visualisation du pendule dans l'espace des phases pour les méthodes d'Euler, RK2 et RK4 pour une longueur L = 20 m

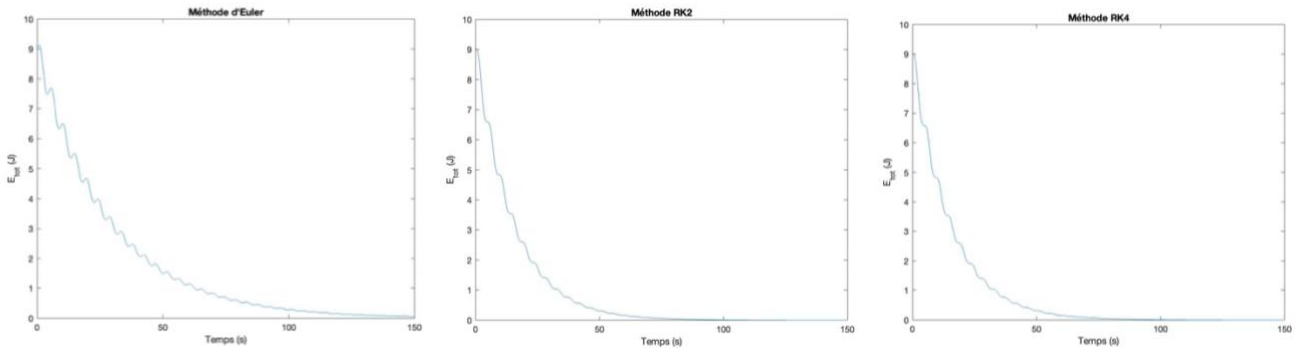


Figure 12 : Évolution des énergies totales pour la méthode d'Euler, RK2 et RK4 pour une longueur L = 20 m

Les plans de phases et les courbes des énergies totales montrent que les pendules convergent rapidement vers une position d'équilibre pour les 3 méthodes.

De manière générale plus la longueur du pendule est grande, plus la période augmente et plus le pendule est lent :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Comme le pendule est plus lent, alors il réagit moins aux perturbations et est donc plus stable.

On note aussi que :

- L'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la longueur : $E_c(t) = \frac{1}{2}ml^2\theta'(t)^2$
- L'énergie potentielle est proportionnelle à la longueur $E_p(t) = mgl(1 - \cos(\theta(t)))$

Il est donc cohérent de voir que les énergies totales initiales sont plus élevées que précédemment (9 Joules).

Cas particuliers et résultats notables :

- Cas selon la valeur de β :

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} & \text{méthode de Heun (ou Euler améliorée)} \\ \beta = 1 & \text{méthode d'Euler modifiée} \\ \beta = 0 & \text{on retrouve la méthode d'Euler explicite} \end{cases}$$

- Cas des conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \theta'_0 = 0 \end{cases}$$

On a bien un pendule à l'équilibre.

- Cas du pendule dans une position d'équilibre instable à l'initialisation :

$$\begin{cases} \theta_0 = \pi \\ \theta'_0 = 0 \end{cases}$$

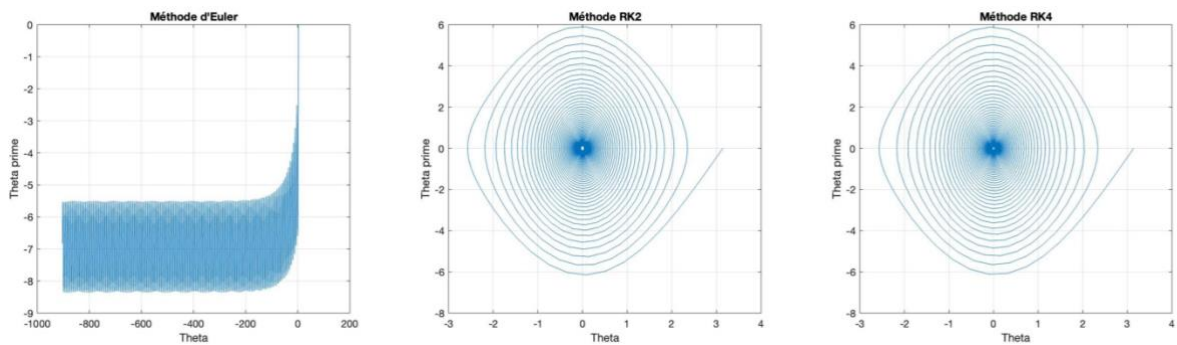


Figure 13 : Visualisation du pendule initialisé dans sa position d'équilibre instable dans l'espace des phases pour les méthodes d'Euler, RK2 et RK4

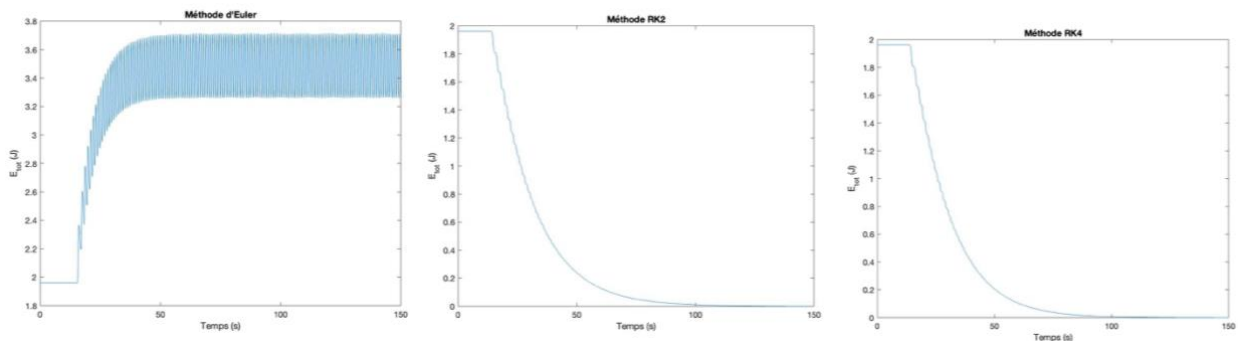


Figure 14 : Évolution des énergies totales pour la méthode d'Euler, RK2 et RK4 pour un pendule initialisé dans sa position d'équilibre instable

Dans les 3 cas, le pendule reste dans sa position d'équilibre instable pendant 13.5 secondes. Lorsqu'il perd sa position d'équilibre, sa vitesse augmente considérablement, ce qui fait augmenter les amplitudes d'oscillations.

Ceci rend le modèle d'Euler très instable.

En revanche, les modèles RK2 et RK4 restent stables. On note tout de même que les plans des phases présentent de légers « coudes » lorsqu'ils perdent leur position d'équilibre, dû aux changements brusques de trajectoires.

De manière générale, un angle initial plus grand donne une plus grande amplitude d'oscillation.

- Cas où le pendule « fait des tours sur lui-même » :

$$\begin{cases} \theta_0 = 1 \\ \theta'_0 = 6 \end{cases}$$

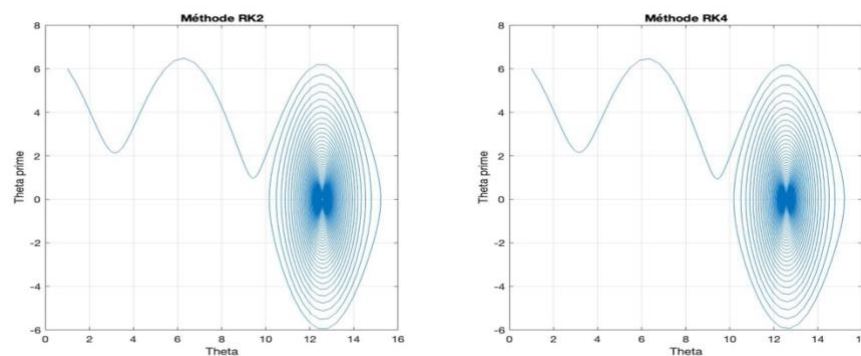


Figure 15 : Visualisation du pendule dans l'espace des phases pour les méthodes d'Euler, RK2 et RK4 pour une vitesse initiale $\theta'_0 = 20 \text{ m}$

Avec ces conditions initiales, le pendule effectue, dans le cas des modèles RK2 et RK4, 2 tours sur lui-même. Lorsque que le pendule effectue des rotations complètes, son comportement change et il n'est plus bien décrit par un mouvement harmonique simple.

À certains moments, la bille du pendule atteint une vitesse angulaire très élevée, tandis qu'à d'autres moments, elle ralentit considérablement ou s'arrête temporairement avant de repartir dans l'autre sens. C'est pour cela que, sur le plan des phases, nous voyons une courbe sinusoïdale (signe d'instabilité) avant de retrouver une trajectoire stable.

Par conséquent, le diagramme des phases pour un pendule effectuant des rotations complètes est plus complexe et ne présente plus les caractéristiques d'un mouvement harmonique simple (cercles concentriques).

Conclusion

Les paramètres utilisés dans les différentes méthodes influencent grandement la stabilité des modèles étudiés :

- h : Plus le pas temporel est faible, plus il améliore la stabilité du pendule. Le modèle d'Euler est fortement sensible aux variations du pas contrairement aux modèles RK2 et RK4.
- r : Plus le rayon de la bille est grand et plus la décroissance des oscillations est rapide dû aux frottements de l'air qui ralentissent son mouvement.
- m : Plus la masse de la bille est élevée plus le pendule met de temps à trouver sa position d'équilibre car il met donc plus de temps à perdre son énergie.
- l : Avec une longueur de fil plus grande, le pendule devient plus lent et réagit donc moins aux perturbations, il est donc plus stable.

Parmi les différentes méthodes que nous avons vues, la méthode d'Euler est la plus simple à mettre en œuvre. Cependant, elle est moins précise et moins stable que les autres méthodes.

La méthode RK2 permet d'utiliser des pas de temps plus grands qu'avec la méthode d'Euler tout en maintenant une précision satisfaisante. La méthode RK4 permet d'utiliser des pas de temps encore plus grands qu'avec les méthodes précédentes tout en conservant une excellente précision. En revanche, peu de différences ont été notées entre ces deux modèles dans le cas de cette étude.

On en déduit donc que le modèle le plus pertinent (en termes de simplicité à mettre en œuvre et d'efficacité) pour cette étude est le modèle RK2.

Afin d'approfondir l'analyse, nous aurions pu résoudre l'équation du pendule dans le cas des petites oscillations grâce à l'approximation $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$. Ceci pourrait être utile pour comparer les résultats numériques et analytiques.