Rapport de RODD

Problème de planification culturale durable

Adrien BLASSIAU
Corentin JUVIGNY

11 mars 2020

Table des matières

1 Introduction

La **planification culturale** détermine les **ressources à utiliser et leur affectation** dans le but de répondre à une demande en matières premières estimée sur un horizon de temps donné. Une mauvaise utilisation de ces ressources peut avoir un impact négatif sur le plan écologique.
C'est dans ce **contexte** que s'inscrit notre problème de planification durable de rotations culturales, qui consiste donc à construire, sur un horizon de temps donné, une rotation de cultures et de jachères sur chaque parcelle utilisée, de sorte à couvrir des demandes saisonnières et de minimiser la surface cultivée.

2 Rappel des données et notations utilisées dans le problème

On fait l'hypothèse que toutes les parcelles ont la même surface unitaire et les mêmes caractéristiques de rendement. Notons que certaines cultures ne se font que les semestres pairs et d'autres que les semestres impairs.

Les données et leurs notations sont les suivantes :

- $\mathcal{P} = \{1, \ldots, \mathrm{P}\}$: ensemble des parcelles utilisables
- $\mathcal{T} \in \mathbb{N}$: horizon de planification
- $\bar{l} \in \mathbb{N}$: durée au-delà de laquelle la prolongation de la jachère n'améliore plus le rendement
- $\bar{a} \in \mathbb{N}$: nombre maximal de semestres de cultures successives.
- $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) : ensemble des cultures cultivables en semestre impair (resp. en semestre pair)
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$
- $s : t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si t est impair} \\ 2, & \text{si t est pair} \end{cases}$
- $\forall j \in \mathcal{C},\ \Gamma^+(j)$: ensemble des cultures qui peuvent succéder à la culture j dans une rotation
- $\forall t \in [\![1;\mathrm{T}]\!],\ \forall j \in \mathcal{C},\ \mathrm{D}_{j,t}$: demande en tonnes de culture j au semestre t.
- La jachère est représentée par l'indice 0
- À chaque semestre, l'état d'une parcelle peut se résumer au triplet (l, a, j) où :
  - l est le nombre de semestres consécutifs de jachère.
  - a est le nombre de semestres consécutifs de culture (si $j \neq 0$).
  - $j \in \mathcal{C} \cup \{0\}$ est la culture ou la jachère en cours (si $j = 0$ alors $a = 0$).
- $\mathcal{R}_p(l, a, i, j)$: rendement en tonnes sur la parcelle p de la culture j si elle a été précédée de la culture i et si cette parcelle est dans l'état (l, a, j).
- Le rendement de la jachère étant nul, on a toujours $\mathcal{R}_p(l, 0, i, 0) = 0$. Le rendement maximal d'une culture j($\neq 0$) est toujours $\mathcal{R}_{\bar{l},1,0,j}$.

L'**objectif** revient à **minimiser** le nombre de parcelles utilisées.

3 Questions

Question 1

On donne une représentation du graphe des rotations pour $T = 5$, $\overline{a} = \overline{l} = 2$, $C_1 = \{riz\}$, $C_2 = \{haricot\}$, $\Gamma^+(haricot) = \{riz\}$, $\Gamma^+(riz) = \{haricot\}$, l'état initial d'une parcelle étant (2, 0, 0) au semestre 0.
Chaque **sommet** de ce graphe correspond à un état (l, a, j).
Chaque **arc** de ce graphe correspond à une transition $(l, a, j) \rightarrow (l', a', j')$.

Le **chemin en rouge** sur la Figure 1 correspond à la **rotation** suivante : $(2,0,0) \rightarrow (2,1,R) \rightarrow (2,2,H) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (2,0,0) \rightarrow (2,1,R)$.

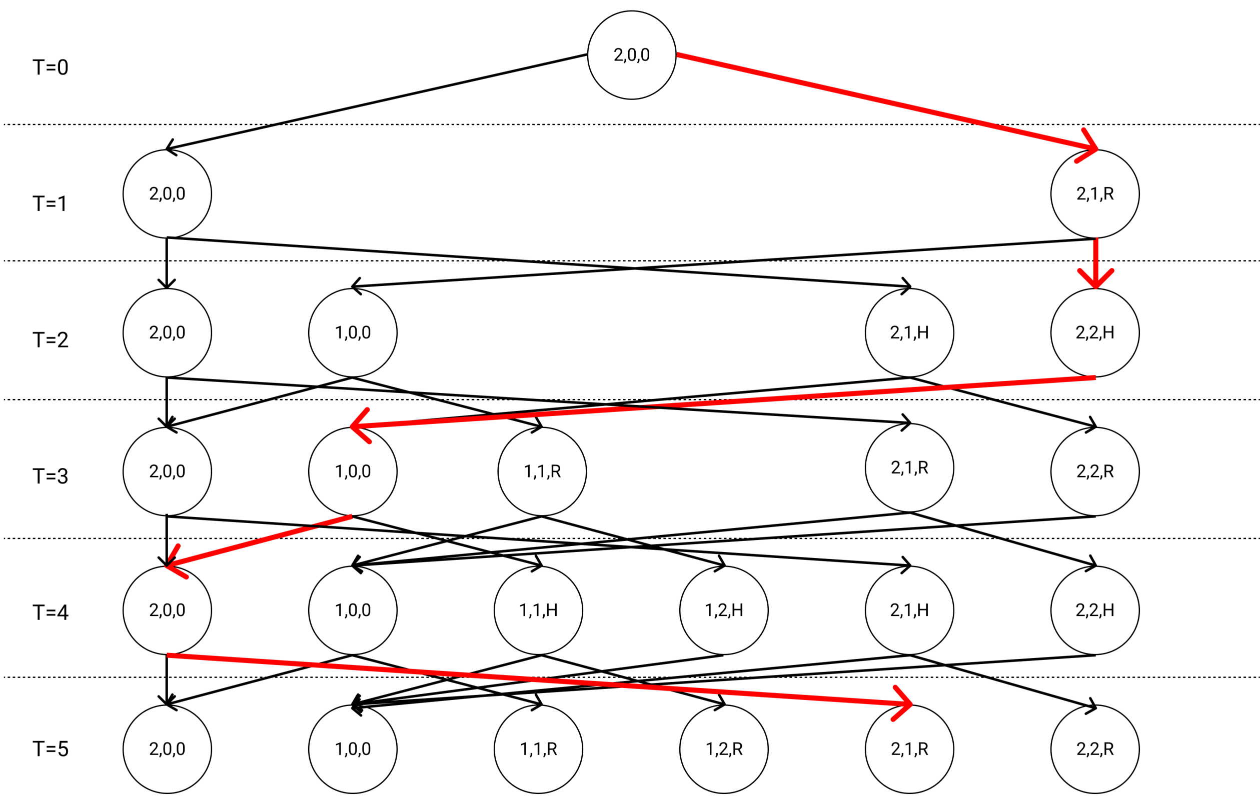

FIGURE 1 – Graphe G des rotations possibles pour $T = 5$

Question 2

On modélise le problème avec le PLNE suivant :

$$\min \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{a\in \text{InitArc}} x_{a,1,p}$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_{\substack{a:(s',\_,\_) \in \text{Arcs} \\ s'=s}} x_{a,t+1,p} = \sum_{\substack{a:(\_,t',\_) \in \text{Arcs} \\ t'=s}} x_{a,t,p} \quad \forall t \in \{1 \dots \text{T}-1\}, \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall s \in \text{V} \quad \textbf{(C1)}$$

$$\sum_{p\,\in\,\mathcal{P}} \sum_{\substack{a:(\_,\_,r) \in \text{Arcs} \\ cult(t')=j}} r * x_{a,t,p} \geq \text{D}_{j,t} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall j \in \mathcal{C}_{s(t)} \quad \textbf{(C2)}$$

$$\sum_{a\,\in\,\text{InitArcs}} x_{a,1,p} \leq 1 \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \textbf{(C3)}$$

$$\sum_{a\,\in\,\text{Arcs}\setminus\text{InitArcs}} x_{a,1,p} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \textbf{(C4)}$$

$$x_{p,t,a} \in \{0,1\} \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall a \in \text{Arcs}$$

où :

- **(C1)** correspond à la contrainte de **conservation du flot**.
- **(C2)** correspond à la contrainte de **satisfaction de la demande**.
- **(C3)** et **(C4)** correspondent à la contrainte de l'**état initial**.

La variable de décision $x_{a,t,p}$ est une **variable binaire** qui vaut 1 si on prend la transition associée à l'arc a, au temps t, au niveau de la parcelle p, 0 sinon.

Question 3

On obtient le **résultat** suivant sur l'instance donnée dans l'énoncé (Tableau 1). On donne le temps de calcul, le nombre de noeuds développés dans l'arbre de recherche et le nombre de parcelles cultivées.

temps de calcul (s)	nombre de noeuds développés	nombre de parcelles cultivées
0,52	0	19

TABLE 1 – Résultats obtenus

Question 4

On reformule le problème avec de **nouvelles variables** $x_r \in \mathbb{N}$ qui représentent le nombre de parcelles pour lesquelles la **rotation** r est utilisée. On suppose, dans ce modèle, que l'on peut énumérer l'ensemble des rotations r possibles sur une parcelle.

$$\min \sum_{r\,\in\,\mathcal{R}} x_r$$

$$\text{s.c} \quad \sum_{r\,\in\,\mathcal{R}} \text{rend}(r,t,j) x_r \geq \text{D}_{j,t} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall j \in \mathcal{C}_{s(t)} \quad \textbf{(C1')}$$

$$x_r \in \mathbb{N} \quad \forall r \in \mathcal{R}$$

où $\text{rend}(r,t,j)$ = rendement au temps t de la culture j du chemin r

Question 5

On cherche une solution au problème dual associé à la relaxation du **PLNE** de la question 4. $y_{j,t}$ sont les variables duales. Après avoir résolu le dual, on obtient une solution $y^*_{j,t}$.
On recherche une nouvelle colonne C_r à rajouter à notre problème qui minimise le coût réduit :

$$1 - \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{j \in \mathcal{C}_{s(t)}} \mathrm{rend}(r,t,j) * y^*_{j,t}$$

Cela revient à rechercher une rotation r* pour laquelle le coût réduit est minimum, donc un plus court chemin dans G dont les valuations sont : $-\mathrm{rend}(r,t,j) * y^*_{j,t}$. Le graphe G est **sans circuit** donc on utilise l'algorithme de **Bellman**. On obtient ainsi une quantité $-\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{j\in\mathcal{C}_{s(t)}} \mathrm{rend}(r*,t,j) * y^*_{j,t}$ (qui correspond à la valeur du plus court chemin r*) qui est minimale. Donc la quantité $1 - \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{j\in\mathcal{C}_{s(t)}} \mathrm{rend}(r*,t,j) * y^*_{j,t}$ est minimale et on choisit la colonne C_{r*} qui est la plus intéressante.