

Modèles à agents

Adrien Carrel

2020

CentraleSupélec - sous la supervision de Damien Challet

- Calibration
- Comportement des investisseurs
 - Exploration
 - Relation prix / inventaire
- Prédiction

- Calibration
-

Existence de deux types de traders :

- noise trader : leur influence sur le marché est semblable à du bruit
- fundamentalist : supposent l'existence d'un prix fondamental et basent leur stratégie dessus

Choix des paramètres (proche des estimations de l'or) :

$b = 0.003$	herding tendency
$\epsilon_1 = 3$	ratio lié à la probabilité de $1 \rightarrow 2$
$\epsilon_2 = 4$	idem $2 \rightarrow 1$
$N = 1000$	grand pour que $z = \frac{n}{N} \approx$ variable continue
$NIT = 1000000$	grand nombre d'itération
$z_0 = 0.5$	prop initiale d'agent dans l'état 1 (noise trader)
choix bruit	loi de η (spin noise / uniform noise)

On définit $\Delta_t = \frac{2}{bN^2}$, $a_1 = b\epsilon_1$ et $a_2 = b\epsilon_2$.

Avec (λ_t) bruit blanc, la proportion d'agent dans l'état 1 au cours du temps vérifie l'équation :

$$z_{t+\Delta_t} = z_t + \Delta_t(a_1 - (a_1 + a_2)z_t) + \sqrt{2b\Delta_t z_t(1 - z_t)}\lambda_t \quad (1)$$

Supposons que la variation du mood des noises traders suit une loi η .

On considèrera deux types de loi pour η :

- spin noise : $\eta \sim \text{Rademacher}$
- uniform noise : $\eta \sim \mathcal{U}([-1, 1])$

Approximation : le mood des noise traders varie plus vite que la proportion des traders dans chaque stratégie.

Ainsi, on obtient le log-rendement en fonction du temps :

$$r_t = r_0 \frac{z(t)}{1 - z(t)} \eta_t \quad (2)$$

Simulation du processus

Simulation ABM (Alfarano et al. 2004) : $\epsilon_1=3$, $\epsilon_2=4$, $b=0.003$, spin noise

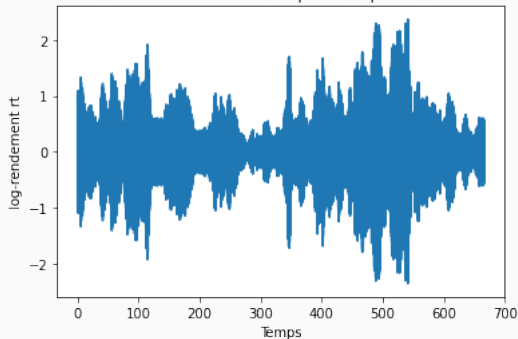


FIGURE 1 – Paramètres : $N=1000$, $NIT=1000000$, $b=0.003$, $\epsilon_1=3$, $\epsilon_2=4$.

Posons $\sigma = |r| = r_0 \frac{z}{1-z}$ dans le cas d'un spin noise.

On a alors la densité de σ :

$$p(\sigma) = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\mathcal{B}(\epsilon_1, \epsilon_2)} \left(\frac{\sigma}{r_0} \right)^{\epsilon_1-1} \left(\frac{r_0}{r_0+\sigma} \right)^{\epsilon_1+\epsilon_2}$$

où la fonction beta est définie par :

$$\forall x, y > 0, \mathcal{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Stratégie 1 : Loi puissance

Asymptotiquement, loi puissance pour un spin noise :

$$p(\sigma) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\epsilon_2+1} \quad (3)$$

Package **powerlaw**

Erreur estimée : ± 1.2 (malgré aide)

Equivalent similaire avec un uniform noise

Stratégie 2 : Méthode des moments

Soient ϵ_1 et ϵ_2 deux paramètres à estimer.

Système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[r] = g_1(\epsilon_1, \epsilon_2) \\ \mathbb{E}[r^2] = g_2(\epsilon_1, \epsilon_2) \end{cases}$$

Or $\frac{\sigma}{r_0} \sim \beta'(\epsilon_1, \epsilon_2)$ (loi beta prime), avec la densité de $\beta'(a, b)$ étant :

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} \left(\frac{1}{1+x} \right)^{a+b} 1_{]0, +\infty[}$$

Stratégie 2 : Méthode des moments

Pour $\epsilon_2 > 3$,

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\sigma] = 1 \\ \mathbb{V}[\sigma] = \nu = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 - 1)}{(\epsilon_2 - 2)\epsilon_1} \\ \mathbb{E}[\sigma^3] = \xi = \frac{(\epsilon_2 - 1)^2(\epsilon_1 + 1)(\epsilon_1 + 2)}{\epsilon_1^2(\epsilon_2 - 2)(\epsilon_2 - 3)} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \epsilon_1(\epsilon_2\nu - 2\nu - 1) = \epsilon_2 - 1 \\ \xi\epsilon_1^2(\epsilon_2^2 - 5\epsilon_2 + 6) = (\epsilon_2^2 - 2\epsilon_2 + 1)(\epsilon_1^2 + 3\epsilon_1 + 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = \frac{2(-\nu^2 - 2\nu + \xi - 1)}{\nu^2 + \nu\xi + 2\nu - \xi + 1} \\ \epsilon_2 = \frac{4\nu^2 + 7\nu - 3\xi + 3}{2\nu^2 + 3\nu - \xi + 1} \end{cases}$$

Stratégie 2 : Méthode des moments

Écart moyen (norme 2) entre estimations et paramètres : 3.36286356734685

Norme 1 (epsilon1) : 2.119798180512666

Norme 1 (epsilon2) : 2.3819344176966233

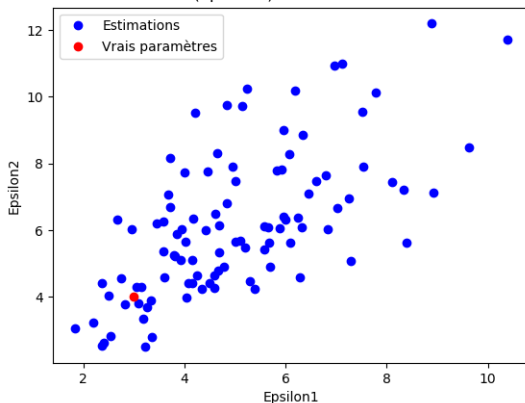


FIGURE 2 – 100 calibrations, $\epsilon_1 = 3$, $\hat{\epsilon}_1 \approx 5.52$, $\epsilon_2 = 4$, $\hat{\epsilon}_2 \approx 6.84$

Stratégie 3 : Méthode du mode-moyenne

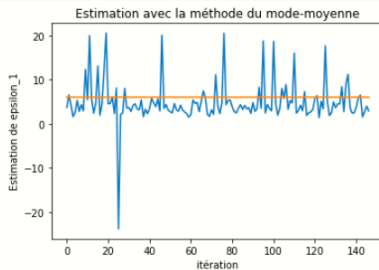
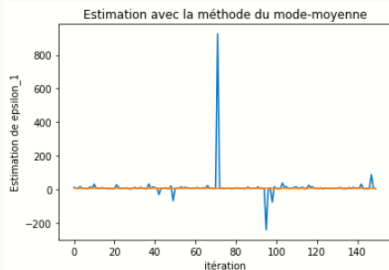
On sait que $\frac{\sigma}{r_0} \sim \beta'(\epsilon_1, \epsilon_2)$ On a donc :

- $\mathbb{E}[\frac{\sigma}{r_0}] = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 - 1}$
- Le mode de $\frac{\sigma}{r_0}$ s'écrit : $\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_2 + 1}$

De nouveau, on a un système de deux équations à deux inconnues.

Le calcul du mode se fait aux valeurs de σ à 10^{-6} près

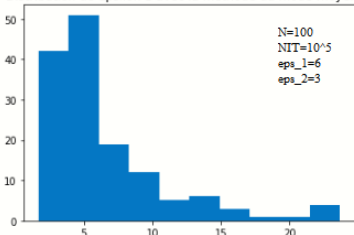
Données des 150 calibrations - Mode-Moyenne



Distribution après 150 calibrations - Mode-Moyenne - Exemple

1

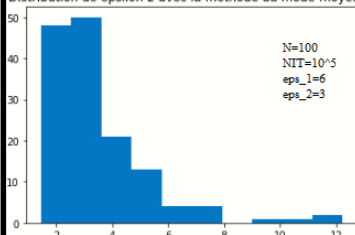
Distribution de epsilon 1 avec la méthode du mode-moyenne



mode de epsilon 1 : 3.7037955518896304

moyenne de epsilon 1 : 6.5255210356023

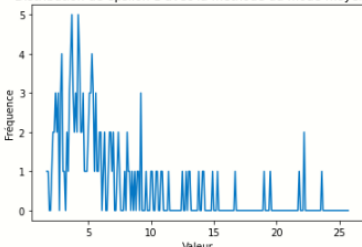
Distribution de epsilon 2 avec la méthode du mode-moyenne



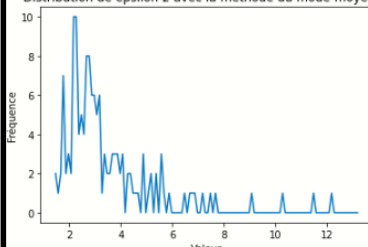
mode de epsilon 2 : 2.1711922468034777

moyenne de epsilon 2 : 3.504342171221159

Distribution de epsilon 1 avec la méthode du mode-moyenne



Distribution de epsilon 2 avec la méthode du mode-moyenne



Stratégie 4 : Maximum de vraisemblance

La log-vraisemblance du signal σ normalisé est donnée par :

- $\log(\mathcal{L}) = \mathcal{F}(\epsilon_1, \epsilon_2, N) + \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2, N, \sigma)$
- Avec : $\mathcal{F} = -N \log(\mathcal{B}(\epsilon_1, \epsilon_2)) + N \epsilon_2 \log(\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_1})$
- et $\mathcal{G} = (\epsilon_1 - 1) \sum_{i=0}^{N-1} \log(\sigma_i) - (\epsilon_2 + \epsilon_1) \log(\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_1} + \sigma_i)$

Nous avons à la fois tenté de trouver le maximum de $\log(\mathcal{L})$ directement en 2D puis à ϵ_1 ou ϵ_2 fixé

Stratégie 4 : Maximum de vraisemblance

- La résolution par descente de gradient s'est avérée peu fructueuse.
- À ϵ_2 fixé, on obtient une estimation cohérente de ϵ_1
- Nous avons également une bonne estimation pour ϵ_2 , mais nous avons choisi d'utiliser une autre méthode.

Stratégie 4 : Maximum de vraisemblance

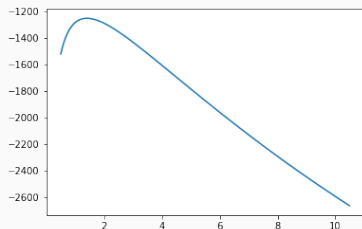


FIGURE 3 – $\text{Log}(\mathcal{L})$ à ϵ_2 fixé.

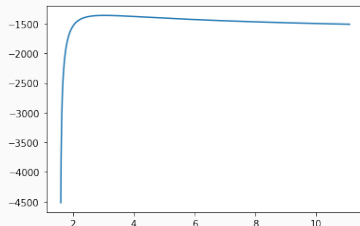


FIGURE 4 – $\text{Log}(\mathcal{L})$ à ϵ_1 fixé.

Selon le modèle :

$$\rho(h) \propto e^{-b(\epsilon_1 + \epsilon_2)\Delta t h}$$

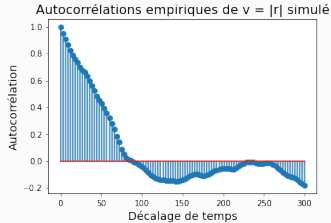


FIGURE 5 – Autocorrélations de $|r|$

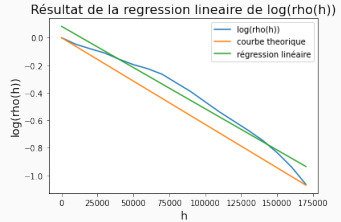


FIGURE 6 – Régression linéaire pour retrouver b

Résultats donnés par quelques stratégies

Sur des rendements réels :

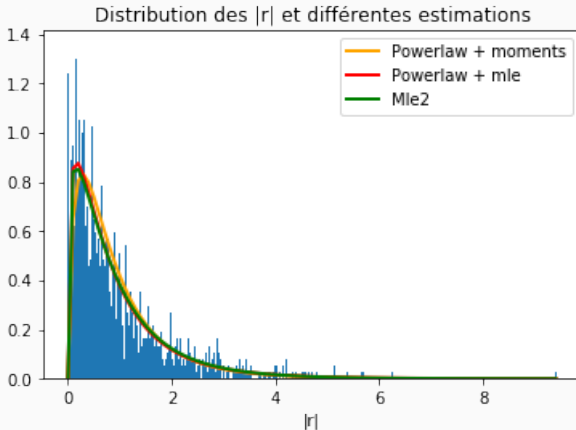


FIGURE 7 – Distributions réelles et théoriques (selon le modèle d'Alfarano des rendements)

- Comportement des investisseurs
-

Choix de la compagnie : Telefonica S.A. (NYSE : TEF)



Plus d'investisseurs actifs, plus de transactions \implies meilleure calibration ?

Hypothèse : Au plus une transaction par jour et par agent

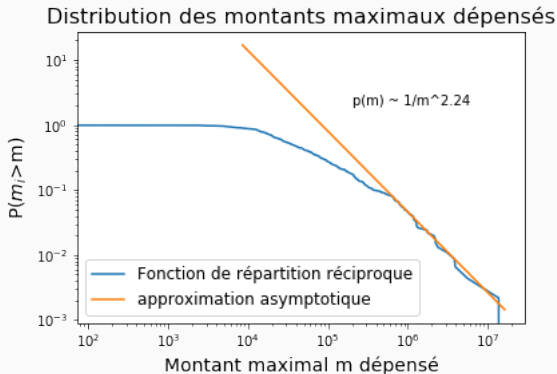
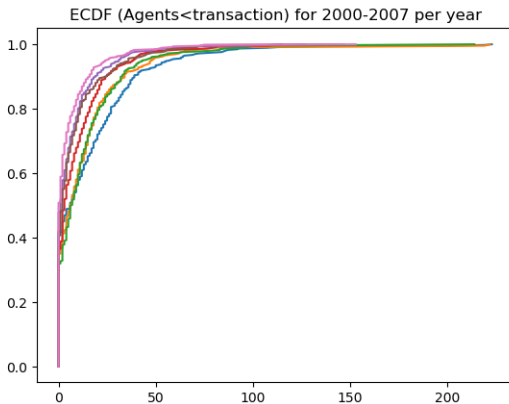


FIGURE 8 – Distribution des m_i

m_i : Montant journalier maximal investi sur la période par l'investisseur i

Exploration : Nombre de transactions par agent sur une année

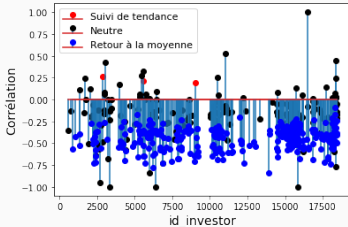


On reconnaît une loi de Pareto.

Package powerlaw : $\alpha = 2.9$

Classification des actionnaires

Corrélations achats d'un investisseur et rendement du jour



- $\rho > 2\sigma$: firms whose inventory variation is **positively significantly correlated with returns (red/trending)**
- $\rho < -2\sigma$: firms whose inventory variation is **negatively significantly correlated with returns (green/reversing)**
- Uncategorized (dark)

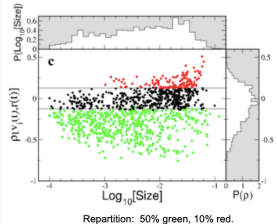


FIGURE 9 – Nuage de points $\rho[v_i(t), r(t)]$ (littérature)

$$\text{Neutre} \iff |\text{Cor}(X, r)| < \frac{2}{\sqrt{N}}$$

X : changement d'inventaire quotidien de l'investisseur,

N : nombre de jours d'activité

Changements de stratégies

Tableau de probas conditionnelles d'une année à l'autre (en %):

où: R= reversing, T= trending, U= uncategorized, E= exiting.

Loi de \ Sachant	R	T	U	E
R	71	2	16	11
T	3	44	35	18
U	19	7	62	12

FIGURE 10 – Tables des changements de stratégie pour l'étude de Lillo et al.

	Finalement Suivi (%)	Finalement Neutre (%)	Finalement Retour (%)
Initialement Suivi	0	0.7	0
Initialement Neutre	0.2	37.3	9.8
Initialement Retour	0.2	38	13.8

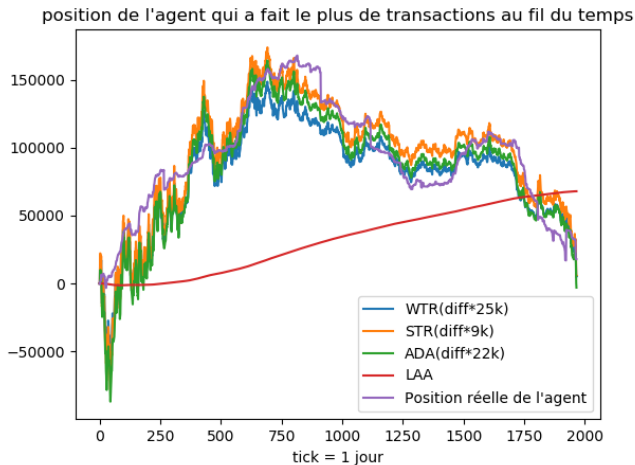
FIGURE 11 – Table des changements de stratégie des actionnaires TEF

L'idée est de pouvoir identifier la stratégie de l'agent, donc choisir le modèle qui décrit au mieux son comportement.

Hypothèses :

- Stratégie ADA ou WTR ou STR ou LAA
- La variation de l'inventaire est proportionnelle à la différence de prix $v_{TEF}(t) = \alpha(p_t - p_{t-1})$:
- Connaissant p_{t-1} , l'agent simule p_t avec l'une des stratégies ci-dessus et agit en conséquence
- Inventaire vide au début

Stratégie d'Anufriev : résultats



- Prédiction
-

Prédiction par la calibration du modèle d'Alfarano

Données : rendements de TEF

Estimation :

- Première estimation : **powerlaw** pour ϵ_2 et **MV** (1 dimension) pour ϵ_1
- Deuxième estimation : **MV** à 2 dimensions à partir de ces valeurs

Estimation de b par régression linéaire sur $\log(\text{Cor}(h))$.

Etude du résidu λ (du modèle d'Alfarano, par inversion des formules).

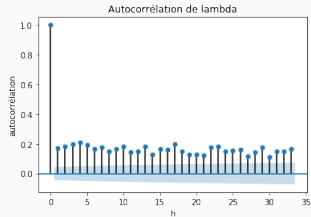
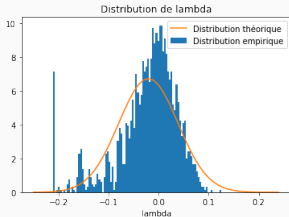


FIGURE 12 – Distribution des $\lambda(t)$ FIGURE 13 – Autocorrélation de λ

Prédiction par la calibration du modèle d'Alfarano (suite)

Prédiction de z puis de $v = |r|$.

$$\text{Avec } f_h(X) = \frac{\mathbb{E}(|X_{t+h} - \hat{X}_t(h)|)}{\mathbb{E}(|X_{t+h} - X_t|)},$$

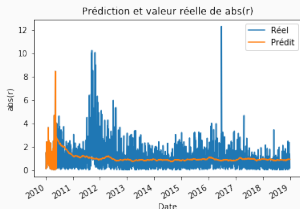


FIGURE 14 – Prédiction de v

h	$f_h(z)$	$f_h(v)$
1	0.9986	0.9974
2	0.997	0.9955
3	0.9954	0.9934
4	0.9943	0.9922

La stratégie de bruteforce : extension de la stratégie d'Anufriev

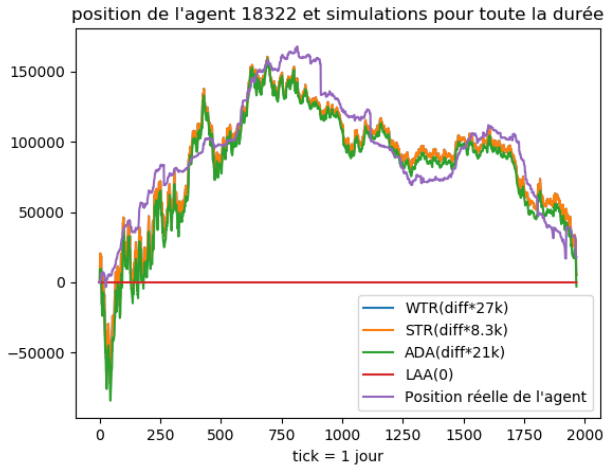
Il s'agit de :

- Choisir une période satisfaisant un compromis entre le nombre de transaction faites et la durée durant laquelle on suppose que les agents ne changent pas de stratégie
- Identifier les agents qui ont fait le plus de transactions pour avoir un maximum de données
- Identifier leurs stratégies
- Prédire le prix, la volatilité, la variation des stocks...

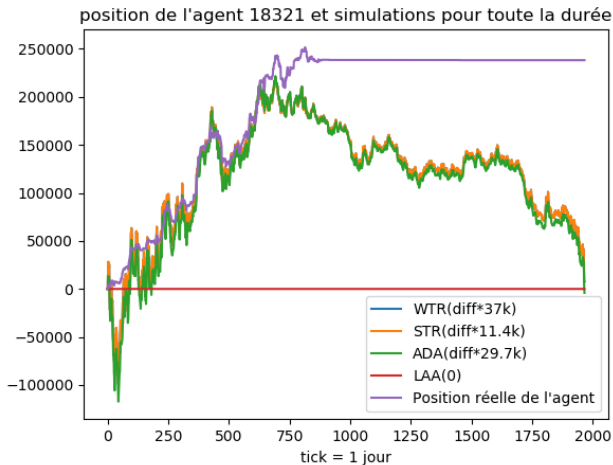
Bruteforce : choix des données

- Période entre 2000 et 2002, correspondant à 421 transactions pour l'agent qui a fait le plus de transactions (18321)
- Sélection des 10 agents qui ont fait le plus de transactions
- On varie α de 0 à 200000 pour chaque stratégie et on choisit la stratégie minimisant la somme des carrés des résidus $\sum_{k=0}^N (s_i - \hat{s})^2$

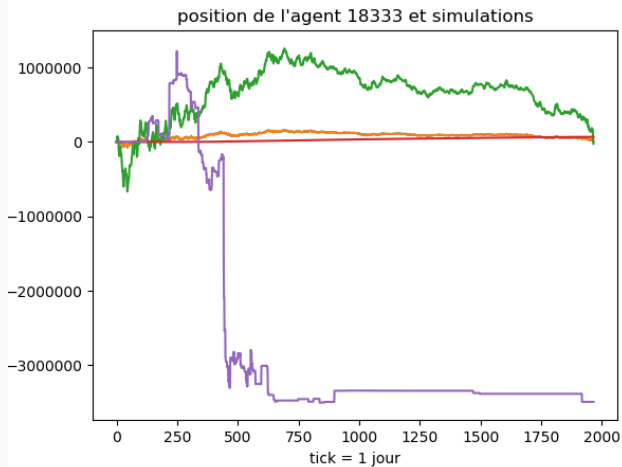
Bruteforce : Résultats



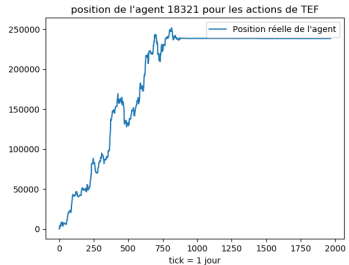
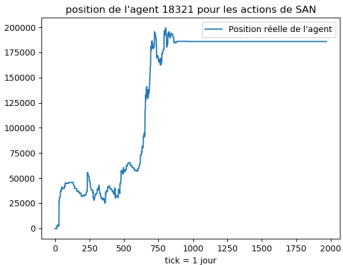
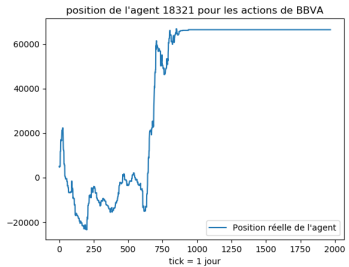
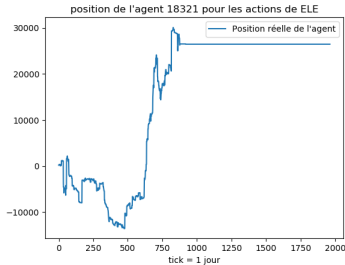
Pas très glorieux



Vraiment pas glorieux



D'autres données?



Prédictions de la stratégie des investisseurs

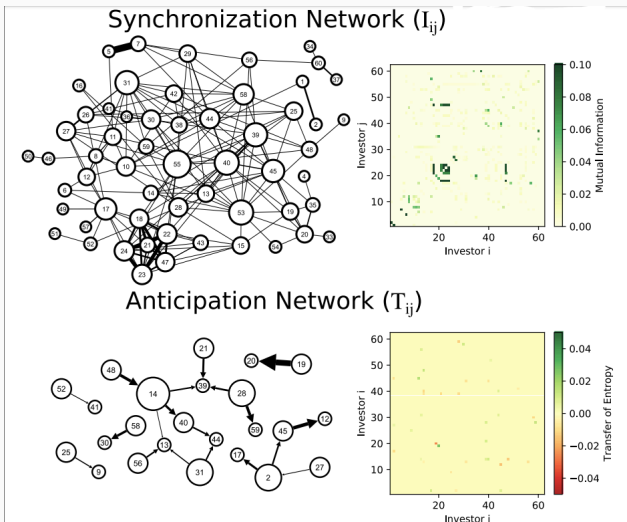


FIGURE 15 – Réseaux de synchronisation et de prévision (Littérature)

Hypothèse : Investisseurs = agents \implies modèle Alfarano vérifié

- Algorithmes de calibration sur données réelles : obtention de paramètres $(\epsilon_{1,2}, b, N, \dots)$
- Plusieurs simulations :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{r_{t+1} \geq r_t} [r_{t+1} - r_t] = \Delta r_+ \\ \mathbb{E}_{r_{t+1} < r_t} [r_{t+1} - r_t] = \Delta r_- \end{cases}$$

- Entrainement d'une IA sur simulations (beaucoup de données)
- Prédiction sur données réelles : $r_{t+1}^{\hat{}} = r_t + \Delta r_{\pm}$

Beaucoup d'investisseurs suivent des tendances (Lillo & al)

Entrée : rendements des k derniers jours (ex : $k = 7$)

Sortie : -1 ou 1 (rendement diminue ou augmente)

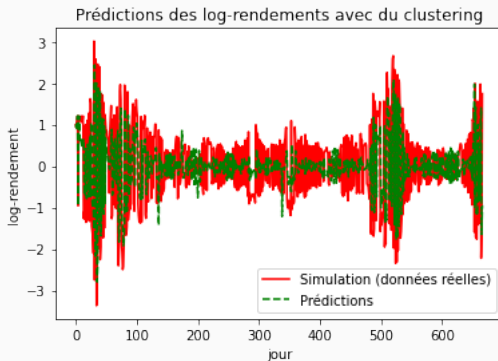


FIGURE 16 – Paramètres : $N=1000$, $NIT=1000000$, $b=0.003$, $\epsilon_1=3$, $\epsilon_2=4$.

Précision : 73% sur simulation

Ecart moyen : -0.004, Ecart absolu moyen : 0.795

Modèle séquentiel, couches utilisées :

- Dropout (overfitting)
- LSTM Long Short-Term Memory layer
- Dense
- Couche finale : Dense(1) ou Softmax(2)

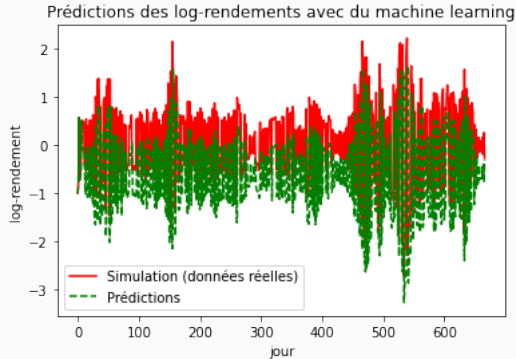


FIGURE 17 – Couche finale : Dense(1)

"Précision" : 25% sur simulation, loss : mean square

Ecart moyen : -0.566, Ecart absolu moyen : 1.022

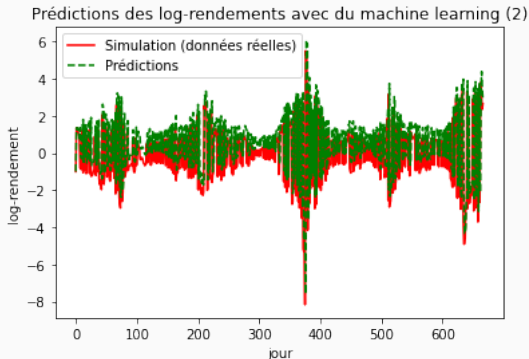


FIGURE 18 – Couche finale : Softmax(2)

"Précision" : 49% sur simulation, loss : sparse categorical crossentropy

Ecart moyen : 0.565, Ecart absolu moyen : 1.518

Clustering plus convaincant

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 287 : \text{nombre d'investisseurs actifs pour TEF} \\ b = 0.00068 \\ \epsilon_1 = 1.3 \\ \epsilon_2 = 5.87 \\ z_0 = 0.5 / \text{valeur empirique } 0.011 \text{ mais diverge} \\ \text{choix bruit} = \text{"spin noise"} \end{array} \right.$$

Application aux données de l'action TEF

Prédictions des log-rendements avec du clustering. Précision : 65.2892561983471%

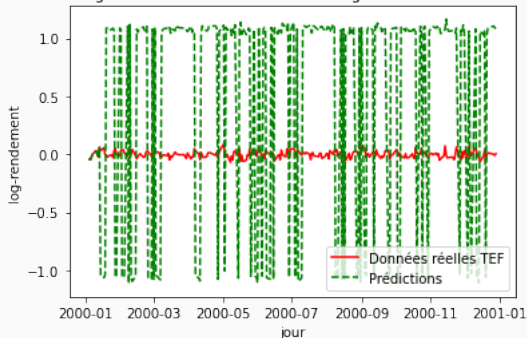


FIGURE 19 – Ecart moyen : 0.508, Ecart absolu moyen : 1.048

Bonne précision mais valeurs de Δr_{\pm} trop grandes

Idée : Calculer Δr_{\pm} sur l'année 2000 et prédire le rendement sur l'année 2001

Application aux données de l'action TEF

Prédictions des log-rendements avec du clustering. Précision : 59.917355371900825%

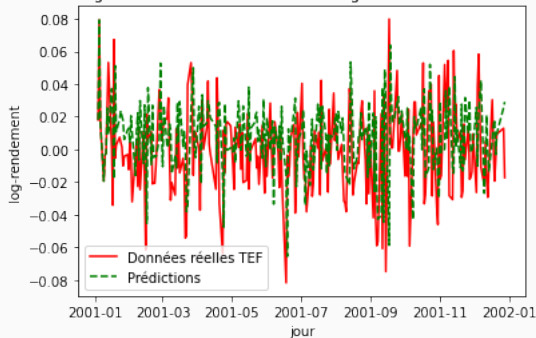


FIGURE 20 – Ecart moyen (rendements) : 0.008, Ecart absolu moyen (rendements) : 0.028

Application aux données de l'action TEF

Prédictions du prix avec du clustering. Précision : 59.917355371900825%

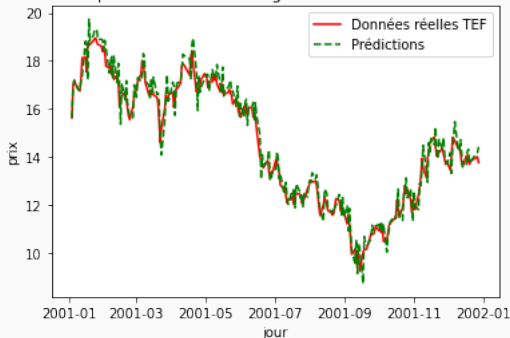


FIGURE 21 – Ecart moyen (prix) : -0.131, Ecart absolu moyen (prix) : 0.397

Merci <3



V. Bos and S. Mauw.

A \LaTeX macro package for Message Sequence Charts—Maintenance document—Describing version , June 2002.

Included in MSC macro package distribution.



V. Bos and S. Mauw.

A \LaTeX macro package for Message Sequence Charts—Reference Manual—Describing version , June 2002.

Included in MSC macro package distribution.



V. Bos and S. Mauw.

A \LaTeX macro package for Message Sequence Charts—User Manual—Describing version , June 2002.

Included in MSC macro package distribution.



M. Goossens, S. Rahtz, and F. Mittelbach.

The \LaTeX Graphics Companion.

Addison-Wesley, 1997.



ITU-TS.

ITU-TS Recommendation Z.120 : Message Sequence Chart (MSC).

Geneva, 1997.



L. Lamport.

TeX—A Document Preparation System—User's Guide and Reference Manual.

Adison-Wesley, 2nd edition, 1994.

Updated for $\text{\TeX}2_{\epsilon}$.



E. Rudolph, P.Graubmann, and J. Grabowski.

Tutorial on message sequence charts (MSC'96).

In *FORTE*, 1996.

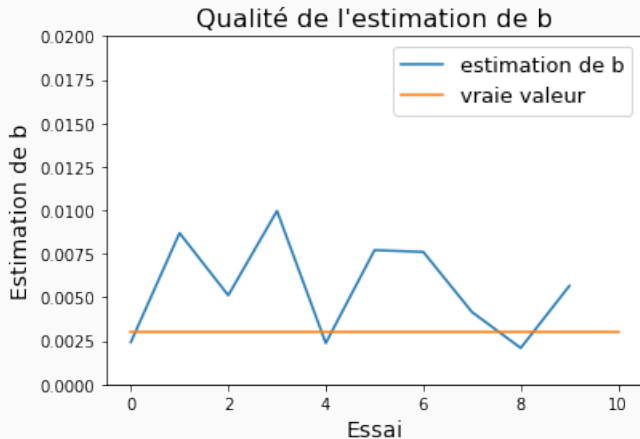
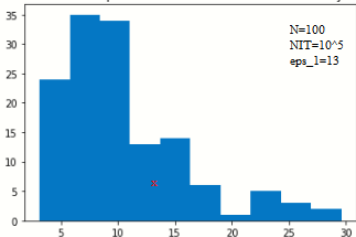


FIGURE 22 – Estimations de b

Distribution après 150 calibrations - Mode-Moyenne - Exemple

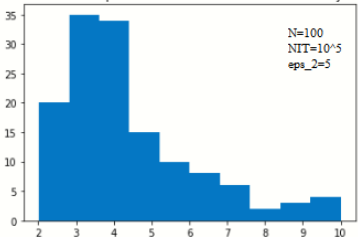
2

Distribution de epsilon 1 avec la méthode du mode-moyenne



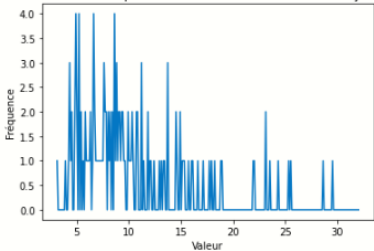
mode de epsilon 1 : 4.937646313093235
moyenne de epsilon 1 : 10.44257067501294

Distribution de epsilon 2 avec la méthode du mode-moyenne



mode de epsilon 2 : 3.7188480625522313
moyenne de epsilon 2 : 4.35390823552466

Distribution de epsilon 1 avec la méthode du mode-moyenne



Distribution de epsilon 2 avec la méthode du mode-moyenne

