

Transport optimal appliqué l'infographie

Adrien Carrel

Le transport optimal est un outil d'optimisation faisant intervenir la notion de distance. Appliqué l'infographie et dans le cadre de cet article, il consiste à extirper le profil de couleurs d'une image cible et à le transporter sur une image source. On change ainsi les couleurs d'une image en s'inspirant des couleurs d'une autre.

Ce rapport a pour objectif la présentation de ce procédé, les algorithmes intervenants et leur complexité ainsi que l'impact de la distance choisie sur le rendu final. On s'interrogera sur les limitations actuelles de cette application du transport optimal en conclusion.

I. DÉFINITIONS, PROPRIÉTÉS

La première formulation du transport optimal nous vient de Monge. L'idée est simple : transporter n tas de sables jusqu'à n trous en minimisant l'effort à fournir i.e. la somme des distances. On associe pour cela à chaque tas un trou correspondant.

La seconde formulation, ´ecrite par Kantorovitch, permet d'associer une masse positive à chaque point de la distribution initiale ainsi qu'une "masse"   chaque point de la distribution finale.

A. Formulation de Monge

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^3$ et $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une distance.

Avec $C \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket, c_{i,j} = d(x_i, y_j)$, on cherche :

$$\min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{\sigma(i), i} \quad (1)$$

(existe car S_n de cardinal fini)

B. Formulation de Kantorovitch

Soient E un espace métrique et $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une distance.

On considère $x = ((x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n)) \in (E \times \mathbb{R}_+^*)^n$ et $y = ((y_1, b_1), \dots, (y_m, b_m)) \in (E \times \mathbb{R}_+^*)^m$ des points distincts de E munis de masses positives, où à $n \geq 1$ et $m \geq 1$.

Matrice de coût :

$C = (c_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket}$ telle que $\forall(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket, C_{i,j} = d(x_i, y_j)$.

Matrice de flux (ou de couplage) :

On note $\mathbb{F}(x, y)$ l'ensemble des matrices de flux, i.e l'ensemble des matrices $F = (f_{i,j}) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket$ telles que :

- $\forall(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket, f_{i,j} \geq 0$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{i,j} = \min(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{j=1}^m b_j)$
- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^m f_{i,j} \leq a_i$
- $\forall j \in \llbracket 1; m \rrbracket, \sum_{i=1}^n f_{i,j} \leq b_j$

Le transport pour la matrice de flux choisie est défini par :

$$WORK(F, x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{i,j} c_{i,j} \quad (2)$$

Formulation de Kantorovitch | Earth Mover's Distance |
Métrique de Wasserstein :

$$EMD(x, y) = \frac{\min_{F \in \mathbb{F}(x, y)} WORK(F, x, y)}{\min(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{j=1}^m b_j)}$$

- En définissant $\langle A|B \rangle = Tr(\langle {}^t AB)$, on a $WORK(F, x, y) = Tr(\langle {}^t FC)$.
Ainsi, il s'agit d'un **problème d'optimisation linéaire**.
- $\mathbb{F}(x, y)$ est un espace convexe, l'application $F \mapsto WORK(F, x, y)$ est convexe donc on a l'equivalence minimum global \Leftrightarrow minimum local.
Le problème est un **problème d'optimisation convexe** ce qui permet l'utilisation d'un algorithme rapide.
- On montre par compacité que le minimum est bien atteint.
- EMD est une distance si les distributions sont de masses égales.
- Si $n = m$ (les distributions sont de tailles uniformes) et si les distributions ont une répartition de masse uniforme, **les problèmes de Monge et de Kantorovitch sont équivalents**.

Montrons ce dernier point :

C. Equivalence des problèmes

- Le problème de Kantorovitch revient à considérer les matrices de flux comme étant les matrices bistrochastiques

(espace convexe) :

$$B_n = \left\{ P \in M_n(\mathbb{R}^+) / \sum_j p_{i,j} = 1, \sum_i p_{i,j} = 1 \right\}$$

- Le problème de Monge révient à se restreindre aux matrices de permutation : $P_n = B_n \cap \{0; 1\}^{n \times n}$. On dit ainsi que le problème de Kantorovitch est une relaxation convexe du problème de Monge.

Points extrémaux :

On définit les points extrémaux sur un ensemble C convexe par :

$$\text{Ext}(C) = \left\{ x \in C / \forall (y, z) \in C^2, x = \frac{y+z}{2} \Rightarrow x = y = z \right\}$$

Lemme :

Soit C un ensemble fermé, borné, convexe de E et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire. Soit $u \in E$, il existe $x^* \in \text{Ext}(C)$ tel que x^* minimise $f : x \rightarrow \langle x | u \rangle$.

Théorème de Birkhoff-von Neumann :

$$\text{Ext}(B_n) = P_n$$

- ⇒ Ainsi, le minimum sur l'ensemble des matrices bistrochastiques est atteint sur une matrice de permutation : les problèmes équivalents.

D. Application à l'infographie

On considère deux images :



FIGURE 1. Image source.



FIGURE 2. Image cible.

On souhaite modifier les couleurs de l'image source en s'inspirant des couleurs de l'image cible sans en modifier le contenu. L'idée sera donc d'associer à chaque couleur présente dans l'image source une couleur de l'image cible.

Avec un entier naturel n fixé (ex : $n = 700$), on choisit aléatoirement n pixels de l'image source que l'on stocke dans une liste X_s , de même pour l'image cible avec une liste X_t . L'espace métrique est $[0, 1]^3$ et on attribue la masse $\frac{1}{n}$ à chaque pixel.

Afin d'obtenir un couplage optimal entre les couleurs, on cherchera donc à minimiser le transport entre ces deux distributions de pixels. On modifie ensuite à partir de ce couplage l'image source.

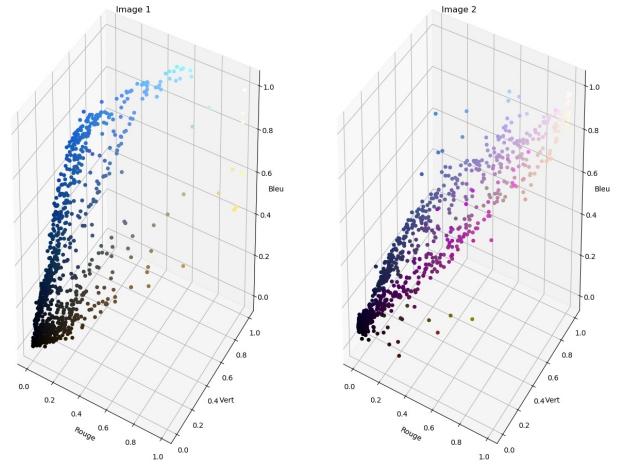


FIGURE 3. Distribution de couleur pour chaque image.



FIGURE 4. Rendu obtenu à partir des deux images précédentes.

II. ALGORITHMES

A. Algorithmes principaux

- Pour obtenir le couplage entre les n pixels minimisant le transport, on utilise l'algorithme Hongrois de Knuth.
- Quant à la modification de l'image source, je propose l'algorithme suivant donc voici le pseudo-code :

X1, X2 (deux images), Xs, Xt (échantillons)

Pour chaque pixel x de X1 :

Attribue un pixel y dans Xs le plus proche.

y est couplé avec z dans Xt.

Nouveau pixel = x-y+z

B. Algorithme secondaire

Afin d'obtenir un résultat plus naturel, il paraît intéressant de tenter d'évaluer la distance entre deux couleurs

dans un espace colorimétrique. La distance induite dans cette espace sera alors appelée distance de MacAdam (Ellipses de MacAdam).

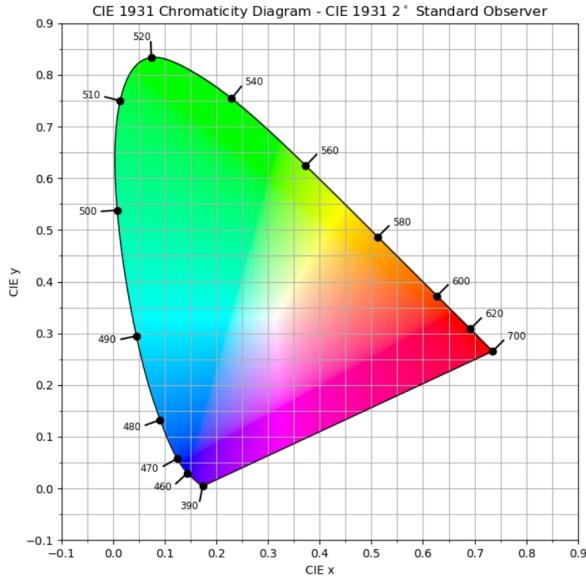


FIGURE 5. Espace colorimétrique CIE 1931 projeté sur le plan Oxy.

III. ANALYSE DES RÉSULTATS ET DE LA COMPLEXITÉ

A. Complexité

Théoriquement, en notant n =pixels échantillon, m_1 =pixels image 1, on a pour l'**algorithme Hongrois (version de Munkres)** une complexité en $O(n^4)$ et pour la **modification de l'image source** une complexité en $O(n^2 + nm_1)$.

On en déduit une **compléxité en $O(nm_1 + n^4)$** [*].

En pratique, en fixant pour $n = 20$, $m_1 = 200 \times 134$ un temps de calcul moyen de $2.04s$, on obtient le tableau théorique avec la formule [*]. Le tableau expérimental s'obtient en effectuant d'autres mesures.

Temps réel :

$n m_1$	200×134	1000×669
20	2.04	41.51
40	6.77	79.53

Temps théorique :

$n m_1$	200×134	1000×669
20	2.04	52.96
40	36.72	134.49

B. Résultats

Aucune différence notable entre la distance euclidienne et la distance de MacAdam.



FIGURE 6. Image source.



FIGURE 7. Image cible.



FIGURE 8. Distance Euclidienne.



FIGURE 9. Distance de MacAdam.

Image sombre sur une image claire : apparition de tâche ce qui compromet le rendu.



FIGURE 10. Image source.



FIGURE 11. Image cible.



FIGURE 12. Rendu classique.



FIGURE 13. Rendu avec source/cible inversées.

Essai d'autres distances : présence de bruit compromettant le rendu.



FIGURE 14. Rendu obtenu à partir des deux images précédentes.

IV. CONCLUSION

L’application du transport optimal à l’infographie -et plus particulièrement ici en colorimétrie- peut se résumer

à une comparaison Avantages/Inconvénients ci-dessous :

Avantages :

- Qualité du rendu dans certains cas
- Automatisation du procédé

Inconvénients :

- Complexité élevée
- Image claire sur une image sombre : mauvais rendu
- Applications limitées, le procédé n’agissant que sur les couleurs

¹ C. Scott, “Finding color and shape patterns in images,” (1999).

² G. Peyré (Institut Henri-Poincaré (IHP), 2018).

³ G. P. S. Ferradans, N. Papadakis, SIAM Journal on Imaging Sciences **7**, 1853 (2014).

⁴ R. F. M. Perrot, N. Courty, Neural Information Processing Systems (NIPS) (2016).

⁵ G. Peyré, “Convex optimization,” Note de cours.

⁶ L. Bruce, “Rgb/xyz matrices,” Disponible sur <http://www.brucelindbloom.com/>, consultation : Nov 2018.