BOSCO-VIZZAVONA Noan

CORDONNIER Adrien

KOYTCHA Mustapha

TICHTCHENKO Ivan

**PROJET – Analyse de la dispersion d’un polluant et application à la modélisation fluviale**



*A3PSB Professeurs : MM. BLETZACKER L. et PECHARD C. Juin 2023*

Table des matières

[**Introduction** 3](#_Toc136798361)

[**I. Variation de la concentration de polluant dans le fleuve** 5](#_Toc136798362)

[I.1 – Phénomène de convection en 5](#_Toc136798363)

[I.2 – Phénomène de convection-diffusion en 9](#_Toc136798364)

[**II. Variation de la concentration de polluant dans l’océan** 14](#_Toc136798365)

[II.1 – Approximation de l’équation de Laplace 14](#_Toc136798366)

[II.2 – Phénomène de convection-diffusion en 18](#_Toc136798367)

[**Conclusion** 22](#_Toc136798368)

**Introduction**

Depuis longtemps, la pollution de l'eau dans les écoulements à surface libre est un sujet d'importance qui intéresse de nombreux chercheurs scientifiques et l'humanité en général. Par conséquent, les recherches menées sur la qualité de l'eau et ses ressources sont de plus en plus nombreuses. Elles répondent à une demande exprimée par les spécialistes de la protection de l'environnement et de l'humanité contre les maladies. Ces chercheurs s'intéressent à la qualité de l'eau ainsi qu'à sa quantité. En réalité, la qualité de l'eau influe sur son utilisation par les êtres humains, mais l'inverse est également vrai. Lorsque nous utilisons de l'eau, nous altérons sa qualité plutôt que sa quantité. Ce cercle vicieux indique que la pratique consistant à rejeter depuis toujours les eaux usées non traitées et les déchets chimiques directement dans les fleuves, les rivières et les mers en vue de leur assimilation éventuelle dans l'environnement n'est plus acceptable afin de prévenir la dégradation de l'environnement.

Les processus naturels de décomposition dans les masses d'eau ne suffisent plus à éliminer ces apports de polluants. La technologie peut être utile dans de nombreux cas pour réduire ou éliminer les substances nuisibles à l'environnement. Mais que se passe-t-il lorsque les contaminants ne sont pas éliminés, même avec les méthodes de traitement de l'eau les plus modernes ? Ils peuvent être présents en quantité minime, mais en raison de leur persistance, ils peuvent s'accumuler et atteindre des concentrations très nocives. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule façon de protéger les générations futures et l'écosystème tout entier : empêcher la présence de produits chimiques dans le réseau hydrographique.

Dans cette perspective, les modèles numériques de qualité des eaux reconstituent différents mécanismes présents dans le milieu et fournissent toutes les informations nécessaires. L'importance du champ de vitesse dans le transport de la pollution rend nécessaire sa représentation par un modèle mathématique très précis qui prend en compte les phénomènes physiques tels que la diffusion, l'advection, la dispersion, l'adsorption, la désorption, la précipitation, la sédimentation, l'évaporation, etc., qui dépendent à la fois de la nature de la matière rejetée et des caractéristiques hydrodynamiques intrinsèques au cours d'eau. En ce qui concerne les substances polluantes principalement régies par le mélange du fluide, il est essentiel de tenir compte de la turbulence.

Dans ce projet, il s’agit d’étudier l’évolution d’un polluant d’abord déversé dans un fleuve, puis dans l’océan lorsque le fleuve s’y jette. Le fleuve et l’océan sont deux milieux soumis à des courants et on cherche à en observer les effets sur la dispersion du polluant. On se propose donc de modéliser l’évolution de la concentration du polluant au temps et à la position , par une équation de convection-diffusion :

où est la vitesse de convection du polluant, représentant la vitesse du courant et qui peut donc dépendre de la position et du temps, est son coefficient de diffusion, est la source et est la concentration initiale.

Une image contenant eau, capture d’écran, texte, montagne

Description générée automatiquement

Ce projet est divisé en deux parties. La première partie aborde le cas unidimensionnel () du problème d'écoulement, où le polluant se déplace dans un fleuve modélisé en une dimension (). La deuxième partie est consacrée au cas bidimensionnel (), où le polluant est rejeté à l'embouchure du fleuve dans un océan modélisé comme un milieu en deux dimensions (). Pour une mise en œuvre correcte de la résolution numérique du problème continu, nous procédons en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous nous concentrons sur la discrétisation de l'opérateur Laplacien, en tenant compte des conditions mixtes de Dirichlet/Neumann (non) homogènes. Ensuite, nous examinons une discrétisation par différences finies du terme convectif-advectif, et enfin nous nous penchons sur les aspects de la discrétisation dans le temps.

**Il est conseillé d’ouvrir le document Word à côté du PDF pour avoir les animations GIF qui illustrent l’évolution pour chaque schéma. Pour un meilleur confort appuyez sur l’icône « focus » en bas à droite de l’écran.**

**Bonne lecture !!**

****

**I. Variation de la concentration de polluant dans le fleuve**

Il s'agit ici de simuler l'évolution d'un polluant déversé dans un cours d'eau en utilisant des schémas aux différences finies. Afin d'observer le comportement de différents schémas, nous examinons d'abord l'équation de convection pour laquelle nous pouvons facilement calculer des solutions explicites.

## I.1 – Phénomène de convection en

Afin de mieux comprendre ce phénomène, nous simplifions le problème en négligeant les termes de diffusion () et de source (). De plus, nous considérons une vitesse constante et positive, . Ainsi, le problème modèle de convection s'écrit de la manière suivante :

Supposons maintenant que la condition initiale soit de classe sur . Par conséquent, nous pouvons résoudre explicitement l'équation en utilisant la méthode des caractéristiques. En effet, nous cherchons une fonction telle que u soit constante le long des courbes caractéristiques . Pour une solution , nous posons alors .

1. *Calculons la dérivée de et déduisons la forme des courbes caractéristiques. Que pouvons-nous en déduire quant à l'existence et l'unicité des solutions du problème modèle ?*

est constant le long des courbes caractéristiques.

D’où :

Par identification, on obtient :

Où une constante réelle.

On en déduit donc que les courbes caractéristiques sont des droites, d’ordonnée à l’origine . Alors on sait que l’on a .

On a alors en particulier . Donc, on en déduit que .

Comme les courbes caractéristiques sont de la forme . On peut écrire que :

Or, étant solution du système le long des courbes caractéristiques, on en déduit que la solution est de la forme :

Comme est solution du système, on en déduit que est l’unique solution du système. Il est aussi nécessaire de montrer que cette solution existe bien.

On a :

On a bien :

Donc notre solution est unique et existe bien.

Dans la suite, nous allons pouvoir comparer les solutions exactes avec les résolutions numériques obtenues par la méthode des différences finies. Pour résoudre numériquement ce problème continu, nous restreignons l'intervalle d'espace à et l'intervalle de temps à . Nous utilisons une condition initiale à support dans et notons :

* : le nombre de points intérieurs de l'espace
* : le pas de discrétisation en temps
* : le pas de discrétisation en espace
* et : les coordonnées des points de la discrétisation
* : l'approximation de la fonction
* : le vecteur approximant . On impose dans un premier temps les conditions au bord de Dirichlet pour tout .

Dans les questions suivantes, on pourra accomplir les applications numériques avec et la condition initiale :

*2. Écrivez le schéma explicite centré pour le problème continu et vérifiez que est donné par la relation de récurrence :*

Pour le problème continue le schéma explicite centré est le suivant :

Comme est une matrice tridiagonale, et qu’on a les coefficients sur chacune de ses diagonales d’après l’expression précédente et par identification on obtient finalement la relation de récurrence :

Avec

*Testez ce schéma numérique avec les données numériques et tracez une animation de en fonction du temps . Commentez le phénomène observé.*

Dans la suite nous prendrons les valeurs suivantes pour la modélisation numérique :

|  |  |
| --- | --- |
|  | La méthode Explicite centrée est plutôt stable même si ce n’est pas un schéma réputé pour sa stabilité.  Au bout de 2000 itérations la simulation se termine, cela est normal car on à avec un pas de temps d’où .  De plus, le sommet de la courbe bleue est à , et avance jusqu’à car on fait l’expérience sur . |

On a le schéma explicite centré suivant :

*3. Écrivez le schéma de Crank-Nicolson et vérifiez que est donné par :*

*Montrez que ce schéma est inconditionnellement stable en norme et précisez son ordre.*

D’après le cours le schéma de Crank-Nicolson s’écrit :

Comme est une matrice tridiagonale, et qu’on a les coefficients sur chacune de ses diagonales d’après l’expression précédente et par identification on obtient finalement :

Avec

Montrons maintenant que ce schéma est inconditionnellement stable en norme . Pour cela, on remplace par

D’après les formules d’Euler on a :

Pour que ce schéma soit inconditionnellement stable il faut que :

Vérifions si la condition est respectée :

Finalement la condition de stabilité en norme est respectée, donc ce schéma est inconditionnellement stable en norme . Le schéma est d’ordre 2 en espace et d’ordre 2 en temps.

*Testez numériquement ce schéma en utilisant les données numériques ci-dessus.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | En observant le schéma, on remarque que le polluant se déplace à une vitesse constante de car on a affiché le graph sur un temps de et le polluant s’est déplacé de sans perdre en énergie.  Le schéma de Crank-Nicolson est donc stable et précis. |

*4. Implémentez une fonction Python qui donne les ordres de convergence des schémas décentrés en amont et de Crank-Nicolson. Observez numériquement ces ordres de convergence en imposant .*

## I.2 – Phénomène de convection-diffusion en

On s’intéresse à l’approximation par différences finies de l’équation de convection-diffusion en :

En utilisant les mêmes conditions que la section précédente, le schéma :de Crank-Nicolson s’écrit ainsi :

*1. Ecrire la matrice pour laquelle peut être obtenu par la relation de récurrence suivante :*

A partir des questions précédentes, on a pu exprimer une relation de récurrence pour trouver , on ajoute cette fois ci un membre supplémentaire à l’équation. La matrice M restera inchangée, on peut donc en déduire :

Comme est une matrice tridiagonale, et qu’on a les coefficients sur chacune de ses diagonales d’après l’expression précédente et par identification on obtient finalement :

Avec et ;

*2. Tester numériquement le schéma pour . Qu’observe-t-on si on reprend cette simulation avec*

|  |  |
| --- | --- |
| Pour et | Pour et |
|  |  |
| On observe pour les deux graphiques que la vitesse de déplacement correspond bien aux parametres car lorsque l’on affiche sur une période de , le polluant parcourt et lorsque l’on prend une période de , le polluant parcourt , ce qui correspond bien à .  Par ailleurs, la baisse en hauteur des courbes signifie que le polluant se dilue dans l’eau au fil du temps, donc la concentration du polluant dans l’eau diminue.  En observant les courbes, on peut en déduire que le schéma est **stable** et **consistant**. | |

*3. Dans certaines situations, le comportement observé à la sortie () n’est pas le comportement attendu pour une solution définie sur . On choisit donc d’utiliser en des conditions de type Neumann homogène qui reviennent à imposer :*

*Modifier les matrices et pour tenir compte de ces nouvelles conditions et réaliser les simulations numériques une fois ces modifications apportées.*

Les conditions de Neumann impliquent d’ajouter des termes supplémentaires (Conditions aux limites) sur les extrémités des matrices du schéma (termes en rouge) :

Avec et ;

Testons les schémas avec les mêmes coefficients en changeant seulement le temps de simulation à , de la sorte nous pouvons vois l’évolution du polluant jusqu’à ce que :

|  |  |
| --- | --- |
| Sans les conditions de Neumann | Avec les conditions de Neumann |
|  |  |
| On observe qu’en ajoutant les condition de Neumann le graphique continue en repartant de la droite, la limite en ne bloque pas la simulation dans l’espace. Cela permet d’avoir une meilleure visualisation et interprétation de la situation. | |

Dans la suite nous testerons les méthodes jusqu’à l’extrémité .

*4. Afin de simuler l’action d’une usine déversant un polluant on suppose que la concentration de polluant à est nulle et on introduit un terme de source .*

*En utilisant la discrétisation de , réécrire le schéma de Crank-Nicolson de la question pour tenir compte du terme et effectuer les tests numériques pour le terme source défini par :*

On peut donc ajouter la fonction dans le schéma de la question précédente :

|  |  |
| --- | --- |
|  | On voit bien que le schéma est cohérent, car lorsque l’on ajoute du polluant dans le court d’eau, la concentration augmente énormément et continuellement. On voit par ailleurs que le polluant se déplace toujours vers la droite mais le pic reste au même endroit, car le déversement du polluant se fait toujours au même endroit et ne se déplace pas.    De plus, avec un temps , on voit que la concentration monte à plus de ce qui est le double de la concentration de départ qui est de . |

*5. Pour simuler l’action d’une usine déversant le produit chimique (orange, voir figure 1) et ne fonctionnant qu’en journée, tester numériquement le schéma précédant avec :*

|  |  |
| --- | --- |
|  | Cette fois ci l’usine ne déverse son polluant que le jour et non la nuit. On observe que la concentration du polluant augmente jusqu’à 0,5 puis stagne. |

*Proposer ainsi une durée de fonctionnement et de pause de façon à assurer que la concentration en ne depasse pas une fois le régime stationnaire atteint.*

|  |  |
| --- | --- |
| et | et |
| Temps de fonctionnement : **(41,4%)**  Temps de pause : **(58,6%)** | Temps de fonctionnement : **(40,2%)**  Temps de pause : **(59,8%)** |
| En faisant l’expérience sur un temps plus long et un espace plus grand, on se rend compte qu’en moyenne l’usine fonction 40% du temps, le reste (60%) elle ne peut pas déverser de polluant sous peine de dépasser la limite de 0,4. | |

**II. Variation de la concentration de polluant dans l’océan**

Dès que l'eau polluée du fleuve atteint l'océan, la modélisation mathématique en 1D n'est plus adaptée pour décrire le milieu, mais nous pouvons encore négliger la profondeur de l'océan et étudier le phénomène de convection-diffusion en 2D pour comprendre l'évolution de la concentration de polluants. Nous cherchons toujours à utiliser des schémas de type Crank-Nicolson pour leurs bonnes propriétés, mais leur caractère implicite nécessite un travail préliminaire.

Afin de comprendre et de mettre en œuvre correctement la résolution du problème en 2D, nous procédons en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous nous concentrons sur l'approximation de l'opérateur Laplacien en utilisant des conditions mixtes Dirichlet/Neumann (non) homogènes. Ensuite, nous discrétisons l'équation de convection-diffusion bidimensionnelle à l'aide des différences finies, en examinant les aspects de la discrétisation dans le temps. Enfin, nous nous intéressons à l'objectif du projet, qui consiste à observer les effets du courant océanique sur la dispersion, en particulier lorsque celui-ci dépend de la position, comme près de l'embouchure d'un fleuve.

## II.1 – Approximation de l’équation de Laplace

Il s'agit ici d'étudier l'approximation spatiale de l'équation de Laplace en sur le domaine en utilisant les différences finies. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet homogènes :

Pour résoudre numériquement cette équation, nous utilisons alors :

* le pas de discrétisation en espace commun aux deux directions
* la taille de la discrétisation
* et les coordonnees des points de la discrétisation,
* l’approximation de au point
* l’approximation de aux points de la discrétisation

*1. A fixé, montrer que :*

*En déduire une approximation de l’ordre 2 de et de .*

On a

Donc

Pour obtenir une approximation de l'ordre 2 de et de , nous reprenons la définition précédente :

*2. Ecrire le schéma aux différences finies consistant à l’ordre 2 en un point n’appartenant pas au bord.*

Pour obtenir le schéma aux différences finies en un point n’appartenant pas au bord et consistant à l’ordre 2, nous devons additionner et .

On a donc :

En simplifiant, on obtient :

*3. Ecrire les conditions de Dirichlet homogènes discrètes sur le bord et mettre ce schema sous la forme avec le vecteur de taille qui est donne par la concaténation des lignes de la matrice :*

Les conditions aux limites de Dirichlet sur le bord sont :

D’après la question précédente, nous avons :

Avec ;

*4. Utiliser ce système pour résoudre numériquement l’équation de Laplace avec un terme source bien choisi permettant de comparer la résolution numérique et la solution exacte pour différentes valeurs de , la fonction . Montrer en particulier que l’erreur d’approximation converge bien lorsque vous raffinez votre discrétisation.*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | On peut observer que la solution numérique est plus que ressemblante à la solution exacte de l’équation de Laplace. De plus l’erreur d’approximation tend à converger lorsque tend vers l’infini. |

*5. En introduisant sur du domaine la condition de Neumann :*

*Montrer que l’on a :*

Considérons un point (a, y) sur le bord . Pour approximer nous pouvons utiliser les valeurs de u sur les points voisins, à savoir () et ().

La différence finie centrée pour la dérivée partielle est donnée par :

Cependant, nous voulons exprimer cette dérivée partielle en termes de valeurs de u sur le bord , c'est-à-dire pour les points et Pour cela, nous allons utiliser les conditions de Neumann.

En utilisant la condition sur le bord , nous avons :

Maintenant, réorganisons cette expression pour obtenir une expression en termes des valeurs de u sur :

Simplifions davantage cette expression :

Maintenant, introduisons la notation pour les valeurs de u sur la grille de discrétisation, où et , et réécrivons l'expression ci-dessus :

En utilisant la numérotation du vecteur U, où U est le vecteur de taille contenant les valeurs de u, cette expression devient :

Simplifions davantage cette expression :

En utilisant la numérotation du vecteur U, cette expression devient :

où est l'indice correspondant au point (a, y) sur le bord dans le vecteur U.

Maintenant, si nous réarrangeons cette expression en termes de u sur , nous obtenons :

En utilisant la numérotation du vecteur U, cette expression devient :

*6. En déduire la modification à apporter sur pour prendre en compte cette condition de Neumann sur et réaliser des simulations numériques pour vérifier vos résultats en utilisant la solution*

Il suffira comme dans la question de la partie 1, de rajouter des termes sur les extrémités de la matrice

Avec ;

## II.2 – Phénomène de convection-diffusion en

Jusqu'à présent, nous avons pu simuler le comportement de la concentration de polluant lorsqu'il est déversé dans l'océan par le fleuve en modélisant son évolution par l'équation de réaction-diffusion sur un domaine borné avec et des conditions de Dirichlet au bord :

Une image contenant texte, Police, blanc, ligne

Description générée automatiquement

Pour écrire la méthode des différences finies, nous introduisons les notations suivantes :

- , le pas de discrétisation en temps ;

- , les coordonnées de discrétisation temporelle ;

- , l'approximation de ;

- = et , la discrétisation de

- , un vecteur de taille donné par la concaténation des lignes de la matrice pour chaque.

Le schéma de Crank-Nicolson correspondant à ce problème continu s'écrit ainsi :

Une image contenant ligne, diagramme, texte

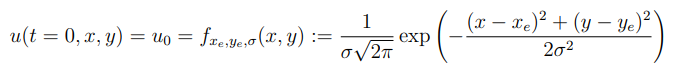
Description générée automatiquement

*1. Supposons dans un premier temps que la vitesse de convection du polluant est constante telle que . Calculer les matrices pour lesquelles on a la relation de récurrence :*

Comme est une matrice, et qu’on a les coefficients selon d’après l’énoncé et par identification on obtient finalement:

Avec A=;

*2. Pour effectuer une simulation numérique du schéma et obtenir une approximation de la solution du problème continu (3) sur l'intervalle Nous utiliserons les paramètres suivants : , , , , , dont la condition initiale est donnée par :*



Où

On obtient le graphe suivant :

Une image contenant texte, capture d’écran, Caractère coloré, diagramme

Description générée automatiquement

On note que le graphe est cohérent avec les données car comme Mx et My sont égales, le produit se répand dans le milieu de façon homogène.

*3. Pour modéliser la dispersion et le déversement du polluant dans l'océan en tenant compte du terme source f, il est nécessaire de modifier le schéma existant. Afin de prendre en compte le changement d'échelle du problème, nous allons tester numériquement les schémas avec les paramètres suivants : Le terme source f est une fonction à deux variables définies par dont représentent les coordonnées de l'embouchure du fleuve dans .*

Une image contenant capture d’écran, texte, Tracé

Description générée automatiquement

La répartition du polluant se fait de façon non homogène et ne se répand plus comme un cercle. C’est en adéquation avec les données avec le produit qui allait à la base vers l’arrière va enfaite longer le mur.

*4. Pour établir l’objectif final de ce projet consistant à prédire les effets du courant océanique sur la dispersion lorsque celui-ci dépend de la position, comme à proximité de l'embouchure d'un fleuve, il est nécessaire d'écrire les matrices et afin de prendre en compte la dépendance de la vitesse du polluant vis-à-vis de la position.*

*5. Effectuer des tests numériques du nouveau schéma avec les données de la question précédente, pour la vitesse de convection, où :*



*qui sont toujours parallèles au bord du domaine , et visualiser l’évolution de la concentration sur des intervalles de temps plus grands avec*

**Conclusion**

Ce projet nous a permis de modéliser la diffusion d'un polluant dans un fleuve et son interaction avec l'océan. Grâce à une approche complexe de modélisation et de simulation numérique, nous avons pu comprendre les effets de la dispersion du polluant et ses interactions avec des facteurs tels que la convection, la diffusion et le temps. Notre étude a débuté par l'analyse de la diffusion unidimensionnelle du polluant dans le fleuve, en tenant compte de la convection et de la diffusion. Ensuite, nous avons intégré l'effet d'une usine qui déverse du polluant dans le fleuve, en prenant en considération la variation temporelle de la concentration dupolluant.  
  
 Nous avons ensuite étendu notre analyse à deux dimensions pour modéliser l'interaction du polluant avec l'océan. Cette étape a nécessité une attention particulière à la modélisation de l'équation de Laplace et de l'équation de convection-diffusion en deux dimensions.

Un aspect important souligné dans notre étude concerne le rôle crucial des conditions aux limites dans la modélisation de ce type de problème. Nous avons notamment exploré l'utilisation de conditions de Neumann homogènes pour mieux représenter le comportement réel du système à l'extrémité du fleuve.

Enfin, nous avons examiné le comportement du système lorsque le courant océanique dépend de la position, ce qui est courant près de l'embouchure d'un fleuve.

Ce projet démontre le potentiel des mathématiques appliquées et de la simulation numérique pour comprendre et prédire le comportement complexe des systèmes environnementaux. Les résultats obtenus fournissent des informations précieuses pour la gestion des ressources en eau et la lutte contre la pollution. Toutefois, nous reconnaissons que notre modèle reste une simplification de la réalité, et des recherches supplémentaires sont nécessaires pour améliorer la précision et la fiabilité de nos prédictions.

Merci de votre lecture