

Le problème de l'arbre cœur

Arnaud Knippel, bureau BR207

arnaud.knippel@insa-rouen.fr

Le problème de l'arbre cœur consiste à trouver une structure a priori simple, un arbre couvrant de poids minimal dans un graphe, avec deux types de poids sur les arêtes : un poids c_{ij}^1 pour une arête ij dont un sommet est de degré 1 (une feuille) et un poids c_{ij}^2 pour une arête ij dont les deux extrémités sont de degré au moins 2. Une application directe de ce problème est la conception d'un réseau de télécommunications arborescent reliant un ensemble de clients en utilisant deux technologies : une technologie peu chère pour l'accès au client, et une technologie plus coûteuse pour le cœur du réseau. On peut aussi penser à un réseau de transport routier avec comme cœur de réseau le réseau autoroutier auquel se relie les autres routes.

La difficulté de ce problème repose sur la présence de deux coûts possibles pour chaque lien du réseau, suivant la structure d'arbre choisie. Si on savait à l'avance quels sont les sommets qui constituent le cœur du réseau (c'est à dire qui ne sont pas des feuilles de l'arbre), alors on calculerait simplement un arbre couvrant ces sommets de poids minimal avec les poids c^2 sur les arêtes et on rattacherait les autres sommets aux sommets du cœur les plus proches (on connaît des algorithmes très simples pour faire cela). C'est pourquoi nous avons appelé en anglais ce problème *Tree Star Design Problem* : si on remplace tous les sommets du cœur par un unique sommet en gardant les liens de type c^1 , le graphe obtenu est une étoile et le centre de l'étoile est le cœur du réseau. Mais le problème est NP-difficile, comme cela a été démontré en 2007 [1]. Plusieurs formulations mathématiques du problème ont été proposées et d'autres sont actuellement à l'étude, notamment dans le cadre d'un travail de recherche en cours au LMI en collaboration avec le LIP6 (Paris 6) et l'UFC (Fortaleza, Brésil).

Le projet consiste à résoudre ce problème de façon approchée en utilisant des *heuristiques* ou *meta-heuristiques*. Une heuristique est un algorithme pour lequel on ne connaît pas de garantie de performance (une sorte de mesure de l'efficacité). Une meta-heuristique est une heuristique applicable à une large classe de problème (et qui souvent imite des processus qu'on trouve dans la nature) : on peut citer le recuit simulé, les algorithmes génétiques, les colonies de fourmis...

Le choix d'une méthode de résolution sera discuté en début de projet (à l'image d'une véritable étude de RO, mais avec l'aide de l'enseignant), et les résultats seront validés en comparant avec les résultats d'une autre méthode approchée (ou exacte pour des données de petite taille). Le choix de l'environnement de développement est laissé à l'appréciation des étudiants.

[1] A. Knippel, V. H. Nguyen, *On Tree Star Network Design*, actes d' International Network Optimization Conference 2007.

[2] A. Lucena, L. Simonetti, A. S. da Cunha, *The Tree Star Problem : A Formulation and a Branch-and-Cut Algorithm*, actes d'International Network Optimization Conference 2015.