

Fusion et normalisation de réseaux possibilistes quantitatifs

Salem Benferhat*
Faiza Titouna*,**
Mohamed Tayeb Laskri***

*CRIL-CNRS, Université d'Artois Rue Jean Souvraz 62307 Lens, France.
benferhat@cril.univ-artois.fr

**Université Badji Mokhtar, Annaba.
titouna@univ-batna.dz

***Université Badji Mokhtar, Annaba.
laskri@univ-annaba.org

Résumé. La fusion d'informations incertaines, issues de différentes sources, est un problème important dans de nombreuses applications. Dans cet article, nous développons une méthodologie d'analyse des opérateurs de combinaisons possibilistes où l'information incertaine est exprimée à l'aide de réseaux possibilistes quantitatifs (basés sur l'opérateur produit). Nous montrons que la fusion, basée sur le produit, de réseaux possibilistes ayant des structures identiques, se fait en un temps polynômial. Nous étudions ensuite la fusion de réseaux possibilistes ayant différentes structures, mais dont l'union de ces réseaux ne contient pas de cycles. La dernière partie de cet article traite le problème de la sous-normalisation qui reflète la présence de conflits entre les différentes sources d'informations.

1 Introduction

Le problème de la combinaison d'informations provenant de différentes sources est présent dans différentes applications comme la robotique, le transport, la médecine ou le traitement d'images. Cet article s'intéresse au problème de la fusion d'informations incertaines multi-source représentées, dans le cadre de la théorie des possibilités, par les réseaux possibilistes. Les réseaux probabilistes Jensen (1996), Pearl (1988) et les réseaux possibilistes Fonck (1992), Borgelt et al. (1998) sont des outils importants, proposés pour une représentation et une analyse efficace de l'information incertaine. Leur succès est dû à leur simplicité et leur capacité à représenter et à prendre en compte les relations d'indépendance qui sont importantes pour une gestion efficace des informations incertaines. Les réseaux possibilistes sont des graphes orientés acycliques (DAG), où chaque nœud représente une variable et chaque arc représente une relation d'influence entre deux variables. L'incertitude est exprimée par des distributions de possibilités conditionnelles au niveau de chaque nœud dans le contexte de ses parents. En théorie des possibilités Zadeh (1978), Dubois et Prade (1988), il existe deux types de réseaux possibilistes selon que le conditionnement possibiliste soit basé sur l'opérateur minimum (on parle alors de réseaux possibilistes ordinaux) ou sur l'opérateur produit. Dans cet article

nous considérons seulement le cas du conditionnement basé sur le produit. On parlera alors de réseaux possibilistes quantitatifs (ou basés sur le produit).

Plusieurs travaux ont été proposés pour la fusion de bases de connaissances propositionnelles ou pondérées (c'est à dire les formules ayant différents niveaux d'importance ou de priorité) voir par exemple les travaux de Qi et al. (2006), Konieczny et Perez (1998), Lin et Mendelzon (1998), Benferhat et al. (1997). Cependant très peu de travaux existent sur la fusion de réseaux possibilistes, que ce soit dans le cadre de la théorie des possibilités ou dans le cadre de la théorie des probabilités.

Nous proposons dans cet article, une méthode qui fusionne n réseaux possibilistes. Le résultat de la fusion doit être en accord avec la sémantique de la théorie des possibilités. Nous étudions en particulier le problème dit de sous-normalisation qui concerne le traitement des conflits entre les sources d'informations.

Le reste de cet article est organisé comme suit: dans la section suivante, nous présentons les notions de base de la théorie des possibilités et des réseaux possibilistes quantitatifs. La Section 3 rappelle le mode de combinaison conjonctive des distributions de possibilités. La Section 4 discute la fusion des réseaux possibilistes ayant la même structure graphique. La Section 5 concerne les réseaux possibilistes de structures différentes mais dont l'union de leur graphes ne contient pas de cycles. La Section 6 traite le problème de la sous-normalisation qui reflète la présence de conflits entre les sources. La dernière section conclut l'article.

2 Notions de base de la théorie des possibilités

Soit $V = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ un ensemble de variables. On note par $D_A = \{a_1, \dots, a_m\}$ le domaine associé à chaque variable A et par a une instance de A . L'univers de discours, défini par le produit cartésien des domaines de toutes les variables dans V , est noté par $\Omega = \times_{A_i \in V} D_{A_i}$. Chaque élément $\omega \in \Omega$ est appelé un état (une situation) ou un événement élémentaire.

2.1 Distributions de possibilités et mesures de possibilités

Une distribution de possibilité π est une fonction de Ω dans $[0, 1]$. Elle représente la connaissance sur un ensemble de situations possibles parmi lesquelles nous distinguons celles qui sont plus plausibles que d'autres. La valeur $\pi(\omega)$ exprime un degré de compatibilité (ou de cohérence) de la situation ω avec les connaissances codées par π . Une distribution de possibilité π est dite *normalisée (ou cohérente)*, si $h(\pi) = \max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$. Elle est dite sous-normalisée si $h(\pi) < 1$.

Étant donnée une distribution de possibilité π définie sur un univers de discours Ω , nous définissons la *mesure de possibilité* d'un événement $\phi \subseteq \Omega$ par $\Pi(\phi) = \max_{\omega \in \phi} \pi(\omega)$. $\Pi(\phi)$ exprime un degré de compatibilité de l'événement ϕ avec les connaissances codées par π .

En théorie des possibilités, le conditionnement consiste à modifier les connaissances disponibles, codées par une distribution de possibilités π , par l'arrivée d'une nouvelle information *certaine* $\phi \subseteq \Omega$. Pour une étude détaillée des propriétés du conditionnement voir Benferhat et al. (2002). Il existe deux principales définitions du conditionnement possibiliste. Dans cet

article nous nous intéressons uniquement au conditionnement basé sur le produit défini par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \Pi(\omega \mid \phi) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\phi)} & \omega \in \phi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par convention, si $\Pi(\phi) = 0$ alors $\forall \omega, \Pi(\omega \mid \phi) = 1$.

Finalement nous rappelons la notion de relations d'indépendances. L'idée de base de l'indépendance causale consiste à considérer qu'une variable (ou un ensemble de variables) n'a aucune influence sur une autre variable (ou un ensemble de variables), si apprendre que cette variable est vraie ne modifie pas notre croyance sur l'autre variable. Notre intérêt se focalise sur la relation d'indépendance basée sur le produit, définie par : Soient X, Y et Z trois sous-ensembles de variables disjoints. On dit que X est indépendante de Y dans le contexte de Z , si pour chaque instance $z \in D_Z$, le degré de possibilité de chaque $x \in D_X$ est préservé pour n'importe quelle valeur de $y \in D_Y$. Plus formellement, nous avons :

$$\forall x \in \times_{A \in X} D_A, \forall y \in \times_{B \in Y} D_B, \forall z \in \times_{C \in Z} D_C, \quad \Pi(x \mid y \wedge z) = \Pi(x \mid z).$$

Pour plus de discussions sur les relations d'indépendance dans le cadre de la théorie des possibilités, voir De Cooman (1997), Bouchon-Meunier et Marsala (2002), Ben Amor et al. (2000).

2.2 Réseaux quantitatifs possibilistes

Cette sous-section définit les graphes possibilistes quantitatifs. Un *graphe possibiliste quantitatif* sur un ensemble de variables V , noté par $\mathbb{N} = (\pi_{\mathbb{N}}, G_{\mathbb{N}})$, consiste en :

- une *composante graphique*, notée par $G_{\mathbb{N}}$, qui est un graphe acyclique orienté DAG (Directed Acyclic Graph). Les nœuds représentent les variables. Les arcs représentent les liens d'influence entre les variables. L'ensemble des parents d'un nœud A est noté par U_A , et μ_a dénote une instance des parents de A . On dit que C est le fils de A s'il existe un arc entre A et C . Par descendant de A , nous désignons l'ensemble des nœuds qui s'obtiennent par la fermeture transitive de la relation fils.
- une *composante numérique*, notée par $\pi_{\mathbb{N}}$, qui quantifie les différents liens entre les variables. Dans chaque nœud racine A ($U_A = \emptyset$), l'incertitude est représentée par un degré de possibilité a priori $\pi_{\mathbb{N}}(a)$ de chaque instance $a \in D_A$ tel que $\max_a \pi_{\mathbb{N}}(a) = 1$. Pour le reste des nœuds ($U_A \neq \emptyset$) l'incertitude est représentée par un degré de possibilité conditionnelle $\pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a)$ associé à chaque instance $a \in D_A$ et $\mu_a \in D_{U_A}$. Ces distributions conditionnelles satisfont la condition de normalisation suivante :

$$\max_a \pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a) = 1, \text{ pour chaque } \mu_a.$$

Dans la suite, les distributions de possibilités $\pi_{\mathbb{N}}$, définies au niveau des nœuds, seront appelées distributions de possibilités locales.

A partir de l'ensemble des degrés de possibilités locales conditionnelles et a priori, nous défi-

Fusion de réseaux possibilistes

nissons une distribution de possibilité jointe globale unique, comme celle proposée en théorie des probabilités, (pour plus de détails voir Fonck (1992)).

Définition 1 Soit $\mathbb{N} = (\pi_{\mathbb{N}}, G_{\mathbb{N}})$ un réseau possibiliste. La distribution jointe, associée à \mathbb{N} , notée $\pi_{\mathbb{N}}^J$, est exprimée à l'aide de la règle de chaînage quantitative suivante :

$$\pi_{\mathbb{N}}^J(A_1, \dots, A_N) = \prod_{i=1..N} \Pi(A_i \mid U_{A_i}). \quad (1)$$

Exemple 1 Soit $\mathbb{N} = (\pi_{\mathbb{N}}, G_{\mathbb{N}})$ un réseau quantitatif possibiliste. Le DAG ($G_{\mathbb{N}}$) associé à \mathbb{N} est représenté par la Figure 1. Les distributions de possibilités a priori et conditionnelles associées à \mathbb{N} sont données par la Table 1.



FIG. 1 – – Graphe d'un réseau possibiliste: $G_{\mathbb{N}}$.

A	$\pi_{\mathbb{N}}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}}(B \mid A)$	$\pi_{\mathbb{N}}^J(A, B)$
a_1	1	a_1	b_1	1	1
a_2	0.4	a_1	b_2	0.1	0.1
		a_2	b_1	0.6	0.24
		a_2	b_2	1	0.4

TAB. 1 – – Distributions de possibilités a priori, conditionnelles $\pi_{\mathbb{N}}$ et jointe $\pi_{\mathbb{N}}^J$.

La distribution jointe, obtenue en utilisant la règle de chaînage quantitative (1) associée à \mathbb{N} , est donnée par la Table 1. Par exemple, en utilisant l'équation (1), nous avons : $\pi_{\mathbb{N}}^J(a_2 b_2) = \pi_{\mathbb{N}}(b_2 \mid a_2) * \pi_{\mathbb{N}}(a_2) = 1 * 0.4 = 0.4$.

3 La fusion possibiliste

3.1 Définition de la fusion conjonctive basée sur le produit

Un des objectifs de la fusion d'informations incertaines est d'exploiter la complémentarité entre les sources d'informations afin d'avoir un point de vue global plus complet et plus précis sur un problème donné. Étant donné un ensemble de distributions de possibilité π_i , le mode de combinaison de base, dans le cadre de la théorie des possibilités, est la conjonction idempotente (i.e., le minimum) des π_i , défini par :

$$\forall \omega, \pi_{\oplus}(\omega) = \min_{i=1..n} \pi_i(\omega).$$

Pour plus de détails sur la fusion sémantique des distributions des possibilités voir Dubois et Prade (1994). La combinaison conjonctive idempotente est significative si toutes les sources jouent un rôle symétrique et ont le même niveau de fiabilité. Le mode de combinaison basé sur le minimum n'a pas d'effet de renforcement. En effet, si un expert 1 affecte un degré de possibilité $\pi_1(\omega) < 1$ à une situation ω , et un expert 2 affecte un degré de possibilité $\pi_2(\omega) \leq 1$ à cette même situation alors $\pi_{\oplus}(\omega) = \pi_1(\omega)$ si $\pi_1(\omega) < \pi_2(\omega)$. C'est à dire la valeur de $\pi_{\oplus}(\omega)$ ne tient pas compte de la valeur de $\pi_2(\omega)$. Si les experts considèrent ω possible à un degré α , et si leurs opinions sont indépendantes, il est peut être raisonnable de considérer le degré de possibilité de ω inférieur à α . L'effet de renforcement peut être obtenu en utilisant un autre mode de combinaison conjonctif comme celui basé sur le produit et défini par :

$$\forall \omega, \pi_{\oplus}(\omega) = \prod_{i=1,n} \pi_i(\omega). \quad (2)$$

Dans la suite de cet article, c'est ce mode de combinaison qui sera considéré, et par \oplus nous désignons l'opérateur produit *.

3.2 Objectifs de ce travail

Pour plus de clarté et de simplicité, nous nous limitons au cas de fusion de deux réseaux possibilistes. Comme l'opérateur produit est symétrique et associatif, les méthodes de fusion présentées dans cet article s'étendent facilement au cas de fusion de n réseaux possibilistes. Soient $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ deux réseaux possibilistes. Notre objectif, illustré par la Figure 2, consiste à construire directement à partir de $\mathbb{N}1$ et de $\mathbb{N}2$ un nouveau réseau possibiliste noté par $\mathbb{N}\oplus$. Le nouveau réseau possibiliste représentera le résultat de la fusion, par l'opérateur produit, des réseaux possibilistes $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ voir Figure 2. La distribution de possibilité $\pi_{\mathbb{N}\oplus}$ associée à $\mathbb{N}\oplus$ doit vérifier l'équation suivante :

$$\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}\oplus}(\omega) = \pi_{\mathbb{N}1}(\omega) * \pi_{\mathbb{N}2}(\omega).$$

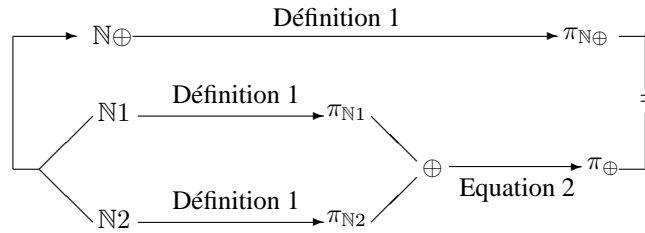


FIG. 2 – – Correspondance entre la fusion de réseaux possibilistes et la fusion de distributions possibilistes.

4 Fusion de réseaux possibilistes de structures identiques

Nous présentons la procédure de fusion de réseaux possibilistes ayant la même structure graphique. Les deux réseaux possibilistes à fusionner, notés par $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$, diffèrent seulement par les distributions de possibilités conditionnelles affectées aux variables. La définition et la proposition suivantes montrent que le résultat de la fusion de réseaux possibilistes de structures identiques, est immédiat.

Définition 2 Soient $\mathbb{N}1 = (\pi_{\mathbb{N}1}, G_{\mathbb{N}1})$ et $\mathbb{N}2 = (\pi_{\mathbb{N}2}, G_{\mathbb{N}2})$ deux réseaux possibilistes tel que $G_{\mathbb{N}1} = G_{\mathbb{N}2}$. La fusion de $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ est un réseau possibiliste, noté $\mathbb{N}\oplus = (\pi_{\mathbb{N}\oplus}, G_{\mathbb{N}\oplus})$, où :

- $G_{\mathbb{N}\oplus} = G_{\mathbb{N}1} = G_{\mathbb{N}2}$ et
- Les distributions de possibilités conditionnelles locales $\pi_{\mathbb{N}\oplus}$ sont définies par :
 $\forall A, \pi_{\mathbb{N}\oplus}(A|U_A) = \pi_{\mathbb{N}1}(A|U_A) * \pi_{\mathbb{N}2}(A|U_A).$

C'est à dire que le résultat de la fusion de $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ est un réseau possibiliste dont le DAG est celui de $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$, et dont les distributions de possibilités locales sont le produit des distributions locales de $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$.

Proposition 1 Soient $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ deux réseaux possibilistes dont les DAGs associés sont identiques. Soit $\mathbb{N}\oplus$ le résultat de la fusion de $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$, calculé en utilisant la définition précédente. Alors, nous avons : $\forall \omega \in \Omega, \pi_{\mathbb{N}\oplus}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) * \pi_{\mathbb{N}2}^J(\omega)$, où $\pi_{\mathbb{N}\oplus}^J, \pi_{\mathbb{N}1}^J, \pi_{\mathbb{N}2}^J$ sont respectivement les distributions de possibilités associées à $\mathbb{N}\oplus, \mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ en utilisant la Définition 1.

Preuve. En utilisant la définition 1 et la définition 2, la distribution jointe associée au réseau $\mathbb{N}\oplus$ s'écrit de la manière suivante :

$$\pi_{\mathbb{N}\oplus}^J(A_1, \dots, A_n) = \prod_{i=1, n} \pi_{\mathbb{N}\oplus}(A_i | U_{A_i}) = \prod_{i=1, n} (\pi_{\mathbb{N}1}(A_i | U_{A_i}) * \pi_{\mathbb{N}2}(A_i | U_{A_i}))$$

Étant donné que l'opérateur produit est commutatif et associatif, nous obtenons :

$$\pi_{\mathbb{N}\oplus}^J(A_1, \dots, A_n) = (\prod_{i=1, n} \pi_{\mathbb{N}1}(A_i | U_{A_i})) * (\prod_{i=1, n} \pi_{\mathbb{N}2}(A_i | U_{A_i}))$$

C'est à dire: $\forall \omega \in \Omega, \pi_{\mathbb{N}\oplus}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) * \pi_{\mathbb{N}2}^J(\omega)$. \square

Exemple 2 Soient $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ deux réseaux possibilistes. Soit $G_{\mathbb{N}} = G_{\mathbb{N}1} = G_{\mathbb{N}2}$ le DAG associé à $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ et représenté par la Figure 3. Les distributions de possibilités associées à $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ sont données respectivement par la Table 2.



FIG. 3 – Exemple de réseaux identiques.

Le réseau possibiliste $\mathbb{N}\oplus$, résultat de la fusion de $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$, est tel que son graphe est le DAG de la Figure 3 et ses distributions de possibilités conditionnelles locales sont celles données par la Table 3. Nous pouvons facilement vérifier que :

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_{\mathbb{N}\oplus}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) * \pi_{\mathbb{N}2}^J(\omega).$$

A	$\pi_{\mathbb{N}1}(A)$	$\pi_{\mathbb{N}2}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}1}(B A)$	$\pi_{\mathbb{N}2}(B A)$
a_1	1	1	a_1	b_1	1	1
a_2	0.2	0.3	a_1	b_2	0.3	0
			a_2	b_1	0.1	0.7
			a_2	b_2	1	1

TAB. 2 – – Distributions de possibilités initiales associées à $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$.

A	$\pi_{\mathbb{N}\oplus}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}\oplus}(B A)$
a_1	1	a_1	b_1	1
a_2	0.06	a_1	b_2	0
		a_2	b_1	0.07
		a_2	b_2	1

TAB. 3 – – Distributions de possibilités associées à $\mathbb{N}\oplus$.

5 Fusion de réseaux U-acycliques

Cette section considère le cas où les réseaux possibilistes ont des structures différentes. Cependant nous supposons que l'union des graphes ne contient pas de cycles. L'union de deux DAGs (G_1, G_2) est un graphe où :

- l'ensemble de ses variables est l'union des ensembles des variables appartenant à G_1 et à G_2 ,
- pour chaque variable A, ses parents sont ceux de G_1 et G_2 .

Si l'union de G_1 et G_2 ne contient pas de cycles, on dit que G_1 et G_2 sont des réseaux U-acycliques. Dans ce cas, nous montrons que la fusion peut être facilement réalisable. Nous avons d'abord besoin de présenter des résultats intermédiaires sur l'ajout des variables et des arcs dans la sous-section suivante.

5.1 Ajout de variables et d'arcs

La proposition suivante montre comment rajouter de nouvelles variables dans un réseau possibiliste, sans modifier la distribution jointe du réseau :

Proposition 2 Soit $\mathbb{N} = (\pi_{\mathbb{N}}, G_{\mathbb{N}})$ un réseau possibiliste défini sur un ensemble de variables V . Soit A une nouvelle variable qui n'appartient pas à V . Soit $\mathbb{N}1 = (\pi_{\mathbb{N}1}, G_{\mathbb{N}1})$ un nouveau réseau possibiliste tel que :

- $G_{\mathbb{N}1}$ est égale à $G_{\mathbb{N}}$ plus le nœud A ,
- $\pi_{\mathbb{N}1}$ est identique à $\pi_{\mathbb{N}}$ pour toutes les variables dans V , et égale à la distribution de possibilité représentant l'ignorance totale pour le nœud A (c'est à dire, $\forall a \in D_A$, $\pi_{\mathbb{N}1}(a) = 1$).

Alors nous avons :

$$\forall \omega \in \times_{A_i \in V} D_{A_i}, \quad \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega) = \max_{a \in D_A} \pi_{\mathbb{N}1}^J(a\omega). \quad (3)$$

Fusion de réseaux possibilistes

Preuve. Calculons la distribution de possibilité marginale associée à $\mathbb{N}1$. Soit $\omega \in \times_{A_i \in V} D_{A_i}$. Nous avons: $\max_a \pi_{\mathbb{N}1}^J(a\omega) = \max_a (\pi_{\mathbb{N}1}(a) \cdot \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega)) = \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega)$, puisque $\pi_{\mathbb{N}1}(a) = 1$, pour tout $a \in D_A$. Donc $\max_{a \in D_A} \pi_{\mathbb{N}1}^J(a\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega)$. \square

La proposition précédente est importante dans la procédure de fusion puisqu'elle permet si nécessaire d'augmenter, de façon équivalente, tous les réseaux possibilistes à fusionner, afin qu'ils utilisent le même ensemble de variables.

La proposition suivante montre comment rajouter des liens à un réseau possibiliste sans modifier sa distribution de possibilité.

Proposition 3 Soit $\mathbb{N} = (\pi_{\mathbb{N}}, G_{\mathbb{N}})$ un réseau possibiliste. Soit A une variable, et soit U_A l'ensemble des parents de A dans $G_{\mathbb{N}}$. Soit $B \notin U_A$ et B n'est pas un descendant de A ¹. Soit $\mathbb{N}1 = (\pi_{\mathbb{N}1}, G_{\mathbb{N}1})$ un nouveau réseau possibiliste obtenu à partir de \mathbb{N} en rajoutant un lien de B vers A . La nouvelle distribution de possibilité conditionnelle associée à $\mathbb{N}1$ est :

- au niveau du nœud A :

$$\forall a \in D_A, \forall b \in D_B, \forall \mu_a \in D_{U_A}, \pi_{\mathbb{N}1}(a \mid \mu_a b) = \pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a).$$

- pour les autres nœuds :

$$\forall C, C \neq A, \forall c \in D_C, \forall \mu_c \in D_{U_C}, \pi_{\mathbb{N}1}(c \mid \mu_c) = \pi_{\mathbb{N}}(c \mid \mu_c).$$

Alors, nous avons :

$$\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega).$$

Preuve. Soit $V = \{A_1, \dots, A_{n-1}, B\}$, l'ensemble des variables dans le réseau possibiliste \mathbb{N} . Supposons que nous ajoutons un arc de B vers le nœud A_i tel que $B \notin U_{A_i}$. Par construction, les distributions de possibilités conditionnelles locales associées au nouveau réseau sont :

$$\text{Pour tout } X \in V \text{ tel que } X \neq A_i, \pi_{\mathbb{N}1}(X \mid U_X) = \pi_{\mathbb{N}}(X \mid U_X),$$

$$\text{Pour } X = A_i, \pi_{\mathbb{N}1}(A_i \mid U_{A_i}, B) = \pi_{\mathbb{N}}(A_i \mid U_{A_i}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{N}1}^J(A_1, \dots, A_{n-1}, B) &= \pi_{\mathbb{N}1}(A_i \mid U_{A_i}, B) * (\prod_{j=1, j \neq i}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}1}(A_j \mid U_{A_j})) * \pi_{\mathbb{N}1}(B \mid U_B) \\ &= \pi_{\mathbb{N}}(A_i \mid U_{A_i}) * (\prod_{j=1, j \neq i}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}}(A_j \mid U_{A_j})) * \pi_{\mathbb{N}}(B \mid U_B) \\ &= \pi_{\mathbb{N}}^J(A_1, \dots, A_{n-1}, B). \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons : $\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega)$. \square .

5.2 Procédure de calcul de la fusion

Grâce aux résultats de la section précédente, et en se basant sur la Proposition 1, la fusion de deux réseaux U-acycliques $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ est immédiate. Soit $G_{\mathbb{N} \oplus}$ l'union de $G_{\mathbb{N}1}$ et $G_{\mathbb{N}2}$. Alors la fusion de $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ est obtenue en suivant les deux étapes suivantes :

Étape 1 En utilisant les propositions 2 et 3, étendre les graphes associés à $\mathbb{N}1$ et $\mathbb{N}2$ jusqu'à ce que $G_{\mathbb{N}1} = G_{\mathbb{N}2} = G_{\mathbb{N} \oplus}$. Par extension, nous entendons, l'ajout de variables et d'arcs.

Étape 2 Appliquer la Proposition 1 sur les réseaux possibilistes obtenus dans l'étape 1 (puisque les deux réseaux ont maintenant la même structure).

1. Il est important d'exiger que B ne soit pas un descendant de A , sinon l'ajout de B vers A engendrerait un cycle.

Exemple 3 Considérons les deux réseaux possibilistes dont les DAGs sont donnés par la Figure 4. Ces deux DAGs ont des structures différentes. Les distributions de possibilités conditionnelles, qui leur sont associées, sont données par les Tables 4 et 5. Le DAG $G_{\mathbb{N}\oplus}$ est donné par la Figure 5, qui est simplement l'union des deux graphes de la Figure 4.

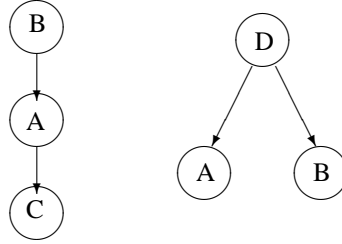


FIG. 4 – G_1 G_2 : Exemple de réseaux U-acycliques.

B	$\pi_{\mathbb{N}1}(B)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}1}(A B)$	A	C	$\pi_{\mathbb{N}1}(C A)$
b_1	1	a_1	b_1	0.3	a_1	c_1	1
b_2	0.2	a_1	b_2	1	a_1	c_2	0.5
		a_2	b_1	1	a_2	c_1	0
		a_2	b_2	0	a_2	c_2	1

TAB. 4 – Distributions de possibilités conditionnelles initiales $\pi_{\mathbb{N}1}$.

D	$\pi_{\mathbb{N}2}(D)$	A	D	$\pi_{\mathbb{N}2}(A D)$	B	D	$\pi_{\mathbb{N}2}(B D)$
d_1	1	a_1	d_1	1	b_1	d_1	1
d_2	0	a_1	d_2	1	b_1	d_2	0.8
		a_2	d_1	1	b_2	d_1	0.7
		a_2	d_2	0	b_2	d_2	1

TAB. 5 – Distributions de possibilités conditionnelles initiales $\pi_{\mathbb{N}2}$.

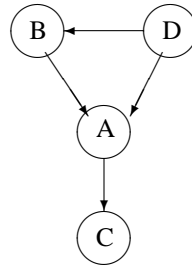


FIG. 5 – DAG $G_{\mathbb{N}\oplus}$.

Fusion de réseaux possibilistes

L'extension de $G_{\mathbb{N}1}$ et $G_{\mathbb{N}2}$ en un graphe commun $G_{\mathbb{N}\oplus}$ nécessite l'ajout de variables et de liens dans chaque graphe. Pour cela nous appliquons les étapes suivantes :

- Pour $G_{\mathbb{N}1}$ nous rajoutons :
 - une nouvelle variable D dont la distribution de possibilité est :
 $\forall d \in D_D, \pi_{\mathbb{N}1}(d) = 1$,
 - un lien de la variable D vers la variable B dans le graphe. La nouvelle distribution de possibilité conditionnelle du nœud B devient :
 $\forall d \in D_D, \forall b \in D_B, \pi_{\mathbb{N}1}(b|d) = \pi_{\mathbb{N}1}(b)$.
 - un lien de la variable D vers la variable A dans le graphe. La nouvelle distribution de possibilité conditionnelle du nœud A devient :
 $\forall d \in D_D, \forall b \in D_B, \forall a \in D_A, \pi_{\mathbb{N}1}(a|b,d) = \pi_{\mathbb{N}1}(a|b)$.
- Après ajout de liens, les distributions de possibilités au niveau des variables A et B dans le réseau $\mathbb{N}1$ ne sont pas modifiées conformément à la Proposition 3.
- Pour $G_{\mathbb{N}2}$ nous procédons de la même manière, c'est à dire nous rajoutons :
 - une nouvelle variable C , et un lien de la variable A vers la variable C , dont la distribution de possibilité conditionnelle est :
 $\forall c \in D_C, \forall a \in D_A, \pi_{\mathbb{N}2}(c|a) = 1$.
 - un lien de la variable B vers la variable A , et la nouvelle distribution de possibilité conditionnelle du nœud A devient :
 $\forall d \in D_D, \forall b \in D_B, \forall a \in D_A, \pi_{\mathbb{N}2}(a|b,d) = \pi_{\mathbb{N}2}(a|d)$.

Les distributions de possibilités conditionnelles, associées au DAG représentant le résultat du graphe fusion (donné par la Figure 5), sont représentées dans la Table 6. Nous pouvons

D	$\pi_{\mathbb{N}\oplus}(D)$	A	C	$\pi_{\mathbb{N}\oplus}(C A)$	B	D	$\pi_{\mathbb{N}\oplus}(B D)$
d_1	1	a_1	c_1	1	b_1	d_1	1
d_2	0	a_1	c_2	0.5	b_1	d_2	0.8
		a_2	c_1	0	b_2	d_1	0.14
		a_2	c_2	1	b_2	d_2	0.2
A	B	D	$\pi_{\mathbb{N}\oplus}(A B \wedge D)$	A	B	D	$\pi_{\mathbb{N}\oplus}(A B \wedge D)$
a_1	b_1	d_1	0.3	a_2	b_1	d_1	1
a_1	b_1	d_2	0.3	a_2	b_1	d_2	0
a_1	b_2	d_1	1	a_2	b_2	d_1	0
a_1	b_2	d_2	1	a_2	b_2	d_2	0

TAB. 6 – – Distributions conditionnelles associées à $\pi_{\mathbb{N}\oplus}$.

facilement vérifier que la distribution de possibilité jointe $\pi_{\mathbb{N}\oplus}^J$, calculée en utilisant la règle de chaînage (Définition 1), est égale au produit de $\pi_{\mathbb{N}1}^J$ et $\pi_{\mathbb{N}2}^J$.

6 Traitement des réseaux possibilistes sous-normalisés

La combinaison d'informations multi-source engendre parfois des conflits. Même si les distributions de possibilités conditionnelles et jointes initiales sont normalisées, il est rare que

les distributions locales et jointes associées au réseau résultat (de la fusion) soient également normalisées. Dans cette section, nous présentons une procédure permettant de restaurer la normalisation de la distribution jointe d'un réseau causal possibiliste quantitatif.

6.1 De la sous-normalisation locale à la sous-normalisation globale

Dans les réseaux causaux probabilistes Jensen (1996), Pearl (1988), lorsque toutes les distributions de probabilités locales (conditionnelles et a priori) sont normalisées, alors la distribution globale jointe est normalisée. Cependant si une des distributions de probabilités locales est sous-normalisée alors la distribution de probabilité globale est également sous-normalisée. Cette sous-section montre que dans le cadre de la théorie des possibilités, la situation n'est pas la même. En particulier, il est possible que des distributions locales soient sous-normalisées mais la distribution jointe soit normalisée.

Rappelons que $h(\pi)$ représente le degré de normalisation affecté à π et est défini par :

$$h(\pi) = \max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega).$$

Si $h(\pi) < 1$ alors π est dite sous-normalisée, en d'autres termes π code un ensemble de croyances ou de préférences conflictuelles. La normalisation de π est réalisée en se basant sur l'équation suivante (voir Dubois et Prade (1994)) :

$$\forall \omega, \pi^{\text{normalisé}}(\omega) = \frac{\pi(\omega)}{h(\pi)}.$$

La proposition suivante montre que si les distributions locales a priori et conditionnelles sont toutes normalisées alors la distribution globale jointe est également normalisée.

Proposition 4 *Soit \mathbb{N} un réseau possibiliste, où les distributions locales $\pi_{\mathbb{N}}$ associées à \mathbb{N} sont normalisées, c'est à dire $\forall A \in V, \forall \mu_a$ instance des parents de $A, \max_a \pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a) = 1$. Alors $\pi_{\mathbb{N}}^J$ est normalisée, c'est à dire $h(\pi_{\mathbb{N}}^J) = 1$.*

Preuve. Soit $V = \{A_1, \dots, A_n\}$ l'ensemble des variables, où les parents de A_i sont dans $\{A_{i+1}, \dots, A_n\}$. Par définition :

$$h(\pi_{\mathbb{N}}^J) = \max_{a_1, \dots, a_n} \pi_{\mathbb{N}}^J(a_1, \dots, a_n) = \max_{a_1, \dots, a_n} ((\prod_{i=1}^{n-1} \pi_{\mathbb{N}}(a_i \mid \mu_{a_i})) * \pi(a_n \mid \mu_{a_n})) = \max_{a_1, \dots, a_{n-1}} (\prod_{i=1}^{n-1} \pi_{\mathbb{N}}(a_i \mid \mu_{a_i})) * \max_{a_n} \pi(a_n \mid \mu_{a_n}).$$

Par hypothèse, toutes les distributions locales sont normalisées, donc pour chaque instance μ , $\max_{a_n} (\pi(a_n \mid \mu_{a_n})) = 1$. Nous avons : $h(\pi_{\mathbb{N}}^J) = \max_{a_1, \dots, a_{n-1}} (\pi_{\mathbb{N}}^J(a_1, \dots, a_{n-1}))$.

Le processus est répété jusqu'à a_1 , ainsi nous obtenons à la fin : $h(\pi_{\mathbb{N}}^J) = 1$. \square

Exemple 4 *Soit le réseau possibiliste donné par la Figure 6 et la Table 7. Nous pouvons vérifier que les distributions de possibilités locales initiales sont normalisées. Par conséquent la distribution jointe, représentée par la Table 7, est aussi normalisée.*

*Par exemple : $\pi_{\mathbb{N}}^J(a_1 b_2) = \pi_{\mathbb{N}}(a_1) * \pi_{\mathbb{N}}(b_2 \mid a_1) = 1$.*

Maintenant analysons le cas où certaines distributions locales ne sont pas normalisées. En théorie des probabilités, si une distribution de probabilité locale est sous-normalisée alors la distribution de probabilité jointe sera également sous-normalisée. En théorie des possibilités la



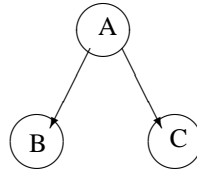
FIG. 6 – – Réseau causal possibiliste.

A	$\pi_{\mathbb{N}}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}}(B \mid A)$	$\pi_{\mathbb{N}}^J(A, B)$
a_1	1	a_1	b_1	0.7	0.7
a_2	0.3	a_1	b_2	1	1
		a_2	b_1	1	0.3
		a_2	b_2	0.2	0.06

 TAB. 7 – – Distributions de possibilités initiales $\pi_{\mathbb{N}}$ et jointe $\pi_{\mathbb{N}}^J$ normalisées.

situation n'est pas identique. Il peut y avoir des situations où des distributions locales sont sous-normalisées et la distribution jointe est sous-normalisée. Comme il peut y avoir des situations où les distributions locales sont sous-normalisées mais la jointe globale est normalisée. Ces deux situations sont données par les deux exemples suivants.

Exemple 5 Cet exemple illustre une situation où les distributions de possibilités locales ne sont pas toutes normalisées, mais la distribution jointe est normalisée. Considérons le réseau possibiliste \mathbb{N} donné par la Figure 7. Les distributions locales associées à ce réseau, données


 FIG. 7 – – Réseau causal possibiliste \mathbb{N} .

dans la Table 8, ne sont pas toutes normalisées. En effet, au niveau de la variable B, il existe une instance de la variable A (parent de B) tel que : $\max_b \pi_{\mathbb{N}}(b \mid a_1) \neq 1$.

La distribution jointe calculée, à partir de la Table 8, est normalisée, par exemple : $\pi_{\mathbb{N}}^J(a_2 b_2 c_2) = \pi_{\mathbb{N}}(a_2) * \pi_{\mathbb{N}}(b_2 \mid a_2) * \pi_{\mathbb{N}}(c_2 \mid a_2) = 1$.

Exemple 6 Cet exemple illustre une situation où les distributions de possibilités locales ne sont pas toutes normalisées et la distribution jointe est sous-normalisée. Considérons le réseau \mathbb{N} dont le DAG est donné par la Figure 7. Les distributions de possibilités locales (données dans la Table 9) ne sont pas toutes normalisées. Nous avons : $\max_c (\pi_{\mathbb{N}}(c \mid a_1)) = 0.2$.

A	$\pi_{\mathbb{N}}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}}(B A)$	A	C	$\pi_{\mathbb{N}}(C A)$
a_1	0.1	a_1	b_1	0.5	a_1	c_1	1
a_2	1	a_1	b_2	0.8	a_1	c_2	0.3
		a_2	b_1	0	a_2	c_1	0.7
		a_2	b_2	1	a_2	c_2	1

TAB. 8 – – Distributions de possibilités locales partiellement sous-normalisées.

A	$\pi_{\mathbb{N}}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}}(B A)$	A	C	$\pi_{\mathbb{N}}(C A)$
a_1	1	a_1	b_1	1	a_1	c_1	0.1
a_2	0.1	a_1	b_2	0.8	a_1	c_2	0.2
		a_2	b_1	0	a_2	c_1	1
		a_2	b_2	1	a_2	c_2	0.4

TAB. 9 – – Distributions de possibilités locales partiellement sous-normalisées.

La Table 10 donne la distribution jointe associée à \mathbb{N} qui est sous-normalisée, puisque $h(\pi_{\mathbb{N}}^J) = 0.2$.

A	B	C	$\pi_{\mathbb{N}}^J(A, B, C)$	A	B	C	$\pi_{\mathbb{N}}^J(A, B, C)$
a_1	b_1	c_1	0.1	a_2	b_1	c_1	0
a_1	b_1	c_2	0.2	a_2	b_1	c_2	0
a_1	b_2	c_1	0.08	a_2	b_2	c_1	0.1
a_1	b_2	c_2	0.16	a_2	b_2	c_2	0.04

TAB. 10 – – Distribution de possibilité jointe sous-normalisée.

La proposition suivante donne une situation, où des distributions locales sous-normalisées impliqueraient toujours une distribution globale sous-normalisée.

Proposition 5 Soit \mathbb{N} un réseau possibiliste. Supposons qu'il existe une variable A , tel que $\forall \mu_a \in U_A, \forall a \in D_A, \max_{a \in D_A} (\pi_{\mathbb{N}}(a | \mu_a)) \neq 1$. Alors la distribution de possibilité jointe est sous-normalisée.

Preuve. Supposons que pour $A_k, \forall \mu_{a_k}, \max_{a_k \in D_{A_k}} \pi_{\mathbb{N}}(a_k | \mu_{a_k}) \neq 1$. Par définition :

$$h(\pi_{\mathbb{N}}^J) = \max_{a_1, \dots, a_n} \pi_{\mathbb{N}}^J(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = \max_{a_1, \dots, a_k, \dots, a_n} ((\prod_{i \neq k} \pi_{\mathbb{N}}(a_i | \mu_{a_i})) * \pi_{\mathbb{N}}(a_k | \mu_{a_k})) = \max_{a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n} (\prod_{i \neq k} \pi_{\mathbb{N}}(a_i | \mu_{a_i})) * \max_{a_k} (\pi_{\mathbb{N}}(a_k | \mu_{a_k}))$$

Comme $\max_{a_k \in D_{A_k}} (\pi_{\mathbb{N}}(a_k | \mu_{a_k})) \neq 1, \forall \mu_{a_k}$.

Donc $h(\pi_{\mathbb{N}}^J) \neq 1$. \square

Un cas particulier emerge de la proposition précédente. C'est le cas où la distribution de possibilité locale au niveau de la racine est sous-normalisée.

Corollaire 1 Soit \mathbb{N} un réseau possibiliste. Soit A une variable racine tel que : $\max_{a \in D_A} \pi_{\mathbb{N}}(a) \neq 1$. Alors la distribution jointe $\pi_{\mathbb{N}}^J$ est sous-normalisée.

6.2 Procédure de restauration de la normalisation

Après cette caractérisation des relations entre la sous-normalisation au niveau des distributions locales et la sous-normalisation au niveau de la distribution jointe, cette section a pour objectif de proposer une méthode de restauration de la cohérence. Plus précisément, soit \mathbb{N} un réseau possibiliste dont les distributions locales sont sous-normalisées. Notre but est de construire un réseau possibiliste \mathbb{N}_1 tel que :

$$\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}_1}^J(\omega) = \frac{\pi_{\mathbb{N}}^J(\omega)}{h(\pi_{\mathbb{N}}^J)},$$

c'est à dire $\pi_{\mathbb{N}_1}^J$ est le résultat de normalisation de $\pi_{\mathbb{N}}^J$.

Le principe de la procédure de normalisation de \mathbb{N} que nous proposons consiste à construire un réseau \mathbb{N}_1 telles que toutes les distributions locales au niveau de \mathbb{N}_1 soient normalisées. \mathbb{N}_1 est obtenu en normalisant les distributions locales au niveau de chaque variable. Nous commençons d'abord par le cas d'un réseau possibiliste où la distribution de possibilité au niveau d'une variable racine est sous normalisée.

Proposition 6 Soit \mathbb{N} un réseau possibiliste. Soit A une variable racine, telle que :

$\max_{a \in D_A} (\pi_{\mathbb{N}}(a)) = \alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Définissons \mathbb{N}_1 tel que :

- $G_{\mathbb{N}_1} = G_{\mathbb{N}}$,
- $\forall X, X \neq A, \pi_{\mathbb{N}_1}(X | U_X) = \pi_{\mathbb{N}}(X | U_X)$,
- $\forall a \in D_A, \pi_{\mathbb{N}_1}(a) = \pi_{\mathbb{N}}(a)/\alpha$.

Alors $\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}_1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega)/\alpha$.

Preuve. Supposons que A_1 est une variable racine et $\max_{a \in D_{A_1}} \pi_{\mathbb{N}}(a) = \alpha$. En utilisant la définition 1, la distribution jointe associée au réseau \mathbb{N}_1 est :

$$\pi_{\mathbb{N}_1}^J(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1, n} (\pi_{\mathbb{N}_1}(a_i | \mu_{a_i})) = \pi_{\mathbb{N}_1}(a_1) \cdot \prod_{i=2, n} (\pi_{\mathbb{N}_1}(a_i | \mu_{a_i})) = \frac{\pi_{\mathbb{N}}(a_1)}{\alpha} \cdot (\prod_{i=2, n} \pi_{\mathbb{N}}(a_i | \mu_{a_i})) = \frac{1}{\alpha} \cdot (\prod_{i=1, n} \pi_{\mathbb{N}}(a_i | \mu_{a_i})) = \frac{1}{\alpha} \pi_{\mathbb{N}}^J(a_1, \dots, a_n). \quad \square$$

La méthode explicitée dans cette proposition permet de normaliser les variables racines. L'exemple suivant illustre cette proposition.

Exemple 7 Considérons le réseau causal \mathbb{N} dont le graphe $G_{\mathbb{N}}$ est représenté par la Figure 7 et dont les distributions de possibilités sont données par la Table 11.

A	$\pi_{\mathbb{N}}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}}(B A)$	A	C	$\pi_{\mathbb{N}}(C A)$
a_1	0.1	a_1	b_1	1	a_1	c_1	1
a_2	0.4	a_1	b_2	0.8	a_1	c_2	0
		a_2	b_1	0	a_2	c_1	0.7
		a_2	b_2	1	a_2	c_2	1

TAB. 11 – – Distributions de possibilités initiales associées à \mathbb{N} .

Nous constatons que $\max_{a \in D_A} (\pi_{\mathbb{N}}(a)) = 0.4 < 1$. Nous définissons alors le nouveau réseau \mathbb{N}_1 dont le graphe $G_{\mathbb{N}_1}$ est identique à celui donné par la Figure 7. Les distributions de

possibilités correspondantes sont définies par :

$$\pi_{\mathbb{N}1}(a_1) = \pi_{\mathbb{N}}(a_1)/0.4 = 0.1/0.4 = 0.25 \text{ et } \pi_{\mathbb{N}1}(a_2) = \pi_{\mathbb{N}}(a_2)/0.4 = 0.4/0.4 = 1.$$

$$\pi_{\mathbb{N}1}(b \mid a) = \pi_{\mathbb{N}}(b \mid a) \quad \forall b \in D_B \text{ et } \forall a \in D_A.$$

$$\pi_{\mathbb{N}1}(c \mid a) = \pi_{\mathbb{N}}(c \mid a) \quad \forall c \in D_C \text{ et } \forall a \in D_A.$$

Alors, nous pouvons vérifier que : $\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega)/0.4$.

Pour une variable A, qui n'est pas racine, la normalisation de sa distribution locale se fait en modifiant les distributions de possibilités associées aux parents de A. Bien sûr, comme nous modifions la distribution des possibilités des parents de A, le résultat de la normalisation de la variable A peut produire, comme effet de bord, une distribution sous-normalisée au niveau des parents de A. De ce fait le processus de normalisation se fait de façon itérative partant des feuilles jusqu'aux variables racines.

Considérons dans un premier temps, le cas d'une variable A, dont la distribution locale est sous-normalisée, et qui admet un seul parent.

Proposition 7 Soit \mathbb{N} un réseau possibiliste. Soit A une variable qui admet un seul parent B. Supposons qu'il existe une instance 'b' de B tel que $\max_{a \in D_A} \pi_{\mathbb{N}}(a \mid b) = \alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Définissons $\mathbb{N}1$ tel que le graphe associé à $\mathbb{N}1$ est identique à celui de \mathbb{N} et les distributions locales associées à \mathbb{N} sont définies comme suit :

$$1. \quad \forall C \neq A, \forall C \neq B, \pi_{\mathbb{N}1}(C \mid U_C) = \pi_{\mathbb{N}}(C \mid U_C).$$

2.

$$\forall a_j, \forall b_i, \quad \pi_{\mathbb{N}1}(a_j \mid b_i) = \begin{cases} \frac{\pi_{\mathbb{N}}(a_j \mid b_i)}{\alpha} & \text{si } b_i = b \\ \pi_{\mathbb{N}}(a_j \mid b_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

3.

$$\forall b_i, \forall \mu_{b_i}, \quad \pi_{\mathbb{N}1}(b_i \mid \mu_{b_i}) = \begin{cases} \pi_{\mathbb{N}}(b_i \mid \mu_{b_i}) * \alpha & \text{si } b_i = b \\ \pi_{\mathbb{N}}(b_i \mid \mu_{b_i}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega)$.

Preuve. Considérons l'ensemble des variables $A_1, \dots, A_{n-2}, A, B$ associé au réseau causal possibiliste \mathbb{N} . Soient $U_A = \{B\}$ et $\max_a (\pi(a \mid b)) = \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, b instance de B.

En utilisant la Définition 1, la distribution jointe associée à \mathbb{N} est donnée par :

$$\forall a_1 \in D_{A_1}, \dots, \forall a_{n-2} \in D_{A_{n-2}}, \forall a_j \in D_A, \forall b_i \in D_B,$$

$$\pi_{\mathbb{N}1}^J(a_1, \dots, a_{n-2}, a_j, b_i) = \pi_{\mathbb{N}1}(a_j \mid b_i) * \pi_{\mathbb{N}1}(b_i \mid \mu_{b_i}) * \prod_{k=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}1}(a_k \mid \mu_{a_k}).$$

Deux cas se présentent :

Cas 1 : $b_i = b$

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{N}1}^J(a_1, \dots, a_{n-2}, a_j, b_i) &= \frac{\pi_{\mathbb{N}}(a_j \mid b_i)}{\alpha} * (\pi_{\mathbb{N}}(b_i \mid \mu_{b_i}) * \alpha) * \prod_{k=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}}(a_k \mid \mu_{a_k}) \\ &= \pi_{\mathbb{N}}(a_j \mid b_i) * \pi_{\mathbb{N}}(b_i \mid \mu_{b_i}) * \prod_{k=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}}(a_k \mid \mu_{a_k}) \end{aligned}$$

Fusion de réseaux possibilistes

$$= \pi_{\mathbb{N}}^J(a_1, \dots, a_{n-2}, a_j, b_i).$$

Cas 2 : $b_i \neq b$

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{N}1}^J(a_1, \dots, a_{n-2}, a_j, b_i) &= \pi_{\mathbb{N}1}(a_j \mid b_i) * \pi_{\mathbb{N}1}(b_i \mid \mu_{b_i}) * \prod_{k=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}1}(a_k \mid \mu_{a_k}) \\ &= \pi_{\mathbb{N}}(a_j \mid b_i) * \pi_{\mathbb{N}}(b_i \mid \mu_{b_i}) * \prod_{k=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}}(a_k \mid \mu_{a_k}) \\ &= \pi_{\mathbb{N}}^J(a_1, \dots, a_{n-2}, a_j, b_i). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons bien :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega). \square$$

Expliquons les différentes conditions, citées dans la Proposition 7, qui permettent de normaliser la distribution de possibilité locale au niveau du nœud A, qui admet un seul parent B. La première condition signifie que les distributions de possibilités associées aux variables, du réseau $\mathbb{N}1$, autres que A et B, restent inchangées. La deuxième condition explicite que la normalisation s'applique seulement sur la variable A (variable concernée par le problème de sous-normalisation). Finalement la troisième condition opère sur la variable B (parent de A) l'opération inverse de la normalisation, qui permet d'assurer une équivalence entre les distributions jointes.

Exemple 8 Illustrons la Proposition 7 par un exemple de sous-normalisation d'une variable B, appartenant au graphe de la Figure 7. La variable B possède un seul parent A. La table 12 donne des distributions locales initiales. On remarque que : $\max_b \pi_{\mathbb{N}}(b \mid a_2) = 0.5$.

Construisons le réseau $\mathbb{N}1$, correspondant au résultat de la normalisation de la variable B.

A	$\pi_{\mathbb{N}}(A)$	A	B	$\pi_{\mathbb{N}}(B \mid A)$	A	C	$\pi_{\mathbb{N}}(C \mid A)$
a_1	1	a_1	b_1	0.3	a_1	c_1	1
a_2	0.3	a_1	b_2	1	a_1	c_2	0.3
		a_2	b_1	0.5	a_2	c_1	0.7
		a_2	b_2	0.1	a_2	c_2	1

TAB. 12 – – Distributions de possibilités initiales.

Le nouveau réseau $\mathbb{N}1$, ainsi obtenu, est tel que son graphe est identique à celui de la Figure 7, et ses distributions de possibilités sont définies comme suit :

- Pour le nœud C :
 $\forall i, \pi_{\mathbb{N}1}(c_i \mid a_1) = \pi_{\mathbb{N}}(c_i \mid a_1)$ et $\pi_{\mathbb{N}1}(c_i \mid a_2) = \pi_{\mathbb{N}}(c_i \mid a_2)$.
- Pour le nœud A :
 $\pi_{\mathbb{N}1}(a_1) = \pi_{\mathbb{N}}(a_1) = 1$ et $\pi_{\mathbb{N}1}(a_2) = \pi_{\mathbb{N}}(a_2) * 0.5 = 0.3 * 0.5 = 0.15$.
- Pour le nœud B :
 $\pi_{\mathbb{N}1}(b_1 \mid a_2) = \pi_{\mathbb{N}}(b_1 \mid a_2) / 0.5 = 1$ et $\pi_{\mathbb{N}1}(b_2 \mid a_2) = \pi_{\mathbb{N}}(b_2 \mid a_2) / 0.5 = 0.2$.

Les distributions jointes associées aux deux réseaux sont identiques. Par exemple :

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbb{N}}^J(a_2 b_2 c_1) &= \pi_{\mathbb{N}}(b_2 \mid a_2) * \pi_{\mathbb{N}}(c_1 \mid a_2) * \pi_{\mathbb{N}}(a_2) = 0.1 * 0.7 * 0.3 = 0.021. \\ \pi_{\mathbb{N}1}^J(a_2 b_2 c_1) &= \pi_{\mathbb{N}1}(b_2 \mid a_2) * \pi_{\mathbb{N}1}(c_1 \mid a_2) * \pi_{\mathbb{N}1}(a_2) = 0.2 * 0.7 * 0.15 = 0.021.\end{aligned}$$

Généralisons le résultat de la proposition précédente. Dans la suite, nous définissons une relation d'ordre entre les variables, $A \leq B$ si B n'est pas descendant de A. Comme les graphes associés aux réseaux possibilistes sont des DAGs alors si A et B sont deux variables, nous avons toujours soit $A \leq B$ soit $B \leq A$ (nous pouvons bien sûr avoir les deux cas).

Définition 3 Soit $\mathbb{N} = (\pi_{\mathbb{N}}, G_{\mathbb{N}})$ un réseau possibiliste. Soit A une variable dont la distribution de possibilité locale est sous-normalisée. Soit μ_a^α une instance de U_A tel que :

$$\max_{a \in D_A} (\pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a^\alpha)) = \alpha \text{ où } 0 < \alpha < 1. \text{ Soit } B \in U_A \text{ tel que } \forall C \neq B \in U_A, B \leq C.$$

Le réseau possibiliste $\mathbb{N}1 = (\pi_{\mathbb{N}1}, G_{\mathbb{N}1})$ résultat de la normalisation de \mathbb{N} est tel que :

1. $G_{\mathbb{N}1} = G_{\mathbb{N}} \cup \{C \rightarrow B : C \in U_A, C \neq B\}$.
2. Les distributions de possibilités locales sont définies par :
 - (a) $\forall X \neq A, \forall X \neq B, \pi_{\mathbb{N}1}(X \mid U_X) = \pi_{\mathbb{N}}(X \mid U_X)$.
 - (b) $\forall a \in D_A, \forall \mu'_a \in D_{U_A},$

$$\pi_{\mathbb{N}1}(a \mid \mu'_a) = \begin{cases} \frac{\pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a^\alpha)}{\alpha} & \text{si } \mu'_a = \mu_a^\alpha \\ \pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(c) \quad \forall b \in D_B,$$

$$\forall \mu'_b, \quad \pi_{\mathbb{N}1}(b \mid \mu'_b) = \begin{cases} \pi_{\mathbb{N}}(b \mid \mu_b) * \alpha & \text{si } \mu'_b \wedge b \text{ est consistante avec } \mu_a^\alpha \\ \pi_{\mathbb{N}}(b \mid \mu_b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans cette définition, nous rappelons d'abord qu'elle concerne la normalisation de la distribution de possibilité locale associée à une variable qui admet au moins deux parents. Dans cette définition la variable B existe toujours (sinon le graphe contiendrait un cycle).

La première condition signifie que le graphe $G_{\mathbb{N}1}$ contient tous les liens de $G_{\mathbb{N}}$ plus de nouveaux liens de chaque variable C (distincte de B et qui est parent de A) vers la variable B. Concernant les distributions de possibilités du réseau $\mathbb{N}1$, nous avons : La condition (a) indique que les distributions de possibilités, associées aux variables qui sont différentes de A et B, gardent les mêmes valeurs que celles données par le réseau initial. La condition (b) normalise la distribution de possibilité associée à la variable A. La condition (c) répercute la normalisation sur la variable B afin de préserver la distribution jointe. μ'_b (resp. μ'_a) dénote une instance des parents de B (resp. des parents de A) dans le nouveau réseau $\mathbb{N}1$, alors que μ_b (resp. μ_a) dénote une instance des parents de B (resp. des parents de A) dans le réseau initial \mathbb{N} .

Proposition 8 Soit $\mathbb{N} = (\pi_{\mathbb{N}}, G_{\mathbb{N}})$ un réseau sous-normalisé, telle qu'il existe une variable ayant au moins deux parents et dont la distribution de possibilité locale est sous-normalisée. Soit $\mathbb{N}1 = (\pi_{\mathbb{N}1}, G_{\mathbb{N}1})$ le réseau possibiliste normalisé obtenu en utilisant la définition précédente. Alors :

$$\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega).$$

Fusion de réseaux possibilistes

Preuve. Soit \mathbb{N} et $\mathbb{N}1$ deux réseaux possibilistes définis selon la Définition 3. Supposons que pour la variable A , il existe $\mu_a^\alpha \in U_A$ tel que : $\max_a \pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a^\alpha) = \alpha \neq 1$.

Soit $\omega = (a_1, \dots, a_{n-2}, a, b)$ où a une instance de A et b une instance de B . La distribution jointe, associée au réseau $\mathbb{N}1$, est donnée par :

$$\pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}1}^J(a_1, \dots, a_{n-2}, b, a) = (\prod_{i=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}1}(a_i \mid \mu_{a_i})) * \pi_{\mathbb{N}1}(b \mid \mu'_b) * \pi_{\mathbb{N}1}(a \mid \mu'_a).$$

Si $\mu'_a = \mu_a^\alpha$ alors

$$\pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = (\prod_{i=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}}(a_i \mid \mu_{a_i})) * (\pi_{\mathbb{N}}(b \mid \mu_b) * \alpha) * (\pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a^\alpha) / \alpha).$$

Sinon

$$\pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = (\prod_{i=1}^{n-2} \pi_{\mathbb{N}}(a_i \mid \mu_{a_i})) * (\pi_{\mathbb{N}}(b \mid \mu_b)) * (\pi_{\mathbb{N}}(a \mid \mu_a)).$$

D'où

$$\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega). \quad \square$$

En se basant sur les propositions précédentes, la procédure de normalisation peut être définie comme suit :

Procédure Normalisation	
Données :	Un réseau possibiliste \mathbb{N} sous-normalisé
Résultat :	Un réseau possibiliste $\mathbb{N}1$ normalisé
début	
	Ordonner l'ensemble des variables $V = \{A_1, \dots, A_n\}$ tels que les parents de A_i (éventuellement vide) soient inclus dans $V' = \{A_{i+1}, \dots, A_n\}$;
	pour tout $i = 1, \dots, n$ tel que $\exists \mu_{a_i} \in U_{A_i}$ et $0 < \max_{a_i} \pi_{\mathbb{N}}(a_i \mid \mu_{a_i}) < 1$ faire
	si A_i est racine alors
	appliquer la Proposition 6;
	sinon
	si A_i possède un seul parent $\mu_{a_i} \in V'$ alors appliquer la Proposition 7;
	sinon appliquer la Proposition 8;
fin	

Cet algorithme garantit la normalisation du réseau obtenu, puisque les propositions 6, 7 et 8 donnent un résultat normalisé. Plus formellement :

Proposition 9 Soit \mathbb{N} un réseau possibiliste sous-normalisé. Soit $\mathbb{N}1$ le résultat obtenu par la procédure de Normalisation donnée ci-dessous. Alors :

$$\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}(\omega) = \frac{\pi_{\mathbb{N}}(\omega)}{h(\pi_{\mathbb{N}})}.$$

Preuve. Notons d'abord que normaliser les nœuds qui ne sont pas racines ne modifie pas la distribution jointe. De ce fait l'application des propositions 7 et 8 sur les nœuds qui ne sont pas des nœuds racines donne un réseau $\mathbb{N}2$ tel que :

- $\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}}^J(\omega) = \pi_{\mathbb{N}2}^J(\omega)$ et $h(\pi_{\mathbb{N}}^J) = h(\pi_{\mathbb{N}2}^J)$,
- $\forall A$ une variable non racine de $\mathbb{N}2$, $\forall \mu_a$ instance des parents de A dans $\mathbb{N}2$,
 $\max_{a \in D_A} (\pi_{\mathbb{N}2}(a \mid \mu_a)) = 1$.

Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ l'ensemble des racines dans $\mathbb{N}2$. En utilisant la Définition 1, nous avons :

$$\forall a_i \in D_{A_i}, h(\pi_{\mathbb{N}2}^J) = \max_{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n} \pi_{\mathbb{N}2}^J(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

$$= \max_{a_1, \dots, a_k} (\prod_{i=1}^k \pi_{\mathbb{N}2}(a_i)) * \max_{a_{k+1}, \dots, a_n} (\prod_{i=k+1}^n \pi_{\mathbb{N}2}(a_i \mid \mu_{a_i})).$$

Comme les variables $\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ ne sont pas racines alors les distributions locales au niveau de ces variables sont toutes normalisées. Par conséquent, pour toute instance a_{k+1}, \dots, a_n fixée, l'expression $\max_{a_{k+1}, \dots, a_n} (\prod_{i=k+1}^n \pi_{\mathbb{N}2}(a_i \mid \mu_{a_i})) = 1$. Ceci implique que :

$$h(\pi_{\mathbb{N}2}^J) = \max_{a_1, \dots, a_k} (\pi_{\mathbb{N}2}(a_1) * \dots * \pi_{\mathbb{N}2}(a_k)) = (\max_{a_1} \pi_{\mathbb{N}2}(a_1)) * \dots * (\max_{a_k} \pi_{\mathbb{N}2}(a_k)) \\ = h(\pi_{\mathbb{N}2}(A_1)) * \dots * h(\pi_{\mathbb{N}2}(A_k)).$$

Maintenant, il suffit de construire un nouveau réseau $\mathbb{N}1$ où pour chaque variable A_i racine, nous remplaçons la distribution locale $\pi_{\mathbb{N}2}(A_i)$ par $\pi_{\mathbb{N}2}(A_i)/h(\pi_{\mathbb{N}2}(A_i))$ (Proposition 6) :

$$\forall \omega, \pi_{\mathbb{N}1}(\omega) = \frac{\pi_{\mathbb{N}2}(\omega)}{h(\pi_{\mathbb{N}2}(A_1)) * \dots * h(\pi_{\mathbb{N}2}(A_k))} = \frac{\pi_{\mathbb{N}2}(\omega)}{h(\pi_{\mathbb{N}2}^J)} = \frac{\pi_{\mathbb{N}}(\omega)}{h(\pi_{\mathbb{N}}^J)}. \square$$

7 Conclusions

Dans cet article, nous avons proposé la fusion des réseaux possibilistes quantitatifs. Nous avons montré que dans le cas des réseaux possibilistes de même structures, la fusion est réalisée d'une manière efficace. Ensuite nous avons étudié la fusion de réseaux dont l'union des structures ne contient pas de cycles. En particulier, nous avons donné comment rajouter une variable ou un arc sans modifier la distribution jointe. Un traitement du problème de sous-normalisation émanant de la fusion des réseaux a été effectué. La procédure de fusion pour les graphes U-acycliques est réalisée en un temps polynômial en fonction des paramètres (nombre des degrés de possibilités) des graphes. En outre, la complexité du processus de normalisation reste polynômial si le graphe a une structure particulière, par exemple celle d'un arbre.

Nos travaux futurs consistent dans un premier temps à étendre les solutions préliminaires proposées dans (Benferhat et Titouna (2006)) pour les traitements des cycles, à prendre en compte d'autres opérateurs de combinaisons possibilistes et enfin à appliquer les résultats de cet article à un problème de localisation de robots dans un environnement incertain (Sossai et Chemello (2002)).

Remerciements

Ce travail entre dans le cadre du projet ANR Blanc MICRAC.

Références

- Ben Amor, N., S. Benferhat, D. Dubois, H. Geffner, et H. Prade (2000). Independence in qualitative uncertainty frameworks. *In Proceedings of the 7th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR2000)*, 235–246.
- Benferhat, S., D. Dubois, L. Garcia, et H. Prade (2002). On the transformation between possibilistic logic bases and possibilistic causal networks. *International Journal of Approximate Reasoning* 29, 135–173.

- Benferhat, S., D. Dubois, et H. Prade (1997). From semantic to syntactic approaches to information combination in possibilistic logic. *Aggregation and Fusion of Imperfect information*, physica Verlag, 141–151.
- Benferhat, S. et F. Titouana (2006). Agregating quantitative possibilistic networks. *In Proceedings of the 9th International Florida Artificial Intelligence Research, (Flairs'06)*, 800–805.
- Borgelt, C., J. Gebhardt, et R. Kruse (1998). Possibilistic graphical models. *In Proceedings of International School for the Synthesis of Expert Knowledge (ISSEK'98)*, Springer, Udine, Italy, 51–68.
- Bouchon-Meunier, B. et C. Marsala (2002). Independence and possibilistic conditioning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 35, 107–124.
- De Cooman, G. (1997). Possibility theory - parti: Measure and integrals; thoretics groundwork; partii: Conditional possibility; partiii: Possibilistic independence. *International Journal of General Systems* 25, 291–371.
- Dubois, D. et H. Prade (1988). Possibility theory: An approach to computerized processing of uncertainty. *Plenum Press, New York*.
- Dubois, D. et H. Prade (1994). Possibility theory and data fusion in poorly informed environments. *Journal of Control Engineering Practice* 2, 811–823.
- Fonck, P. (1992). Propagating uncertainty in a directed acyclic graph. *In Proceedings of International Conference on Information Processing of Uncertainty in Knowledge Based Systems (IPMU'92)*, 17–20.
- Jensen, F. (1996). Introduction to bayesian networks. *UCL Press, University college, London*.
- Konieczny, S. et R. Perez (1998). On the logic of merging. *In Proceedings of the 6th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, (KR'98)*, 488–498.
- Lin, J. et A. Mendelzon (1998). Merging databases under constraints. *International Journal of Cooperative Information Systems* 7, 55–76.
- Pearl, J. (1988). Probabilistic reasoning in intelligent systems: Networks of plausible inference. *Morgan Kaufmann, San Fransisco (California)*.
- Qi, G., W. Liu, D. Glass, et D. Bell (2006). A split-combination approach to merging knowledge bases in possibilistic logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 48(1-2), 45–84.
- Sossai, C. et G. Chemello (2002). Coherent functions in autonomous systems. *Journal of Multiple-valued Logic and Soft Computing* 9, 171–194.
- Zadeh, L. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems* 1, 13–28.

Summary

The problem of merging multiple-source uncertain information is a crucial issue in many applications. This paper proposes an analysis of possibilistic merging operators where uncertain information is encoded by means of product-based (or quantitative) possibilistic networks. We first show that the product-based merging of possibilistic networks having the same DAG structures can be easily achieved in a polynomial time. We then propose solutions to merge

possibilistic networks having different structures and where the union of their graphs is free of cycles. The last section deals with the sub-normalization problem which reflects the presence of conflicts between different sources.