Indice de comparaison de hiérarchies semi-floues : application aux hiérarchies classiques

Sahondra Ravonialimanana *, Henri Ralambondrainy **
Jean Diatta**

* Université de Fianarantsoa
rafilipo@wanadoo.mg
** Université de la Réunion
{ralambon,jdiatta}@univ-reunion.fr

Résumé. Nous définissons la notion de hiérarchie semi-floue à partir de celle de hiérarchie classique. Nous proposons des indices mesurant d'une part l'imbrication d'un ensemble flou dans une hiérarchie semi-floue, et d'autre part l'imbrication d'une hiérarchie semi-floue dans une autre. Ces indices sont des outils permettant de comparer deux hiérarchies classiques.

1 Introduction

Les méthodes de Classification Ascendante Hiérarchique (CAH) (Benzécri et Collaborateurs, 1973) structurent des données usuelles en une hiérarchie d'ensembles classiques. Cette hiérarchie dépend essentiellement de la mesure de dissimilarité utilisée et pour une mesure de dissimilarité du lien d'agrégation adopté. En effet, sur un même ensemble de données, des mesures de dissimilarité et/ou liens d'agrégation différents peuvent donner lieu à différentes hiérarchies. Cela pose alors le problème de la comparaison de plusieurs hiérarchies que l'on retrouve dans des domaines comme la Systématique (reconstitution d''arbres phylogénétiques par exemple). D'après Leclerc (1985), on peut distinguer deux approches principales : d'une part la construction de critères numériques, un critère servant à évaluer et à comparer les hiérarchies sous un aspect donné (comme la moyenne sert à comparer des distributions du point de vue de leur position centrale) ; d'autre part la définition d'indices de dissimilarité entre hiérarchies.

L'indice d'imbrication proposé dans ce papier, peut être considéré comme s'inscrivant dans cette deuxième approche même s'il est asymétrique. De plus, il est défini sur des hiérarchies dites "semi-floue" qui généralisent les hiérarchies classiques dans le cadre de la théorie des ensembles flous (Zadeh, 1965). En effet, il étend aux hiérarchies semi-floues l'indice d'imbrication entre sous-ensembles flous proposé par Kosko (1992).

L'article est organisé comme suit : après l'introduction (section 1), la section 2 rappelle quelques concepts de base de la théorie des ensembles flous et introduit la notion de hiérarchie semi-floue. La section 3 introduit l'indice d'imbrication de sous ensembles flous proposé par Kosko. Dans la section 4, des extensions de cet indice sont proposées pour mesurer d'une part le degré d'appartenance d'un ensemble flou à une hiérarchie semi-floue, et d'autre-part le degré d'imbrication d'une hiérarchie semi-floue dans une autre. Un exemple d'application (section

5) portant sur l'utilisation des indices pour comparer deux hiérarchies classiques montrant l'intérêt de la démarche proposée précède une courte conclusion.

2 Hiérarchies semi-floues

2.1 Rappels sur les ensembles flous

La théorie des ensembles flous a été introduite au début des années 60 par Zadeh (1965) pour tenir compte de l'imprécision inhérante à la description des données. L'idée principale est de regarder les sous-ensembles d'un ensemble donné (ensemble de référence) au travers de leurs fonctions indicatrices. En effet, dans la théorie classique, un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble, ce qui se traduit par une fonction indicatrice à valeurs dans la paire $\{0,1\}$. La prise en compte de l'imprécision peut alors être traduite en considérant une fonction d'appartenance à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ permettant ainsi d'exprimer qu'un élément appartient à un certain degré à un sous-ensemble donné.

Dans la théorie des ensembles flous, l'ensemble de référence est appelé univers du discours. Dans ce papier, nous considérons un univers de discours fini de cardinal n, noté X. Un sous ensemble flou h de X est défini par une fonction d'appartenance $m_h \in [0,1]^X$. Le support de m_h est l'ensemble

$$supp(m_h) = \{x \in X / m_h(x) \neq 0\},$$

$\mathcal{F}(X)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles flous de X. Nous adopterons les opérations ensemblistes usuelles suivantes sur $\mathcal{F}(X)$:

- *égalité* : $h = h' \iff m_h = m_{h'}$,
- *inclusion* : $h \subseteq h' \iff m_h \leq m_{h'}$,
- *intersection* : $m_{h \cap h'} = m_h \wedge m_{h'}$.

Muni de l'ordre d'inclusion $\mathcal{F}(X)$ a un plus petit élément $m_\emptyset$ noté **0** et un plus grand élément m_X noté **1.** Un ensemble flou sera désigné indifféremment par h ou m_h.

2.2 Hiérarchies semi-floues

Une hiérarchie totale sur X est une collection $\mathcal{H}$ de sous ensembles de X vérifiant les propriétés suivantes :

1. $X \in \mathcal{H}$;
2. $\forall H, H' \in \mathcal{H} : H \cap H' \in \{H, H', \emptyset\}$;
3. $\forall x \in X : \{x\} \in \mathcal{H}$.

En identifiant les sous-ensembles de X à leurs fonctions caractéristiques respectives, les propriétés de $\mathcal{H}$ peuvent s'exprimer comme suit :

1. $\mathbf{1} \in \mathcal{H}$;
2. $\forall H, H' \in \mathcal{H} : \mathbf{1}_{H \cap H'} = \mathbf{1}_H \wedge \mathbf{1}_{H'} \in \{\mathbf{1}_H, \mathbf{1}_{H'}, \mathbf{0}\}$;
3. $\forall x \in X : \mathbf{1}_{\{x\}} \in \mathcal{H}$.

Cela nous conduit à la définition suivante d'une hiérarchie semi-floue :

Définition 2.1 *Une hiérarchie semi-floue* $\mathcal{F}$ *est une famille de sous-ensembles flous de* $\mathcal{F}(X)$ *vérifiant :*

B1) $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$;

B2) $\forall h, h' \in \mathcal{F} : m_{h\cap h'} = m_h \wedge m_{h'} \in \{m_h, m_{h'}, \mathbf{0}\}$;

B3) $\forall x \in X : m_{\{x\}} \in \mathcal{F}$;

où pour $x \in X,\ m_{\{x\}}$ *désigne un ensemble flou dont le support est* $\{x\}$.

La propriété B2 signifie que deux classes h, h' d'une hiérarchie semi-floue sont telles que $m_h \leq m_{h'}$ ou $m_{h'} \leq m_h$ ou $supp(m_h) \cap supp(m'_h) = \emptyset$. Les partitions associées à une hiérarchie semi-floue ne sont pas des partitions floues au sens de Bezdek (1981). Les éléments d'une classe ont un degré d'appartenance différent de zéro à la classe, mais les supports des classes sont d'intersection vide comme dans le cas des partitions classiques. Si $\mathcal{F}$ est une hiérarchie semi-floue sur X, alors il est facile de voir que $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \{H = supp(m_h)/h \in \mathcal{F}\}\}$ est une hiérarchie classique. On dira que $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ est le support de la hiérarchie $\mathcal{F}$ et l'on notera $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = supp(\mathcal{F})$.

2.3 Construction d'une hiérarchie semi-floue

La proposition ci-dessous montre une manière simple de construire une hiérarchie semi-floue à partir d'une hiérarchie classique.

Proposition 2.1 *Soit* A *un ensemble flou dont le support est* X *et* $\mathcal{H}$ *une hiérarchie totale classique sur* X*. L'ensemble* $\mathcal{F} = \{m_H | H \in \mathcal{H}\}$ *tel que, pour tout* $x, y \in X$,

1. $m_{\{x\}}(x) = m_A(x)$;
2. $H \neq X,\ m_H(y) = \vee_{x\in H} m_{\{x\}}(y)$;
3. $m_X = \mathbf{1}$.

   est une hiérarchie semi-floue dont le support est $\mathcal{H}$.

Démonstration. Par définition de $\mathcal{F}$, il est facile de voir que les propriétés $B1$ et $B3$ sont vérifiées. Remarquons que si $y \in H$ alors $m_H(y) = \vee_{x\in H} m_{\{x\}}(y) = m_{\{y\}}(y)$ et que si $y \notin H, m_H(y) = 0$. Autrement dit $H = supp(m_H)$. Etudions la propriété B2. Soient $m_H, m_{H'} \in \mathcal{F}$. Si $H \cap H' = \emptyset$ alors $m_H \wedge m_{H'} = \mathbf{0}$. En effet, si $y \in X$, alors $m_H \wedge m_{H'}(y) \neq 0$ si et seulement si $m_H(y) \neq 0$ et $m_{H'}(y) \neq 0$ c.-à-d. si $y \in H$ et $y \in H'$. Si $H \cap H' = \emptyset$ alors il n'existe pas de tel y et donc $m_H \wedge m_{H'} = \mathbf{0}$. Si $H \cap H' \neq \emptyset$, comme $\mathcal{H}$ est une hiérarchie, on peut supposer $H \subset H'$, et clairement $m_H = \vee_{x\in H} m_{\{x\}} \leq m_{H'} = \vee_{x'\in H'} m_{\{x'\}}$, et alors $m_H \wedge m_{H'} = m_H$. □

Il est facile de voir que si $A = X$ c.-à-d. $m_A = \mathbf{1}$, alors la hiérarchie semi-floue $\mathcal{F}$ associée à une hiérarchie totale classique $\mathcal{H}$ sur X est $\mathcal{H}$.

3 Imbrication de sous ensembles flous

Dans cette partie, nous présentons l'indice d'imbrication proposé par Kosko (1992) et dégageons ses principales propriétés. Dans la théorie classique, un sous ensemble h est inclus dans un sous ensemble h' si tout élément de h appartient à h'. Dans la logique floue on définit l'inclusion de h dans h' par :

$$\forall x \in X, h \subseteq h' \text{ si } m_h(x) \leq m_{h'}(x).$$

Si h, h' sont des ensembles classiques, remarquons que si $h \subseteq h'$ alors on a les inégalités sur les cardinaux $|h| \leq |h'|$. Ceci nous conduit à la définition de la notion de magnitude.

Définition 3.1 *La magnitude d'un sous-ensemble flou h est définie par :* $M(h) = \sum_{x \in X} m_h(x)$.

Pour un ensemble fini classique H, on a $M(H) = |H|$. Nous pouvons aussi remarquer que $h \subseteq h'$ implique $M(h) \leq M(h')$. Le degré d'imbrication d'une classe h dans une classe h' est mesuré par la proportion, au sens de la magnitude, des éléments de h appartenant à h'. Plus précisément, on a :

Définition 3.2 *Etant donnés h, h', deux éléments de $\mathcal{F}(X)$, l'imbrication de h dans h' est définie par :*

$$S(h, h') = \frac{M(h \bigcap h')}{M(h)}$$

$S(h, h')$ représente donc le degré pour lequel h est un sous ensemble de h'. $S(,)$ prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Cette définition implique le théorème de Bayes :

$$S(h, h')M(h) = S(h', h)M(h').$$

La notion d'imbrication est une généralisation de celle de l'inclusion, dans le sens que si h est un sous ensemble flou de h', il est donc totalement imbriqué dans h'. Dans ce cas $S(h, h') = 1$.

Lorsque H et H' sont des ensembles finis classiques, l'imbrication de H dans H' s'écrit :

$$S(H, H') = \frac{M(H \bigcap H')}{M(H)} = \frac{|H \bigcap H'|}{|H|}$$

Les propriétés suivantes montrent la compatibilité entre l'indice d'imbrication S et l'ordre d'inclusion. La propriété 1 montre que le degré d'imbrication d'un singleton se ramène au degré d'appartenance de l'élément constituant ce singleton. Les propriétés 2,3 et 4 caractérisent l'inclusion large (2), stricte (3) et la disjonction (4) entre deux sous-ensembles en terme de cet indice d'imbrication. La propriété 5 montre la monotonie de l'indice par rapport à l'ordre d'inclusion.

Proposition 3.1 *Pour tout $h, h', h'' \in \mathcal{F}(X)$ et pour tout $x \in X$ on a :*

1. $S(\{x\}, h) = m_h(x)$;
2. $h \subseteq h' \iff S(h, h') = 1$;
3. $h' \subset h \iff 0 < S(h, h') < 1$;
4. $h \bigcap h' = \emptyset \iff S(h, h') = S(h', h) = 0$;
5. $h' \subseteq h'' \Rightarrow S(h, h') \leq S(h, h'')$.

Démonstration.

1. Par définition $S(\{x\}, h) = \frac{M(\{x\} \cap h)}{M(\{x\})} = M(\{x\} \cap h) = m_h(x)$.
2. Supposons que $h \subseteq h'$ alors $S(h, h') = \frac{M(h \cap h')}{M(h)} = \frac{M(h)}{M(h)} = 1$. Réciproquement, si $S(h, h') = 1$, ou encore $M(h \bigcap h') = M(h)$ c.-à-d. $\sum_{x \in X} m_{h \cap h'}(x) = \sum_{x \in X} m_h(x)$. Soit $\sum_{x \in X} m_h \wedge m_{h'}(x) = \sum_{x \in X} m_h(x)$, comme pour tout $x \in X,\ m_h \wedge m_{h'}(x) \leq m_h(x)$, on a nécessairement $m_h \wedge m_{h'}(x) = m_h(x)$ c.-à-d. $m_h \leq m_{h'}$ ou $h \subseteq h'$.
3. Démonstration analogue à 2.
4. $h \bigcap h' = \emptyset \iff M(\emptyset) = M(h \cap h') = 0 \iff S(h, h') = 0$.
5. $h' \subseteq h'' \Rightarrow M(h \cap h') \leq M(h \cap h'') \Rightarrow \frac{M(h \cap h')}{M(h)} \leq \frac{M(h \cap h'')}{M(h)} \Rightarrow S(h, h') \leq S(h, h'')$.

□

4 Extensions de l'indice d'imbrication de Kosko

4.1 Degré d'appartenance d'un sous ensemble flou à une hiérarchie semi-floue

Dans cette section, on se donne une hiérarchie semi-floue $\mathcal{F}$. La stratégie adoptée pour mesurer l'imbrication d'un sous ensemble flou Y dans une hiérarchie semi-floue $\mathcal{F}$ est la suivante : on commence par "situer" l'ensemble Y dans la hiérarchie, c.-à-d. on recherche d'une part la plus petite classe de $\mathcal{F}$ contenant Y (c.-à-d. $\overline{Y}$) et d'autre part les éléments de $\mathcal{F}$ maximaux parmi ceux contenus dans Y. Puis, on calcule aussi bien le degré d'imbrication de Y dans ces éléments maximaux que le degré d'imbrication de $\overline{Y}$ dans Y.

Si E est une famille de sous-ensembles flous, en considérant l'ensemble ordonné $(\mathcal{F}(X), \subset)$, on note $Max(E)$ (resp. $Min(E)$) l'ensemble des éléments maximaux (resp. minimaux) de E. Soit $Y \in \mathcal{F}(X)$ un ensemble flou non vide. On désigne par Y^u l'ensemble des classes de $\mathcal{F}$ qui majorent Y et Y^l l'ensemble des classes de $\mathcal{F}$ qui minorent Y. Soit $\overline{Y} = Min(Y^u)$. Pour tout $h, h' \in Y^u$, on a $Y \subseteq h$ et $Y \subseteq h'$. Donc $Y \subseteq h \cap h'$. Comme $\mathcal{F}$ est une hiérarchie semi-floue, on a $h \subseteq h'$ ou $h' \subseteq h$ de sorte que Y^u est une chaîne qui admet un seul élément minimal qui en est donc son plus petit élément : $\overline{Y} = Min(Y^u)$. On assimilera $\overline{Y}$ à cet élément unique. $\overline{Y}$ existe toujours car $Y \subseteq X$ et **1**$\in \mathcal{F}$. A developer (**?**)

On note $\underline{Y}^l$ l'ensemble des minorants de Y maximaux dans Y^l : $\underline{Y}^l = Max(Y^l)$. Le degré d'imbrication d'un sous ensemble flou Y dans une hiérarchie semi-floue $\mathcal{F}$ est mesuré par :

$$S(Y, \mathcal{F}) = \frac{1}{1 + |\underline{Y}^l|}(S(\overline{Y}, Y) + \sum_{y \in \underline{Y}^l} S(Y, y)).$$

La proposition ci-dessous montre que l'indice S defini ci-dessus est bien une fonction d'appartenance au sens des ensembles flous :

Proposition 4.1 *Soit $\mathcal{F}$ une hiérarchie semi-floue, on a :*

1. $0 \leq S(Y, \mathcal{F}) \leq 1$ *;*
2. $Y \in \mathcal{F} \iff S(Y, \mathcal{F}) = 1$.

Démonstration.

1. Comme $0 \leq S(\overline{Y}, Y) \leq 1$ et $0 \leq \sum_{y \in \underline{Y}} S(Y, y) \leq |\underline{Y}|$, alors $0 \leq S(Y, \mathcal{F}) \leq 1$.
2. Si Y appartient à $\mathcal{F}$, on a $\overline{Y} = Y$ et $S(Y, \mathcal{F}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$. Réciproquement, supposons que $S(Y, \mathcal{F}) = 1$ ou encore $S(\overline{Y}, Y) + \sum_{y \in \underline{Y}^l} S(Y, y)) = 1 + |\underline{Y}^l|$. Si $Y \notin \mathcal{F}$, on aurait $Y \subset \overline{Y}$ et $\forall y \in \underline{Y}^l,\ y \subset Y$ d'après la propriété 3 de la proposition 3.1 et $S(\overline{Y}, Y) < 1$ et $S(Y, y) < 1$, $S(\overline{Y}, Y) + \sum_{y \in \underline{Y}^l} S(Y, y)) < 1 + |\underline{Y}^l|$ d'où une contradiction.

□

Cette proposition nous permet de considérer une hiérarchie semi-floue comme un ensemble flou de $\mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ muni de la fonction d'appartenance $m_{\mathcal{F}}(Y) = S(Y, \mathcal{F})$.

4.2 Imbrication entre hiérarchies semi-floues

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux hiérarchies semi-floues définies sur un ensemble X. L'inclusion de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$ est l'inclusion ensembliste classique : $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \iff (\forall h \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow h \in \mathcal{F}_2)$. Soient $Y \subset X$ et $\mathcal{F}_Y$ une hiérarchie semi-floue définie sur Y, et $\mathcal{F}$ une hiérarchie semi-floue sur X. On dira que $\mathcal{F}_Y \subset \mathcal{F}$ si $(\forall h \in \mathcal{F}_Y \Rightarrow h \in \mathcal{F})$. La magnitude d'une hiérarchie semi-floue $\mathcal{F}$ a pour expression $M(\mathcal{F}) = \sum_{Y \in \mathcal{F}(X)} m_{\mathcal{F}}(Y)$.

Soient deux hiérarchies semi-floues $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur X. L'ensemble flou $\mathcal{F}_1 \bigcap \mathcal{F}_2$ a pour fonction d'appartenance $m_{\mathcal{F}_1 \bigcap \mathcal{F}_2} = m_{\mathcal{F}_1} \wedge m_{\mathcal{F}_2}$. L'imbrication de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$ est mesurée par :

$$S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \frac{M(\mathcal{F}_1 \bigcap \mathcal{F}_2)}{M(\mathcal{F}_1)}$$

où $M(\mathcal{F}_1 \bigcap \mathcal{F}_2) = \sum_{Y \in \mathcal{F}(X)} m_{\mathcal{F}_1} \wedge m_{\mathcal{F}_2}(Y)$. Les propriétés de cet indice d'imbrication sont analogues à celles présentées dans la proposition 3.1. Par exemple, la propriété 1 caractérise l'inclusion entre deux hiérarchies semi-floues, les propriétés 2,3 en sont les conséquences. La propriété 4 montre que le degré d'imbrication entre deux hiérarchies semi-floues est nulle, uniquement lorsque leurs univers de discours respectifs sont disjoints. La propriété 5 montre que l'indice est normalisée. La proprété 6 exprime la monotonie de l'indice.

Proposition 4.2 *Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux hiérarchies semi-floues sur X alors :*

1. $S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$;
2. $S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = S(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$;
3. $S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 1$ *et* $S(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) = 1$ *impliquent* $S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3) = 1$;
4. *Soient $A, B \subset X$, $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$ des hiérarchies semi-floues quelconques définies respectivement sur A et B. Alors $A \cap B = \emptyset$ est équivalent à* $S(\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B) = S(\mathcal{F}_B, \mathcal{F}_A) = 0$;
5. $0 \leq S(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq 1$;
6. *Si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ alors :* $\forall\, Y \in \mathcal{F}(X), \quad S(Y, \mathcal{F}_1) \leq S(Y, \mathcal{F}_2)$.

Démonstration.

Les propriétés 1,2,3 et 5 se vérifient aisément. Nous nous contenterons de ne démontrer que les propriétés 4 et 6.

4. Soient $A, B \subset X$, et $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$ des hiérarchies floues définies sur A et B. Rappelons que $S(\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B) = \frac{M(\mathcal{F}_A \bigcap \mathcal{F}_B)}{M(\mathcal{F}_B)}$ avec $M(\mathcal{F}_A \bigcap \mathcal{F}_B) = \sum_{Y\in\mathcal{F}(X)} m_{\mathcal{F}_A} \wedge m_{\mathcal{F}_B}(Y)$. Compte tenu de la définition de $m_{\mathcal{F}_A}$ et $m_{\mathcal{F}_B}$, on a $\mathcal{F}(A\cap B) = \mathcal{F}(A)\cap\mathcal{F}(B)$ et $M(\mathcal{F}_A \bigcap \mathcal{F}_B) = \sum_{Y\in\mathcal{F}(A\cap B)} m_{\mathcal{F}_A} \wedge m_{\mathcal{F}_B}(Y)$. Si $A\cap B = \emptyset$, on a $\mathcal{F}(A\cap B) = 0$ et $M(\mathcal{F}_A \bigcap \mathcal{F}_B) = 0$, d'où $S(\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B) = 0$. Réciproquement, si $S(\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B) = 0$, par définition, on a $M(\mathcal{F}_A \cap \mathcal{F}_B) = 0$ avec $M(\mathcal{F}_A \cap \mathcal{F}_B) = \sum_{Y\in\mathcal{F}(X)} m_{\mathcal{F}_A} \wedge m_{\mathcal{F}_B}(Y)$. Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{F}(X)$, $m_{\mathcal{F}_A} \wedge m_{\mathcal{F}_B}(Y) = 0$ et pour $h \in \mathcal{F}(A)$, $m_{\mathcal{F}_A} \wedge m_{\mathcal{F}_B}(h) = 0$, ce qui entraîne $m_{\mathcal{F}_B}(h) = 0 \Rightarrow h\cap B = \emptyset$, pour tout $h \in \mathcal{F}(A)$, en particulier pour $h = A$ d'où $A\cap B = \emptyset$.

6. Soit $Y \in \mathcal{F}(X)$. Soit $\underline{Y_1}^l$ et $\underline{Y_2}^l$ l'ensemble des minorants de Y maximaux dans $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, respectivement. Soient $\overline{Y}_1$ et $\overline{Y}_2$ les bornes supérieures de Y dans $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Par définition pour $i = 1, 2$:

$$S(Y, \mathcal{F}_i) = \frac{1}{1 + |\underline{Y_i}^l|}(S(\overline{Y_i}, Y) + \sum_{h_i\in\underline{Y_i}^l} S(Y, h_i)).$$

Montrons que

$$\frac{\sum_{h_1\in\underline{Y_1}^l} S(Y, h_1)}{1 + |\underline{Y_1}^l|} \leq \frac{\sum_{h_2\in\underline{Y_2}^l} S(Y, h_2)}{1 + |\underline{Y_2}^l|}.$$

Remarquons que $\underline{Y_1}^l$ et $\underline{Y_2}^l$ forment des partitions c.-à-d. $h_i, h_i' \in \underline{Y_i}^l,\ h_i \cap h_i' = \emptyset$, pour $i = 1, 2$, parce que sont des ensembles de minorants maximaux de Y et que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des hiérarchies semi-floues. Si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, alors $\forall h_1 \in \underline{Y_1}^l,\ h_1 \in \mathcal{F}_2$. Comme h_1 est un minorant de Y dans $\mathcal{F}_1$, il l'est aussi dans $\mathcal{F}_2$: $h_1 \in Y_2^l$ et il existe un minorant maximal $h_2 \in \underline{Y_2}^l$ tel que $h_1 \subseteq h_2 \subseteq Y$, ou $m_{h_1} \leq m_{h_2}$. D'autre-part toute classe $h_2 \in \underline{Y_2}^l$, contient une ou plusieurs classes $h_1 \in \underline{Y_1}^l$. En effet les singletons x de h_2 sont des éléments de $\mathcal{F}_1$ car $\mathcal{F}_1$ est une hiérarchie semi-floue, les minorant maximaux h_1 de $\underline{Y_1}^l$ contenant des singletons x de h_2 sont inclus dans $h_2 \in \underline{Y_2}^l$, car les classes de $\underline{Y_2}^l$, sont disjointes deux à deux. La partition $\underline{Y_1}^l$ constitue une partition emboîtée dans la partition $\underline{Y_2}^l$, et $|\underline{Y_2}^l| \leq |\underline{Y_1}^l|$. On en déduit l'inégalité au niveau des moyennes $\frac{\sum_{h_1\in Y_1^l} m_{h_1}}{|\underline{Y_1}^l|} \leq \frac{\sum_{h_2\in \underline{Y_2}^l} m_{h_2}}{|\underline{Y_2}^l|}$ d'autre-part

$$S(Y, h_1) = \frac{M(Y \bigcap h_1)}{M(Y)} = \frac{M(h_1)}{M(Y)} = \frac{\sum_{x\in X} m_{h_1}(x)}{M(Y)}$$

$$S(Y, h_2) = \frac{M(Y \bigcap h_2)}{M(Y)} = \frac{M(h_2)}{M(Y)} = \frac{\sum_{x\in X} m_{h_2}(x)}{M(Y)}$$

d'où : $\frac{\sum_{h_1\in\underline{Y_1}^l} S(Y,h_1)}{|\underline{Y_1}^l|} \leq \frac{\sum_{h_2\in\underline{Y_2}^l} S(Y,h_2)}{|\underline{Y_2}^l|}$. Comme $|\underline{Y_2}^l| \leq |\underline{Y_1}^l|$, on en déduit

$$\frac{\sum_{h_1\in\underline{Y_1}^l} S(Y, h_1)}{1 + |\underline{Y_1}^l|} \leq \frac{\sum_{h_2\in\underline{Y_2}^l} S(Y, h_2)}{1 + |\underline{Y_2}^l|}.$$

Montrons maintenant que

$$\frac{S(\overline{Y_1}, Y)}{1 + |\underline{Y_1}^l|} \leq \frac{S(\overline{Y_2}, Y)}{1 + |\underline{Y_2}^l|}.$$

FIG. 1 – *Comparaison de hiérarchies.*

Soient $\overline{Y}_1$ et $\overline{Y}_2$ les bornes supérieures de Y dans $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. On a

$$S(\overline{Y}_1, Y) = \frac{M(\overline{Y}_1 \bigcap Y)}{M(\overline{Y}_1)} = \frac{M(Y)}{M(\overline{Y}_1)}$$

$$S(\overline{Y}_2, Y) = \frac{M(\overline{Y}_2 \bigcap Y)}{M(\overline{Y}_2)} = \frac{M(Y)}{M(\overline{Y}_2)}$$

$\overline{Y}_1 \in \mathcal{F}_1$ comme $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, on a $\overline{Y}_1 \in \mathcal{F}_2$ c'est donc un majorant de Y et on a $\overline{Y}_2 \leq \overline{Y}_1$ d'où $M(\overline{Y}_2) \leq M(\overline{Y}_1)$ et $S(\overline{Y}_1, Y) \leq S(\overline{Y}_2, Y)$, comme $|\underline{Y_2}^l| \leq |\underline{Y_1}^l|$ on a $\frac{S(\overline{Y_1},Y)}{1+|\underline{Y_1}^l|} \leq \frac{S(\overline{Y_2},Y)}{1+|\underline{Y_2}^l|}$, d'où l'inégalité recherchée :

$$S(Y, \mathcal{F}_1) \leq S(Y, \mathcal{F}_2).$$

$\square$

5 Application à la comparaison de hiérarchies classiques

Dans ce paragraphe, nous appliquons l'indice d'imbrication défini précédemment aux hiérarchies classiques car ces dernières sont des cas particuliers des hiérarchies semi-floues.

La Figure 1 présente deux hiérarchies classiques $H1$ et $H2$ ayant 13 classes et qui diffèrent par les classes h_{12} et c_{12}. Les ensembles considérés pour le calcul des degrés d'imbrication mutuels de $H1$ et $H2$ sont les classes de $H1 \cup H2 = \{x_1, ..., x_7, h_8, ..., h_{12}, c_{12}, c_{13}\}$. L'expression du degré d'imbrication de deux classes h, h' utilisée est $S(h, h') = \frac{M(h \bigcap h')}{M(h)} = \frac{|h \bigcap h'|}{|h|}$ (cf. définition 3.2). Les tableaux 1 et 2 donnent les éléments utiles permettant de calculer :

- $S(h_{12}, H2) = \frac{S(c_{13},h_{12})+S(h_{12},x_6)+S(h_{12},x_7)}{3} = \frac{0.286+0.5+0.5}{3} = 0,428$,
- $S(c_{12}, H1) = \frac{S(h_{13},c_{12})+S(c_{12},x_6)+S(c_{12},h_{11})}{3} = \frac{0.857+0.166+0.833}{3} = 0,618$,
- $M(H1) = 13 + S(c_{12}, H1) = 13,618$,
- $M(H2) = 13 + S(h_{12}, H2) = 13,428$,
- $M(H1 \cap H2) = \Sigma_{i=1}^{7} S(x_i, H1) + \Sigma_{i=8}^{11} S(h_i, H1) + S(h_{12}, H2) + S(c_{12}, H1) + S(c_{13}, H1) = 13,046$.

On trouve $S(H1, H2) = \frac{M(H1 \cap H2)}{M(H1)} = 0,95$ et $S(H2, H1) = \frac{M(H1 \cap H2)}{M(H2)} = 0,97$.

6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons introduit la notion de hiérarchie semi-floue en associant une fonction d'appartenance floue à chaque classe d'une hiérarchie usuelle. Par ailleurs, nous avons proposé un indice permettant de mesurer le degré d'imbrication entre deux hiérarchies classiques ou semi-floues. L'intéret de la démarche proposée est double. D'une part, elle fournit un outil permettant de comparer deux hiérarchies classiques, cela peut s'avérer pratique notamment lorsque l'on est face à plusieurs hiérarchies issues de différentes méthodes. D'autre

TAB. 1 – *Eléments pour le calcul des degrés d'imbrication mutuelle de H1 et de H2*

Y	y	$\overline{Y}$	$S(\overline{Y}, Y)$	$S(Y, y)$	$S(Y, H2)$
h_8	c_8	c_8	1	1	1
h_9	c_9	c_9	1	1	1
h_{10}	c_{10}	c_{10}	1	1	1
h_{11}	c_{11}	c_{11}	1	1	1
h_{12}	x_6	c_{13}	0,286	0,5	
h_{12}	x_7			0,5	0,428
h_{13}	c_{13}	c_{13}	1	1	1

TAB. 2 – *Eléments pour le calcul des degrés d'imbrication mutuelle de H1 et de H2*

Y	y	$\overline{Y}$	$S(\overline{Y}, Y)$	$S(Y, y)$	$S(Y, H1)$
c_8	h_8	h_8	1	1	1
c_9	h_9	h_9	1	1	1
c_{10}	h_{10}	h_{10}	1	1	1
c_{11}	h_{11}	h_{11}	1	1	1
c_{12}	h_{11}	h_{13}	0,857	0,833	
c_{12}	x_6			0,166	0,618
c_{13}	h_{13}	h_{13}	1	1	1

part, l'approche se généralise aisément aux diverses structures hiérarchiques tel que les 2-3 hiérarchies (Chelcea et al., 2004), les pyramides (Bertrand et Diday, 1990), les hiérarchies faibles (Diatta et Fichet, 1994; Bertrand et Janowitz, 2002). Une hiérarchie classique étant une suite de partitions, on peut se demander comment l'indice proposé dans ce papier se positionne par rapport aux indices proposés dans la littérature pour comparer des partitions comme par exemple l'indice de Rand et ces variantes (Youness et Saporta, 2004; Chavent et al., 2001; Campello, 2007). On notera simplement que notre indice n'est pas directement applicable aux partitions car il utilise le plus petit majorant et les minorants maximaux d'un ensemble donné dans une hiérarchie.

Références

Benzécri, J. P. et Collaborateurs (1973). *L'Analyse des données : 1. La Taxinomie.* Paris : Dunod.

Bertrand, P. et E. Diday (1990). Une généralisation des arbres hiérarchiques : les représentations pyramidales. *Revue de Statistique Appliquée 38*, 53–78.

Bertrand, P. et M. F. Janowitz (2002). Pyramids and weak hierarchies in the ordinal model for clustering. *Discrete Appl. Math. 122*, 55–81.

Bezdek, J. (1981). *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function algorithms.* New York: Plenum Press.

Campello, R. (2007). A fuzzy extension of the Rand index and other related indexes for clustering and classification assessment. *Pattern Recognition Letter 28*, 833–841.

Chavent, M., C. Lacomblez, et B. Patouille (2001). Critère de Rand asymétrique. In *8èmes Rencontres de la Société Francophone de Classification (SFC01)*, pp. 82–88.

Chelcea, S., P. Bertrand, et B. Trousse (2004). A new agglomerative 2-3 hierarchical clustering algorithm. In D. Baier et K.-D. Wernecke (Eds.), *Innovations in Classification, Data Science, and Information Systems.*, pp. 3–10. Springer-Verlag.

Diatta, J. et B. Fichet (1994). From Apresjan hierarchies and Bandelt-Dress weak hierarchies to quasi-hierarchies. In E. Diday, Y. Lechevalier, M. Schader, P. Bertrand, et B. Burtschy (Eds.), *New Approaches in Classification and Data Analysis*, pp. 111–118. Springer-Verlag.

Kosko, B. (1992). *Neuronal networks and fuzzy systems.* Prentice-hall International Editions.

Leclerc, B. (1985). La comparaison des hiérarchies : indices et métriques. *Mathématiques et Sciences Humaines 92*, 5–40.

Youness, G. et G. Saporta (2004). Une méthodologie pour la comparaison de partitions. *Revue de Statistique Appliquée 52*, 97–120.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information Control 8*, 338–353.

Summary

We defined the notion of a so-called semi-fuzzy hierarchy from that of classical hierarchy. We then introduced an index for measuring the degree to which a fuzzy subset is contained in a semi-fuzzy hierarchy. Furthermore, we extended this index in order to measure the subsethood degree between two semi-fuzzy hierarchies. These indices applied to classical hierarchies as well.