5ETI — S9

Compression et techniques avancées

Compression d'image - Partie 2

Éric Van Reeth CPE/CREATIS

Bureau B126A eric.van-reeth@cpe.fr

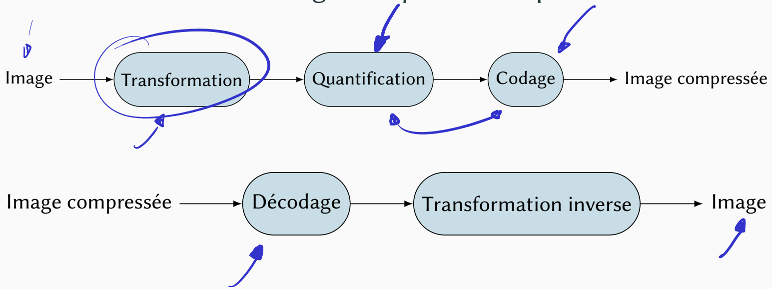
Compression par transformation

Compression par transformation

Processus de compression

Principe

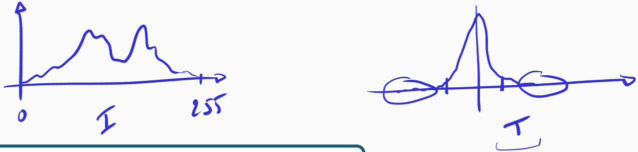
La transformation n'engendre pas de compression



Compression par transformation

Décorrélation

Décorrélation



Décorrélation/Incohérence

La décorrélation est la capacité d'une transformée à :

- ✔ **éliminer la redondance** initiale de l'image
- ✔ générer des **sources sans mémoire** (codage entropique)

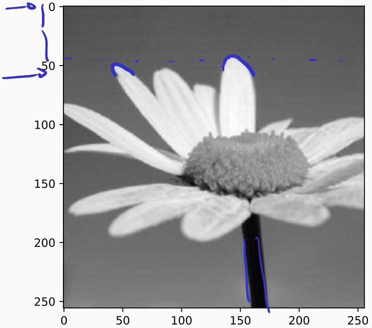
Elle s'accompagne d'un changement de distribution : **centrage des coefficients autour de 0**

→ **La décorrélation favorise la compression**

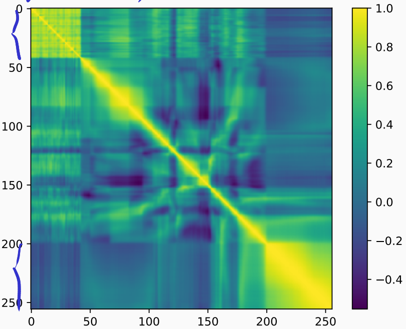
$C(i,j) \to$ corrélation entre les lignes i et j.

Coefficient de corrélation

! $C(1,2)$



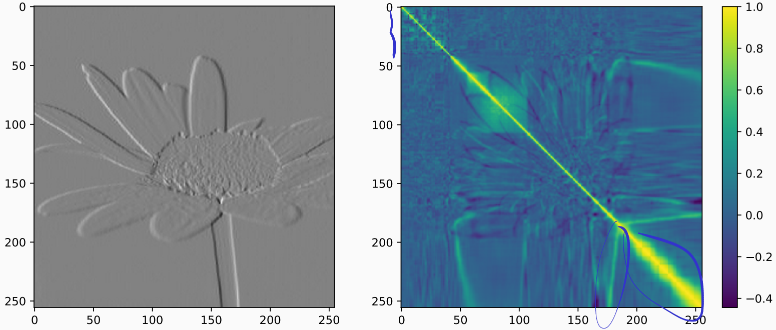
(a) Image originale



(b) Matrice de corrélation de l'image

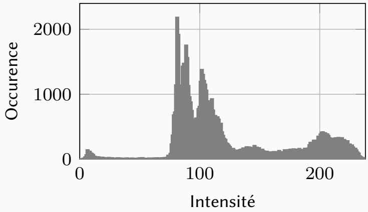
Décorrélation

Décorrélation par différence

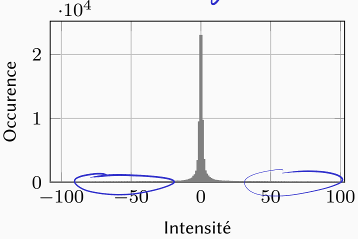


(a) Image de différence **(b)** Corrélation de la différence

Décorrélation par différence

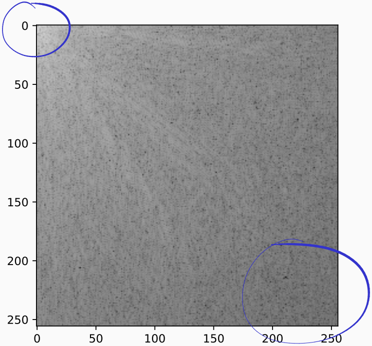


(a) Histogramme de l'image

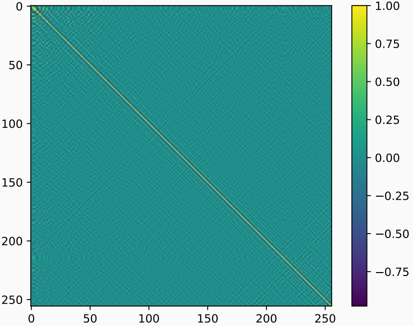


(b) Histogramme de ~~la DCT~~ l'image de diff.

Décorrélation par DCT

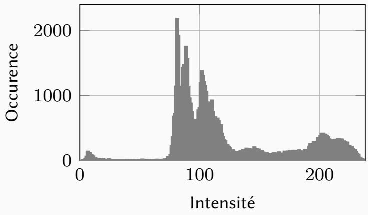


(a) DCT de l'image (en échelle log)

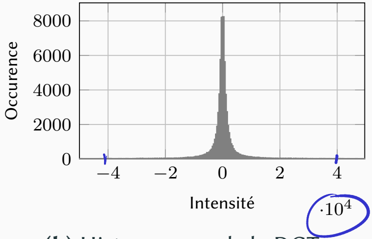


(b) Matrice de corrélation de la DCT

Décorrélation par DCT

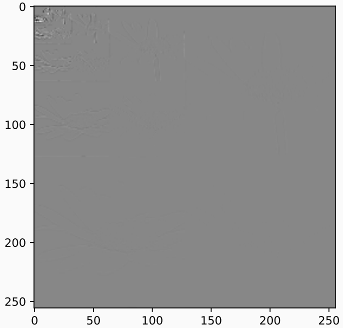


(a) Histogramme de l'image

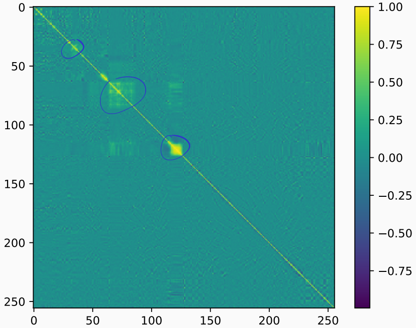


(b) Histogramme de la DCT

Décorrélation par DWT

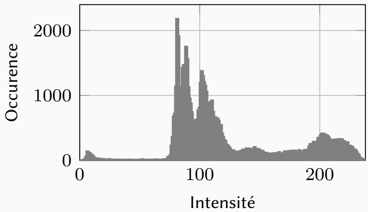


(a) DWT de l'image

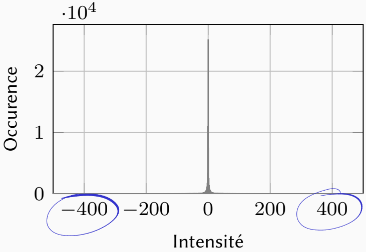


(b) Matrice de corrélation de la DWT

Décorrélation par DWT



(a) Histogramme de l'image



(b) Histogramme de la DWT

Compression par transformation

Choix de la transformation

Choix de la transformation

Critères

Principaux facteurs guidant le choix de la transformation :

- ✔ capacité de décorrélation
- ✔ distribution des coefficients
- ✔ complexité algorithmique et empreinte mémoire

On peut quantifier **l'erreur de reconstruction** engendrée par la quantification des coefficients

Erreur de reconstruction

Considérons une image $\boldsymbol{I}$ décomposée dans une base orthonormée quelconque d'atomes $\boldsymbol{B_{u,v}}$, et sa transformée $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{I} = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T_{u,v} \boldsymbol{B_{u,v}}$$

Quantification considérée : mise à zéro des coefficients $T_{u,v} < k$

Seuillage modélisée par l'opérateur χ, défini tel que :

$$\chi_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{si } T_{u,v} \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Choix de la transformation

Erreur de reconstruction

Image reconstruite après quantification :

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \chi_{u,v} T_{u,v} \boldsymbol{B_{u,v}}$$

L'erreur quadratique moyenne entre l'image originale et l'image approximée (estimateur de I) est donnée par :

$$e_q = E\left\{ \left\| \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{I}} \right\|^2 \right\}$$

Choix de la transformation

Erreur de reconstruction

$$
\begin{aligned}
e_q &= E\left\{\left\|\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{I}}\right\|^2\right\} \\
&= E\left\{\left\|\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} T_{u,v}\boldsymbol{B_{u,v}} - \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} \chi_{u,v} T_{u,v}\boldsymbol{B_{u,v}}\right\|^2\right\} \\
&= E\left\{\left\|\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} T_{u,v}\boldsymbol{B_{u,v}}(1-\chi_{u,v})\right\|^2\right\} \\
&= E\left\{\left\langle \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} T_{u,v}\boldsymbol{B_{u,v}}(1-\chi_{u,v}), \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} T_{u,v}\boldsymbol{B_{u,v}}(1-\chi_{u,v}) \right\rangle_F\right\} \\
&= E\left\{\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} (T_{u,v}(1-\chi_{u,v}))^2\right\} \qquad \text{(car base orthonormée)} \\
&= \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} E\left\{(T_{u,v}(1-\chi_{u,v}))^2\right\} \qquad \text{(car espérance linéaire)}
\end{aligned}
$$

Erreur de reconstruction

Posons maintenant :

1 - 1 → 0 → $\widetilde{T}_{u,v} = 0$ → $\geq k$

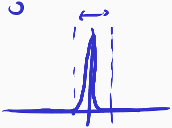
$\widetilde{T}_{u,v} = T_{u,v}$ → $< k$

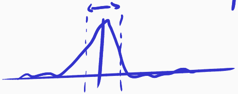
$$\widetilde{T}_{u,v} = T_{u,v}(1-\chi_{u,v})$$

$\widetilde{T}_{u,v}$ correspond aux coefficients $T_{u,v} < k$ non retenus
En faisant l'hypothèse que ces coefficients sont issus d'un processus aléatoire de moyenne nulle :

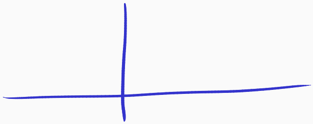
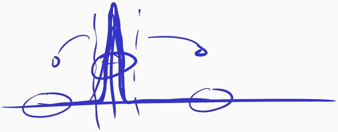
= 0

$$\begin{aligned} e_q &= \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} E\left\{\left(\widetilde{T}_{u,v}\right)^2\right\} \\ &= \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} Var\left\{\left(\widetilde{T}_{u,v}\right)^2\right\} + \left(E\left\{\widetilde{T}_{u,v}\right\}\right)^2 \\ e_1 &= \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} \sigma^2_{\widetilde{T}_{u,v}} \end{aligned}$$





Choix de la transformation

Bilan

La transformée idéale doit :

- minimiser la variance des coefficients de faible amplitude (seuillés)
- **concentrer le maximum d'énergie sur les coefficients de forte amplitude**

Note : d'autres techniques de quantification peuvent être appliquées

Compression par transformation

Troncation et quantification

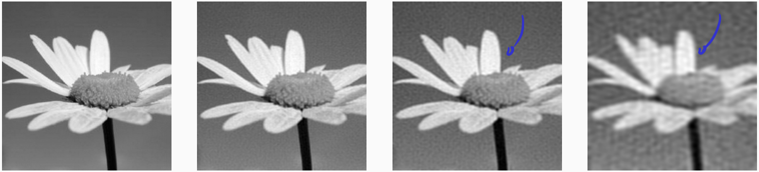
Troncation et quantification

Objectif

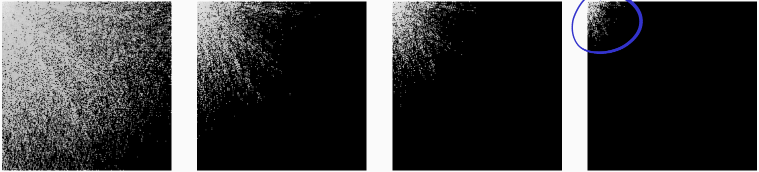
- Éliminer le maximum de coefficients sans dégrader la nature de l'image
- Minimiser l'entropie des coefficients à encoder
- Diminuer la taille du dictionnaire

Troncation et quantification

Troncation (DCT)



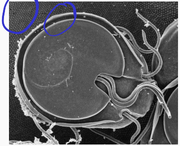
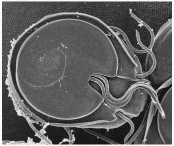
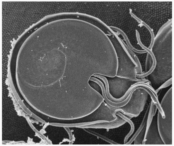
Err. moy. : 0.5 | Err. moy. : 2.6 | Err. moy. : 3.8 | Err. moy. : 7.8



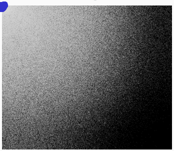
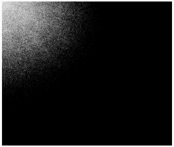
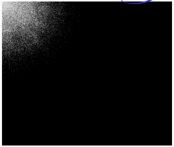
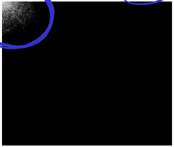
50% des coeff. | 10% des coeff. | 5% des coeff. | 1% des coeff.

Troncation et quantification

Troncation (DCT)

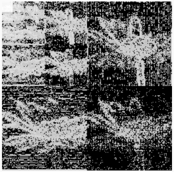
Err. moy. : 0.5 | Err. moy. : 3.4 | Err. moy. : 5.4 | Err. moy. : 11.4

50% des coeff. | 10% des coeff. | 5% des coeff. | 1% des coeff.

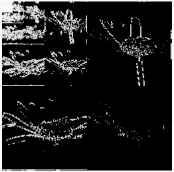
Troncation (DWT)

Erreur moyenne : 0.2

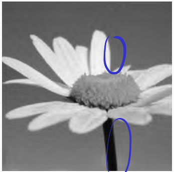


50% des coefficients

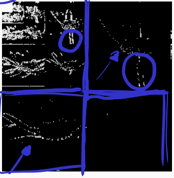
Erreur moyenne : 1.5



10% des coefficients



Erreur moyenne : 2.6



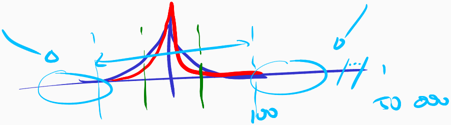
5% des coefficients

Erreur moyenne : 6.7

1% des coefficients

Troncation et quantification

Troncation (DWT)

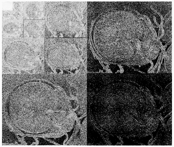


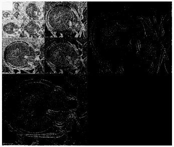
Erreur moyenne : 0.7

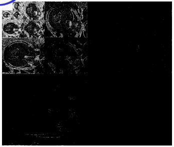
Erreur moyenne : 3.4

Erreur moyenne : 4.9

Erreur moyenne : 9.9







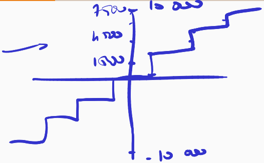
50% des coefficients

10% des coefficients

5% des coefficients

1% des coefficients

$[1000,\ 10\,000)$ →



Quantification

- Troncation des coefficients : étape nécessaire mais pas suffisante à une compression efficace
- La quantification permet de limiter la taille du dictionnaire des coefficients conservés
- En pratique les deux opérations peuvent être réalisées simultanément :

$$\boxed{\hat{T}_{u,v}} = \underbrace{\text{int}\left[\frac{T_{u,v}}{Z_{u,v}}\right]}$$

$T_{u,v} < Z_{u,v}$ → $\hat{T}_{u,v} = 0$

$T_{u,v} = 98$

$Z_{u,v} = 10$

→ $\hat{T} = 10$ → $\hat{I} = \sum \hat{T}_{u,v}\, Z_{u,v}\, B_{u,v}$, 1000

Troncation et quantification

Quantification

- La matrice $Z(u,v)$ est de même dimension que $T(u,v)$
- Les coefficients de $Z(u,v)$ sont d'autant plus grands que le coefficient $T(u,v)$ soit être quantifié grossièrement
- À la reconstruction (décodage) :

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \underbrace{\hat{T}_{u,v}}\underbrace{Z_{u,v}}\boldsymbol{B_{u,v}}$$

Exemple : quantification

Considérons l'image de taille (8×8) et sa décomposition DCT (arrondie à la deuxième décimale) :

62	70	106	140	138	123	114	120
78	45	68	108	124	114	104	126
107	57	60	86	99	106	94	114
111	76	51	58	80	85	74	84
100	78	50	40	66	67	71	71
83	74	59	43	36	39	54	51
74	69	44	50	42	20	20	29
69	66	42	71	81	51	22	24

Image originale ($\boldsymbol{I}$)

592.25	-6.07	6.90	38.72	49.00	-5.10	2.28	-2.23
169.60	-108.16	-29.76	-2.91	17.57	14.33	19.05	1.72
19.20	-14.24	-77.98	-26.27	13.46	-0.24	-5.92	-6.60
-5.45	7.31	3.06	-30.53	-25.89	5.10	-7.44	6.73
23.00	4.64	-18.22	11.00	-6.75	-11.35	-5.44	0.21
-7.78	21.35	2.74	-10.14	-3.78	1.17	-1.82	-4.13
16.94	-0.54	-2.92	-3.45	-8.01	6.21	2.98	-1.64
2.83	-0.02	1.95	1.11	1.98	-0.99	-0.45	1.02

DCT ($\boldsymbol{T}$)

Troncation et quantification

$\hat{T} = \text{arr}\left(\frac{T}{Z}\right)$

Exemple : quantification

Considérons la matrice $\boldsymbol{Z}$ suivante, ainsi que les coefficients quantifiés $\hat{\boldsymbol{T}}$:

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

Matrice de pondération ($\boldsymbol{Z}$)

37	-1	0	3	3	0	0	0
15	-9	-2	0	1	0	0	0
2	-1	-5	-1	0	0	0	0
0	0	0	-1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

DCT tronquée/quantifiée ($\hat{\boldsymbol{T}}$)

Troncation et quantification

Exemple : quantification

Troncation et quantification réalisée simultanément

Le choix de $Z(u, v)$ nécessite un a priori sur la distribution des coefficients importants de l'image

Entropie de l'image originale : $H_I = 5.5$ bits

Entropie des coefficients $\hat{\boldsymbol{T}}$: $H_T = 1.1$ bits

Exemple : quantification

Reconstruction après quantification :

592	-11	0	48	72	0	0	0
180	-108	-28	0	26	0	0	0
28	-13	-80	-24	0	0	0	0
0	0	0	-29	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$(\hat{\boldsymbol{T}} \odot \boldsymbol{Z})$

62	63	93	138	146	121	114	130
74	58	70	109	127	112	104	114
96	62	50	78	103	100	94	100
112	71	46	61	81	83	85	93
105	73	49	52	59	59	65	78
84	64	50	49	46	39	41	52
71	58	52	55	52	38	28	27
71	60	56	65	66	49	28	15

Image reconstruite $(\hat{\boldsymbol{I}})$

Troncation et quantification

Exemple : quantification

Reconstruction après quantification :

62	70	106	140	138	123	114	120
78	45	68	108	124	114	104	126
107	57	60	86	99	106	94	114
111	76	51	58	80	85	74	84
100	78	50	40	66	67	71	71
83	74	59	43	36	39	54	51
74	69	44	50	42	20	20	29
69	66	42	71	81	51	22	24

Image originale ($\boldsymbol{I}$)

62	63	93	138	146	121	114	130
74	58	70	109	127	112	104	114
96	62	50	78	103	100	94	100
112	71	46	61	81	83	85	93
105	73	49	52	59	59	65	78
84	64	50	49	46	39	41	52
71	58	52	55	52	38	28	27
71	60	56	65	66	49	28	15

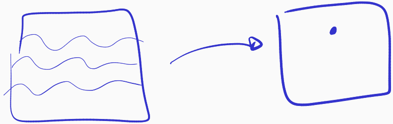
Image reconstruite ($\hat{\boldsymbol{I}}$)

Erreur moyenne de 6.2 niveau d'intensité

Compression par transformation

Compression par bloc

Compression par bloc



Constat

La quantification est d'autant plus efficace que le contenu de l'image est régulier

Hypothèse plus facilement vérifiable dans des petites régions

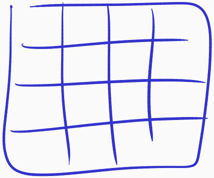
$\rightarrow$ Découpage de l'image en blocs (généralement 8×8 pixels)

$\rightarrow$ Compression individuelle de chaque bloc

Procédure utilisée dans le standard JPEG (DCT)

Codage des coefficients

$$\hat{T} = \text{arr}\left(\frac{T}{Z}\right)$$



Principe du codage

Afin d'optimiser le processus de compression, le codage des coefficients quantifiés ($\hat{\boldsymbol{T}}$) doit être réalisé

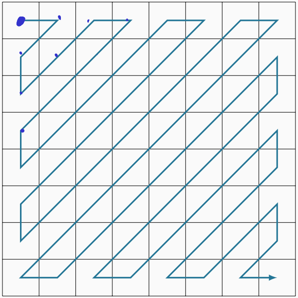
Deux informations différentes associées à $\hat{\boldsymbol{T}}$ seront codés :

1. la **position** des coefficients **non nuls**
2. la **valeur** des coefficients **non nuls**

Codage des coefficients

Codage des positions (exemple précédent)

Le codage des positions se fait en parcourant la matrice $\hat{\boldsymbol{T}}$ suivant un chemin en zig-zag prédéfini :



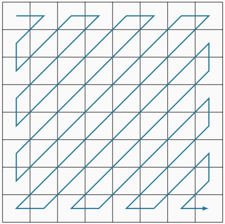
(a) Parcours de la matrice des coefficients $\hat{\boldsymbol{T}}$

1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(b) Matrice valant 1 pour les coefficients non nuls de $\hat{\boldsymbol{T}}$

Codage des coefficients

Codage des positions (exemple précédent)



1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

La chaîne codant ces positions est donnée par :

1111101110101010110000001$\underbrace{000000000000000000000000000000000000000}_{\text{39 zéros}}$

Codage par plage de ce message (24 éléments sur 3 bits) :

5 1 3 1 1 1 1 1 1 1 2 6 1 7 0 7 0 7 0 7 0 7 0 4 → Huffman

Codage des coefficients

12 bits $\quad 2^6\, 2^3 = 2^9 = \frac{512}{12} \simeq \boxed{43}$

Codage des valeurs (exemple précédent)

L'utilisation de la carte de position permet de coder uniquement la valeur des 14 coefficients non nuls :

37

$2^6 = 64$

$$37 \; -1 \; 15 \; 2 \; -9 \; 3 \; -2 \; -1 \; 1 \; -5 \; 3 \; 1 \; -1 \; -1$$

Codage en entier signé (max. 7 bits par codage uniforme)

Taux de compression minimum ≈ 3

L'utilisation du codage entropique sur les positions/valeurs permet d'améliorer le taux de compression

Fort taux de compression pour les blocs réguliers (peu de coefficients non nuls)

Compression par blocs

Exemples (même err. de reconstruction)

(a) Image originale

(b) Reco. (DCT)

(c) Reco. (DFT)

Compression par blocs

Exemples (même err. de reconstruction)

(a) Image originale **(b)** Reco. (DCT) **(c)** Reco. (DFT)

Compression par blocs

Conclusion

- La DCT permet de stocker 2 à 3 fois moins de coefficients que la DFT à erreur de reconstruction équivalente
- La DCT permet de mieux appréhender le contenu fréquentiel des blocs

$\rightarrow$ Utilisation fréquente en compression

- Le JPEG2000 utilise les bases d'ondelettes

$\rightarrow$ Découpage en blocs pas nécessaire du fait du support compact des ondelettes