5ETI — S9

Compression et techniques avancées

Compression d'image - Partie 2

Éric Van Reeth CPE/CREATIS

Bureau B126A eric.van-reeth@cpe.fr

Compression par transformation

Compression par transformation

Compression orthonormées usuelles

Transformée en cosinus discrète

DCT

Transformation orthogonale réelle sur une base de cosinus à différentes fréquences

Le noyau de la transformée 1D inverse s'écrit :

$$b^C_{n,u} = \alpha(u) \cos\left(\frac{(2n+1)u\pi}{2N}\right)$$

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{si } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{si } u = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases}$$

Transformée en cosinus discrète

Atomes de la base

On peut exprimer :

$$b_{n,u}^{C} = \alpha(u)\cos\left(\frac{(2n+1)u\pi}{2N}\right) = \alpha(u)\cos\left(2\pi nf + \Phi\right)$$

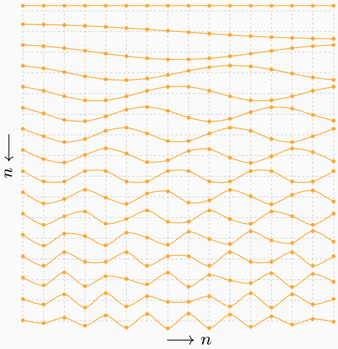
avec $f = \frac{u}{2N}$ et $\Phi = \frac{u\pi}{2N}$

Le premier vecteur de la base contient la fréquence nulle : $(\frac{1}{\sqrt{N}})$

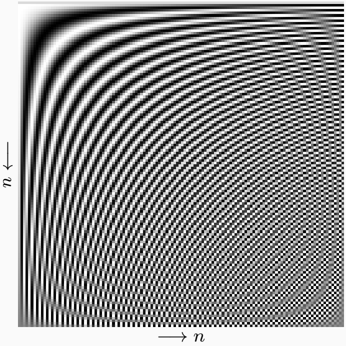
L'incrément fréquentiel est de : $\frac{1}{2N}$

La fréquence réduite la plus élevée est de : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$

Représentations graphiques des atomes 1D de la DCT directe



(a) 1D avec $N = 16$



(b) 1D avec $N = 128$

Transformée en cosinus discrète

Extension en 2D

La DCT est dite séparable

Le noyau de la transformée 2D inverse s'écrit :

$$b^{C}_{i,j,u,v} = \alpha(u)\alpha(u)\cos\left(\frac{(2i+1)u\pi}{2N}\right)\cos\left(\frac{(2j+1)v\pi}{2N}\right)$$

Transformée en cosinus discrète

Extension en 2D ($N = 16$)

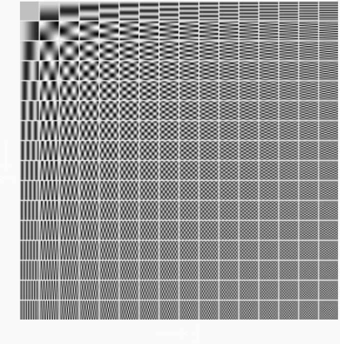
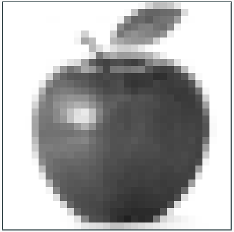
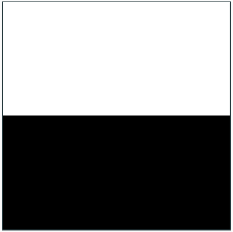
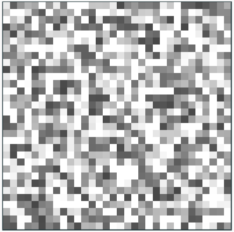


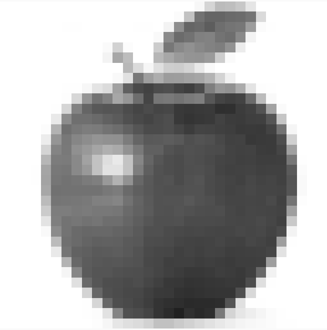
Figure 2: Images de la base 2D de la DCT

Quiz

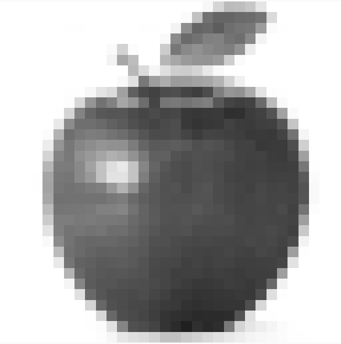
Transformée en cosinus discrète

Illustration de la décomposition 2D

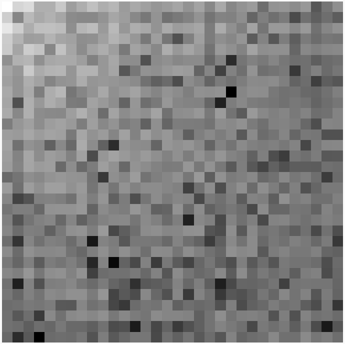


Transformée en cosinus discrète

Illustration de la décomposition 2D

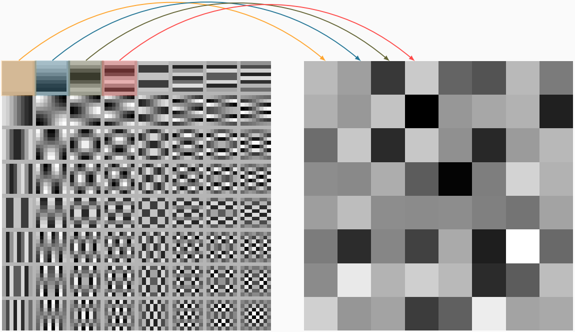


(a) Image originale



(b) |DCT| (échelle log)

Illustration de la décomposition 2D



Images de base DCT

Processus de reconstruction d'une image (8×8) à partir des images de bases de la DCT 2D (gauche), et des coefficients de la DCT (droite).

Illustration de la décomposition 2D

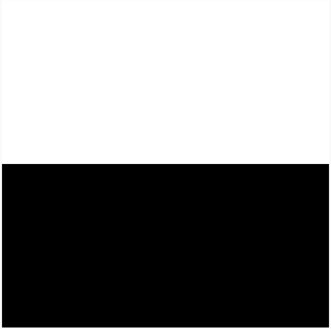
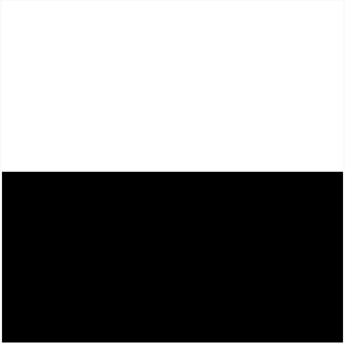
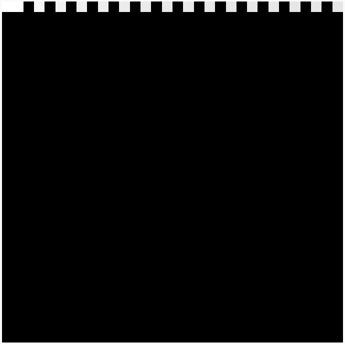


Illustration de la décomposition 2D

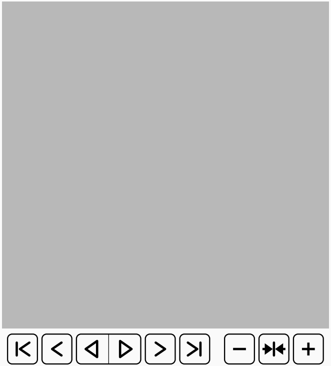


(a) Image originale



(b) |DCT| (échelle log)

Illustration de la décomposition 2D



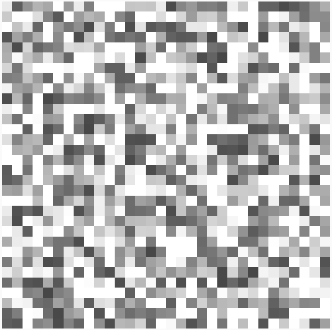
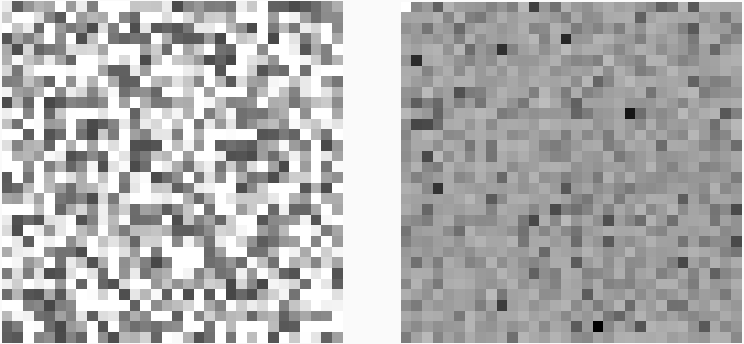


Illustration de la décomposition 2D



(a) Image originale   **(b)** |DCT| (échelle log)

Transformée de Fourier discrète

DFT

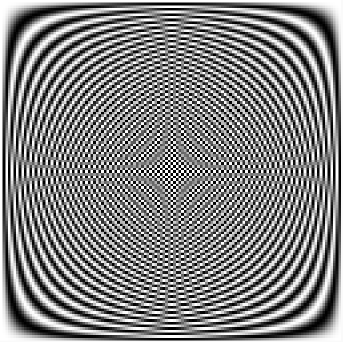
Transformation orthonormée décrite par une base d'exponentielles complexes

Le noyau 1D de la transformée inverse s'écrit :

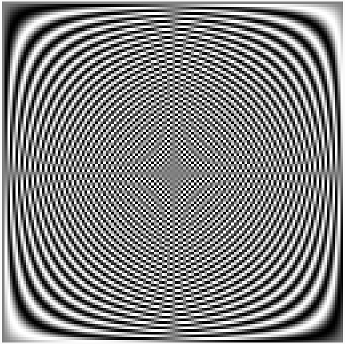
$$b^F_{n,u} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi n \frac{u}{N}}$$

La matrice de transformation associée est complexe, orthonormée, symétrique et unitaire

Représentations graphiques des atomes 1D de la DFT directe



(a) Partie réelle



(b) Partie imaginaire

Transformée de Fourier discrète

Analyse fréquentielle

- Fréquence réduite associée au noyau de la DFT inverse est $\frac{u}{N}$
- Incrément fréquentiel de $\frac{1}{N}$ d'une ligne à l'autre ($\frac{1}{2N}$ pour la DCT)
- Fréquence réduite maximale est de : $1 - \frac{1}{N}$

$\rightarrow$ Même intervalle fréquentiel, mais résolution de la DCT deux fois meilleure que la DFT

Extension en 2D

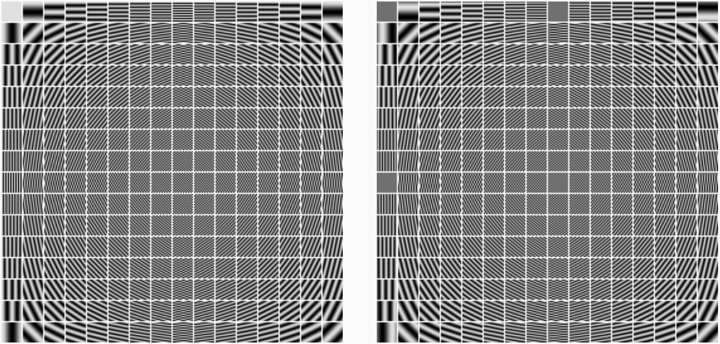
La DFT est une transformation séparable

Son noyau 2D inverse, pour une image de taille $(N \times N)$, s'écrit :

$$b^F_{n,m,u,v} = \frac{1}{N} e^{2i\pi n \frac{u}{N}} e^{2i\pi m \frac{v}{N}}$$

Transformée de Fourier discrète

Extension en 2D

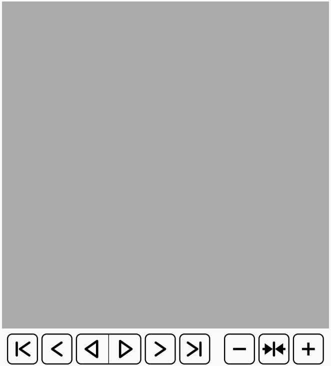


(a) Partie réelle **(b)** Partie imaginaire

Atomes 2D de la DFT inverse ($N = 16$)

Transformée de Fourier discrète

Illustration de la décomposition 2D



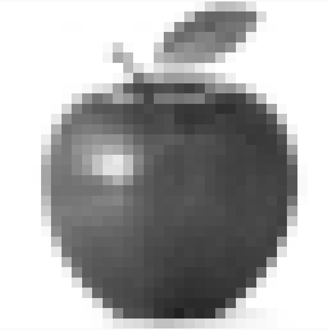


Illustration de la décomposition 2D

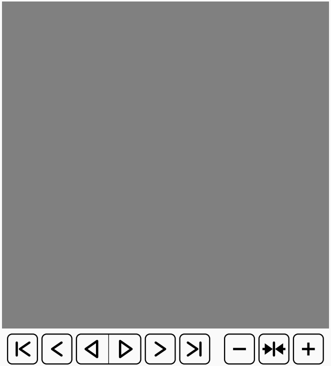
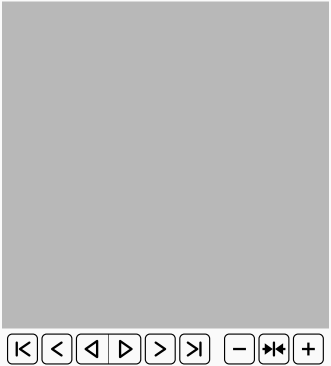
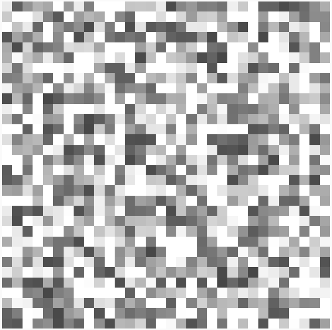


Illustration de la décomposition 2D





Transformée en ondelettes discrète

Principe

- Introduction pour l'analyse multi-résolution des signaux $\rightarrow$ décomposition successive à différentes échelles
- Chaque niveau de résolution est composé :
  - d'une **approximation** du signal $\rightarrow$ fonction d'échelle
  - d'une information de **détails** $\rightarrow$ fonction d'ondelette
- Les coefficients de détails représentent la différence entre deux niveaux successifs d'approximation

Transformée en ondelettes discrète

Décomposition du signal

Tout signal se décompose comme une somme entre l'approximation à l'échelle la plus grossière, et les coefficients d'ondelettes aux différentes échelles considérées :

$$f[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(a_0 \phi[n] + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}[n] \right)$$

où $N = 2^J$, a_0 est le coefficient d'approximation, $\phi[n]$ la fonction d'échelle, $d_{j,k}$ les coefficients de détails, et $\psi[n]$ la fonction d'ondelette

Illustration des noyaux 1D

Les fonctions d'ondelettes ont un support spatial borné

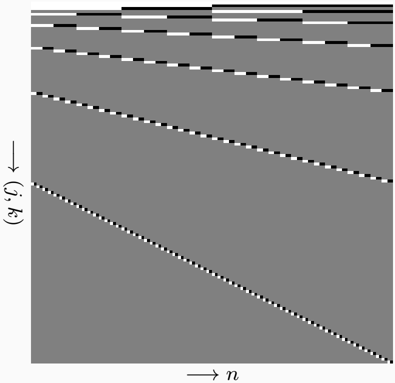


Figure 9: Atomes de la transformée en ondelettes 1D de Haar pour $N = 128$

Transformée en ondelettes discrète

Décomposition 2D

Génération des fonctions d'échelle et d'ondelettes 2D

La fonction d'échelle est simplement :

$$\phi[n, m] = \phi[n]\phi[m]$$

Les fonctions d'ondelettes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\psi^H[n, m] &= \psi[n]\phi[m] \\
\psi^V[n, m] &= \phi[n]\psi[m] \\
\psi^D[n, m] &= \psi[n]\psi[m]
\end{aligned}$$

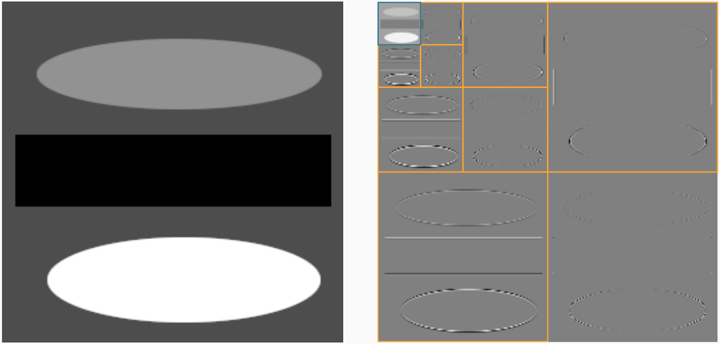
Décomposition 2D

- Différentiation entre les détails horizontaux (fortes variations d'une ligne à l'autre), verticaux et diagonaux de l'image
- L'obtention d'un niveau de résolution supérieur (échelle $j + 1$) se fait en ajoutant l'image d'approximation aux trois images de détails de l'échelle (j)

Transformée en ondelettes discrète

Décomposition 2D

Décomposition sur 3 échelles d'une image simple :



(a) Image originale **(b)** Décomposition en ondelettes

Figure 10: Décomposition en ondelettes (Daubechies-2) sur 3 échelles

Compression par transformation

Processus de compression

Processus de compression

Principe

La transformation n'engendre pas de compression