• *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*
• *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*
• *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*
• *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*

Exercice 1 : Intégration

On considère l'application $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{e^t}{t}$.

1. (a) Montrer que f est strictement croissante.
   (b) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{e^n}{n} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$$
   (c) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! x \in [n, n+1], \quad \frac{e^x}{x} = \int_n^{n+1} f(t)dt$$
2. Pour tout entier naturel non nul, n, on note u_n l'unique réel x dans $[n, n+1]$ tel que $\frac{e^x}{x} = \int_n^{n+1} f(t)dt$.
   (a) Montrer que $u_n \sim n$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que
   $$\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t^2} dt = o\left(\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t} dt\right)$$
   quand n tend vers $+\infty$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u_n - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(e-1)$.

Exercice 2 : Algèbre linéaire

On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. On note $a = (0,6,-1,4)$ et $b = (3,3,1,5)$, puis $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(a,b)$. Déterminer la dimension de F.
2. On note $u = (1,0,0,0)$, $v = (1,-1,0,1)$ et $w = (0,2,1,0)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. Déterminer la dimension de G.
3. Calculer les vecteurs $2v + w$ et $\frac{1}{3}(2b - a)$
4. Montrer que $\mathrm{G} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | -y + 2z - t = 0\}$ et que $a \notin \mathrm{G}$.
5. En déduire la dimension de $\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.
6. Déterminer la dimension de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.
7. A-t-on $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} + \mathrm{G}$? $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$?

Problème : Opérateur de moyenne intégrale

On note $\mathcal{C}$ l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de justifier ce résultat). Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}$, on introduit la fonction $\mathrm{T}(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad [\mathrm{T}(f)](x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $\mathrm{T}(f)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ainsi construite s'appelle la transformée de f. On s'intéresse à diverses propriétés de l'opérateur T ainsi construit.

1. Soit $f \in \mathcal{C}$.
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in [0,1], \quad [\mathrm{T}(f)](x) = \int_0^1 f(ux)du$$
   (b) Montrer que
   $$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |[\mathrm{T}(f)](x) - [\mathrm{T}(f)](y)| \leq \int_0^1 |f(ux) - f(uy)|du$$
   (c) En déduire via le théorème de Heine que la fonction $\mathrm{T}(f)$ est continue.
2. On considère à présent l'application $\mathrm{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, f \mapsto \mathrm{T}(f)$. Elle est bien à valeurs dans $\mathcal{C}$ d'après ce qui précède.
   (a) Démontrer que T est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de T.
   (c) L'application T est-elle surjective ?
3. On considère le sous-ensemble E de $\mathcal{C}$ constitué des fonctions constantes et le sous-ensemble F de $\mathcal{C}$ constitué des fonctions continues nulles en 0.
   (a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F} = \mathcal{C}$.
   (c) On note p le projecteur sur E parallèmement à F et q le projecteur sur F parallèlement à E. Donner une expression simple de p et q.
   (d) Montrer $\mathrm{T}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{T}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$.
   (e) Montrer que $\mathrm{T} \circ p = p \circ \mathrm{T}$ et $\mathrm{T} \circ q = q \circ \mathrm{T}$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des applications g dérivables de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
   $$\forall x \in]0,1], \lambda x g'(x) + (\lambda - 1)g(x) = 0$$
   (b) En déduire $\ker(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. On spécifiera pour quels valeurs de λ ce noyau est non réduit à $\{0\}$.
5. Soit $f \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$. On admet qu'il existe une fonction polynomiale P telle que
   $$\forall x \in [0,1], \quad |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leq \varepsilon$$
   On rappelle que pour tout entier n non nul, T^n désigne la composée de T avec elle-même n fois.
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad |\mathrm{T}^n(f)(x) - f(0)| \leq |\mathrm{T}^n(\mathrm{P})(x) - \mathrm{P}(0)| + 2\varepsilon$$
   (b) En déduire que pour tout réel x dans $[0,1]$, la suite $(\mathrm{T}^n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(0)$.