Kholle 8 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Donner la définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé. Définir la notion de norme subordonnée d'une application linéaire continue. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ et qu'elle est sous-multiplicative.
2. On considère une application continue $f : E \to F$ entre deux evn E et F. On suppose de plus que pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.
   (a) Montrer qu'alors pour tout fermé Γ de E, $f(\Gamma)$ est un fermé de F.
   (b) Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que la partie Γ_n des polynômes unitaires de degré n dont toutes les racines sont réelles est un fermé de E.
3. On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme d'algèbre. Soit $A \in E$. On considère $f : E \to E, M \mapsto 2M - MAM$ et $M_0 \in E$ tel que $\|I_n - AM_0\| < 1$, puis la suite récurrente $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}, M_{k+1} = f(M_k)$. Montrer alors que A est inversible, puis que $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A^{-1}$.

★★★

Kholle 8 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Donner la définition d'une partie connexe par arcs. Démontrer l'équivalence des normes en dimension finie.
2. On se donne trois espaces vectoriels normés E, F, G et K une partie compacte de F. On considère une application continue $f : E \times K \to F, (\lambda, x) \mapsto f(\lambda, x)$. Pour tout élément y de F, on note
$$E_y = \{\lambda \in E | \exists x \in K, f(\lambda, x) = y\}.$$
   (a) Montrer que pour tout y dans F, E_y est un fermé de E.
   (b) On fixe y dans F et on suppose que
$$\forall \lambda \in E_y, \exists ! x \in K, f(\lambda, x) = y$$
   et on note $x = \varphi(\lambda)$. Montrer que l'application $\varphi : E_y \to K$ ainsi définie est continue.
3. Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f|$$
   Montrer que l'application $L : E \to R, f \mapsto f(-1) - f(1)$ n'est pas continue et que $L^{-1}(\{0\})$ est dense dans E.

★★★

Kholle 8 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Donner un crtière de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés. Démontrer que l'application $\exp : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), A \mapsto \exp(A)$ est continue.
2. Soit I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que I est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
3. Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.
   (a) Soit x de E, on note
   $$F_x = \{y \in F \mid \|x-y\| = d(x,F) = \inf_{z\in F} \|x-z\|\}.$$
   Montrer que $y \in F_x \iff x-y \in F^{\perp}$.
   (b) Montrer que F_x a plus un élément.

★★★

Kholle 8 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Énoncer le théorème de Heine. Démontrer que toute partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si et seulement si c'est un intevalle.
2. On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme d'algèbre.
   (a) Soit $A \in E$. Montrer que
   $$(I_n + A/n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A).$$
   (b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de limite A. Montrer que
   $$(I_n + A_n/n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A).$$
   (c) En déduire que pour toutes matrices B, C
   $$(\exp(B/n)\exp(C/n))^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(B+C).$$
3. On se place dans $F = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On note pour tout $f \in E$,
   $$Tf : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   Montrer que T est continue de E dans E, que $|||T||| \leqslant 1$, puis que la suite $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante $f(0)$.

★★★