Exercices :

Révisions sur les fonctions convexes. Tout sur le cours de calcul différentiel .

Cours

Ch16 Calcul différentiel et optimisation

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Révisions du programme précédent	
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables. Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
($\star$) Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t,si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$. ($\star$) Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
($\star$) Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	($\star$) Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$
d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$	
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
($\star$) Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0,1]$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	Notation T_xX pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors T_xX est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple :($\star$) plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f, \partial_{j_1,\dots,j_k} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles mais ont été faites. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

f) Optimisation : étude au premier ordre

Point critique d'une application différentiable.	
($\star$) Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
($\star$) Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	
($\star$)Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

Contenus	Capacités & Commentaires
h) Optimisation : étude au second ordre	
Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.
($\star$) Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x)+\langle \nabla f(x), h\rangle+\frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle+o(\Vert h\Vert^2)$, $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x)+\nabla f(x)^\top h+\frac{1}{2}h^\top H_f(x)h+o(\Vert h\Vert^2)$.	La démonstration est exigible pour le groupe 2 seulement.
($\star$) Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
($\star$) Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n=2$ (trace et déterminant).