Déterminants

Cornou Jean-Louis

15 avril 2023

L'objectif de ce cours est de construire un scalaire qui permette « facilement » de déterminer si une famille est une base, si une matrice est inversible. Cela se base sur la notion de volume du parallélotope engendré par les vecteurs de cette base. On fixe E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ un corps.

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

1.1 Formes multilinéaires alternées.

Définition 1 *Soit n un entier naturel non nul et $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}^n, \mathbb{K})$. On dit que f est une forme n-linéaire (ou multilinéaire) sur E lorsque*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^{n-1}, g : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{K}, x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$$

Autrement dit, lorsque qu'on fixe $n-1$ variables, « l'application de la dernière variable » est une forme linéaire

Exemple 1 *L'application $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ est n-linéaire. Lorsque $n = 2$, on dit que l'application est bilinéaire. Par exemple, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto Tr(\mathrm{AB})$ est bilinéaire.*

Notation
On note $\mathcal{L}^n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces applications. Notation non officielle.

Propriété 1 *$\mathcal{L}^n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathrm{E}^n, \mathbb{K})$.*

Définition 2 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K})$. On dit que f est*

- *symétrique lorsque*

$$\forall \sigma \in \mathrm{S}_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

- *antisymétrique lorsque*

$$\forall \sigma \in \mathrm{S}_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$$

- *alternée lorsque*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, \exists (i, j) \in [\![1, j]\!]^2, i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Notation
On note l'ensemble des formes n linéaires alternées $\Lambda^n(\mathrm{E})$. C'est un sev de $\mathcal{L}^n(\mathrm{E})$.

Propriété 2 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K})$. Alors on a les équivalences :*

- *f est symétrique ssi pour toute transposition τ de S_n,*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

- *f est antisymétrique ssi pour toute transposition τ de S_n,*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n, f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \ldots, x_n)$$

Propriété 3 *Soit $f \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K})$. Alors f est antisymétrique ssi elle est alternée.*

Propriété 4 *Soit $f \in \Lambda^n(\mathbb{K})$ une forme n-linéaire alternée et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille liée. Alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

On fixe dans cette partie $n = \dim(\mathrm{E})$ non nul.

Théorème 1 *Soit $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \Lambda^n(\mathrm{E})$. Alors il existe un scalaire λ tel que*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n, f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j}$$

où, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on décompose x_j dans la base b sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$.

Propriété 5 *L'espace vectoriel $\Lambda^n(\mathrm{E})$ est de dimension 1.*

Définition 3 *Soit $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'unique forme n-linéaire alternée f telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$ s'appelle le déterminant dans la base b, noté $\det_b$.*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n, \det_b(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j}$$

où, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on décompose x_j dans la base b sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$.

Exemple 2 *Déterminant dans la base canonique dans $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$.*

Propriété 6 *Soit $b = (x_1, \dots, x_n)$ et $b' = (x'_1, \dots, x'_n)$ deux bases de E. Alors*

$$\det_b = \det_b(x'_1, \dots, x'_n) \det_{b'} = \det_b(b') \det_{b'}$$

Propriété 7 *Soit b une base de E, et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_b(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.*

Exemple 3 *Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. On munit R^n de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on note $x_j = \sum_{i=1}^{n} \cos(a_i + a_j) e_i$. Alors $\det_{(e_1, \dots, e_n)}(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

2 Déterminant.

On fixe toujours $n = \dim(\mathrm{E})$.

2.1 Déterminant d'un endomorphisme.

Propriété 8 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors pour toute base $b = (e_1, \dots, e_n)$ de E, le scalaire $\det_b(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base b choisie. On l'appelle déterminant de u, noté $\det_u$.*

Exemple 4 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = \lambda \, \mathrm{id}_\mathrm{E}$ l'homothétie de rapport λ. Alors $\det(u) = \lambda^n$.*

Propriété 9 (Multiplicativité du déterminant) *Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$. Alors $\det(uv) = \det(u) \det(v)$.*

Propriété 10 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme u est inversible si et seulement si $\det(u) \neq 0$, auquel cas*

$$\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$$

2.2 Déterminant d'une matrice.

Définition 4 *Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est le déterminant de ses colonnes dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e*

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=i}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Exemple 5 *Déterminant de matrice diagonale, de matrice triangulaire.*

Propriété 11 *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et* b *une base de* E. *Alors* $\det u = \det(\mathrm{M}(u)_b)$

Propriété 12
- *Soit* $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(\mathrm{MN}) = \det(\mathrm{M})\det(\mathrm{N})$.
- *Soit* $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. M *est inversible si et seulement si* $\det(\mathrm{M}) \neq 0$.

Propriété 13

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\mathrm{M}^\mathrm{T}) = \det(\mathrm{M})$$

3 Calcul de déterminants

3.1 Méthode du pivot

Propriété 14 (Déterminant des matrices d'opérations élémentaires)
- *Soit* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}$. *Alors* $\det(\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)) = \det(\mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}_{i,j}) = 1$.
- *Soit* $i \in [\![1,n]\!], \lambda \in \mathbb{K}^*$. *Alors* $\det(\mathrm{D}_i(\lambda)) = \det(\mathrm{I}_n + (\lambda-1)\mathrm{E}_{i,i}) = \lambda$.
- *Soit* $\sigma \in \mathrm{S}_n$. *Alors,* $\det(\mathrm{P}_\sigma) = \det((\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} = \varepsilon(\sigma)$. *En particulier, la matrice d'une transposition est de déterminant* -1.

Exemple 6 *Au bout des opérations élémentaires menant à l'échelonnement d'une matrice* A*, on finit sur une matrice triangulaire (diagonale si vous voulez l'inversibilité et l'éventuel inverse). Son déterminant vaut donc le produit des éléments diagonaux de cette dernière matrice au signe près (la parité du nombre de transpositions de lignes/colonnes effectuées).*

3.2 Développement par rapport à une ligne/colonne

Définition 5 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. *On appelle*
- *mineur de position* (k,l) *de* A*, le déterminant de la matrice* $(a_{i,j})_{i\neq k, j\neq l} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *obtenue en supprimant sa* k*-ième ligne et sa* j*-ième colonne. Il est souvent noté* $\Delta_{k,l}$.
- *cofacteur de position* (k,l) *de* A *le scalaire* $(-1)^{k+l}\Delta_{k,l}$.

Propriété 15 *Avec les notations précédentes,*
- *Développement selon une colonne :*

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$$

- *Développement selon une ligne :*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$$

Propriété 16 (Déterminant de Vandermonde) *Soit* $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathrm{K}^n$. *On note* $\mathrm{V}(a_1,\ldots,a_n) = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ *la matrice dite de Vandermonde de la famille* $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. *Alors*

$$\det \mathrm{V}(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$$

3.3 Calcul par blocs

Propriété 17 *Soit* $r \in [\![2,n-1]\!]$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. *Alors*

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0_{n-r,r} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{C})$$

4 Applications du déterminant

4.1 Calcul d'inverse

Définition 6 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On appelle comatrice de* A *la matrice de ses cofacteurs, elle est noté* $com(A)$*.*

Propriété 18

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), com(A)^T A = A com(A)^T = \det(A) I_n$$

4.2 Résolution de système linéaire

Propriété 19 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*. On suppose* A *inversible. Alors l'unique solution* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *du système linéaire* $AX = B$ *vérifie*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], X_j = \frac{\det(C_1(A), \dots, C_{i-1}(A), B, C_{i+1}(A), \dots, C_n(A))}{\det(A)}$$

Exemple 7 *Illustration en dimension 2.*

4.3 Caractérisation du rang

Définition 7 *Soit* $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$ *et* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. On appelle déterminant extrait d'ordre* r *de* A*, tout déterminant de la forme* $\det((m_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ *où* I *et* J *sont des parties de* $[\![1, n]\!]$ *toutes deux de cardinal* r*.*

Exemple 8 *Les mineurs d'une matrice carrée sont les déterminants extraits d'ordre* $n-1$*.*

Propriété 20 *Soit* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$*. Le rang de* M *vaut* r *ssi il existe un déterminant extrait d'ordre* r *de* M *non nul et tous les déterminants extraits d'ordre* $r+1$ *de* M *sont nuls.*