2

Théorème des valeurs intermédiaires

2.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires, pour les fonctions d'une variable réelle, peut être vu comme une conséquence du théorème de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$ qui nous dit que toute partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Théorème 2.1 *Soient I un intervalle réel non réduit à un point, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels dans I tels que $f(a) f(b) < 0$. Dans ces conditions, il existe au moins un réel $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$ (quitte à remplacer f par $-f$, on s'y ramène).

Soit :

$$\mathcal{A} = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$$

$\mathcal{A}$ est une partie non vide ($a \in \mathcal{A}$) majorée (par b) de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure $\alpha \in [a,b]$.

La fonction f étant continue à droite en a et à gauche en b, on peut trouver un réel $\eta \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ tel que :

$$\begin{array}{l} \forall x \in [a, a+\eta],\ f(x) < 0 \\ \forall x \in [b-\eta, b],\ f(x) > 0 \end{array}$$

On a alors $a < a + \eta \leq \alpha \leq b - \eta < b$ et $\alpha \in]a,b[$. Il existe donc un entier n_0 strictement positif tel que $\left[\alpha - \frac{1}{n_0}, \alpha + \frac{1}{n_0}\right] \subset]a,b[$ et par définition de la borne supérieure α, pour tout entier $n \geq n_0$ il existe $x_n \in \mathcal{A}$ tels que :

$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leq \alpha$$

En posant $y_n = \alpha + \frac{1}{n}$, on a $y_n \in [a,b] - \mathcal{A}$ et :

$$x_n \leq \alpha < y_n$$

On a alors $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ avec, pour tout entier $n \geq n_0$, $f(x_n) \leq 0$ ($x_n \in \mathcal{A}$) et $f(y_n) > 0$ ($y_n \in [a,b] - \mathcal{A}$). Avec la continuité de f en α, on en déduit que :

$$f(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq 0,\ f(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} f(y_n) \geq 0$$

et $f(\alpha) = 0$. ∎

Remarque 2.1 *Si, avec les hypothèses du théorème précédent, la fonction f est de plus strictement monotone, elle est alors injective et la solution α de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ est unique.*

Corollaire 2.1 *Soient I un intervalle réel non réduit à un point, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et a, b deux réels dans I tels que $f(a) < f(b)$. Dans ces conditions, pour tout réel $\lambda \in]f(a), f(b)[$, il existe au moins un réel α strictement compris entre a et b tel que $f(\alpha) = \lambda$.*

Démonstration. Il suffit d'applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - \lambda$. ∎

Le théorème des valeurs intermédiaires est équivalent au résultat suivant.

Théorème 2.2 *Si I est un intervalle réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. Dire que $f(I)$ est un intervalle équivaut à dire que pour tous $y = f(a) < z = f(b)$ dans $f(I)$, le segment $[y, z]$ est contenu dans $f(I)$, donc tout $\lambda \in]f(a), f(b)[$ est dans $f(I)$ et il existe α strictement compris entre a et b tel que $f(\alpha) = \lambda$.

Réciproquement, pour f continue sur I, $y = f(a) < z = f(b)$ dans $f(I)$ avec $a \neq b$ dans I et tout $\lambda \in]y, z[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe α compris entre a et b tel que $\lambda = f(\alpha) \in f(I)$, ce qui prouve que $f(I)$ est un intervalle. ∎

Remarque 2.2 *Si la fonction f n'est pas continue en tout point de I, alors $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $I = [0, 2]$ par $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 2$ si $1 < x \leq 2$ (cette fonction est continue sur $I \setminus \{1\}$ avec $f(I) = \{1, 2\}$).*

On peut donner une autre démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, en utilisant le théorème des segments emboîtés. Cette démonstration ayant l'avantage de fournir une méthode d'approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, à savoir la méthode de dichotomie (voir le paragraphe 8.2).

Les connexes (et convexes) de $\mathbb{R}$ étant les intervalles, le théorème des valeurs intermédiaires est un cas particulier du résultat qui suit.

On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est connexe si la condition $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouverts de E tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ entraîne $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_2$) ou $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1$), c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts de $\mathcal{C}$ (pour la topologie induite).

Un ensemble connexe par arcs (i. e. pour tout $(a, b) \in \mathcal{C}$ il existe $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{C}$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$) est connexe et dans le cas d'un ouvert non vide, la réciproque est vraie.

Théorème 2.3 *Si E, F sont deux espaces vectoriels normés et f une application continue de E dans F, alors pour tout connexe $\mathcal{C}$ de E l'image $f(\mathcal{C})$ est connexe dans F.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une partie connexe de E et $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$. Supposons qu'il existe deux ouverts de F, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, tels que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On a alors :

$$\mathcal{C} \subset f^{-1}(\mathcal{C}') \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2)$$

avec $f^{-1}(\mathcal{O}_1), f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ouverts dans E puisque f est continue et $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, ce qui entraîne $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \emptyset$ ou $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$ et donc $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{C}'$ est donc connexe dans F. ∎

2.2 Quelques applications du théorème des valeurs intermédiaires

Le résultat qui suit est intéressant dans l'étude des points fixes.

Théorème 2.4 *Une fonction continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$ admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Voir le lemme 8.2. ■

En utilisant le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 2.5 (Première formule de la moyenne) *Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $I = [a,b]$, la fonction g étant de signe constant. Il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

Démonstration. La fonction f étant continue sur le compact I est bornée et atteint ses bornes, il existe donc deux réels α, β dans I tels que $m = \inf\limits_{x \in I} f(x) = f(\alpha)$ et $M = \sup\limits_{x \in I} f(x) = f(\beta)$. En supposant g à valeurs positives ou nulles, on a $mg(x) \leq f(x)\, g(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in I$ et :

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx$$

Si $\int_a^b g(x)\, dx = 0$, alors $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$ et n'importe quel point c convient.

Si $\gamma = \int_a^b g(x)\, dx \neq 0$ alors $\gamma > 0$, $\delta = \frac{1}{\gamma} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \in [f(\alpha), f(\beta)]$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel c compris entre α et β tel que $\delta = f(c)$, ce qui donne la formule de la moyenne. ■

On a aussi la version discrète du premier théorème de la moyenne donnée par l'exercice qui suit. Ce résultat peut être utilisé pour obtenir une estimation de l'erreur dans la méthode des rectangles à gauche.

Exercice 2.1 *Soit φ est une fonction continue sur $[a,b]$ et $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de points de $[a,b]$ avec $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(x_k) = n \cdot \varphi(c)$$

Solution 2.1 *En désignant par m [resp. M] la borne inférieure [resp. supérieure] de φ sur $[a,b]$, on a :*

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) \leq M$$

et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \varphi(x_k) = \varphi(c)$.

En utilisant le théorème d'intégration par parties et le théorème des valeurs intermédiaires, on peut montrer la seconde formule de la moyenne qui suit.

Théorème 2.6 (Seconde formule de la moyenne) *Soient f une fonction à valeurs réelles positives de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $I = [a, b]$ et g une fonction continue sur I. Il existe un réel $c \in I$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^c g(x)\, dx$$

Démonstration. Soit G la primitive de g nulle en a. Une intégration par parties nous donne :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(b)\, G(b) - \int_a^b f'(x)\, G(x)\, dx$$

La fonction G étant continue sur le compact I est bornée et on peut noter $m = \inf_{x \in I} G(x)$ et $M = \sup_{x \in I} G(x)$. Comme f est à valeurs positives, on a :

$$mf(b) \leq f(b)\, G(b) \leq Mf(b)$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante, on a alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ et :

$$Mf'(x) \leq f'(x)\, G(x) \leq mf'(x)$$

qui donne par intégration :

$$M(f(b) - f(a)) \leq \int_a^b f'(x)\, G(x)\, dx \leq m(f(b) - f(a))$$

Il en résulte que :

$$mf(b) - m(f(b) - f(a)) \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq Mf(b) - M(f(b) - f(a))$$

soit :

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq Mf(a).$$

Si $f(a) = 0$, on a alors $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$ et la formule est vérifiée pour tout $c \in I$, sinon on a $f(a) > 0$ et $m \leq \dfrac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M$, ce qui entraîne l'existence de $c \in I$ tel que $\dfrac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = G(c)$ (théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue G). ■

Remarque 2.3 *Cette seconde formule de la moyenne est encore valable pour f, g continues par morceaux sur I, la fonction f étant décroissante à valeurs positives (voir [33]).*

Exercice 2.2

1. *Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$.*
   Montrer que pour tout entier naturel non nul n il existe un réel x_n dans $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

2. *Ce résultat est-il valable si on remplace* $\frac{1}{n}$ *par un réel* $\alpha \in]0,1[$ *qui n'est pas l'inverse d'un entier.*
3. *Montrer que si une voiture parcourt* 100 *km en une heure, il existe alors un intervalle de temps égal à une demi-heure pendant lequel la voiture a parcouru* $50\,km$.

Solution 2.2

1. *Pour tout* $n \geq 1$ *on désigne par* f_n *la fonction définie sur* $I_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ *par* $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$. *Si cette fonction ne s'annule jamais sur* I_n, *du fait de sa continuité, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle garde un signe constant sur cet intervalle. Supposons que* $f_n(x) > 0$ *pour tout* $x \in I_n$. *On a alors :*
$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) > 0$$
ce qui contredit $f(0) = f(1)$. *La fonction* f_n *s'annule donc au moins une fois sur* I_n.
2. *Ce résultat n'est plus valable si on remplace* $\frac{1}{n}$ *par un réel* $\alpha \in]0,1[$ *qui n'est pas l'inverse d'un entier. En effet, si* f *est la fonction définie et continue sur* $[0,1]$ *par* $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - \lambda x$, *où* λ *est choisi tel que* $f(0) = f(1)$ *(prendre* $\lambda = \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1$*), alors pour tout réel* $x \in [0, 1-\alpha]$, *on a :*
$$f(x+\alpha) - f(x) = -\lambda\alpha = \alpha\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right) \neq 0$$
puisque $\frac{1}{\alpha}$ *n'est pas entier.*
3. *On considère la fonction* f *définie sur* $[0,1]$ *par* $f(x) = d(x) - 100x$ *où* $d(x)$ *est le nombre de kilomètres parcourus en* x *heures. Cette application est continue avec* $f(0) = f(1) = 0$. *Le résultat précédent, pour* $n = 2$, *nous dit qu'il existe* $x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *tel que* $f(x_2) = f\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)$, *soit* $d\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) - d(x_2) = 50$ *et l'intervalle de temps* $\left[x_2, x_2 + \frac{1}{2}\right]$ *répond à la question.*

Exercice 2.3 *Montrer que si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction périodique continue et non constante de période* $T > 0$, *il existe alors un réel* a *tel que* $f\left(a + \frac{T}{2}\right) = f(a)$.

Solution 2.3 *La fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x)$ *est continue avec :*
$$\begin{cases} g(0) = f\left(\frac{T}{2}\right) - f(0) \\ g\left(\frac{T}{2}\right) = f(T) - f\left(\frac{T}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{T}{2}\right) = -g(0) \end{cases}$$
on déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel a *compris entre* 0 *et* $\frac{T}{2}$ *tel que* $g(a) = 0$.

Exercice 2.4 *On désigne par Γ le cercle unité dans le plan complexe et par f une fonction continue de Γ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés dans Γ ayant même image par f.*

Solution 2.4 *La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^{ix})$ étant continue 2π-périodique et à valeurs réelles, il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $g(\alpha + \pi) = g(\alpha)$, soit $f\left(e^{i(\alpha+\pi)}\right) = f(e^{i\alpha})$, les points $e^{i\alpha}$ et $e^{i(\alpha+\pi)} = -e^{i\alpha}$ étant diamétralement opposés.*

Exercice 2.5 *On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :*

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$$

1. *Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction :*

$$T_n : x \mapsto \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x))$$

est polynomiale de degré n et calculer $\|T_n\|_\infty$.

2. *Montrer que, pour toute fonction polynomiale de degré n, $P : x \mapsto x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, on a $\|P\|_\infty \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.*

Solution 2.5 *On rappelle que la fonction* arccos *réalise un homéomorphisme de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.*

1. *Pour $n =$ et $x \in [-1, 1]$, on a $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$.*
Pour $n = 2$ et $x \in [-1, 1]$, on a :

$$2T_2(x) = \cos(2 \arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

soit $T_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$.
Supposons que pour $n \geq 2$ et k compris entre 1 et 2, T_k soit la restriction à $[-1, 1]$ d'un polynôme unitaire de degré k.
Avec :

$$\cos((n + 1)\theta) + \cos((n - 1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

où on a noté $\theta = \arccos(x)$, on déduit que :

$$2^n T_{n+1}(x) + 2^{n-2} T_{n-1}(x) = 2^n x T_n(x)$$

soit :

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \frac{1}{4} T_{n-1}(x)$$

et T_{n+1} est la restriction à $[-1, 1]$ d'un polynôme T_{n+1} unitaire de degré $n + 1$.
Pour $n \geq 1$, on a $|T_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et la valeur $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ est atteinte pour $x = 1$, donc $\|T_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

2. *Supposons qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$. Pour tout k compris entre 0 et n, on a alors :*

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < P\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

et :

$$-\frac{1+(-1)^k}{2^{n-1}} < (P - T_n)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = P\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} < \frac{1-(-1)^k}{2^{n-1}}$$

Donc :

$$(P - T_n)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) < 0$$

pour k est pair et :

$$(P - T_n)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) > 0$$

pour k est impair. On a donc :

$$(P - T_n)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)(P - T_n)\left(\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right) < 0$$

pour $k = 0, \cdots, n$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que $P - T_n$ s'annule en au moins n points distincts de $[-1, 1]$. Les polynômes P et T_n étant unitaires de degré n, le polynôme $P - T_n$ est de degré au plus égal à $n - 1$ et donc nul puisqu'il a trop de racines distinctes.
On a donc $P = T_n$ et $T_n(1) = P(1) = \frac{1}{2^{n-1}}$, ce qui contredit $\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$.
On a donc $\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout polynôme P unitaire de degré n.

2.3 Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

La réciproque du théorème des valeurs intermédiaires n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'une fonction peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

Plus précisément, on dit qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout intervalle J contenu dans I, $f(J)$ est un intervalle.

Le théorème de Darboux (théorème 1.27) nous dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et il existe des fonctions dérivables de dérivée non continue.

Un autre exemple est donné par le résultat qui suit.

Exercice 2.6 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.*

Solution 2.6 *En considérant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, ce qui prouve que f n'est pas continue en 0.*
Si J est un intervalle réel ne contenant pas 0, alors f est continue sur J et $f(J)$ est un

intervalle.
Si J est un intervalle contenant 0 non réduit à un point (sinon $J = f(J) = \{0\}$), on considère les suites $(x_n)_{n\geq n_0}$, $(y_n)_{n\geq n_0}$, définies par $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}}$, où n_0 est un entier assez grand pour que ces suites soient à valeurs dans J, et on a $f(x_n) = 1$, $f(y_n) = -1$ pour tout $n \geq n_0$ et :

$$[-1,1] \supset f(J) \supset f([y_n, x_n]) \supset [-1,1]$$

c'est-à-dire que $f(J) = [-1,1]$.
En définitive, la fonction f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Ce qu'il manque à une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur un intervalle compact $[a,b]$ pour être continue est donné par le résultat suivant.

Théorème 2.7 *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires alors f est continue si, et seulement si, pour tout réel y, l'ensemble $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I.*

Démonstration. Si f est continue, on sait qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et l'image réciproque du fermé $\{y\}$ par f est fermé.

Réciproquement supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et que $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout $y \in \mathbb{R}$. On se donne $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Les ensembles $F_1 = f^{-1}\{f(x_0) - \varepsilon\}$ et $F_2 = f^{-1}\{f(x_0) + \varepsilon\}$ sont des fermés (éventuellement vides) de I qui ne contiennent pas x_0, donc x_0 est dans l'ouvert $\mathcal{O} = (I \setminus F_1) \cap (I \setminus F_2)$ et il existe $\eta > 0$ tel que $J = I \cap \left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[\subset \mathcal{O}$. Pour tout $x \in J$ on a $f(x) \neq f(x_0) \pm \varepsilon$ et $f(J)$ est un intervalle qui contient $f(x_0)$, nécessairement $f(J) \subset \left]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\right[$, c'est-à-dire que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I \cap \left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[$. On a donc ainsi montré que f est continue en tout point de I. ■

Remarque 2.4 *On peut affaiblir les hypothèses dans le théorème précédent en remplaçant l'hypothèse, $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout réel y, par $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I pour tout rationnel y (voir [11], exercice 4.1).*

Dans le cas des fonctions monotones, on a le résultat suivant, où $I = \left]a, b\right[$ est un intervalle ouvert avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Théorème 2.8 *Si f est une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(I)$ soit un intervalle, alors elle est continue sur I.*

Démonstration. On suppose que f est croissante.

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in I$ on a $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$. On sait déjà que f admet une limite à gauche et à droite en x avec $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$. Il s'agit donc de montrer que $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$.

Supposons que $f(x^-) < f(x)$, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut alors trouver $x_0 \in \left]a, x\right[$ tel que :

$$f\left(x^-\right) - \varepsilon < f(x_0) \leq f\left(x^-\right) < f(x).$$

Mais si de plus $f(I)$ est un intervalle alors tout $\lambda \in \left]f(x^-), f(x)\right[$ étant dans $\left]f(x_0), f(x)\right[$ s'écrit $\lambda = f(x_1)$ avec $x_1 \in \left]x_0, x\right[$ et on a alors $\lambda = f(x_1) \leq f(x^-)$ en contradiction avec $\lambda > f(x^-)$. On a donc $f(x^-) = f(x)$.

On montre de manière analogue que $f(x) = f(x^+)$.

Les limites à droite et à gauche en x sont donc égales à $f(x)$, ce qui prouve la continuité de f en x. ■

2.4 Fonctions réciproques

Si f est une application injective de I dans $\mathbb{R}$, elle définit alors une bijection de I sur $f(I)$ et on peut définir sa fonction réciproque notée f^{-1} par :

$$\left(y \in f(I) \text{ et } x = f^{-1}(y)\right) \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y = f(x))$$

Un cas particulièrement intéressant est celui des fonctions strictement monotones.

Théorème 2.9 *Si f est une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, elle réalise alors une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Démonstration. En remplaçant éventuellement f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Si $x \neq y$ dans I on a $x < y$ ou $y < x$ (l'ordre de $\mathbb{R}$ est total) ce qui entraîne $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$, soit $f(x) \neq f(y)$ dans tous les cas. La fonction f est donc injective et elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Il est facile de vérifier que la fonction réciproque f^{-1} est également strictement croissante. ■

Sans hypothèse de continuité pour f, l'image $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = x + 1$ pour $1 < x \leq 2$.

En réalité si f est strictement monotone et $f(I)$ est un intervalle, alors la fonction f est nécessairement continue ainsi que la fonction f^{-1}.

Le théorème qui suit est à la base des définitions de fonctions réciproques classiques comme les fonctions racines n-ème, la fonction exponentielle, les fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses.

Théorème 2.10 *Si f est une application continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et f est une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse f^{-1} continue strictement monotone de même sens de variation que f.*

Démonstration. Si f est strictement monotone, elle est alors injective. Si de plus elle est continue alors $J = f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires). La fonction réciproque f^{-1} est alors strictement monotone de J sur $I = f^{-1}(J)$ qui est un intervalle, elle est donc continue.
Il nous reste à montrer que $J = f(I)$ est de même nature que I. En notant $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ les extrémités de I et en supposant f strictement croissante, J est un intervalle d'extrémités :

$$\alpha = \inf(f(I)) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \ \beta = \sup(f(I)) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$$

Si $a \in I$ alors $\alpha = f(a) \in J$ et de même pour b.

Si $a \notin I$ alors $\alpha \notin J$ (il suffit de raisonner avec f^{-1} qui a les mêmes propriétés que f) et $\alpha < f(x)$ pour tout $x \in J$. De même pour b.

Les intervalles I et J sont donc de même nature. ■

Remarque 2.5 *Sans hypothèse de stricte monotonie, l'intervalle $f(I)$ n'est pas nécessairement de même nature que I comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $I =]-1,1[$ ($f(I) = [0,1[$).*

Une application continue, bijective de I sur J et d'inverse continu est appelée homéomorphisme.

Ce résultat nous permet de définir la fonction exponentielle comme l'inverse de la fonction logarithme définie comme la primitive sur $\mathbb{R}^{+,*}$ nulle en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

De $\ln'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ on déduit que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$, puis avec $\ln(2) > \ln(1) = 0$, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ que cette fonction n'est pas bornée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Enfin avec $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

La fonction ln est donc continue strictement croissante de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$, c'est donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Cette fonction est donc définie par :

$$(x \in \mathbb{R} \text{ et } y = e^x) \Leftrightarrow \big(y \in \mathbb{R}^{+,*} \text{ et } x = \ln(y)\big)$$

Pour tout entier naturel non nul n, avec la continuité et la stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, on aboutit à la définition de la fonction racine n-ème :

$$\big(x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } y = \sqrt[n]{x}\big) \Leftrightarrow \big(y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x = y^n\big)$$

Avec les mêmes arguments, on définit les fonctions trigonométriques inverses :

$$\left\{\begin{array}{l} (x \in [-1,1] \text{ et } y = \arcsin(x)) \Leftrightarrow \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } x = \sin(y)\right) \\ (x \in [-1,1] \text{ et } y = \arccos(x)) \Leftrightarrow (y \in [0,\pi] \text{ et } x = \cos(y)) \\ (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \arctan(x)) \Leftrightarrow \left(y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x = \tan(y)\right) \end{array}\right.$$

et les fonctions hyperboliques inverses :

$$\left\{\begin{array}{l} (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \operatorname{argsh}(x)) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \operatorname{sh}(y)) \\ (x \in [1,+\infty[\text{ et } y = \operatorname{argch}(x)) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x = \operatorname{ch}(y)) \\ (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \operatorname{argth}(x)) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \operatorname{th}(y)) \end{array}\right.$$

On a vu qu'une fonction strictement monotone est injective, mais en général la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = \frac{1-x}{2}$ pour $1 < x \leq 2$ (faire un graphique). Mais dans le cas où f est continue, il y a équivalence. De manière précise, on a le résultat suivant.

Théorème 2.11 *Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Cette fonction f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.*

Démonstration. Si f est strictement monotone, on a déjà vu qu'elle est injective (qu'elle soit continue ou non).

Pour la réciproque, on propose trois démonstrations.

Supposons f continue et injective de I dans $\mathbb{R}$.

Première démonstration. S'il existe $x < y < z$ dans I tels que $f(x) < f(z) < f(y)$ alors tout réel u dans $]f(z), f(y)[\subset]f(x), f(y)[$ va s'écrire $u = f(c) = f(d)$ avec $c \in]y,z[$ et $d \in]x,y[$, donc $c \neq d$, ce qui contredit l'injectivité de f. La fonction f est donc strictement monotone.

Deuxième démonstration. Pour $a < b$ dans I, on a $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$. Nous allons alors montrer que f est strictement croissante. Pour $x < y$ dans I, l'application :

$$\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(ta + (1-t)x) - f(tb + (1-t)y)$$

est continue sur $[0,1]$ et ne s'annule jamais sur cet intervalle (comme f est injective, $\varphi(t) = 0$ équivaut à $t(b-a) + (1-t)(y-x) = 0$ encore équivalent à $t(b-a) = (1-t)(y-x) = 0$ qui est impossible). Cette fonction garde donc un signe constant sur $[0,1]$ et en particulier $\varphi(0) = f(x) - f(y)$ est de même signe que $\varphi(1) = f(a) - f(b)$, c'est-à-dire que $f(x) < f(y)$.

Troisième démonstration. On utilise la fonction g définie par $g(x,y) = f(x) - f(y)$ sur la partie Δ de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Delta = \left\{(x,y) \in I^2 \mid x < y\right\}.$$

Cette fonction est continue sur Δ qui est convexe donc connexe, ce qui implique que $g(\Delta)$ est connexe dans $\mathbb{R}^*$ (f est injective), c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}^*$ et on a soit $g(\Delta) \subset \mathbb{R}^{+,*}$ et f est strictement croissante, soit $g(\Delta) \subset \mathbb{R}^{-,*}$ et f est strictement décroissante. ■