Soit E un ensemble. On note $\mathcal{R}(E)$ l'ensemble des relations d'ordre sur E. On définit la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathcal{R}(E)$ par :

pour $\sqsubseteq_1, \sqsubseteq_2 \in \mathcal{R}(E)$,

$$\sqsubseteq_1 \preccurlyeq \sqsubseteq_2 \iff \forall x,y \in E, \left(x \sqsubseteq_1 y \Rightarrow x \sqsubseteq_2 y\right)$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{R}(E)$
2. Montrer que $(\mathcal{R}(E), \preccurlyeq)$ admet un plus petit élément
3. $\sqsubseteq \in \mathcal{R}(E)$ est dit maximal pour $\preccurlyeq$ si :

$$\forall \trianglelefteq \in \mathcal{R}(E), \ \sqsubseteq \preccurlyeq \trianglelefteq \Rightarrow \sqsubseteq = \trianglelefteq$$

a) Montrer que toute relation d'ordre totale sur E est maximale pour $\preccurlyeq$

b) Soit $\sqsubseteq$ une relation d'ordre non totale sur E.
Soient $a, b \in E$ non comparables pour $\sqsubseteq$
Soit $\trianglelefteq$ définie sur E par :

$$x \trianglelefteq y \iff x \sqsubseteq y \quad \text{ou} \quad (x \sqsubseteq a \text{ et } b \sqsubseteq y)$$

Montrer que $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur E et que $\sqsubseteq \preccurlyeq \trianglelefteq$

c) En déduire les élément maximaux de $\mathcal{R}(E)$ pour $\preccurlyeq$