Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 26 : Probabilités sur un univers fini. Les exercices portent sur le chapitre 26 : Probabilités sur un univers fini.

## Probabilités sur un univers fini

Notion d'univers, d'événement. Evénement élémentaire, contraire. Intersection, union d'événements. Evénement impossible, certain. Système complet d'événements.

Probabilité sur un univers fini. (★) Une probabilité est entièrement déterminée par la donnée de ses valeurs sur les événements élémentaires. Distribution de probabilités. (★) Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités sur l'univers $\Omega$. Alors il existe un unique probabilité $P$ sur $\Omega$ telle que $\forall\omega\in\Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$. Probabilité uniforme. Probabilité du complémentaire, de $B\backslash A$, de l'union de deux événements.

Pour $B$ de probabilité non nul, probabilité conditionnelle sachant $B$. (★) L'application $P_B : A \mapsto P(A|B)$ est une probabilité. (★) Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

Evénements indépendants, deux à deux, mutuellement. Indépendance des complémentaires.

## Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Notion de variable aléatoire. Notations $(X\in A), (X\leq x), (X = x)$, etc. Loi d'une variable aléatoire. (★) L'application $P_X : A \mapsto P(X\in A)$ est une probabilité. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, croissance, limites en $+\infty$ et $-\infty$. Image d'une variable aléatoire par une fonction $f$. (★) La loi de $f(X)$ est donnée par $P_{f(X)}(B) = P_X(f^{-1}(B))$. Si $X$ et $Y$ ont même loi, $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi. Pour $A$ de probabilité non nulle, loi conditionnelle de $X$ sachant $A$.

Loi uniforme $\mathcal{U}(E)$, de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Espérance définie par $E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)X(\{\omega\})$. (★) Théorème de transfert : $E[X] = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$, puis $E[f(X)] = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$. Variable centrée. (★) Linéarité et croissance de l'espérance. Espérance d'une loi de Bernoulli, binomiale. (★) Inégalité de Markov.

Variance. $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$. $V(aX + b) = a^2V(X)$. Variance d'une loi de Bernoulli, binomiale. (★) Inégalité de Bienaymé-Tchebyshev. Covariance. $\text{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. $V(X+Y) = V(X) + 2\text{cov}(X,Y) + V(Y)$.

Indépendance de variables aléatoires. (★) Soit $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Lemme des coalitions. (★) Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, $E[XY] = E[X]E[Y]$, $\text{cov}(X,Y) = 0$, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

★ ★ ★ ★ ★