Compte rendu colle 4

KADOUCH Jonas

9/10

Question de cours.

Montrer que : $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivable

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$

$\iff \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = a \int_1^x \frac{dt}{t}$

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable

tq $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$

Fixons $x > 0$

Je pose $g_x : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto f(xy) \end{array}$

Alors g_x dérivable par composition puisque f est dérivable et $y \mapsto xy$ est dérivable.

$\forall y > 0,\ g_x'(y) = x f'(xy)$

D'autre part

$\forall y > 0,\ g_x'(y) = 0 + f'(y)$

$\forall y > 0,\ x f'(xy) = f'(y)$

En particulier, pour $y = 1$

$$x f'(x) = f'(1)$$

Donc $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$

Je pose $a = f'(1)$

D'autre part, l'équation fonctionnelle évaluée en $x = 1$ et $y = 1$ entraine

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

Donc $f(1) = 0$

Donc f est la primitive de $x \longmapsto \frac{a}{x}$ qui s'annulle en 1

$$\forall x > 0, \; f(x) = \int_1^x \frac{a}{t} \, dt = a \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$h : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Montrons que $\forall x, y > 0$, $h(xy) = h(x) + h(y)$

Fixons $y > 0$

Je pose $g \; \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto h(xy)$

Alors g est dérivable puisque h l'est.

En effet, h est une primitive de fonction continue, donc dérivable.

$\forall x > 0, \quad g'(x) = y\, h'(xy)$

$\forall x > 0, \quad g'(x) - h'(x) = \frac{a}{x} - \frac{a}{x} = 0$

$g' - h'$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc $g - h$ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\forall x > 0, \quad g(x) - h(x) = g(1) - h(1)$

$= h(1y) - 0$

$h(xy) - h(x) = h(y)$

$\boxed{\text{Donc } h \text{ vérifie l'équation fonctionnelle.}}$ Nickel

Exercice 1

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp\left(x^2 \ln(x) - x^x \ln(x)\right)$

$= \exp\left(\ln(x)\left(x^2 - x^x\right)\right)$

$= \exp\left(\ln(x)\, x^x \left(\frac{x^2}{x^x} - 1\right)\right)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)\, x^x \left(\frac{x^2}{x^x} - 1\right) = -\infty$

Par composition de exp :

$$\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\ln(x)\, x^x \left(\frac{x^2}{x^x} - 1\right)\right) = 0$$

Finalement, $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$

Bien

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x e^x$

(• Étudier f et montrer sa bijectivité.
• Trouver une équation différentielle vérifiée par f^{-1}.)

f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.
et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = e^x + x e^x$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante et continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}^+$
Elle est donc bijective sur $\mathbb{R}^+$

Bien

On cherche $x(y)$:

On a donc $x(y)e^{x(y)} = y$

qui est dérivable par rapport à y :

Elle ne l'est que R+* car f'(0)=0

$$x' e^{x} + x' x e^{x} = 1$$

$$x' \frac{y}{x} + x' y = 1$$

possible car x ne s'annule pas sur R+*

$$x' y + x' x y = x$$

$$\boxed{x'(y + xy) - x = 0}$$

La démarche est comprise, mais il faut la détailler d'un point de vue mathématique