Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$). Le chapitre sur les suites numériques est clos avec un peu de vocabulaire, ce qui permet de traiter le chapitre sur la continuité avec la notion de voisinage. Les étudiants doivent savoir spécifier les différents cas.

Chapitre 8 : Suites numériques.

Vocabulaire de topologie

X est dense dans $\mathbb{R} \iff \forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon, \exists x \in X, |x-a| \leq \varepsilon$. Un réel a est la borne supérieure de X si et seulement si $\forall x \in X, x \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, a-\varepsilon < x \leq a$. Boule ouverte de centre a, de rayon r. Notions de voisinage d'un scalaire, de $+\infty$, de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$, de ∞ dans $\mathbb{C}$. u tend vers l ssi pour tout voisinage V de l, u_n appartient à V à partir d'un certain rang. Partie ouverte, élements adhérents à une partie.

Chapitre 9 : Continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

Limite

f admet ℓ pour limite en a lorsque pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que $\forall x \in I \cap W, f(x) \in V$. ($\star$)Unicité de la limite en un point. Si $a \in I$ et f admet une limite en a, alors $\lim_a f = f(a)$. Limites à gauche et droite en a. ($\star$) Caractérisation séquentielle de la limite. ($\star$) Opérations sur les limites, composition, passage à la limite dans les inégalités. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a. Théorème d'encadrement pour les limites finies, limites $\pm\infty$ par minoration, majoration. ($\star$) Théorème de la limite monotone : en particulier, si f est croissante et définie en a, $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$. Cas où a est une extrémité de I.

Continuité en un point

Fonction continue en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité en a. Prolongement par continuité. Opérations sur les fonctions continues en un point.

Continuité globale

Fonction continue sur une partie de $\mathbb{R}$. Fonctions Lipschitziennes. Opérations sur $C(I,K)$. ($\star$) Théorème des valeurs intermédiaires. ($\star$) Si $f : I \to \mathbb{R}$, est continue sur un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle. Cas d'une fonction monotone. ($\star$) Théorème des bornes atteintes. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur intervalle, alors f est strictement monotone. Théorème de la bijection.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star$