IPESUP 2022/2023

Kholle 22 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Théorème du rang : Énoncé et démonstration.
2. Soit p et q deux projecteurs.
   (a) Démontrer l'équivalence : $p \circ q = q \circ p = 0 \iff q + p$ projecteur.
   (b) Dans ce cas, démontrer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
3. Soit u un endomorphisme de rang 1 et F un sev de E. Montrer que $u(F) \subset F$ ssi $\mathrm{Im}(u) \subset F$ ou $F \subset \ker(u)$.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 22 filière MPSI/MP2I
Planche 2

★★★

1. Détermination d'une application linéaire à l'aide d'une base de E : Énoncé et démonstration.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la suite des noyaux itérés $(\ker u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante stationnaire.
3. Soit E de dimension finie, u, v des endomorphismes de E tels que $u+v$ est bijectif.
   (a) Montrer que si $v \circ u = 0$, alors $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) = \dim(E)$.
   (b) Montrer que si $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) = \dim(E)$, alors il existe un projecteur p tel que
$$u = p\circ(u+v), \quad v = (\mathrm{Id}_E - p)\circ(u+v)$$

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 22 filière MPSI/MP2I
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Caractérisation des projecteurs. Énoncé et démonstration.
2. Soit E, F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\ker v \oplus \mathrm{Im}(u) = F$.
3. Soit E de dimension finie, u, v deux endormorphismes de E tels que $u^2 + uv = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u et v commutent.

⋆⋆⋆

Kholle 22 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique lorsqu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Démontrer que pour un tel endomorphisme u, il existe des scalaires $(a_0, \dots, a_{n-1})$ tels que
$$u^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0$$
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n. Pour tout entier i dans $[\![0, n]\!]$, on note $Q_i = Q(X+i)$. Montrer que la famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

⋆⋆⋆