

Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 13 : structures algébriques usuelles. Les exercices porteront sur les groupes, anneaux et corps.

## Chapitre 13 : Structures algébriques usuelles

### Loi de composition interne

Notion de loi de composition interne (abrégé en lci) sur un ensemble  $E$ . Associativité, commutativité, élément neutre. Unicité du neutre lorsqu'il existe. Élément inversible, notion d'invers. (★) Si la lci est associative et admet un neutre, alors tout élément de  $E$  admet au plus un inverse. Distributivité d'une lci sur une lci. Stabilité d'une partie de  $E$  par une lci.

### Structure de groupe

Notion de groupe.  $\forall (x, y) \in G^2, (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ . Groupe commutatif. Groupe des permutations d'un ensemble. Sous-groupes. (★) Soit  $H \subset G$  non vide,  $H$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$$

Une intersection quelconque de sous-groupes de  $G$  est un sous-groupe de  $G$ .

Le sous-groupe engendré par une partie  $A$  de  $G$  est l'intersection des sous-groupes de  $G$  contenant  $A$ . Notation  $\langle A \rangle$ . (★) Le sous-groupe engendré par  $A$  est le plus petit sous-groupe de  $G$  (au sens de l'inclusion) contenant  $A$ , il est formé des mots de l'alphabet  $A \cup A^{-1}$ . Groupes monogènes, cycliques. Groupe produit.

Morphismes de groupes. (★) Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes. Alors  $f(e_G) = e_H$  et  $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ . Isomorphisme de groupes, groupes isomorphes, automorphisme de groupes. (★) Soit  $f : G \rightarrow H$  un isomorphisme de groupes, alors sa réciproque est un isomorphisme de groupes. Automorphisme intérieur. (★) Image directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes. Noyau, image. (★) Caractérisation de la surjectivité par l'image, de l'injectivité par le noyau. Correspondance bijective entre les sous-groupes de groupes isomorphes.

### Structure d'anneau

Notion d'anneau (tous les anneaux sont unitaires conformément au programme). Anneau commutatif. (★)  $\forall x \in A, 0_A x = x 0_A = 0_A$ . (★) Lorsque  $a$  et  $b$  commutent, factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ . (★) Lorsque  $a$  et  $b$  commutent, formule du binôme. Ensemble des inversibles  $A^\times$ . (★)  $(A^\times, \times)$  est un groupe. Diviseurs de zéro, anneau intègre, corps. Sous-anneau.

Morphisme d'anneaux. Isomorphisme d'anneaux. (★) Si  $f$  est un isomorphisme d'anneaux, sa réciproque est un isomorphisme d'anneaux.

★ ★ ★ ★ ★