**Théorème 1.17** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $I \times [a, b]$, où $I$ est un intervalle réel non réduit à un point et $a < b$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\varphi$ définie sur $I$ par :*

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

*est continue sur $I$.*

**Démonstration.** On se fixe un réel $x_0$ dans $I$ et un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans $I$, contenant $x_0$, avec $\alpha < \beta$.

La fonction $f$ étant continue sur le compact $K = [\alpha, \beta] \times [a, b]$ y est uniformément continue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|f(x, t) - f(u, v)| < \varepsilon$ pour tous $(x, t)$ et $(u, v)$ dans $K$ tels que $\|(x, t) - (u, v)\|_\infty < \eta$.

Pour $x$ dans $I$ tel que $|x - x_0| < \eta$, on a $\|(x, t) - (x_0, t)\|_\infty < \eta$ pour tout $t \in [a, b]$ et :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)|\, dt < (b - a)\, \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de $\varphi$ en $x_0$. ■

## 1.6 Dérivabilité en un point, dérivabilité sur $I$

**Définition 1.6** *On dit que la fonction $f$ est dérivable en $a \in I$ si la fonction ;*

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & I \setminus \{a\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

*admet une limite finie en $a$.*

Quand cette limite existe, elle est unique, on la note $f'(a)$ et on dit que c'est le nombre dérivé de $f$ en $a$.

De manière équivalente, on peut dire que $f$ est dérivable en $a$ si, et seulement si, elle admet un développement limité d'ordre 1 en $a$ :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - a) + o(x - a)$$

et dans ce cas $\mathrm{a}_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$.

De la définition du nombre dérivé on déduit facilement le résultat suivant.

**Théorème 1.18** *Si $f$ est dérivable en $a \in I$ elle est alors continue en ce point.*

La réciproque de ce résultat est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ au voisinage de 0.

**Définition 1.7** *On dit que la fonction $f$ est dérivable à gauche [resp. à droite ] en $a \in I$ si la fonction $\tau_a$ admet une limite à gauche [resp. à droite] finie en $a$.*

Quand cette limite existe, elle est unique, on la note $f'_g(a)$ [resp. $f'_d(a)$] et on dit que c'est le nombre dérivé à gauche [resp. à droite] de $f$ en $a$.

Là encore des définitions on déduit facilement les résultats suivants.

**Théorème 1.19** *Si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a \in \overset{\circ}{I}$ alors elle est continue en ce point.*

**Théorème 1.20** *Si $a \in \overset{\circ}{I}$, alors $f$ est dérivable en $a$ si, et seulement si, elle dérivable à gauche et à droite en ce point avec $f'_g(a) = f'_d(a)$. Cette valeur commune est alors égale à $f'(a)$.*

**Définition 1.8** *Si $D$ est l'ensemble des points $x \in I$ où $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dérivable, on définit alors la fonction dérivée de $f$ sur $D$ par $x \mapsto f'(x)$.*

Cet ensemble $D$ peut être vide et dans ce cas la fonction dérivée n'est pas définie. C'est le cas par exemple pour la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ qui est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ (exemple 1.4) et en conséquence ne peut être dérivable.

Une fonction peut très bien être continue et nulle part dérivable sur $I$. Pour construire une telle fonction, on désigne par $\varphi$ la fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [-1, 1], \ \varphi(x) = |x|$$

**Lemme 1.4** *Pour tous réels $x, y$ on a :*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$$

**Démonstration.** Avec $\varphi(x) \in [0, 1]$ pour tout réel $x$, on déduit que pour $x, y$ dans $\mathbb{R}$ tels que $|x - y| \geq 1$, on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 1 \leq |x - y|$.

On suppose donc que $|x - y| < 1$ et comme $x, y$ jouent des rôles symétriques, on peut même supposer que $0 < y - x < 1$. On distingue alors les cas suivants :

– si $x, y$ sont dans $[-1, 1]$, alors :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

– si $x \in [-1, 1]$ et $y \in [1, 2]$, avec $0 < y - x < 1$ on a nécessairement $x \in [0, 1]$ et $y - 2 \in [-1, 0]$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(y - 2) = x + y - 2 \leq y - x \\ \varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - 2) - \varphi(x) = 2 - y - x \leq y - x \end{cases}$$

soit $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$ ;

– dans le cas général, toujours avec $0 < y - x < 1$, en notant $n$ la partie entière de $\dfrac{x+1}{2}$, on a :

$$\begin{cases} -1 \leq x - 2n < 1 \\ -1 \leq x - 2n < y - 2n < 1 + x - 2n < 2 \end{cases}$$

et avec ce qui précède :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - 2n) - \varphi(y - 2n)| \leq |x - y|$$

■

La proposition qui suit nous sera également utile.

**Lemme 1.5** *Soit $x \in \mathbb{R}$. Si l'intervalle $\left[x, x + \dfrac{1}{2}\right[$ ne contient pas d'entiers, alors :*

$$\left|\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \varphi(x)\right| = \frac{1}{2}$$

**Démonstration.** Si $n$ est la partie entière de $\dfrac{x+1}{2}$, alors $-1 < x-2n < 1$ (l'inégalité stricte à gauche est justifiée par $x \notin \mathbb{Z}$) et comme il n'y a pas d'entiers dans $\left[x-2n, x-2n+\dfrac{1}{2}\right[$, on a soit $-1 < x-2n < 0$ et $-\dfrac{1}{2} < x-2n+\dfrac{1}{2} \leq 0$, soit $x-2n > 0$ et $\dfrac{1}{2} < x-2n+\dfrac{1}{2} \leq 1$, ce qui donne :

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\varphi(x)=\varphi\left(x-2n+\frac{1}{2}\right)-\varphi(x-2n)=-\frac{1}{2}$$

dans le premier cas et :

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\varphi(x)=\varphi\left(x-2n+\frac{1}{2}\right)-\varphi(x-2n)=\frac{1}{2}$$

dans le second. ■

On définit la fonction de Van der Waerden par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

Avec $0 \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, on déduit que cette série de fonction est uniformément convergente et avec la continuité de $\varphi$ que la somme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.21** *La fonction $f$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.*

**Démonstration.** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

L'intervalle $\left[4^m x-\dfrac{1}{2}, 4^m x+\dfrac{1}{2}\right[$ qui est de longueur 1 contient exactement un entier et cet entier est dans l'un seulement des deux intervalles $\left[4^m x-\dfrac{1}{2}, 4^m x\right[$ ou $\left[4^m x, 4^m x+\dfrac{1}{2}\right[$. On note alors $\varepsilon_m=-1$ si le premier intervalle ne contient pas d'entier et $\varepsilon_m=1$ si c'est le second. En posant $h_m=\dfrac{\varepsilon_m}{2}\dfrac{1}{4^m}$, on a :

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m}$$

Pour $n > m$, $4^n h_m = 2\varepsilon_m 4^{n-m-1}$ est un entier pair et $\varphi(4^n x+4^n h_m)-\varphi(4^n x)=0$.

Pour $n=m$, $4^m h_m=\dfrac{\varepsilon_m}{2}$ et le lemme précédent nous dit que :

$$\left|\varphi(4^m x+4^m h_m)-\varphi(4^m x)\right|=\frac{1}{2}$$

Enfin pour $0 \leq n < m$, avec le lemme 1.4 on a :

$$\left|\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)\right| \leq 4^n h_m$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m}\right| \\ &\geq 3^m-\sum_{n=0}^{m-1}3^n=\frac{3^m+1}{2}\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| = +\infty$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty} h_m = 0$, ce qui implique que $f$ ne peut être dérivable en $x$. ■

Un autre exemple de telle fonction est donné par la fonction de Weierstrass définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(p^n x)}{2^n}$$

où $p \geq 6$ est un entier pair. On peut même montrer que cette fonction n'est monotone sur aucun intervalle non réduit à un point (voir [33]).

Si une fonction $f$ est dérivable sur un intervalle $I$, sa dérivée $f'$ n'est pas nécessairement continue comme le montre l'exemple de la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$. On a $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$$

donc $f'(0) = 0$. Mais $f'$ n'est pas continue en 0 car la fonction $g : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 (ce qui se déduit de $g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = (-1)^k$ pour tout entier $k \geq 1$).

**Définition 1.9** *On dit qu'une fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (ou continûment dérivable) sur $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$ et si la fonction dérivée $f'$ est continue sur cet intervalle.*

**Exercice 1.17** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 avec $f(0) = 0$. Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = f'(0)\ln(2)$$

**Solution 1.17** *Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que :*

$$0 < x < \eta \ \Rightarrow\ \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon$$

*Pour tout entier $n > \frac{1}{\eta}$, on a $0 < \frac{1}{n+k} < \eta$ pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$ et donc :*

$$\left|f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k}f'(0)\right| < \frac{1}{n+k}\varepsilon$$

*ce qui entraîne :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)f'(0)\right| < \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)\varepsilon < \varepsilon$$

*En considérant que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$$

*on aboutit au résultat.*
*Par exemple pour $f(x) = x^2$, on obtient :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0$$

*et pour $f(x) = \arctan(x)$ :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{n+k}\right) = \ln(2)$$

## 1.7 Opérations sur les fonctions dérivables

Pour toute fonction $f$ et tout point $a$ de $I$, on note $\tau_a(f)$ la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par $\tau_a(f)(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$.

Les résultats importants relatifs aux opérations algébriques sur les fonctions dérivables sont résumés avec le théorème qui suit.

**Théorème 1.22** *Soient $f, g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) dérivables en $a \in I$.*

1. *Pour tous réels $\lambda, \mu$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en $a$ avec :*
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$
2. *La fonction $fg$ est dérivable en $a$ avec :*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
*(formule de Leibniz).*
3. *Si $g(a) \neq 0$, alors la fonction $g$ ne s'annule pas dans un voisinage de $a$, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ qui sont définies dans un tel voisinage sont dérivables en $a$ avec :*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)},\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

**Démonstration.**

1. Résulte de :
$$\tau_a(\lambda f + \mu g) = \lambda\tau_a(f) + \mu\tau_a(g)$$
2. Résulte de :
$$\tau_a(fg)(x) = f(x)\tau_a(g) + g(a)\tau_a(f)$$
et de la continuité de $a$.
3. Si $g(a) \neq 0$, on a $g(x) \neq 0$ pour tout $x$ dans un voisinage de $a$ du fait de la continuité de $g$ en ce point. Avec :
$$\tau_a\left(\frac{1}{g}\right)(x) = -\frac{1}{g(x)g(a)}\tau_a(g)$$
pour $x \neq a$, on déduit par passage à la limite quand $x$ tend vers $a$ que $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.
La formule de Leibniz permet d'obtenir le deuxième point.

■

Pour ce qui est de la composition et du passage à l'inverse, on a les résultats suivants.

**Théorème 1.23** *Soient $I, J$ deux intervalles réels $f : I \to J$ une fonction dérivable en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction dérivable en $b = f(a)$. La fonction $g \circ f$ est définie sur $I$ et dérivable en $a$ avec :*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

**Démonstration.** On définit la fonction $\tau_b$ sur $J$ par :

$$\tau_b(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} \text{ si } y \neq b \\ g'(b) \text{ si } y = b \end{cases}$$

et pour $x \neq a$ dans $I$, on a :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \tau_b(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(pour $f(x) \neq f(a)$ c'est clair et pour $f(x) = f(a)$, les deux membres de cette égalité sont nuls). Faisant tendre $x$ vers $a$ on obtient le résultat du fait de la continuité de $f$ en $a$, de celle de $\tau_b$ en $b$ et de la définition de $f'(a)$. ■

**Théorème 1.24** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone dérivable en $a$. La fonction réciproque $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

**Démonstration.** On rappelle que si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone, c'est alors un homéomorphisme de $I$ sur $f(I)$ (théorème 2.10).

Si $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$, on a alors :

$$1 = \left(f^{-1} \circ f\right)'(a) = \left(f^{-1}\right)'(f(a)) \cdot f'(a)$$

et nécessairement $f'(a) \neq 0$.

Supposons $f'(a) \neq 0$ et notons $b = f(a)$. Pour tout $y \neq b$ dans $J$ on a $f^{-1}(y) \neq a$ et :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(\frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right)^{-1}$$

et avec la continuité de $f^{-1}$, on a :

$$\lim_{y \to b} \frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a)$$

ce qui entraîne :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

■

De ce résultat, on déduit les dérivées des fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses, à savoir :

- $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
- $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ;
- $\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ \operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ;
- $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

La fonction $\arcsin + \arccos$ étant de dérivée nulle sur $\left]-1,1\right[$ est constante et la valeur de cette fonction en $x = 0$, nous donne :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

De même en remarquant que la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et en prenant les valeurs en $-1$ et $1$, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2}$$

**Exercice 1.18** *Étudier la dérivabilité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right| & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$$

**Solution 1.18** *Il est clair que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \setminus \left\{\dfrac{2}{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.*
*Avec :*

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$$

*on déduit que $f$ est dérivable en $0$ avec $f'(0) = 0$.*
*Soit $k = 2p$ un entier naturel pair et $x_k = \dfrac{2}{2k+1}$. Pour $\dfrac{\pi}{x} \in \left]k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) > 0$ et pour $\dfrac{\pi}{x} \in \left]\dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right[$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) < 0$, de sorte que :*
*si $\dfrac{2}{2k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ pour $k \neq 0$, ou $x > 2$ pour $k = 0$, alors :*

$$\frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = \frac{x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x - x_k} \underset{x\to x_k^+}{\to} \left(x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'_{|x=x_k} = \pi$$

*et si $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{2}{2k+1}$, alors :*

$$\frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = -\frac{x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x - x_k} \underset{x\to x_k^+}{\to} -\left(x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'_{|x=x_k} = -\pi$$

*La fonction $f$ est donc dérivable à droite et à gauche en $x_{2p}$ avec :*

$$f'_g(x_{2p}) = -\pi,\ f'_d(x_{2p}) = \pi$$

*On vérifie de même que $f$ est dérivable à droite et à gauche en $x_{2p+1}$, pour tout entier naturel $p$, avec :*

$$f'_g(x_{2p+1}) = -\pi,\ f'_d(x_{2p+1}) = \pi$$

*Ces dérivées à droite et à gauche étant distinctes, on en déduit que $f$ n'est pas dérivable en $x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Avec la parité de la fonction $f$, on déduit que ce résultat est encore valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

## 1.8 Extremums et dérivation

**Théorème 1.25** *Soient $I$ un intervalle réel d'intérieur non vide, $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur $I$ dérivable en un point $a$ intérieur à $I$. Si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $f'(a) = 0$.*

**Démonstration.** On suppose que la fonction $f$ admet un maximum local en $a$.

Le point $a$ étant intérieur à $I$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(a+t)$ est définie sur un voisinage ouvert de 0 et en écrivant que :

$$\begin{cases} f'(a) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{f(a+t)-f(a)}{t} \leq 0 \\ f'(a) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \dfrac{f(a+t)-f(a)}{t} \geq 0 \end{cases}$$

on déduit que $f'(a) = 0$. ■

Deux conséquences importantes de ce théorème sont le théorème de Rolle (théorème 3.4) et le théorème de Darboux (théorème 1.27).

La démonstration du théorème précédent contient plus précisément le résultat suivant.

**Théorème 1.26** *Si $I$ est un intervalle réel d'intérieur non vide, $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur $I$ dérivable à gauche et à droite en un point $a$ intérieur à $I$ et qui admet un maximum [resp. minimum] local en ce point, alors $f'_g(a) \geq 0$ et $f'_d(a) \leq 0$ [resp. $f'_g(a) \leq 0$ et $f'_d(a) \geq 0$].*

La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ au voisinage de 0.

## 1.9 Le théorème de Darboux

On a vu que si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$, alors sa dérivée $f'$ n'est pas nécessairement continue et pourtant cette dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

**Théorème 1.27 (Darboux)** *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle $I$, alors sa fonction dérivée $f'$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

**Démonstration.** Soient $a < b$ dans $I$. Si $f'(a) = f'(b)$ il n'y a alors rien à montrer.

On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$ et on se donne $\lambda \in ]f'(a), f'(b)[$. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [a, b], \; \varphi(x) = f(x) - \lambda x$$

Cette fonction est continue sur le compact $[a, b]$, elle est donc minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\varphi(c) = \inf_{x \in [a,b]} \varphi(x)$. Si $c = a$ [resp. $c = b$], alors $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \geq 0$ [resp. $\dfrac{\varphi(b) - \varphi(x)}{b - x} \leq 0$] pour tout $x \in ]a, b[$ et en passant à limite quand $x$ tend vers $a$ [resp. vers $b$] par valeurs supérieures [resp. inférieures], on déduit que $\varphi'(a) \geq 0$ [resp. $\varphi'(b) \leq 0$] ce qui est en contradiction avec $\varphi'(a) = f'(a) - \lambda < 0 < \varphi'(b) = f'(b) - \lambda$. On a donc $c \in ]a, b[$ et $\varphi'(c) = 0$, soit $f'(c) = \lambda$. ■

Le théorème de Darboux nous montre qu'une fonction peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

Par exemple la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue en 0.

**Corollaire 1.1** *Il existe des fonctions définies sur un intervalle réel qui n'admettent pas de primitive.*

**Démonstration.** Si $f$ admet une primitive $F$ sur $I$, elle doit vérifier la propriété des valeurs intermédiaires. Une fonction ne vérifiant pas cette propriété, par exemple une fonction en escaliers, n'admet donc pas de primitive sur $I$. ■

En fait, on peut vérifier directement qu'une fonction en escalier non constante n'admet pas de primitives.

Du théorème de Darboux et du théorème 2.8, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 1.28** *Une fonction convexe et dérivable de $I$ dans $\mathbb{R}$ est continûment dérivable.*

**Démonstration.** Si $f$ est convexe et dérivable de $I$ dans $\mathbb{R}$, sa dérivée $f'$ est alors croissante. Cette dérivée vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, on déduit du théorème 2.8 qu'elle est continue. ■

3

# Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

## 3.1 Le théorème de Rolle sur un espace vectoriel normé

Pour ce paragraphe, on se donne un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Le théorème de Rolle est basé sur les deux théorèmes suivants, relatifs à des problèmes d'extremum.

**Théorème 3.1** *Si $K$ est un compact de $E$ et $f$ une fonction continue $K$ dans $\mathbb{R}$, elle est alors bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha$ et $\beta$ dans $K$ tels que :*

$$f(\alpha) = \inf_{x \in K} f(x), \ f(\beta) = \sup_{x \in K} f(x)$$

**Théorème 3.2** *Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $E$ et $f$ une fonction de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$ différentiable en un point $\alpha \in \mathcal{O}$ et admettant un extremum local en $\alpha$ alors $df(\alpha) = 0$.*

**Théorème 3.3 (Rolle)** *Soient $K$ un compact de $E$ d'intérieur non vide, $f$ une fonction continue de $K$ dans $\mathbb{R}$ différentiable sur l'intérieur de $K$ et constante sur la frontière $K \setminus \overset{\circ}{K}$ de $K$. Il existe alors un élément $c \in \overset{\circ}{K}$ tel que $df(c) = 0$.*

**Démonstration.** Si $f$ est constante, sa différentielle est alors nulle.

On suppose donc $f$ non constante.

La fonction $f$ étant continue sur le compact $K$ est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta$ dans $K$ tels que $f(\alpha) = \inf_{x \in K} f(x)$ et $f(\beta) = \sup_{x \in K} f(x)$. Si $\alpha, \beta$ sont dans $\mathrm{Fr}(K) = K \setminus \overset{\circ}{K}$, on a alors $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = f(\alpha)$ pour tout $x \in K$ et $f$ est constante contrairement à l'hypothèse de départ, on a donc $\alpha \in \overset{\circ}{K}$ ou $\beta \in \overset{\circ}{K}$, ce qui entraîne $df(\alpha) = 0$ ou $df(\beta) = 0$. ■

La classique version « réelle » de ce théorème est la suivante.

**Théorème 3.4 (Rolle)** *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, il existe alors un point $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Remarque 3.1** *Il n'y a pas unicité d'un point $c$ tel que $f'(c) = 0$ (figure 3.1).*

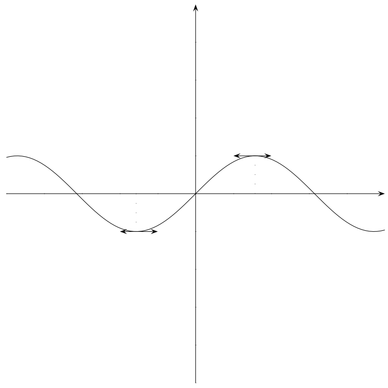

FIGURE 3.1 – $y = \sin(x)$

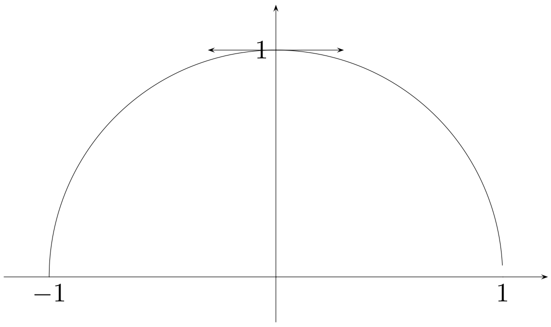


FIGURE 3.2 – $y = \sqrt{1 - x^2}$

**Remarque 3.2** *La fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$ nous donne un exemple de situation où $f$ n'est pas dérivable au bord (figure 3.2).*

**Remarque 3.3** *Le théorème n'est plus vrai si $f$ n'est pas continue au bord comme le montre l'exemple de la fonction $f$ définie par $f(x) = x$ sur $]0, 1]$ et $f(0) = 1$ (figure 3.3).*

**Remarque 3.4** *Le théorème n'est plus vrai si $f$ n'est pas dérivable sur $]a, b[$ tout entier comme le montre l'exemple de la fonction $f$ définie par $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ (figure 3.4).*

**Corollaire 3.1** *Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle réel $I$ et à valeurs réelles telle que $f'$ admette exactement $p \geq 0$ racines réelles distinctes, alors $f$ a au plus $p+1$ racines réelles distinctes.*

**Démonstration.** Si $f$ a $p+2$ racines réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{p+2}$, le théorème de Rolle nous assure l'existence d'au moins une racine réelle sur chaque intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ pour $k$ compris entre 1 et $p + 1$, ce qui donne au moins $p + 1$ racines distinctes pour $f'$. ■

Le théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable réelle est encore valable sur une demi-droite fermée. Précisément on a le résultat suivant.

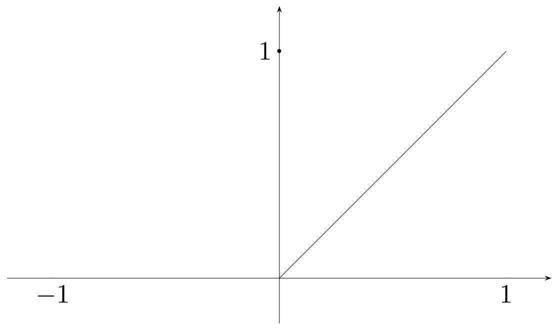


FIGURE 3.3 –

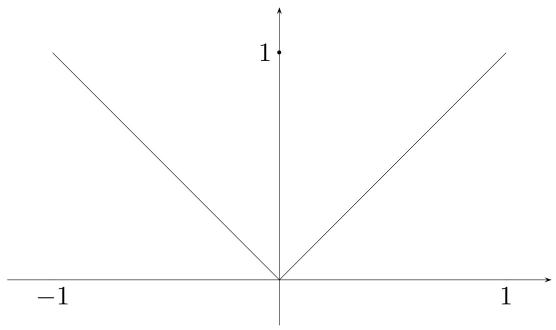


FIGURE 3.4 – $y = |x|$

**Théorème 3.5 (Rolle)** *Si $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, il existe alors un point $c \in ]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Démonstration.** Le changement de variable $t = e^{-x}$ nous ramène à un intervalle compact. On définit donc la fonction $g$ sur $[0, e^{-a}]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(-\ln(t)) \text{ si } t \in ]0, e^{-a}] \\ f(a) \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]0, e^{-a}]$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, on déduit qu'elle est continue en $a$. Elle est dérivable sur $]0, e^{-a}[$ avec $g'(t) = -\dfrac{f'(-\ln(t))}{t}$.

Enfin avec $g(0) = g(e^{-a}) = f(a)$, on peut utiliser le théorème de Rolle sur $[0, e^{-a}]$ pour dire qu'il existe $d \in ]0, e^{-a}[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = -\ln(d) \in ]a, +\infty[$ est tel que $f'(c) = 0$.

On peut aussi utiliser la fonction $g$ définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(a + \tan(t)) \text{ si } t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \\ f(a) \text{ si } t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} g(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, on déduit qu'elle est continue en $\frac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $g'(t) = (1 + \tan^2(t)) f'(a + \tan(t))$. Enfin avec $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(a)$, on peut utiliser le théorème de Rolle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour dire qu'il existe $d \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = a + \tan(d) \in ]a, +\infty[$ est tel que $f'(c) = 0$. ■

On a également le résultat suivant pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 3.6 (Rolle)** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, il existe alors un réel $c$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Démonstration.** Le changement de variable $t = \arctan(x)$ nous ramène à un intervalle compact.

On définit la fonction $g$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(\tan(t)) \text{ si } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ \ell = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \text{ si } t = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim\limits_{t \to \pm\frac{\pi}{2}} g(t) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, on déduit qu'elle est continue en $\pm\frac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $g'(t) = (1 + \tan^2(t)) f'(\tan(t))$. Le théorème de Rolle sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nous dit alors qu'il existe $d \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = \tan(d)$ est tel que $f'(c) = 0$. ■

La version itérée suivante du théorème de Rolle est souvent utile (voir le problème de l'interpolation de Lagrange et l'étude des polynômes orthogonaux).

**Théorème 3.7 (Rolle)** *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^m$ sur un intervalle réel $I$, où $m$ est un entier naturel, qui s'annule en $m + 1$ points de $I$ distincts, il existe alors un point $c$ dans $I$ tel que $f^{(m)}(c) = 0$.*

**Démonstration.** Si $m = 0$ le résultat est évident. On suppose donc que $m$ est non nul.

Si $a, b$ sont deux racines distinctes de $f$, le théorème de Rolle nous dit alors qu'entre ces deux racines il existe une racine de $f'$. On en déduit que la fonction $f'$ admet $m$ racines distinctes dans $I$. Une récurrence finie nous permet alors de montrer que la dérivée d'ordre $m$, $f^{(m)}$ admet au moins une racine dans $I$. ■

## 3.2 Quelques applications du théorème de Rolle

Le théorème de Rolle est important pour ses nombreuses applications.

### 3.2.1 Quelques exercices classiques

**Exercice 3.1** *Soient $f, g$ deux fonctions à valeurs réelles non nulles, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, avec $f(a) g(b) = f(b) g(a)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in ]a, b[$ tel que $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.*

**Solution 3.1** *La fonction $h$ définie sur $[a,b]$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec :*

$$\left\{ \begin{array}{l} h'(x) = \dfrac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2} \\ h(a) = h(b) \end{array} \right.$$

*Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel $c \in\, ]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui équivaut à $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{g'(c)}{g(c)}$.*
*Pour $g$ constante égale à 1, on retrouve le théorème de Rolle classique.*

**Exercice 3.2** *Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$, alors $f$ a un point fixe dans $]0,1[$.*

**Solution 3.2** *La fonction $g$ définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x^2}{2}$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ avec $g(0) = g(1) = 0$. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe $c \in\, ]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui signifie $f(c) = c$.*

### 3.2.2 Sur les racines de polynômes réels

**Théorème 3.8** *Si $P$ est un polynôme réel de degré $n \geq 2$ scindé sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même de son polynôme dérivé.*
*Précisément si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ sont les racines réelles distinctes de $P$ avec $p \geq 2$, la racine $\lambda_j$ étant de multiplicité $m_j \geq 1$ ($\sum\limits_{j=1}^{p} m_j = n$), alors le polynôme dérivé $P'$ admet les réels $\lambda_j$ pour racines de multiplicités respectives $m_j - 1$, pour $1 \leq j \leq p$ (une multiplicité nulle signifie que $\lambda_j$ n'est pas racine de $P'$) et des racines simples $\mu_j \in\, ]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$ pour $1 \leq j \leq p-1$.*

**Démonstration.** Pour $j \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $m_j \geq 2$, $\lambda_j$ est racine d'ordre $m_j - 1$ du polynôme $P'$. Ce qui donne $\sum\limits_{j=1}^{p} (m_j - 1) = n - p$ racines réelles pour $P'$. D'autre part, le théorème de Rolle nous dit que pour tout $j$ dans $\{1, \cdots, p-1\}$ il existe $\mu_j \in\, ]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$ tel que $P'(\mu_j) = 0$, ce qui donne $p-1$ racines réelles supplémentaires et distinctes pour $P'$. On a donc un total de $n-1$ racines réelles pour $P'$ et les $\mu_j$ sont nécessairement simples. ∎

On peut remarquer que toutes les racines de $P'$ sont dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_p]$.

De manière plus générale, si $P$ est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors les racines du polynôme dérivé $P'$ sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de $P$ (théorème de Lucas).

**Exercice 3.3** *Soient $n \geq 2$, $a, b$ réels et $P(x) = x^n + ax + b$. Montrer que si $n$ est pair alors $P$ a 0, 1 ou 2 racines réelles et si $n$ est impair alors $P$ a 1, 2 ou 3 racines réelles.*

**Solution 3.3** *Supposons $n$ pair. On a alors $P''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ pour tout réel non nul $x$ et $P'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de degré impair, elle s'annule donc une fois (théorème des valeurs intermédiaires) et une seule ($P'$ est injective). Avec le théorème de Rolle on déduit alors que $P$ s'annule au plus 2 fois.*
*Supposons $n$ impair. Alors $P'$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec $P'(0) = a$. Il en résulte que $P'$ a 2 racines réelles $-\rho$ et $\rho > 0$ si $a < 0$, 0 pour unique racine réelle si $a = 0$ et pas de racine réelle si $a > 0$. Avec la théorème de Rolle, on déduit alors que $P$ a au plus 3 racines réelles.*

On sait qu'un polynôme réel de degré $n$ a au plus $n$ racines réelles sur un intervalle $I$. Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Exercice 3.4** *Montrer que pour tout entier naturel $n$ et toutes suites de réels $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$, les $a_k$ étant non tous nuls et les $\lambda_k$ deux à deux distincts, la fonction $f_n$ définie par :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k}$$

*a au plus $n$ racines réelles distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$. On dit que la famille de fonctions $\left(x^{\lambda_k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est un système de Tchebychev (ou système de Haar ou encore système unisolvent) dans $\mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)$.*

**Solution 3.4** *On procède par récurrence sur $n \geq 0$.*

*Pour $n = 0$, $f_0(x) = a_0 x^{\lambda_0}$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}^{+,*}$ puisque $a_0$ est non nul.*

*Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 0$. Si la fonction $f_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k}$ a plus de $n+1$ racines distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$, il en est alors de même de la fonction :*

$$g_{n+1}(x) = x^{-\lambda_j} f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k - \lambda_j}$$

*où $j$ compris entre $0$ et $n+1$ est choisi tel que $a_j \neq 0$. Le théorème de Rolle nous dit alors que la fonction dérivée :*

$$g'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (\lambda_k - \lambda_j) a_k x^{\lambda_k - \lambda_j - 1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} (\lambda_k - \lambda_j) a_k x^{\lambda_k - \lambda_j - 1}$$

*a plus de $n$ racines distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et en conséquence tous les $(\lambda_k - \lambda_j) a_k$ pour $k \neq j$ sont nuls (hypothèse de récurrence), ce qui entraîne $f_{n+1}(x) = a_j x^{\lambda_j}$, mais cette fonction ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^{+,*}$. On aboutit donc à une impossibilité.*

**Exercice 3.5** *Montrer que pour tout entier $n$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

*où $P_n$ est un polynôme de degré $n$ avec $n$ racines réelles distinctes.*

**Solution 3.5** *Pour $n = 0$, on a $\arctan'(x) = \dfrac{P_0(x)}{1+x^2}$ avec $P_0(x) = 1$ sans racine réelle.*

*En supposant le résultat acquis au rang $n$, la fonction $f_n$ définie par $f_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ est nulle en $\pm\infty$ et en $n$ points distincts, on déduit alors des théorèmes de Rolle (classique sur un compact et généralisé sur un intervalle fermé de longueur infinie) que sa dérivée s'annule en $n+1$ points distincts, cette dérivée s'écrivant $\dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$, où :*

$$P_{n+1}(x) = \left(1+x^2\right) P'_n(x) - 2(n+1) x P_n(x)$$

*est un polynôme de degré égal à $n+1$ (il a $n+1$ racines, ou alors on peut calculer son coefficient dominant). D'où le résultat.*

*En fait, en utilisant une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on peut montrer que ces racines sont les $x_k = -\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ avec $k$ compris entre $1$ et $n$.*

On se donne donc un point $x$ dans $I \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$. On désigne par $P_x$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction $f$ et aux points $x_0, \cdots, x_n, x$. Ce polynôme est défini par :

$$\begin{cases} P_x \in \mathbb{R}_{n+1}[t] \\ P_x(x_i) = f(x_i) \ \ (0 \leq i \leq n) \\ P_x(x) = f(x) \end{cases}$$

On vérifie facilement que :

$$P_x = L_n(f) + \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}$$

La fonction $g_x = f - P_x$ est alors de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $I$, nulle en $n+2$ points distincts ($x$ et les $x_i$), le théorème de Rolle itéré nous dit alors qu'il existe un point $c_x \in I$ tel que $g_x^{(n+1)}(c_x) = 0$, ce qui compte tenu de :

$$P_x^{(n+1)} = \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)!$$

s'écrit :

$$f^{(n+1)}(c_x) - \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)! = 0$$

ou encore :

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(c_x)$$

■

Une démonstration analogue nous permet d'obtenir une majoration de l'erreur dans l'interpolation d'Hermite (voir [38]).

### 3.2.5 Convexité

Voir le paragraphe 5.3.

### 3.2.6 Le théorème de Darboux

On peut donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le théorème 2.11 et le théorème de Rolle.

**Théorème 3.13 (Darboux)** *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle $I$, alors sa fonction dérivée $f'$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

**Démonstration.** Soient $a < b$ dans $I$. Si $f'(a) = f'(b)$ il n'y a alors rien à montrer.

On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$ et on se donne $\lambda \in ]f'(a), f'(b)[$. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [a, b], \ \varphi(x) = f(x) - \lambda x.$$

Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ avec $\varphi'(a) < 0 < \varphi'(b)$ et en conséquence elle ne peut être monotone sur $I$ (une fonction monotone dérivable sur un intervalle a une dérivée de signe constant). Le théorème 2.11 nous dit alors que $\varphi$ n'est pas injective, c'est-à-dire qu'il existe $x < y$ dans $I$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$ et le théorème de Rolle nous dit qu'il existe $c \in ]x, y[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à $f'(c) = \lambda$. ■

## 3.3 Théorème et inégalité des accroissements finis

Le théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable réelle est équivalent au théorème des accroissements finis qui suit où $[a,b]$ est un intervalle non réduit à un point.

**Théorème 3.14 (Accroissements finis)** *Si $f$ est une fonction définie sur $[a,b]$, à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe alors un point $c$ dans $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.*

**Démonstration.** On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle en considérant la fonction $g$ définie sur $[a,b]$ par :

$$g(x)=f(x)-f(a)-\lambda(x-a)$$

où la constante réelle $\lambda$ est telle que $g(b)=g(a)$ (soit $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

Le théorème de Rolle appliqué à la fonction $g$ nous assure de l'existence d'un réel $c\in\,]a,b[$ tel que $g'(c)=0$, ce qui équivaut à $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. ■

Cette formule est encore valable en permutant les rôles de $a$ et $b$. L'hypothèse $a<b$ n'est donc pas essentielle.

On dispose aussi de la version suivante, un peu plus générale, du théorème des accroissements finis.

**Théorème 3.15 (généralisé des accroissements finis)** *Si $f,g$ sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, il existe alors un point $c$ dans $]a,b[$ tel que $(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$.*

**Démonstration.** On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle en considérant la fonction $h$ définie sur $[a,b]$ par :

$$h(x)=\lambda g(x)-\mu f(x)$$

où les constantes réelles $\lambda,\mu$ sont choisies telles que $h(a)=h(b)$, soit $\lambda g(a)-\mu f(a)=\lambda g(b)-\mu f(b)$, ou encore $\lambda(g(b)-g(a))=\mu(f(b)-f(a))$. On peut prendre $\lambda=f(b)-f(a)$ et $\mu=g(b)-g(a)$.

Le théorème de Rolle appliqué à la fonction $h$ nous assure de l'existence d'un réel $c\in\,]a,b[$ tel que $h'(c)$, ce qui équivaut à $(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$. ■

Prenant $g(x)=x$, on retrouve le théorème classique des accroissements finis.

L'exercice qui suit nous permet de retrouver les deux théorèmes précédents.

**Exercice 3.6** *Soient $f,g,h$ trois fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et $\varphi$ la fonction définie sur $[a,b]$ par :*

$$\varphi(x)=\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{pmatrix}$$

*Montrer qu'il existe un réel $c\in\,]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.*
*Quels résultats obtient-on pour $h(x)=1$ ?*

**Solution 3.6** *La fonction $\varphi$ est continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ et avec le caractère 3-linéaire alterné du déterminant, on a :*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \det \begin{pmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix} \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$$

*Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel $c \in \,]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.*
*Pour $h = 1$, on obtient :*

$$\varphi'(c) = \det \begin{pmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{pmatrix} = f'(c)(g(a) - g(b)) - g'(c)(f(a) - f(b)) = 0$$

*soit $(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$.*
*C'est le théorème généralisé des accroissements finis.*

Avec l'exercice qui suit, on propose une version un peu plus générale du théorème des accroissements finis.

**Exercice 3.7** *Soient $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ deux familles de fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que $g_k(a) \neq g_k(b)$ pour tout $k$ compris entre 1 et $n$. Monter qu'il existe un réel $c$ dans $]a,b[$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k'(c) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(c) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)}$$

**Solution 3.7** *On considère la fonction $\varphi$ définie sur $[a,b]$ par :*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} (f_k(x) - f_k(a) - \lambda_k (g_k(x) - g_k(a)))$$

*où les constantes $\lambda_k$ sont choisies telles que $\varphi(a) = \varphi(b)$. On peut prendre :*

$$\lambda_k = \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)} \quad (1 \leq k \leq n)$$

*Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $\varphi(a) = \varphi(b)$. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel $c$ dans $]a,b[$ tel que $\varphi'(c)$, ce qui donne le résultat annoncé.*

Le théorème des accroissements finis est encore valable pour les fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Précisément, on a le résultat suivant.

**Théorème 3.16** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$. Si $a,b$ sont deux points distincts de $\mathcal{O}$ tels que le segment $[a,b]$ soit contenu dans $\mathcal{O}$, il existe alors un point $c \in \,]a,b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = df(c)(b-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c)(b_k - a_k)$$

**Démonstration.** On se ramène au cas des fonctions d'une variable réelle en considérant la fonction $g$ définie sur $[0,1]$ par :

$$g(t) = f(a + t(b-a))$$

Cette fonction est bien définie sur $[0,1]$ du fait que $[a,b] \subset \mathcal{O}$ et elle continue sur cet intervalle, dérivable sur $]0,1[$ avec :

$$g'(t) = df(a + t(b-a))(b-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + t(b-a))(b_k - a_k)$$

Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel $\theta$ dans $]0,1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$, ce qui s'écrit $f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$ avec $c = a + \theta(b-a)$ dans $]a,b[$. ■

Le théorème des accroissements finis n'est pas valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$) comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$.

Toutefois on a le résultat suivant.

**Théorème 3.17 (Inégalité des accroissements finis)** *Si $f$ est une fonction définie sur$[a,b]$, à valeurs dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe alors un point $c \in ]a,b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|(b-a)$.*

**Démonstration.** On se ramène au cas des fonctions à valeurs réelles en introduisant la fonction $g$ définie sur $[a,b]$ par $g(x) = \langle f(x) \mid f(b) - f(a) \rangle$.

Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $g'(x) = \langle f'(x) \mid f(b) - f(a) \rangle$.

Le théorème des accroissements finis nous assure de l'existence d'un réel $c \in ]a,b[$ tel que :

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = g(b) - g(a) = (b-a)\langle f'(c) \mid f(b) - f(a) \rangle$$

puis avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que :

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq (b-a)\|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\|$$

ce qui entraîne $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|(b-a)$. ■

Dans le cas où la fonction dérivée $f'$ est majorée sur $]a,b[$, en notant $M$ un majorant de cette fonction, on a, pour tout couple $(x,y)$ de points de $[a,b]$ :

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M|y-x|$$

c'est-à-dire que $f$ est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Réciproquement si $f$ est $M$-lipschitzienne sur $[a,b]$, $f'$ est alors majorée par $M$ sur $]a,b[$.

On dispose également de la version suivante plus générale de l'inégalité des accroissements finis.

**Théorème 3.18** *Soient $f$ une fonction définie sur $[a,b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $g$ une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ces fonctions étant continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ pour tout $x \in ]a,b[$, on a alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.*

**Démonstration.** On suppose dans un premier temps que $\|f'(x)\| < g'(x)$ pour tout $x \in ]a,b[$.

On se fixe un réel $\alpha \in ]a,b[$ et on note :

$$E = \{x \in [\alpha, b] \mid \|f(x) - f(\alpha)\| > g(x) - g(\alpha)\}$$

Cet ensemble est ouvert dans $[\alpha, b]$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

En le supposant non vide, on note $\gamma$ la borne inférieure de $E$.

On a $\gamma \neq b$ du fait que $E$ qui est ouvert ne peut être réduit à $\{b\}$.

Si $\gamma = \alpha$, par définition de la borne inférieure, pour tout réel $\varepsilon > 0$ assez petit il existe alors un réel $x \in E \cap ]\alpha, \alpha + \varepsilon[$ ($E$ est ouvert), donc $\dfrac{\|f(x) - f(\alpha)\|}{x - \alpha} > \dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha}$ qui par passage à la limite quand $\varepsilon$ tend vers 0 donne $\|f'(\alpha)\| \geq g'(\alpha)$ en contradiction avec $\|f'(\alpha)\| < g'(\alpha)$.

On a donc $\gamma \in ]\alpha, b[$, $\gamma \notin E$ puisque $E$ est ouvert et :

$$\|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leq g(\gamma) - g(\alpha), \ \|f'(\gamma)\| < g'(\gamma)$$

ce qui entraîne pour $x > \gamma$ voisin de $\gamma$ :

$$\frac{\|f(x) - f(\gamma)\|}{x - \gamma} < \frac{g(x) - g(\gamma)}{x - \gamma}$$

et :

$$\begin{cases} \|f(x) - f(\gamma)\| < g(x) - g(\gamma) \\ \|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leq g(\gamma) - g(\alpha) \end{cases}$$

qui par addition donne :

$$\|f(x) - f(\alpha)\| \leq \|f(x) - f(\gamma)\| + \|f(\gamma) - f(\alpha)\| < g(x) - g(\alpha)$$

c'est-à-dire $x \notin E$, en contradiction avec le fait que $\gamma$ est la borne inférieure de $E$.

En définitive l'ensemble $E$ est vide et $\|f(x) - f(\alpha)\| \leq g(x) - g(\alpha)$ pour tout $x \in [\alpha, b]$.

En particulier, on a $\|f(b) - f(\alpha)\| \leq g(b) - g(\alpha)$ et faisant tendre $\alpha$ vers $a$ on obtient $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Le cas général s'obtient en remplaçant la fonction $g$ par la fonction $g_\varepsilon : x \mapsto g(x) + \varepsilon x$ avec $\varepsilon > 0$ quelconque.

On a $\|f'(x)\| < g'_\varepsilon(x) = g'(x) + \varepsilon$, donc $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a)$ et en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 on a le résultat annoncé. ■

Dans le cas où $f'$ est majorée par $M$ sur $]a, b[$, en prenant $g(x) = Mx$, on retrouve l'inégalité classique des accroissements finis.

## 3.4 Quelques applications du théorème des accroissements finis

Comme le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis est important pour ses nombreuses applications.

Les intervalles considérés sont supposés non réduit à un point.

### 3.4.1 Sens de variation d'une fonction

**Théorème 3.19** *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle réel $I$, alors $f$ est croissante sur $I$ si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x$ dans $I$.*

**Démonstration.** Si $f$ est croissante sur $I$ alors pour $x \neq y$ dans $I$ le taux d'accroissement $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ est positif ou nul et en passant à la limite quand $y$ tend vers $x$, on déduit que $f'(x) \geq 0$.

Réciproquement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x$ dans $I$, en utilisant le théorème des accroissements finis on déduit alors que pour tout $y > x$ dans $I$ on a $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x) \geq 0$. ∎

Si le théorème de Rolle n'est pas lié à la connexité de l'intervalle $[a, b]$ on peut remarquer que le résultat précédent l'est.

Si on considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) > 0$ et $f$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Du théorème précédent, on déduit les résultats classiques suivants.

**Corollaire 3.2** *Soient $f, g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle réel $I$.*

1. *La fonction $f$ est décroissante sur $I$ si, et seulement si, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x$ dans $I$.*
2. *La fonction $f$ est constante sur $I$ si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x$ dans $I$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ [resp. $f'(x) < 0$] pour tout $x$ dans $I$, alors la fonction $f$ est strictement croissante [resp. strictement décroissante] sur $I$.*
4. *Si $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x$ dans $I = [a, b]$, alors :*
$$\forall x \in [a, b], \ f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a).$$
5. *Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x$ dans $I = [a, b]$, alors :*
$$\forall x \in [a, b], \ m(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x - a).$$

**Démonstration.**

1. On applique le théorème précédent à la fonction $-f$.
2. Si $f' = 0$, alors la fonction $f$ est à la fois croissante et décroissante, donc constante. La réciproque est évidente.
3. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x$ dans $I$, on sait déjà que la fonction $f$ est croissante. Si il existe $a < b$ dans $I$ tels $f(a) = f(b)$, on a alors :
$$\forall x \in [a, b], \ f(a) \leq f(x) \leq f(b) = f(a)$$
et la fonction $f$ est constante sur $[a, b]$ d'intérieur non vide ce qui entraîne $f' = 0$ sur $[a, b]$ en contradiction avec $f' > 0$.
4. Résulte de la croissance de la fonction $h = g - f$.
5. On applique ce qui précède à $(mx, f)$ et $(f, Mx)$.

∎

On peut remarquer que le point 3. de ce corollaire implique le théorème précédent. Les deux résultats sont donc équivalents.

En effet, en notant, pour tout réel $m > 0$, $g_m(x) = f(x) + m$, l'hypothèse $f'(x) \geq 0$ pour tout $x$ dans $I$ entraîne $g'_m(x) > 0$ pour tout $x$ dans $I$, donc $g_m$ est strictement croissante et pour $x < y$ dans $I$, on a $f(x) + m < f(y) + m$ pour tout $m > 0$ ce qui entraîne $f(x) \leq f(y)$ en faisant tendre $m$ vers 0.

### 3.4.2 Limites et dérivation

**Théorème 3.20** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[\setminus \{c\}$ où $c$ est un point de $]a,b[$. Si la fonction dérivée $f'$ a une limite $\ell$ en $c$, alors $f$ est dérivable en $c$ avec $f'(c)=\ell$.*

**Démonstration.** Comme $c\in\,]a,b[$, il existe un réel $\delta>0$ tel que $]c-\delta,c+\delta[\,\subset\,]a,b[$.

Pour tout $x\in\,]c-\delta,c+\delta[\setminus\{c\}$ il existe un réel $d_x$ strictement compris entre $c$ et $x$ tel que $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(d_x)$ et avec $\lim\limits_{x\to c}d_x=c$, $\lim\limits_{t\to c}f'(t)=\ell$, on déduit que :

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}f'(d_x)=\ell$$

c'est-à-dire que $f$ est dérivable en $c$ avec $f'(c)=\ell$. ■

On peut remarquer que la fonction $f'$ est également continue en $c$.

**Exercice 3.8** *Montrer que la fonction $f$ définie par $f(0)=0$ et $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x\neq 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0)=0$ pour tout entier naturel $n$.*

**Solution 3.8** *Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$, elle est donc dérivable en $0$ de dérivée nulle et $f'$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
*En supposant, pour $n\geq 1$, que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0)=0$, $f^{(n)}(x)=P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x\neq 0$, où $P_n$ est une fonction polynomiale de degré $3n$, on déduit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec :*

$$f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

*le polynôme $P_{n+1}$ étant de degré $3n+3$. Puis avec $\lim\limits_{x\to 0}f^{(n+1)}(x)=0$, on déduit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n+1)}(0)=0$.*
*On dispose ainsi d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas développable en série entière au voisinage de $0$.*

**Théorème 3.21 (L'Hospital)** *Soient $f,g$ deux fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle ouvert $I$, dérivables sur $I\setminus\{c\}$ avec $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in I\setminus\{c\}$ où $c\in I$. Si $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, on a alors $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\ell$.*

**Démonstration.** De $g'(t)\neq 0$ pour tout $t\in I\setminus\{c\}$ on déduit avec le théorème des accroissements finis que $g(x)\neq g(c)$ pour tout $x\in I\setminus\{c\}$.

Le théorème des accroissements finis généralisé appliqué aux fonctions $f,g$ sur l'intervalle compact d'extrémités $x,c$, où $x\in I\setminus\{c\}$ permet d'écrire $\dfrac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\dfrac{f'(d_x)}{g'(d_x)}$ avec $d_x$ strictement compris entre $x$ et $c$. Puis avec $\lim\limits_{x\to c}d_x=c$, $\lim\limits_{t\to c}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}=\ell$, on déduit que :

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(d_x)}{g'(d_x)}=\ell$$

■

Si $f, g$ sont dérivables en $c$ avec $g'(c) \neq 0$ la règle de l'Hospital n'est pas utile. Il suffit en effet d'écrire que :

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\frac{x-c}{g(x)-g(c)}$$

et d'utiliser la définition du nombre dérivé.

**Remarque 3.5** *La réciproque du théorème précédent est fausse.*
*Considérons par exemple la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$, prolongé par continuité en $0$ et la fonction $g$ définie par $g(x) = x$ sur $[-1, 1]$.*
*La fonction $f$ est dérivable avec $f'(0) = 0$, $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$. On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite en $0$.*

### 3.4.3 Intégration et dérivation

Si $f$ est une fonction dérivable sur $[a, b]$, il n'est pas toujours possible d'écrire que $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

Dans le cas où la dérivée est Riemann-intégrable, en utilisant les sommes de Riemann, on a le résultat suivant.

**Théorème 3.22** *Si $f$ est une fonction dérivable sur $[a, b]$ avec $f'$ Riemann-intégrable sur $[a, b]$, on a alors :*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

**Démonstration.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on désigne par $\sigma_n = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ la subdivision de pas constant $\frac{b-a}{n}$ où $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$, pour $0 \leq i \leq n-1$.

En utilisant le théorème des accroissements finis, on peut écrire pour tout $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a_{i+1}) - f(a_i)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(c_i)(a_{i+1} - a_i) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_i) \end{aligned}$$

où $c_i \in ]a_i, a_{i+1}[$ et on reconnaît là une somme de Riemann pour la fonction $f'$ qui tend vers $\int_a^b f'(x)\,dx$ quand $n$ tend vers l'infini. ■

Le résultat qui suit est souvent utilisé pour montrer la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale sur un segment.

**Théorème 3.23** *Soient $I$ est un intervalle réel non réduit à un point, $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $I \times [a, b]$ telle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$*

L'exemple de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ nous montre que le résultat précédent est faux si on en enlève l'hypothèse de continuité des dérivées partielles d'ordre 2.

### 3.4.9 Le théorème de Darboux

On peut donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le théorème des accroissements finis et le théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème 3.30 (Darboux)** *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle $I$, alors sa fonction dérivée $f'$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

**Démonstration.** Soient $a < b$ dans $I$. Si $f'(a) = f'(b)$ il n'y a alors rien à montrer.

On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$ et on se donne $\lambda \in \left]f'(a), f'(b)\right[$. On définit les fonctions $\tau_a$ et $\tau_b$ sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b],\ \tau_a(x) = \begin{cases} f'(a) \text{ si } x = a \\ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a \end{cases}$$

et :

$$\forall x \in [a,b],\ \tau_b(x) = \begin{cases} f'(b) \text{ si } x = b \\ \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} \text{ si } x \neq b \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues sur $[a,b]$ puisque $f$ est dérivable sur $I$ et on a :

$$\tau_a(a) = f'(a) < \lambda < f'(b) = \tau_b(b)$$

On a alors deux possibilités :

- soit $\tau_a(a) = f'(a) < \lambda \leq \tau_a(b)$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel $c$ dans $]a,b]$ tel que

$$\lambda = \tau_a(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(d)$$

  avec $d$ entre $a$ et $c$ ;
- soit $\tau_a(b) < \lambda < f'(b) = \tau_b(b)$ et en remarquant que :

$$\tau_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tau_b(a)$$

  on a $\tau_b(a) < \lambda < \tau_b(b)$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel $c$ dans $]a,b[$ tel que

$$\lambda = \tau_b(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(d)$$

■

On peut aussi donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le fait que l'image d'un connexe de $\mathbb{R}^2$ par une application continue à valeurs réelles est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle (caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$), et le théorème des accroissements finis.

**Théorème 3.31 (Darboux)** *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle $I$, alors sa fonction dérivée $f'$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

**Démonstration.** Il s'agit de montrer que $f'(I)$ est connexe dans $\mathbb{R}$, ce qui revient à dire que c'est un intervalle.

L'ensemble :

$$C = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid (x, y) \in I^2,\ x < y \right\}$$

est un connexe de $\mathbb{R}$ comme image du connexe de $\mathbb{R}^2$, $E = \{(x, y) \in I^2,\ x < y\}$ (cet ensemble est convexe donc connexe), par l'application continue $\varphi$ définie sur $I^2$ par

$$\varphi(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } y \neq x \\ f'(x) \text{ si } y = x \end{array} \right.$$

Le théorème des accroissements finis nous dit que tout $z \in C$ s'écrit $z = f'(t)$ avec $t \in \overset{\circ}{I}$ et en écrivant que $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$, on déduit que $z$ est aussi dans $\overline{C}$. On a donc $C \subset f'(I) \subset \overline{C}$ avec $C$ connexe, ce qui entraîne que $f'(I)$ est connexe. ■

### 3.4.10 Nombres de Liouville

On dit qu'un réel (ou complexe) $\alpha$ est algébrique s'il existe un polynôme $P$ non nul à coefficients entiers relatifs tel que $P(\alpha) = 0$. Parmi tous ces polynômes il en existe un de degré minimal et en le divisant par son coefficient dominant on dispose d'un polynôme $P_\alpha$ unitaire à coefficients rationnels de degré minimal qui annule $\alpha$. Il est facile de vérifier que ce polynôme est unique. Le polynôme $P_\alpha$ est appelé le polynôme minimal de $\alpha$ et le degré de $P_\alpha$ est le degré du nombre algébrique $\alpha$. On vérifie facilement que $P_\alpha$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes non constants.

On dit qu'un réel est transcendant s'il n'est pas algébrique.

Le théorème qui suit nous permet de construire une infinité de nombres transcendants.

**Théorème 3.32 (Liouville)** *Soit $\alpha$ un nombre algébrique de degré $d \geq 1$.*
*Si $d = 1$ alors $\alpha$ est rationnel et il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout nombre rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) distinct de $\alpha$ on a $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{C_\alpha}{q}$.*
*Si $d \geq 2$ alors $\alpha$ est irrationnel et il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout nombre rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ on a $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{C_\alpha}{q^d}$.*

**Démonstration.** Si $d = 1$ alors le polynôme minimal de $\alpha$ s'écrit $P_\alpha(X) = X - s$ avec $s \in \mathbb{Q}$. De $P_\alpha(\alpha) = 0$ on déduit alors que $\alpha = s = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. De plus pour $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ distinct de $\alpha$ on a :

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{qb}\right|$$

donc $|aq - bp| \neq 0$ dans $\mathbb{N}$, ce qui équivaut à $|aq - bp| \geq 1$. On a donc :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{qb}\right| \geq \frac{1}{b}\frac{1}{q}$$

Supposons maintenant que $d \geq 2$. Le nombre $\alpha$ ne peut être rationnel, sans quoi il serait annulé par un polynôme unitaire de degré 1, ce qui contredit le caractère minimal de $d$. En notant $P_\alpha$ le polynôme minimal de $\alpha$ il existe un entier naturel non nul $n$ tel que $Q_\alpha = nP_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ et pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, on a $q^d Q_\alpha(r) \in \mathbb{Z}$. De plus cet entier est non nul. En effet si $q^d Q_\alpha(r) = 0$ alors $r$ est racine de $Q_\alpha$ et $Q_\alpha(X) = (X - r) R(X)$ avec $X - r$ et $R$ dans $\mathbb{Q}[X]$ non constants ($d \geq 1$), en contradiction avec $P_\alpha$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On a donc :

$$\left| q^d \left( Q_\alpha(\alpha) - Q_\alpha(r) \right) \right| = \left| q^d Q_\alpha(r) \right| \geq 1$$

D'autre part, le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$$Q_\alpha(\alpha) - Q_\alpha(r) = (\alpha - r) Q'_\alpha(s)$$

avec $s$ compris entre $\alpha$ et $r$. On distingue alors deux cas :
soit $|\alpha - r| \leq 1$ et dans ce cas $s \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ de sorte que :

$$1 \leq \left| q^d Q_\alpha(r) \right| = q^d |\alpha - r| \left| Q'_\alpha(s) \right| \leq \left( \sup_{s \in [\alpha-1,\alpha+1]} \left| Q'_\alpha(s) \right| \right) q^d |\alpha - r|$$

donc $C_1 = \sup_{s \in [\alpha-1,\alpha+1]} \left| Q'_\alpha(s) \right| > 0$ et $|\alpha - r| \geq \frac{1}{C_1} \frac{1}{q^d}$ ;
soit $|\alpha - r| > 1$ et dans ce cas $|\alpha - r| > \frac{1}{q^d}$.

En posant $C_\alpha = \min\left(1, \frac{1}{C_1}\right)$, on a alors $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\alpha}{q^d}$. ■

Les nombres de Liouville sont définis par :

$$\xi = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^{n!}}$$

où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'entiers compris entre 0 et 9 avec $a_n \geq 1$ pour $n \geq n_0$. En notant pour $k \geq n_0$ donné :

$$p = 10^{k!} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{10^{n!}}, \quad q = 10^{k!}$$

on a :

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^{n!}} \leq \frac{9}{10^{(k+1)!}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{(k+1)!}} \frac{10}{9} \leq \frac{1}{q^k}$$

Si $\xi$ est algébrique de degré $d \geq 1$, alors :

$$\frac{C_\xi}{q^d} \leq \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^k}$$

pour tout $k \geq n_0$ et faisant tendre $k$ vers l'infini on aboutit à une absurdité. En conclusion $\xi$ est transcendant.

On peut utiliser ce résultat pour montrer qu'il y a autant de nombres transcendants que de réels. Pour ce faire on utilise l'application qui associe à $\xi = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^{n!}}$ le réel $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^n} \in ]0, 1[$ et on vérifie que c'est une bijection (si $x \in ]0, 1[$ est décimal on utilise son écriture décimale impropre comportant une infinité de 9).