Kholle 6 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition d'un voisinage d'un point. Démontrer que l'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert inclus dans A.
2. Soit n un entier naturel non nul. On note $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$. Il est muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) A quelle condition nécessaire et suffisante sur A l'application $N : E \to E, X \mapsto \|AX\|$ est-elle une norme ?
   (b) Le cas échéant, N et $\|\cdot\|$ sont-elles équivalentes ?
3. Déterminer l'adhérence de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

★★★

Kholle 6 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition d'une boule ouverte. Soit (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés. Construire une norme sur l'espace produit $E_1 \times E_2$.
2. On considère l'espace $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $P = \sum_k a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $\|P\| = \max_k |a_k|$.

   Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. La dérivation de E dans E est-elle continue ?
3. Soit n un entier naturel non nul. On note $E = M_n(\mathbb{R})$. Il est muni d'une norme N. On considère r un entier naturel inférieur ou égal à n, et la partie $A = \{M \in E | \mathrm{rg}(M) \leqslant r\}$. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A.

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 6 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point a adhérent à A.
2. On considère un segment réel $[a,b]$ et $E = C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que les applications $N_1 : E \to \mathbb{R}^+, f \mapsto \int_a^b |f|$ et $N_2 : E \to \mathbb{R}^+, f \mapsto \sqrt{\int_a^b f^2}$ sont des normes.
   (b) Sont-elles équivalentes ? Le cas échéant, déterminer $\sup\limits_{f\in E\setminus\{0\}} \dfrac{N_2(f)}{N_1(f))}$ et $\sup\limits_{f\in E\setminus\{0\}} \dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.
3. Soit A et B deux parties de E un evn. On note $A+B = \{a+b|(a,b)\in A\times B\}$. Montrer que si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert. Montrer que si A et B sont fermés, alors $A+B$ n'est pas nécessairement fermé.

★★★

Kholle 6 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition d'un ouvert d'un espace vectoriel normé. Montrer que l'ensemble des ouverts est stable par intersection finie, et par réunion quelconque.
2. Soit n un entier naturel. On note $E = M_n(\mathbb{R})$, il est muni d'une norme N. Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E. On pourra considérer pour cela l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$ et montrer qu'elle est polynomiale.
3. On considère un espace préhilbertien E dont la norme découle d'un produit scalaire. Soit A une partie de E, montrer que si A est dense dans E, alors l'orthogonal de A est nul, i.e $\{x \in E | \forall a \in A, \langle a, x\rangle = 0\} = \{0\}$. La réciproque est-elle vraie ?

★★★