Kholle 13 filière MP*
Planche 1

★★★

1. On se donne deux fonctions f et g d'un intervalle réel I dans E un espace normé de dimension finie, supposées dérivables, ainsi que B une forme bilinéaire de E dans E. Que dire de la dérivabilité de $B(f,g)$? Le démontrer.
2. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int} dt$$
En déduire que si la somme de cette série entière est bornée, elle est alors constante.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ des entiers naturels tous non nuls premiers dans leur ensemble. Pour tout entier n, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation
$$\alpha_1 n_1 + \ldots \alpha_p n_p = n.$$
A l'aide de la série entière $\sum_n S_n z^n$, donner un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

★★★

Kholle 13 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Soit f une fonction d'un segment réel I dans E un espace normé de dimension finie, supposée continue par morceaux, ainsi que L une application linéaire de E dans E. Que dire de l'intégrale sur I de $L(f)$? Le démontrer
2. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul R et de somme f. On suppose qu'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in B(0,R)^{\mathbb{N}}$ de complexes non nuls telle que $\lim_{p\to+\infty} z_p = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}, f(z_p) = 0$. Montrer qu'alors la série entière est la série nulle.
3. Soit $\sum_n b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul R telle que $b_0 = 1$. On note S sa somme. Montrer que $1/S$ est développable en série entière au voisinage de 0.

★★★

Kholle 13 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Démontrer que le support d'une famille sommable de nombres complexes est au plus dénombrable.
2. On note
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} x \neq 0 \\ 0 & \text{si} x = 0 \end{cases}$$
Monter que la fonction f n'est pas développable en série entière.
3. On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul et de somme Φ. On note φ la somme de la série entière $\sum a_n z^n / n!$. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R, \quad \Phi(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(zx) e^{-x} dx$$

★★★

Kholle 13 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Définir la notion de probabilité conditionnelle. Énoncer et prouver la formule de Bayes.
2. Déterminer une solution non nulle sous forme de somme de série entière de l'équation fonctionnelle
$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = f(x^2)$$
d'inconnue $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dérivable.
3. Soit $\sum_n a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence supérieurs ou égaux à 1, de sommes respectives S_a et S_b. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$ et que la série $\sum_n b_n$ diverge.
   (a) On suppose qu'il existe un complexe ℓ tel que $a_n/b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que
   $$\lim_{x\to 1, x<1} \frac{S_a(x)}{S_b(x)} = \ell$$
   (b) Pour tout entier n, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Montrer que le résultat précédent persiste si l'on suppose que $A_n/B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

★★★