Kholle 21 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Théorème des sommes de Riemann. Énoncé et preuve dans le cas d'une fonction continue.
2. Montrer que pour tout réel x,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\cos(x)$$

3. Pour tout entier n, on note $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}$.
   (a) Établir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 1.
   (b) Démontrer le développement suivant : $I_n=1-\dfrac{\ln(2)}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

★★★

Kholle 21 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Théorème fondamental du calcul intégral. Énoncé et preuve.
2. On pose pour tout entier n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[n]{2^k}$$

   Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$. Faire l'étude des variations et limites de f.

⋆⋆⋆

Kholle 21 filière MPSI/MP2I
Planche 3

★★★

1. Formule de Taylor avec reste intégral. Énoncé et preuve.
2. Déterminer une primitive de $x \mapsto x^4/(1+x^{10})$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}, [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
   (a) Soit $t \in [0,1[$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(t))^n = 0$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(t))^n dt = 0$.
   Indication : sortir les ε.

★★★

Kholle 21 filière MPSI/MP2I
Bonus

★★★

1. Soit x un réel. On note $P(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\,dt$. Déterminer pour quels valeurs de x cette expression a un sens. L'exprimer à l'aide de $X^n - 1$ et d'une somme de Riemann.
2. Démontrer que $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$, mais que $\int_1^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

★★★