- *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*
- *Il est rappelé qu'il sera tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies.*
- *Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.*

Problème 1. Une caractérisation du déterminant.

Dans ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier supérieur ou égal à 2.

On cherche à déterminer toutes les applications φ définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, telles que :

— ($\star$) Pour tout couple de matrices $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ on a : $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$
  et

— ($\star\star$) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, on a : $\varphi(A + I_n) = 1 + tr(A)$
  où tr désigne l'application « trace ».

Soit φ une telle application.

1. Montrer l'existence de A telle que $\varphi(A) \neq 0$.
2. (a) Montrer que $\varphi(I_n) = 1$.

   (b) Montrer que si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\varphi(A) \neq 0$.

   (c) Montrer que si A et B sont des matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\varphi(A) = \varphi(B)$.
3. Calculer :
   (a) l'image $\varphi(D_i(\alpha))$ d'une matrice de dilatation d'indice i et de rapport α.

   (b) l'image $\varphi(T_{i,j}(\alpha))$ d'une matrice de transvection d'indice (i,j) de rapport α.

   (c) l'image $\varphi(P_{i,j})$ d'une matrice de permutation d'indice (i,j).

   (d) Soit D une matrice diagonale à éléments diagonaux $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ tous non nuls, écrire D comme un produit de matrices de dilatations et en déduire la valeur de $\varphi(D)$.

4. Rappeler sans démonstration quelles opérations matricielles simples appliquées à la matrice A permettent de réaliser les opérations élémentaires :

$$L_i \longleftarrow \alpha L_i, \quad L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j, \quad L_i \longleftrightarrow L_j \quad (i \neq j)$$

   Reprendre cette question pour les opérations analogues sur les colonnes.

5. En déduire que pour toute matrice A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = \det(A)$.
   Indication : On pourra montrer l'existence de matrices de transvections $T_1,\dots,T_r$, respectivement $T'_1 \dots T'_s$ telles que :
   $T_1 \times \dots \times T_r \times A \times T'_1 \times \dots \times T'_s$ soit diagonale, r,s étant des entiers naturels éventuellement nuls.

6. Soit $r < n$ et $J_{n,r}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments d'indice (i,i) pour $1 \leqslant i \leqslant r$ qui valent 1. Montrer que $\varphi(J_{n,r}) = 0$
7. Déduire de ce qui précède que pour toute matrice A non inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = 0$.

8. Conclure sur la forme nécessaire de φ, étudier la réciproque et conclure quant à l'ensemble des fonctions φ cherchées.

Problème 2 : Matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes) coefficients dans $\mathbb{R}$, puis $\mathcal{V}_{n,p}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Si $n = p$, on note plus rapidement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{V}_n$.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'il existe un entier naturel k non nul tel que $M^k = 0$. **On admet que la trace de toute matrice nilpotente est nulle.** L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

A. Matrices nilpotentes

1. Démontrer que l'application trace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire et que
$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$. Démontrer que $A = 0$.
3. Soit A une matrice nilpotente, démontrer que son déterminant est nul.
4. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors M^2 est nilpotente.
5. On suppose que M et N sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que MN et $M + N$ sont nilpotentes.
6. On suppose que $M, N, M + N$ sont trois matrices nilpotentes (qui ne commutent pas nécessairement), en calculer $(M + N)^2 - M^2 - N^2$ démontrer que $\mathrm{tr}(MN) = 0$.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si $\det(M) = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.
8. Montrer que la seule matrice réelle symétrique nilpotente est la matrice nulle.
9. Soit A une matrice antisymétrique réelle et nilpotente. Montrer que $A^T A = 0$, puis que $A = 0$.
10. On suppose que $n \geq 3$. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle, de déterminant nul, mais non nilpotente.

B. Résultats algébriques

Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $V = \sum_{k=1}^{n} E_k$.

1. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, exprimer E_i en fonction de V et $V - 2E_i$. En déduire que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{V}_{n,1})$.
2. Soit $C_1, \ldots, C_n$ une famille de n matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $C_1 \neq 0$ et $(C_1, \ldots, C_n)$ est liée. Démontrer qu'il existe un unique j dans $[\![1, n-1]\!]$ tel que $(C_1, \ldots, C_j)$ est libre et $C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_j)$.
3. Soit $d \in [\![1, n]\!]$, $(U_1, \ldots, U_d)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $H = \mathrm{Vect}(U_1, \ldots, U_d)$. Démontrer qu'il existe des entiers $i_1, \ldots, i_d$ vérifiant $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ tels que l'application
$$H \to \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{pmatrix}$$
est bijective.
4. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension d. Démontrer que
$$\mathrm{card}(W \cap \mathcal{V}_{n,1}) \leq 2^d$$

C. Matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

1. Déterminer le cardinal de $\mathcal{N}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}_2$.
2. Déterminer le cardinal de $GL_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}_2$.
3. Soit C et C′ deux matrices colonnes dans $\mathcal{V}_{n,1}$. Démontrer que la famille (C, C') est liée si et seulement si $(C = C'$ ou $C = -C')$.
4. En déduire le cardinal des matrices de $\mathcal{V}_{n,2}$ de rang 1.