

## Exercices

Ils porteront sur les suites et séries de fonctions et les intégrales à paramètres.

## Cours

### Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques offre l'occasion d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de  $\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{K}[X]$ , congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire, ou, ultérieurement, de la géométrie des espaces euclidiens.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique mettant l'accent sur la notion d'idéal.

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Compléments sur les groupes

Intersection de sous-groupes.

Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.

(★) Sous-groupes du groupe  $(\mathbb{Z}, +)$ .

(★) Groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ . (★) Générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Groupe monogène, groupe cyclique.

(★) Théorème de structure d'un groupe monogène :

Tout groupe monogène infini est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$ . Tout groupe monogène fini de cardinal  $n$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

(★) Ordre d'un élément d'un groupe.

(★) Si  $x$  est d'ordre fini  $d$  et si  $e$  désigne le neutre de  $G$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x^n = e \iff d|n$ .

(★) L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

Groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

L'ordre de  $x$  est le cardinal du sous-groupe de  $G$  engendré par  $x$ .

La démonstration n'est exigible que pour  $G$  commutatif.

#### b) Compléments sur les anneaux

Produit fini d'anneaux.

Idéal d'un anneau commutatif.

(★) Idéal et morphisme d'anneaux, image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux, l'image directe d'un idéal par  $f$  est un idéal de l'anneau  $f(A)$

Idéal engendré par un élément.

(★) Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.

Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.

Notation  $xA$ .

Interprétation en termes d'idéaux.

#### c) Idéaux de $\mathbb{Z}$

Idéaux de  $\mathbb{Z}$ .

Définition du PGCD de  $n \geq 2$  entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.

Lien avec le programme de première année.

#### d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(★) Anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

(★) Inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . (★) Condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  soit un corps.

Notation  $\mathbb{F}_p$  lorsque  $p$  est premier.