IPESUP 2022/2023

Kholle 12 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Énoncer et démontrer le Lemme d'Abel.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{2n+1}$ et exprimer sa somme pour x strictement positif.
3. On note $f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$. Produire un développement en série entière de f.

★★★

Kholle 12 filière MP*
Planche 2

★★★

1. On se donne une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Quels sont les modes de convergence de cette série sur différentes parties du plan ?
2. On se donne deux séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie $R \geqslant R_a R_b$. A-t-on égalité en toute généralité ?
3. Soit α un rationnel. Pour tout entier n, on note a_n sa n-ième décimale. Montrer que la somme f de la série entière $\sum a_n x^n$ est une fonction rationnelle. Quel est son rayon de convergence ?

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 12 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Démontrer que la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$ et exprimer sa somme pour tout réel x.
3. (a) Montrer que la fonction sinus cardinal $x \mapsto \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$ est de classe C^∞.

   (b) Soit $A > 0$. Montrer que

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \mathfrak{Re}\left[\int_0^{\pi/2} \exp\left(-Ae^{-it}\right)dt\right]$$

   En déduire la valeur de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)/t\,dt$.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 12 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Démontrer que la fonction exponentielle de la variable complexe est un morphisme continu de groupes de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2. On se donne une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul R. Quel est le rayon de convergence de la série entière
$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n ?$$
3. Soit p un entier naturel non nul et $A \in M_p(\mathbb{C})$. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{Tr}(A^k) z^k$? Exprimer sa somme à l'aide du polynôme caractéristique de A.

★★★