Exercice 1 - Une suite récurrente

1. Soit $\theta \in]0,\pi[$. On a les équivalences $\lambda = 2(1-\cos(\theta)) \iff \cos(\theta) = 1-\frac{\lambda}{2}$. Or $-1 < 1-\frac{\lambda}{2} < 1$ puisque $\lambda \in]0,4[$. On a donc l'équivalence $\lambda = 2(1-\cos(\theta)) \iff \theta = \arccos(1-\lambda/2)$ ce qui prouve l'existence et l'unicité d'un tel réel.
2. Cette suite vérifie une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique vaut
$$\mathrm{X}^2+(\lambda-2)\mathrm{X}+1 = \mathrm{X}^2-2\cos(\theta)\mathrm{X}+1 = \left(\mathrm{X}-e^{i\theta}\right)\left(\mathrm{X}-e^{-i\theta}\right)$$
On est dans le cas d'une suite réelle et de racines conjuguées non réelles car $\theta \in]0,\pi[$. Alors $e^{i\theta}$ est de module 1 et possède θ comme argument. Par consqéquent,
$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in [\![0,n+1]\!], x_k = a\cos(k\theta)+b\sin(k\theta)$$
3. On exploite les conditions aux limites. $0 = x_0 = a\times 1+b\times 0$, donc $a = 0$. D'autre part, $0 = x_{n+1} = b\sin((n+1)\theta)$. Or b est non nul, sinon le $n+2$-uplet (x_k) est nul. Par conséquent, $\sin((n+1)\theta) = 0$, donc $(n+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Comme $\theta \in]0,\pi[$, on en déduit qu'il existe un entier $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $(n+1)\theta = j\pi$, donc $\theta = j\pi/(n+1)$. On en déduit que
$$\forall k \in [\![0,n+1]\!], x_k = b\sin\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right)$$
4. On vient de montrer que si λ est solution du problème, alors
$$\exists j \in [\![1,n]\!], \lambda = 2(1-\cos(j\pi/(n+1)))) = 4\sin^2(j\pi/(n+1)).$$
Réciproquement, soit $j \in [\![1,n]\!]$, alors la suite $n+2$-uplet $(\sin\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right))_{0\leq k\leq n+1}$ est non nul et vérifie la relation de récurrence.

Exercice 2 - Suites sous-additives

1. La suite $(u_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 donc possède une borne inférieure finie et $\inf_{n\geq 1} u_n/n \geq 0$.
2. Le réel $\alpha+\varepsilon/2$ est strictement supérieur à α. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe un terme de la suite, donc un entier naturel non nul p tel que u_p/p est coincé entre α et $\alpha+\varepsilon/2$, soit
$$\alpha \leq \frac{u_p}{p} \leq \alpha+\frac{\varepsilon}{2}$$
3. D'après la propriété de sous-additivité de u, on a
$$u_n = u_{kp+r} \leq u_{kp}+u_r \leq \underbrace{u_p+\cdots+u_p}_{k \text{ termes}}+u_r = ku_p+u_r$$
4. D'après ce qui précède, comme n est strictement positif,
$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{k}{n}u_p+\frac{u_r}{n}.$$
D'autre part, si k est nul, $k/n = 0 \leq 1/p$. Si k est non nul, $k/n = k/(kp+r) \leq k/kp = 1/p$. De plus, $u_r \leq \max(u_0,\ldots,u_{p-1})$. On en déduit, toutes quantités positives,
$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}+\frac{\max(u_0,\ldots,u_{p-1})}{n}.$$

5. Notons $\beta = \max(u_0, \dots, u_{p-1})$. Alors $\beta/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en restant positif. Par conséquent, il existe un rang N non nul tel que
$$\forall n \geq \mathrm{N}, 0 \leq \frac{\beta}{n} \leq \varepsilon/2.$$
On en déduit d'après les questions 2 et 4 que
$$\forall n \geq \mathrm{N}, \alpha \leq \frac{u_n}{n} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon$$
6. Les questions précédentes ont permis d'établir
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq \mathrm{N}, \left|\frac{u_n}{n} - \alpha\right| \leq \varepsilon$$
Ainsi, la suite $(u_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite α.
7. Soit n et m deux entiers naturels non nuls, alors si le gain moyen des n premières parties est supérieur ou égal à x, et si le gain moyen des m parties suivantes est supérieur ou égal à x, alors le gain moyen sur les $n+m$ parties disputées est supérieures ou égal à x, donc $p_{n+m} \geq p_n p_m$ par indépendance des parties. Par conséquent, la suite $(-\ln(p_n))_{n\in\mathrm{N}}$ est sous-additive positive, donc $(-\ln(p_n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On en déduit par continuité de l'exponentielle, que la suite $(p_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Correction du problème - Autour de la moyenne arithmético-géométrique

Question préliminaire : Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique
Soit a et b deux réels positifs. On a
$$m_a(a,b) - m_g(a,b) = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$
Ainsi $m_g(a,b) \leqslant m_a(a,b)$.

Partie I - Définition de la moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :
$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = a, \\ b_0 = b \end{array}\right., \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} = m_a(a_n, b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = m_g(a_n, b_n) \end{array}\right.$$
1. — D'après la question préliminaire, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant b_n$. Alors, étant donné $n \geqslant 1$,
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} = a_n,$$
donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
— De même pour $n \geqslant 1$,
$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{b_n b_n} = b_n.$$
Donc la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
— On obtient alors, pour tout $n \geqslant 1$:
$$a_n \geqslant b_n \geqslant b_1 \quad \text{ et } \quad b_n \leqslant a_n \leqslant a_1.$$
Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel α, et (b_n) est croissante et majorée, donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel β.
2. En passant à la limite dans la première relation de récurrence, il vient :

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{soit : } \alpha = \beta$$

3. On a $m_a(a,b) = a_1$ et $m_g(a,b) = b_1$. La suite (a_n) étant décroissante de limite α, il vient

$$m_a(a,b) = a_1 \geqslant \lim a_n = \mathrm{M}(a,b).$$

De la même manière, la décroissance de (b_n) amène $m_g(a,b) \leqslant \mathrm{M}(a,b)$. Ainsi :

$$m_g(a,b) \leqslant \mathrm{M}(a,b) \leqslant m_a(a,b).$$

Partie II - Expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, et pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}(\lambda,\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda^2\cos^2(x)+\mu^2\sin^2(x)}}.$$

1. On pose, dans l'intégrale

$$\mathrm{I}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2(u)}}\mathrm{d}u$$

le changement de variable $u = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}\right) = \varphi(t)$ Le réel x étant dans $[0,1[$, la fonction $\psi : t \mapsto \frac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout t de cet intervalle :

$$\psi'(t) = \frac{(1+x)\cos(t)\left(1+x\sin^2(t)\right)-2x\cos(t)\sin(t)(1+x)\sin(t)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)^2} = \frac{(1+x)\cos(t)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)^2} > 0$$

Ainsi, ψ est strictement croissante, et $\psi(0) = 0, \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. En particulier, pour tout $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[, \psi(t)$ in $[0,1[$. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Comme on n'a pas la classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé, on se restreint dans un premier temps à un intervalle $[0,\mathrm{A}]$, où $\mathrm{A} \in]0,\frac{\pi}{2}[$. Ainsi, sur cet intervalle, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{(1+x)\cos(t)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(1+x)^2\sin^2(t)}{\left(1+x\sin^2 t\right)^2}}}\\
&= \frac{(1+x)\cos(t)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-x\sin^2(t)\right)^2-(1+x)^2\sin^2(t)}}\\
&= \frac{(1+x)\cos(t)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-x\sin^2(t)-(1+x)\sin(t)\right)\left(1-x\sin^2(t)+(1+x)\sin(t)\right)}}\\
&= \frac{(1+x)\cos(t)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-\sin(t))(1-x\sin(t))(1+\sin(t))(1+x\sin(t))}}\\
&= \frac{(1+x)\cos(t)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)\left(1-x^2\sin^2(t)\right)}}\\
&= \frac{(1+x)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)\sqrt{\left(1-x^2\sin^2(t)\right)}}
\end{aligned}$$

Le plus dur est fait. On a alors (φ étant bijective de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur lui-même d'après le théorème de la bijection, car continue et strictement croissante)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2(u)}}\mathrm{d}u &= \int_0^{\varphi^{-1}(\mathrm{A})}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\times\frac{(1+x)^2\sin^2(t)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)^2}}}\times\frac{(1+x)\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t\\
&= (1+x)\int_0^{\varphi^{-1}(\mathrm{A})}\frac{\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\sqrt{\left(1+x\sin^2(t)\right)^2-4x\sin^2(t)}\times\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t\\
&= (1+x)\int_0^{\varphi^{-1}(\mathrm{A})}\frac{\left(1-x\sin^2(t)\right)}{\sqrt{\left(1-x\sin^2(t)\right)^2}\times\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t\\
&= (1+x)\int_0^{\varphi^{-1}(\mathrm{A})}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite lorsque A tend vers $\frac{\pi}{2}$ (la fonction φ^{-1} étant continue en tant que réciproque d'une fonction continue, donc $\lim_{\mathrm{A}\to\frac{\pi}{2}}\varphi^{-1}(\mathrm{A})=\varphi^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$), on obtient :

$$\mathrm{I}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=(1+x)\mathrm{I}(x)$$

2. On a, pour tout $x\in]0,1]$:

$$\mathrm{J}(1,x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2(t)+x^2\sin^2(t)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2(t)}}=\mathrm{I}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

D'un autre côté :

$$\mathrm{J}\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{1+x}{2}\right)^2\cos^2(t)+x\sin^2 t}}=\frac{2}{1+x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\sin^2(t)}}=\frac{2}{1+x}\mathrm{I}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\frac{2}{1+x}\mathrm{I}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{2}{1+x}\times\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\times\mathrm{I}\left(\frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right)=\mathrm{I}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

On en déduit alors $\mathrm{J}(1,x)=\mathrm{J}\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right)$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $a_n\neq 0$. Alors

$$\mathrm{J}(a_{n+1},b_{n+1})=\mathrm{J}\left(\frac{a_n+b_n}{2},\sqrt{a_nb_n}\right)=\mathrm{J}\left(a_n\times\frac{1+\frac{b_n}{a_n}}{2},a_n\times\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)$$

Or, de façon évidente, pour tout $\alpha>0$, et tout (λ,μ), on a $\mathrm{J}(\alpha\lambda,\alpha\mu)=\frac{1}{\alpha}\mathrm{J}(\lambda,\mu)$, donc

$$\mathrm{J}(a_{n+1},b_{n+1})=\frac{1}{a_n}\mathrm{J}\left(\frac{1+\frac{b_n}{a_n}}{2},\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)=\frac{1}{a_n}\mathrm{J}\left(1,\frac{b_n}{a_n}\right)$$

d'après la question précédente, d'où, en rentrant de nouveau le facteur a_n :

$$\mathrm{J}(a_{n+1},b_{n+1})=\mathrm{J}(a_n,b_n)$$

Comme $a=a_0>0$, une récurrence immédiate montre alors que cette propriété est vraie pour tout n et que $(\mathrm{J}(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

4. Soit $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<\mathrm{M}(a,b)$. Il existe un rang $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel qu'on ait à la fois :

$$\forall n\geqslant \mathrm{N},\quad |a_n-\mathrm{M}(a,b)|\leqslant\varepsilon\quad\text{et}\quad|b_n-\mathrm{M}(a,b)|\leqslant\varepsilon.$$

On a alors, pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n\geqslant\mathrm{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{M}(a,b)+\varepsilon)^2\left(\cos^2t+\sin^2t\right)}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a_n^2\cos^2t+b_n^2\sin^2t}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{M}(a,b)-\varepsilon)^2\left(\cos^2t+\sin^2t\right)}},$$

soit :

$$\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)+\varepsilon}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a_n^2\cos^2t+b_n^2\sin^2t}}\leqslant\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)-\varepsilon},$$

et par croissante de l'intégrale, il vient facilement :

$$\forall n\geqslant\mathrm{N},\quad\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)+\varepsilon}\leqslant\mathrm{J}(a_n,b_n)\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)-\varepsilon}.$$

5. Le terme du milieu de l'encadrement précédent est constant, égal à $\mathrm{J}(a_0,b_0)=\mathrm{J}(a,b)$, et ε peut être choisi aussi petit qu'on veut. Une fois qu'on a remplacé $\mathrm{J}(a_n,b_n)$ par $\mathrm{J}(a,b)$, on n'a plus de dépendance en n, on peut donc sans problème faire tendre ε vers 0 , et il vient :

$$\mathrm{J}(a,b)=\frac{\pi}{2\mathrm{M}(a,b)},\quad\text{soit :}\quad\mathrm{M}(a,b)=\frac{\pi}{2\mathrm{J}(a,b)}$$

Partie III - Une variante de la moyenne arithmético-géométrique

Soit toujours $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit cette fois (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases}a_0=a\\b_0=b\end{cases}\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad\begin{cases}a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\\b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}\end{cases}$$

1. — Supposons $a\leqslant b$, montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $0\leqslant a_n\leqslant b_n$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite d'après l'hypothèse $a\leqslant b$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors on obtient :

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n \quad \text{puis :} \quad b_{n+1} \geqslant \sqrt{(a_{n+1})^2} \geqslant a_{n+1}.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
D'après le principe de récurrence, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit alors de la relation définissant a_{n+1}, de la même manière que ci-dessus, que :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n,$$

puis de la seconde relation, que

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \leqslant \sqrt{b_n^2} = b_n,$$

d'où la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n).
On est dans une situation similaire à celle des suites adjacentes (à part qu'on ne sait pas bien montrer de façon directe que $a_n - b_n$ tend vers 0), la démonstration de la convergence est rigoureusement la même : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b_0, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a_0. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, (a_n) et (b_n) convergent.

— Si $a \geqslant b$, alors on montre strictement par les mêmes arguments que pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n \leqslant a_n$, que (b_n) est croissante et majorée par a_0 et (a_n) est décroissante et minorée par b_0. Ainsi, dans cette situation aussi, (a_n) et (b_n) convergent.

— Appelons α la limite de (a_n) et β la limite de (b_n). Alors, on montre comme plus haut, en passant à la limite dans la relation définissant a_{n+1}, que $\alpha = \beta$.

2. Le plus simple est de faire une récurrence.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\mathrm{B}_n = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$.
B_0 est un produit vide, donc par convention $\mathrm{B}_0 = 1$, ce qui valide $\mathcal{P}(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors

$$\mathrm{B}_{n+1} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n \sin(\alpha)} \times \frac{1}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$$

Cela montre $\mathcal{P}(n+1)$
Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3. On suppose que $a \leqslant b$. Comme a et b sont positifs, on a alors $\frac{a}{b} \in [0,1]$, donc $\alpha = \operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)$ est bien défini. Si $\alpha = 0$, alors $a = b$ et les suites (a_n) et (b_n) sont clairement constantes, d'où le résultat attendu.

On suppose don désormais que $\alpha \neq 0$. Comme $a_0 = b_0 \cos(\alpha)$, on obtient :

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = b_0 \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

puis :

$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = b_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Pour continuer à exprimer les termes b_n, on exprime (b_n) indépendamment de (a_n) : pour tout $n \geqslant 0$,

$$b_{n+2} = \sqrt{a_{n+2} b_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = \sqrt{\frac{\frac{b_{n+1}^2}{b_n} + b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = b_{n+1} \sqrt{\frac{1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}}{2}}.$$

Ainsi, on trouve par exemple :

$$b_2 = b_1\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}} = b_1\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = b_0\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

(les cosinus étant positif, a étant par définition dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Ainsi, on voit apparaitre le déubut du produit de cosinus étudié dans la question précédente. On effectue alors une récurrence.
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : b_n = b_0\mathrm{B}_n$.
Nous venons de montrer que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vrais (et même $\mathcal{P}(2)$).
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vrais. Alors, par les hypothèses de récurrence,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right),$$

donc, d'après la relation établie ci-dessus,

$$b_{n+2} = b_{n+1}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}{2}} = b_{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+2}}\right) = b_0\mathrm{B}_{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+2}}\right) = b\mathrm{B}_{n+2}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$.
D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.
Par conséquent, d'après le calcul précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{b}{\alpha} \times \frac{\alpha}{2^n}\frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \longrightarrow \frac{b\sin(\alpha)}{\alpha}.$$

On peut donc conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

4. On reprend le même argument en l'adaptant aux fonctions hyperboliques. Pour cela, nous démontrons d'abord, par analogie avec le cas trigonométrique :

Tout d'abord, puisque $a \geqslant b$, $\frac{a}{b} \geqslant 1$. Comme ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, allant de 1 à $+\infty$, et continue, d'après le théorème de la bijection, ch induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Ainsi, il existe un unique réel α tel que $a = \mathrm{ch}(\alpha)b$.
On a alors,

$$a_1 = b\frac{1+\mathrm{ch}(\alpha)}{2} = b\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{puis :} \quad b_1 = \sqrt{b^2\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = b\,\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La récurrence effectuée dans le cas $a \leqslant b$ s'adapte bien pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = b\prod_{k=1}^{n}\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^k}\right).$$

Le même calcul vaut aussi pour ce produit /

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{b}{2^n}\frac{\mathrm{sh}(\alpha)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

Or, tout comme pour le sinus, $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 0$, d'où le résultat escompté :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b\cdot\mathrm{sh}(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$