- *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*
- *Ce devoir est long, il n'est pas fait pour être terminé, mais vous devez donner le meilleur de vous-mêmes dans les parties traitées.*
- *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*
- *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*
- *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*
- *Les exercices et le problème peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, à condition d'être bien balisés dans votre copie.*

Exercice 1 - Une suite récurrente

Soit n un entier naturel non nul. On cherche à déterminer l'ensemble des réels $\lambda \in]0,4[$ tels qu'il existe un $n+2$-uplet réel non nul $(x_k)_{0\le k\le n+1}$ vérifiant

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!], x_{k-1} + (\lambda-2)x_k + x_{k+1} = 0.$$

Dans ce qui suit, on fixe un tel λ.

1. Justifier qu'il existe un unique réel $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\lambda = 2(1-\cos(\theta))$.
2. Soit $(x_k)_{0\le k\le n+1}$ un $n+2$-uplet réel non nul qui vérifie les conditions ci-dessus. Montrer qu'alors
$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in [\![0,n+1]\!], x_k = a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)$$
3. Démontrer alors l'existence d'un entier j dans $[\![1,n]\!]$ tel que $\theta = \frac{j\pi}{n+1}$. Montrer alors
$$\forall k \in [\![0,n+1]\!], x_k = \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right)$$
4. Etablir que l'ensemble des solutions au problème posé est
$$\left\{4\sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) \mid j \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

Exercice 2 - Suites sous-additives

On considère une suite u de réels positifs qui vérifie la propriété suivante (dite de sous-additivité) :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_{n+p} \le u_n + u_p$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite $(u_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

1. On note $\alpha = \inf_{n\ge1} \frac{u_n}{n}$. Montrer que α est un réel positif.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul p tel que
$$\alpha < \frac{u_p}{p} \le \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$$
3. Soit n un entier naturel non nul. On note $n = kp + r$ avec $0 \le r < p$ la division euclidienne de n par p. Montrer que $u_n \le ku_p + u_r$.
4. En déduire
$$\frac{u_n}{n} \le \frac{u_p}{p} + \frac{\max(u_0,\dots,u_{p-1})}{n}$$

5. En déduire l'existence d'un rang N non nul tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, \frac{u_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon$$

6. Conclure.
7. On considère un jeu équilibré. On y joue autant de fois que l'on veut, chaque tentative étant indépendante des autres. Pour tout entier non nul n, on note X_n le gain à l'étape n. Soit x un réel positif, on étudie la probabilité que le gain moyen au bout de n étapes soit plus grand que x, i.e $p_n = \mathrm{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_n \geq x\right)$. Montrer que la suite $(p_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Problème - Autour de la moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux réels positifs. On définit $m_a(a,b) = \frac{a+b}{2}$ la moyenne arithmétique de a et b, et $m_g(a,b) = \sqrt{ab}$ la moyenne géométrique de a et b.
Question préliminaire : Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique : Montrer que pour tout couple (a,b) de réels positifs, $m_g(a,b) \leqslant m_a(a,b)$.

Partie I - Définition de la moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ b_0 = b \end{cases}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} = m_a(a_n,b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = m_g(a_n,b_n) \end{cases}$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On note α et β leur limite respective.
2. Montrer que $\alpha = \beta$.

On appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b la valeur de cette limite commune, et on la note $\mathrm{M}(a,b)$.

3. Comparer $\mathrm{M}(a,b), m_a(a,b)$ et $m_g(a,b)$.

Partie II - Expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, et pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}(\lambda,\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\lambda^2\cos^2(t)+\mu^2\sin^2(t)}}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1[, (1+x)\mathrm{I}(x) = \mathrm{I}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$..

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $u = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{(1+x)\sin(t)}{1+x\sin^2(t)}\right)$

2. En se ramenant à l'intégrale I, montrer que pour tout $x \in]0,1], \mathrm{J}(1,x) = \mathrm{J}\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$.
3. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \geqslant b$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies en début de partie I. Montrer que $(\mathrm{J}(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \mathrm{M}(a,b)$. Justifier l'existence de $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)+\varepsilon} \leqslant \mathrm{J}(a_n,b_n) \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)-\varepsilon}.$$

5. En déduire une expression de $\mathrm{M}(a,b)$ en fonction de $\mathrm{J}(a,b)$.

Partie III - Une variante de la moyenne arithmético-géométrique

Soit toujours $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit cette fois $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = a \\ b_0 = b \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}\,b_n} \end{array}\right.$$

1. En étudiant leur monotonie, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune (on pourra distinguer les cas $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$)
2. Soit α un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{B}_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{B}_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

3. On suppose que $a \leqslant b$, et $\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

4. On suppose que $a \geqslant b$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $a = \mathrm{ch}(\alpha)b$, et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} \frac{b\cdot\mathrm{sh}(\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$