Fonctions usuelles, équations fonctionnelles

Cornou Jean-Louis

12 octobre 2022

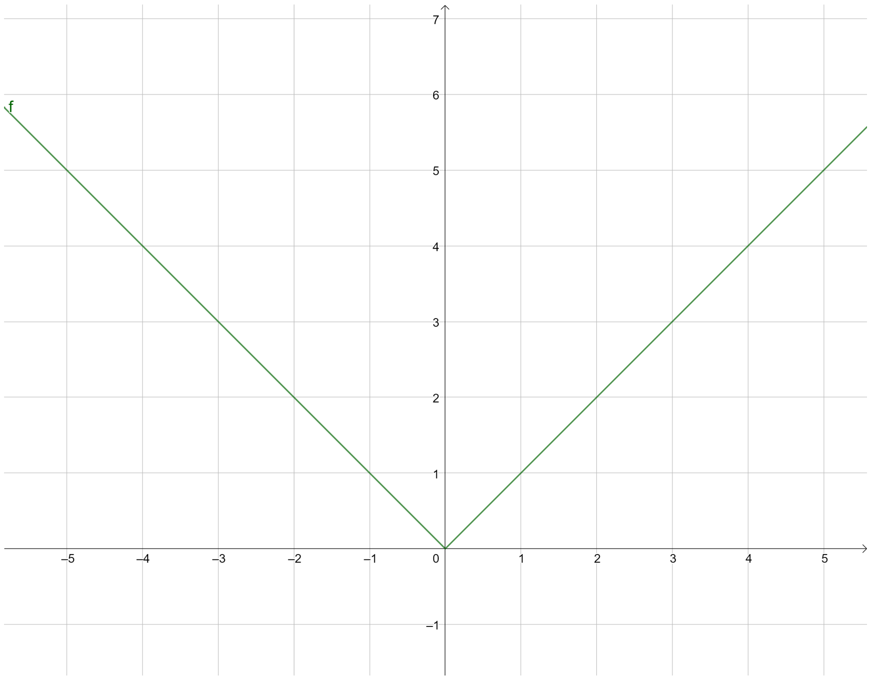
☞ **Remarque**
Tracer tous les graphes

1 Fonctions valeur absolue, maximum, minimum

Définition 1 *On rappelle que l'application* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x| = \max(x, -x)$ *est appelée application valeur absolue*

Propriété 1 *L'application valeur absolue satisfait les propriétés suivantes :*
- *Pour tous réels* x *et* y, $|xy| = |x||y|$.
- *Pour tout réel* x, $|x| = \sqrt{x^2}$.
- *L'application valeur absolue est paire, strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^-$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$.
- *Pour tous réels* x *et* y, $|y| = |x| \iff y = \pm x$.
- *L'application valeur absolue est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}^*$, *non dérivable en* 0.

Démonstration. Soit x un réel non nul, alors $(|x| - |0|)/(x - 0) = \text{sgn}(x)$. Ce taux d'accroissement tend vers -1 quand x tend vers 0 par valeurs négatives, vers 1 quand x tend vers 0 par valeus positives, donc ne possède pas de limite quand x tend vers 0. Ainsi, l'application valeur absolue n'est pas dérivable en 0.



Propriété 2 *Pour tous réels* x, y, *on a*

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Soit ε un réel strictement positif, alors

$$|x-y|<\varepsilon \iff y\in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$

Propriété 3 *Soit a un réel. On définit l'application $m_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \min(x,a)$. Celle-ci vérifie les propriétés suivantes :*

- *Elle est constante sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et coïncide avec l'application identité sur l'intervalle $]-\infty,a]$.*
- *Elle est continue, dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$, non dérivable en a.*

Exercice 1 *Proposer des égalités d'applications entre $|\cdot|$, m_a et des indicatrices d'intervalles.*

Exercice 2 *Formuler des propriétés similaires pour l'application $x\mapsto \max(x,a)$.*

Théorème 1 *Soit x, y des réels. Alors*

$$\min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$$

$$\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

Propriété 4 *Soit x un réel. Alors en notant $x^+=\max(x,0)$ et $x^-=\max(-x,0)$, on a*

$$x^+\geq 0,\quad x^-\geq 0,\quad x=x^+-x^-,\quad \text{et}\quad |x|=x^++x^-$$

Exercice 3 *En déduire la propriété suivante : Soit f une fonction continue de la variable réelle à valeurs réelles. Démontrer qu'il existe deux fonctions continues f^+, f^- à valeurs positives telles que*

$$f=f^+-f^-\quad \text{et}\quad |f|=f^++f^-$$

Cette décomposition conserve-t-elle la dérivabilité ?

2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 2 *On appelle fonction polynômiale réelle toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un entier n et un $n+1$-uplet de réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tels que*

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

On admet pour l'instant que les réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sont uniques et uniquement déterminés par l'application f.

Définition 3 *Soit f une fonction polynômiale non nulle. L'entier $\max(k\in\mathbb{N}^*|a_k\neq 0\}$ est appelé degré de l'application polynômiale f. Il est noté $\deg(f)$. Le réel $a_{\deg(f)}$ est appelé coefficient dominant de f.*

Propriété 5 *Soit f une fonction polynômiale non constante. Notons d son degré (non nul) et a_d son coefficient dominant. Alors*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_d x^d.$$

Plus précisément,

Parité de d	*Signe de a_d*	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$
Pair	$+$	$+\infty$	$+\infty$
Pair	$-$	$-\infty$	$-\infty$
Impair	$+$	$-\infty$	$+\infty$
Impair	$-$	$+\infty$	$-\infty$

Démonstration. Avec des notations évidentes, pour tout réel x,

$$f(x) = a_d x^d \left(\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{a_d} x^{k-d} \right) = a_d x^d \left(1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{a_d} x^{k-d} \right)$$

Dans la dernière somme mise en évidence, pour tout k dans $[\![0, d-1]\!]$, $k - d < 0$, donc $\lim_{x \to \pm\infty} x^{k-d} = 0$, on en déduit que le terme entre parenthèses tend vers 1 quand x tend vers $\pm\infty$. Ainsi, la limite de f en $\pm\infty$ est la même que celle de son terme dominant.

Propriété 6 *Les fonctions polynomiales sont indéfiniment dérivables. Si l'on note d son degré,* $f^{(d+1)} = 0$.

Définition 4 *Soit f une fonction polynômiale. Les réels x tels que $f(x) = 0$ sont appelés les zéros de la fonction f ou les racines de la fonction f.*

Définition 5 *On appelle fonction rationnelle toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction polynômiale* P *et une fonction polynômiale non nulle* Q *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Q}(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

Propriété 7 *Soit f une fonction rationnelle non nulle. Alors il existe deux fonctions polynômiales* P *et* Q *non nulles telles que* P *et* Q *ne possèdent aucune racine commune et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Q}(x) \neq 0, f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

Cette écriture est unique à un facteur constant non nul près, dite forme irréductible de f. Avec cette écriture, les racines de P *sont appelées les zéros de f, tandis que les racines de* Q *sont appelées les pôles de f.*

Démonstration. Admis pour l'instant. Voir le chapitre sur l'arithmétique de $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.

Exemple 1 *Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)/(x - 4x + 3)$ pour x réel dans un ensemble convenable. Le numérateur et le dénominateur possèdent* 1 *comme racine commune. Une forme irréductible de f est*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 3, f(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

Les racines de f sont alors 1*, et ses pôles* 3*.*

Théorème 2 *Soit $f = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ une fonction rationnelle non nulle sous forme irréductible. On note $a_n x^n$ le monôme de plus haut degré de* P *et $b_m x^m$ le monôme de plus haut degré de* Q*. Alors*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Exercice 4 *Préciser toutes ces limites selon les signes de a_n/b_m et les relations d'ordre entre n et m.*

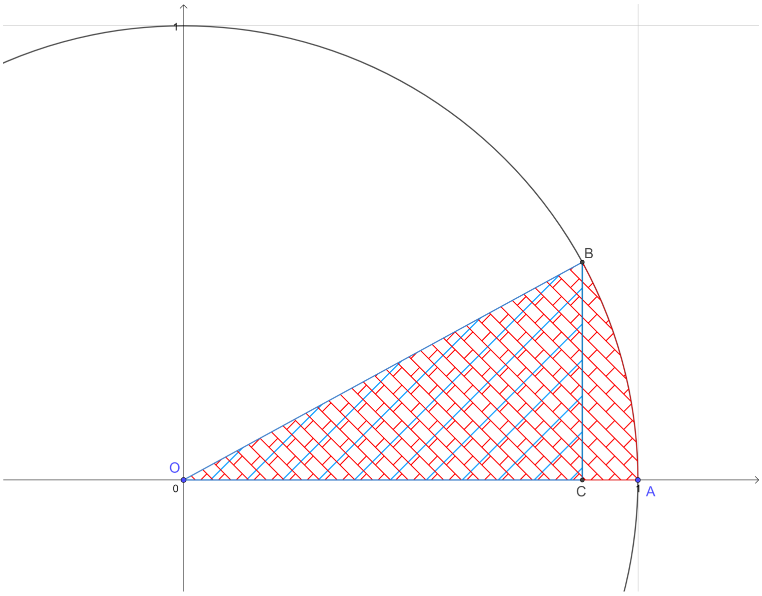
Propriété 8 *Toute fonction rationnelle est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, i.e* $\mathbb{R}$ *privé de ses pôles.*

Exercice 5 *Soit n un entier naturel non nul. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$. Etudier les variations de cette fonction polynômiale.*

3 Fonctions circulaires

Propriété 9 *Le cosinus et le sinus sont continus sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On propose une démonstration géométrique.



Soit x un réel dans $[0, \pi/2[$. Dans le cercle unité, le secteur angulaire d'ouverture $x/2$ de base OA avec $A = (1, 0)$ a pour aire $x/4$. Si l'on note $B = (\cos(x/2), \sin(x/2))$ l'autre extrémité de ce secteur, $C = (\cos(x/2), 0)$, le triangle OBC est inclus dans le précédent secteur angulaire et a pour aire $\cos(x/2)\sin(x/2)/2$. On en déduit par croissance des aires relativement à l'inclusion, que $\sin(x) \leq x$. D'autre part, si x est négatif, on a $\sin(-x) \leq -x$. On en déduit par imparité du sinus que $\sin(x) \geq x$ pour x négatif dans $]-\pi/2, 0]$. Mais alors d'après les signes du sinus et de l'identité, on obtient

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

On en déduit par encadrement que $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$, donc que le sinus est continu en 0. D'autre part, pour tout réel x,

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Le second membre tend vers 0 quand x tend vers 0 par continuité de la fonction carré, donc $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$. Pour poursuivre, on exploite une formule d'addition. Soit h et x des réels, alors

$$\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

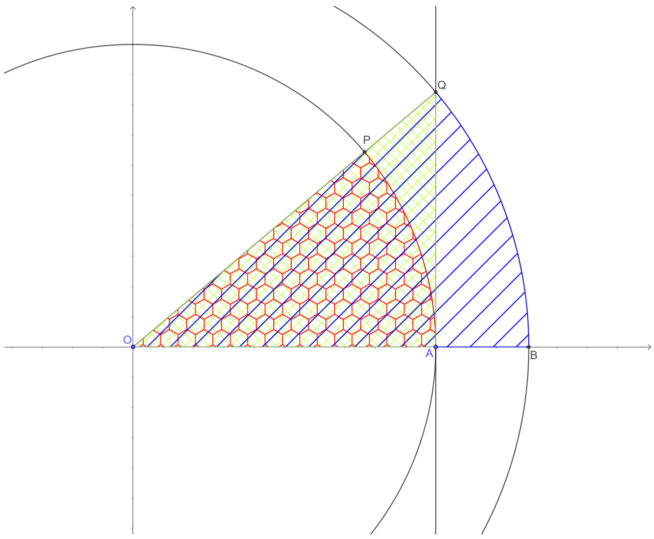
Quand h tend vers 0, on a vu que $\cos(h)$ tend vers 1 et $\sin(h)$ tend vers 0, ce qui implique que $\sin(x + h)$ tend vers $\sin(x)$, ce qui est bien la continuité du sinus en x. De même,

$$\cos(x + h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

Les mêmes limites que précédemment entraînent que $\cos(x + h)$ tend vers $\cos(x)$ quand h tend vers 0.

Propriété 10 *Le sinus est dérivable en* 0 *et vérifie* $\sin'(0) = 1$.

Démonstration. Démonstration géométrique. Soit x un réel dans $]0, \pi/2[$. Alors avec $P = (\cos(x), \sin(x))$, $Q = (1, \tan(x))$, $A = (0, 1)$ et $B = (0, \sqrt{1 + \tan^2(x)})$, on a la figure suivante



La zone hachurée en hexagones rouges est un secteur angulaire de rayon 1 et d'angle x, d'aire $x1^2/2 = x/2$. La zone quadrillée en vert est un triangle de base 1 et de hauteur $\tan(x)$, d'aire, $\tan(x)/2$. La zone hachutée en bleu est un secteur angulaire de rayon $\sqrt{1+\tan^2(x)}$ et d'angle x, d'aire $x(1+\tan^2(x))/2 = x/(2\cos^2(x))$. L'aire étant croissante par inclusion, on en déduit que

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \leq \frac{x}{2\cos^2(x)}$$

soit encore, puisque x et $\cos(x)$ sont strictement positifs

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

On en déduit via la continuité du cosinus en 0 et le théorème d'encadrement que $\sin(x)/x$ tend vers 1 quand x vers 0 par valeurs supérieures. D'autre part, $x \mapsto \sin(x)/x$ est pair, donc admet la même limite quand x tend vers 0 par valeurs inférieures. En conclusion, le taux d'accroissement $x \mapsto (\sin(x)-\sin(0))/(x-0)$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Ainsi, le sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Théorème 3 *Le sinus et le cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Démonstration. Commençons par démontrer que le cosinus est dérivable en 0 de dérivée nulle en 0. Pour cela, utilisons une formule d'angle moitié. Soit x un réel non nul, alors

$$\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{-2\sin^2(x/2)}{x} = -\frac{\sin(x/2)}{x/2}\sin(x/2)$$

D'après la dérivée précédemment démontrée du sinus en 0, $\sin(x/2)/(x/2)$ tend vers 1 quand x tend vers 0, tandis que $\sin(x/2)$ tend vers $\sin(0) = 0$ par continuité du sinus. Ainsi, le taux d'accroissement du cosinus en 0 tend vers 0, ce qui prouve la dérivabilité du cosinus en 0 et que $\cos'(0) = 0$.
Dans le cas général, soit a et h un réel non nul. La formule d'addition du sinus implique

$$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$$

On en déduit que

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

On reconnaît les taux d'accroissement du cosinus et du sinus en 0, on en déduit que le taux d'accroissement du sinus en a admet une limite quand h tend vers 0 et que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\times 0 + \cos(a)\times 1 = \cos(a)$$

Ainsi, le sinus est dérivable en 0 et $\sin'(a) = \cos(a)$.

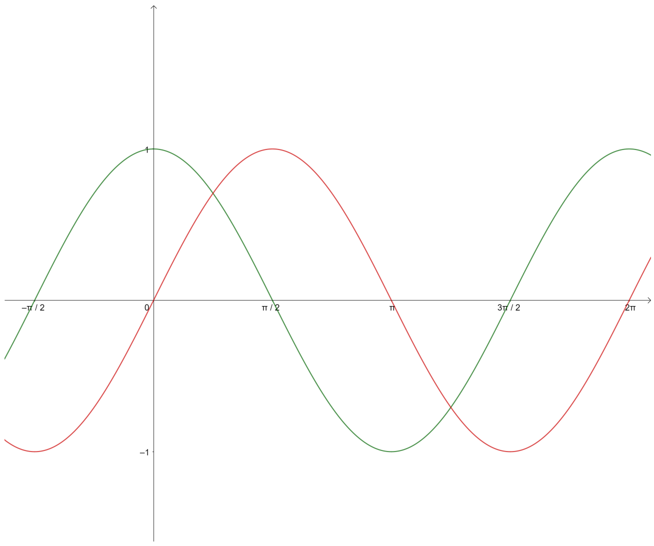
On peut reproduire la même démarche pour le cosinus à l'aide d'une formule d'addition. On peut également exploiter une composition. En effet, pour tout réel a

$$\cos(a) = \sin(\pi/2 - a)$$

Alors, l'application $f : a \mapsto \pi/2 - a$ est dérivable, de dérivée $f' = -1$. Comme on vient de démontrer que le sinus est dérivable, on en déduit que le cosinus est dérivable et que pour tout réel a,

$$\cos'(a) = f'(a)\sin'(\pi/2 - a) = -1\cos(\pi/2 - a) = -\sin(a)$$

Propriété 11 (Variations des lignes trigonométriques) *Le cosinus et le sinus sont 2π-périodiques. Le cosinus est positif sur $[0,\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$, négatif sur $[\pi/2, 3\pi/]2$, strictement décroissant sur $[0,\pi]$, strictement croissant sur $[\pi, 2\pi]$. Son maximum vaut 1, son minimum vaut -1. Le sinus est négatif sur $[-\pi/2, 0] \cup [\pi, 3\pi/2]$, positif sur $[0,\pi]$, strictement croissant sur $[-\pi/2, \pi/2]$, strictement décroissant sur $[\pi/2, 3\pi/2]$. Son maximum vaut 1, son minimum vaut 1.*



Propriété 12 *Soit n un entier naturel. Alors le cosinus et le sinus sont n-fois dérivables et vérifient pour tout réel x*

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad et \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Propriété 13 *On note $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble de définition de la fonction tangente. Alors $\tan : \mathcal{D}_{\tan} \to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie*

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Démonstration. La dérivabilité de la fonction tangente résulte de la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus précédemment établie, ainsi que des propriétés sur les quotients de fonctions dérivables. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Propriété 14 *La fonction tangente est π périodique, impaire. Elle est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$. De plus,*

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} \tan(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to \pi/2^-} \tan(x) = +\infty$$

Propriété 15 (Une inégalité importante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$

Démonstration. Démonstration géométrique comme pour la dérivabilité, ou alors étude de fonction. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \sin(x)$. Alors g est dérivable comme somme de fonctions dérivables et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

d'après le maximum du cosinus. Par conséquent, g est croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout réel x positif, $g(x) \geq g(0) = 0$, ce qui implique $x \geq \sin(x)$ soit $|x| \geq \sin(x)$. De plus, pour tout réel négatif, $\sin(x) \geq x$. Dans ce dernier cas, $|x| = -x \geq -\sin(x)$. Ainsi, dans tous les cas, $|x| \geq \max(\sin(x), -\sin(x)) = |\sin(x)|$.

Exercice 6 *Montrer que pour tout réel x dans $[0, \pi/2]$, $\sin(x) \geq 2x/\pi$.*

4 Fonctions radicales

☞ **Remarque**
Il s'agit d'un petit détour nécessaire pour prouver les croissances comparées du logarithme. Le tout sera généralisé et approfondi via les fonctions puissances en section 6.

Définition 6 *Soit n un entier naturel non nul et x un réel positif. $x^{1/n}$ est l'unique réel positif y tel que $y^n = x$. Il est également noté $\sqrt[n]{x}$.*

☞ **Remarque**
Cette définition est légitime grâce au théorème de la bijection. En effet, on a vu que $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue, de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc d'image $\mathbb{R}^+$.

Propriété 16 *L'application $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/n}$ est continue, strictement croissante, d'image $[0,+\infty[$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \neq 1$, elle n'est pas dérivable en 0.*

Démonstration. Le théorème de la bijection donne la continuité et la croissance de la réciproque, ainsi que sa limite en $+\infty$. D'autre part, $x \mapsto nx^{n-1}$ est la dérivée de $x \mapsto x^n$. On constate que pour $n \neq 1$ (l'identité a pour réciproque l'identité). cette dérivée s'annule uniquement en 0, donc que la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. En 0, on remarque que $(x^{1/n} - 0^{1/n})/(x-0) = x^{1/n-1}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 puisque $1/n - 1 < 0$, donc qu'il n'y a pas dérivabilité en 0.

Définition 7 *Soit q un rationnel positif et x un réel positif. On note n un entier naturel et m un entier naturel tels que $m \neq 0$ et $q = n/m$. On définit alors $x^q = (x^n)^{1/m} = \sqrt[m]{x^n}$*

Propriété 17 *Avec les mêmes notations que précédemment, $x^q = \left(x^{1/m}\right)^n = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$.*

Démonstration. D'après la définition de la puissance $1/m$ de x,

$$\left(x^{1/m}\right)^m = x$$

Cela entraîne, d'après les propriétés des puissances entières,

$$\left(x^{1/m}\right)^{mn} = x^n$$

Soit encore

$$\left[\left(x^{1/m}\right)^n\right]^m = x^n$$

Donc le réel positif $y = (x^{1/m})^n$ vérifie $y^m = x^n$, c'est donc la racine m-ième de x^n, i.e x^q. Ainsi

$$x^q = \left(x^{1/m}\right)^n$$

Propriété 18 *Soit x un réel positif, p et q deux rationnels positifs. Alors*

$$(x^p)^q = x^{pq}$$

Démonstration. On note $p = n/m$ et $q = r/s$ avec r, n entiers naturels et m, s entiers naturels non nuls. Alors, d'après ce qui précède, le réel positif $y = (x^p)^q$ vérifie

$$y^{ms} = x^{nr}$$

Ainsi, y est la racine ms-ième de x^{nr}, donc

$$y = (x^{nr})^{1/(ms)} = x^{pq}$$

5 Exponentielle et logarihtme

5.1 Logarithme

Propriété 19 *L'ensemble des fonctions f dérivables de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*}, f(xy) = f(x) + f(y)$$

est l'ensemble

$$\left\{x \mapsto a\int_1^x \frac{dt}{t} | a \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant l'équation fonctionnelle indiquée. Fixons x un réel strictement positif et étudions la fonction $g_x : y \mapsto f(xy)$. Alors g est dérivable et vérifie grâce à la dérivée d'une composée :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, g_x'(y) = xf'(xy) = 0 + f'(y)$$

En particulier, pour $y = 1$, $xf'(x) = f'(1)$. On note alors $a = f'(1)$ et f vérifie

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{a}{x}$$

De plus, en exploitant l'équation fonctionnelle en $x = 1$ et $y = 1$, on déduit $f(1) = f(1) + f(1)$, donc $f(1) = 0$. Ainsi, f est la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto a/x$ s'annulant en 1. Avec les notations intégrales, il s'agit bien de $x \mapsto a\int_1^x \frac{dt}{t}$.
Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}$ et considérons l'application $h : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto a\int_1^x \frac{dt}{t}$. On considère alors un réel y strictement positif et on considère l'application $g : x \mapsto h(xy)$. Celle-ci est dérivable et vérife pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = yh'(xy) = \frac{a}{x} = h'(x)$$

Par conséquent, comme $\mathbb{R}^{+*}$ est un intervalle, $g - h$ est constante égale (entre autres) à $g(1) - h(1) = h(y) - h(1) = h(y)$. En conclusion,

$$\forall x, y > 0, h(xy) = h(x) + h(y)$$

Définition 8 *L'application $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ est appelée logarithme népérien, noté* ln.

Propriété 20 *Le logarithme népérien est continu et strictement croissant.*

Propriété 21 *Soit x, y des réels strictement positifs et q un rationnel. Alors*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^q) = q\ln(x)$$

Propriété 22 (Croissances comparées)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Soit n, m deux entiers naturels non nuls.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{x^m} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^m(\ln(x))^n = 0$$

Démonstration. Le premier point est admis, tant que nous n'avons pas la définition proprement quantifiée de la limite infinie d'une fonction. Le second point résulte du changement de variable $y = 1/x$, qui implique $\ln(x) = -\ln(y)$ et y tend vers 0 par valeurs supérieures. On propose une étude de fonction pour démontrer le troisième résultat. On définit l'application $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x)$. Celle-ci est dérivable et vérifie

$$\forall x > 0, g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

En particulier, pour tout réel $x \geq 1$, $g'(x) \geq 0$, donc g est croissante sur $[1, +\infty[$. D'autre part, $g(1) = 1 \geq 0$, donc g est positive sur $[1, +\infty[$. On en déduit que pour tout réel $x \geq 1$, $\ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$, donc que

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

On en déduit par théorème d'encadrement que $\ln(x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Soit à présent n un entier naturel non nul, m un entier supérieur ou égal à 2, et $x \geq 1$. La positivité de g implique

$$0 \leq \ln(x^{1/n}) \leq x^{1/n}$$

On en déduit, puisque n est positif, que

$$0 \leq \ln(x) \leq nx^{1/n}$$

La croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$ implique alors

$$\forall x \geq e, 0 \leq (\ln(x))^n \leq n^n x$$

Il vient alors, après division par $x^m > 0$,

$$\forall x > e, 0 \leq \frac{(\ln(x))^n}{x^m} \leq n^n x^{1-m}$$

Comme $1 - m < 0$, le majorant de droite tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit la limite souhaitée par théorème d'encadrement. Le quatrième résultat résulte du changement de variable $y = 1/x$.

Propriété 23 *Le logarithme est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La stricte croissance découle du signe strictement positif de sa dérivée. Comme est elle dérivable, elle est continue. Enfin, ses limites établies précédemment assurent que son image est $\mathbb{R}$. Le résultat découle alors du théorème de la bijection.

Définition 9 *Soit a un réel strictement positif et différent de* 1. *L'application* $\ln/\ln(a)$ *est appelé logarithme en base a.*

Exercice 7 *Etudier les variations du logarithme en base a.*

5.2 Exponentielle

Définition 10 *Il existe une unique fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y), \quad f'(0) = 1$$

Cette application est appelée l'exponentielle, notée exp.

☞ **Remarque**
On peut le démontrer à l'aide de l'étude précédente et des morphismes additifs continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'approche via les équations différentielles est également possible, mais elle nécessite de prouver le théorème de Cauchy-Lipschitz en premier lieu.

Propriété 24 *La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives. Pour tout réel x, pour tout rationnel q,*

$$\exp(qx) = \exp(x)^q$$

Démonstration. Pour tout réel x, $\exp(x) = \exp(x/2)^2$ est positif comme carré d'un réel. Si l'exponentielle s'annule en un point, alors elle est constamment nulle via son équation fonctionnelle. Ainsi, exp est à valeur strictement positives. La seconde propriété découle d'une récurrence puis de manipulations classiques $n \mapsto -n, q = 1/m, puisque q = n/m$.

Propriété 25 *La fonction exponentielle est l'unique solution du problème de Cauchy*

$$y' = y \quad y(0) = 1$$

Démonstration. L'équation fonctionnelle de l'exponentielle implique que $\exp(0) = \exp(0)^2$. Si $\exp(0) = 0$, alors pour tout réel x, $\exp(x+0) = \exp(0)\exp(x) = 0$. Cela entraînerait que l'exponentielle est constante de dérivée nulle, ce qui contredit sa dérivée en 0 qui vaut 1. Par conséquent, $\exp(0) = 1$. On fixe alors un réel x et on étudie la dérivation de l'application $g : y \mapsto \exp(x+y)$. Elle vérifie via la dérivée d'une composée

$$\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = \exp'(x+y) = \exp(x)\exp'(y)$$

En évaluant en $y = 0$, cette dernière égalité, on obtient $\exp'(x) = \exp(x)\exp(0) = \exp(x)$, et ce pour tout réel $x > -1$ non nul. Pour $x \leq -1, 1 + x \leq 0 < \exp(x)$.

Théorème 4 *L'application* $\exp^{|\mathbb{R}^{+*}}$ *est la réciproque de* ln.

Démonstration. L'approche par les équations fonctionnelles nécessiterait d'examiner les morphismes additifs continus. On procède ici via les propriétés de dérivation. La fonction $f = \exp\circ\ln$ bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ est dérivable et vérifie

$$\forall x > 0, f'(x) = \ln'(x)\exp'(\ln(x)) = \frac{1}{x}f(x)$$

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = 0$, donc $x \mapsto f(x)/x$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, donc constante égale à $f(1)/1$. On déterminer $f(1) = \exp(\ln(1)) = \exp(0) = 1$. Ainsi, $\forall x > 0, f(x) = x$, i.e $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{+*}}$. D'autre part, la fonction $g = \ln\circ\exp$ bien définie sur $\mathbb{R}$, puisque exp est à valeurs strictement positives est dérivable et vérifie, après dérivation,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \exp'(x)\ln'(\exp(x)) = \exp(x)\frac{1}{\exp(x)} = 1$$

On conclut via le même argument et $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Propriété 26 *L'exponentielle est strictement croissante.*

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$$

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

Démonstration. La première peut être démontrée via l'inégalité de convexité de la prochaine propriété. Le reste découle des propriétés déjà établies sur le logarithme et le changement de variable $x = \ln(y)$.

Propriété 27 (Inégalités de convexité) *Pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. Pour tout réel x, $\exp x \geq 1 + x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.*

Démonstration. Il s'agit d'études de variations. Posons $f :]-1,+\infty[, x \mapsto x - \ln(1+x)$. Cette application est dérivable et vérifie

$$\forall x > -1, f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-1,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Or $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$. Donc f est strictement positive, sauf en 0. La seconde inégalité se prouve de la même manière. On peut exploiter la stricte croissance de l'exponentielle sur l'inégalité précédente.

$$\forall x \neq 0, \exp(\ln(1+x)) < \exp(x)$$

i.e $1 + x < \exp(x)$.

☞ **Remarque**
Les droites d'équation $y = x$ et $y = 1 + x$ sont respectivement les tangentes de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 et de l'exponentielle en 0. Ces inégalités indiquent la position relative du graphe de ces deux fonctions relativement à ces tangentes.

6 Fonctions puissances

Définition 11 *Soit α un réel. Pour tout réel x strictement positif, on note $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$*

☞ **Remarque**
Cette notation est cohérente avec les puissances rationnelles d'un réel strictement positif. En effet, soit $x > 0$ et q un rationnel. On a démontré que $q\ln(x) = \ln(x^q)$, donc que $\exp(q\ln(x)) = \exp(\ln(x^q)) = x^q$.

Définition 12 *L'application $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ est appelée fonction puissance de degré α. Dans le cas $\alpha \geq 0$, on peut la prolonger sur $\mathbb{R}^+$ via $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$ et $0^0 = 1$.*

Propriété 28 *Avec la notation $e = \exp(1)$, pour tout réel x, $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$.*

Propriété 29 *Soit x et y deux réels strictement positifs, α, β deux réels. Alors*

$$\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$$

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Démonstration. Tout découle des propriétés fonctionnelles du logarithme et de l'exponentielle

$$\ln(x^\alpha) = \ln(\exp(\alpha\ln(x))) = \alpha\ln(x)$$

$$(xy)^\alpha = \exp(\alpha(\ln(xy)) = \exp(\alpha(\ln(x)+\ln(y))) = \exp(\alpha\ln(x)+\alpha\ln(y)) = \exp(\alpha\ln(x))\exp(\alpha\ln(y))) = x^\alpha y^\alpha$$
$$x^{\alpha+\beta} = \exp(\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)) = \exp(\alpha\ln(x))\exp(\beta\ln(x)) = x^\alpha x^\beta$$
$$(x^\alpha)^\beta = \exp(\beta\ln(x^\alpha)) = \exp(\beta\alpha\ln(x)) = x^{\alpha\beta}$$

⚠ **Attention**
Ne pas confondre les expressions x^α et α^x !

Propriété 30 *Pour tout réel α, la fonction puissance de degré α p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha p_{\alpha-1}(x)$$

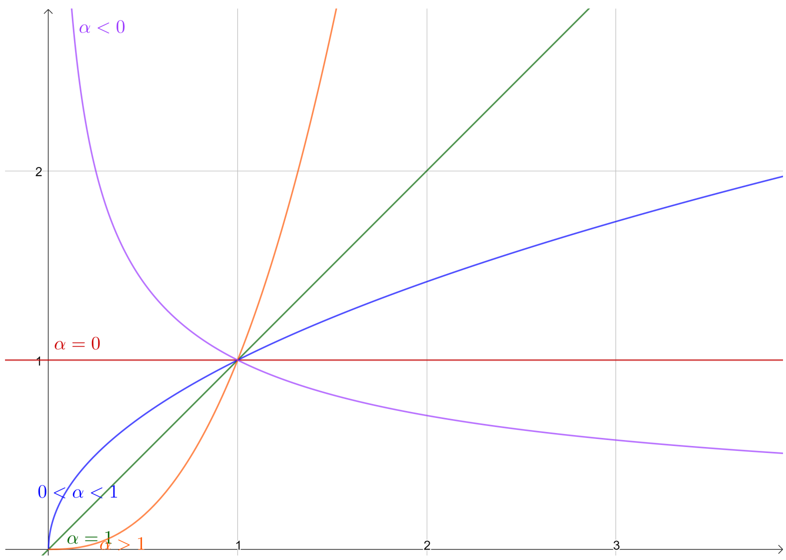
Pour $\alpha \geq 1$ et $\alpha = 0$, elle est également dérivable en 0, de dérivée 0 si $\alpha \neq 1$ et 1 si $\alpha = 1$. On en déduit que p_α est strictement croissante pour $\alpha > 0$, constante pour $\alpha = 0$, et strictement décroissante pour $\alpha < 0$.

Démonstration. p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de fonctions dérivables. Pour tout réel $x > 0$,

$$p'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x}\exp'(\alpha\ln(x)) = \alpha x^{-1}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha p_{\alpha-1}(x)$$

Comme les fonctions puissances sont des exponentielles de quelque chose, elles sont strictement positives (sauf peut-être en 0), ce qui donne les sens de variation indiqués.

Représentations graphiques



Fonctions puissances entières impaires

Proposition - définition 1 *Soit n un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Alors $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ est une bijection strictement croissante. Sa réciproque $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/n}$ est une fonction continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et non dérivable en 0.*

Propriété 31 (Croissances comparées) *Soit α, β des réels strictement positifs. Alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\beta = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x}|x|^\beta = 0$$

7 Fonctions hyperboliques

Théorème 5 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle stable par $-\mathrm{id}$. Alors il existe un unique couple (g,h) de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ respectivement paire et impaire telle que $f = g+h$.*

Démonstration. Analyse : si un tel couple existe, alors pour tout réel x dans I, $f(-x) = g(-x)+h(-x) = g(x)-h(x)$. On en déduit que $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et que $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ceci prouve l'unicité d'un tel couple. La synthèse ne pose pas problème : il suffit de vérifier que $x \mapsto f(x)+f(-x)$ est paire, puis que $x \mapsto f(x)-f(-x)$.

Définition 13 *On appelle cosinus hyperbolique la partie paire de l'exponentielle et sinus hyperbolique la partie impaire de l'exponentielle. Elles sont notées* ch *et* sh.

Propriété 32 *Pour tout réel x,*

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

Démonstration. Voir la phase d'analyse du théorème de décomposition en parties paire/impaire.

Propriété 33 *Ces deux fonctions sont dérivables et vérifient pour tout réel x*

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

Démonstration. L'exponentielle étant dérivable, on a pour tout réel x,

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \mathrm{sh}(x)$$

$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x)$$

Propriété 34 *La fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Elle induit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. La fonction sinus hyperbolique est strictement croissante. Elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La seule chose à montrer est le signe du sinus hyperbolique. Or, pour tout réel x, comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives

$$\mathrm{sh}(x) > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff e^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0$$

d'après la stricte croissance du logarithme. Ainsi, le sinus hyperbolique est strictement positif sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle en 0, et strictement négatif sur $\mathbb{R}^{-*}$. Il est clair que le cosinus hyperbolique est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Les sens de variations découlent de la propriété précédente, et les limites découlent de celle de l'exponentielle réelle. On conclut par continuité via le théorème de la bijection.

Propriété 35 *Pour tous réels a et b,*

$$\mathrm{ch}^2(a) - \mathrm{sh}^2(a) = 1$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

Démonstration.

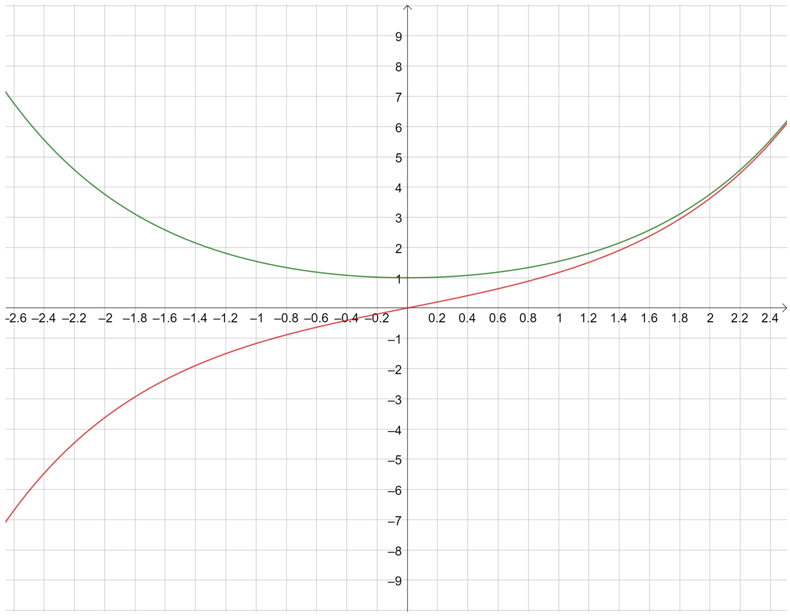
$$\frac{\exp(2a)+2+\exp(-2a)}{4}-\frac{\exp(2a)-2+\exp(2a)}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\left(e^{a}+e^{-a}\right)\left(e^{b}+e^{-b}\right)+\left(e^{a}-e^{-a}\right)\left(e^{b}-e^{-b}\right)=e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}+e^{a+b}-e^{a-b}-e^{-a+b}+e^{-a-b}=2e^{a+b}+2e^{-a-b}=2\operatorname{ch}(a+b)$$

$$\left(e^{a}-e^{-a}\right)\left(e^{b}+e^{-b}\right)+\left(e^{a}+e^{-a}\right)\left(e^{b}-e^{-b}\right)=e^{a+b}-e^{-a+b}+e^{a-b}-e^{-a-b}+e^{a+b}-e^{a-b}+e^{-a+b}-e^{-a-b}=2e^{a+b}-2e^{-a-b}=2\operatorname{sh}(a+b)$$

☞ **Remarque**

La première propriété montre que pour tout réel t, le couple $(x,y)=(\operatorname{ch}(t),\operatorname{sh}(t))$ vérifie $x^2-y^2=1$, qui l'équation d'une hyperbole (équilatère). Ceci justifie l'appellation « hyperbolique » de ces fonctions.



Exercice 8 *Proposer des formules pour* $\operatorname{ch}(a-b)$ *et* $\operatorname{sh}(a-b)$.

Définition 14 *Pour tout réel x, on définit* $\operatorname{th}(x)=\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$. *L'application ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est appelée tangente hyperbolique.*

Propriété 36 *La fonction* th *est impaire.*

Propriété 37 *La fonction* th *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie pour tout réel x,*

$$\operatorname{th}'(x)=1-\operatorname{th}^2(x)$$

Démonstration. La tangente hyperbolique est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais. De plus,pour tout réel x,

$$\operatorname{th}'(x)=\frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}=\frac{\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}=1-\operatorname{th}^2(x)$$

Propriété 38 *La fonction* th *est strictement croissante et induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur* $]-1,1[$.

Démonstration. Remarquons que pour tout réel x, $e^{-x}>0$, donc que $e^{x}-e^{-x}<e^{x}+e^{-x}$, ainsi $\operatorname{sh}(x)<\operatorname{ch}(x)$. Mais alors, $\operatorname{sh}(-x)<\operatorname{ch}(-x)$ entraîne $-\operatorname{ch}(x)<\operatorname{sh}(x)$. Tout ceci entraîne que th est d'image incluse dans $]-1,1[$. Ainsi, th^2 est d'image incluse dans $[0,1[$ et la propriété précédente implique que th est strictement croissante. D'autre part,

$$\operatorname{th}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}}{e^{x}}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

Ceci implique que $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x)=1$. Par imparité, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x)=-1$. Le théorème de la bijection permet de conclure.

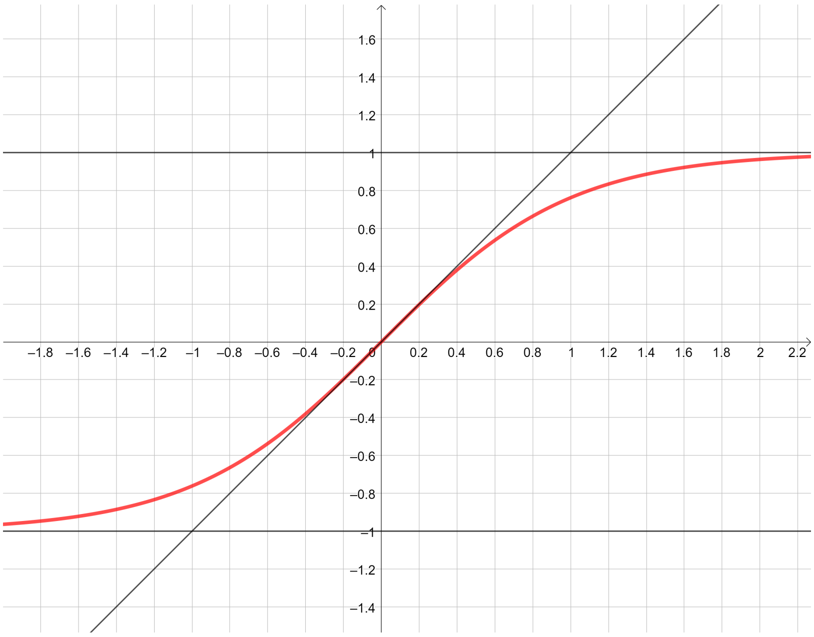
Propriété 39 *Pour tous réels a et b,*

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)}\\ &= \frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)}\\ &= \frac{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)}\,\frac{\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}+\frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}}{1+\frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)}}\\ &= \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}\end{aligned}$$

Exercice 9 *En déduire des formules d'addition, des relations entre* $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ *et* $\mathrm{th}(x/2)$



Exercice 10 *Étudier les positions relatives des fonctions hyperboliques par rapport à leurs tangentes.*

8 Fonctions circulaires réciproques

8.1 Arcsinus

Proposition - définition 2 *Le sinus induit une bijection de* $[-\pi/2, \pi/2]$ *dans* $[-1,1]$. *Sa réciproque est appelée arcsinus, notée* arcsin. *C'est une application de* $[-1,1]$ *dans* $[-\pi/2, \pi/2]$.

⚠ **Attention**
Il faut mémoriser le choix de l'ensemble d'arrivée de l'arcsinus.

Propriété 40

$$\arcsin(-1) = -\pi/2, \quad \arcsin(0) = 0, \quad \arcsin(1) = \pi/2$$

L'application arcsin *est impaire et strictement croissante. Elle est dérivable sur* $]-1,1[$, *non dérivable en* -1 *et* 1. *Pour tout réel* $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

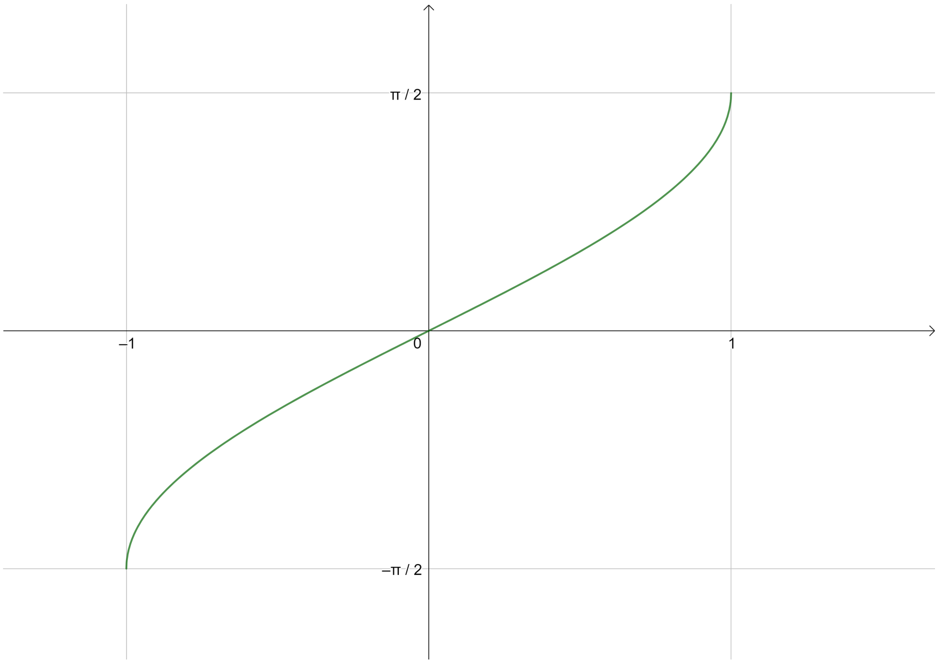
Démonstration. Les premiers résultats découlent des valeurs remarquables du sinus. Sa stricte croissance résulte de celle du sinus sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est impaire puisque le sinus est impair sur $[-\pi/2, \pi/2]$. D'autre part, pour tout réel $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\sin'(y) = \cos(y)$ n'est nul que pour $y = \pm\pi/2$, *i.e* $\sin(y) = \pm 1$. Par conséquent, l'arcsinus est dérivable sur $]-1,1|$, et pour tout réel $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

On remarque alors que $\cos(\arcsin(x)) > 0$, puisque $\arcsin(x) \in]-\pi/2, \pi/2|$. Par conséquent, $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ implique $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$, donc par positivité, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Ainsi,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Représentation graphique



Exercice 11 (Ultra classique) *Tracer le graphe de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.

8.2 Arccosinus

Proposition - définition 3 *Le cosinus induit une bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$. *Sa réciproque est appelée arccosinus, notée* arccos. *Il s'agit d'une application de* $[-1, 1]$ *dans* $[0, \pi]$.

⚠ **Attention**
Il faut mémoriser l'ensemble d'arrivée de l'arccosinus.

Propriété 41

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \pi/2, \quad \arccos(1) = 0$$

L'arccosinus est strictement décroissant, dérivable sur $]-1,1[$, *non dérivable en* -1 *et* 1. *De plus, pour tout réel* $x \in]-1,1[$,

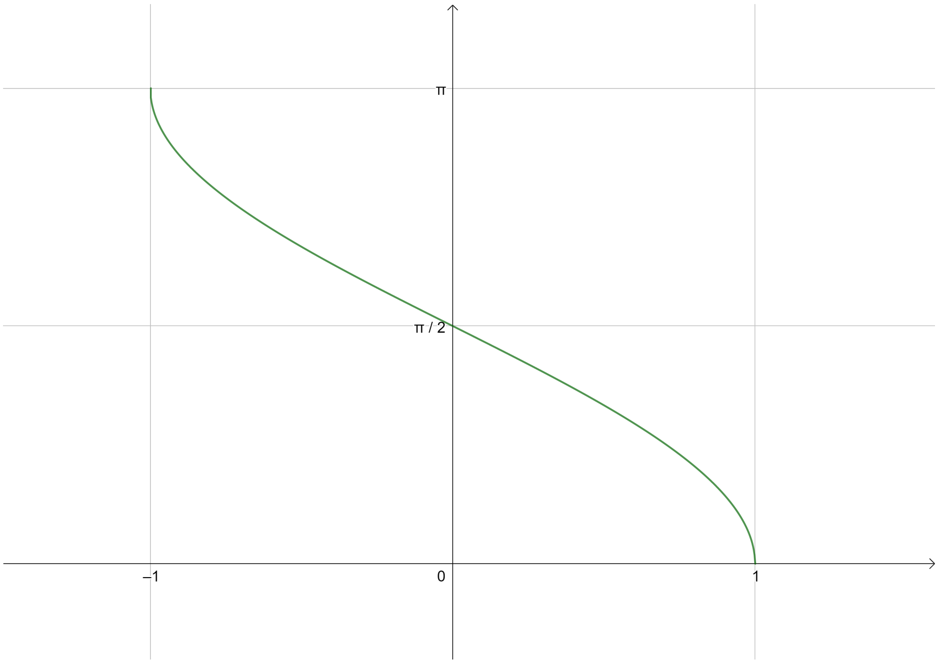
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration. Les valeurs remarquables du cosinus donnent les premières égalités. La réciproque est de même monotonie que $\cos_{|[0,\pi]}$, donc strictement décroissant. De plus, $\cos' = -\sin$ ne s'annule qu'en 0 et π sur cet intervalle. Par conséquent, pour tout réel x différent de -1 et 1,

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}$$

Mais alors, comme le sinus est positif sur $[0,\pi]$ et $\sin^2(\arccos(x)) = 1-\cos^2(\arccos(x)) = 1-x^2$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. On en déduit

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Exercice 12 (Classique) *Soit* $x \in [-1,1]$. *Montrer que* $\arccos(x)+\arcsin(x) = \pi/2$.

8.3 Arctangente

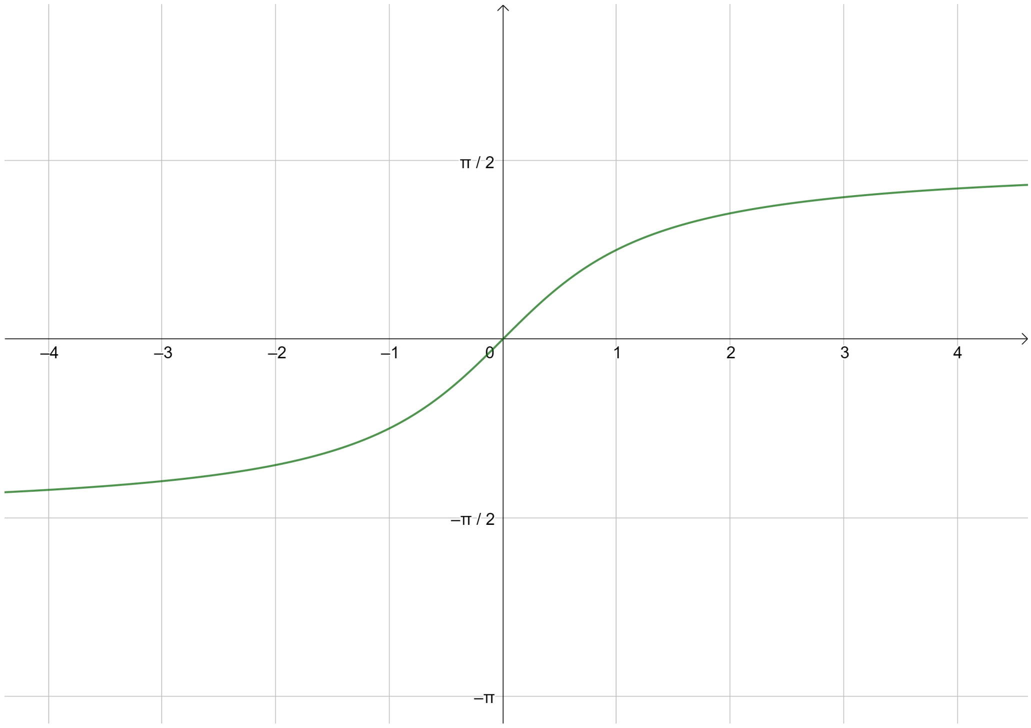
Proposition - définition 4 *La tangente induit une biejction de* $[-\pi/2,\pi/2]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Sa réciproque est appelée arctangente, notée* arctan. *Il s'agit d'une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $]\pi/2,\pi/2[$.

Propriété 42 *L'arctangente est impaire, strictement croissante, dérivable et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. Comme la tangente restreinte à $]-\pi/2,\pi/2[$ est impaire et strictement croissante, c'est également le cas pour sa réciproque. D'autre part, pour tout réel $y \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\tan'(y) = 1+\tan^2(y) \geq 1 > 0$. Par conséquent, l'arctangente est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$



Exercice 13 *Montrer de deux manières l'égalité suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan(1/x) = sign(x)\frac{\pi}{2}$$

9 Compléments : Fonctions hyperboliques réciproques

☞ **Remarque**
Ces fonctions sont hors programme bien que faciles à manipuler.

Définition 15 *Le sinus hyperbolique induit une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Sa réciproque est appelée sinus hyperbolique réciproque, notée* argsh*. On trouve également la notation arsinh.*

Propriété 43

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Le sinus hyperbolique réciproque est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Elle est strictement croissante de limite $+\infty$ *en* $+\infty$*.*

Démonstration. La stricte croissance, la continuité et les limites du sinus hyperbolique donnent sa bijectivité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors on a les équivalences

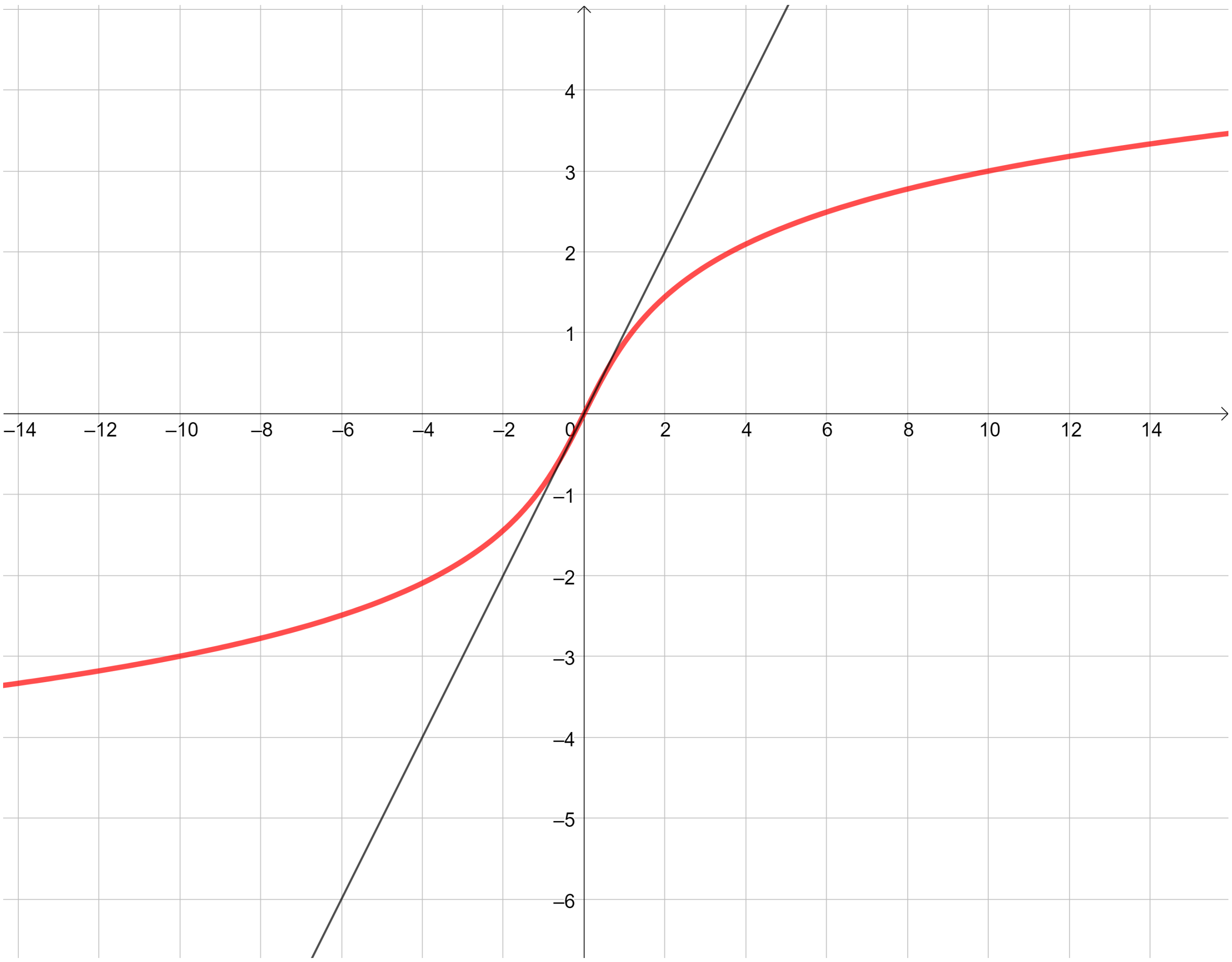
$$\begin{aligned} y = \operatorname{sh}(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x \text{racine de } X^2 - 2yX - 1 \end{aligned}$$

Or le polynôme $X^2 - 2yX - 1$ a pour racines $y \pm \sqrt{y^2+1}$. Comme leur produit est négatif (il vaut -1), seul l'une d'entre elles est strictement positive, $y + \sqrt{y^2+1}$. Ainsi, $y = \operatorname{sh}(x) \iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ par stricte positivité de cette racine.

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable par composition sur $\mathbb{R}$, puisque pour tout réel x, $x^2+1>0$. Ainsi, argsh est dérivable par composition et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

On peut également utiliser la dérivée d'une fonction réciproque, puisque $\operatorname{sh}' = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2}$. Les limites découlent de celles du sinus hyperbolique par changement de variable.



Définition 16 *Le cosinus hyperbolique induit une bijection de* $[0,+\infty[$ *dans* $[1,+\infty[$. *Sa réciproque est appelée cosinus hyperbolique réciproque, notée* argch. *On trouve également la notation arcosh.*

Propriété 44

$$\forall x \geq 1, \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Le cosinus hyperbolique réciproque est dérivable sur $]1,+\infty[$ *et*

$$\forall x > 1, \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Elle est strictement croissante de limite $+\infty$ *en* $+\infty$.

Démonstration. Même argument pour la bijectivité : continuité, stricte croissance, et limite en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in [1,+\infty[$. Alors $y = \operatorname{ch}(x) \iff 2y = e^x + e^{-x} \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$, i.e e^x racine du polynôme $X^2 - 2yX + 1$.

Les racines de ce dernier sont $y \pm \sqrt{y^2-1}$ qui sont bien définies puisque $y \geq 1$. Toutefois $e^x \geq 1$ puisque $x \in \mathbb{R}^+$, la seule racine envigeable est donc $y + \sqrt{y^2-1}$. Ainsi, $y = \mathrm{ch}(x) \iff e^x = y + \sqrt{y^2-1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ par stricte positivité de $y + \sqrt{y^2-1}$.
On note que $\mathrm{ch}'(0) = \mathrm{sh}(0) = 0$, donc que argch n'est pas dérivable en $\mathrm{argch}(0) = 1$. En revanche, $\mathrm{sh} > 0$ sur $]0, +\infty[$, donc argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x > 1, \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(x))} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))}$$

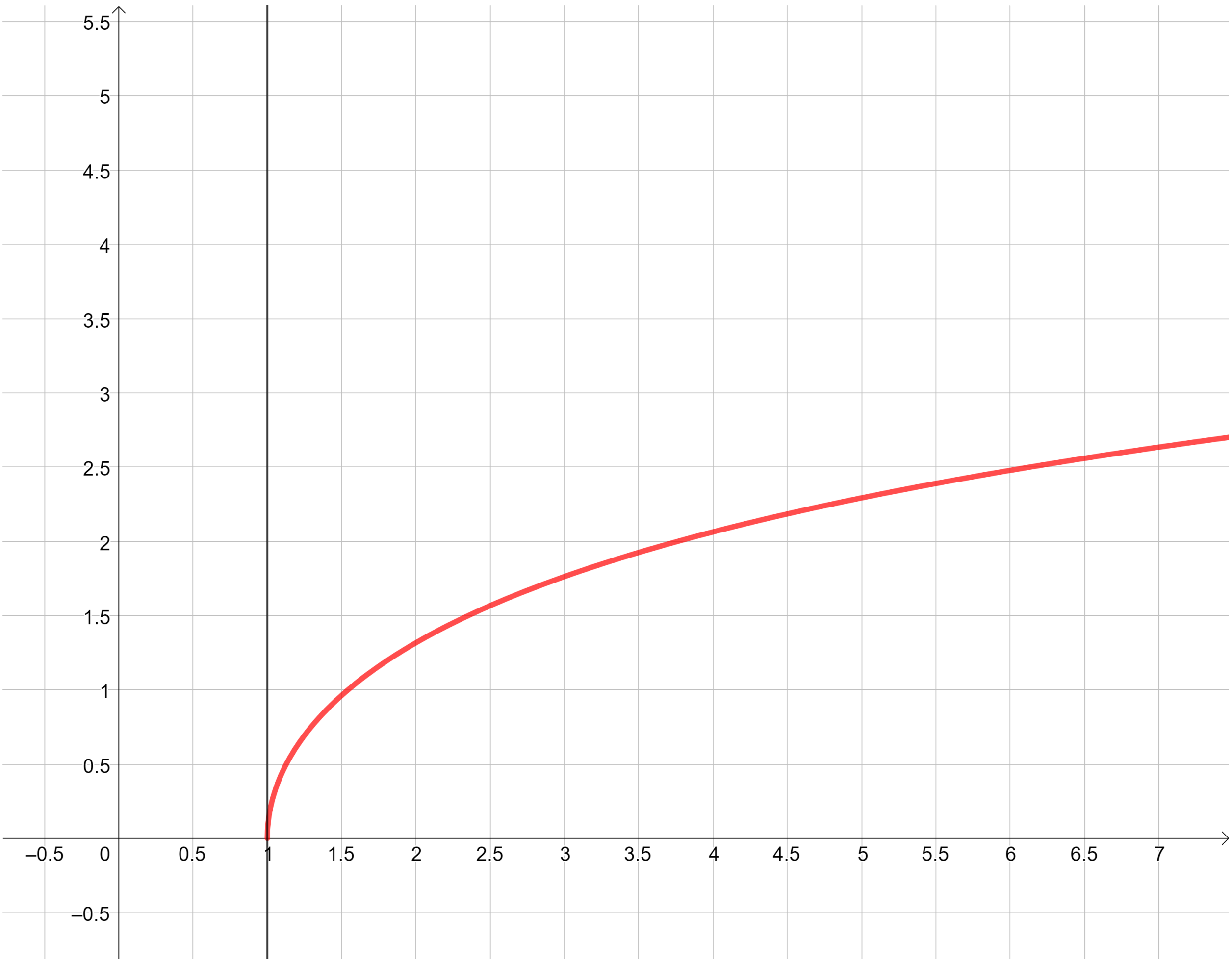
De plus, pour tout réel y positif, $\mathrm{sh}(y) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(y) - 1}$ par positivité du sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que

$$\forall x > 1, \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$$

Au final,

$$\forall x > 1, \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

La limite découle de celle du cosinus hyperbolique.



Exercice 14 *Donner l'ensemble de définition de* $x \mapsto \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))$ *et en déterminer une expression plus simple. Idem pour* $x \mapsto \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))$.

Définition 17 *La tangente hyperbolique induit une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1, 1[$. *Sa réciproque est appelée tangente hyperbolique réciproqe, notée* argth. *On trouve également la notation* artanh.

Propriété 45

$$\forall x \in]-1, 1[, \mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

La tangente hyperbolique réciproque est dérivable sur $]-1,1[$ *et*

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Elle est strictement croissante de limite $+\infty$ *en* 1.

Démonstration. Soit $y \in]-1,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, on a les équivalences

$$y = \operatorname{th}(x) \iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \iff e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$$

puisque $\operatorname{ch}(x) \neq 0$. On en déduit, puisque $e^x \neq 0$ et $y \neq 1$ que

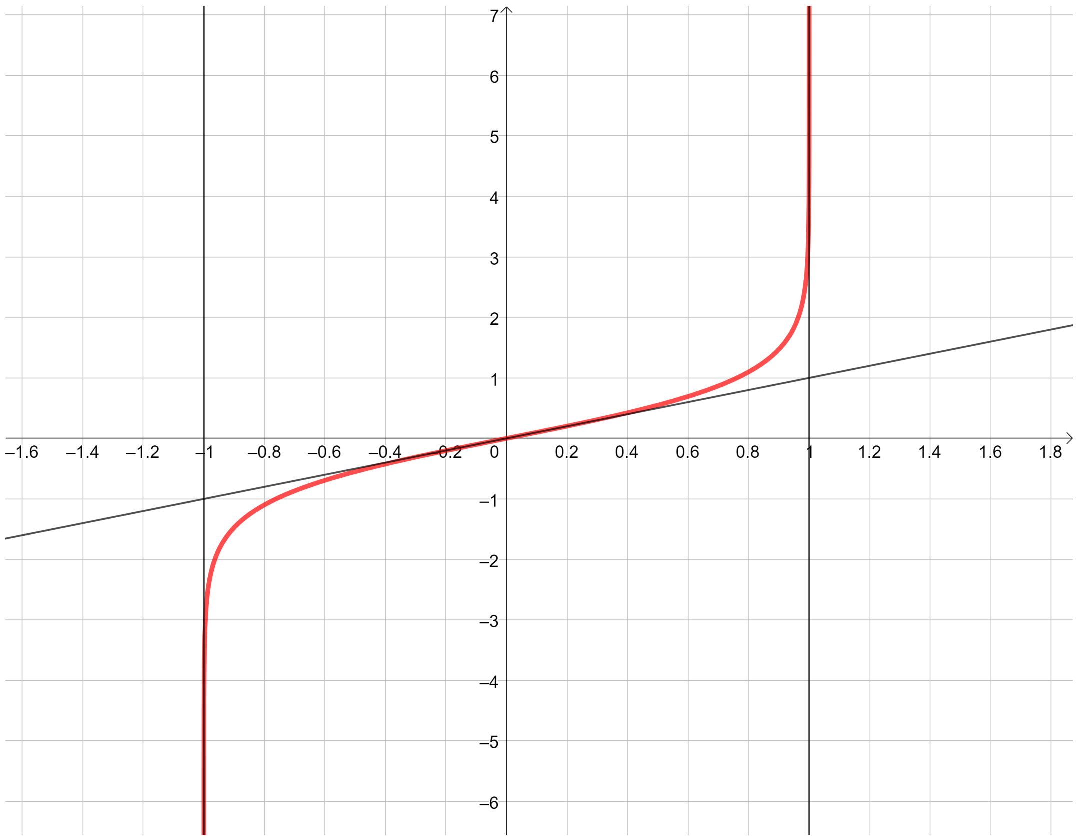
$$y = \operatorname{th}(x) \iff (1-y)e^x = (y+1)e^{-x} \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

Cette dernière égalité équivaut à $2x = \ln(\frac{1+y}{1-y})$ puisque $(1+y)/(1-y)$ est strictement positive car $y \in]-1,1[$. Ainsi,

$$y = \operatorname{th}(x) \iff x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y})$$

La dérivée de la tangente hyperbolique vaut $1 - \operatorname{th}^2$ qui ne s'annule jamais puisque $\operatorname{ch} > \operatorname{sh}$. Donc l'arctangente hyperbolique est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$



Exercice 15 *Etudier les positions relatives des fonctions hyperboliques réciproques par rapport à leurs tangentes.*