

Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 16 : Polynômes, fractions rationnelles. Les exercices porteront sur le chapitre 16 : Polynômes, fractions rationnelles.

Chapitre 16 : Polynômes, fractions rationnelles.

Anneau $\mathbb{K}[X]$.

Opérations dans $\mathbb{K}[X]$, notion d'indéterminée, écriture $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ avec $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à support fini. Composition de polynômes. Degré d'un polynôme non nul, convention $d(0) = -\infty$. $d(P + Q) \leq \max(d(P), d(Q))$, $d(PQ) = d(P) + d(Q)$, $d(P \circ Q) = d(P)d(Q)$. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. L'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré 0, i.e des polynômes constants non nuls. Relation de divisibilité. Caractérisation des polynômes associés. Théorème de la division euclidienne de polynômes.

Racines d'un polynôme.

Fonction polynomiale, $P \mapsto \tilde{P}$ est un morphisme d'algèbre. Notion de racine. (★) a est racine de P ssi $X - a$ divise P . (★) Si P non nul, alors $Z(P)$ est fini et $|Z(P)| \leq d(P)$. Identification polynômes et fonctions polynomiales si \mathbb{K} infini. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé, simplement scindé. Fonctions symétriques élémentaires. Relations coefficients-racines. (★) Interpolation de Lagrange. Ensemble des polynômes vérifiant $S(x_i) = y_i$.

Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Dérivation formelle. (★) Si P non constant, $d(P') = d(P) - 1$. (★) Dérivation d'une CL, d'un produit, d'une composée. Dérivée n -ième. Formule de Leibniz. (★) Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide de la première dérivée non nulle.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

Division euclidienne de polynômes, pgcd, ppcm, relation et théorème de Bezout. Lemme de Gauss. Calcul de $P \wedge P'$ dans le cas P scindé. Polynôme irréductible. Lemme d'Euclide. Tout polynôme non constant possède un diviseur irréductible. $\mathbb{K}[X]$ est factoriel. Théorème de D'Alembert-Gauss. (★) Tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé. (★) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Dans $\mathbb{C}[X]$, P divise Q ssi $Z(P) \subset Z(Q)$ et $\forall a \in Z(P), m_P(a) \leq m_Q(a)$. Caractérisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux via leurs racines. (★) Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Fractions rationnelles.

Fraction rationnelle. Forme irréductible. Notion de zéro, de pôle, multiplicité. Fonction rationnelle. Degré d'une fraction rationnelle. (★) $d(F)$ indépendant de P, Q tels que $F = P/Q$, $d(FG) = d(F) + d(G)$, si G est non nul, $d(F/G) = d(F) - d(G)$. Dérivée formelle, indépendance vis-à-vis des représentants polynomiaux. Dérivée d'une CL, d'un produit, d'un quotient, degré de la dérivée. Partie entière d'une fraction rationnelle. Élément simple. Division par puissances croissantes. Théorème de la décomposition en éléments simples. Coefficient d'un élément simple à l'aide de la dérivée. (★) Décomposition de P'/P .

★ ★ ★ ★ ★