Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Ce chapitre a une visée essentiellement pratique. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$) ou sur un exemple simple d'application de cours. Les théorèmes de terminale peuvent être exploités, même si non abordés. Les parties du programme de sup non abordées sont indiquées en italique.

Chapitre 4 : Compléments de calcul

I. Algèbre

Sommes finies

Somme d'une famille de complexes $(a_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble fini non vide I. Convention de la somme vide nulle. Linéarité, changement de variable, regroupement de termes. On n'insiste pas trop lourdement sur la bijectivité des changements de variables ou sur le fait qu'on dispose d'un recouvrement disjoint de I pour les regroupements de termes. ($\star$) Sommes classiques : télescopiques, $\sum_{k=0}^{n} k^p$ pour $p \in \{1,2,3\}$, de suites arithmétiques, géométriques, $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. ($\star$) Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$, application à la factorisation de polynômes par $X-a$ quand a est une racine. Manipulation de sommes multiples, sommes rectangulaires, sommes triangulaires. Carré d'une somme, du module d'une somme. Exemple de regroupement selon les valeurs de $i+j$.

Produits finis

Produit d'une famille de complexes $(a_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble fini non vide I. Convention du produit vide égal à 1. $\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i) = (\prod_{i=1}^{n} a_i)(\prod_{i=1}^{n} b_i)$, $\prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$. Changement de variable, produit télescopique pour une famille de $\mathbb{C}^*$. Factorielle d'un entier, coefficient binomial k parmi n. ($\star$) Symétrie et relation de Pascal. ($\star$) Formule du binôme. Application : linéarisation de fonctions trigonométriques via les formules d'Euler.

Systèmes linéaires

On se limite ici à la dimension 2 ou 3. Ecriture matricielle $AX = B$. Opérations élémentaires sur les lignes, notations $L_i \leftarrow \alpha L_i$ pour $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow L_i + L_j$. Exemples de résolution. *L'algorithme du pivot et les formes échelonnées n'ont pas été formalisés*. Interprétation géométrique dans le cas réel : intersection de droites, de plans.

II. Analyse

Inégalités

Dans $(\mathbb{R},\leq)$, A une partie de $\mathbb{R}$, application (strictement) (dé)croissante de A dans $\mathbb{R}$. Variations de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ selon la parité de n via la factorisation de $a^n - b^n$. $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \Rightarrow 0 \leq ac \leq bd$. Parties majorées, minorées, maximum, minimum, borne inférieure, supérieure. Intervalles de $\mathbb{R}$ définis par dix cas, intérieur, adhérence. *La caractérisation des intervalles comme parties connexes ou parties convexes de $\mathbb{R}$ n'a pas été abordée*. Valeur absolue, variations, inégalité triangulaire, inégalité triangulaire inverse. Définition de la partie entière d'un réel x : $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$, existence admise. ($\star$) Caractérisation : $n \in \mathbb{Z}$, $n = \lfloor x \rfloor \iff n \leq x < n+1$.

Étude de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On se restreint à des fonctions définies sur un intervalle ou une union d'intervalles. Graphe d'une fonction, de $f \mapsto f(x+a), f \mapsto f(ax)$. Parité, imparité, périodicité. Somme, produit, composition de fonctions. Ensemble de définition d'une composée. Fonction majorée, minorée, bornée. ($\star$) Une fonction f est bornée ssi $|f|$ est majorée. Dérivabilité en un point, sur un intervalle. La dérivabilité entraîne la continuité (les opérations sur les limites dans une partie de $\mathbb{R}$ sont utilisées sans démonstration). Linéarité, dérivée d'un produit, d'une composée. Dérivée d'une réciproque sous l'hypothèse C^1 et $f'(a) \neq 0$. Étude de variations de fonctions dérivables, caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle, (strictement) monotones. Condition nécessaire d'extremum sur l'intérieur de I. Recherche d'extrema et démonstration d'inégalités. Dérivées d'ordre supérieur, point d'inflexion, condition nécessaire via $f''(a) = 0$ en $a \in \mathring{I}$.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Dérivabilité de $f : I \to \mathbb{C}$ via la dérivabilité de $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$. $f' = \mathfrak{Re}(f)' + i\mathfrak{Im}(f)'$. Linéarité, dérivée d'un produit. Dérivée de $\exp(f)$ avec $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆