Dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point. Cela revient à dire que son intérieur est non vide, donc qu'il existe $(b, c) \in \mathrm{I}^2$ tels que $b < c$ et $]b, c[\subset \mathrm{I}$. a désigne un réel appartenant à I. f désigne une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On distinguera les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ quand ce sera nécessaire.

1 Fonctions dérivables, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité locale

Définition 1 *On dit que la fonction f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ si la fonction ;*

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathrm{I}\backslash\{a\} \to & \quad \mathbb{C} \\ x \mapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

admet une limite finie en a.

Notation
Quand cette limite existe, elle est unique, on la note $f'(a)$ et on dit que c'est le nombre dérivé de f en a.

Théorème 1 (Développement limité d'ordre 1 en a) *La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction ε définie dans un voisinage V de 0 et de limite nulle en 0 telle que*

$$\forall h \in \mathrm{V}, f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

☞ **Remarque**
Cette formulation permet d'éviter de se tracasser avec des dénominateurs nuls.

De la définition du nombre dérivé on déduit facilement le résultat suivant.

Propriété 1 *Si f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ elle est alors continue en ce point.*

La réciproque de ce résultat est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ au voisinage de 0.

Définition 2 *On dit que la fonction f est dérivable à gauche [resp. à droite] en $a \in I$ si la fonction τ_a admet une limite à gauche [resp. à droite] finie en a.*

Notation
Quand cette limite existe, elle est unique, on la note $f'_g(a)$ [resp. $f'_d(a)$] et on dit que c'est le nombre dérivé à gauche [resp. à droite] de f en a.

Là encore des définitions on déduit facilement les résultats suivants.

Propriété 2 *Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \overset{\circ}{\mathrm{I}}$ alors elle est continue en ce point.*

Propriété 3 *Si $a \in \overset{\circ}{\mathrm{I}}$, alors f est dérivable en a si, et seulement si, elle dérivable à gauche et à droite en ce point avec $f'_g(a) = f'_d(a)$. Cette valeur commune est alors égale à $f'(a)$.*

Définition 3 *Si D est l'ensemble des points $x \in \mathrm{I}$ où $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dérivable, on définit alors la fonction dérivée de f sur D par $x \mapsto f'(x)$.*

Cet ensemble D peut être vide et dans ce cas la fonction dérivée n'est pas définie. C'est le cas par exemple pour la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ qui est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ (exemple 1.4) et en conséquence ne peut être dérivable.

☞ **Remarque**
On peut construire des fonctions continues, nulle part dérivables. Une fonction peut très bien être continue et nulle part dérivable sur I. *Pour construire une telle fonction, on désigne par φ la fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall x \in [-1,1], \varphi(x) = |x|$$

On définit la fonction de Van der Waerden par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

On peut démontrer que cette fonction f est continue, nulle part dérivable.
Un autre exemple de telle fonction est donné par la fonction de Weierstrass définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(p^n x)}{2^n}$$

où $p \geq 6$ est un entier pair. On peut même montrer que cette fonction n'est monotone sur aucun intervalle non réduit à un point. Pire, on peut montrer que les fonctions continues nulle-part dérivable sont denses dans l'espace des fonctions continues.

☞ **Remarque**
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, *sa dérivée f' n'est pas nécessairement continue comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$. On a $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et :*

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$$

donc $f'(0) = 0$. Mais f' n'est pas continue en 0 car la fonction $g : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 (ce qui se déduit de $g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = (-1)^k$ pour tout entier $k \geq 1$).

Définition 4 *On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (ou continûment dérivable) sur I si elle est dérivable en tout point de I et si la fonction dérivée f' est continue sur cet intervalle.*

Exemple 1 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 avec $f(0) = 0$. Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = f'(0)\ln(2)$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que :

$$0 < x < \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon$$

Pour tout entier $n > \frac{1}{\eta}$, on a $0 < \frac{1}{n+k} < \eta$ pour tout entier k compris entre 1 et n et donc :

$$\left|f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} f'(0)\right| < \frac{1}{n+k}\varepsilon$$

ce qui entraine :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right) f'(0)\right| < \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)\varepsilon < \varepsilon$$

En considérant que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(2)$$

on aboutit au résultat.
Par exemple pour $f(x)=x^2$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}=0$$

et pour $f(x)=\arctan(x)$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{n+k}\right)=\ln(2)$$

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Pour toute fonction f et tout point a de I, on note $\tau_a(f)$ la fonction définie sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$ par $\tau_a(f)(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Les résultats importants relatifs aux opérations algébriques sur les fonctions dérivables sont résumés avec le théorème qui suit.

Propriété 4 *Soient f,g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) dérivables en $a\in\mathrm{I}$.*

1. *Pour tous réels λ,μ la fonction $\lambda f+\mu g$ est dérivable en a avec :*

$$(\lambda f+\mu g)'(a)=\lambda f'(a)+\mu g'(a)$$

2. *La fonction fg est dérivable en a avec :*

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

(formule de Leibniz).

3. *Si $g(a)\neq 0$, alors la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de a, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ qui sont définies dans un tel voisinage sont dérivables en a avec :*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)},\quad\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration. 1. Résulte de :

$$\tau_a(\lambda f+\mu g)=\lambda\tau_a(f)+\mu\tau_a(g)$$

2. Résulte de :

$$\tau_a(fg)(x)=f(x)\tau_a(g)+g(a)\tau_a(f)$$

et de la continuité de a.

3. Si $g(a)\neq 0$, on a $g(x)\neq 0$ pour tout x dans un voisinage de a du fait de la continuité de g en ce point. Avec :

$$\tau_a\left(\frac{1}{g}\right)(x)=-\frac{1}{g(x)g(a)}\tau_a(g)$$

pour $x\neq a$, on déduit par passage à la limite quand x tend vers a que $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$. La formule de Leibniz permet d'obtenir le deuxième point.

Pour ce qui est de la composition et du passage à l'inverse, on a les résultats suivants :

Propriété 5 *Soient I, J deux intervalles réels $f:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ une fonction dérivable en $a\in\mathrm{I}$ et $g:\mathrm{J}\to\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction dérivable en $b=f(a)$. La fonction $g\circ f$ est définie sur I et dérivable en a avec :*

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$$

Démonstration. On définit la fonction τ_b sur J par :

$$\tau_b(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \text{ si } y \neq b \\ g'(b) \text{ si } y = b \end{cases}$$

et pour $x \neq a$ dans I, on a :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \tau_b(f(x)) \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(pour $f(x) \neq f(a)$ c'est clair et pour $f(x) = f(a)$, les deux membres de cette égalité sont nuls). Faisant tendre x vers a on obtient le résultat du fait de la continuité de f en a, de celle de τ_b en b et de la définition de $f'(a)$.

Théorème 2 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone dérivable en a. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration. On rappelle que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone, c'est alors un homéomorphisme de I sur $f(\mathrm{I})$ (théorème 2.10).
Si f^{-1} est dérivable en $f(a)$, on a alors :

$$1 = \left(f^{-1} \circ f\right)'(a) = \left(f^{-1}\right)'(f(a)) \cdot f'(a)$$

et nécessairement $f'(a) \neq 0$.
Supposons $f'(a) \neq 0$ et notons $b = f(a)$. Pour tout $y \neq b$ dans J on a $f^{-1}(y) \neq a$ et :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \left(\frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} \right)^{-1}$$

et avec la continuité de f^{-1}, on a :

$$\lim_{y \to b} \frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a)$$

ce qui entraîne :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{f'(a)}$$

De ce résultat, on déduit les dérivées des fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses, à savoir :

- $\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in]1,+\infty[, \operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\forall x \in]-1,1[, \operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

La fonction arcsin+ arccos étant de dérivée nulle sur] -1, 1[est constante et la valeur de cette fonction en $x = 0$, nous donne :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

De même en remarquant que la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et en prenant les valeurs en -1 et 1 , on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2}$$

Exemple 2 *Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l} x^2\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{array}\right.$$

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*\setminus\left\{\frac{2}{2k+1} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Avec :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$$

on déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$.
Soit $k=2p$ un entier naturel pair et $x_k=\frac{2}{2k+1}$. Pour $\frac{\pi}{x}\in\left]k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)>0$ et pour $\frac{\pi}{x}\in\left]\frac{\pi}{2}+k\pi,(k+1)\pi\right[$, $\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)<0$, de sorte que :
si $\frac{2}{2k+1}<x<\frac{1}{k}$ pour $k\neq 0$, ou $x>2$ pour $k=0$, alors :

$$\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}=\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-x_k}\underset{x\to x_k^+}{\to}\left(x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'_{|x=x_k}=\pi$$

et si $\frac{1}{k+1}<x<\frac{2}{2k+1}$, alors :

$$\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}=-\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-x_k}\underset{x\to x_k^+}{\to}-\left(x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'_{|x=x_k}=-\pi$$

La fonction f est donc dérivable à droite et à gauche en x_{2p} avec :

$$f'_g\left(x_{2p}\right)=-\pi, f'_d\left(x_{2p}\right)=\pi$$

On vérifie de même que f est dérivable à droite et à gauche en x_{2p+1}, pour tout entier naturel p, avec :

$$f'_g\left(x_{2p+1}\right)=-\pi, f'_d\left(x_{2p+1}\right)=\pi$$

Ces dérivées à droite et à gauche étant distinctes, on en déduit que f n'est pas dérivable en x_k pour tout $k\in\mathbb{N}$. Avec la parité de la fonction f, on déduit que ce résultat est encore valable pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

2 Extrema et dérivation

2.1 Fermat et les points stationnaires

Théorème 3 *Soient* I *un intervalle réel d'intérieur non vide, f une fonction à valeurs réelles définie sur I dérivable en un point a intérieur à* I. *Si f admet un extremum local en a alors $f'(a)=0$.*

Démonstration. On suppose que la fonction f admet un maximum local en a.
Le point a étant intérieur à I, la fonction $\varphi: t\mapsto f(a+t)$ est définie sur un voisinage ouvert de 0 et en écrivant que :

$$\left\{\begin{array}{l} f'(a)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\leq 0 \\ f'(a)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\geq 0 \end{array}\right.$$

on déduit que $f'(a)=0$.

Deux conséquences importantes de ce théorème sont le théorème de Rolle et le théorème de Darboux. La démonstration du théorème précédent contient plus précisément le résultat suivant.

Théorème 4 *Si I est un intervalle réel d'intérieur non vide, f une fonction à valeurs réelles définie sur I dérivable à gauche et à droite en un point a intérieur à I et qui admet un maximum [resp. minimum] local en ce point, alors $f'_g(a) \geq 0$ et $f'_d(a) \leq 0$ $\left[\text{resp.} f'_g(a) \leq 0 \text{ et } f'_d(a) \geq 0\right]$*

La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ au voisinage de 0.

2.2 Le théorème de Darboux

On a vu que si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors sa dérivée f' n'est pas nécessairement continue et pourtant cette dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Théorème 5 (Darboux) *Si f est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée f′ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Démonstration. Soient $a < b$ dans I. Si $f'(a) = f'(b)$ il n'y a alors rien à montrer.
On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$ et on se donne $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(x) - \lambda x$$

Cette fonction est continue sur le compact $[a, b]$, elle est donc minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\varphi(c) = \inf_{x \in [a,b]} \varphi(x)$. Si $c = a$[resp. $c = b$], alors $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \geq 0$ [resp. $\frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{b-x} \leq 0$] pour tout $x \in]a, b[$ et en passant à limite quand x tend vers a [resp. vers b] par valeurs supérieures [resp. inférieures], on déduit que $\varphi'(a) \geq 0$ [resp. $\varphi'(b) \leq 0$] ce qui est en contradiction avec $\varphi'(a) = f'(a) - \lambda < 0 < \varphi'(b) = f'(b) - \lambda$. On a donc $c \in]a, b[$ et $\varphi'(c) = 0$, soit $f'(c) = \lambda$.

Le théorème de Darboux nous montre qu'une fonction peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue en 0.

Corollaire
Il existe des fonctions définies sur un intervalle réel qui n'admettent pas de primitive.

Démonstration. Si f admet une primitive F sur I, elle doit vérifier la propriété des valeurs intermédiaires. Une fonction ne vérifiant pas cette propriété, par exemple une fonction en escaliers, n'admet donc pas de primitive sur I.

En fait, on peut vérifier directement qu'une fonction en escalier non constante n'admet pas de primitives.

3 Le théorème de Rolle

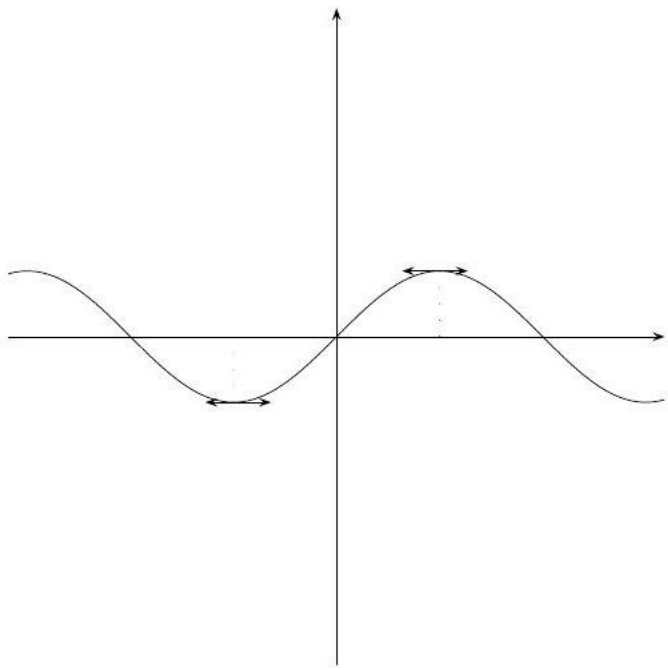
3.1 Énoncé

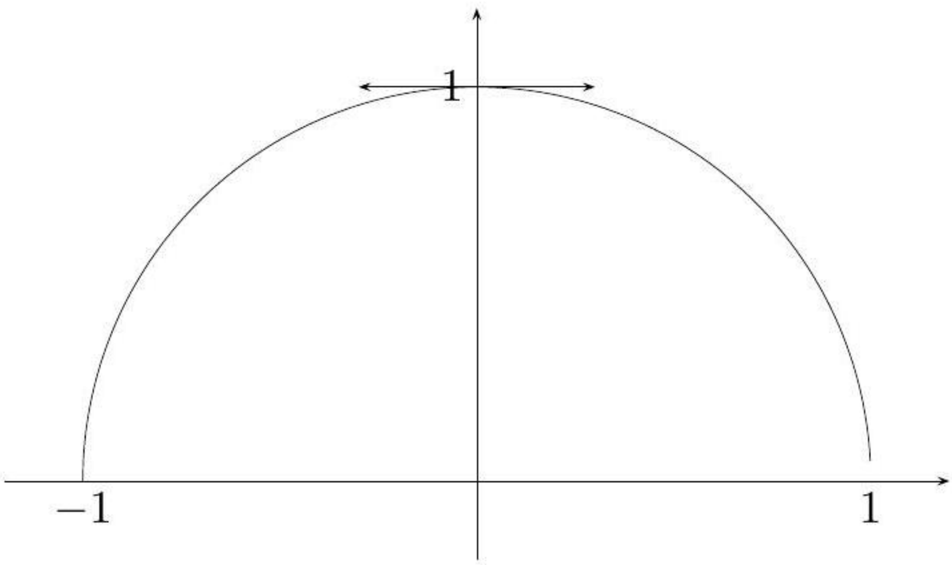
La classique version « réelle» de ce théorème est la suivante.

Théorème 6 (Rolle) *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, il existe alors un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. Si ces deux bornes sont atteintes en a et b, alors f est constante, donc de dérivée nulle sur $]a, b[$. Si ce n'est pas le cas, alors f atteint son minimum ou son maximum dans $]a, b[$. Comme c'est un extremum intérieur à $]a, b[$, la dérivée de f s'annule en ce point.

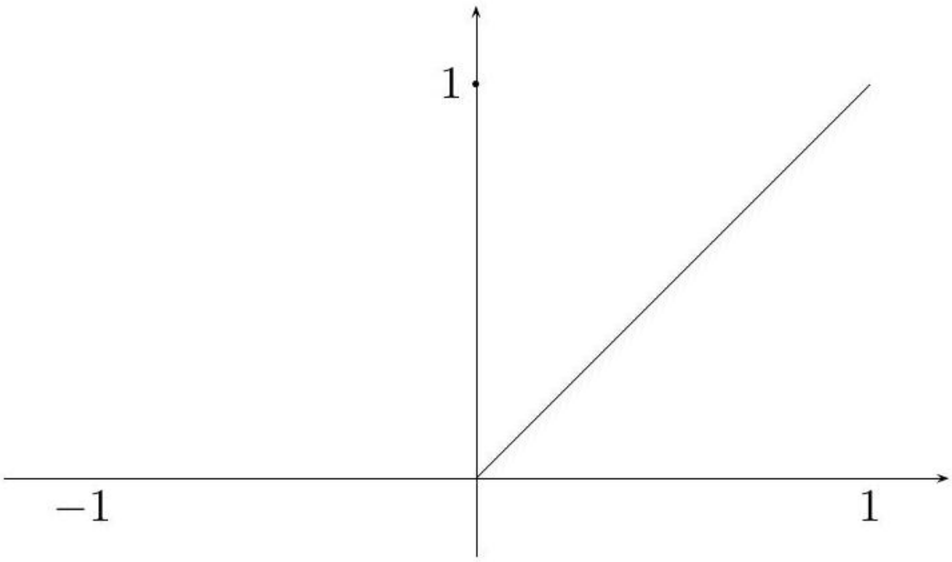
☞ **Remarque**
Il n'y a pas unicité d'un point c tel que $f'(c) = 0$.

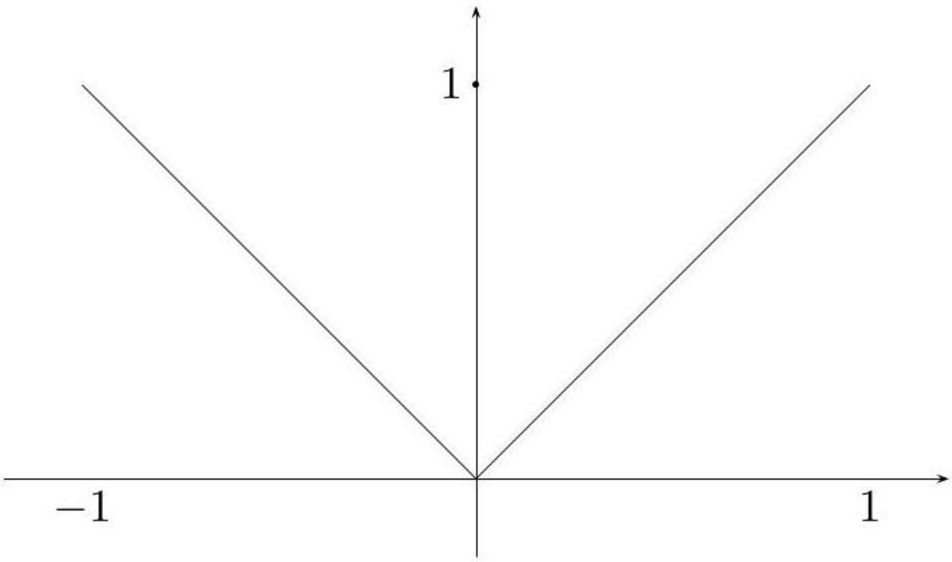




☞ **Remarque**

- La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ *nous donne un exemple de situation où* f *n'est pas dérivable au bord.*
- *Le théorème n'est plus vrai si* f *n'est pas continue au bord comme le montre l'exemple de la fonction* f *définie par* $f(x) = x$ *sur* $]0, 1]$ *et* $f(0) = 1$.
- *Le théorème n'est plus vrai si* f *n'est pas dérivable sur* $]a, b[$ *tout entier comme le montre l'exemple de la fonction* f *définie par* $f(x) = |x|$ *sur* $[-1,1]$.





Corollaire
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle réel I et à valeurs réelles telle que f' admette exactement $p \geq 0$ racines réelles distinctes, alors f a au plus $p+1$ racines réelles distinctes.

Démonstration. Si f a $p+2$ racines réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{p+2}$, le théorème de Rolle nous assure l'existence d'au moins une racine réelle sur chaque intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ pour k compris entre 1 et $p+1$, ce qui donne au moins $p+1$ racines distinctes pour f'.

Le théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable réelle est encore valable sur une demi-droite fermée. Précisément on a le résultat suivant.

Théorème 7 (Rolle) *Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$ avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, il existe alors un point $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Le changement de variable $t = e^{-x}$ nous ramène à un intervalle compact. On définit donc la fonction g sur $[0, e^{-a}]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(-\ln(t)) \text{ si } t \in]0, e^{-a}] \\ f(a) \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]0, e^{-a}]$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, on déduit qu'elle est continue en a. Elle est dérivable sur $]0, e^{-a}[$ avec $g'(t) = -\frac{f'(-\ln(t))}{t}$

Enfin avec $g(0) = g(e^{-a}) = f(a)$, on peut utiliser le théorème de Rolle sur $[0, e^{-a}]$ pour dire qu'il existe $d \in]0, e^{-a}[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = -\ln(d) \in]a, +\infty[$ est tel que $f'(c) = 0$.
On peut aussi utiliser la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(a + \tan(t)) \text{ si } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ f(a) \text{ si } t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} g(t) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, on déduit qu'elle est continue en $\frac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $g'(t) = \left(1 + \tan^2(t)\right) f'(a + \tan(t))$. Enfin avec $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(a)$, on peut utiliser le théorème de Rolle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour dire qu'il existe $d \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = a + \tan(d) \in]a, +\infty[$ est tel que $f'(c) = 0$.

On a également le résultat suivant pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Théorème 8 (Rolle) *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable avec $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, il existe alors un réel c tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Le changement de variable $t = \arctan(x)$ nous ramène à un intervalle compact.
On définit la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(\tan(t)) \text{ si } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \ell = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \text{ si } t = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim_{t \to \pm\frac{\pi}{2}} g(t) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, on déduit qu'elle est continue en $\pm\frac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $g'(t) = \left(1 + \tan^2(t)\right) f'(\tan(t))$. Le théorème de Rolle sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nous dit alors qu'il existe $d \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = \tan(d)$ est tel que $f'(c) = 0$.

La version itérée suivante du théorème de Rolle est souvent utile pour l'étude des racines de polynômes.

Théorème 9 (Rolle) *Si f est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^m$ sur un intervalle réel I, où m est un entier naturel, qui s'annule en $m+1$ points de I distincts, il existe alors un point c dans I tel que $f^{(m)}(c) = 0$.*

Démonstration. Si $m = 0$ le résultat est évident. On suppose donc que m est non nul.
Si a, b sont deux racines distinctes de f, le théorème de Rolle nous dit alors qu'entre ces deux racines il existe une racine de f'. On en déduit que la fonction f' admet m racines distinctes dans I. Une récurrence finie nous permet alors de montrer que la dérivée d'ordre m, $f^{(m)}$ admet au moins une racine dans I.

3.2 Quelques applications du théorème de Rolle

Exemple 3 *Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles non nulles, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, avec $f(a)g(b) = f(b)g(a)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.*
La fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec :

$$\begin{cases} h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ h(a) = h(b) \end{cases}$$

Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui équivaut à $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.
Pour g constante égale à 1 , on retrouve le théorème de Rolle classique.

Exemple 4 *Montrer que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, alors f a un point fixe dans $]0, 1[$.*
La fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x^2}{2}$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ avec $g(0) = g(1) = 0$. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui signifie $f(c) = c$.

Exemple 5 *On dit qu'un polynôme est scindé lorsqu'il est produit de polynômes de degré* 1. *Si* P *est un polynôme réel de degré* $n \geq 2$ *scindé sur* $\mathbb{R}$ *alors il en est de même de son polynôme dérivé.*
Précisément si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ *sont les racines réelles distinctes de* P *avec* $p \geq 2$*, la racine* λ_j *étant de multiplicité* $m_j \geq 1 \left(\sum_{j=1}^{p} m_j = n\right)$*, alors le polynôme dérivé* P' *admet les réels* λ_j *pour racines de multiplicités respectives* $m_j - 1$*, pour* $1 \leq j \leq p$ *(une multiplicité nulle signifie que* λ_j *n'est pas racine de* P'*) et des racines simples* $\mu_j \in \left]\lambda_j, \lambda_{j+1}\right[$ *pour* $1 \leq j \leq p-1$.
Pour $j \in \{1, \cdots, p\}$ *tel que* $m_j \geq 2$*,* λ_j *est racine d'ordre* $m_j - 1$ *du polynôme* P'*. Ce qui donne* $\sum_{j=1}^{p} \left(m_j - 1\right) = n - p$ *racines réelles pour* P'*. D'autre part, le théorème de Rolle nous dit que pour tout* j *dans* $\{1, \cdots, p-1\}$ *il existe* $\mu_j \in \left]\lambda_j, \lambda_{j+1}\right[$ *tel que* $\mathrm{P}'\left(\mu_j\right) = 0$*, ce qui donne* $p-1$ *racines réelles supplémentaires et distinctes pour* P'*. On a donc un total de* $n-1$ *racines réelles pour* P' *et les* μ_j *sont nécessairement simples.*
On peut remarquer que toutes les racines de P' *sont dans l'intervalle* $\left[\lambda_1, \lambda_p\right]$.
De manière plus générale, si P *est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors les racines du polynôme dérivé* P' *sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de* P *(théorème de Lucas).*

Exemple 6 *Soient* $n \geq 2, a, b$ *réels et* $\mathrm{P}(x) = x^n + ax + b$*. Montrer que si* n *est pair alors* P *a 0, 1 ou 2 racines réelles et si* n *est impair alors* P *a 1, 2 ou 3 racines réelles.*
Supposons n *pair. On a alors* $\mathrm{P}''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ *pour tout réel non nul* x *et* P' *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *de degré impair, elle s'annule donc une fois (théorème des valeurs intermédiaires) et une seule (* P' *est injective). Avec le théorème de Rolle on déduit alors que* P *s'annule au plus 2 fois.*
Supposons n *impair. Alors* P' *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0[$*, strictement croissante sur* $]0, +\infty[$*, avec* $\mathrm{P}'(0) = a$*. Il en résulte que* P' *a 2 racines réelles* $-\rho$ *et* $\rho > 0$ *si* $a < 0$*,* 0 *pour unique racine réelle si* $a = 0$ *et pas de racine réelle si* $a > 0$*. Avec la théorème de Rolle, on déduit alors que* P *a au plus 3 racines réelles. On sait qu'un polynôme réel de degré* n *a au plus* n *racines réelles sur un intervalle* I*. Plus généralement, on a le résultat suivant.*

Exemple 7 *Montrer que pour tout entier naturel* n *et toutes suites de réels* $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ *et* $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$*, les* a_k *étant non tous nuls et les* λ_k *deux à deux distincts, la fonction* f_n *définie par :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k}$$

a au plus n *racines réelles distinctes dans* $\mathbb{R}^{+,*}$*. On dit que la famille de fonctions* $\left(x^{\lambda_k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ *est un système de Tchebychev (ou système de Haar ou encore système unisolvent) dans* $\mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)$*.*
On procède par récurrence sur $n \geq 0$*.*
Pour $n = 0$*,* $f_0(x) = a_0 x^{\lambda_0}$ *n'a pas de racine dans* $\mathbb{R}^{+,*}$ *puisque a* a_0 *est non nul.*
Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 0$*. Si la fonction* $f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k}$ *a plus de* $n+1$ *racines distinctes dans* $\mathbb{R}^{+,*}$*, il en est alors de même de la fonction :*

$$g_{n+1}(x) = x^{-\lambda_j} f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k - \lambda_j}$$

où j *compris entre 0 et* $n+1$ *est choisi tel que* $a_j \neq 0$*. Le théorème de Rolle nous dit alors que la fonction dérivée :*

$$g'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\lambda_k - \lambda_j\right) a_k x^{\lambda_k - \lambda_j - 1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n+1} \left(\lambda_k - \lambda_j\right) a_k x^{\lambda_k - \lambda_j - 1}$$

a plus de n *racines distinctes dans* $\mathbb{R}^{+,*}$ *et en conséquence tous les* $\left(\lambda_k - \lambda_j\right) a_k$ *pour* $k \neq j$ *sont nuls (hypothèse de récurrence), ce qui entraîne* $f_{n+1}(x) = a_j x^{\lambda_j}$*, mais cette fonction ne s'annule jamais sur* $\mathbb{R}^{+,*}$*. On aboutit donc à une impossibilité.*

3.3 Le théorème de Darboux

On peut donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le théorème de Rolle.

Théorème 10 (Darboux) *Si f est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Démonstration. Soient $a < b$ dans I. Si $f'(a) = f'(b)$ il n'y a alors rien à montrer.
On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$ et on se donne $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On définit la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [a,b], \varphi(x) = f(x) - \lambda x.$$

Cette fonction est dérivable sur $[a,b]$ avec $\varphi'(a) < 0 < \varphi'(b)$ et en conséquence elle ne peut être monotone sur I (une fonction monotone dérivable sur un intervalle a une dérivée de signe constant). Le théorème 2.11 nous dit alors que φ n'est pas injective, c'est-à-dire qu'il existe $x < y$ dans I tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$ et le théorème de Rolle nous dit qu'il existe $c \in]x,y[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à $f'(c) = \lambda$.

4 Théorème et inégalité des accroissements finis

4.1 Énoncés

Le théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable réelle est équivalent au théorème des accroissements finis qui suit où $[a,b]$ est un intervalle non réduit à un point.

Théorème 11 (Égalité des accroissements finis) *Si f est une fonction définie sur $[a,b]$, à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe alors un point c dans $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Démonstration. On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle en considérant la fonction g définie sur $[a,b]$ par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$$

où la constante réelle λ est telle que $g(b) = g(a)$ (soit $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).
Le théorème de Rolle appliqué à la fonction g nous assure de l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui équivaut à $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
Cette formule est encore valable en permutant les rôles de a et b. L'hypothèse $a < b$ n'est donc pas essentielle.

On dispose aussi de la version suivante, un peu plus générale, du théorème des accroissements finis.

Théorème 12 (généralisé des accroissements finis) *Si f, g sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, il existe alors un point c dans $]a,b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.*

Démonstration. On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle en considérant la fonction h définie sur $[a,b]$ par :

$$h(x) = \lambda g(x) - \mu f(x)$$

où les constantes réelles λ, μ sont choisies telles que $h(a) = h(b)$, soit $\lambda g(a) - \mu f(a) = \lambda g(b) - \mu f(b)$, ou encore $\lambda(g(b) - g(a)) = \mu(f(b) - f(a))$. On peut prendre $\lambda = f(b) - f(a)$ et $\mu = g(b) - g(a)$.
Le théorème de Rolle appliqué à la fonction h nous assure de l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $h'(c)$, ce qui équivaut à $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
Prenant $g(x) = x$, on retrouve le théorème classique des accroissements finis.

Avec l'exercice qui suit, on propose une version un peu plus générale du théorème des accroissements finis.

Exemple 8 *Soient* $(f_k)_{1\le k\le n}$ *et* $(g_k)_{1\le k\le n}$ *deux familles de fonctions à valeurs réelles, continues sur* $[a,b]$*, dérivables sur* $]a,b[$ *et telles que* $g_k(a) \neq g_k(b)$ *pour tout* k *compris entre 1 et* n*. Monter qu'il existe un réel* c *dans* $]a,b[$ *tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k'(c) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(c)\frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}$$

On considère la fonction φ *définie sur* $[a,b]$ *par :*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(x) - f_k(a) - \lambda_k\left(g_k(x) - g_k(a)\right)\right)$$

où les constantes λ_k *sont choisies telles que* $\varphi(a) = \varphi(b)$*. On peut prendre :*

$$\lambda_k = \frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)} \quad (1 \le k \le n)$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$ *avec* $\varphi(a) = \varphi(b)$*. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel* c *dans* $]a,b[$ *tel que* $\varphi'(c)$*, ce qui donne le résultat annoncé.*

Le théorème des accroissements finis n'est pas valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \ge 2$) comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$. Toutefois on a le résultat suivant :

Théorème 13 (Inégalité des accroissements finis) *Si* f *est une fonction définie sur* $[a,b]$*, à valeurs dans* $\mathbb{C}$*, continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*, il existe alors un point* $c \in]a,b[$ *tel que* $|f(b) - f(a)| \le |f'(c)|(b-a)$*.*

Démonstration. Pour alléger les notations, on note $\delta = f(b) - f(a)$. On se ramène au cas des fonctions à valeurs réelles en introduisant la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = \mathfrak{Re}\,(f(x)\delta) = \frac{1}{2}\left(f(x)\overline{\delta} + \overline{f(x)}\delta\right)$.
Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $g'(x) = 2\mathfrak{Re}\,(f'(x)\delta)$. Le théorème des accroissements finis nous assure de l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$|f(b) - f(a)|^2 = g(b) - g(a) = (b-a)\mathfrak{Re}\left(f'(c)\delta\right)$$

puis avec l'inégalité partie réelle/module, on déduit que :

$$|f(b) - f(a)|^2 \le (b-a)\left|f'(c)\right||f(b) - f(a)|$$

ce qui entraîne $|f(b) - f(a)| \le \left|f'(c)\right|(b-a)$.

Dans le cas où la fonction dérivée f' est bornée sur $]a,b[$, en notant M une borne de cette fonction, on a, pour tout couple (x,y) de points de $[a,b]$:

$$\|f(y) - f(x)\| \le \mathrm{M}|y-x|$$

c'est-à-dire que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.
Réciproquement si f est M-lipschitzienne sur $[a,b]$, f' est alors majorée par M sur $]a,b[$.
Comme le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis est important pour ses nombreuses applications.
Les intervalles considérés sont supposés non réduit à un point.

4.2 Sens de variation d'une fonction

Théorème 14 *Si* f *est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle réel* I*, alors* f *est croissante sur* I *si, et seulement si,* $f'(x) \ge 0$ *pour tout* x *dans* I*.*

Démonstration. Si f est croissante sur I alors pour $x \neq y$ dans I le taux d'accroissement $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est positif ou nul et en passant à la limite quand y tend vers x, on déduit que $f'(x) \ge 0$. Réciproquement si $f'(x) \ge 0$ pour tout x dans I, en utilisant le théorème des accroissements finis on déduit alors que pour tout $y > x$ dans I on a $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x) \ge 0$.
Si le théorème de Rolle n'est pas lié à la connexité de l'intervalle $[a,b]$ on peut remarquer que le résultat précédent l'est.
Si on considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) > 0$ et f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$

Du théorème précédent, on déduit les résultats classiques suivants.

Corollaire
Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle réel I.

1. *La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \leq 0$ pour tout x dans* I.
2. *La fonction f est constante sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout x dans* I.
3. *Si $f'(x) > 0$ [resp. $f'(x) < 0$] pour tout x dans* I*, alors la fonction f est strictement croissante [resp. strictement décroissante] sur I.*
4. *Si $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x dans $\mathrm{I} = [a, b]$, alors :*
$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a).$$
5. *Si $m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$ pour tout x dans $\mathrm{I} = [a, b]$, alors :*
$$\forall x \in [a, b], m(x-a) \leq f(x) - f(a) \leq \mathrm{M}(x-a).$$

Démonstration. 1. On applique le théorème précédent à la fonction $-f$.

2. Si $f' = 0$, alors la fonction f est à la fois croissante et décroissante, donc constante. La réciproque est évidente.
3. Si $f'(x) > 0$ pour tout x dans I, on sait déjà que la fonction f est croissante. Si il existe $a < b$ dans I tels $f(a) = f(b)$, on a alors :
$$\forall x \in [a, b], f(a) \leq f(x) \leq f(b) = f(a)$$

et la fonction f est constante sur $[a, b]$ d'intérieur non vide ce qui entraîne $f' = 0$ sur $[a, b]$ en contradiction avec $f' > 0$.

4. Résulte de la croissance de la fonction $h = g - f$.
5. On applique ce qui précède à (mx, f) et $(f, \mathrm{M}x)$.

On peut remarquer que le point 3. de ce corollaire implique le théorème précédent. Les deux résultats sont donc équivalents. En effet, en notant, pour tout réel $m > 0, g_m(x) = f(x) + m$, l'hypothèse $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I entraîne $g'_m(x) > 0$ pour tout x dans I, donc g_m est strictement croissante et pour $x < y$ dans I, on a $f(x)+m < f(y)+m$ pour tout $m > 0$ ce qui entraîne $f(x) \leq f(y)$ en faisant tendre m vers 0 .

4.3 Limites et dérivation

Théorème 15 (Limite de la dérivée) *Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[\setminus \{c\}$ où c est un point de $]a, b[$. Si la fonction dérivée f' a une limite ℓ en c, alors f est dérivable en c avec $f'(c) = \ell$.*

Démonstration. Comme $c \in]a, b[$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $]c-\delta, c+\delta[\subset]a, b[$.
Pour tout $x \in]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\}$ il existe un réel d_x strictement compris entre c et x tel que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(d_x)$ et avec $\lim_{x\to c} d_x = c, \lim_{t\to c} f'(t) = \ell$, on déduit que :
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} f'(d_x) = \ell$$
c'est-à-dire que f est dérivable en c avec $f'(c) = \ell$.
On peut remarquer que la fonction f' est également continue en c.

Exemple 9 *Montrer que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n.*

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*, \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, elle est donc dérivable en 0 de dérivée nulle et f' est continue sur $\mathbb{R}$. En supposant, pour $n \geq 1$, que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0, f^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, où P_n est une fonction polynomiale de degré $3n$, on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec :
$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\mathrm{P}'_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \mathrm{P}_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

le polynôme P_{n+1} *étant de degré* $3n+3$. *Puis avec* $\lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$, *on déduit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f^{(n+1)}(0) = 0$.
On dispose ainsi d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ *qui n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 .*

Théorème 16 (L'Hospital) *Soient* f, g *deux fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle ouvert* I, *dérivables sur* $I \setminus \{c\}$ *avec* $g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I \setminus \{c\}$ *où* $c \in I$. *Si* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, *on a alors* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \ell$.

Démonstration. De $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I \setminus \{c\}$ on déduit avec le théorème des accroissements finis que $g(x) \neq g(c)$ pour tout $x \in I \setminus \{c\}$.
Le théorème des accroissements finis généralisé appliqué aux fonctions f, g sur l'intervalle compact d'extrémités x, c, où $x \in I \setminus \{c\}$ permet d'écrire $\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(d_x)}{g'(d_x)}$ avec d_x strictement compris entre x et c. Puis avec $\lim_{x\to c} d_x = c, \lim_{t\to c} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$, on déduit que :

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(d_x)}{g'(d_x)} = \ell$$

Si f, g sont dérivables en c avec $g'(c) \neq 0$ la règle de l'Hospital n'est pas utile. Il suffit en effet d'écrire que :

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \frac{x-c}{g(x)-g(c)}$$

et d'utiliser la définition du nombre dérivé.

☞ Remarque
La réciproque du théorème précédent est fausse. Considérons par exemple la fonction f *définie par* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *sur* $\mathbb{R}^*$, *prolongé par continuité en 0 et la fonction* g *définie par* $g(x) = x$ *sur* $[-1, 1]$. *La fonction* f *est dérivable avec* $f'(0) = 0, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *pour* $x \neq 0$. *On a* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ *et* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *n' a pas de limite en 0 .*

5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Opérations sur les fonctions de classe C^k. Formule de Leibniz, quotient, composition, réciproque.