Exercices : Ils porteront sur les séries entières.

Cours

Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours.

Fonctions vectorielles

Cette section a deux objectifs :
- *étendre rapidement le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction en termes de coordonnées dans une base.
Dérivabilité à droite et à gauche.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. ($\star$) Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire.	
($\star$) Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est multilinéaire.	Cas du produit scalaire, du déterminant.
($\star$) Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$.	Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. ($\star$) Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\displaystyle\left\lVert\int_a^b f\right\rVert \leqslant \int_a^b \lVert f\rVert$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	

d) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	

e) Formules de Taylor

Contenus	Capacités & Commentaires
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	

Variables aléatoires discrètes

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

a) Ensembles dénombrables

Contenus	Capacités & commentaires
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	($\star$) Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
($\star$) Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. ($\star$) Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	($\star$) Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. ($\star$) Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.

Contenus	Capacités & Commentaires
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.

b) Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. Événements.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme. Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.	
($\star$) Continuité croissante, continuité décroissante.	($\star$) Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
($\star$) Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année : ($\star$) probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. Famille d'événements indépendants.	Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A \mid B) = P(A)$. L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	

d) Espaces probabilisés discrets

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
($\star$) Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	($\star$) Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.