Ipesup 2022/2023

Kholle 1 filière MPSI/MP2I
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Démontrer que $\mathbb{C}$ vérifie la règle du produit nul.
2. Démontrer la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2+1}$$

3. Pour tout complexe z, on note $M(z)$ le point du plan d'affixe z. Déterminer l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^* | M(z), M(z^2), M(1/z) \text{ sont alignés }\}$$

★★★

⋆⋆⋆

1. Donner la définition de la différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E. En donner deux expressions à l'aide d'unions, intersections, différences et les démontrer.
2. Soit z un complexe non nul.
   (a) Montrer que $\{r \in \mathbb{C} | r^2 = z\}$ possède exactement deux éléments.
   (b) En notant p et q ces deux éléments, à quelle condition nécessaire et suffisante, les points M, P, Q d'affixes respectifs z, p et q forment-ils une triangle rectangle en M ?
3. Soit a un réel. On considère le complexe
$$z = 8a^2 - (1+a^2)^2 + 4ia(1-a^2)$$
   Déterminer ses racines quatrièmes.

⋆⋆⋆

★★★

1. Donner la définition de e^{it} pour tout réel t et démontrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia+ib} = e^{ia}e^{ib}$$

2. Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
   (a) Déterminer l'ensemble
   $$\{X \in \mathcal{P}(E) | X \cap A = B\}$$
   (b) Déterminer l'ensemble
   $$\{X \in \mathcal{P}(E) | X \cup A = B\}$$

3. Déterminer une expression de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ à l'aide de radicaux. En déduire les racines carrées de $1+i$ sous forme algébrique.

★★★

★★★

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Théorème de Von Aubel. Soit A, B, C, D un quadrilatère convexe. On construit extérieurement à ce quadrilatère quatre carrés s'appuyant sur ses côtés. On note P, Q, R et S les centres de ces carrés ainsi construits. Montrer que le quadrilatère $PQRS$ a ses diagonales orthogonales et de même longueur.
2. Soit α un complexe. A quelle condition nécessaire et suffisante sur α les solutions de l'équation
$$z^2 - (2 + i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0$$
d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont-elles conjuguées ? Déterminer ces solutions lorsque c'est le cas.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$
   (a) $z^3 = -16\overline{z}^7$
   (b) $z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0$.

★★★