IPESUP 2022/2023

Kholle 23 filière MPSI/MP2I
Jeudi 04 mai 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
2. On note $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z)$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{3}u$ est une symétrie vectorielle, donner ses sous-espaces invariants et anti-invariants.
   (b) Démontrer que u est inversible et donner sa réciproque u^{-1}.
3. Soit $\alpha > 1$, on pose pour tout entier n, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Formule de stirling.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang 1. Démontrer qu'il existe un vecteur v non nul et une forme linéaire non nulle φ tels que $\forall x \in E, u(x) = \varphi(x)v$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   Démontrer que $\sum u_n$ est convergente lorsque $\alpha > 1$ et divergente lorsque $\alpha < 1$.
   Indication : étudier la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n n^\alpha$.

★★★

Planche 3

★★★

1. Comparaison série-intégrale.
2. On considère une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait qu'il existe une matrice A telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ avec Tr la forme linéaire trace. On suppose de plus que $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \varphi(MN) = \varphi(NM)$. Montrer qu'alors, il existe un scalaire λ dans $\mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$.
3. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Démontrer que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$ est convergente.

   Indication : Commencer par démontrer que la suite $(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'application $u^T : E^* \to E^*, \varphi \to \varphi \circ u$ est linéaire, puis que $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E^*), u \mapsto u^T$ est linéaire.
2. On suppose E de dimension finie. Démontrer que l'application $E \to E^{**}, x \mapsto \widehat{\widehat{x}} : E^* \to \mathbb{K}, \varphi \mapsto \varphi(x)$ est un isomorphisme.

⋆⋆⋆