Kholle 21 filière MP*
Planche 1

⋆⋆⋆

1. Théorème d'optimisation sous contrainte.
2. On considère l'ensemble

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$$

   (a) Donner l'ensemble des ses tangentes.
   (b) Pour tout réel t, déterminer l'intersection $C \cap \mathrm{Vect}(1,t)$. En déduire un dessin de C et une droite asymptote de C.
3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$. On note

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, MM^T = I_n \wedge \det(M) = 1\}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(M) = 1\}$$

   Montrer que les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont les éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

⋆⋆⋆

Kholle 21 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
2. (a) Montrer que $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ est convexe.

   (b) Soit $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a < b$, puis $F = \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) | f(a) = \alpha \wedge f(b) = \beta\}$. Montrer que

$$\min_{f \in F} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

   est atteint par la seule fonction affine qui appartient à F.
3. Dans $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne classique, on considère $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^n | X^T AX = 1\}$. Étudier les extrema de $\mathcal{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|^2$.

★★★

Kholle 21 filière MP*
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Condition suffisante de minimum local strict à l'aide de la Hessienne.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + y^4/4$. Déterminer ses extrema locaux et globaux.
3. Soit $G = O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal. Déterminer ses espaces tangents.

⋆⋆⋆