Correction 1.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à construire à un réel positif δ vérifie la suite de la propriété (C) pour la fonction g. Or pour tout réel positif a, pour tout réel x, $|x| \leq a$ implique par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $|x|^2 \leq a^2$. Par conséquent, si l'on pose $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Pour tout réel x tel que $|x| \leq \sqrt{\varepsilon}$, $|x|^2 \leq \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$. Comme $|x|^2 = |x^2|$ et $|0| = 0$, on synthétise le tout en

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$$

   Ainsi, l'application g vérifie la propriété (C).

2. Procédons pas à pas.

$$\begin{aligned}\neg C &\sim \exists \varepsilon > 0, \neg(\exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon) \\ &\sim \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \neg(\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon) \\ &\sim \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \neg(|x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon)\end{aligned}$$

   Rappelons que l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(\neg P) \vee Q$. Par conséquent, $\neg(P \Rightarrow Q) \sim \neg((\neg P) \vee Q) \sim (\neg\neg P) \wedge (\neg Q) \sim P \wedge (\neg Q)$. Ainsi,

$$\neg(|x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon) \sim (|x| \leq \delta) \wedge \neg(|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon) \sim (|x| \leq \delta) \wedge (|f(x) - f(0)| > \varepsilon)$$

   En conclusion, la négation logique de la propriété (C) donne

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x| \leq \delta) \wedge (|f(x) - f(0)| > \varepsilon)$$

3. On remarque tout d'abord que $h(0) = 1$, et que pour tout réel x positif $h(x) - h(0) = 0$. On va donc s'intéresser au comportement de h sur $\mathbb{R}^{-*}$. Pour tout réel x strictement négatif, $|h(x) - h(0)| = |-1-1| = 2 > 1$. Un bon candidat pour ε dans la négation de (C) est alors 1. Fixons ce choix $\varepsilon = 1$ et démontrons la suite de la négation de (C). Soit δ un réel strictement positif. On cherche à construire un réel x tel que $|x| \leq \delta$ et $|h(x) - h(0)| > 1$. On choisit alors $x = -\delta$. Celui-ci vérifie $|x| = |-\delta| = \delta \leq \delta$ puisque δ est positif. D'après les remarques précédentes, comme x est strictement négatif, il vérifie également $|h(x) - h(0)| = 2 > 1 = \varepsilon$. Ainsi, h vérifie la négation de (C), i.e h ne vérifie pas la propriété (C).

Correction 2.

1. Soit z un complexe. On note a sa partie réelle et b sa partie imaginaire. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}z + |z|^2 = 1 + i &\iff a + ib + a^2 + b^2 = 1 + i \\ &\iff (a + a^2 + b^2 = 1) \wedge (b = 1)\end{aligned}$$

   Comme $a + a^2 + b^2$ et b sont réels, la dernière équivalence est valable car on sait que deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont respectivement égales. On poursuit les équivalences

$$\begin{aligned}z + |z|^2 = 1 + i &\iff (b = 1) \wedge (a + a^2 = 0) \\ &\iff (b = 1) \wedge (a(a+1) = 0) \\ &\iff (b = 1) \wedge [(a = 0) \vee (a = -1)] \\ &\iff [(b = 1) \wedge (a = 0)] \vee [(b = 1) \wedge (a = -1)] \\ &\iff (z = i) \vee (z = -1 + i)\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des complexes z vérifiant l'égalité souhaitée vaut $\{i, -1 + i\}$.

2. L'expression indiquée n'a de sens que pour z distinct de i. On considère alors un complexe z distinct de i, ce qui assure l'équivalence

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1 \iff |z+i| = |z-i|$$

Comme les modules de complexes sont des réels positifs, ils sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux. Ainsi

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1 \iff |z+i|^2 = |z-i|^2$$

En notant a la partie réelle de z et b sa partie imaginaire, on a alors

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1 \iff a^2+(b+1)^2 = a^2+(b-1)^2 \iff a^2+b^2+2b = 1 = a^2+b^2-2b+1 \iff b = 0$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation indiquée est l'ensemble des complexes de partie imaginaire nulle, i.e l'ensemble des réels, puisque celui-ci ne contient pas i.

3. Je propose de procéder par analyse-synthèse ici.

Phase d'analyse : Soit z un complexe vérifiant $\mathfrak{Im}(z^3+z) = 0$. Je note a sa partie réelle et b sa partie imaginaire. Alors

$$z^3 = (a+ib)^3 = a^3+3a^2(ib)+3a(ib)^2-ib^3 = a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3)$$

Ainsi,

$$z^3+z = a^3-3ab^2+a+i(3a^2b-b^3+b)$$

Comme a^3-3ab^2+a et $3a^2b-b^3+b$ sont réels, on a bien identifié les parties réelles et imaginaires de z^3+z. L'égalité $\mathfrak{Im}(z^3+z) = 0$ implique alors $3a^2b-b^3+b = 0$, soit

$$b(3a^2-b^2+1) = 0$$

La régle du produit nul implique alors $b = 0$ ou $b^2 = 1+3a^2$, soit $b = 0$, $b = \sqrt{1+3a^2}$ ou $b = -\sqrt{1+3a^2}$.

Phase de synthèse : Premier cas. Soit a un réel et $z = a+i0 = a$. Comme z est réel, z^3 est également réel, tout comme z^3+z, donc $\mathfrak{Im}(z^3+z) = 0$.

Deuxième cas. Soit a un réel et $z = a+i\sqrt{1+3a^2}$ qui est bien défini puisque $1+3a^2$ est un réel positif. Alors d'après les mêmes calculs qu'en phase d'analyse,

$$\mathfrak{Im}(z^3+z) = 3a^2\sqrt{1+3a^2}-\sqrt{1+3a^2}^3+\sqrt{1+3a^2} = \sqrt{1+3a^2}\left(3a^2-(1+3a^2)+1\right) = 0$$

Troisième cas. Soit a un réel $z = a-i\sqrt{1+3a^2}$ qui est bien défini puisque $1+3a^2$ est un réel positif. Les mêmes calculs que précédemment donnent

$$\mathfrak{Im}(z^3+z) = -3a^2\sqrt{1+3a^2}+\sqrt{1+3a^2}^3-\sqrt{1+3a^2} = -\sqrt{1+3a^2}\left(3a^2-(1+3a^2)+1\right) = 0$$

En conclusion,

$$\left\{z\in\mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z^3+z) = 0\right\} = \mathbb{R}\cup\left\{a+i\sqrt{1+3a^2} \mid a\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{a-i\sqrt{1+3a^2} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$$

4. Le complexe $-1+i$ a pour module $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. On peut rechercher un argument de complexe non nul en cherchant un réel θ tel que $\cos(\theta) = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$ et $\sin(\theta) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Il suffit alors de choisir $\theta = 3\pi/4$ pour résoudre ces égalités (s'aider d'un dessin si besoin). La résolution de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$, $\exp(z) = \sqrt{2}\exp(i3\pi/4)$ peut alors être directement menée via un résultat du cours.

$$\{z\in\mathbb{C} | \exp(z) = -1+i\} = \left\{\ln(\sqrt{2})+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right) | k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\ln(2)+i\left(\frac{3}{4}+2k\right)\pi | k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Correction 3.

1. Soit x un réel. Alors

$$\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1}{2}\\ &\iff \left(x-\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right) \vee \left(x-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]\right)\\ &\iff \left(x \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]\right) \vee \left(x \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]\right)\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des réels x vérifiant l'égalité attendue vaut

$$\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi | k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi | k\in\mathbb{Z}\right\}$$

2. Soit x un réel. Alors on a l'équivalence

$$|\cos(2x)-i\sin(x)+1| \leq 1 \iff |\cos(2x)-i\sin(x)+1|^2 \leq 1$$

L'implication de gauche vers la droite (le sens « direct ») découle de la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ puisque le module est un réel positif, tout comme le réel 1. L'implication de gauche vers la droite (le sens « indirect ») découle de la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ et on rappelle que $\sqrt{y^2} = y$ pour tout réel y positif. Étudions alors la quantité $|\cos(2x)-i\sin(x)+1|^2$. On a

$$|\cos(2x)-i\sin(x)+1|^2 = |1+\cos(2x)-i\sin(x)|^2 = |2\cos^2(x)-i\sin(x)|^2 = 4\cos^4(x)+\sin^2(x) = 4\cos^4(x)-\cos^2(x)+1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|\cos(2x)-i\sin(x)+1| \leq 1 &\iff 4\cos^4(x)-\cos^2(x)+1 \leq 1\\ &\iff \cos^2(x)\left(4\cos^2(x)-1\right) \leq 0\\ &\iff 4\cos^2(x)-1 \leq 0\end{aligned}$$

Cette dernière équivalence est plus subtile qu'il n'y paraît. Comme $\cos^2(x)$ est un réel positif comme carré de réel, la multiplication par $\cos^2(x)$ ne change pas le signe de l'inégalité, ce qui donne le sens indirect. L'autre sens passe par la multiplication par $1/\cos^2(x)$, ce qui n'est possible que lorsque $\cos^2(x)$ est non nul. Mais dans le cas où cette quantité est nulle, on remarque que $4\times 0-1 \leq 0$, donc que l'équivalence est encore vérifiée. On poursuit le raisonnement par équivalences :

$$\begin{aligned}|\cos(2x)-i\sin(x)+1| \leq 1 &\iff \cos^2(x) \leq \frac{1}{4} \quad \text{puisque } 4>0\\ &\iff |\cos(x)| \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Attention à la valeur absolue, on n'a pas de garantie que $\cos(x)$ est positif. La résolution de cette dernière inégalité est connue via les variations du cosinus. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inégalité vaut

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]\right)$$

Correction 4.

1. Procédons par analyse-synthèse.

   Phase d'analyse : Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Dans un premier cas, on examine si la suite peut s'annuler, ce qui qui correspond à la suite nulle sauf son premier terme. Alors $\cos(2^0x) = 0$, soit encore $\cos(x) = 0$, ce qui entraîne $x \equiv \pi/2[\pi]$. Dans un deuxième cas, on suppose qu'elle est géométrique et ne s'annule pas. Alors, en particulier, $\cos(2x) = \cos(x)$, donc $2\cos^2(x)-\cos(x)-1 = 0$, donc $\cos(x)$ est racine du polynôme $P(X) = 2X^2-X-1 = 2(X-1)(X+1/2)$, donc $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1/2$, soit $x \equiv 0[2\pi]$ ou $x \equiv 2\pi/3[2\pi]$ ou $x \equiv -2\pi/3[2\pi]$.

   Phase de synthèse : Si $x \equiv \pi/2[\pi]$, alors $u_1 = 0$ et tous les termes de la suite s'annulent sauf u_0. On a bien alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0^n$ ce qui en fait une suite géométrique. Si $x \equiv 0[2\pi]$, alors pour tout entier n, $2^nx \equiv 0[2\pi]$ donc, $\cos(2^nx) = 1$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison 1. Si $x \equiv 2\pi/3[2\pi]$, alors $\cos(x) = -1/2$, et pour tout entier n, $\cos(2^{n+1}x) = 2\cos^2(2^nx)-1$. Or, $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1 = \frac{2}{4}-1 = -\frac{1}{2}$. Il s'ensuit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(2^nx) = -1/2$ dans ce cas, donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $-1/2$. Le dernier cas $x \equiv -2\pi/3[2\pi]$ découle de la parité du cosinus et on trouve de la même façon que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-1/2$.

2. Démontrons la propriété attendue par récurrence. Pour $n = 0$, $2^0u_0\sin(x) = 1\times1\times\sin(x) = \sin(x)$. D'autre part, $\sin(2^0x) = \sin(1\times x) = \sin(x)$, ce qui prouve l'initialisation. Considérons à présent un entier n tel que l'égalité est vérifiée et démontrons qu'elle est encore vérifiée au rang $n+1$. D'après la définition par récurrence de la suite u, on a

   $$2^{n+1}u_{n+1}\sin(x) = 2^n2\cos(2^nx)u_n\sin(x) = 2\cos(2^nx)2^nu_n\sin(x)$$

   Mais alors l'hypothèse de récurrence au rang n assure que $2^nu_n\sin(x) = \sin(2^nx)$. On en déduit que

   $$2^{n+1}u_{n+1}\sin(x) = 2\cos(2^nx)\sin(2^nx) = \sin(2(2^nx)) = \sin\left(2^{n+1}x\right)$$

   Ainsi, la propriété souhaitée est héréditaire et valide pour tout entier n par récurrence.

3. Pour tout entier n, la valeur absolue de l'égalité précédente entraîne

   $$2^n|u_n||\sin(x)| = |\sin(2^nx)| \leq 1$$

   d'après les variations du sinus. Avant de diviser par $|\sin(x)|$, on doit s'assurer qu'il est non nul. Distinguons alors deux cas.

   — Premier cas : $\sin(x) = 0$. Cette égalité est équivalente à $x \equiv 0[2\pi]$ et on a vu en première question qu'alors la suite étudiée est géométrique de raison 1, donc constante. Comme son premier terme vaut 1, elle est constante égale à 1, donc convergente de limite 1.

   — Deuxième cas $\sin(x) \neq 0$. Alors on peut diviser l'inégalité précédente par $2^n|\sin(x)|$ qui est un réel strictement positif, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité. On en déduit que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{1}{2^n|\sin(x)|}$$

   Le majorant de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit par théorème d'encadrement que la suite u est convergente, de limite nulle.

Correction 5.

1. L'inégalité triangulaire s'écrit

   $$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

Pour la démontrer, on exprime $|z_1+z_2|^2$ via

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{z_1+z_2}\\ &= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2})\end{aligned}$$

Or, on sait que $\forall z\in\mathbb{C}, \mathfrak{Re}(z)\leq|\mathfrak{Re}(z)|\leq|z|$. Ainsi,

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$$

Comme $|z_1+z_2|$ et $|z_1|+|z_2|$ sont des réels positifs, on en déduit par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ que

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

2. On produit un calcul très similaire à celui qui précède

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2 &= (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\ &= z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2})\end{aligned}$$

On exploite alors les formes trigonométriques $z_1=|z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2=|z_2|e^{i\theta_2}$, ce qui entraîne

$$\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2}) = \mathfrak{Re}\left(|z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{-i\theta_2}\right) = |z_1||z_2|\mathfrak{Re}\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right) = |z_1||z_2|\cos(\theta_1-\theta_2)$$

Ainsi,

$$|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos(\theta_1-\theta_2)$$

3. L'égalité précèdente entraîne pour tous (i,j) dans $[\![1,12]\!]$, comme les complexes considérés sont tous de module 1,

$$|z_i-z_j| = 2(1-\cos(\theta_i-\theta_j))$$

en notant pour tout i dans $[\![1,12]\!]$, θ_i un argument de z_i dans $[0,2\pi[$. En découpant le disque unité en 12 secteurs angulaires, on distingue alors deux cas.

— Deux complexes se trouvent dans le même secteur angulaire. Il existe deux entiers distincts i et j entre 1 et 12 tels que $|\theta_i-\theta_j|\leq\dfrac{2\pi}{12}=\pi/6$. Alors $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leq\cos(\theta_i-\theta_j)$ par décroissance du cosinus sur $[0,\pi/6]$ et parité. Par conséquent,

$$2(1-\cos(\theta_i-\theta_j))\leq 2-\sqrt{3}\leq 1$$

Ainsi, $|z_i-z_j|\leq 1$.

— Chaque secteur angulaire contient exactement un complexe parmi les complexes $z_1,\dots,z_{12}$. Notons i l'unique entier tel que z_i appartient au secteur angulaire $0\leq\theta\leq 2\pi/12$, et j l'unique entier tel que z_j appartient au secteur angulaire $2\pi/12<\theta\leq 4\pi/12$. On en déduit que $|\theta_i-\theta_j|\leq 4\pi/12=\pi/3$. Toujours par décroissance du cosinus sur $[0,\pi/3]$, $\cos(\theta_i-\theta_j)\geq\cos(\pi/3)=1/2$. On en déduit que

$$|z_i-z_j|^2\leq 2-1=1$$

Correction du problème.

1. Manipulations de fonctions indicatrices.

(a) Supposons que $A = \emptyset$, alors $\forall x \in E, x \notin A$, donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Ceci prouve le sens direct. Réciproquement, supposons que pour tout élément x de E, $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Alors, A ne contient élément de E, c'est donc l'ensemble vide $\emptyset$.

(b) On propose de démontrer l'expression $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$. Soit x un élément de E. Faisons une distinction de cas.

— Si x appartient à A, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$, tandis que $x \notin A^c$ et $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 0$, ce qui assure que $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

— Si x n'appartient pas à A, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$, tandis que $x \in A^c$ et $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1$, ce qui entraîne que $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

L'égalité est prouvée dans tous les cas.

(c) Soit x un élément de E. On distingue alors quatre cas.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \notin A \cap B$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$	$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \notin A \cap B$	$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \notin A \cap B$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$

On constate qu'il y a bien égalité dans tous les cas, donc que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

(d) La propriété indiquée est fausse dès que A et B sont d'intersection non vide. En effet, si c'est le cas, il existe un élément x dans $A \cap B$. Cet élément appartient a fortiori à A, à B et $A \cup B$. Ainsi,

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = 1 + 1 = 2$$

tandis que

$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 \neq 2$$

Il n'y a donc pas égalité entre $\mathbb{1}_{A\cup B}$ et $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

(e) Supposons que $A \subset B$. Soit x un élément de E. Alors si x appartient A, x appartient à B, et on a $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leq 1 = \mathbb{1}_B(x) = 1$. Si x n'appartient pas à A, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leq 0$ donc à toute valeur possiblement prise par $\mathbb{1}_B(x)$, i.e $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$. Réciproquemet, supposons que $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$ et démontrons l'inclusion indiquée. Soit x un élément de A. Alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. D'après l'inégalité supposée, on a alors $\mathbb{1}_B(x) \geq 1$. Comme une fonction indicatrice ne prend ses valeurs que dans $\{0, 1\}$, on en déduit que $\mathbb{1}_B(x) = 1$, donc que x appartient à B. On a ainsi démontré que A est inclus dans B.

2. Différences symétriques.

(a) On remarque que $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$, donc que $A\Delta A = (A \cup A)\backslash(A \cap A) = A\backslash A = \emptyset$.

(b) On chercher à démontrer que $A\Delta(A^c) = E$. Pour cela, on remarque $A \cup A^c = E$ (tout élément x de E appartient soit à A ou au complémentaire de A), et que $A \cap A^c = \emptyset$ (un élément de x de E ne peut simultanément appartenir à A et ne pas lui appartenir). Ainsi,

$$A\Delta(A^c) = (A \cup A^c)\backslash(A \cap A^c) = E\backslash\emptyset = E$$

(c) Soit x un élément de E. Comme en question 1.c), on distingue quatre cas. Afin d'alléger l'écriture du tableau, on note f l'application $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

$x \in A$	$x \in B$	$x \notin A\Delta B$	$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$f(x) = 1 + 1 - 2 \times 1 = 0$	$\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 0$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \in A\Delta B$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$	$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$f(x) = 0 + 1 - 2 \times 0 = 1$	$\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 1$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \in A\Delta B$	$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$	$f(x) = 1 + 0 - 2 \times 0 = 1$	$\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 1$
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \notin A\Delta B$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$	$f(x) = 0 + 0 - 2 \times 0 = 0$	$\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 0$

On constate qu'il y a bien égalité dans tous les cas de figure, donc que

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - 2\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$$

(d) L'addition et la multiplication dans les réels ont le bon goût de satisfaire à des propriétés d'associativité, de distributivité et de commutativité. L'égalité des fonctions indicatrices précédente permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} &= \mathbb{1}_{A\Delta B} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$

On mène un calcul similaire pour l'autre partie considérée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\Delta C} - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C) + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$

Ainsi, les indicatrices de ces deux parties sont égales. Par conséquent, d'après la question 1.e), l'inégalité $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} \leq \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$ implique l'inclusion $(A\Delta B)\Delta C \subset A\Delta(B\Delta C)$. De même, l'inégalité $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} \leq \mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$ implique $A\Delta(B\Delta C) \subset (A\Delta B)\Delta C$. Cette double inclusion prouve l'égalité souhaitée.

(e) Cette égalité est fausse dès que A, B et C sont d'intersection non vide. Dans ce cas, considérons un élément x de $A \cap B \cap C$. Alors x appartient a fortiori à $A \cap B$ et $A \cup B$. Par conséquent, il n'appartient pas à $A\Delta B$. Mais alors, comme il appartient à C, il appartient à la différence symétrique $(A\Delta B)\Delta C$. Toutefois, comme x appartient à $A \cup B \cup C$ et à $A \cap B \cap C$, il n'appartient pas à la différence $(A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C)$. Ainsi, il n'y a pas égalité d'ensembles.

3. Soit x un élément de E. On dresse à tableau à huit entrées pour étudier les différents cas

$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_C(x)$	$M(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

On remarque alors que

$$M(x) = (1 - \mathbb{1}_A(x))\mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_C(x) + \mathbb{1}_A(x)(1 - \mathbb{1}_B(x))\mathbb{1}_C(x) + \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)(1 - \mathbb{1}_C(x)) + \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_C(x)$$

Comme cela est vrai pour tout élément x de E, cela s'écrit plus simplement

$$M = \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆