$\star\star\star$

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Soit $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x/(n^2+x^2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a convergence simple de la série $\sum u_n$, que sa somme est continue, mais qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Quid de la série $\sum (-1)^n u_n$?

2. (a) Pour tout entier n non nul, on définit

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)(1-x^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt}$$

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} p_n = 1$, et $\forall a > 0, \lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geqslant a} p_n(t)dt = 0$.

(b) Soit alors f une fonction continue nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. Montrer que la suite

$$f_n : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)p_n(t)dt$$

converge uniformément vers f et montrer que chaque f_n est une fonction polynomiale.

$\star\star\star$