- *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*
- *Il est rappelé qu'il sera tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies.*
- *Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.*

# Problème I : Espaces préhilbertiens réels

Ce problème est extrait du sujet CentraleSupélec-1999-PSI-Maths2. Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs $u$ et $v$ est noté $u\cdot v$, la norme $\|u\|$. De plus, dans les parties I et II, E désigne un espace eudidien de dimension $n$ ($n\geq 2$).

## *Partie I* -

**I.A -** Soient $u$ et $v$ deux vecteurs quelconques de E. On note $\mathrm{Gram}(u,v)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u,v)=\begin{bmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(u,v)=\det[\mathrm{Gram}(u,v)]$$

I.A.1) Montrer que : $\mathrm{G}(u,v)\geq 0$.

I.A.2) On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant $u$ et $v$ et B une base orthonormale de P. Vérifier que : $\mathrm{G}(u,v)=[\det_{\mathrm{B}}(u,v)]^2$

I.A.3) À quelle condition a-t-on $\mathrm{G}(u,v)=0$ ?

**I.B -** Dans toute la suite de la partie I, ***n* est égal à 3**. Si $u$, $v$, $w$ sont trois vecteurs quelconques de E , on note $\mathrm{Gram}(u,v,w)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u,v,w)=\begin{bmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot w \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot u & w\cdot v & w\cdot w\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(u,v,w)=\det[\mathrm{Gram}(u,v,w)]$$

I.B.l) Calculer $\mathrm{G}(u,v,w)$ si $u$, $v$, $w$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

I.B.2) On suppose $w$ orthogonal à $u$ et $v$. Exprimer $\mathrm{G}(u,v,w)$ en fonction de $\mathrm{G}(u,v)$.

**I.C -**

I.C.1) $u$, $v$, $w$ sont trois vecteurs quelconques de E. Montrer qu'il existe $t$ et $n$, vecteurs de E, vérifiant : $w=t+n,\ u\cdot n=v\cdot n=0,\ (u,v,t)$ liée.
Montrer que, dans ces conditions, on a : $\mathrm{G}(u,v,w)=\mathrm{G}(u,v,t)+\mathrm{G}(u,v,n)$

I.C.2) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un triplet $(x,y,z)$ de réels différent de $(0,0,0)$ tel que $xu+yv+zw$ soit orthogonal à $u$, $v$ et $w$.

b) $\mathrm{G}(u,v,w)=0$

I.C.3) En déduire que : $\mathrm{G}(u,v,w)=0 \iff (u,v,w)$ liée

I.C.4) Montrer que $\mathrm{G}(u,v,w)$ est un réel positif.

**I.D -**

I.D.1) $u$, $v$, $w$ sont trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E. Montrer que le réel $|\det_{\mathrm{B}}(u,v,w)|$ ne dépend pas du choix de B.

I.D.2) Soit P un plan de E contenant $u$ et $v$ et $n_1$ un vecteur unitaire orthogonal à P. On désigne par $B_1$ une base orthonormée de P et on note $B = B_1 \cup \{n_1\}$. En utilisant ces deux bases, montrer que $G(u,v,w) = [\det_B(u,v,w)]^2$

## *Partie II -*

Soient $u,\dots,u_n$ $n$ vecteurs de E. Pour tout $i$, tout $j$, entiers de $[\![1,n]\!]$, on note $g_{i,j} = u_i \cdot u_j$

On note $\mathrm{Gram}(u_1,\dots,u_n)$ la matrice d'élément général $g_{i,j}$ et le déterminant de cette matrice est noté $G(u_1,\dots,u_n) = \det[\mathrm{Gram}(u_1,\dots,u_n)]$

**II.A -** Soit $B = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. On pose, pour tout entier $j$ de $[\![1,n]\!]$

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k,j} e_k$$

II.A. 1) Exprimer, pour tout $i$, tout $j$, $g_{i,j}$ en fonction des coordonnées des vecteurs $u_1,\dots,u_n$ dans la base B.

II.A.2) Soit $A = (u_{i,j})$, A élément de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Gram}(u_1,\dots,u_n) = A^{\mathrm{T}}A$$

II.A.3) En déduire que $G(u_1,\dots,u_n)$ est un réel positif. Montrer que

$$G(u_1,\dots,u_n) \neq 0 \iff (u_1,\dots,u_n) \text{ libre}$$

## *Partie III -*

Dans toute la suite, E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1,\dots,u_r$ sont $r$ vecteurs de E, on note, comme dans la Partie II, $G(u_1,\dots,u_r)$ le déterminant de la matrice de $M_r(\mathbb{R})$ de terme général $u_i \cdot u_j$ (G est un déterminant de *Gram*).

**III.A -** Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de $p$ vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$. Pour tout $x$ élément de E, on note $x_F$ le projeté orthogonal de $x$ sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x_F + x^\perp$.

III.A.1) Exprimer $x_F$ en fonction des vecteurs $e_1,\dots,e_p$.

III.A.2) Exprimer simplement le réel $d(x,F)$ défini par

$$d(x,F) = \inf\left\{\|x-f\| \,;\, f \in F\right\}$$

III.A.3) Montrer que

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{G(x,e_1,\dots,e_p)}{G(e_1,\dots,e_p)}}$$

**III.B -** Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad f.g = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Pour $\lambda$ réel strictement positif, on note $p_\lambda$ l'élément de E défini par :

$$\forall t \in ]0,1], \quad p_\lambda(t) = t^\lambda,\ p_\lambda(0) = 0.$$

Soit $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs

III.B.1) Pour $n$ entier non nul, on note $E_n = \mathrm{Vect}(p_{\lambda_1},\dots,p_{\lambda_n})$. Vérifier que $E_n$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n$.

III.B.2) Soit $k$ un entier fixé pour toute la suite du problème.

Pour $n$ entier non nul, on note :

$$u_n^k = \inf\left\{\int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^{n} a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt \,;\, (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$$

En interprétant $u_n^k$ comme le carré d'une distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E, exprimer $u_n^k$ en fonction de déterminants de *Gram*.

## Problème II : Probabilités

Ce problème est extrait d'un problème des CCINP 2020 PSI. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note $A_n$ la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice $A_n$ vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On étudie une application probabiliste de l'étude de la matrice $A_n$. On admet le résultat suivant sur la matrice $A_n$ : il existe une matrice inversible $P_n$ telle que $P_n^{-1}A_nP_n$ est diagonale, dont les termes diagonaux valent $(2k-n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et telle que la $n+1$-ième colonne de $P_n$ vaut $(p_0, p_1, \dots, p_n)^{\mathsf{T}}$ en notant pour tout $k$ dans $[\![0,n]\!]$, $p_k = \binom{n}{k}$. Ce résultat n'est utilisé qu'en avant-dernière question.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant à elles deux $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On note $N_0$ la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne $U_1$.

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des $n$ numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $N_k$ la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne $U_1$ après l'échange effectué à l'instant $k$.

Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne $U_1$ contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne $U_2$ la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de $U_1$ et on la place dans $U_2$. On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de $U_2$ et on la place dans $U_1$. On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in [\![0,n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = P(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire $N_k$.

**Q1.** Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$ ?

**Q2.** Si l'urne $U_1$ contient $j$ boules à l'instant $k$, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$ ?

**Q3.** Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in [\![0,n]\!]$, déterminer :

$$P_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}).$$

On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

**Q4.** Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{E}_{k,1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(\mathrm{E}_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{E}_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{E}_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{E}_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{E}_{k,j+1}).$$

**Q5.** En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Z}_k = \frac{1}{n^k}\mathrm{A}_n^k \mathrm{Z}_0$$

où $\mathrm{A}_n$ est la matrice introduite en préambule.

On suppose jusqu'à la fin du problème qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les $n$ boules dans l'une des urnes $\mathrm{U}_1$ ou $\mathrm{U}_2$.

**Q6.** Déterminer la loi $\pi$ de $\mathrm{N}_0$.

**Q7.** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N}_k$ a la même loi que $\mathrm{N}_0$. *On pourra utiliser le résultat admis en préambule.*

**Q8.** Démontrer que $\pi$ est l'unique loi de probabilité ayant la propriété suivante : si $\mathrm{N}_0$ suit la loi $\pi$, alors toutes les variables $\mathrm{N}_k$ suivent la loi $\pi$.