Probabilités

Cornou Jean-Louis

21 avril 2023

Chapitre 1

Probabilités sur un univers fini.

Aucun prérequis de probabilités n'est nécessaire pour suivre ce cours. Toutefois, une bonne maîtrise du vocabulaire ensembliste est un atout (union, complémentaire, antécédent, etc). Il est également nécessaire de savoir dénombrer des ensembles finis. Plusieurs notions de probabilités du programme de lycée sont rappelées et étendues.

1.1 Expérience aléatoire et univers, notion d'événement.

Les notions d'expériences aléatoires et d'univers sont relativement difficiles à définir de manière purement mathématique. Nous conservons ici une approche « intuitive » de ces notions, l'essentiel étant de s'approprier le nouveau vocabulaire des probabilités.

Définition 1 *L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé* **univers**, *souvent noté Ω. Dans ce cours, nous nous restreignons au cas où cet univers est fini.*

Notation
On note souvent ω un élément de Ω, ce qui représente une issue possible de l'expérience aléatoire considérée.

Exemple 1

- *Lors du lancer d'un dé à 6 faces, l'univers est l'ensemble* $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *On lance deux dés à 6 faces, et on examine la somme du résultat des deux dés. L'univers considéré est alors l'ensemble* $\Omega_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
- *Lors d'un jet d'une pièce de monnaie, on peut considérer l'univers* $\Omega_3 = \{\textit{Pile, Face}\}$.
- *Lors du jet répété n fois d'une pièce de monnaie, l'univers est l'ensemble* $\Omega_4 = \{\textit{Pile, Face}\}^n$.
- *Lors d'un tirage d'un jeu de 32 cartes, on examine la couleur de la carte tirée, l'univers considéré est alors* $\Omega_5 = \{\textit{Coeur, Pique, Trèfle, Carreau}\}$.

Exercice 1 *On considère 3 enfants jouant au ballon, Ariane, Bilal et Chung. Le premier enfant ayant la balle est choisi aléatoirement. A chaque tour, ils peuvent garder ou lancer le ballon à un autre enfant de manière aléatoire. Le jeu s'arrête au bout de 3 tours. Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.*

Définition 2 *Un* **événement** *d'une expérience aléatoire est une partie de son univers. Si cette partie est un singleton, on l'appelle* **événement élémentaire**.

Exemple 2

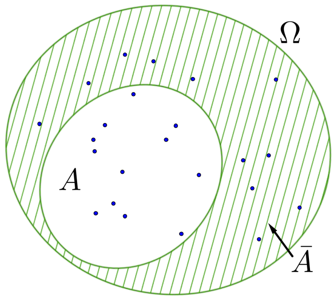
- *Lors du lancer d'un dé à 6 faces, l'événement « Résultat pair » est la partie* $A = \{2, 4, 6\}$ *de l'univers Ω. L'événement « le dé tombe sur 6 » est un événement élémentaire.*
- *Si l'on tire deux cartes d'un jeu de 32 cartes, l'événement B : « tirer deux cartes rouges » est constitué de toutes les combinaisons de deux cartes rouges. Par exemple,* (*9 de coeur, 7 de carreau*) *est une issue faisant partie de* B.

Définition 3 *Soit* A *un événement d'un univers* Ω*, on appelle* **événement contraire** *de* A *l'événement* Ω\A*, également noté* Ā.

Exemple 3 *Lors du lancer d'un dé à 6 faces, l'événement « le résultat est impair » est l'événement contraire de* $\mathrm{A} = \{2,4,6\}$.

L'événement contraire de « Le dé tombe sur 6 » est l'ensemble $\mathrm{B} = \{1,2,3,4,5\}$.

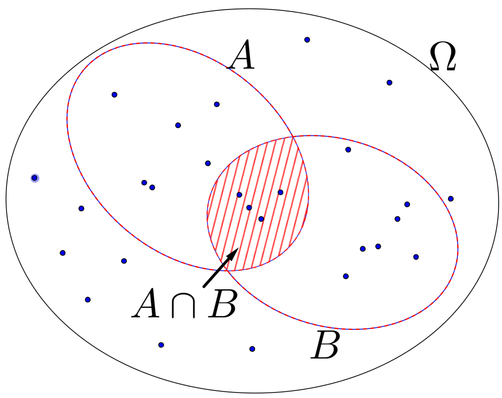
Voici une figure représentant un événement A d'un univers Ω, et son événement contraire Ā hachuré en vert. Les points bleus représentent les éléments de l'univers Ω.



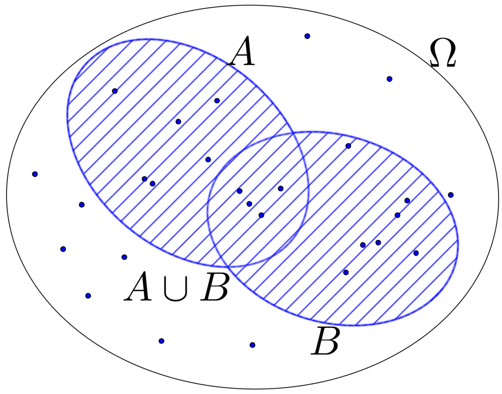
Définition 4 *Soit* A *et* B *deux événements d'un univers* Ω*. On appelle « A et B » (respectivement « A ou B ») l'événement* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ *(respectivement* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$*).*

Exemple 4 *Soit* A *l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 4 », et* B *« le résultat est impair » pour un lancer de dé à 6 faces. Alors « A et B »* $= \{5\}$*, et « A ou B »* $= \{1,3,4,5,6\}$.

Dans la figure suivante, on représente un univers Ω constitué d'éventualités représentées par des points bleus. Il y figure deux événements A et B, ainsi que leur intersection $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ hachurée en rouge.



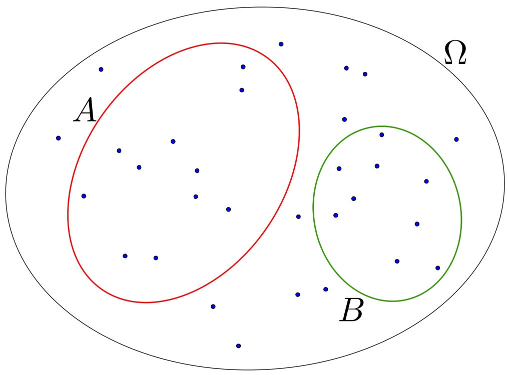
Sur la prochaine figure, on reprend les mêmes représentations et on hachure en bleu la zone correspondant à $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.



Définition 5 **L'événement impossible** *est l'ensemble vide* $\emptyset$. **L'événement certain** *est l'ensemble* Ω. *Deux événements A et B sont dits* **incompatibles** *si « A et B » est l'événement impossible.*

Exemple 5 *« Tirer un 3 » lors d'un tirage d'un jeu de 32 cartes est un événement impossible.*
« Le dé tombe sur un chiffre entre 1 et 6 « lors d'un lancer de dé à 6 faces est un événement certain.
Une urne contient deux boules, une rouge et une noire. On tire une boule au hasard, les deux boules étant indiscernables au toucher. Les événements « La boule tirée est rouge » et « La boule tirée est noire » sont incompatibles.

Voici une figure illustrant le concept de deux événements incompatibles. Les deux événements A et B de l'univers Ω n'ont aucune intersection : ils sont incompatibles.



Exercice 2 *On considère 2 lancers successifs de dé à 6 faces. Soit* A *l'événement « La somme des deux dés est supérieure ou égale à 11 »,* B *l'événement « Le résultat du premier dé est supérieur strictement à celui du deuxième », et enfin* C *l'événement « La distance entre les résultats des deux dés est égale à 2 ».*

1. *Donner l'ensemble des éléments des trois événements* A, B *et* C *et donner leur cardinal.*
2. *Décrire par une phrase l'événement « B et C ».*
3. *De quoi est constitué* $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ *? Y a-t-il incompatibilité ?*
4. *Décrire les événements* $\bar{\mathrm{A}}$ *et* $\bar{\mathrm{B}}$ *par une phrase.*

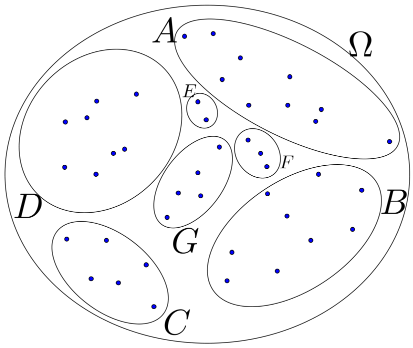
Définition 6 *Un* **système complet d'événements** *est un ensemble de parties* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *telles que les* A_i *sont deux à deux incompatibles, et* $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \Omega$.

Exemple 6 — *Soit* A *un événement. Alors* $(\mathrm{A}, \bar{\mathrm{A}})$ *forme un système complet d'événements de* Ω.

— *L'ensemble des événements élémentaires d'un univers forme un système complet d'événements de celui-ci.* $\Omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}$.

— *Les événements* $B_1 = \{1,6\}$, $B_2 = \{2,5\}$ *et* $B_3 = \{3,4\}$ *forment un système complet d'événements de l'univers d'un lancer de dé à 6 faces.*

La figure suivante représente un univers Ω et un système complet d'événements (A, B, C, D, E, F, G) de celui-ci. En effet, aucune éventualité ne figure en dehors des parties sus-nommées, et celles-ci sont toutes deux à deux incompatibles.



Exercice 3 *On considère le tirage d'une carte d'un jeu de 32 cartes.*

1. *Montrer que les événements* F *: « La carte est une figure », et* G *: « La carte est un nombre », forment un système complet d'événements.*
2. *Qu'en est-il des événements « La carte est un pique », « La carte est un trèfle », « La carte est un cœur », et « La carte est un carreau » ?*

1.2 Espaces probabilisés finis.

Nous avons considéré dans le paragraphe précédent les notions d'événements et d'univers, sans aucune forme de quantification. Une notion de « mesure » des événements permet d'effectuer cette quantification. Cela permet de répondre à des questions statistiques par exemple. A quelle fréquence se produit tel événement si je répète mon expérience aléatoire ? Quel événement a plus de chances de se produire ? Etc. Cette mesure doit répondre à certains impératifs pour être cohérente avec nos notions intuitives de probabilités.

Définition 7 *Une* **probabilité** *sur un univers fini* Ω *est une application* P *de* $\mathscr{P}(\Omega)$ *dans* $[0,1]$ *telle que*

— $P(\Omega) = 1$ *et,*

— *pour toutes parties disjointes* A *et* B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Cette dernière propriété est appelée **additivité** *de* P.
Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ *est alors appelé* **espace probabilisé fini**.

Exemple 7 *Pour un lancer de dé à 6 faces, la fonction* $A \to P(A) = card(A)/6$ *est une probabilité sur l'univers* Ω.

☞ **Remarque**
On dit également mesure de probabilité.

Théorème 1 *Une probabilité* P *est entièrement déterminée par la donnée de ses valeurs sur les événements élémentaires.*

Démonstration. Un événement A est constitué de parties disjointes que sont ses événements élémentaires. Ainsi, $A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}$, d'où $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$.

Exemple 8 *Imaginons le lancer d'un dé pipé. On peut définir une probabilité* P *sur cet univers par les données suivantes*

i	1	2	3	4	5	6
$P(\{i\})$	1/6	1/4	1/6	1/4	0	1/6

Remarquer qu'on définit bien une probabilité car $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 1$

Il est aussi intéressant de noter que $P(\{5\}) = P(\emptyset) = 0$*, mais que* $\{5\} \neq \emptyset$*. De même,* $P(\{1,2,3,4,6\}) = P(\Omega) = 1$*, mais* $\{1,2,3,4,6\} \neq \Omega$*.*

Définition 8 *On appelle distribution de probabilité sur un ensemble* E *tout famille d'éléments de* $\mathbb{R}^+$ *indexée par* E *et de somme* 1*.*

Propriété 1 *Soit* $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *une distribution de probabilités sur l'ensemble fini* Ω*. Alors il existe une unique probabilité* P *sur* Ω *telle que*

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$$

Démonstration. Analyse : si P probabilité vérifie le critère énoncé, alors par σ-additivité,

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Par conséquent, il y a unicité sous réserve d'existence. Synthèse : on définit $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1], A \mapsto \sum_{\omega\in A} p_\omega$. Vérifions que c'est bien une probabilité et qu'elle vérifie le critère attendu. $P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ puisque $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est de somme 1. Soit A et B deux parties disjointes de Ω, alors $\sum_{\omega\in A\cup B} p_\omega = \sum_{\omega\in A} p_\omega + \sum_{\omega\in B} p_\omega$, i.e $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$. On a donc bien une probabilité. Enfin, soit $\omega \in \Omega$, alors $P(\{\omega\}) = \sum_{\zeta\in\{\omega\}} p_\zeta = p_\omega$.

Exemple 9 *Soit* $x \in \Omega$*. On appelle masse de Dirac en* x *la probabilité définie par la distribution de probabilités* $(\delta_{\omega,x})_{\omega\in\Omega}$*. Elle est souvent notée* δ_x*.*

Théorème 2 *La fonction* $P : A \to card(A)/card(\Omega)$ *est une probabilité appelée* **probabilité uniforme***.*

Démonstration. On a bien P à valeurs dans $[0,1]$ par croissance du cardinal et $P(\Omega) = card(\Omega)/card(\Omega) = 1$. De plus, pour deux parties disjointes A et B, $card(A\cup B) = card(A) + card(B) - card(A\cap B) = card(A) + card(B)$, ainsi $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

☞ **Remarque**

Dans un problème ou un exercice, si la probabilité n'est pas définie, il faut utiliser la probabilité uniforme.

Propriété 2 *Soit* A *et* B *deux événements, alors*

— $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

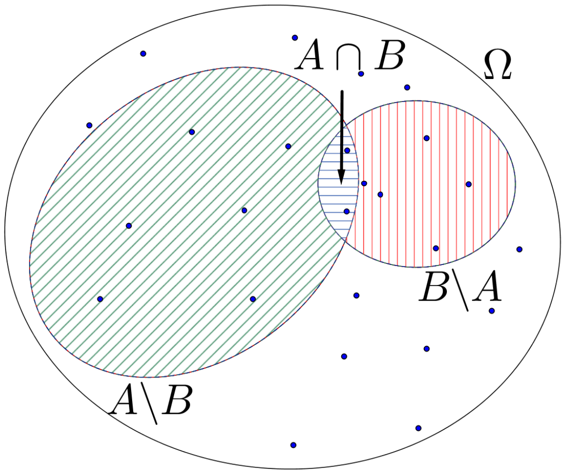
— $P(B\backslash A) = P(B) - P(B\cap A)$.

— *Si* $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$. *On dit que* P *est* croissante *par rapport à l'inclusion.*

Démonstration. A et $\bar{A}$ sont disjoints donc $P(A) + P(\bar{A}) = P(A\cup\bar{A}) = P(\Omega) = 1$, donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
De même, $B\backslash A$ et $B\cap A$ sont disjoints, donc $P(B\backslash A) + P(B\cap A) = P((B\backslash A)\cup(B\cap A)) = P(B)$. D'où la seconde égalité.
Enfin, si $A\subset B$, $B\cap A = A$, et l'égalité précédente donne $P(B) - P(A) = P(B\backslash A) \geq 0$, d'où l'inégalité de la proposition.

Propriété 3 *Soit* A *et* B *deux événements, alors* $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Démonstration. On partitionne $A\cup B$ en trois parties disjointes $A\backslash B$, $B\backslash A$ et $A\cap B$. En voici une illustration : $A\backslash B$ est la partie avec des hachures obliques vertes, $B\backslash A$ comporte des hachures verticales rouges et $A\cap B$ des hachures horizontales bleues.



Ainsi, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

On a donc d'après la proposition précédente,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

D'où le résultat.

Exercice 4
1. *Soit* A *et* B *deux événements tels que* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1/4$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1/3$ *et* $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = 1/2$. *Calculer alors* $\mathrm{P}(\mathrm{B})$, *puis* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.
2. *On considère alors* C *un événement tel que* $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{C}} \cup \mathrm{A}) = 5/12$. *En déduire la valeur de* $\mathrm{P}(\mathrm{C} \cup \mathrm{A})$. *Si on ajoute que* $\mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) = 1/4$, *que vaut* $\mathrm{P}(\mathrm{C})$ *?*
3. *On donne les deux dernières données suivantes :* $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 7/12$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 1/12$. *Calculer alors* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C})$.

Exercice 5 *Soit* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *un univers, et* P *la probabilité définie (partiellement,* x *et* y *étant à déterminer) par* $\mathrm{P}(\omega_1) = 1/2$, $\mathrm{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathrm{P}(\omega_3) = x$ *et* $\mathrm{P}(\omega_4) = y$. *Soit les événements* $\mathrm{A} = \{\omega_1, \omega_2\}$ *et* $\mathrm{B} = \{\omega_2, \omega_3\}$. *On donne* $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = 1/8$. *Déterminer complètement la probabilité* P.

Exercice 6 *On considère une classe de* n *élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.*

1. *Calculer la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. A partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?*
2. *Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.*

1.3 Probabilités conditionnelles.

Lors d'une expérience aléatoire, il se peut qu'on dispose d'informations supplémentaires. Cette information permet de restreindre le champ des résultats possibles et de connaître la probabilité d'un événement particulier avec « plus de précision ». Par exemple, lors d'un tirage d'un jeu de 32 cartes, on

cherche à savoir si l'on va tirer un coeur, mais on a aperçu que la carte tirée était rouge. La probabilité que ce soit un coeur, n'est alors plus de 8/32 = 1/4, mais de 8/16 = 1/2.
Formalisons cet énoncé. On munit l'univers des résultats du tirage de cartes de la probabilité uniforme. On note A l'événement « La carte est un coeur » et B « La carte est rouge ». Un simple comptage donne P(A) = 8/32 = 1/4, et P(B) = 16/32 = 1/2. Savoir que « B a lieu » signifie que la moitié des résultats (i.e la proportion P(B)) ne peut amener à l'événement A. La nouvelle proportion de résultats amenant à l'événement A est alors P(A)/P(B) = 1/2.
Envisageons le même tirage de cartes avec une autre information. On s'intéresse à l'événement C « La carte tirée est un valet », et on imagine savoir que la carte tirée est noire (événement D). Ainsi, les deux seules possibilités pour que C se produise est que la carte tirée soit le valet de pique ou le valet de trêfle. On peut ainsi écrire $P(C \cap D) = 2/32 = 1/16$. D'autre part, la proportion de cartes noires dans le jeu de cartes est de 1/2 (P(D) = 16/32 = 1/2). On dira donc que la probabilité de C sachant D est $P(C \cap D)/P(D) = 1/8$.
On formalise alors les choses comme suit :

Définition 9 *Soit B un événement tel que* $P(B) > 0$*, on appelle* **probabilité conditionnelle de A sachant B** *le réel* $P(A|B) = P_B(A) = P(A \cap B)/P(B)$.

Théorème 3 *L'application* P_B *ainsi définie est une probabilité.*

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. $A \cap B \subset B$, donc $P(A \cap B) \leq P(B)$, d'où $P_B(A) \leq 1$.
De plus, $P_B(\Omega) = P(\Omega \cap B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1$.
Enfin, si A_1 et A_2 sont deux parties disjointes, $A_1 \cap B$ et $A_2 \cap B$ sont également disjointes, ce qui donne

$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$

Soit

$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

Exemple 10 *Examinons le cas de la probabilité uniforme* P*. Soit* B *un événement tel que* $P(B) > 0$*. Alors pour tout événement* A*, on a* $P_B(A) = \dfrac{card(A \cap B)/card(\Omega)}{card(B)/card(\Omega)} = \dfrac{card(A \cap B)}{card(B)}$.

Exemple 11 *Reprenons l'exemple du dé pipé, dont la probabilité est définie par le tableau suivant :*

i	1	2	3	4	5	6
$P(\{i\})$	1/6	1/4	1/6	1/4	0	1/6

On ne peut définir de probabilité conditionnelle sachant l'événement $\{5\}$ *puisque celui-ci est de probabilité nulle. Notons* B *l'événement « le résultat est inférieur ou égal à* 3 *». Et calculons les valeurs de* $P_B(\{i\})$*. Par exemple,* $P_B(\{1\}) = P(\{1\} \cap B)/P(B) = P(\{1\})/(1/6 + 1/4 + 1/6) = (1/6)/(7/12) = 2/7$.
On peut établir le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$P_B(\{i\})$	2/7	3/7	2/7	0	0	0

Noter que P_B *est une probabilité, donc que sa donnée sur les événements aléatoires la détermine entièrement. Ce tableau est donc suffisant pour la décrire. Enfin, remarquez qu'on a bien* $P_B(\{i\}) = 0$ *dès que* $B \cap \{i\} = \emptyset$.

Exercice 7 *Avec l'exemple du dé pipé ci-dessus, considérer l'événement* C *« le résultat du dé est pair », et calculer* $P_C(\{i\})$ *pour* i *de* 1 *à* 6.

Théorème 4 (Formule des probabilités composées) *Soit* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *des événements tels que* $P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) \neq 0$*. Alors*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_m|A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1})$$

.

Démonstration. Procédons par récurrence. Le cas $m = 1$ est immédiat et n'appelle pas de commentaires particuliers. Supposons donc l'égalité vraie à un rang $m \geq 1$, et prouvons la au rang $m+1$.
Posons $B = A_1 \cap \dots A_m$, et appliquons l'égalité $P(A_{m+1} \cap B) = P(A_{m+1}|B)P(B)$. On obtient alors

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}) = P(A_{m+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_m)P(A_1 \cap \cdots \cap A_m)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_m|A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1})$. Ce qui prouve le résultat.

Exemple 12 *Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire, et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ? On note* B_i *l'événement « La i-ème boule tirée est blanche ». La probabilité recherchée est :* $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2)$*. Clairement,*$P(B_1) = 3/10$*. Maintenant, si* B_1 *est réalisé, avant le 2ᵉ tirage, l'urne est constituée de 8 boules noires et 2 blanches. On a donc :* $P(B_2|B_1) = 2/10$*. Si B1 et B2 sont réalisés, avant le 3ᵉ tirage, l'urne est constituée de 9 boules noires et 1 blanche. On en déduit* $P(B_3|B_1 \cap B_2) = 1/10$*. Finalement :* $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 6/1000 = 3/500$

Théorème 5 (Formule des probabilités totales) *Soit* $(B_i)_{i\in I}$ *un système complet d'événements tels que* $P(B_i) \neq 0$ *pour tout i, alors* $P(A) = \sum_{i\in I} P(A|B_i)P(B_i)$

Démonstration. D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\sum_{i\in I} P(A|B_i)P(B_i) = \sum_{i\in I} P(A \cap B_i).$$

Or comme les $(B_i)_{i\in I}$ forment un système complet d'événements, les $(A \cap B_i)_{i\in I}$ sont un recouvrement disjoint de A, donc $\sum\limits_{i\in I} P(A \cap B_i) = P(\bigcup\limits_{i\in I}(A \cap B_i)) = P(A)$.

Exemple 13 *Soit* B *un événement tel que* $P(B) \neq 0$ *et* $P(B) \neq 1$*. Alors* $(B, \bar{B})$ *forme un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales, ce qui donne :*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

Exercice 8 *Soit* A *et* B *deux événements tels que* $P(A \cap B) = 1/5$, $P(A) = 1/3$ *et* $P_{\bar{A}}(B) = 1/6$*. Combient vaut* $P_B(A)$ *?*

Exercice 9 *On considère un atelier disposant de trois machines notées a, b et c. La machine a fournit 30% des pièces dont 5% sont défectueuses, la machine b fournit 20% des pièces dont 4% sont défectueuses et la machine c fournit 50% des pièces dont 8% sont défectueuses.*
Une pièce est prélevée au hasard dans la production de l'atelier. Quelle est la probabilité que la pièce soit défectueuse ?

Théorème 6 (Formule de Bayes) *Soit* A *et* B *deux événements tels que* $P(A) \neq 0$ *et* $P(B) \neq 0$*, alors*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors*

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Démonstration. On a

$$\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$

Il suffit d'appliquer l'égalité précédente à A_j et B, et remarquer que $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$ d'après la formule des probabilités totales.

☞ **Remarque**
La formule des probabilités composées, la formule des probabilités totales et la formule de Bayes sont généralisables au cas $P(B) = 0$ *avec la convention* $P(A|B)P(B) = 0$ *dans ce cas.*

Exemple 14 *On considère une urne* U_1 *contenant deux boules blanches et une boule noire, et une urne* U_2 *contenant une boule blanche et une boule noire. On choisit une urne au hasard puis on prélève une boule dans cette urne. Les boules sont indiscernables au toucher. On obtient une boule blanche.*
Quelle est alors la probabiltié que la boulet soit extraite de l'urne U_1 *?*
On note B *l'événement « la boule tirée est blanche »,* E_1 *« la boule tirée est extraite de l'urne* U_1 *et* E_2 *« la boule tirée est extraite de l'urne* U_2 *». On applique la formule de Bayes en utilisant le système complet* (E_1, E_2).

$$P_B(E_1) = \frac{P_{E_1}(B)P(E_1)}{P_{E_1}(B)P(E_1) + P_{E_2}(B)P(E_2)} = \frac{2/3 * 1/2}{2/3 * 1/2 + 1/2 * 1/2} = \frac{4}{7}$$

Exercice 10 *On considère trois urnes :* U_1 *composée de deux boules noires et deux boules rouges,* U_2 *composée d'une noire et deux rouges,* U_3 *composée d'une noire et trois rouges (les boules sont indiscernables au toucher). On tire une boule dans* U_1*, une boule dans* U_2*, et on les met dans* U_3*, puis on tire une boule dans* U_3*. On constate que cette boule est noire.*
Calculer la probabilité que la boule tirée dans U_1 *est rouge.*

Exercice 11 *On dispose de trois pièces de monnaie : la première fait pile avec un probabilité de* 0.1*, la seconde avec une probabilité de* 0.4*, et la troisième avec une probabilité de* 0.6*. On choisit au hasard l'une des pièces et on la lance trois fois. Déterminer la probabilité qu'on ait lancé la première pièce sachant qu'on a obtenu 2 fois pile puis une fois face.*

Exercice 12 *Dans un pays, les ethnies* A *et* B *cherchent à faire la paix. Les individus de l'ethnie* A *sont trois fois plus nombreux que ce de l'ethnie* B*. Pour la paix, les* A *sont à* 50% *favorables,* 26% *y sont opposés et* 24% *sont sans opinion. Pour la guerre, les* B *sont à* 78% *favorables,* 12% *opposés et* 10% *sans opinion. On prend un habitant de ce pays au hasard, et on lui demande son opinion.*

1. *Calculez la probabilité qu'il soit sans opinion.*
2. *S'il répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de l'ethnie* A *?*
3. *S'il répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit de l'ethnie* B *?*

1.4 Evénements indépendants

La notion de probabilité conditionnelle permet d'amener celle d'indépendance entre deux événements. En effet, si l'information apportée par un événement ne modifie pas la fréquence d'apparition d'un autre événement, on peut dire que ces deux événements sont indépendants.
Reprenons l'exemple du tirage de cartes. Si l'on cherche à savoir si la carte tirée est un valet alors que l'on sait que la carte est noire, la probabilité conditionnelle de tirer un valet sachant que la carte est noire et la probabilité de tirer un valet sont identiques. Il paraît intuitif en effet que la notion de couleur d'une carte n'influe pas sur la valeur de la carte.

Définition 10 *Soit* A *et* B *deux événements tels que* $P(B) \neq 0$*, on dit que A est indépendant de B, si* $P(A|B) = P(A)$.

☞ **Remarque**
On peut généraliser la définition à deux événements de probabilité quelconques par l'égalité $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

☞ **Remarque**
Attention à ne pas confondre incompatibilité et indépendance.

Définition 11 *On dit que* $A_1, \ldots, A_m$ *sont mutuellement indépendants si, pour toute famille finie* J *de* $[\![1, m]\!]$*, on a*

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Exemple 15 *Attention, si 3 variables sont deux à deux indépendantes, elles ne le sont pas forcément mutuellement. En voici un contre-exemple : on lance une pièce de monnaie deux fois de suite. Soit les événements* A *: « Le premier jet tombe sur Pile »,* B *: « Le deuxième jet tombe sur Face « et* C *: « Les deux jets sont identiques ».*
On a alors $A = \{(Pile, Pile), (Pile, Face)\}$*, d'où* $P(A) = 2/4 = 1/2$.
$B = \{(Pile, Face), (Face, Face)\}$ *d'où* $P(B) = 2/4 = 1/2$.
Enfin, $C = \{(Pile, Pile), (Face,Face)\}$ *donc* $P(C) = 2/4 = 1/2$.
De plus, $A \cap B = \{(Pile,Face)\}$*,* $A \cap C = \{(Pile, Pile)\}$*, et* $B \cap C = \{(Face,Face)\}$*. On en déduit que* $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = 1/4$*. On constate que* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$*, que* $P(B \cap C) = P(B)P(C)$*, et que* $P(A \cap C) = P(A)P(C)$*. Ainsi, les trois événements sont deux à deux indépendants.*
Pourtant, $A \cap B \cap C = \emptyset$*, ce qui veut dire que* $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$*. Or* $P(A)P(B)P(C) = 1/8$*. Il n'y a donc pas indépendance mutuelle.*

Exercice 13 *Soit* A *et* B *deux événements indépendants tels que* $P(A) = 1/2$ *et* $P(A \cup B) = 2/3$*. Que vaut alors* $P(B|A)$ *?*

Exemple 16 *Attention, la notion d'indépendance est relative à une probabilité donnée. Nous reprenons l'exemple du dé pipé dont la probabilité est donnée par le tableau suivant :*

i	1	2	3	4	5	6
$P(\{i\})$	1/6	1/4	1/6	1/4	0	1/6

Les événements A *« Résultat supérieur ou égal à 5 », et* B *« Résultat pair » ne sont pas indépendants pour cette probabilité. En effet,* $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/4 + 1/4 + 1/6 = 2/3$*, et* $P(A \cap B) = P(\{6\}) = 1/6$*. Ce qui donne* $P(A)P(B) = (1/6) * (2/3) = 1/9 \neq P(A \cap B)$.
Pour une probabilité uniforme, ces événements seraient indépendants.

Exercice 14 (A faire absolument) *Soit* A *et* B *deux événements indépendants.*

1. *Montrer que* $\bar{A}$ *et* B *sont aussi indépendants,*
2. *puis que* A *et* $\bar{B}$ *le sont également.*
3. *Qu'en est-il de* $\bar{A}$ *et* $\bar{B}$ *?*

Exercice 15 *Sur un réseau informatique, des ordinateurs se transmettent une information de manière indépendante. On suppose qu'à chaque transmission l'information est transmise correctement avec la même probabilité* $p \in [0,1]$.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, déterminer la probabilité* p_n *que l'information soit transmise correctement* n *fois consécutives.*
2. *Déterminer* $\lim_{n \to +\infty} p_n$ *et interpréter ce résultat.*

Exercice 16 *Un enfant lance un galet pour faire des ricochets sur l'eau. On suppose que les ricochets du galet s'effectuent de manière indépendante, et que la probabilité que le galet ricoche pour la* n^e *fois (c'est-à-dire qu'il ne coule pas lorsqu'il entre en contact avec l'eau) est égale à* $1/n$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Quelle est la probabilité* p_n *que le galet coule après n ricochets ?*
2. *Calculer* $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ *et interpréter ce résultat.*

Exercice 17 *On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce : Si on obtient « pile », on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ; si on obtient « face », alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.*

1. *Expliquer pourquoi cette expérience se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de lancers.*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?*

Chapitre 2

Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Lors d'un jeu d'argent, on peut gagner ou perdre des sommes (souvent importantes) d'argent selon l'issue de plusieurs événements aléatoires. Par exemple, lors d'un jeu à la roulette, si l'on mise sur un numéro simple, on peut soit perdre sa mise si le numéro n'est pas sorti, soit gagner 35 fois sa mise dans le cas contraire. Si l'on mise sur un numéro rouge, on peut soit perdre sa mise, soit la gagner une fois. Autrement dit, on peut associer à un événement aléatoire un gain ou une perte, soit un nombre réel. Il est alors naturel de penser à la notion de fonction pour modéliser cette notion. Dans tout ce qui suit, on fixe Ω un univers.

2.1 Variables aléatoires

Définition 12 *Une* **variable aléatoire** *sur* Ω *est une application définie sur l'univers* Ω *à valeurs dans un ensemble* E*. Lorsque* $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$*, la variable aléatoire est dite* réelle*.*

☞ **Remarque**
On abrège souvent le mot « variable aléatoire » en v.a, ou encore « variable aléatoire réelle » en v.a.r.

Exemple 17 *Imaginons le jeu suivant : on tire deux cartes d'un jeu de 32 cartes. On gagne ou perd de l'argent selon les règles suivantes :*

- *Si les deux cartes ont même numéro ou sont la même figure (i.e elles forment une paire), on gagne 10 euros.*
- *Si les deux cartes ont même couleur (cœur, carreau, pique, trèfle), on gagne 0 euros.*
- *Dans tous les autres cas, on perd 5 euros.*

On a ainsi créé une variable aléatoire X *qui a une combinaison de deux cartes tirées* ω*, associe un gain ou une perte d'argent. Par exemple,* $\mathrm{X}(\textit{7 de coeur, 9 de carreau}) = -5$*,* $\mathrm{X}(\textit{valet de pique, as de pique}) = 0$ *et* $\mathrm{X}(\textit{dame de trèfle, dame de coeur}) = 10$*.*

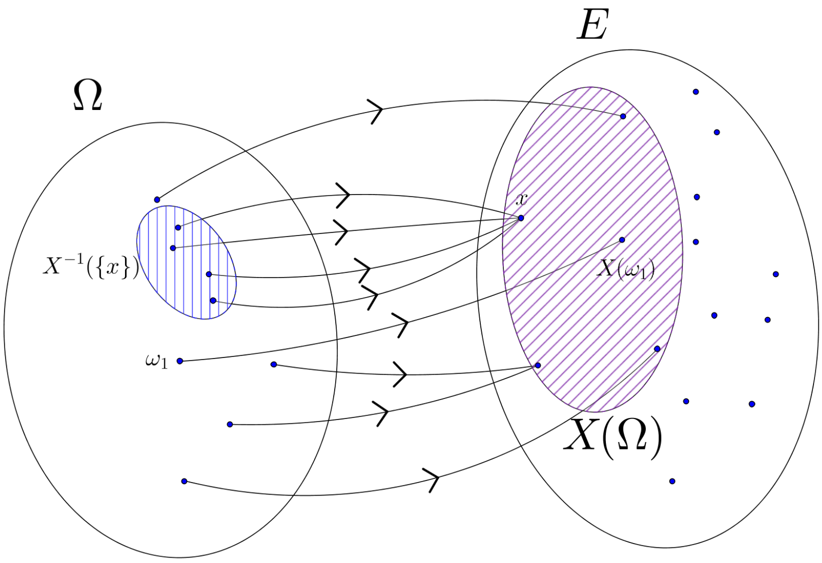
Exemple 18 *Prenons à présent l'exemple d'un pari sportif où l'on mise sur la victoire d'une équipe précise. Chaque équipe dispose d'une cote qui permet de connaître à l'avance le gain éventuel. Notons* $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ *l'univers des numéros des équipes. L'issue* $\{i\}$ *signifie que l'équipe numéro i a gagné. Si l'on note m la quantité d'argent misée, et* $c(i)$ *la cote de l'équipe* i*, l'argent gagné sera alors* $\mathrm{X}(i) = m \times c(i)$*. On a bien ici une variable aléatoire réelle.*

Notation
Si X *est une variable aléatoire et si* A *est une partie de* E*, on note* $\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}$ *ou* $(\mathrm{X} \in \mathrm{A})$*, l'événement* $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})$*, i.e l'ensemble de tous les issues* ω *de* Ω *telles que* $\mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}$*.*

Exemple 19 *Considérons deux lancers succesifs de dé à 6 faces. On note* $\mathrm{X}(i,j) = i - j$ *une variable aléatoire déterminée par le résultat* i *du premier dé, et le résultat* j *du deuxième dé. Déterminons quelques* $(\mathrm{X} \in \mathrm{A})$ *pour* A *une partie de* $\mathbb{Z}$*.*

Si $A = \{6, \dots, 10\}$, *aucune issue* $\omega = (i, j)$ *ne permet d'obtenir des valeurs de* X *dans* A *(en effet,* $X(\Omega) = \{-5, \dots, 5\}$*). Autrement dit, les élements de* A *n'ont aucun antécédent par* X, *d'où* $X^{-1}(A) = \emptyset$.
Si $A = \{3\}$, *on cherche toutes les éventualités* $\omega = (i, j)$ *telles que* $i - j = 3$. *Il s'agit donc de l'ensemble* $\{(4,1), (5,2), (6,3)\}$.
Si $A = \{0, -1\}$, *on effectue le même type de recherche pour trouver que* $(X \in A) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2),$

Voici une illustration synthétique de ces notions. On représente un univers Ω et un ensemble E d'arrivée, puis l'association entre issues ω de Ω et éléments de E i.e une variable aléatoire X. L'image $X(\Omega)$ est hachurée en violet oblique. On représente de plus l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ par des hachures bleues verticales.



Exercice 18 *On considère un jeu de loto simplifié où l'on doit cocher 5 numéros distincts dans une grille comportant tous les nombres de* 1 *à* 49. *On gagne une certaine somme d'argent selon le nombre de bons numéros par rapport au tirage de référence. Voici les résultats d'un tirage et les valeurs des gains.*

Tirage	7, 12, 14, 32, 47.
5 bons numéros	329 205, 50
4 bons numéros	1 000, 70
3 bons numéros	9, 80
2 bons numéros	4, 90
1 ou aucun bon numéro	0

.

On note Ω *l'univers des grilles possibles et* X *la variable aléatoire qui à une grille* ω *associe le gain correspondant.*

1. *Déterminer* $(X \in \{1\ 000.70\})$ *et donner son cardinal.*
2. *Sans le décrire entièrement, donner le cardinal de* $(X \in \{4, 90\})$.

☞ **Remarque**
Notons que l'on peut définir une variable aléatoire sur un univers Ω *en dehors de toute notion de probabilité. Pourtant, in fine, il nous intéresse de savoir avec quelles chances on peut gagner de l'argent avant de se risquer à jouer. C'est à cette fin que nous introduisons la notion de loi.*

Définition 13 *Pour* X *une variable aléatoire, on appelle* **loi de** X *l'application* P_X *de* $\mathscr{P}(E)$ *dans* $[0, 1]$ *qui à* A *associe* $P(X^{-1}(A))$ *(encore noté* $P(X \in A)$*).*

☞ **Remarque**
De la même manière qu'on peut déterminer une probabilité grâce à ses valeurs sur des événements élémentaires, on peut se limiter aux singletons de E *pour déterminer la loi d'une variable aléatoire.*

Notation
On note $P(X = x)$ *la quantité* $P(X^{-1}\{x\})$*, et* $P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x]) = P(X^{-1}(]-\infty, x]))$.

Théorème 7 *L'application* P_X *est déterminée par la donnée des* $P(X = x)$ *pour x dans* $X(\Omega)$

Démonstration. Soit A une partie de E. On note tout d'abord que $X^{-1}(A) = X^{-1}(A \cap X(\Omega))$. En effet, il est inutile de chercher des antécédents des éléments de A qui ne sont pas dans $X(\Omega)$. On partitionne alors $A \cap X(\Omega)$ selon les $\{x\}$ de $A \cap X(\Omega)$. On a alors par additivité de P, $P_X(A) = P(\bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} X^{-1}(\{x\})) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X^{-1})(\{x\}) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$.

Exemple 20 *Léo parcourt tous les jours 3 km en vélo pour se rendre à l'école. Il part 6 minutes avant le début des cours, et effectue le trajet à une vitesse constante de 30 km/h. Sur le trajet, il rencontre 5 feux de signalisation non synchronisés. Chaque feu a une probabilité 2/3 d'être vert et 1/3 d'être rouge. Un feu vert ne ralentit pas Léo, tandis qu'un feu rouge le retarde de 30 secondes. Posons* T *la variable aléatoire donnant le temps mis en minutes par Léo pour se rendre à l'école et déterminons sa loi.*
Si Léo ne rencontre pas de feu rouge, il met $3/30 = 1/10h$*, soit* 6 *minutes à faire son trajet. S'il rencontre n feux rouges sur son chemin, son temps de trajet est donc* $6 + n/2$ *en minutes. Donc* $T(\Omega) = \{6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5\}$*. Il reste à déterminer la probabilité de rencontrer n feux rouges sur son chemin. Comme les feux ne sont pas synchronisés,*

$$P(\textit{n feux rouges}) = \textit{card(choix de n feux rouges parmi 5)} P(\textit{feu rouge})^n P(\textit{feu vert})^{5-n},$$

d'où $P(\textit{n feux rouges}) = C_5^n (2/3)^n (1/3)^{5-n}$*. Voici un tableau des valeurs approchées correspondantes.*

n	0	1	2	3	4	5
$P(n)$	0.0041	0.041	0.16	0.33	0.33	0.13
T	6	6.5	7	7.5	8	8.5

On lit donc que $P(\textit{Léo n'est pas en retard}) = P(T = 6) \simeq 0.0041 \simeq 0.41\%$*. On peut encore lire que*

$$P(\textit{le retard de Léo est inférieur à 2 minutes}) = P(T < 8) = P(T = 6) + P(T = 6.5) + P(T = 7) + P(T = 7.5) \simeq 0.54 \simeq 54\%.$$

Exercice 19 *On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On gagne* 2 *euros pour un pile et on en perd* 1 *pour un face. On note* Y *le gain. Déterminer la loi de* Y.

Théorème 8 *La loi d'une variable aléatoire est une probabilité sur l'espace* E.

Démonstration. Notons X la variable aléatoire considérée et P_X sa loi. On a bien P_X à valeurs dans $[0, 1]$. De plus, on a $P_X(E) = P(X^{-1}(E)) = P(\Omega) = 1$. Enfin, si A et B sont deux parties disjointes de E, $X^{-1}(A)$ et $X^{-1}(B)$ sont également disjointes. On en déduit que $P_X(A \cup B) = P(X^{-1}(A \cup B)) = P(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(B)) = P_X(A) + P_X(B)$. On a donc bien l'additivité de P_X.

Notation
Soit X, Y *deux variables aléatoires. Lorsque* X *et* Y *ont même loi (i.e* $P_X = P_Y$*), on note* $X \sim Y$.

Définition 14 *On appelle* **fonction de répartition** *de la variable aléatoire réelle* X*, la fonction* $F_X(x) = P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x])$

Propriété 4 *Soit* F *la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle* X*. Alors*

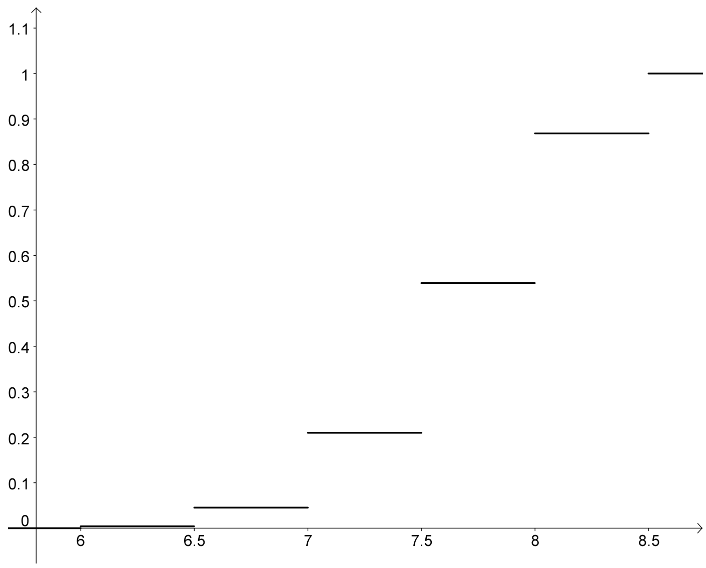
— $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *est croissante,*

— $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

— $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Démonstration. La croissance de F vient naturellement de la croissance de P : si $x \leq y$, $X^{-1}(]-\infty, x]) \subset X^{-1}(]-\infty, y])$, donc $P_X(]-\infty, x]) \leq P_X(]-\infty, y])$, d'où $F(x) \leq F(y)$.
De plus, comme Ω est fini, $X(\Omega)$ l'est également, il est alors inclus dans un certain intervalle $]m, M[$ de $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $x \leq m$, $F(x) = P(X \leq x) = 0$ et que pour tout $x \geq M$, $F(M) = P(X \leq x) = 1$. D'où les valeurs des limites.

Exemple 21 *Reprenons l'exemple de Léo à vélo, et de la variable aléatoire* T*, et représentons sa fonction de répartition* F_T.



Propriété 5 *Soit* F_X *la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle* X*. Alors*
- *pour tous réels* $a < b$*, on a* $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$*,*
- F_X *est une fonction en escalier,*
- *Pour tout* a *de* $X(\Omega)$*,* $P_X(a) = F_X(a) - \lim_{t \to a^-} F_X(t)$*. Autrement dit, la loi en* a *est égale à la hauteur du saut de la fonction de répartition en* a*.*

Démonstration. Soit $a < b$, alors $]a, b] =]-\infty, b] \cap \overline{]-\infty, a]}$. D'où

$$P_X(]a, b]) = P_X(]-\infty, b]) - P_X(]-\infty, b] \cap]-\infty, a]).$$

Or $a < b$ implique que $]-\infty, b] \cap]-\infty, a] =]-\infty, a]$. Donc

$$P(a < X \leq b) = P_X(]-\infty, b]) - P_X(]-\infty, a]) = F_X(b) - F_X(a).$$

On énumère $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ puisqu'il est fini. On note x_0 un réel strictement inférieur à x_1 et x_{n+1} un réel strictement supérieur à x_n. Montrons que F_X est en escalier sur l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$. Pour tout i de 0 à n, $]x_i, x_{i+1}[\cap X(\Omega) = \emptyset$, donc $P(X \in]x_i, x_{i+1}[) = 0$, donc $F_X(x) = F_X(x_i) + P(x_i < X \leq x) = F_X(x_i)$ pour tout x de $]x_i, x_{i+1}[$.
La limite à gauche de $F_X(t)$ en un point x_{i+1} de $X(\Omega)$ vaut $F_X(x_i)$ d'après ce qui précède. $F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i) = P(x_i < X \leq x_{x_{i+1}}) = P(x_i < X < x_{i+1}) + P(X = x_{i+1}) = 0 + P(X = x_{i+1})$

Définition 15 *Soit* $X : \Omega \to E$ *une variable aléatoire et* $f : E \to F$ *une application. On appelle* **image de** X **par** f*, la variable aléatoire* $f \circ X : \Omega \to F$*, notée* $f(X)$*.*

Théorème 9 *La loi de* $f(X)$ *est donnée par* $\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), P_{f(X)}(B) = P_X(f^{-1}(B))$

Démonstration. Soit B une partie de F avec les notations de la définition ci-dessus. Soit ω une issue de Ω. Alors

$$\begin{aligned} \omega \in [f(X)]^{-1}(B) &\iff f(X)(\omega) \in B \\ &\iff X(\omega) \in f^{-1}(B) \\ &\iff \omega \in X^{-1}(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

D'où $P([f(X)]^{-1}(B)) = P(X^{-1}(f^{-1}(B)))$, soit encore $P_{f(X)}(B) = P_X(f^{-1}(B))$.

Exemple 22 *Soit* X *une variable aléatoire d'image* $\{1, \ldots, n\}$ *de loi* $P(X = i) = \alpha/(1+i)$ *avec* α *un réel tel que* $P_X(\{1, \ldots, n\}) = 1$*. Examinons son image par la fonction* $f : x \to 1/x$*. Tout d'abord, il convient de déterminer l'univers image de* X *par* f*. Il vient facilement que* $f(X)(\Omega) = \{1/i\}_{1 \leq i \leq n}$*. De plus, la loi de* $f(X)$ *est une probabilité, donc il suffit de donner son image sur les événements élémentaires de* $f(X)(\Omega)$*. On calcule alors* $P(f(X) = 1/i) = \alpha/(1+i)$*, ce qui donne* $P(f(X) = x) = \alpha/(1+1/x) = \alpha x/(1+x)$*.*

Propriété 6 *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires de même loi et* $f : E \to F$ *une application. Alors* $f(X)$ *et* $f(Y)$ *ont même loi.*

Démonstration. Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$. D'après ce qui précède,

$$P_{f(X)}(B) = P_X(f^{-1}(B) = P_Y(f^{-1}(B)) = P_{f(Y)}(B)$$

Ainsi, $P_{f(X)} = P_{f(Y)}$, donc $f(X) \sim f(Y)$.

Exercice 20 *Soit* X *une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini* (Ω, P) *dont la loi est donnée ci-dessous.*

k	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	1/6	1/4	1/6	1/6	1/4

1. *Représenter graphiquement la loi de* X *ainsi que sa fonction de répartition* F_X.
2. *Soit* $Y = X^2$*, donner la loi de* Y.

Exercice 21 *Soit* Y *une variable aléatoire d'image* $\{0, \ldots, n-1\}$ *de loi* $P(Y = k) = \beta cos(k\pi/2n)$*, avec* $n \geq 1$.

1. *Déterminer* β *pour que ce soit bien une loi.*
2. *Puis calculer la loi image de* $Z = cos(\pi Y/2n)$.

Définition 16 *Soit* $A \in \Omega$ *tel que* $P(A) > 0$ *et* X *une variable aléatoire de* Ω *dans* E*. On appelle loi conditionnelle de* X *sachant* A *l'application*

$$P : \mathscr{P}(E) \to [0,1], B \mapsto P(X \in B|A) = P((X \in B) \cap A)/P(A)$$

Propriété 7 *La loi conditionnelle d'une variable aléatoire est une probabilité.*

2.2 Lois usuelles

Voici quelques lois d'utilisation fréquente.

Définition 17 *On appelle* **loi uniforme** *sur* Ω*, la loi déterminée par* $P(X = x) = 1/card(X(\Omega))$ *pour tout* x *de* $X(\Omega)$.

Exemple 23 *Soit* P *la probabilité uniforme sur un univers* $\Omega = \{0, \ldots, n\}$*. Alors, la variable aléatoire* $X = Id_\Omega$ *suit la loi uniforme.*

Notation
Lorsqu'une variable aléatoire X *suit la loi uniforme sur un ensemble fini non vide* E*, on note* $X \sim \mathscr{U}(E)$.

Définition 18 *On appelle* **loi de Bernouilli de paramètre** p *dans* $[0,1]$*, la loi définie sur* $X(\Omega) = \{0,1\}$ *par* $P(X = 1) = p$ *et* $P(X = 0) = 1 - p$*. On note alors* $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple 24 *Typiquement, on considère un événement* S *d'une expérience aléatoire, et on définit la variable aléatoire* $X(\omega) = 1$ *si* $\omega \in S$*,* 0 *sinon. Alors* X *suit une loi de Bernouilli de paramètre* P(S)*. On appelle* X **l'indicatrice** *de* S.

Notation
Lorsqu'une variable aléatoire X *suit la loi de Bernoulli de paramètre* p *dans* $[0,1]$*, on note* $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition 19 *Pour* n *dans* $\mathbb{N}^*$*, et* p *dans* $[0,1]$*, on dit qu'une variable aléatoire suit une* **loi binomiale de paramètres** n **et** p*, si* $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ *et* $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ *pour tout* k *dans* $[\![0,n]\!]$*. On note alors* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 25 *Si une expérience aléatoire* X *suit une loi de Bernouilli de paramètre* p*, on peut répéter* n *fois cette expérience aléatoire de manière indépendante. On compte alors le nombre de succès de* X*, i.e le nombre de fois que* X *vaut* 1*. Cette variable aléatoire* Y *suit une loi binomiale de paramètres* n *et* p*.*
En effet, $P(Y = k) = card($*choix de* k *succès parmi* $n)P(k$ *succès et n-k échecs) d'où*

$$P(Y = k) = C_n^k P(succès)^k P(échec)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Notation
Lorsqu'une variable aléatoire X *suit la loi binomiale de paramètres* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0,1]$*, on note* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 22 *Un jury de 12 membres se réunit pour décider ou non de la culpabilité d'un prévenu. Celui-ci est dit coupable si au moins 10 membres du jury partagent cet avis. On estime que les jurés ont tous un probabilité de 0.8 de désigner le prévenu coupable et que les jurés se déterminent indépedamment les uns des autres. Quelle est alors la probabilité que le jury vote la culpabilité du détenu ?*

2.3 Espérance

On se limite à présent à des variables aléatoires réelles, afin de modéliser la notion de gain moyen. Un jeu mal équilibré peut conduire à de fortes pertes si les chances de succès sont faibles. On va donc pondérer chaque gain par sa probabilité d'advenir afin de déterminer un comportement moyen du jeu. Ceci amène à la définition de l'espérance.

Définition 20 *On appelle* **espérance** *d'une variable aléatoire réelle la quantité*
$E[X] = \sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$

Définition 21 *Une v.a.r réelle est dite* **centrée** *si son espérance est nulle.*

☞ **Remarque**
Pour calculer l'espérance en pratique, on ne va pas utiliser la définition qui nécessite de connaître Ω *ainsi que tous les* $X(\omega)$.

Propriété 8 (Formule de transfert) $E[f(X)] = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$

Démonstration. On a $E[f(X)] = \sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})f(X(\omega))$. On regroupe les ω selon leurs valeurs par X. On a donc

$$\Omega = \bigcup_{x\in X(\Omega)} \left(\bigcup_{\omega\in(X=x)} \{\omega\} \right).$$

Ceci permet de réécrire la somme comme

$$E[f(X)] = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega\in(X=x)} P(\{\omega\})f(X(\omega)) \right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega\in(X=x)} P(\{\omega\}) \right) f(x).$$

Soit encore par additivité de P, $E[X] = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$.

☞ **Remarque**
Notons que l'espérance de X *est déterminée par la loi de* X.

Exemple 26 *Calculons l'espérance de* T *le temps mis par Léo pour se rendre en cours. Il suffit de calculer d'après la formule de transfert* $\sum_{t\in T(\Omega)} P(T = t)t$*, ce qui donne à l'aide du tableau de données* $E[T] \simeq 7.66$*. On peut dire que le retard moyen de Léo est de 1 minute 40 secondes.*

t	6	6.5	7	7.5	8	8.5
$P(T = t)$	0.0041	0.041	0.16	0.33	0.33	0.13
$tP(T = t)$	0.025	0.27	1.12	2.48	2.64	1.11

Propriété 9 *Soit a un réel et* X, Y *deux v.a.r réelles. Alors* $E[aX+Y] = aE[X]+E[Y]$*. On dit que l'espérance est* linéaire.
Si $X \geq 0$, $E[X] \geq 0$*. Si* $X \leq Y$, $E[X] \leq E[Y]$*. On dit que l'espérance est* croissante.

Démonstration. Ecrivons

$$E[aX+Y] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})(aX+Y)(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})(aX(\omega)+Y(\Omega)).$$

La linéarité de la somme donne alors

$$E[aX+Y] = a\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})Y(\omega).$$

D'où $E[aX+Y] = aE[X]+E[Y]$.
Soit $X \geq 0$, alors $E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$ est positive car $P(\omega) \geq 0$ pour tout ω.
Soit $X \leq Y$, alors d'après ce qui précède, $Y - X \geq 0$ entraîne alors $E[Y-X] \geq 0$, soit par linéarité $E[Y] - E[X] \geq 0$ d'où $E[Y] \geq E[X]$.

Exercice 23 *Lors d'une enquête, on a interrogé 5 hommes et 3 femmes. On choisit au hasard et sans remise les personnes une à une jusqu'à obtention d'un homme. Soit* X *le nombre de tirages nécessaires.*

1. *Donner les valeurs prises par* X *et déterminer la loi de* X.
2. *Enfin, calculer* $E[X]$.

Propriété 10 — *L'espérance d'une v.a.r constante est égale à cette constante.*
- *Si* $X \sim \mathcal{B}(p)$, *alors* $E[X] = p$.
- *Si* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $E[X] = np$.

Démonstration. Soit $X = a$ une variable aléatoire constante. Alors $E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})a = a\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = aP(\Omega) = a$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ une variable de Bernouilli de paramètre p. Notons S l'événement dont elle est l'indicatrice, notons que $P(S) = P(X=1) = p$. Alors $E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) = \sum_{\omega\in S} P(\omega)\times 1 = P(S) = p$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ une variable binomiale de paramètres n et p. On remarque qu'on peut écrire X comme somme de n variables aléatoires X_i indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. On a alors par linéarité $E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$.

Propriété 11 (Inégalité de Markov) *Pour tout réel* $a > 0$, $P(X \geq a) \leq E[X]/a$

Démonstration. Grâce à la formule de transfert, on peut écrire

$$E[X] = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x = \sum_{x\geq a} P(X=x)x + \sum_{x<a} P(X=x)x.$$

On minore le premier terme par $\sum_{x\geq a} P(X=x)a = P(X\geq a)a$ et le deuxième par 0 car $P(X=x) \geq 0$ et $a > 0$. On a donc $E[X] \geq P(X \geq a)a$, d'où le résultat.

☞ **Remarque**
On peut lire l'inégalité de Markov comme suit : supposons $E[X] > 0$ *et posons* $a = nE[X]$. *Alors* $P(X > nE[X]) \leq 1/n$, *autrement dit lors d'un jeu aléatoire d'espérance* E, *gagner plus que n fois* E *a une probabilité inférieure à* $1/n$.

Exercice 24 *Une urne contient n boules numérotées de* 1 *à n. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que le dernier numéro obtenu soit supérieur ou égal au numéro obtenu lors du tirage précédent. On note* X *le nombre de tirages effectués.*

1. *Déterminer* $X(\Omega)$, *puis déterminer la probabilité des événements* $(X \geq 2)$, $(X \geq 3)$ *et* $(X = 2)$.
2. *Pour tout k de* $X(\Omega)$, *déterminer* $P(X \geq k)$, *en déduire la fonction de répartition ainsi que la loi de* X.
3. *Calculer* $E[X]$ *ainsi que sa limite quand n tend vers* $+\infty$.

2.4 Variance, écart type et covariance

Définition 22 *Le moment d'une variable aléatoire* X *d'ordre* k*, pour* k *dans* $\mathbb{N}$ *est l'espérance de* X^k.

Définition 23 *La* **variance** *d'une variable aléatoire* X *est la quantité* $V(X) = E[(X - E[X])^2]$. *Son* **écart-type** *est* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

☞ **Remarque**
L'écart-type est bien définie puisque $V(X) \geq 0$. *En effet,* $(X - E[X])^2 \geq 0$ *implique que* $E[X - E(X)]^2 \geq 0$.

Exemple 27 *Calculons la variance de* T *le temps mis par Léo pour se rendre en cours. On peut utiliser la formule de transfert pour écrire que* $V(T) = \sum_{t \in T(\Omega)} P(T = t)(t - E[T])^2$. *Ecrivons donc le tableau des données suivantes :*

t	6	6.5	7	7.5	8	8.5
$P(T = t)$	0.0041	0.41	0.16	0.33	0.33	0.13
$(t - E(T))^2$	2.59	1.23	0.37	0.012	0.15	0.79

On en déduit que $V(T) \simeq 0.73$ *et que* $\sigma(T) \simeq 0.85$.

Définition 24 *Une variable aléatoire est dite* **réduite** *si son écart-type vaut* 1.

Propriété 12 $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Démonstration. On développe $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + E(X)^2$, ce qui donne par linéarité $V(X) = E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2$, soit encore $V(X) = E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$.

Exercice 25 *On lance simultanément deux dés équilibrés et on note* X *le maximum des deux chiffres obtenus. Déterminer la loi de* X *et calculer son espérance, ainsi que sa variance.*

Propriété 13 $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Démonstration. La définition de la variance donne $V(aX + b) = E[(aX + b - E[aX + b])^2]$. La linéarité de l'espérance permet alors d'écrire $V(aX + b) = E[(aX + b - aE[X] - b)^2] = E[(aX - aE[X])^2]$. D'où $V(aX + b) = E[a^2(X - E[X])^2] = a^2 E[(X - E[X])^2) = a^2 V(X)$.

Exercice 26 *On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée dans les conditions suivantes : on arrête l'expérience dés que l'on a obtenu face et on effectue au maximum cinq lancers. Soit* X *la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.*

1. *Déterminer la loi de* X *et sa fonction de répartition.*
2. *Calculer l'espérance et l'écart-type de* X.

Propriété 14
— *Soit* $X \sim \mathcal{B}(p)$*, alors* $V(X) = p(1 - p)$.
— *Soit* $X \sim \mathcal{B}(n, p)$*, alors* $V(X) = np(1 - p)$.

Démonstration. Notons $X \sim \mathcal{B}(p)$. On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Or $P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$ et $P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 1 - p$. Donc $E(X^2) = p$, d'où $V(X) = p - p^2$, soit $V(X) = p(1 - p)$.
Nous donnons ici une première preuve calculatoire de la variance d'une loi binomiale. Nous en verrons une preuve bien plus aisée plus tard.
Calculons tout d'abord $E = E[\mathcal{B}(n, p)^2] = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)k^2$. On a

$$E = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} nk C_{n-1}^{k-1} p^k (1 - p)^{n-k}$$

car $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Donc

$$E = n \sum_{k=1}^{n} (k - 1) C_{n-1}^{k-1} p^k (1 - p)^{n-k} + n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^k (1 - p)^{n-k} = nS_1 + nS_2$$

.
La première somme S_1 vaut $\sum_{k=2}^{n} (n - 1) C_{n-2}^{k-2} p^k (1 - p)^{n-k} = (n - 1)p^2$. La deuxième somme S_2 vaut p. Au final, $E = n(n - 1)p^2 + np$.
On a alors $V(\mathcal{B}(n, p)) = E - E[\mathcal{B}(n, p)]^2 = n(n - 1)p^2 + np - n^2 p^2 = np(1 - p)$.

Exercice 27 *Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs :* A, B, C, D, E *marqués respectivement de* $1, 2, 3, 4, 5$ *points. La bille frappe au hasard un des butoirs* A, B *ou* C *puis : de* A*, elle frappe au hasard* B, D *ou* E *: de* B *elle frappe au hasard* D *ou* E *: de* C*, elle frappe* E*, de* D *ou de* E*, elle sort du circuit. Le joueur totalise alors les points marqués sur les butoirs heurtés par la bille. Soit* T *la variable aléatoire ainsi définie.*

1. *Déterminer la loi de probabilité de* T.
2. *Calculer son espérance et sa variance.*

Propriété 15 (Inégalité de Bienaymé-Tchebyshev) . *Pour tout réel* $a > 0$ *, on a* $P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$.

Démonstration. Posons $Y = (X - E(X))^2$ et remarquons que $P(|X - E(X)| \geq a) = P((X - E(X))^2 \geq a^2) = P(Y \geq a^2)$. On applique alors l'inégalité de Markov à Y et a^2. On trouve alors que $P(Y \geq a^2) \leq E(Y)/a^2$. Or $E(Y) = V(X)$. D'où le résultat.

☞ **Remarque**

Cette inégalité permet de comprendre la variance d'une variable aléatoire comme une mesure de dispersion. En effet, plus $V(X)$ *est faible, moins* X *a de probabilités d'être éloigné de* $E(X)$.

Exercice 28 *Une urne contient 12 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ; on répète cette opération quatre fois de suite. On note* X *la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules noires tirées.*

1. *Déterminer la loi de* X*, son espérance et sa variance.*
2. *Déterminer un nombre réel r pour lequel on ait* $P(|X - 4/5| \geq r) \leq 10^{-2}$.

Définition 25 *On définit la* **Covariance** *de deux variables aléatoires* X *et* Y *par* $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

Propriété 16 *On a* $Cov(X, X) = V(X)$ *et* $Cov(X, Y) = Cov(X + a, Y + b)$.

Démonstration. C'est immédiat d'après la définition.

Propriété 17 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Démonstration. Développons $Cov(X, Y) = E[XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)]$. On a alors par linéarité de l'espérance. $Cov(X, Y) = E[XY] - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Propriété 18 $V(X + Y) = V(X) + 2Cov(X, Y) + V(Y)$.

Démonstration. Pour alléger les calculs, nous pouvons supposer que X et Y sont centrées (en effet $V(X-E(X)) = V(X)$ et $Cov(X, Y) = Cov(X - E(X), Y - E(Y))$. On a alors $V(X + Y) = E[(X + Y)^2] = E[X^2 + 2XY + Y^2] = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y)^2 = V(X) + 2Cov(X, Y) + V(Y)$.

Exercice 29 *On dispose de deux urnes. La première,* U_1 *contient* $n + 1$ *jetons numérotés de* 0 *à* n *; la seconde,* U_2 *contient* n *jetons numérotés de* 1 *à* n*. On tire au hasard un jeton de l'urne* U_1 *et on note* N *le numéro obtenu ; puis on tire une poignée de* N *jetons de l'urne* U_2.

1. *Déterminer l'espérance et la variance de* N.
2. *Soit* X_i *la variable aléatoire réelle prenant la valeur* 1 *si le jeton* i *de l'urne* U_2 *a été tiré, et la valeur* 0 *sinon. Quelle est alors la loi de* X_i*, son espérance et sa variance ?*
3. *Déterminer la covariance des couples* (X_i, X_j) *pour* $i \neq j$*. Ces variables aléatoires réelles sont-elles indépendantes ?*

Exercice 30 *Soit un jeu de 34 cartes, qui contient donc 2 jokers. On joue au jeu suivant :*

- *On retourne les cartes une par une jusqu'à l'obtention du premier joker.*
- *Après le premier joker, à chaque fois que l'on retourne une carte, le joueur paye un euro.*
- *Dès que le second joker est retourné, le joueur gagne a euros, et on arrête de jouer.*

Soit X *(resp.* Y*) la variable aléatoire égale au nombre de cartes retournées pour obtenir le premier (resp. second) joker.*

1. *Soit i et j deux entiers inférieurs à* 34*. Montrer que* $P(X = i \cap Y = j) = 0$ *si* $1 \leq j \leq i \leq 34$ *et* $1/34 \times 33$ *si* $1 \leq i < j \leq 34$.
2. *Déterminer les lois de* X*,* Y *et* $Y - X$.
3. *Calculer alors l'espérance de* X *et en déduire pour quelles valeurs de a la partie est équilibrée.*

2.5 Indépendance de variables aléatoires

Définition 26 *On dit que deux variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes si* $P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ *pour tout événement* (A,B) *de* $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exemple 28 *Soit* X *une variable aléatoire réelle dont la loi est déterminée par le tableau suivant :*

k	-1	0	1
$P(X = k)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

On pose $Y = X^2$, *il est facile de voir que* $P(Y = 0) = 1/2$ *et* $P(Y = 1) = 1/2$.
De plus $P(X = -1 \cap Y = 0) = 0$ *et* $P(X = -1)P(Y = 0) = 1/4 \times 1/2 = 1/8$. *Il n'y a donc pas indépendance de* X *et* Y.

☞ **Remarque**
Pour montrer que deux variables aléatoires X *et* Y *sont indépendantes, il suffit de montrer que* $P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$ *pour tout* $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Définition 27 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ *n variables aléatoires, on dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour tous* $A_1, \ldots, A_n \in \prod \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, *les événements* $(X_i \in A_i)$ *sont mutuellement indépendants.*

Propriété 19 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi* $\mathcal{B}(p)$, *alors* $X_1 + \ldots X_n$ *est de loi* $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration. Posons $Y = X_1 + \cdots + X_n$. Une issue $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de Ω^n appartient à $Y = k$ pour k dans $[\![0, n]\!]$ ssi il existe $I \subset [\![0, n]\!]$ de cardinal k tel que $X_i(\omega_i) = 1$ pour tout i de I et 0 sinon. On a donc $P(Y = k) = \alpha_k P(X_{i \in I} = 1 \cap X_{i \notin I} = 0)$ avec α_k le nombre de $I \subset [\![0, n]\!]$ de cardinal k, c'est à dire C_n^k. Par indépendance des X_i, on a alors $P(X_{i \in I} = 1 \cap X_{i \notin I} = 0) = P(X = 1)^{cardI} P(X = 0)^{n - cardI} = p^k (1 - p)^{n-k}$. D'où $P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ d'où le résultat.

Propriété 20 *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes, alors* $f(X)$ *et* $g(Y)$ *le sont également.*

Démonstration. On écrit directement que

$$\begin{aligned} P((f(X), g(Y)) \in (A \times B)) &= P((X,Y) \in (f^{-1}(A), g^{-1}(B))) \\ &= P(X \in f^{-1}(A))P(Y \in g^{-1}(B)) \\ &= P(f(X) \in A)P(g(Y) \in B), \end{aligned}$$

la deuxième ligne venant de l'indépendance de X et Y, d'où l'indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$.

L'indépendance possède des conséquences sur l'espérance, la variance et la covariance des variables aléatoires réelles que nous allons développer ici.

Propriété 21 *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires réelles indépendantes,* $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Démonstration. Posons $Z = XY$. Pour z dans $Z(\Omega)$, considérons l'ensemble $A_z = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega); xy = z\}$. Il est clair que les A_z forment une partition de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et que $(Z = z) = \bigcup_{(x,y) \in A_z} (X = x) \cap (Y = y)$ (réunion d'événements deux à deux incompatibles).
Alors

$$
\begin{aligned}
E[Z] &= \sum_{z\in Z(\Omega)} P(Z=z)z \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} \left(z \sum_{(x,y)\in A_z} P(X=x\cap Y=y) \right) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} \left(z \sum_{(x,y)\in A_z} P(X=x)P(Y=y) \right) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} \left(\sum_{(x,y)\in A_z} xyP(X=x)P(Y=y) \right) \\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X=x)P(Y=y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) \sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y) \\
&= E[X]E[Y].
\end{aligned}
$$

La troisième ligne est une conséquence de l'indépendance de X et Y.

Exemple 29 *Attention, la réciproque est fausse en général. En voici un contre exemple. Considérons un univers* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *muni de la probabilité uniforme et* X *définie par* $X(\omega_1) = -1, X(\omega_2) = 0$ *et* $X(\omega_3) = 1$*, puis* Y *définie par* $Y(\omega_1) = Y(\omega_3) = 0, Y(\omega_2) = 1$*. On vérifie alors facilement que* $E(X) = 0$ *et* $XY = 0$*. On a alors bien* $E(XY) = E(X)E(Y)$*.*
Cependant, $P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{\omega_3\} = 1/3$*, tandis que* $P(X = 1) = 1/3$*, et* $P(Y = 0) = 2/3$ *soit* $P(X = 1)P(Y = 0) = 2/9$*. Ce qui infirme l'indépendance de* X *et* Y*.*

Propriété 22 *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors* $Cov(X, Y) = 0$*.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la propriété précédente et du fait que $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Propriété 23 *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors* $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$*.*

Démonstration. C'est une conséquence de la propriété précédente et du fait que $V(X+Y) = V(X)+Cov(X, Y)+V(Y)$.

Utilisons cette dernière propriété pour calculer la variance d'un loi binomiale. On a vu que la somme de n variables aléatoires de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$ mutuellement indépendantes suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. D'après ce qui précède, la variance d'une loi binomiale est alors la somme des variances des n variables de Bernouilli, soit $np(1-p)$.

2.6 Couples de variables aléatoires

Définition 28 *Soit* $X : \Omega \to E$ *et* $Y : \Omega \to F$ *deux variables aléatoires. On peut alors considérer le couple* (X, Y) *comme une variable aléatoire de* Ω *dans* $E \times F$*. On appelle* **loi conjointe** *de* X *et* Y *la loi de la variable aléatoire* (X, Y)*. Les lois de* X *et* Y *sont appellées* **lois marginales** *de la variable* (X, Y)*.*

Exemple 30 *La loi conjointe de* (X, Y) *est une probabilité. On peut la décrire par la donnée des* $P(X = x_i, Y = y_j)$ *où* x_i *parcourt* $X_(\Omega)$ *et* y_j *parcourt* $Y(\Omega)$*. Prenon l'exemple d'un lancer deux fois répété d'un dé équilibré. On note* X *la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats, et* Y *la variable égale au maximum. On décrit la loi conjointe par le tableau suivant :*

X|Y	1	2	3	4	5	6
2	1/36	0	0	0	0	0
3	0	2/36	0	0	0	0
4	0	1/36	2/36	0	0	0
5	0	0	2/36	2/36	0	0
6	0	0	1/36	2/36	2/36	0
7	0	0	0	2/36	2/36	2/36
8	0	0	0	1/36	2/36	2/36
9	0	0	0	0	2/36	2/36
10	0	0	0	0	1/36	2/36
11	0	0	0	0	0	2/36
12	0	0	0	0	0	1/36

On peut calculer par exemple $P(X = 3 \cap Y = 2) = P(\{1,2\} \cup \{2,1\}) = P(\{1,2\}) + P(\{2,1\}) = 2/36$.
On peut déduire les lois marginales de la loi conjointe. En effet, $P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_j)$ *ou* $P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i, Y = y_j)$. *On trouve alors la loi suivante pour* Y :

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

☞ Remarque
Attention, la loi conjointe d'un v.a.r n'est pas déterminée par les lois marginales.

Exercice 31 *On lance deux dés équilibrés ayant n faces numérotées de* 1 *à n. Quelle est la probabilité qu'il y ait un écart de* 1 *entre les deux dés ?*

Exercice 32
1. *On considère les coefficients réels* $p_{ij} = \lambda \times i \times j$, *pour i et j compris entre* 1 *et n. Donner la valeur de* λ *pour laquelle les* p_{ij} *forment la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires réelles.*
2. *Soit alors* (X, Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $[\![1, n]\!]$, *admettant* (p_{ij}) *pour loi conjointe. Déterminer les lois marginales de* X *et* Y. *Ces variables aléatoires sont elles indépendantes ?*

Définition 29 *Soit* X *et* Y *deux v.a.r, et* x *dans* $X(\Omega)$ *tel que* $P(X = x) \neq 0$, *on appelle* **loi conditionnelle** *de* Y *sachant* $X = x$, *la donnée des* $P(Y = y|X = x)$ *pour* y *dans* $Y(\Omega)$, *autrement dit la donnée des* $P(Y = y|X = x) = \dfrac{P(Y = y \cap X = x)}{P(X = x)}$.

Exemple 31 *Avec l'exemple précédent, la loi conditionnelle de* X *sachant* $Y = 3$ *est donnée par le tableau suivant :*

x	4	5	6
$P(X = x\|Y = 3)$	2/5	2/5	1/5

☞ Remarque
Nous pouvons étendre ces définitions à un n-uplet de variables aléatoires comme suit :

Définition 30 *Soit* $X_1, \dots, X_n$ *n variables aléatoires. La loi conjointe des* $X_1, \dots, X_n$ *est la loi de la variable aléatoire* $(X_1, \dots, X_n)$. *La loi de* X_i *pour i dans* $1, \dots, n$ *est appelée loi marginale de* $X_1, \dots, X_n$.

Définition 31 *Soit* $X_1, \dots, X_m$ *et* $Y_1, \dots, Y_n$ *des variables aléatoires, et* $(y_1, \dots, y_n)$ *des issues telles que* $P(Y_1 = y_1 \cap \dots \cap Y_n = y_n) \neq 0$. *On appelle alors loi conditionnelle de* $X_1, \dots, X_m$ *sachant* $(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n)$ *la donnée des*
$$P(X_i = x_i|Y_j = y_j) = \frac{P(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_m = x_m \cap Y_1 = y_1 \cap \dots \cap Y_n = y_n)}{P(Y_1 = y_1 \cap \dots \cap Y_n = y_n)}.$$

Exercice 33 *Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne. On considère la variable aléatoire* X *prenant la valeur* 1 *si la première boule tirée est blanche et* 0 *sinon, ainsi que la variable aléatoire* Y *qui prend la valeur* 1 *si la seconde boule tirée est blanche et* 0 *sinon. Evaluer la loi conjointe et les lois marginales du couple* (X_1, X_2) *dans le cas d'un tirage sans remise et avec remise. Conclure.*

Exercice 34 *Reprenez l'expérience de l'urne avec les boules blanches et noires.*

1. *Evaluez l'indépendance des variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *dans le cas d'un tirage avec remise puis dans le cadre d'un tirage sans remise.*
2. *Calculez les différontes lois conditionnelles et retrouver la loi du couple à partir des lois conditionnelles.*

Exercice 35 *On choisit au hasard un nombre* n *entre* 1 *et* 1000*, puis un nombre entre* 1 *et* n*. On souhaite savoir ce que l'on obtient en moyenne pour ce second nombre. On note* X *la variable aléatoire coorespondant au premier nombre choisi et* Y *au deuxième nombre. Déterminer la loi du couple* (X, Y)*, puis celle de* Y*. En déduire l'espérance de* Y*.*