Kholle 9 filière MPSI
Planche 1

★★★

1. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite. Le prouver dans le cas d'une limite finie en un réel.
2. Étudier la limite éventuelle suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \exp(\cos(x))$$

3. Soit f et g deux fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose

$$M(x) = \sup_{t \in [-1,1]} (f(t) + xg(t))$$

   Montrer que M est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis Lipschitzienne.

★★★

Kholle 9 filière MPSI
Planche 2

★★★

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et le démontrer.
2. Étudier la limite éventuelle suivante :

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/3}$$

3. On se donne f une fonction définie au voisinage de 0 telle que

$$0 = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x}$$

   Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 9 filière MPSI
Planche 3

★★★

1. Ènoncer le théorème de bornes atteintes. Le démontrer.
2. Étudier la limite éventuelle suivante :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/x$ est décroissante. Montrer que f est continue.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 9 filière MPSI
Bonus

⋆⋆⋆

1. On appelle fonction uniformément continue toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

   Montrer que toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

2. On appelle fonction semi-continue supérieurement en x_0 toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t > x_0, \exists \delta > 0, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) \leqslant t$$

   Montrer que la fonction partie entière est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆