• *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

• *Ce devoir est long, il n'est pas fait pour être terminé, mais vous devez donner le meilleur de vous-mêmes dans les parties traitées.*

• *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*

• *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*

• *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*

Fonctions de Bessel

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note (E_n) l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on s'intéresse à ses solutions sur $\mathbb{R}$.

(a) On note J_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x\sin(t))dt$$

Pour quelles valeurs de x cette intégrale est-elle définie ? En particulier, est-elle définie en 0 et quelle y serait sa valeur éventuelle ?

(b) On fixe t et on note $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(nt - x\sin(t))$. Montrer que f_t est deux fois dérivable et exprimer pour tout réel x, $f_t'(x)$ et $f_t''(x)$.

(c) On admet que J_n est deux fois dérivable, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)\sin(nt - x\sin(t))dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n''(x) = \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(t)\cos(nt - x\sin(t))dt$$

Effectuer une intégration par parties dans la forme de J_n' pour refaire apparaître un terme $\cos(nt - x\sin t)$ dans l'intégrale. Aboutir à l'expression suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (n\cos t - x\cos^2 t)\cos(nt - x\sin t)dt$$

(d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = -\frac{n}{\pi} \int_0^\pi (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)dt$$

(e) Calculer l'intégrale de la question précédente en trouvant une primitive judicieuse et en déduire que J_n satisfait l'équation différentielle (E_n).

2. (a) Passage par les complexes : Démontrer qu'on a l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(nt - x\sin t)}dt$$

   (b) On admet que J_n est indéfiniment dérivable et que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, J_n^{(j)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (i\sin t)^j e^{-i(nt - x\sin t)}dt$$

   En déduire une expression intégrale de la valeur de $J_n^{(n)}(0)$. Calculer cette intégrale à l'aide d'une formule d'Euler et en développant à l'aide du binôme. Aboutir à l'expression $J_n^{(n)}(0) = 2^{-n}$.

   (c) Montrer que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |J_n^{(j)}(x)| \leq 1$$

3. Dans cette question, on se restreint au cas $n = 0$. On admet qu'il existe une fonction φ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) + x^2\varphi(x) = -2xJ_0'(x)$$

   On définit alors la fonction Y_0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ (Attention au domaine de définition!) par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad Y_0(x) = J_0(x)\ln x + \varphi(x)$$

   (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} Y_0(x) = -\infty$.

   (b) Montrer que Y_0 est de classe deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^2 Y_0''(x) + xY_0'(x) + x^2 Y_0(x) = 0$$

   (c) On note $W = J_0'Y_0 - Y_0'J_0$ défini sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer alors $x^2W'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer qu'en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, xW'(x) + W(x) = 0.$$

   (d) En déduire que la fonction $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto xW(x)$ est constante.

   (e) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} xW(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-J_0^2(x)) = -1$. En déduire l'expression de $W(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$.

Un peu d'analyse de Fourier

1. Fonction $d_{\mathbb{Z}}$.

   (a) Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

   (b) Établir que pour tout réel x, la partie $\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$.

   (c) On note pour tout réel x, $d(x,\mathbb{Z}) = \inf\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Démontrer les expressions de $d(x,\mathbb{Z})$ dans les deux cas suivants :

      i.

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad d(x,\mathbb{Z}) = x$$

      ii.

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad d(x,\mathbb{Z}) = 1 - x$$

(d) Démontrer que l'application $d_{\mathbb{Z}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$ est paire.

(e) Montrer que l'application $d_{\mathbb{Z}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$ est périodique de période 1.

(f) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction $d_{\mathbb{Z}}$ est-elle dérivable ?

(g) Pour tout entier relatif n dans $\mathbb{Z}$, on note $c_n = \displaystyle\int_0^1 d(t, \mathbb{Z}) e^{-i2\pi n t} dt$. Calculer c_n.

2. Une suite convergente

(a) Soit n un entier naturel non nul. En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto 1/t^2$, montrer que

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

(b) En déduire que la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

vérifie

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{N+1} \leq S_N \leq 2 - \frac{2}{N+1}$$

(c) Montrer qu'alors la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

(d) On admet que la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $d_{\mathbb{Z}}(0)$. En déduire les limites suivantes :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

3. Noyau de Dirichlet. Soit n un entier naturel non nul. On note $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$

(a) Montrer que

$$\forall x \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = 2n+1$$

$$\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \backslash \{0\}, \quad D_n(x) = 2\frac{\sin(nx)}{x} + \left(\sin(nx) \left(\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} - \frac{2}{x} \right) + \cos(nx) \right)$$

(c) On admet qu'on peut intégrer $x \mapsto |\sin(nx)|/|x|$ sur $[-\pi, \pi]$ sans se soucier du dénominateur nul en 0. Montrer alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(nx)|}{|x|} dx = 2 \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

(d) En déduire que la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = -\frac{4}{\pi^2} \ln(n) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

est bornée.

Cette dernière question est très longue et difficile.