Kholle 20 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. En dimension finie, caractérisation des bases à l'aide de la longueur des familles.
2. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrer que $(X^2, (X-1)^2, (X+1)^2)$ est une base de E. Décomposer $X^2 + X + 1$ dans cette base.
3. Pour tout entier naturel, on note $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$. Qu'en déduire sur la dimension de $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$?

★★★

Kholle 20 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Soit F, G deux sev de E de dimension finie. Que vaut $\dim(F+G)$? Le démontrer.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, onse pose $e_1 = (-1,1,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (1,1,-1)$. Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposer le vecteur $x = (8,4,2)$ dans cette base.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0$. On note $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0\}$. Montrer que $p \leqslant n$.
   Indication : on pourra chercher une famille libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

⋆⋆⋆

IPESUP 2022/2023

Kholle 20 filière MPSI/MP2I
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Théorème de Heine.
2. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto \mathrm{ch}(x), x \mapsto \mathrm{sh}(x))$ est libre.
3. Soit E de dimension finie, A et B deux sev de E de même dimension. Montrer qu'il existe un sev de S de E tel que
$$A \oplus S = B \oplus S = E$$
i.e qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

⋆⋆⋆

IPESUP 2022/2023

Kholle 20 filière MPSI/MP2I
Bonus

★★★

On note $\mathbb{K} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ muni des lois internes suivantes :

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Il s'agit d'un corps, on ne demande pas de le démontrer.

1. Dans $E = \mathbb{K}^2$, on note $u = (1, 2)$. Représenter $\text{Vect}(u)$ et dénombrer les éléments de ce sev de E.
2. Compter les éléments de tout sev de E de dimension 1.
3. Combien y a-t-il de sev de E de dimension 1 ?

★★★