• *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

• *Ce devoir est long, il n'est pas fait pour être terminé, mais vous devez donner le meilleur de vous-mêmes dans les parties traitées.*

• *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*

• *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*

• *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*

• *L'exercice et le problème peuvent être traités dans n'importe quel ordre à condition de mentionner clairement leurs numéros.*

Exercice : Une étude de suite implicite.

1. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'existence d'une unique solution réelle positive ou nulle de l'équation d'inconnnue x

$$(E_n) \quad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$$

Indication : on pourra introduire la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$. On note u_n cet unique réel positif.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

(c) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$.

(d) Déterminer u_2.

(e) Démontrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $1/2$.

(f) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\delta_n = n(u_n - 1/2)$. Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite nulle.

2. (a) On introduit la fonction $\psi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) - (x+1)\ln(2)$. Étudier ses variations.

(b) En déduire que pour tout entier n non nul,

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

(c) Pour tout entier naturel non nul n, on note $g_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)f_n(x)$. Déduire de ce qui précède

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \leq 0$$

(d) En déduire finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Problème : Vers un théorème de Polya.

1. On note $H_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Pour tout entier naturel n non nul, on note $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

   Ces fonctions polynomiales sont appelées fonctions polynomiales de Hilbert.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel x, on a
   $$H_n(x+1) - H_n(x) = H_{n-1}(x)$$

   (b) On fixe un entier relatif j. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, si $j \geq 0$, alors $H_n(j) = \dbinom{j}{n}$, puis que si $j < 0$, alors $H_n(j) = (-1)^n\dbinom{-j+n-1}{n}$.

   (c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$$

   (d) Soit n un entier naturel non nul. On note P la fonction polynomiale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H_k$. Montrer alors que
   $$\forall j \in [[1, n]], \quad P(j) = 0$$
   où $[[1, n]]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.

   (e) Avec les mêmes notations qu'en question précédente, en déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xP(x) = (-1)^n(n+1)H_{n+1}(x)$$
   Indication : on pourra chercher à factoriser P dans un premier temps.

2. On considère i et j des entiers tels que $0 \leq i \leq j$. En utilisant le binôme de $(1-1)^{j-i}$, démontrer que
$$\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{k}{i}\binom{j}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

3. Soit n un entier naturel et Q une fonction polynomiale de degré n. On admet qu'il existe un unique $n+1$-uplet de réels $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ tel que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k H_k$.

   (a) Montrer que
   $$\forall j \in [[0, n]], \alpha_j = \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}Q(k).$$

   (b) Montrer que
   $$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq n+1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}Q(k) = 0.$$

4. Avec les mêmes notation ques précédemment, démontrer alors l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

   (a) $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

   (b) Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs en lesquels Q prend des valeurs entières.

   (c) $\forall k \in [[0, n]], \alpha_k \in \mathbb{Z}$.

   Indication : on pourra se contenter de montrer les implications $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (a)$.

5. On considère l'ensemble des fonctions polynomiales, que l'on note E et on introduit l'application $\Delta : E \to E$ telle que
$$\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$
On ne demande pas de démontrer que Δ est bien à valeurs dans E. Pour tout entier j non nul, on note Δ^j la composée j-ième de Δ, i.e $\underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{j \text{ termes}}$. On note $\Delta^0 = \mathrm{Id}_E$. On admet que Δ et toutes ses composées sont linéaires, i.e
$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (P,Q) \in E^2, \Delta^j(aP + bQ) = a\Delta^j(P) + b\Delta^j(Q)$$
Démontrer que $\Delta(H_0) = 0$ et pour tout entier naturel k non nul, $\Delta(H_k) = H_{k-1}$. Donner une expression de $\Delta^j(H_k)$ pour j et k des entiers naturels.
6. Soit n un entier naturel et Q une fonction polynomiale de degré n. Montrer que
$$Q = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k(Q))(0) H_k$$
7. On considère la fonction polynômiale R définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = x^3$$
Démontrer que $R = H_1 + 6H_2 + 6H_3$. Déterminer une fonction polynomiale S telle que $\Delta(S) = R$ et **en déduire** l'expression bien connue de $\sum_{k=0}^{n} k^3$.
8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que cette suite est polynomiale lorsqu'il existe une fonction polynomiale Q telle que
$$\forall j \in \mathbb{N}, u_j = Q(j)$$
Établir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est polynomiale si et seulement si
$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad j \geq n+1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} u_k = 0$$

★ ★ ★ ★ ★