Correction

Exercice 1.

Simplifier le plus possible les expressions suivantes

$$A = \frac{\frac{2}{56} + \frac{12}{4} - \frac{23}{7}}{\frac{5}{7} + \frac{1}{4}}, \quad B = \frac{\sin(\pi/6) + \cos(\pi/6) - 1}{\sqrt{12} - \sqrt{75}}$$

Solution 1.

$$A = \frac{\frac{2\times1+12\times14-23\times8}{56}}{\frac{5\times4+1\times7}{28}} = -\frac{14}{56}\frac{28}{27} = -\frac{7}{27}$$

$$B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{-3\sqrt{3}} = -\frac{3-\sqrt{3}}{18}$$

Exercice 2.

Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution 2.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier relatif p et un entier naturel q non nul tel que $\sqrt{3} = p/q$. Alors en notant $d = p \wedge q$ le pgcd de p et q, on peut écrire $p = dp'$ et $q = dq'$ avec p' et q' des entiers premiers entre eux et $\sqrt{3} = p'/q'$. Cela entraîne $3q'^2 = p'^2$, donc que 3 divise p'^2. Comme 3 est premier, il divise p', donc il existe un entier a tel que $p' = 3a$. Ainsi, $3q'^2 = 9a^2$, soit encore $q'^2 = 3a^2$. Mais alors, comme précédemment, 3 divise q'^2 et 3 est premier, donc 3 divse q'. On a alors montré que 3 divise p' et q', alors que le pgcd de ces deux entiers vaut 1, ce qui est absurde.

Conclusion : $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 3.

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant : $\sqrt{x^3 + 6x^2 + 6x + 5} = (x+2)\sqrt{x+1}$.

Solution 3.

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit x un réel vérifiant l'égalité souhaitée. Alors

$$x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x+2)^2(x+1) = (x^2 + 4x + 4)(x+1) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4.$$

Cela entraîne

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad (x-1)^2 = 0$$

Ainsi $x = 1$.

Vérifions que ce réel convient. $1 + 1 = 2 > 0$ et $1^3 + 6 \times 1^2 + 6 \times 1 + 5 = 18 > 0$, donc les racines carrées sont bien définies. De plus,

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} = (1+2)\sqrt{1+1}$$

Ainsi le réel 1 satisfait l'égalité attendue et c'est le seul réel qui la vérifie.

Exercice 4.

Etudier la convergence des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n-1}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\displaystyle\int_0^1 x^n dx\right)\left(\displaystyle\int_1^n \dfrac{dx}{x}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \dbinom{2n}{n} / \dbinom{2(n+1)}{n+1}$ où k désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour chacune de ces suites on précisera en le justifiant, si la suite converge ou non, et en cas de convergence on précisera la limite.

Solution 4.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n^2-2n+1}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n-1} = \dfrac{(n^2-2n+1)(n-1)-(n^2+1)(n+1)}{n^2-1} = \dfrac{(-4n^2+2n-2)}{n^2-1} = \dfrac{-4+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}$.
   Comme $2/n$, $-2/n^2$ et $1/n^2$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -4.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right] = \exp\left[\dfrac{1}{n} n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right]$. On connaît la limite remarquable de $\ln(1+x)/x$ quand x tend vers 0 qui vaut 1. Par conséquent, $n^2 \ln(1+1/n^2)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{1}{n} n^2 \ln(1+1/n^2)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que v_n tend vers $\exp(0) = 1$ quand n tend vers $+\infty$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\displaystyle\int_0^1 x^n dx\right)\left(\displaystyle\int_1^n \dfrac{dx}{x}\right) = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 [\ln(x)]_1^n = \dfrac{\ln(n)}{n+1} = \dfrac{\ln(n)}{n}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Le quotient de gauche tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, tandis que le second tend vers 1. Ainsi, w_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \dbinom{2n}{n} / \dbinom{2(n+1)}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{(1+1/n)(1+1/(2n))}$. Ainsi s_n tend vers $1/4$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. On considère une fonction périodique de période 2π, i.e $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)$ et de classe C^1 (dérivable et de dérivée continue). Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt + i\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

1. Procéder à une intégration par parties pour exprimer c_n en fonction de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)$ et de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)$.
2. En admettant que f' est bornée, démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Correction 5.

1. Soit n un entier naturel non nul. On commence par remarquer, comme n est non nul, que $[0,2\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{n}\sin(nt)$ est de classe C^1 et une primitive de $t \mapsto \cos(nt)$. On en déduit par intégration par parties que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \left[f(t)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{1}{n}\sin(nt)dt = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)dt$$

On mène un raisonnement similaire via la primitive $t \mapsto -\frac{1}{n}\cos(nt)$ de $t \mapsto \sin(nt)$, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \left[-f(t)\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{1}{n}\cos(nt)dt = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)$$

En combinant ces deux égalités, on obtient

$$c_n = \frac{1}{n}\left(-\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)dt + i\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)dt\right) = \frac{i}{n}\left(\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)dt + i\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)dt\right)$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Notons M une borne de f', i.e un réel positif tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \le M$$

On en déduit d'après les variations du cosinus et du sinus que

$$\forall t \in [0, 2\pi], |f'(t)\cos(nt)| \le M \quad |f'(t)\sin(nt)| \le M$$

La croissance de l'intégrale permet alors de majorer

$$\left|\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)\right| dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)\cos(nt)|dt \le 2\pi M$$

$$\left|\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\right| dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)\sin(nt)|dt \le 2\pi M$$

Ainsi, on a par inégalité triangulaire

$$|c_n| \le \frac{1}{n}4\pi M$$

Or le majorant de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit par théorème d'encadrement, que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite nulle.

Exercice 6.

On se donne trois entiers naturels tous non nuls n, p, q et on note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$.

1. Démontrer que pour tout réel x non nul, $|f(x)| \le \frac{|x|}{n^p}$ et $|f(x)| \le \frac{1}{|x|n^q}$
2. Étudier les variations de f et démontrer en particulier que son maximum vaut $\frac{1}{2}n^{-(p+q)/2}$.

Solution 6.

1. Soit x un réel non nul. Comme x^2 et n^q sont positifs, $n^p + x^2 n^q \ge n^p > 0$, d'où $\frac{1}{n^p + x^2 n^q} \le \frac{1}{n^p}$. On en déduit comme $|x|$ est positif que

$$|f(x)| = \frac{|x|}{n^p + x^2 n^q} \le \frac{|x|}{n^p}.$$

Pour démontrer la seconde inégalité, on procède de même en remarquant que $n^p + x^2 n^q \ge x^2 n^q > 0$ puisque x est non nul, donc que $\frac{1}{n^p + x^2 n^q} \le \frac{1}{x^2 n^q}$. Ainsi,

$$|f(x)| \le \frac{|x|}{x^2 n^q} = \frac{|x|}{|x|^2 n^q} = \frac{1}{|x| n^q}.$$

2. On remarque tout d'abord que la fonction f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais. Elle est par conséquent dérivable et vérifie pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1(n^p + x^2 n^q) - x 2x n^q}{(n^p + x^2 n^q)^2} = \frac{n^p - x^2 n^q}{(n^p + x^2 n^q)^2}$$

Comme le dénominateur est un carré, l'étude du signe de f' revient à l'étude du signe du numérateur. C'est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $\pm\sqrt{n^p/n^q} = \pm n^{(p-q)/2}$ et de coefficient dominant négatif. On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty, -n^{(p-q)/2}]$, croissante sur $[-n^{(p-q)/2}, n^{(p-q)/2}]$, puis décroissante sur $[n^{(p-q)/2}, +\infty[$. De plus, d'après la seconde inégalité prouvée précédemment, f tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$ par théorème d'encadrement. Il s'ensuit que le maximum de f est atteint en $n^{(p-q)/2}$ et qu'il vaut

$$f(n^{(p-q)/2}) = \frac{n^{(p-q)/2}}{n^p + n^{p-q} n^q} = \frac{n^{(p-q)/2}}{2n^p} = \frac{1}{2} n^{-(p+q)/2}$$

Exercice 7.

Soit n un entier naturel non nul. On procède à $2n$ lancers indépendants d'une pièce de monnaie. Celle-ci a la probabilité p de tomber sur pile avec p un réel dans $[0,1] \setminus \{1/2\}$, et la probabilité $q = 1 - p$ de tomber sur face à chaque lancer.

1. Quelle est la probabilité d'avoir autant de pile que de face au bout des $2n$ lancers ?
2. Démontrer que $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ et en déduire la limite de la probabilité précédente quand n tend vers $+\infty$.

Solution 7.

1. Un tel événement correspond au choix des n lancers pour lesquels la pièce tombe sur pile. Les n autres lancers sont parfaitement déterminés : la pièce tombe sur face. La probabilité d'un tel événement est donc

$$\binom{2n}{n} p^n q^n$$

2. On exploite le binôme de Newton

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{n}$$

Ainsi, on a, toutes quantités positives,

$$0 \leq \binom{2n}{n} p^n q^n \leq (4p(1-p))^n$$

En outre, l'étude de la fonction $x \mapsto 4x(1-x)$ sur $[0,1]$ montre qu'elle atteint son maximum 1 uniquement en le réel 1/2. Par conséquent, comme p est différent de 1/2, $0 \leq 4p(1-p) < 1$. Par conséquent, la suite géométrique de raison $4p(1-p)$ tend vers 0. On en déduit par encadrement que la probabilité étudiée tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.

1. Montrer pour tout entier naturel n, il existe un unique réel strictement positif a_n tel que $\ln(a_n) + na_n = 0$. *On pourra introduire pour tout entier n l'application $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) + nx$.*
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Solution 8.

1. La foncton f_n indiquée est dérivable comme somme de fonctions dérivables et elle vérifie pour tout réel x strictement positif,
$$f_n'(x) = \frac{1}{x} + n > 0$$
Par conséquent, f_n est strictement croissante. De plus, elle admet pour limite $-\infty$ en 0 par valeurs supérieures, et $+\infty$ en $+\infty$. Par conséquent, comme f_n est continue, le théorème de la bijection assure qu'elle est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, donc 0 possède un unique antécédent par f_n. Cet unique antécédent noté a_n vérifie bien $f_n(a_n) = 0$, i.e $\ln(a_n) + na_n = 0$.

2. Soit n un entier naturel. Alors $f_n(a_{n+1}) = \ln(a_{n+1}) + na_{n+1} = -(n+1)a_{n+1} + na_{n+1} = -a_{n+1} < 0$. Or, on a vu que f_n était continue, strictement croissante et ne s'annulait qu'en a_n. Par conséquent, $a_{n+1} \in]0, a_n[$, i.e $a_{n+1} < a_n$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus, elle est minorée par 0, donc convergente. Notons l sa limite. On démontre que cette limite est nulle par l'absurde. Supposons que l est non nulle, alors la continuité du logarithme sur $\mathbb{R}^{+*}$ assure que $\ln(a_n)$ tend vers $\ln(l)$, mais alors $a_n = -\ln(a_n)/n$ tend vers 0, ce qui est absurde. Conclusion, la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

Exercice 9. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

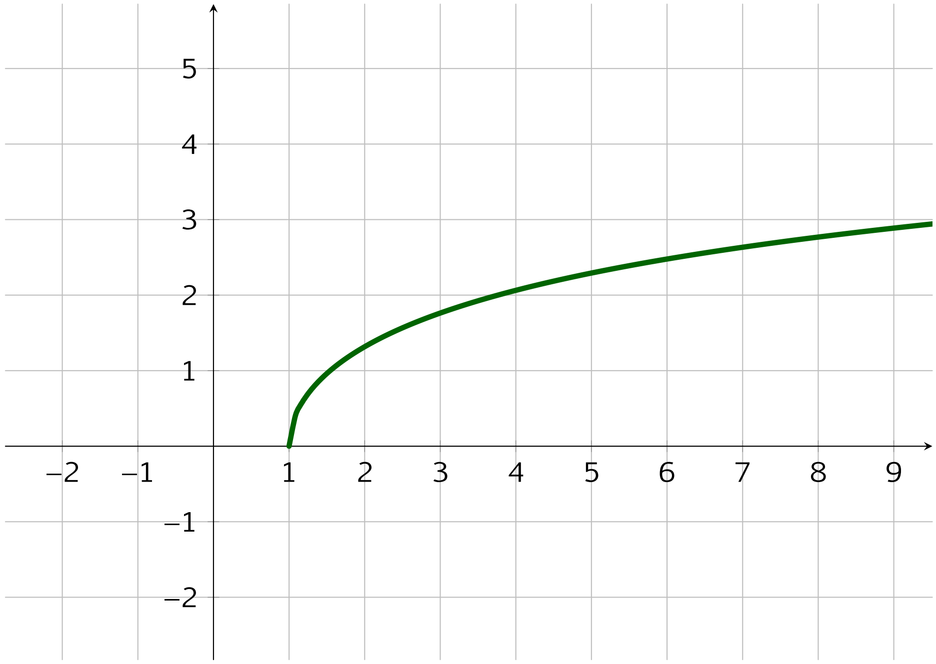
1. Donner l'ensemble D_f de définition de f.
2. Donner l'ensemble des points de dérivabilité de f, étudier ses variations sur son ensemble de définition, puis tracer son graphe.
3. Démontrer que f est une bijection de D_f dans $\mathbb{R}^+$ et que sa réciproque g vérifie pour tout réel positif t,
$$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$$

Solution 9.

1. Un réel x est dans l'ensemble de définition si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$ et $x + \sqrt{x^2-1} > 0$. On introduit alors la fonction $g :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$. Elle est clairement strictement positive sur $[1, +\infty[$. Si un réel négatif x vérifie $g(x) \geq 0$, alors $\sqrt{x^2-1} \geq -x$. Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a alors $x^2 - 1 \geq x^2$, soit $-1 \geq 0$, ce qui est absurde. Par conséquent g est strictement négative sur $]-\infty, -1]$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $[1, +\infty[$.

2. Par composition, on sait que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que sa dérivée vérifie
$$\forall x > 1, f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$$
Ainsi, f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Elle vérifie $f(1) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. L'allure du graphe est tracée en page suivante.

3. D'après la stricte croissance et les variations étudiées précédemment, comme f est continue, f est un bijection de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$. Soit t un réel positif, alors il existe un unique réel $x = g(t)$ dans $[1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$, ce qui implique que $g(t) + \sqrt{g(t)^2 - 1} = e^t$, d'où $g(t)^2 - 1 = (e^t - g(t))^2$. On a donc
$$g(t)^2 - 1 = e^{2t} - 2g(t)e^t + g(t)^2$$
soit encore
$$2g(t)e^t = e^{2t} + 1.$$
Ainsi,
$$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$$



5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
−1
−2

★ ★ ★ ★ ★