6/10

Rapport colle — 21/10/2022

Alexandre BRUNET

— Question cours :

Mq : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

Par récurrence :

- Initialisation : évidente
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Alors $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{(n+1)}{6}(n(2n+1) + 6(n+1))$

$= \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + 7n + 6)$

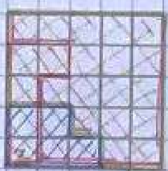
$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

- Conclusion : on a bien $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Correct

Exercice

1\. Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer $\sum_{X \in P(E)} card(X)$



Soit $x \in X$: $card(X) = \sum_{x \in X} 1$

Donc $\sum_{X \in P(E)} \sum_{x \in X} 1 = \sum_{(X,x) \in P(E) \times E} 1 = \sum_{x \in E} \left(\sum_{Y \in P(E)} 1 \right)$

Préciser dans l'interversion des sommes qu'il s'agit des parties X de E qui contiennent x

$= \sum_{x \in E} \frac{2^n}{2} = \sum_{x \in E} 2^{n-1}$

$= \boxed{n 2^{n-1}}$

Ok

2\. Calculer $\sum_{X,Y \in P(E)} |X \cap Y|$

On suppose $card(X) = k$ fixé avec

$\sum_{Y \in P(E)} |X \cap Y| = \sum_{Y \in P(X)} 1 = 2^k$

$\sum_{X \in P(E)} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} =$

Il y a bien plus de parties de E que cela. Si X possède un seul élément, il y a toutes les parties Y de E qui contiennent cet élément. Il y en a 2^{n-1}. Les autres ne participent pas à cette somme. Dans ce cas particulier, la somme vaut 2^{n-1} et non 2^1. De plus, lors de la sommation pour X parcourant P(E), il n'y pas qu'une partie ayant exactement k éléments, mais binomial(n,k)