Kholle 11 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Énoncer et démontrer un crtière de diagonalisabilité d'un endomorphisme $u$ en dimension finie à l'aide de son polynôme caractéristique.
2. Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice $A$ dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(A) = M$. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$ ?

★★★

Kholle 11 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Démontrer qu'un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il admet une polynôme annulateur scindé.
2. Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On se donne deux réels $a$ et $b$ avec $b \neq 0$. Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

et montrer qu'elle est diagonalisable. En déduire son inverse le cas échéant, et ses puissances.

★★★

Kholle 11 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Démontrer que $E$ est somme directe des sous-espaces caractéristiques de $u$ et donner la dimension de ces sous-espaces.
2. Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
3. On se place sur $\mathbb{C}$ et on considère un endomorphisme $u$ tel que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{tr}(u^k) = 0$$
Montrer que $u$ est nilpotent. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$ ?

★★★

Kholle 11 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Exprimer la trace de le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable à l'aide de ses valeurs propres. Le démontrer.
2. Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout endomorphisme $u$, on note $\rho(u) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)\}$ son rayon spectral. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\rho(u) = \lim_{k\to+\infty} \left(\|u^k\|^{1/k}\right)$$

★★★