Rapport de khôlle n°2

Adrien Lauze

TB : 9/10

⋆
⋆ ⋆

Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse. On se place dans le cas où f est monotone et à valeurs réelles.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et soit $x_0 \in I$. Alors $F : I \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en x_0.

Démonstration : Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et f à valeurs réelles, par exemple croissante. D'après la relation de Chasles, $\forall x > x_0, \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{1}{x-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Or f est croissante et pour tout $t \in [x_0, x]$, $f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$. Donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t$. On a donc $f(x_0)(x-x_0) \leqslant F(x)-F(x_0) \leqslant f(x)(x-x_0)$. Comme $x - x_0 > 0$, on a $f(x_0) \leqslant \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leqslant f(x)$. Or par continuité de f en x_0, $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ x>x_0}]{} f(x_0)$. Par théorème d'encadrement, $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ x>x_0}]{} f(x_0)$. On reproduit la même démarche pour tout x strictement inférieur à x_0, et on retrouve par encadrement, $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ x<x_0}]{} f(x_0)$. Donc le taux d'accroissement de F en x_0 admet une limite finie en x_0, donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ et ce pour tout élément x_0 de I. Donc F est dérivable sur I et $F' = f$. ■

Nickel

Exercice

La parité permet de restreindre à [0,pi/2]

1) Pour x réel, simplifier l'expression de $F(x)$ où $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2(x)} \arcsin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$.

3) Retrouver ce résultat par un calcul direct en faisant le changement de variable $t = \sin^2(u)$.

sin^2(-x)=sin^2(x)

1) Cherchons tout d'abord à restreindre l'intervalle d'étude de F. Remarquons que pour tout réel x, F est paire car $F(x) = F(-x)$. Aussi, comme $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, par élévation au carré, on a $\sin^2(x+\pi) = \sin^2(x)$; et que $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, par élévation au carré, on a $\cos^2(x+\pi) = \cos^2(x)$, on en déduit que $F(x+\pi) = F(x)$ donc F est π-périodique. On peut ainsi l'étudier sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ est définie et continue sur $[0,1]$ par composées de deux fonctions continues sur $[0,1]$, donc cette fonction admet une primitive φ sur $[0,1]$. De même, $t \mapsto \arccos(\sqrt{t})$ est définie et continue sur $[0,1]$ par composées de deux fonctions continues sur $[0,1]$, donc cette fonction admet une primitive ρ sur $[0,1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \varphi(\sin^2(x)) - \varphi(0) + \rho(\cos^2(x)) - \rho(0)$. Or, φ et ρ sont dérivables sur $[0,1]$ et les fonctions $\sin^2$ et $\cos^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par composées de fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et la racine carrée envoie [0,1] dans [0,1]

Alors pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\sin(x)\cos(x)\arcsin\left(\sqrt{\sin^2(x)}\right) - 2\sin(x)\cos(x)\arccos\left(\sqrt{\cos^2(x)}\right) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)(\arcsin|\sin x| - \arccos|\cos x|) \end{aligned}$$

Dans le cas où $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, le sinus et le cosinus sont positifs, donc $F'(x) = 2\sin(x)\cos(x)(\arcsin(\sin x) - \arccos(\cos x))$. Or comme x appartient à $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arccos(\cos x) = x$, donc $F'(x) = 0$. Comme $[0, \frac{\pi}{2}]$ est un intervalle, F est constante sur cet intervalle. Pour déterminer cette constante, on évalue F en $\frac{\pi}{4}$: $F(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin\left(\sqrt{t}\right) + \arccos\left(\sqrt{t}\right)) \mathrm{d}t$. Or, $\arcsin\left(\sqrt{t}\right) + \arccos\left(\sqrt{t}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc $F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, sur $[0, \frac{\pi}{2}], F(x) = \frac{\pi}{4}$.

Très bien

Dans le cas où $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, le sinus est négatif et le cosinus est positif. Donc $F'(x) = 2\cos(x)\sin(x)(\arcsin(-\sin x) - \arccos(\cos x)) = -2\cos(x)\sin(x)(\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x))$ par imparité de l'arcsinus. Comme $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \arcsin(\sin x) = x$ et [illegible] d'où $\arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x) = -x$. Donc $F'(x) = 0$. Comme $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ est un intervalle, F est constante sur [illegible] évalue de même F en $-\frac{\pi}{4}$ qui vaut encore $\frac{\pi}{4}$ par parité de F.

La parité permet d'esquiver cette étude

Alors, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], F(x) = \frac{\pi}{4}$. On en conclut, par parité et π-périodicité de F, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\pi}{4}$.

2) On évalue F en $\frac{\pi}{2}$: $F(\frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \arcsin\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t + 0 = \frac{\pi}{4}$. Donc $\int_0^1 \arcsin\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

TB

3) Pour tout $t \in [0,1]$, on effectue le changement de variable, $t = \sin^2(u)$. D'où $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2\sin(u)\cos(u) = \sin(2u)$. Lorsque $t = 0$, $\sin^2(u) = 0$ donc en particulier $u = 0$ et lorsque $t = 1$, $\sin^2(u) = 1$ donc en particulier $u = \frac{\pi}{2}$. On obtient alors l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin|\sin u| \sin(2u) \, \mathrm{d}u$. Or $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc le sinus est positif sur cet intervalle et $\arcsin(\sin u) = u$. Il vient alors : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin(2u) \, \mathrm{d}u$. On procède ensuite à une intégration par parties. Alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin(2u) \, \mathrm{d}u = \left[-u\frac{\cos(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ car le deuxième terme est nul. On retrouve bien le même résultat qu'à la question précédente.

Très bien

⋆ ⋆
⋆