# Espaces vectoriels

Cornou Jean-Louis

6 mars 2023

Nous allons formaliser une bonne fois pour toutes ces histoires de linéarité que nous avons déjà rencontré sur les matrices, les suites, les polynômes, etc. On fixe $\mathbb{K}$ un corps. La plupart du temps, il s'agit de $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou un sous-corps de $\mathbb{C}$. L'algèbre linéaire émerge via l'étude des systèmes linéaires, puis se déploie dans tous les champs des mathématiques, y compris l'analyse.

# 1 Espaces vectoriels

## 1.1 Opérations dans les espaces vectoriels, exemples fondamentaux

**Définition 1** *On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) tout triplet $(\mathrm{E},+,\cdot)$ vérifiant les choses suivantes :*

- $\mathrm{E}$ *est un ensemble non vide.*
- $+$ *est une loi de composition interne sur* $\mathrm{E}$ *telle que* $(\mathrm{E},+)$ *est un groupe commutatif.*
- $\cdot$ *est une application de* $\mathbb{K}\times\mathrm{E}$ *dans* $\mathrm{E}$ *telle que*

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x, 1x=x, (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$$

**Notation**
*Pour l'instant, on distingue le neutre de $(\mathrm{E},+)$ en le notant $0_{\mathrm{E}}$ du neutre additif de $\mathbb{K}$ que l'on note $0_{\mathrm{K}}$. Un bon étudiant pourra toutefois les noter $0$ puisqu'iel saura préciser lequel est lequel dans chaque situation. Les éléments de* $\mathrm{E}$ *sont appelés vecteurs, mais on ne note pas de flèche au dessus d'eux, sauf peut-être dans le cadre géométrique.*

**Propriété 1 (Règles de calcul dans les espaces vectoriels)** *Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in\mathrm{E}$. Alors*

- $\lambda 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$.
- $0_{\mathrm{K}} x = 0_{\mathrm{E}}$
- $-x = (-1)x$
- $\lambda x = 0_{\mathrm{E}} \iff (\lambda = 0_{\mathrm{K}} \vee x = 0_{\mathrm{E}})$.

*Démonstration.* —

$$\begin{array}{rcll} \lambda 0_{\mathrm{E}} & = & \lambda(0_{\mathrm{E}}+0_{\mathrm{E}}) & \text{car } 0_{\mathrm{E}} \text{ est le neutre de l'addition dans E} \\ & = & \lambda 0_{\mathrm{E}} + \lambda 0_{\mathrm{E}} & \text{car la multiplication externe est distributive sur l'addition de E} \end{array}$$

Comme $(\mathrm{E},+)$ est un groupe commutatif et $\lambda 0_{\mathrm{E}}$ est un élément de E, on dispose de son symétrique pour l'addition, que l'on note $-\lambda 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi,

$$0_{\mathrm{E}} = \lambda 0_{\mathrm{E}} + (-\lambda 0_{\mathrm{E}}) = (\lambda 0_{\mathrm{E}} + \lambda 0_{\mathrm{E}}) + (-\lambda 0_{\mathrm{E}})$$

Par associativité de l'addition dans E, on en déduit

$$0_{\mathrm{E}} = \lambda 0_{\mathrm{E}} + (\lambda 0_{\mathrm{E}} + (-\lambda 0_{\mathrm{E}})) = \lambda 0_{\mathrm{E}} + 0_{\mathrm{E}} = \lambda 0_{\mathrm{E}}$$

— On utilise le fait que $0_K$ est le neutre de l'addition dans $\mathbb{K}$, ce qui donne $0_K x = (0_K + 0_K)x$, puis par distributivité, $0_K x = 0_K x + 0_K x$. On utilise alors le symétrique de $0_K x$ pour l'addition dans E, ce qui donne par associativité $0_E = 0_K x$.

— Cela se passe comme dans les anneaux.

$$\begin{aligned}(-1)x + x &= (-1)x + 1x \quad \text{d'après les axiomes des espaces vectoriels}\\ &= (-1+1)x \quad \text{d'après l'axiome de distributivité}\\ &= 0_K x \quad \text{puisque -1 est le symétrique de 1 dans K}\\ &= 0_E \quad \text{d'après la propriété précédente}\end{aligned}$$

Comme $(E,+)$ est commutatif, cela suffit à démontrer que $(-1)x$ est le symétrique pour la loi addditive de E, i.e $(-1)x = -x$.

— Le sens indirect a déjà été prouvé dans les deux premiers points. Démontrons le sens direct. Supposons que $\lambda x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, on dispose de l'inverse multiplicatif de $\lambda$ dans $\mathbb{K}$, que l'on note $1/\lambda$. Ainsi,

$$\begin{aligned}x &= 1x \quad \text{d'après les axiomes des espaces vectoriels}\\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x \quad \text{par définition de l'inverse dans K}\\ &= \frac{1}{\lambda}(\lambda x) \quad \text{d'après les axiomes des espaces vectoriels}\\ &= \frac{1}{\lambda}0_E \quad \text{par hypothèse sur } \lambda x\\ &= 0_E \quad \text{d'après la première règle de calcul établie}\end{aligned}$$

**Propriété 2** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets des opérations suivantes : soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, puis $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose*

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

*Muni de ces opérations, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

*Démonstration.* C'est pénible, mais il faut bien le faire une fois.

— $\mathbb{K}^n$ est bien non vide.

— $(\mathbb{K}^n,+)$ n'est rien d'autre que le groupe produit $n$ fois de $(\mathbb{K},+)$. Comme $(\mathbb{K},+)$ est commutatif, $(\mathbb{K}^n,+)$ est également commutatif.

— Soit $(x,y) \in E^2$, soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme le produit est associatif dans $\mathbb{K}$, $\lambda(\mu x_i) = (\lambda\mu)x_i$. Comme 1 est le neutre multiplicatif de $\mathbb{K}$, $1x_i = x_i$. D'autre part, comme $\mathbb{K}$ est un anneau, on a la distributivité à droite et gauche, donc

$$(\lambda + \mu)x_i = \lambda x_i + \mu x_i \quad \text{et} \lambda(x_i + y_i) = \lambda x_i + \lambda y_i$$

Comme cela est valable pour tout entier $i$ dans $[\![1,n]\!]$, on retrouve bien tous les axiomes

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, 1x = x, (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x, \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$

☞ **Remarque**
*Le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels qui permettent de visualiser une bonne partie des problèmes d'algèbre linéaire.*

**Propriété 3** *Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble non vide. On note $E = \mathcal{F}(X,G) = G^X$ l'ensemble des applications de X dans G. On le munit des opérations suivantes : soit $(f,g) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$.*

$$f + g : X \to G, x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda f : X \to G, x \mapsto \lambda f(x)$$

*Muni de ces opérations, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

*Démonstration.* Démo synthétique :

— X est non vide, donc E aussi.

— L'addition est bien une lci, puisque $f+g$ est une application de X dans G

— L'application nulle $x \mapsto 0_G$ est le neutre de la loi + de E.

— L'associativité de la loi + de E résulte de l'associativité de celle de $(G,+)$.

— L'application $-f : x \mapsto -f(x)$ fournit un symétrique adéquat d'après les symétriques dans $(G,+)$.

— La commutativité découle de celle dans $(G,+)$.

— Soit $x \in X$, soit $(f,g) \in E^2$, soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors, comme G est espace vectoriel, on a

$$\lambda(\mu f(x)) = (\lambda\mu)f(x), 1x = x, (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x), \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

Toutes ces propriétés se transportent bien sur les applications.

Ainsi, E est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Propriété 4** *Soit* L *un surcorps de* $\mathbb{K}$*, alors la multiplication interne* $L \times L \to L$ *induit une multiplication externe* $\mathbb{K} \times L \to L$ *qui munit* L *d'une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

*Démonstration.* L est bien sûr non vide, $(L,+)$ est un groupe commutatif, puisque L est un corps. Tous les axiomes des espaces vectoriels résultent de l'associativité du produit dans L, et de la distributivité puisque L est un corps.

**Exemple 1** *On peut voir* $\mathbb{C}$ *comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, ou encore* $\mathbb{R}$ *comme un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel. Pire, on peut construire des corps en s'inspirant de techniques vectorielles.*

**Propriété 5** *L'espace nul* $E = \{0\}$ *est muni d'une unique structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.* $0+0=0$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda 0 = 0$.

*Démonstration.* On sait déjà que le groupe à un élément possède une unique structure de groupe. La multiplication externe vérifie trivialement toutes les autres conditions.

**Propriété 6** *Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Alors l'ensemble* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *des matrices à n lignes et p colonnes, muni des opérations vues plus tôt dans l'année, est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

*Démonstration.* On pose $X = [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Comme vu précédemment, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

**Propriété 7** *Soit n un entier naturel non nul,* $E_1, E_2, \dots, E_n$ *une famille de n* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. On munit alors l'espace* $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *des opérations suivantes : soit* $(x_1,x_2,\dots,x_n), (y_1,y_2,\dots,y_n) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *:*

$$(x_1,x_2,\dots,x_n) + (y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

$$\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

*Ces opérations font de* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On l'appelle espace vectoriel produit des* $E_1, \dots, E_n$*, que l'on note* $\prod_{i=1}^n E_i$ *ou* $E_1 \times \cdots \times E_n$.

*Démonstration.* — Aucun des $E_i$ n'est vide, donc leur produit cartésien est non vide.

— La structure additive sur E n'est autre que celle du groupe produit, donc $(E,+)$ est un groupe. Il hérite de la commutativité de chacun des $E_i$, donc $(E,+)$ est un groupe commutatif.

— Tous les autres axiomes sont vérifiés composante par composante, donc vrais sur E.

## 1.2 Sous-espaces vectoriels

**Définition 2** *Soit* $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $F \subset E$ *une partie non vide de* E*. On dit que* F *est un sous-espace vectoriel de* $(E,+\cdot)$ *(en abrégé un sev de* E*) lorsque*

— F *est stable par les lois + et* $\cdot$ *:* $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x+y \in F, \lambda \cdot x \in F$.

— F *muni des lois induites est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

**Théorème 1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)** *Soit* $(E,+\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *une partie de* E*. Alors* F *est un sev de* E *si et seulement si* $0_E \in F$ *et* F *est stable par combinaison linéaire :* $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F$.

*Démonstration.* Supposons que F est un sous-espace vectoriel de F. Alors en particulier, $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$, donc F contient le neutre additif de E, i.e $0_E$. Soit $(x,y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est stable par la multiplication externe, $\lambda y$ appartient à F. De plus, F est stable par l'addition, donc $x+\lambda y$ appartient à F. Réciproquement, supposons que F contient $0_E$ et satisfait la condition annoncée et montrons que F est un sous-espace vectoriel de E. Soit $(x,y) \in F^2$ et $\lambda = 1 \in \mathbb{K}$, alors $x+y$ appartient à F. D'autre part, en choisissant $x = 0_E$ puisqu'on sait que $0_E$ appartient à F et $\lambda = -1 \in \mathbb{K}$, on a d'après les règles de calculs dans les ev, $-y$ appartient à F. Comme F est non vide, cela suffit à montrer que $(F,+)$ est un sous-groupe de E. Il hérite en outre de la commutativité de la loi + dans E. Tous les autres axiomes sont valables sur E, donc a fortiori valables sur F. Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de E.

**Propriété 8** *Une autre caractérisation est la suivante : F est un sev de E si et seulement si F est non vide et*

$$\forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$$

*Démonstration.* Le sens direct se démontre comme précédemment. Le sens réciproque nécessite une étape supplémentaire. Comme F est non vide, on dispose d'un élément $x$ dans F. On choisit alors $\lambda = 0_K$ et $\mu = 0_K$, puis $y = x$ qui est bien dans F. On en déduit que $0_K x + 0_K x$ appartient à F. D'après les règles de calcul dans les espaces vectoriels, on en déduit que $0_K$ appartient à F. Il suffit alors d'appliquer la propriété précédente.

**Exemple 2** *Prenons l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 3z = 0\}$. Alors F est un sev de E. Le triplet $(0,0,0)$ appartient à F. Soit $((x,y,z),(x',y',z')) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z') = \lambda(x - y + 3z) + \mu(x' - y' + 3z') = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

*donc $\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') \in F$ et F est un sev de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont de trois types : l'espace nul réduit à $\{(0,0,0)\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^3}$, les plans passant par le neutre additif de $\mathbb{R}^3$, l'espace entier. Notez que le plan affine d'équation $z = 1$ n'est pas un sev de E, il ne contient même pas $0_{\mathbb{R}^3}$.*

**Exemple 3** *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ distinct de $(0,0,0)$. Alors l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ distinct de $\mathbb{R}^3$ appelé plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

**Exemple 4** *L'ensemble des suites à support fini $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On a vu que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel, puisque $\mathbb{N}$ est non vide et $\mathbb{K}$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La suite nulle est bien à support fini. Soit $u, v$ deux suites à support fini et $\lambda, \mu$ deux scalaires. Alors, en notant $N_u$ et $N_v$ des entiers naturels tels que*

$$\forall n \geq N_u, u_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_v, v_n = 0$$

*On en déduit que*

$$\forall n \geq \max(N_u, N_v), (\lambda u + \mu v)_n = \lambda u_n + \mu v_n = 0$$

*Ainsi, $\lambda u + \mu v$ est à support fini, et $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*

**Exemple 5** *$\mathbb{K}[X]$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $K_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme nul est bien dans $\mathbb{K}_n[X]$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors*

$$d(\lambda P + \mu Q) \leq \max(d(\lambda P), d(\mu Q)) \leq \max(d(P), d(Q)) \leq \max(n,n) \leq n$$

*Donc $\lambda P + \mu Q$ est de degré au plus $n$, donc dans $\mathbb{K}_n[X]$.*

**Exemple 6** *Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = C(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues. Alors, muni des mêmes opérations qu'en exemple $\mathcal{F}(X,G)$ avec $X = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}$, E possède une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.La fonction nulle est continue. Se référer au chapitre sur les fonctions continues pour la stabilité par combinaison linéaire. On peut généraliser l'exemple aux fonctions continues en un point, dérivables 12 fois en un point a de I, de classe $C^\infty$.*

**Exemple 7** *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un sev de $E = \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Prenons par exemple l'équation différentielle $y^{(3)}(x) + e^{x^2} y''(x) - \frac{1}{1+x^2} y'(x) = 0$. Par contre, les solutions de l'équation différentielle $y' - y^2 = 0$ ne forment pas un sous-espace vectoriel de E.*

**Exemple 8** *L'ensemble des suites réelles convergentes est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

**Exemple 9** *L'ensemble des suites réelles monotones n'est pas un sev des suites réelles.*

**Exemple 10** *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$*. L'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ *est un sev de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*.*

**Propriété 9** *Soit* $\mathrm{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille non vide de sous-espaces vectoriels de* $\mathrm{E}$*. Alors* $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{E}$

*Démonstration.* Notons $\mathrm{F} = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$. Pour tout $i$ dans I, $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}_i$, donc $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}$. Soit $(x,y) \in \mathrm{F}^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $i \in \mathrm{I}$. Comme $\mathrm{F}_i$ est un sev de E, alors $\lambda x + \mu y \in \mathrm{F}_i$. Comme cela est vrai pour tout indice $i$ dans I, $\lambda x + \mu y \in \mathrm{F}$. Ainsi, F est un sev de E.

⚠ **Attention**
*C'est faux pour l'union. Attendez-vous à des exercices dessus.*

**Exercice 1** *Dans* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$*, on note* $\mathrm{F}_1 = \{(x,y,z) \in \mathrm{E} | x+y+z = 0\}$ *et* $\mathrm{F}_2 = \{(x,y,z) \in \mathrm{E} | x-2y = 0\}$*. Réprésenter les sev* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ *et* $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$*. De quels types sont-ils ?*

**Définition 3** *Soit* $\mathrm{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\mathrm{A}$ *une partie de* $\mathrm{E}$*. On note*

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) = \bigcap_{\substack{\mathrm{F}\ \textit{sev de}\ \mathrm{E} \\ \mathrm{A}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F}$$

*l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* $\mathrm{E}$ *qui contiennent* $\mathrm{A}$*. On appelle* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})$ *le sous-espace vectoriel engendré par* $\mathrm{A}$*.*

**Propriété 10** *Avec les notations précédentes,* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{E}$*, et c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) qui contient* $\mathrm{A}$*, i.e pour tout sev* $\mathrm{F}$ *de* $\mathrm{E}$*,* $\mathrm{F} \supset \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{F} \supset \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$*.*

*Démonstration.* L'intersection est non vide, puisque E est un espace vectoriel qui contient A. Comme intersection de sev de E, Vect(A) est un sous-espace de E. Montrons à présent qu'il s'agit du plus petit qui contient E. Soit F un sev de E qui contient A, alors

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) = \mathrm{F} \cap \bigcap_{\substack{\mathrm{G}\ \text{sev de}\ \mathrm{E} \\ \mathrm{A}\subset\mathrm{G} \\ \mathrm{G}\neq\mathrm{F}}} \mathrm{G} \subset \mathrm{F}$$

⚠ **Attention**
*Il ne suffit pas que* $\mathrm{F}$ *contienne* $\mathrm{A}$ *pour contenir* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})$*, il ne faut pas oublier de vérifier que* $\mathrm{F}$ *est un sev de* $\mathrm{E}$*.*

**Exemple 11** $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_\mathrm{E}\}$, $\mathrm{Vect}(\{a\}) = \mathbb{K}a = \{\lambda a | \lambda \in \mathbb{K}\}$*. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$ *est* $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$*.*

⚠ **Attention**
*Soit* $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ *deux parties de* $\mathrm{E}$*. Alors* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ *ne vaut pas nécessairement* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{B})$*. Dans* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$*, prenons* $\mathrm{A} = \{(1,0),(0,1)\}$ *et* $\mathrm{B} = \{(1,1)\}$*. Alors* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$*, donc* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \{0\}$*. Pourtant,* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) = \mathrm{E}$*, de sorte que* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{B}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{B}) = (1,1)\mathbb{K}$*.*

**Propriété 11** *Soit* $\mathrm{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $\mathrm{A}$ *et* $\mathrm{B}$ *deux parties de* $\mathrm{E}$*.*

— $\mathrm{A}$ *est un sev de* $\mathrm{E}$ *ssi* $\mathrm{A} = \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$*.*

— *Si* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$*, alors* $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{B})$*.*

*Démonstration.*
— On a vu que $\mathrm{A} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$. Si $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, alors comme Vect(A) est un sev, A est un sev. Réciproquement, si A est un sev de E, alors c'est un sev de E contenant A, donc il contient Vect(A) puisque Vect(A) est le plus petit sev qui contient A. Cela suffit à établir $\mathrm{A} = \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.

— On sait que $\mathrm{B} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{B})$, ainsi, $\mathrm{A} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{B})$. Or, Vect(B) est un sev de E, c'est donc un sev de E qui contient A, donc il contient le plus petit se v de E qui contient A, ie. $\mathrm{Vect}(\mathrm{B}) \supset \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.

⚠ **Attention**
*La réciproque du second point est fausse.* $\mathrm{A} = \{(1,1)\}$ *et* $\mathrm{B} = \{(2,2)\}$ *engendrent le même sev, mais sont des parties non incluses l'une dans l'autre.*

## 1.3 Familles finies de vecteurs

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

### 1.3.1 Familles génératrices

**Définition 4** *Soit $n$ un entier naturel non nul et $(x_1,\dots,x_n)$ un $n$-uplet de E. On appelle combinaison linéaire des $(x_i)_{1\le i\le n}$ tout élément $x$ de E de la forme*

$$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$$

*avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ un $n$-uplet de $\mathbb{K}$.*

**Théorème 2** *Soit $n$ un entier naturel non nul et $(x_1,\dots,x_n)$ un $n$-uplet de E. On note $A=\{x_1,\dots,x_n\}$. Alors* Vect(A) *est l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x_i)_{1\le i\le n}$. Autrement dit,*

$$\mathrm{Vect}(A)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i|(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\}$$

*Démonstration.* Notons $F=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i|(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\}$. On montre tout d'abord que F est un sev de E et qu'il contient A. On choisit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(0,\dots,0)$, ce qui assure que $0_E$ appartient à F. Soit $(x,y)\in F^2$, $(\lambda,\mu)\in K^2$. On note $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ et $(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $y=\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i$. On en déduit que

$$\lambda x+\mu y=\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)+\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i+\mu\mu_i)x_i$$

Ainsi, le $n$-uplet de scalaires $(\lambda\lambda_i+\mu\mu_i)_{1\le i\le n}$ assure que $\lambda x+\mu y$ appartient à F. De plus, soit $i\in[\![1,n]\!]$, alors en choisissant le $n$-uplet $(\lambda_j)_{1\le j\le n}=(\delta_{i,j})_{1\le j\le n}$, F contient $\sum_{j=1}^{n}\delta_{i,j}x_j=x_i$. Par conséquent, F contient A. Ainsi, comme F est un sev de E, F contient Vect(A).
De plus, Vect(A) un sev de E qui contient tous les $(x_i)_{1\le i\le n}$. Comme Vect(A) est stable par combinaison linéaire, il contient toutes les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ pour $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, donc Vect(A) contient F.
En conclusion, Vect(A) = F.

**Définition 5** *Soit $n$ un entier naturel non nul et $(x_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que cette famille est génératrice lorsque* $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)=E$. *Il revient au même de dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(x_i)_{1\le i\le n}$.*

☞ **Remarque**
*On dit également que la famille $(x_i)_{1\le i\le n}$ engendre E.*

**Exemple 12** *La famille $(X^k)_{0\le k\le n}$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$. La famille $(E_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ engendre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

**Exemple 13** *Soit $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y+z=0\}$, c'est un sev de $\mathbb{R}^3$. On cherche une famille génératrice de P. Géométriquement, on voit que P est un plan, donc que deux vecteurs bien choisis devraient suffire. On choisit $e_1=(1,-1,0)$, puis $e_2=(1,0,-1)$. Montrons que $(e_1,e_2)$ engendre P. Soit $(x,y,z)\in$ ¶, alors*

$$(x,y,z)=(x,y,-x-y)=(x,0,-x)+(0,y,-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)=xe_2+ye_1$$

*Par conséquent, $P\subset\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. L'autre inclusion vient du fait que $e_1$ et $e_2$ appartiennent à P.*

**Définition 6** *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E.*

- *On appelle sur-famille de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille $(y_j)_{j\in J}$ telle que $I\subset J$ et $\forall i\in I, x_i=y_i$.*
- *On appelle sous-famille de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille $(z_k)_{k\in K}$ telle que $K\subset I$ et $\forall k\in K, z_k=x_k$.*

**Propriété 12** *Soit $(x_i)_{1\le i\le n}$ une famille génératrice de E. Alors toute sur-famille de $(x_i)_{1\le i\le n}$ est génératrice.*

*Démonstration.* Soit $(y_j)_{j\in J}$ une sur-famille et $x \in E$. Alors comme $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est génératrice, il existe un $n$-uplet de scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Alors,

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j\in J\setminus[[1,n]]} 0_K y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{j\in J\setminus[[1,n]]} 0_K y_j$$

Ainsi, la sur-famille considérée est génératrice.

**Propriété 13** *Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice de $E$ et $\sigma$ une permutation de $[[1,n]]$. Alors $(x_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}$ est génératrice.*

*Démonstration.* Découle de la commutativité de l'addition dans les espaces vectoriels.

**Exercice 2** *Soit $a \in \mathbb{K}$ et $E = \mathbb{K}[X]$. La famille $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle génératrice dans $E$ ? La famille $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est-elle génératrice dans $\mathbb{K}(X)$ ?*

**Propriété 14** *Soit $p$ un entier naturel non nul et $(e_1,\dots,e_p)$ une famille finie de $E$.*
- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \in [[1,p]]$, alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,\lambda e_i,\dots,e_p)$.*
- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $i,j$ deux entiers distincts dans $[[1,p]]$, alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i+\lambda e_j,\dots,e_p)$.*

### 1.3.2 Familles libres

**Définition 7** *Soit $n$ un entier naturel non nul et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de vecteurs de $E$. On dit que cette famille est libre lorsque*

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [[1,n]], \lambda_i = 0$$

*Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle des $(x_i)_i$ est la combinaison triviale.*

**Exemple 14** *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $e_1 = (1,-1,0)$, $e_2 = (1,1,1)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Montrons qu'ils forment une famille libre. Soit $(x,y,z)$ un triplet de réels tels que $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$. Montrons que $(x,y,z) = (0,0,0)$. L'égalité de vecteurs s'écrit encore $(x+y,-x+y,y+z) = (0,0,0)$, ce que l'on peut mettre sous forme de système linéaire*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*On peut le résoudre à la main, la somme des deux premières lignes donne $2y = 0$, soit $y = 0$. On en déduit $x = 0$ puis $z = 0$. Ainsi la famille $(e_1,e_2,e_3)$ est libre.*

**Exemple 15** *Soit $(a_1,\dots,a_n)$ une famille de $n$ réels distincts rangés par ordre croissant (donc strictement croissant). Pour tout entier $i$ dans $[[1,n]]$, on note $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-a_i x}$. Montrons que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. Montrons que $\forall i \in [[1,n]], \lambda_i = 0$ en procédant par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier $i$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On note alors $j = \min\{i|\lambda_i \neq 0\}$ (possible puisque cette partie est non vide). On a alors*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \sum_{i=j}^n \lambda_i f_i = 0$$

*Alors*

$$\sum_{i=j} \lambda_i e^{a_i x} = \lambda_j e^{a_j x}\left(1 + \sum_{i=j+1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} e^{(a_i-a_j)x}\right) = 0$$

*Ainsi,pour tout réel $x$,*

$$1 + \sum_{i=j+1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} e^{(a_i-a_j)x} = 0$$

*Or la limite de cette fonction en $-\infty$ vaut 1 puisque $\forall i > j, a_i > a_j$. D'où une absurdité et la liberté de la famille $(f_1,\dots,f_n)$.*

**Exemple 16** *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose qu'il existe un entier* $p$ *non nul tel que* $\mathrm{A}^p = 0$ *et* $\mathrm{A}^{p-1} \neq 0$. *Montrons alors que la famille* $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{p-1})$ *est libre. Soit* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ *tel que* $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \mathrm{A}^k = 0$. *En multipliant par* $\mathrm{A}^{p-1}$, *on obtient* $\lambda_0 \mathrm{A}^{p-1} + 0 = 0$, *donc* $\lambda_0 = 0$. *On poursuit par récurrence. Soit* $j$ *un entier dans* $[\![0, p-2]\!]$ *tel que* $\forall k \leq j, \lambda_k = 0$. *Alors*

$$\sum_{k=j+1}^{p} \lambda_k \mathrm{A}^k = 0$$

*On multiplie à gauche par* $\mathrm{A}^{p-1-j-1}$, *ce qui donne*

$$\lambda_{j+1} \mathrm{A}^{p-1} + 0 = 0$$

*Comme* $\mathrm{A}^{p-1} \neq 0$, *on en déduit que* $\lambda_{j+1} = 0$. *Ainsi, par récurrence,* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) = (0, \ldots, 0)$, *et la famille est libre.*

**Définition 8** *Soit* $n$ *un entier naturel non nul et* $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille finie de vecteurs de* $\mathrm{E}$. *On dit que cette famille est liée lorsqu'elle n'est pas libre. Autrement dit,*

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

**Exemple 17** *Une famille contenant le vecteur nul est liée. Si deux éléments d'une famille sont égaux, la famille est liée. Dans* $\mathbb{R}^2$, *la famille* $((1,0),(0,1),(1,1))$ *est liée puisque* $(1,0)+(0,1)-(1,1) = (0,0)$. *La réciproque est fausse, il ne suffit pas que tous les éléments d'une famille soient deux à deux distincts pour que la famille soit libre.*

**Propriété 15** *Soit* $n$ *un entier naturel non nul et* $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille finie de vecteurs de* $\mathrm{E}$. *On suppose que l'un des éléments de cette famille est combinison linéaire des autres, i.e*

$$\exists j \in [\![1, n]\!], \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1}, x_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i$$

*Alors cette famille est liée.*

*Démonstration.* Avec les notations plus haut, il suffit de considérer le $n$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, -1, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ qui vérifie clairement

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

Ce $n$-uplet est non nul puisque sa $j$ composante vaut $-1$ qui n'est pas nul. Ainsi, la famille est liée.

**Propriété 16** *Soit* $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille libre de* $\mathrm{E}$ *et* $\sigma$ *une permutation de* $[\![1, n]\!]$. *Alors* $(x_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$ *est une famille libre.*

**Propriété 17** *Soit* $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille libre. Alors toute sous-famille est libre.*

*Démonstration.* Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une sous-famille (quitte à réordonner les éléments de la famille initiale). Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ un $p$-uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. On considère alors le $n$-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p, 0, \ldots, 0)$. Celui-ci vérifie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. D"après la liberté de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on en déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$. En particulier, $\forall i [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$, ce qui prouve que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

**Propriété 18** *Soit* $n$ *un entier naturel non nul et* $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ *une famille de* $n$ *polynômes dans* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. *On suppose que* $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{P}_i \neq 0$, *puis que* $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow d(\mathrm{P}_i) \neq d(\mathrm{P}_j)$. *On dit que la famille est échelonnée. Alors la famille* $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ *est libre.*

*Démonstration.* Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}_i = 0$. Supposons qu'il existe un scalaire $\lambda_i$ non nul, on note $j$ un entier tel que $\lambda_j \neq 0$ et $d(\mathrm{P}_j)$ maximal. Alors $\sum_{i \neq j, \lambda_i \neq 0} \lambda_i \mathrm{P}_i + \lambda_j \mathrm{P}_j = 0$. Or le degré de $\mathrm{P} = \sum_{i \neq j, \lambda_i \neq 0} \lambda_i \mathrm{P}_i + \lambda_j \mathrm{P}_j$ vaut le degré de $\mathrm{P}_j$ puisque $d(\lambda_j \mathrm{P}_j) = d(\mathrm{P}_j)$. De plus, comme les degrés sont distincts et $d(\mathrm{P}_j)$ est maximal, $\sum_{i \neq j, \lambda_i \neq 0} \lambda_i \mathrm{P}_i < d(\mathrm{P}_j)$ . Mais alors P est de degré $-\infty$ puisqu'il est nul, ce qui contredit la non-nullité de $\lambda_j$. Conclusion, tous les scalaires $\lambda_i$ sont nuls et la famille est libre.

⚠ **Attention**

*Il existe des familles libres de polynômes de degrés non échelonnés. Prenez par exemple la famille $(\mathrm{L}_i)_{1\leq i\leq n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à des réels distincts $(x_1,\dots,x_n)$. Ces polynômes sont tous de degré $n-1$ et vérifient $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, \mathrm{L}_i(x_j)=\delta_{i,j}$. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{L}_i=0$. Soit $j\in[\![1,n]\!]$, on évalue le polynôme précédent en $x_j$, ce qui implique*

$$0=\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{L}_i(x_j)=\sum_{i=1}^n \lambda_i\delta_{i,j}=\lambda_j$$

*On en déduit que tous les scalaires considérés sont nuls, donc que la famille considérée est libre.*

**Définition 9** *Soit $n$ un entier naturel non nul et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de vecteurs de $\mathrm{E}$. On dit que cette famille est une base de $\mathrm{E}$ lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice.*

**Exemple 18** *Soit $n$ un entier naturel. On considère la famille $(1,\mathrm{X}^1,\dots,\mathrm{X}^n)$, alors elle est génératrice de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et libre puisqu'échelonnée. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.*

☞ **Remarque**

*L'un des enjeux majeurs de l'algèbre linéaire est de construire des bases, ou mieux encore, une base adaptée à un problème donné.*

**Propriété 19 (Bases canoniques)**
- *Soit $n\in\mathbb{N}$, la famille $(1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.*
- *Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
- *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout entier $i$ dans $[\![1,n]\!]$, on note $e_i$ le vecteur de coordonnées nulles sauf celle de place $i$ qui vaut $1$. Alors la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonniquee de $\mathbb{K}^n$.*

*Démonstration.*
- Déjà fait
- Soit $\mathrm{A}=(a_{i,j})_{1\leq i\leq i,1\leq j\leq p}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{A}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}$, donc la famille considérée est génératrice. Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ un $np$-uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}=0$. Alors la matrice $(\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ est nulle, donc tous ses coefficients sont nuls, i.e $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!], \lambda_{i,j}=0$. Ainsi, cette famille est libre.
- Il s'agit de la même démonstration que précédemment pour $p=1$.

**Propriété 20** *Soit $\mathrm{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathrm{E}$ et $x$ dans $\mathrm{E}$. Alors*

$$\exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, x=\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

*Les scalaires $\lambda_i$ sont appelés les coordonnées de $x$ dans la base $\mathrm{B}$, les vecteurs $\lambda_i e_i$ sont appelées les composantes de $x$ dans la base $\mathrm{B}$.*

*Démonstration.* Comme la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice, on sait qu'il existe un tel $n$-uplet dans $\mathbb{K}^n$. Montrons à présent son unicité. Soit $(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{i=1}^n \mu_i e_i$. Alors par soustraction et factorisation, on obtient

$$\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\mu_i)e_i=0$$

Comme $\mathrm{B}$ est une famille libre, on en déduit que $\forall i[\![1,n]\!], \lambda_i-\mu_i=0$, donc $\forall i[\![1,n]\!], \lambda_i=\mu_i$.

☞ **Remarque**

*Si l'on dispose d'une base dans un $\mathbb{K}$-ev, pour vérifier que deux vecteurs sont égaux, il suffit de vérifier que leurs coordonnées dans la base $\mathrm{B}$ sont égales.*

**Exemple 19** *Dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$, soit $\mathrm{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une famille de trois vecteurs tous non nuls. Alors $\mathrm{B}$ est une base si et seulement si $e_1\neq e_2$ et $e_3\notin \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.*

**Exemple 20** *Dans $\mathbb{R}^4$, on se pose $e_1=(0,1,1,0), e_2=(1,1,0,1), e_3=(-1,2,2,1), e_4=(1,1,2,4)$. Montrons qu'il s'agit d'une base puis déterminons les coordonnées du vecteur $x=(1,2,3,4)$ dans cette base.*

## 1.4 Familles infinies de vecteurs

**Définition 10** *Soit* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de vecteurs de* E *indexée par* I *(non nécessairement fini). On appelle combinaison linéaire de la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *tout élément* $x$ *de* E *de la forme*

$$x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$$

*avec* $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}$ *une famille à support fini de scalaires.*

⚠ **Attention**
*On ne parle pas de somme infinie! On verra les techniques de sommation infinie plus tard dans l'année.*

**Théorème 3** *Soit* A *une partie de* E*. Alors* Vect(A) *est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de* A*, i.e*

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) = \left\{ \sum_{y\in\mathrm{A}} \lambda_y y \,|\, (\lambda_y)_{y\in\mathrm{A}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{A})} \right\}$$

*Démonstration.* On procède comme pour le cas A fini. Notons $\mathrm{F} = \left\{ \sum_{y\in\mathrm{A}} \lambda_y y \,|\, (\lambda_y)_{y\in\mathrm{A}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{A})} \right\}$ et montrons que c'est un sev de E contenant A. Soit $(x,y)\in\mathrm{F}^2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. On note $(\lambda_z)_{z\in\mathrm{A}}$ et $(\mu_z)_{z\in\mathrm{A}}$ des familles de scalaires à support fini telles que

$$x = \sum_{z\in\mathrm{A}} \lambda_z z \quad \text{et} \quad y = \sum_{z\in\mathrm{A}} \mu_z z$$

On en déduit que

$$\lambda x + \mu y = \sum_{z\in\mathrm{A}} (\lambda\lambda_z + \mu\mu_z) z$$

De plus, $(\lambda\lambda_z + \mu\mu_z)_{z\in\mathrm{A}}$ est à support fini, donc $\lambda x + \mu y$ appartient à F. Soit $a\in\mathrm{A}$, on choisit la famille $(\delta_{a,z})_{z\in\mathrm{A}}$ qui est bien à support fini (un seul de ses termes est non nul), celle-ci permet d'écrire

$$a = \sum_{z\in\mathrm{A}} \delta_{a,z} z$$

Ainsi, $a$ appartient à F, et $\mathrm{A}\subset\mathrm{F}$, donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})\subset\mathrm{F}$.
De plus, Vect(A) est un sev de E qui contient tous les $z, z\in\mathrm{A}$. Comme il est stable par combinaison linéaire finie, il contient toutes les combinaisons linéaires à suppoort fini $\sum_{z\in\mathrm{A}} \lambda_z z$, donc contient F.

**Définition 11** *Soit* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de vecteurs de* E *indexée par* I *(non nécessairement fini). On dit que la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est libre lorsque*

$$\forall (\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}, \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i\in\mathrm{I}, \lambda_i = 0$$

*Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée. On dit qu'une partie* A *de* E *est libre lorsque la famille de ses éléments est libre. Dans le cas contraire, on dit que* A *est liée.*

**Propriété 21** *Soit* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de vecteurs de* E *indexée par* I*. Alors cette famille est libre si et seulement pour toute partie finie* J *de* I*,* $(x_j)_{j\in\mathrm{J}}$ *est libre.*

*Démonstration.* Supposons que $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre. Soit J une partie finie de I, et $(\lambda_j)_{j\in\mathrm{J}}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{j\in\mathrm{J}} \lambda_j x_j = 0$. Alors en complétant cette famille de scalaires par des zéros, on obtient une famille $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ à support fini telle que $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0$. D'après la liberté de la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on en déduit que $\forall i\in\mathrm{I}, \lambda_i = 0$, donc $\forall j\in\mathrm{J}, \lambda_j = 0$. Ainsi, $(x_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est libre.
Réciproquement, supposons que pour toute partie finie J de I, $(x_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de scalaires à support fini telle que $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0$. On note alors J une partie finie de I telle que $\forall k\in\mathrm{I}\backslash\mathrm{J}, \lambda_k = 0$. Alors, $\sum_{j\in\mathrm{J}} \lambda_j x_j = 0$. D'après la liberté de $(x_j)_{j\in\mathrm{J}}$, $\forall j\in\mathrm{J}, \lambda_j = 0$. Ainsi, $\forall i\in\mathrm{I}, \lambda_i = 0$ et la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre.

**Définition 12** *Soit* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de vecteurs de* E *indexée par* I *(non nécessairement fini). On dit que la famille* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est génératrice lorsque* $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}} = \mathrm{E}$*, i.e*

$$\forall x\in\mathrm{E}, \exists (\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}, x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$$

*On dit qu'une partie* A *de* E *est génératrice lorsque la famille de ses éléments est génératrice.*

**Définition 13** *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$ indexée par $I$ (non nécessairement fini). On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base de $E$, lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice.*

**Propriété 22** *Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une base de de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.*

*Démonstration.* On a vu que toute sous famille finie de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre puisqu'échelonnée. De plus, pour tout polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$, il existe une famille à support fini $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P=\sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$. Ainsi, cette famille est génératrice, donc une base de $\mathbb{K}[X]$.

**Exemple 21** *On dit qu'un complexe $z$ est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$, cela se traduit en disant que la famille $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre sur $\mathbb{Q}$. Par exemple, $\sqrt{2}$ est racine de $X^2-2$ n'est pas transcendant, par contre e est transcendant (c'est délicat à démontrer).*

**Exemple 22** *Soit $E=\mathbb{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Pour tout entier relatif $n$ dans $\mathbb{Z}$, on note $e_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, t\mapsto e^{int}$. On veut montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre dans $E$. Pour cela, on se donne $p$ un entier non nul et $(n_1,\dots,n_p)$ un ensemble fini d'entiers relatifs et $\lambda_1,\dots,\lambda$ des complexes tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_{n_i}=0$. Fixons $j\in[\![1,p]\!]$. On multiplie cette dernière égalité par la fonction $\overline{e_{n_j}}$ et on intègre sur $[0,2\pi]$, ce qui donne par linéarité de l'intégrale,*

$$0=\int_0^{2\pi}\overline{e_{n_j}(t)}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_{n_i}(t)dt=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\int_0^{2\pi}e^{i(n_i-n_j)t}dt=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i 2\pi\delta_{i,j}=2\pi\lambda_j$$

*Ainsi, $\forall j\in[\![1,p]\!], \lambda_j=0$, et la famille $(e_{n_1},\dots,e_{n_p})$ est libre. Comme c'est vrai pour toute partie finie de $\mathbb{Z}$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre.*

## 1.5 Somme de sous-espaces vectoriels

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

**Définition 14** *Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On note*

$$F+G=\{x+y|(x,y)\in F\times G\}$$

*Cet ensemble s'appelle la somme de $F$ et $G$*

**Propriété 23** *Avec les notations précédentes, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$. C'est le plus petit qui contient $F$ et $G$, i.e $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.*

*Démonstration.* Les sev F et G contiennent tous deux $0_E$, donc $F+G$ également. Soit $(x,y)\in(F+G)^2,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. D'après la définition de $F+G$, on dispose de $(x_F,x_G)$ dans $F\times G$ tel que $x=x_F+x_G$. De même, on dispoe d'un couple $(y_F,y_G)$ dans $F\times G$ tel que $y=y_F+y_G$. On en déduit d'après les règles de calculs dans les ev que

$$\lambda x+\mu y=(\lambda x_F+\mu y_F)+(\lambda x_G+\mu y_G)$$

Or F est un sev de E, donc $(\lambda x_F+\mu y_F)$ appartient à F. De même, G est un sev de E, donc $(\lambda x_G+\mu y_G)$ appartient à G. Par conséquent, $\lambda x+\mu y$ est bien somme d'un élément de $x$ et d'un élément de G, donc un élément de $F+G$. De plus, pour tout $x$ dans F, comme $0_E$ appartient à G, $x+0_E$ appartient à $F+G$, donc $F\subset F+G$. De même, $G\subset F+G$, ainsi, $F+G$ est un sev de E contenant $F\cup G$, il contient donc $\mathrm{Vect}(F\cup G)$. D'autre part, soit $z$ un élément de $\mathrm{Vect}(F\cup G)$, alors il est combinaison linéaire d'éléments de $F\cup G$, on les regroupe selon qu'ils appartiennent à F ou non, ce qui entraîne l'existence de familles à support fini telles que

$$z=\sum_{x\in F}\lambda_x x+\sum_{y\in G}\mu_y y$$

Comme F et G sont tous deux des sev, $\sum_{x\in F}\lambda_x x\in F$ et $\sum_{y\in G}\mu_y y$ appartient à G, donc $z$ appartient à $F+G$.
En conclusion, $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.

**Définition 15** *Soit $n$ un entier naturel non nul, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On note*

$$\sum_{i=1}^{n}F_i=\{\sum_{i=1}^{n}x_i|(x_1,\dots,x_n)\in F_1\times\cdots\times F_n\}$$

**Propriété 24** *Avec les notations précédentes,* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{E}$*. C'est le plus petit qui contient* $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$*, i.e* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i)$*.*

**Définition 16** *Soit* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *deux sous-espaces vectoriels. On dit que* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *sont en somme directe lorsque*

$$\forall z \in \mathrm{F}+\mathrm{G}, \exists!(x,y) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}, z = x+y$$

*Dans ce cas, on note* $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$ *en place de* $\mathrm{F}+\mathrm{G}$*.*

**Propriété 25** *Soit* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *deux sous-espaces vectoriels. Alors* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *sont en somme directe si et seulement si* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0\}$*.*

*Démonstration.* Supposons F et G en somme directe. Soit $z \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. En particulier, $z$ appartient à $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et il peut se décomposer sous deux formes $x = 0_\mathrm{E} + x = x + 0_\mathrm{E}$, puisque $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. Par unicité des décompositions dans une somme directe, on en déduit que $x = 0_\mathrm{E}$, donc que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0\}$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0\}$. Soit $z \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$. D'après la définition de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$, on dispose d'une décomposition comme indiqué. Décomposons $z$ de deux facons $z = x+y = x'+y'$ avec $(x,x') \in \mathrm{F}^2$ et $(y,y') \in \mathrm{G}^2$. Alors, comme F et G sont des sev, $x - x' = y' - y$ appartient à F et à G. Par hypothèse sur $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$, cela implique que $x - x' = 0$ et $y' - y = 0$, donc $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, la décomposition est unique.

**Exemple 23** *Soit* $\mathrm{D}, \mathrm{D}'$ *deux droites de* $\mathbb{R}^n$*. Alors elles sont en somme directe ssi leur intersection est réduite à* $\{0\}$ *ssi elles sont distinctes. Dans l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, les sev des matrices symétriques et antisymétriques* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *sont en somme directe car d'intersection nulle.*

**Définition 17** *Soit* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *deux sous-espaces vectoriels. On dit que* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *sont supplémentaires lorsque*

- $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *sont en somme directe, et*
- $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{E}$*.*

**Propriété 26** *Avec les notations précédentes,* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *sont supplémentaires si et seulement si*

$$\forall z \in \mathrm{E}, \exists!(x,y) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}, z = x+y$$

⚠ **Attention**
*Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire de* $\mathrm{F}$ *n'est même pas un sev, puisqu'il ne contient pas* $0_\mathrm{E}$*.*

**Exemple 24** *Dans* $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$*, on considère* $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} | \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ *et* $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E} | f \text{ constante }\}$*. Alors* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *sont supplémentaires dans* $\mathrm{E}$*.*

**Définition 18** *Soit* $n$ *un entier naturel non nul,* $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_n$ *des sous-espaces vectoriels. On dit que les* $(\mathrm{F}_i)_{1\le i\le n}$ *sont en somme directe lorsque*

$$\forall z \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i, \exists!(x_1,\dots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i, z = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

*Dans ce cas, on note* $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$ *en place de* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$*.*

⚠ **Attention**
*Il ne suffit pas que les* $\mathrm{F}_i$ *soient d'intersection deux à deux nulles pour garantir qu'ils sont en somme directe. Dans* $\mathbb{R}^2$*, prenons* $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Vect}((1,0)), \mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}((0,1)), \mathrm{F}_3 = \mathrm{Vect}((1,1))$*. On a bien* $\mathrm{F}_1\cap\mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_1\cap\mathrm{F}_3 = \mathrm{F}_2\cap\mathrm{F}_3 = \{0\}$*. Pourtant,* $(1,1) = (1,0)+(0,1) = (1,1)$ *se décompose de deux manières différentes dans* $\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2+\mathrm{F}_3$*.*

**Propriété 27** *Soit* $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_n$ *une famille de sev de* $\mathrm{E}$ *en somme directe et* $\mathrm{K}$ *une partition de* $[[1,n]!]$*. Pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{K}$*, on note* $\mathrm{G}_\mathrm{A} = \otimes_{i\in\mathrm{A}}\mathrm{F}_i$*, alors les* $(\mathrm{G}_\mathrm{A})_{\mathrm{A}\in\mathrm{K}}$ *sont en somme directe.*

*Démonstration.* Cela résulte du fait que $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = \sum_{\mathrm{A}\in\mathrm{K}} \sum_{j\in\mathrm{A}} x_j$ par commutativité de l'addition dans E.

**Propriété 28** *Soit* $(\mathrm{F}_i)_{1\le i\le n}$ *une famille de sev de* $\mathrm{E}$*. Alors elle est en somme directe si et seulement si*

$$\forall i \in [[2,n]], \mathrm{F}_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{F}_j = \{0\}$$

*Démonstration.* On le fait classiquement par récurrence sur $n$. Pour $n = 2$, nous l'avons déjà établi. Soit $n \geq 2$ tel que la propriété est établie. Montrons-la au rang $n+1$. Soit $(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{n+1})$ une famille de $n+1$ sev de E. Si les $(\mathrm{F}_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont en somme directe, alors les $(\mathrm{F}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont en somme directe. Donc $\forall i \in [\![2, n]\!], \mathrm{F}_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{F}_j = \{0\}$. De plus, $\mathrm{F}_{n+1}$ est en somme directe avec $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$. D'après le cas $n = 2$, cela entraîne $\mathrm{F}_{n+1} \cap \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$. Réciproquement, si

$$\forall i \in [\![2, n+1]\!], \mathrm{F}_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{F}_j = \{0\}$$

alors c'est vrai jusqu'au rang $n$, donc les $(\mathrm{F}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont en somme directe. Mais alors $\mathrm{F}_{n+1}$ est en somme directe avec $\oplus_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$ puisque d'intersection nulle avec cet espace, donc les $(\mathrm{F}_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont en somme directe.

# 2 Dimension d'un espace vectoriel

## 2.1 Construction de bases

**Définition 19** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel. On dit que* E *est de dimension finie lorsqu'il existe une famille finie génératrice dans* E.

**Théorème 4** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors* E *possède une base finie.*

*Démonstration.* On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des familles finies génératrices de E. On sait que cet ensemble est non vide puisque E est supposé de dimension finie. On peut donc considérer une famille finie génératrice de cardinal minimal. Si ce cardinal minimal est nul, cela veut dire que E est l'espace nul et que la famille vide en est une base. Sinon, notons $p$ un entier naturel non nul, $(e_1 \dots, e_p)$ une telle famille et montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier $i$ dans $[\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$. On en déduit que

$$e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \frac{-\lambda_j}{\lambda_i} e_j.$$

Montrons qu'alors la famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$ est génératrice. Soit $x \in \mathrm{E}$, comme $(e_1 \dots, e_p)$ est génératrice, il existe un $p$-uplet de scalaires $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ tel que $x = \sum_{j=1}^{p} \mu_j e_j$. On en déduit que

$$x = \mu_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \frac{-\lambda_j}{\lambda_i} e_j \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \mu_j e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \left( -\mu_i \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \mu_j \right) e_j$$

Ainsi, on dispose d'une famille génératrice de cardinal strictement inférieur à $p$, ce qui contredit la minimalité de $p$. Ainsi, cette famille est également libre, ce qui en fait une base de E.

**Théorème 5 (Base extraite)** *Soit* $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille finie génératrice de* E. *Alors il en existe une sous-famille qui est une base de* E.

*Démonstration.* Reprendre la démonstration précédente en considérant l'ensemble des sous-familles de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Il en existe une sous-famille finie génératrice de cardinal minimal qui est alors libre, donc une base de E.

**Théorème 6 (Complétion en base)** *Soit* $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille libre de* E *de dimension finie. Alors il en existe une sur-famille qui est une base de* E.

*Démonstration.* Comme E est de dimension finie, on sait qu'il existe une famille génératrice que l'on note $(e_1, \dots, e_p)$. On considère alors l'ensemble X des familles obtenues par ajout à la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'un nombre fini de vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_p)_{1 \leq j \leq p}$. On sait que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, on considère alors le sous-ensemble de X constitué des familles libres, puis on considère une famille libre de cardinal maximal parmi ce sous-ensemble. Notons-la $(y_1, \dots, y_q)_{1 \leq k \leq q}$ et montrons qu'elle est génératrice. Pour cela on montre que $\forall j \in [\![1, p]\!], e_j \in \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_q)$. Soit donc $j$ un entier de $[\![1, p]\!]$. Si $e_j$ est un des $y_1, \dots, y_q$ c'est gagné. Sinon, on considère la famille $(y_1, \dots, y_q, e_j)$ c'est une famille liée par maximalité de $(y_1, \dots, y_q)$. Par conséquent, $e_j \in \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_q)$. On en déduit que $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_q)$, donc que $(y_1, \dots, y_q)$ est génératrice.

☞ **Remarque**

*Ce théorème est souvent appelé théorème de la base incomplète, bien que cette dénomination soit mathématiquement incorrecte.*

On synthétise ces résultats sous la forme suivante :

**Théorème 7** *Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice finie de* E*. On suppose qu'il existe une partie* I *de* $[\![1,n]\!]$ *telle que $(x_i)_{i\in I}$ est libre. Alors il existe une partie* J *de* $[\![1,n]\!]$ *contenant* I *telle que $(x_j)_{j\in J}$ est une base de* E*.*

**Exemple 25** *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\}$. Il s'agit d'un sev de $\mathbb{R}^4$ (faites-le!). On en cherche une base. On étudie pour cela une caractérisation de* E *à l'aide des méthodes des sytèmes linéaires. Soit $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$.*

$$\begin{aligned}
x \in E &\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = & 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = & 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 = & -x_3 + x_4 \\ x_2 = & -\frac{1}{2}x_3 + x_4 \end{cases} \\
&\iff x = \left(-x_3 + x_4, -\frac{1}{2}x_3 + x_4, x_3, x_4\right) \\
&\iff x = x_3\left(-1, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + x_4(1,1,0,1) \\
&\iff x \in \mathrm{Vect}((2,1,-2,0),(1,1,0,1))
\end{aligned}$$

*On pose alors $e_1 = (2,1,-2,0)$ et $e_2 = (1,1,0,1)$. On vient de prouver que $(e_1,e_2)$ est une famille génératrice de* E*. Montrons qu'elle est libre. Soit $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0$, alors $(2\lambda+\mu, \lambda+\mu, -2\lambda, \mu) = (0,0,0,0)$, donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Ainsi, la famille $(e_1,e_2)$ est une base de* E*.*

## 2.2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

**Proposition 1** *Soit* E *un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, n un entier naturel non nul et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice finie de* E*. Alors toute famille de $n+1$ vecteurs de* E *est liée.*

*Démonstration.* On le prouve par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, on se donne une famille $(y_1,y_2)$ de E. Comme $(x_1)$ est génératrice, il existe des scalaires $\lambda_1$, $\lambda_2$ tels que $y_1 = \lambda_1 x_1$ et $y_2 = \lambda_2 x_1$. Mais alors, $\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0$. Comme E est de dimension 1, $x_1 \neq 0$. Si $(y_1,y_2) \neq (0,0)$, cela signifie que l'un des scalaires est non nul et que la famille est liée. Si $(y_1,y_2) = (0,0)$ alors $y_1 + y_2 = 0$ et la famille est toujours liée.
Soit $n$ une entier naturel non nul tel que la propriété soit vraie. Soit $(y_1,\dots,y_{n+2})$ une famille de $n+2$ vecteurs. Comme $(x_1\dots,x_{n+1})$ est génératrice, on dispose de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq n+1, 1\leq j\leq n+2}$ tels que

$$\forall j \in [\![1,n+2]\!], y_j = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,j} x_i$$

Premier cas : $\forall j \in [\![1,n+2]\!], \lambda_{n+1,j} = 0$. Dans ce cas, $x_{n+1}$ n'intervient dans aucune combinaison liénaire et en particulier la famille $(y_1,\dots,y_{n+1}$ est combinaisons linéaires de $(x_1,\dots,x_n)$. Par hypothèse de récurrence, $(y_1,\dots,y_{n+1})$ est liée. Donc sa sur-famille $(y_1,\dots,y_{n+2})$ est liée.
Deuxième cas : Il existe un entier $j$ dans $[\![1,n+2]\!], \lambda_{n+1,j} \neq 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs, on suppose que cet entier $j$ vaut $n+2$, i.e $\lambda_{n+1,n+2} \neq 0$. On écrit alors

$$\forall j \in [\![1,n+1]\!], y_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} x_i + \lambda_{n+1,j} x_{n+1}$$

$$y_{n+2} = \sum_{i+1}^{n} \lambda_{i,n+2} x_i + \lambda_{n+1,n+2} x_{n+1}$$

On pose alors pour tout entier $j$ dans $[\![1,n+1]\!]$,

$$Y_j = y_j - \frac{\lambda_{n+1,j}}{\lambda_{n+1,n+2}} y_{n+2}$$

qui ne fait plus intervenir le vecteur $x_{n+1}$. Autrement dit, la famille $(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. Par hypothèse de récurrence, $(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ est liée. On dispose d'un $n+1$-uplet de scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Y_i = 0$$

Cela permet d'écrire

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y_i + \left( \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \frac{-\lambda_{n+1,j}}{\lambda_{n+1,n+2}} \right) y_{n+2} = 0$$

ce qui fournit un $n+2$-uplet non trivial de scalaires qui prouve que $(y_1, \ldots, y_{n+2})$ est liée. Conclusion, la propriété est vraie par récurrence pour tout entier $n$.

**Théorème 8** *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de* $E$ *ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de* $E$*, noté* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ *ou* $\dim(E)$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base.*

*Démonstration.* Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_q)$ deux bases de E. Si $p \neq q$, alors quitte à échanger, on suppose $p < q$. Mais alors, $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice finie et $q \geq p+1$. D'après le lemme précédent, la famille $(f_1, \ldots, f_{p+1})$ est liée, donc sa sur-famille $(f_1, \ldots, f_q)$ est liée. Or c'est une base, donc est elle libre, ce qui est absurde. Par conséquent, $p = q$.

**Exemple 26** — $\dim \mathbb{K}^n = n$.

- — $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.
- — $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.
- — $\dim\{y \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | y'' + y = 0\} = 2$. *Il suffit pour cela de démontrer que les fonctions* $x \mapsto \cos(x)$ *et* $x \mapsto \sin(x)$ *sont indépendantes. Soit* $(a, b) \in R^2$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}, a\cos(x) + b\sin(x) = 0$. *Alors il existe un réel* $\varphi$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi) = 0$. *En particularisant en* $x = -\varphi$*, on obtient* $\sqrt{a^2+b^2} = 0$*, donc* $a = b = 0$*, ce qui prouve la liberté de cette famille.*
- — *Soit* $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. *Alors* $\dim\{u \in \mathbb{C}^n | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\} = 2$. *Si* $a^2 - 4b \neq 0$*, on a vu que cet espace est engendré par* $n \mapsto \lambda^n$ *et* $n \mapsto \mu^n$ *avec* $\lambda, \mu$ *les racines distinctes de* $X^2 + aX + b$. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha\lambda^n + \beta\mu^n = 0$. *Alors* $\alpha + \beta = 0$ *et* $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$. *Ces deux égalités impliquent* $\alpha(\lambda - \mu) = 0$*, donc* $\alpha = 0$*, puis* $\beta = 0$. *Ainsi, ces deux suites sont indépendantes. Dans le cas* $a^2 - 4b = 0$*, on a montré que cet espace engendré par* $n \mapsto \lambda^n$ *et* $n \mapsto n\lambda^n$. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n = 0$. *Alors* $\alpha = 0$ *et* $\alpha\lambda + \beta\lambda = 0$. *Comme* $b \neq 0$, $\lambda \neq 0$*, donc* $\beta = 0$.
- — $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$*, mais* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. $\mathbb{R}$ *est de dimension infinie sur* $\mathbb{Q}$.
- — *Dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = n(n+1)/2$ *et* $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = n(n-1)/2$. *On a par exemple les bases* $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ *pour le premier sev et* $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ *pour le second.*

**Propriété 29** *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel de dimension* $n$. *Soit* $p$ *un entier naturel et* $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ *une famille de* $E$. *Alors cette famille est une base de* $E$ *si et seulement si* $p = n$ *et elle est libre si et seulement si* $p = n$ *et elle est génératrice.*

*Démonstration.* Si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base, alors $p = n$ car toutes les bases de E ont même cardinal. De plus, cette famille est libre et génératrice, ce qui donne les deux conslusions souhaitées. Réciproquement supposons $p = n$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ libre. Alors il en existe une sur-famille qui est une base de E. Cette base est alors de cardinal $n$, puisque $\dim(E) = n$, donc c'est la famille initiale, ce qui prouve que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base. Autre réciproque, supposons $p = n$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ génératrice. Alors il en existe une sous-famille qui est une base. Cette base est alors de cardinal $n$ puisque $\dim(E) = n$, donc c'est la famille initiale, ce qui prouve que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base.

⚠ **Attention**
*Dans* $E$ *de dimension finie* $n$*, il ne suffit pas qu'une famille de vecteurs en comporte* $n$ *pour être une base.*

**Propriété 30** *Soit* $E_1, E_2, \ldots, E_q$ *des espaces vectoriels tous de dimension finie. Alors* $E = \prod_{i=1}^q E_i$ *est de dimension finie et*

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{q} \dim(E_i)$$

⚠ **Attention**

*Eh non, ce n'est pas le produit des dimensions, mais leur somme.*

*Démonstration.* On le prouve par récurrence. C'est une trivialité pour $q=1$. Prouvons le cas $q=2$. On note $n=\dim(\mathrm{E}_1)$ et $p=\dim(\mathrm{E}_2)$, puis on note $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathrm{E}_1$, puis $(f_1\dots,f_p)$ une base de $\mathrm{E}_2$. On considère alors la famille $(e_1,0),\dots(e_n,0),(0,f_1),\dots,(0,f_p)$. Montrons qu'il s'agit d'une base de E.

— Liberté : Soit $(\lambda_1\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_p)$ un $n+p$-uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^n\lambda_i(e_i,0)+\sum_{j=1}^p\mu_j(0,f_j)=(0,0)$ dans E. Alors

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\mathrm{e}_i=0\quad\text{et}\quad\sum_{i=1}^p\mu_jf_j=0$$

D'après la liberté de $(e_1,\dots,e_n)$ dans $\mathrm{E}_1$, $\forall i\in[\![1,n]\!],\lambda_i=0$. D'après la liberté de $(f_1,\dots,f_p)$ dans $\mathrm{E}_2$, $\forall j[\![1,p]\!],\mu_j=0$. Conclusion, la famille initiale est bien libre.

— Génératrice : soit $z\in\mathrm{E}$, alors il existe $(x,y)\in\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2$ tel que $z=(x,y)=(x,0)+(0,y)$. Mais alors comme les familles $e$ et $f$ sont génératrices dans leurs espaces respectifs, il existe un $n$ uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et un $p$ uplet $(\mu_1,\dots,\mu_p)$ tels que $x=\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i$ et $y=\sum_{j=1}^p\mu_jf_j$. On en déduit que

$$z=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i,0\right)+\left(0,\sum_{j=1}^p\mu_jf_j\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(e_i,0)+\sum_{j=1}^p\mu_j(0,f_j)$$

donc que la famille est bien génératrice.

En conclusion, E est de dimension finie et $\dim(\mathrm{E})=n+p=\dim(\mathrm{E}_1)+\dim(\mathrm{E}_2)$. Soit $q$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que la propriété est vraie. Soit $(\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_{q+1})$ une famille de $q+1$ d'espaces vectoriels tous de dimension finie. Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{i=1}^q\mathrm{E}_i$ est un ev de dimension finie égale à $\sum_{i=1}^q\dim(\mathrm{E}_i)$. D'après le cas $q=2$, on en déduit que $\prod_{i=1}^{q+1}\mathrm{E}_i$ est de dimension finie égale à $\sum_{i=1}^q\dim(\mathrm{E}_i)+\dim(\mathrm{E}_{q+1})=\sum_{i=1}^{q+1}\dim(\mathrm{E}_i)$.

**Définition 20** *Soit $(x_i)_{1\le i\le n}$ une famille de vecteurs de* E. *On appelle rang de cette famille, noté* $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$ *la dimension de* $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

**Exemple 27** *Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère la famille*

$$\mathrm{C}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad\mathrm{C}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\quad\mathrm{C}_3=\begin{pmatrix}1\\6\\5\end{pmatrix},\quad\mathrm{C}_4=\begin{pmatrix}4\\12\\15\end{pmatrix}$$

*On utilise un pivot pour échelonner la matrice obtenue à l'aide des ces quatre colonnes.*

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3,\mathrm{C}_4)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

*Ainsi, la famille* $(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3,\mathrm{C}_4)$ *est de rang* 3.

## 2.3 Dimension et sous-espaces

**Propriété 31** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* F *un sous-espace de* E. *Alors* F *est de dimension finie et* $\dim(\mathrm{F})\le\dim(\mathrm{E})$. *Il y a égalité si et seulement si* $\mathrm{F}=\mathrm{E}$.

*Démonstration.* Comme E est de dimension finie, on dispose d'une base de E, celle-ci engendre nécessairement F, donc F est de dimension finie. De plus, comme elle engendre F, il en existe une sous-famille qui est une base de F. Ainsi, le cardinal de cette sous-famille est inférieur à $\dim\mathrm{E}$. D'après la définition de la dimension, $\dim(\mathrm{F})\le\dim(\mathrm{E})$. Si $\mathrm{E}=\mathrm{F}$, il y a égalité des dimensions. Réciproquement, si $\dim\mathrm{F}=\dim\mathrm{E}$, soit B une base de F. C'est une famille libre de F, donc de E. Comme elle est de cardinal égal à $\dim(\mathrm{E})$, c'est une base de E, donc elle engendre E. Ainsi, $\mathrm{F}\supset\mathrm{E}$, donc $\mathrm{F}=\mathrm{E}$.

**Propriété 32** *Soit* F *un sev de* E *de dimension finie. Alors il existe un sev* G *de* E *tel que* F *et* G *sont supplémentaires (on appelle* G *un supplémentaire de* F *dans* E*).*

*Démonstration.* D'après la propriété précédente, F est de dimension finie. On en considère donc une base $(e_1, \dots, e_p)$. Cette famille est libre dans E, donc on peut la compléter en base $(e_1, \dots, e_n)$ dans E. On pose alors $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ et on vérifie que F et G sont supplémentaires. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice dans E, pour tout $x$ dans E, il existe un $n$-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1} \lambda_i e_i$. Comme F et G sont des sev, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F$ et $\sum_{i=p+1} \lambda_i e_i \in G$, donc $E = F + G$. Soit $x \in F \cap G$, on dispose de scalaires tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$, mais alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, on en déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$, donc que $x = 0$. Conclusion, F et G sont en somme directe.

**Propriété 33** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie,* F *et* G *deux sev de* E *en somme directe. Alors* $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer ce qui précède à l'espace vectoriel F+G dont on sait qu'il est de dimension finie, puisque E est de dimension finie.

**Propriété 34 (Formule de Grassmann)** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* F *et* G *deux sev de* E *chacun de dimension finie. Alors* $F + G$ *et* $F \cap G$ *sont de dimension finie et* $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

*Démonstration.* Considérons un supplémentaire H de $F \cap G$ dans F. Démontrons alors que $F + G = H \oplus G$. Soit $x$ un élément de $F+G$, on note $(x_F, x_G)$ un couple de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. De plus, $x_F$ se décompose dans $H \oplus (F \cap G)$ via $x_F = x_H + x_{F \cap G}$. Ainsi, $x = x_H + x_{F \cap G} + x_G$ avec $x_{F \cap G} + x_G$ appartenant à G puisque G est un sev de E., donc $F+G = H+G$. D'autre part, soit $x \in H \cap G$. Comme H inclus dans F, $x$ appartient à $F \cap G$, donc $x \in H \cap (F \cap G)$. Toutefois, H est en somme directe avec $F \cap G$, puisque c'en est un supplémentaire, donc $H \cap (F \cap G) = \{0\}$ et $x = 0$. Ainsi, H est en somme directe avec G, ce qui prouve $F + G = H \oplus G$.
On en déduit que $\dim(F + G) = \dim(G) + \dim(H) = \dim(G) + \dim(F) - \dim(F \cap G)$.

**Exercice 3** *Établir une formule pour la dimension de la somme de trois sev* F, G, H *de* E.

**Propriété 35** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* F *et* G *deux sev de* E*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

— F *et* G *sont supplémentaires dans* E

— $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ *et* $\dim(F + G) = \dim(E)$

— $F \cap G = \{0\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

*Démonstration.* Si F et G sont supplémentaires, alors on a déjà vu que $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. De plus, $F+G = E$ donc leurs dimensions sont égales. Le premier point implique donc le second. Si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ et $\dim(F+G) = \dim(E)$. Alors $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$. Ainsi le second point entraîne le troisième. Si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, alors F et G sont en somme directe. De plus, comme $F + G \subset E$, l'égalité des dimensions suffit à établir $F + G = E$. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans E.

**Exemple 28** *Dans* $E = \mathbb{R}^3$*, on considère* $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$ *et* $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2 - x_3 = 0 \wedge 2x_1 + x_3 = 0\}$*. On montre rapidement que* F *et* G *sont des sev de* E*. Comme* E *est de dimension finie,* F *et* G *le sont également.* F *est une droite qui admet* $(1, -2, -1)$ *comme base,* G *est un plan qui admet* $((0, 1, 1), (1, 0, -2))$ *comme base. Par conséquent,* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$*. D'autre part, soit* $x = (x_1, x_2, x_3) \in F \cap G$*, alors*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*L'opération* $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ *donne le système équivalent :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*On termine avec l'opération* $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$*, ce qui donne*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*On reconnaît alors une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Celle-ci est donc inversible et en multipliant à gauche par son inverse, on obtient* $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$*. Ainsi,* $F \cap G = \{0\}$ *et les sev* F *et* G *sont supplémentaires.*

**Propriété 36** *Soit* $\mathrm{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n$*,* $\mathrm{F}$ *un sev de* $\mathrm{E}$ *de dimension* $p$*. Alors il existe une base* $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* $\mathrm{E}$ *telle que* $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ *est une base de* $\mathrm{F}$*.*

*Démonstration.* Comme F est de dimension finie $p$, on dispose d'une base $(e_1,\dots,e_p)$ de F. Cette famille est libre dans F, donc libre dans E. On peut ainsi la compléter en base de E sous la forme $(e_1,\dots,e_n)$.

**Propriété 37** *Soit* $\mathrm{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n$*,* $\mathrm{F}$ *un sev de* $\mathrm{E}$ *de dimension* $p$*,* $\mathrm{G}$ *un sev de* $\mathrm{E}$ *de dimension* $q$*. On suppose que* $\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{G}$ *sont en somme directe. Alors il existe une base* $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* $\mathrm{E}$ *telle que* $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ *est une base de* $\mathrm{F}$ *et* $(x_i)_{p+1\leq i\leq q}$ *est une base de* $\mathrm{G}$*.*

*Démonstration.* Soit $(e_1\dots,e_p)$ une base de F et $(e_{p+1},\dots e_{q+p})$ une base de G. Démontrons que la famille $(e_1,\dots,e_{p+q})$ est libre. On considère donc un $p+q$-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_{p+q})$ de scalaires tel que $\sum_{i=1}^{p+q}\lambda_i e_i=0$. Alors

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i=-\sum_{i=p+1}^{q}\lambda_i e_i\in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$$

Comme F et G sont en somme directe, $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0\}$, donc $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i=0$. Comme $(e_1,\dots,e_p)$ est libre, on en déduit que $\forall i\in[\![1,p]\!],\lambda_i=0$. De même, on a $\sum_{i=p+1}^{q}\lambda_i e_i=0$. Par liberté de $(e_{p+1},\dots,e_q)$, on en déduit que $\forall i[\![p+1,q]\!],\lambda_i=0$. En conclusion, $\forall i\in[\![1,q]\!],\lambda_i=0$, et la famille indiquée est libre. D'après le théorème de la « base incomplète », on peut compléter cette famille en base de E, sous la forme $(e_1,\dots,e_n)$, ce qui donne le résultat attendu.

**Exemple 29** *Soit* $\mathrm{P}$ *un plan et* $\mathrm{D}$ *une droite de* $\mathbb{R}^3$*. On suppose que* $\mathrm{P}\cap\mathrm{D}=\{0\}$*, alors il existe une base* $(e_1,e_2,e_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $(e_1,e_2)$ *est une base de* $\mathrm{P}$ *et* $e_3$ *une base de* $\mathrm{D}$*.*