COMPLÉMENTS SUR LES RÉELS

De fait, vous savez presque tout sur les réels — mais pas tout. Alors que vous manipulez des inégalités depuis longtemps, il y a tout de même une propriété de la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ que vous ne connaissez pas — dite *propriété de la borne supérieure* — et qui revêt pour les mathématiques du programme de MPSI une importance fondamentale. Ce chapitre vise principalement à motiver et vous présenter cette propriété, mais nous y introduirons aussi un minimum de vocabulaire *topologique*. En un mot, la *topologie* est la théorie très générale de la « proximité » des objets mathématiques les uns par rapport aux autres, mais nous nous contenterons d'y mettre un pied dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Dans tout ce chapitre, $A, B\dots$ sont des parties de $\mathbb{R}$.

1 MAJORANTS/MINORANTS, PLUS GRAND/PETIT ÉLÉMENT

1.1 MAJORANTS/MINORANTS D'UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$

Définition (Majorants/minorants d'une partie de $\mathbb{R}$)

- **Partie majorée :** On dit que A est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \leqslant M$.
  Un tel réel M est appelé UN *majorant de A*. On dit aussi que A est *majorée par M* ou encore que M *majore A*.
- **Partie minorée :** On dit que A est *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad m \leqslant a$.
  Un tel réel m est appelé UN *minorant de A*. On dit aussi que A est *minorée par m* ou encore que m *minore A*.
- **Partie bornée :** On dit que A est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, i.e. si :
$$\exists K \geqslant 0, \quad \forall a \in A, \quad |a| \leqslant K.$$

Attention ! On ne parle jamais « du » majorant d'une partie majorée de $\mathbb{R}$ mais bien toujours d'UN majorant car une telle partie en possède toujours plein. Tout réel supérieur ou égal à un majorant est lui-même un majorant.

Exemple L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majoré par 1, mais aussi par 2 ou e^{100}... Il n'est pas minoré en revanche.

1.2 PLUS GRAND/PETIT ÉLÉMENT D'UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$

Définition (Plus grand/petit élément, maximum/minimum d'une partie de $\mathbb{R}$)

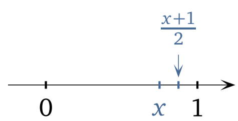
- **Plus grand élément :** On appelle *plus grand élément de A* ou *maximum de A* tout élément de A qui majore A.
- **Plus petit élément :** On appelle *plus petit élément de A* ou *minimum de A* tout élément de A qui minore A.

Théorème (Unicité du plus grand/petit élément) Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, celui-ci est unique. On peut donc l'appeler LE plus grand (resp. petit) élément de A et le noter $\max A$ (resp. $\min A$).

Attention ! Le plus grand/petit élément est unique... S'IL EXISTE !

Démonstration Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. Si M et M' sont deux plus grands éléments de A : $M' \leqslant M$ car M majore A et $M' \in A$, et de même $M \leqslant M'$ car M' majore A et $M \in A$. Conclusion : $M = M'$.

Exemple L'intervalle $[0, 1[$ admet 0 pour plus petit élément mais N'a PAS de plus grand élément.



Démonstration 0 appartient à $[0, 1[$ et le minore, donc en est le plus petit élément.
Pour montrer que $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément, il nous suffit de montrer qu'aucun élément de $[0, 1[$ ne majore $[0, 1[$. Or pour tout $x \in [0, 1[$: $x < \frac{x+1}{2}$ alors que $\frac{x+1}{2} \in [0, 1[$, donc on arrive toujours à trouver au-dessus de tout élément de $[0, 1[$ un élément de $[0, 1[$ strictement supérieur.

Théorème (Deux propriétés de $\mathbb{N}$)

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

(ii) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Démonstration

(i) Soit A une partie de $\mathbb{N}$, vide ou non. Supposons par contraposition que A ne possède pas de plus petit élément. Aucun élément de A ne peut alors minorer A. Or nous allons montrer par récurrence que A est minorée par n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en découlera comme voulu que A est vide.

Initialisation : A est minorée par 0 car toute partie de $\mathbb{N}$ l'est.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons A minorée par n. Comme par hypothèse A ne possède pas de plus petit élément, forcément $n \notin A$, donc $a > n$ pour tout $a \in A$. Mais ceci revient à dire, parce que nous travaillons avec des **ENTIERS**, que $a \geqslant n+1$ pour tout $a \in A$. En d'autres termes, A est minorée par $n+1$.

(ii) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Par hypothèse, l'ensemble des majorants **ENTIERS** de A est non vide, donc possède un plus petit élément m d'après (i).

- Supposons d'abord que $m = 0$. Dans ce cas $a \leqslant m = 0$ pour tout $a \in A$, donc $a = 0$ car $a \in \mathbb{N}$. Puisque A est non vide, cela montre que $A = \{0\}$, et donc A admet 0 pour plus grand élément.
- À présent, si $m \neq 0$: $m-1 \in \mathbb{N}$. Par définition de m, $m-1$ ne majore donc pas A, donc $m-1 < a$ pour un certain $a \in A$. Or l'**INÉGALITÉ D'ENTIERS** $m-1 < a \leqslant m$ est en fait une **ÉGALITÉ** : $m = a$, donc $m \in A$. Ainsi m est un élément de A qui majore A, i.e. le plus grand élément de A.

2 Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

2.1 Définition

Nous avons vu que $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément, pourtant sa borne 1 est quelque chose de cet ordre — mais quoi ? Comment décrire conceptuellement ce réel qui n'est pas dans $[0,1[$ mais qui n'est pas n'importe qui pour $[0,1[$? Ce qui rend la majorant 1 si particulier pour $[0,1[$, c'est qu'il est le meilleur majorant qu'on pouvait espérer, le plus petit possible — d'où la définition suivante.

Définition (Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$)

- **Borne supérieure :** **S'IL EXISTE**, le plus petit majorant de A est appelé **LA** *borne supérieure de A* et noté $\sup A$.
- **Borne inférieure :** **S'IL EXISTE**, le plus grand minorant de A est appelé **LA** *borne inférieure de A* et noté $\inf A$.

La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure, c'est que la borne supérieure, quand elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.

La borne supérieure n'existe pas toujours, mais quand elle existe, elle est unique en tant que plus petit élément — raison pour laquelle on peut parler de **LA** borne supérieure et lui accorder une notation.

Exemple Montrons proprement que $[0,1[$ admet 1 pour borne supérieure.

Démonstration Pour commencer, 1 majore $[0,1[$, mais il reste à montrer qu'aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore $[0,1[$. Soit $x < 1$ un tel réel.

— Si $x < 0$, x ne majore pas $[0,1[$ car $0 \in [0,1[$.

— Si $x \in [0,1[$: $x < \dfrac{x+1}{2}$ et pourtant $\dfrac{x+1}{2} \in [0,1[$, donc x ne majore pas $[0,1[$.

Dans les deux cas, x ne majore pas $[0,1[$.

En résumé, $[0,1[$ possède une borne supérieure, mais **PAS** de plus grand élément. Inversement, une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle posséder un plus grand élément mais **PAS** de borne supérieure ? Eh bien non.

Théorème (Max/min implique sup/inf) Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et : $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).

Démonstration Nous devons montrer que l'ensemble $\mathscr{M}$ des majorants de A possède un plus petit élément — alors A possédera une borne supérieure — et qu'en fait ce plus petit élément est $\max A$ — cela prouvera que $\sup A = \max A$. Deux choses à vérifier :

— que $\max A \in \mathscr{M}$, mais par définition, $\max A$ majore A,

— que $\max A$ minore $\mathscr{M}$, mais par définition $\max A \in A$.

Exemple Non majoré, $\mathbb{R}_+$ ne possède pas de borne supérieure. En revanche, parce que 0 en est le plus petit élément, 0 en est aussi la borne inférieure.

Théorème (Opérations sur les bornes supérieures) On suppose que A et B possèdent chacune une borne supérieure.

(i) **Inclusion :** Si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) **Réunion :** L'ensemble $A \cup B$ possède une borne supérieure et : $\sup(A \cup B) = \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$.

(iii) **Somme :** L'ensemble $A + B = \left\{a + b \mid \quad a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\right\}$ possède une borne supérieure et :
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(iv) **Multiplication par un réel strictement positif :** Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\lambda A = \left\{\lambda a \mid \quad a \in A\right\}$ possède une borne supérieure et : $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

On dispose d'un résultat analogue pour les bornes inférieures.

Démonstration

(i) Pour tout $x \in A$: $x \in B$ donc $x \leqslant \sup B$, donc $\sup B$ majore A, donc $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) Pour tout $x \in A$: $x \leqslant \sup A \leqslant \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$, et pour tout $x \in B$: $x \leqslant \sup B \leqslant \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$, donc $\max\left\{\sup A, \sup B\right\}$ majore $A \cup B$.

Soit $s < \max\left\{\sup A, \sup B\right\}$. Alors $s < \sup A$ ou $s < \sup B$, donc s ne majore pas A ou s ne majore pas B, donc $s < x$ pour un certain $x \in A \cup B$, ce qui prouve que s ne majore pas $A \cup B$.

Conclusion : $\max\left\{\sup A, \sup B\right\}$ est le plus petit majorant de $A \cup B$ — d'où le résultat.

(iii) Pour tout $x = a + b \in A + B$ avec $a \in A$ et $b \in B$: $x \leqslant \sup A + \sup B$, donc $\sup A + \sup B$ majore $A + B$.

Soit $s < \sup A + \sup B$. Aussitôt $s - \sup B < \sup A$, donc $s - \sup B$ ne majore pas A, donc $s - \sup B < a$ pour un certain $a \in A$. Ainsi $s - a < \sup B$, donc $s - a$ ne majore pas B, donc $s - a < b$ pour un certain $b \in B$. Finalement : $s < a + b$ et $a + b \in A + B$, donc s ne majore pas $A + B$.

Conclusion : $\sup A + \sup B$ est le plus petit majorant de $A + B$ — d'où le résultat.

(iv) Pour tout $x = \lambda a \in \lambda A$ avec $a \in A$: $x = \lambda a \leqslant \lambda \sup A$ car $\lambda > 0$, donc $\lambda \sup A$ majore λA.

Soit $s < \lambda \sup A$. Aussitôt $\dfrac{s}{\lambda} < \sup A$, donc $\dfrac{s}{\lambda}$ ne majore pas A, donc $\dfrac{s}{\lambda} < a$ pour un certain $a \in A$. Finalement $s < \lambda a$ et $\lambda a \in \lambda A$, donc s ne majore pas λA.

Conclusion : $\lambda \sup A$ est le plus petit majorant de λA — d'où le résultat.

Nous établirons au prochain chapitre « Limite d'une suite » une caractérisation de la borne supérieure/inférieure très simple d'utilisation en termes de suites.

2.2 Propriété de la borne supérieure/inférieure

Le résultat qui suit est UNE PROPRIÉTÉ ESSENTIELLE DE L'ENSEMBLE DES RÉELS. Sa démonstration dépend de la façon dont on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, donc ne nous intéresse pas car nous admettons l'existence des nombres réels. En un sens, en tout cas, TOUTE L'ANALYSE EST DANS CE THÉORÈME. Directement ou non, c'est de lui que nous allons déduire tous les grands théorèmes d'analyse du programme de MPSI — théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, théorème de Heine et construction de l'intégrale.

Le problème posé est simple, on veut déterminer toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui possèdent une borne supérieure. Or pour commencer, l'ensemble vide admet tout réel pour majorant, donc ne possède pas de borne supérieure car $\mathbb{R}$ n'est pas minoré. Ensuite, évidemment, si une partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, cette partie est aussi majorée — mais la réciproque est-elle vraie ? Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède-t-elle une borne supérieure ? La réponse est **OUI**, ce qui veut dire que le résultat suivant est **LE MEILLEUR QU'ON POUVAIT ESPÉRER**.

Théorème (Propriété de la borne supérieure/inférieure)

- **Propriété de la borne supérieure :** Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- **Propriété de la borne inférieure :** Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Attention ! Généralement, en mathématiques, le mot « propriété » renvoie à **UNE** propriété parmi d'autres d'un objet. Quand nous parlerons de **LA** propriété de la borne supérieure, il s'agira toujours du théorème fondamental qui précède.

La propriété de la borne supérieure est un pur résultat d'**EXISTENCE** et ne raconte rien d'intéressant sur la **VALEUR** des bornes supérieures. Telle borne supérieure existe, c'est magique, mais la propriété n'en dit pas plus. Nous n'avons pas eu besoin de la propriété de la borne supérieure pour montrer que $\sup\,[0,1[\,=1$ car nous avions à l'avance une idée très claire de la valeur de cette borne, mais il arrivera souvent que nous n'ayons aucune idée précise de ce genre. La propriété de la borne supérieure sera alors notre lueur dans l'obscurité, la petite magie qui fera surgir des êtres de nulle part et nous permettra d'avancer.

Par exemple, faites l'effort d'oublier que vous manipulez des racines carrées depuis des lustres. La racine carrée d'un réel positif a est par définition l'unique réel positif r pour lequel $r^2=a$, mais cette définition est un théorème d'existence et d'unicité avant d'être une définition. L'unicité est claire, car pour tous $r,r'\geqslant 0$, si $r^2=r'^2$, alors $r=\pm' r$, donc $r=r'$ par positivité. Mais l'existence, qui nous la garantit ? Si vous y réfléchissez bien, vous avez accepté l'existence des racines carrées sans même vous en rendre compte alors qu'elle n'a rien d'évident, et elle découle en fait de la propriété de la borne supérieure.

Fixons $a\geqslant 0$. J'affirme que l'ensemble $R=\left\{r\geqslant 0 \mid \; r^2\leqslant a\right\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Si on part du principe qu'on connaît les racines carrées, alors évidemment $R=\left[0,\sqrt{a}\right]$, mais si on se donne au contraire pour mission de les définir, on sera content de pouvoir poser par définition $\sqrt{a}=\sup R$.

— Tout d'abord, R est non vide car il contient 0.

— Ensuite, R est majoré par $a+1$ car pour tout $r\in R$: $\quad r^2\leqslant a\leqslant a+1 \overset{a+1\geqslant 1}{\leqslant} (a+1)^2$, $\quad$ donc $(a+1-r)(a+1+r)\geqslant 0$, donc $a+1-r\geqslant 0$, et enfin $r\leqslant a+1$.

La propriété de la borne supérieure nous permet ainsi de poser $\sqrt{a}=\sup\left\{r\geqslant 0 \mid \; r^2\leqslant a\right\}$, et nous tenons là une vraie définition propre de la racine carrée.

2.3 DROITE ACHEVÉE $\overline{\mathbb{R}}$

La propriété de la borne supérieure est un outil puissant mais présente tout de même un gros inconvénient. On aurait préféré l'énoncé suivant : « **TOUTE** partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. » Que manque-t-il à $\mathbb{R}$ pour que ce résultat soit vrai ? Pourquoi $\mathbb{R}$ lui-même, par exemple, n'a-t-il pas de borne supérieure ? Réponse : parce qu'il n'a pas de majorant. Eh bien rajoutons-en ! Donnons-nous pour cela deux objets mathématiques quelconques extérieurs à $\mathbb{R}$ et notons-les $+\infty$ et $-\infty$. Peu importe qui ils sont, ce qui compte, ce sont les règles de calcul que nous allons leur imposer. En principe, ces règles devraient vous paraître naturelles.

Définition (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) On pose $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\left\{-\infty,+\infty\right\}$. On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante.

- **Prolongement de l'ordre :** Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad -\infty<x<+\infty$.
- **Prolongement de l'addition :** $\quad x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty \quad$ et $\quad x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad (+\infty)+(+\infty)=+\infty \quad$ et $\quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$.
- **Prolongement de la multiplication :** $\quad \dfrac{1}{+\infty}=\dfrac{1}{-\infty}=0 \quad$ et pour tout $x\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\left\{0\right\}$:

$$x\times(+\infty)=(+\infty)\times x=\begin{cases}+\infty & \text{si } x>0\\ -\infty & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad x\times(-\infty)=(-\infty)\times x=\begin{cases}-\infty & \text{si } x>0\\ +\infty & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Attention ! Nous ne donnerons aucun sens aux expressions :

$$(+\infty)-(+\infty), \qquad (-\infty)-(-\infty), \qquad 0\times(\pm\infty), \qquad (\pm\infty)\times 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

La remarque qui suit est légèrement hors programme, mais néanmoins éclairante. Dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$, rien ne nous empêche de définir comme nous l'avons fait dans $\mathbb{R}$ les notions de majorant/minorant, plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure. Il n'est pas trop dur de montrer que les majorants/plus grands éléments/bornes supérieures que nous calculons DANS $\mathbb{R}$ sont encore des majorants/plus grands éléments/bornes supérieures DANS $\overline{\mathbb{R}}$, mais certaines parties qui N'avaient PAS de majorant/plus grand élément/borne supérieure se trouvent maintenant en avoir.

— L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est majoré par $+\infty$ DANS $\overline{\mathbb{R}}$ et y admet même $+\infty$ pour borne supérieure alors qu'il n'était pas majoré DANS $\mathbb{R}$.

— L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant DANS $\overline{\mathbb{R}}$, or $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément DANS $\overline{\mathbb{R}}$, donc $\varnothing$ admet $-\infty$ pour borne supérieure !

Plus généralement, dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$ — merci $\overline{\mathbb{R}}$! — la propriété de la borne supérieure s'énonce avec plus de pureté, elle a trouvé son chez-soi :

> TOUTE partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$.
> En outre, pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$,
> borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncident.

2.4 QU'EST-CE QU'UN INTERVALLE ?

Par définition, pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$: $\quad [a,b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \ a \leqslant x \leqslant b\right\}$,
$[a,b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \ a \leqslant x < b\right\}$, $\quad$ et on définit de manière analogue les ensembles $]a,b]$ et $]a,b[$.

Ces ensembles sont tous appelés des intervalles, mais qu'ont-ils de commun ? Ne peut-on pas trouver une définition unique des intervalles, i.e. une définition qui ne nous oblige pas à distinguer mille cas ? Ce paragraphe est justement consacré à une telle re-définition « sans cas » des intervalles, dont il nous faudra bien sûr démontrer qu'elle concerne exactement les intervalles auxquels nous sommes habitués, ni plus, ni moins.

Définition (Intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$)
On appelle *intervalle de* $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ pour laquelle : $\quad \forall x, y \in I, \quad x \leqslant y \implies [x,y] \subset I.$

Par définition, un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ». Les esprits malins auront deviné que je prépare ici le terrain du TVI en vue des prochains mois.

Exemple Pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ pour lesquels $a \leqslant b$, les ensembles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ sont des intervalles au sens de la définition « sans cas » précédente.

Démonstration Montrons seulement que $[a,b[$ est un intervalle. Soient $x, y \in [a,b[$ avec $x \leqslant y$. Nous devons montrer que $[x,y] \subset [a,b[$. Or pour tout $t \in [x,y]$: $\quad a \leqslant x \leqslant t \leqslant y < b, \quad$ donc $t \in [a,b[$.

Théorème (Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$) Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$, a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leqslant b$.

Démonstration Soit I un intervalle non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. La propriété de la borne inférieure/supérieure DANS $\overline{\mathbb{R}}$ montre que I possède une borne inférieure a et une borne supérieure b. Distinguons plusieurs cas.

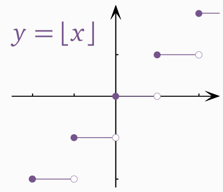
- **Cas où $a \in I$ et $b \in I$:** Montrons que $I = [a,b]$.
  — Montrons que $[a,b] \subset I$. Or I est un intervalle et contient a et b, donc $[a,b] \subset I$.
  — Montrons que $I \subset [a,b]$. Or pour tout $x \in I$, comme a minore I et b majore I : $\quad a \leqslant x \leqslant b, \quad$ i.e. $x \in [a,b]$.
- **Cas où $a \in I$ et $b \notin I$:** Montrons que $I = [a,b[$.
  — Montrons que $[a,b[\subset I$. Soit $x \in [a,b[$. Comme $x < b = \sup I$, x ne majore pas I, donc $x < b'$ pour un certain $b' \in I$. Ainsi $a \leqslant x \leqslant b'$ avec $a \in I$ et $b' \in I$, donc comme I est un intervalle : $\quad x \in I$.
  — Montrons que $I \subset [a,b[$. Soit $x \in I$. Comme a minore I et b majore I : $\quad a \leqslant x \leqslant b. \quad$ Mais $x \in I$ alors que $b \notin I$, donc $a \leqslant x < b$, i.e. $x \in [a,b[$.

- **Cas où $a \notin I$ et $b \in I$:** On montre que $I =]a, b]$ en adaptant la preuve du cas précédent.
- **Cas où $a \notin I$ et $b \notin I$:** On montre cette fois que $I =]a, b[$.

2.5 PARTIE ENTIÈRE

Définition-théorème (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique ENTIER $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $n \leqslant x < n+1$, appelé la *partie entière de x* et noté $\lfloor x \rfloor$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

L'essentiel en résumé : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$



Démonstration L'existence de la partie entière vous paraît sans doute évidente, elle découle en réalité de la propriété de la borne supérieure. Qui nous garantit en effet que l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{Z} \mid \; n \leqslant x\right\}$ possède un plus grand élément ? Nous avons vu que toute partie de $\mathbb{N}$ majorée DANS $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément, mais ici on est dans $\mathbb{Z}$ — ce qui n'est pas trop grave — et surtout, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{Z} \mid \; n \leqslant x\right\}$ est majorée DANS $\mathbb{R}$ — et ça c'est grave si on veut que la partie entière soit un entier. Pour justifier l'existence de la partie entière, on pose donc $\lfloor x \rfloor = \sup \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \; n \leqslant x\right\}$ grâce à la propriété de la borne supérieure et on démontre ensuite proprement que $\lfloor x \rfloor$ est un entier. Mais trêve de bavardages, on l'admet.

Exemple $\lfloor 11 \rfloor = 11,\quad \lfloor 5,2 \rfloor = 5,\quad \lfloor -4 \rfloor = -4,$ MAIS ATTENTION : $\lfloor -7,3 \rfloor = -8$ (et non pas -7).

Exemple Soient $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Il paraît clair qu'on peut toujours ramener x dans l'intervalle $[0, T[$ en lui ajoutant/retranchant un certain nombre de fois T, mais montrons-le. On cherche un entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $x - nT \in [0, T[$, i.e. $n \leqslant \dfrac{x}{T} < n+1$. Par définition de la partie entière, l'entier $\left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$ convient. À retenir, donc : $x - \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor T \in [0, T[$.

Exemple Nous aurons bientôt régulièrement recours aux raisonnements qui suivent, il faut donc bien les comprendre. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ fixés. Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \boxed{+1}$ car $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > A$? C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $\lfloor \sqrt{A} \rfloor \boxed{+1}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$? C'est vrai si et seulement si $2^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, i.e. $n > -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor \boxed{+1}\right\}$. Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

3 LA TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$ EN QUELQUES MOTS

3.1 VOISINAGES D'UN POINT DE $\overline{\mathbb{R}}$ DANS $\mathbb{R}$

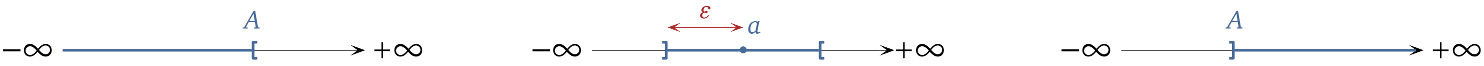
Le concept de *voisinage* n'est pas au programme de MPSI, mais il éclaire tellement les chapitres d'analyse de l'année qu'il serait dommage de s'en priver.

Définition (Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$)

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle *voisinage de a (dans $\mathbb{R}$)* toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists \varepsilon > 0, \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$.
- On appelle *voisinage de $+\infty$ (dans $\mathbb{R}$)* toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists A > 0, \quad]A, +\infty[\subset V$.
- On appelle *voisinage de $-\infty$ (dans $\mathbb{R}$)* toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $\exists A < 0, \quad]-\infty, A[\subset V$.

Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on notera parfois $\mathscr{V}_a(\mathbb{R})$ l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{R}$, mais la notation n'est pas universelle.

Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, un voisinage de a est donc une partie de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels « à proximité immédiate » de a. Un voisinage peut avoir une tête compliquée puisqu'il n'est censé que CONTENIR un intervalle de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, A[$, mais au fond, je vous recommande de penser à CES VOISINAGES-LÀ quand vous vous représentez un voisinage.



Voisinage « de base » de $-\infty$ — Voisinage « de base » de $a \in \mathbb{R}$ — Voisinage « de base » de $+\infty$

Théorème (Propriétés des voisinages)

(i) Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a.

(ii) Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints. En d'autres termes, pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ distincts, il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b pour lesquels $V_a \cap V_b = \varnothing$.

Démonstration Attention, je ne traite pas tous les cas possibles dans la preuve qui suit, complétez !

(i) Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et V et V' deux voisinages de a.

- **Cas où $a \in \mathbb{R}$:** Il existe deux réels $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ pour lesquels $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$ et $]a-\varepsilon', a+\varepsilon'[\subset V'$. Aussitôt, $V \cap V'$ est un voisinage de a car $]a-\varepsilon'', a+\varepsilon''[\subset V \cap V'$ pour $\varepsilon'' = \min\left\{\varepsilon, \varepsilon'\right\} > 0$.
- **Cas où $a = +\infty$:** Il existe deux réels $A, A' > 0$ pour lesquels $]A, +\infty[\subset V$ et $]A', +\infty[\subset V'$. Aussitôt, $V \cap V'$ est un voisinage de $+\infty$ car $]A'', +\infty[\subset V \cap V'$ pour $A'' = \max\left\{A, A'\right\} > 0$.

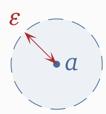
(ii) Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ deux réels pour lesquels $a < b$.

- **Cas où $a, b \in \mathbb{R}$:** Posons $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$, puis $V_a =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ et $V_b =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$. Comme voulu, V_a est un voisinage de a, V_b un voisinage de b et $V_a \cap V_b = \varnothing$.
- **Cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$:** Posons $V_a =]a-1, a+1[$ et $V_{+\infty} =]a+2, +\infty[$. Comme voulu, V_a est un voisinage de a, $V_{+\infty}$ un voisinage de $+\infty$ et $V_a \cap V_{+\infty} = \varnothing$. ■

En vue de nos travaux à venir sur les suites et les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, la définition qui suit généralise la précédente. Le théorème « Propriétés des voisinages » reste vrai de ces nouveaux voisinages.

Définition (Voisinage d'un point de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) Soit $a \in \mathbb{C}$.
On appelle *voisinage de a (dans $\mathbb{C}$)* toute partie V de $\mathbb{C}$ pour laquelle : $\exists\, \varepsilon > 0, \quad \mathrm{D}(a, \varepsilon) \subset V, \quad$ où $\mathrm{D}(a, \varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-a| < \varepsilon\right\}$.

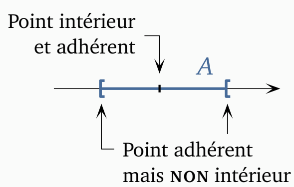
Voisinage « de base » de a



3.2 Points intérieurs, points adhérents, parties denses

Définition (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$)

- **Point intérieur :** Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est *intérieur à A* si A contient un voisinage de x, i.e. si : $\exists\, \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.
- **Point adhérent :** Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que x est *adhérent à A* si A rencontre tout voisinage de x, i.e. si pour tout voisinage V_x de x : $A \cap V_x \neq \varnothing$.



En termes simples, x est intérieur à A s'il appartient à A sans être « au bord de A », et adhérent à A s'il appartient à A ou se trouve « au bord de A ».

Exemple 1 est adhérent à $[0, 1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.

Définition-théorème (Partie dense de $\mathbb{R}$) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout réel est adhérent à A.

(ii) A rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, ce qui revient à dire qu'on peut toujours trouver un élément de A entre deux réels distincts.

On dit dans ces conditions que A est *dense dans* $\mathbb{R}$.

En termes simples, une partie dense de $\mathbb{R}$ est UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$ QUI EST UN PEU PARTOUT SANS ÊTRE FORCÉMENT TOUT.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Le réel $\dfrac{x+y}{2}$ est adhérent à A par hypothèse, donc l'intervalle ouvert non vide $]x, y[$, qui en est un voisinage, contient au moins un élément de A.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que x est adhérent à A. Or pour tout voisinage V_x de x, d'une part $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V_x$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et d'autre part, l'intervalle ouvert non vide $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contient un élément de A par hypothèse, donc V_x contient un élément de A. Comme voulu, A rencontre tout voisinage de x.

Théorème (Densité de l'ensemble des rationnels/irrationnels) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont imbriqués l'un dans l'autre un peu à la manière d'une fermeture-éclair.

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$. Nous voulons montrer que l'intervalle $]a, b[$ contient à la fois un rationnel et un irrationnel.

- **Rationnels :** On cherche $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $a < \dfrac{p}{q} < b$. Si l'on veut être sûr que l'intervalle $]a, b[$ contient un rationnel $\dfrac{p}{q}$, il est naturel d'exiger que sa longueur $b - a$ soit strictement supérieure à l'écart $\dfrac{1}{q}$ entre deux tels nombres. En d'autres termes, il est raisonnable d'exiger l'inégalité $q > \dfrac{1}{b-a}$. Posons donc $q = \left\lfloor \dfrac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$, de telle sorte que $q \in \mathbb{N}^*$ et $1 < q(b-a)$. Posons ensuite $p = \lfloor qa \rfloor + 1$. Aussitôt : $p \in \mathbb{Z}$ et $qa < p \leqslant qa + 1 < qa + q(b-a) = qb$, donc $a < \dfrac{p}{q} < b$.
- **Irrationnels :** D'après ce qui précède, l'intervalle $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient au moins un rationnel r et $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, r\right[$ en contient lui-même un r'. L'un au moins de ces deux rationnels est non nul, par exemple r, et $r\sqrt{2} \in]a, b[$. Enfin, $r\sqrt{2}$ est irrationnel sans quoi $\sqrt{2} = \dfrac{1}{r} \times r\sqrt{2}$ serait rationnel par produit — ce qui est faux.