Exercice 1 - Une étude de fonction

1. Soit x un réel non nul, alors comme le sinus hyperbolique est impair, on a

$$f(-x) = (-x)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = (-x)\operatorname{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = (-x)(-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)) = x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Par conséquent, f est paire.

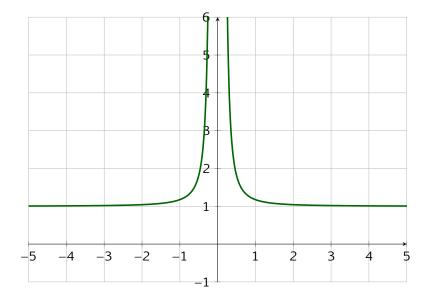
- 2. Quand x tend vers $+\infty$, 1/x tend vers 0. Mais alors, comme le sinus hyperbolique est dérivable en 0, $\limsup_{y\to 0} \operatorname{sh}(y)/y = \operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$. D'après les composées de limites, on en déduit que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. Comme f est paire, on a également $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$. D'autre part, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, 1/x tend vers $+\infty$. Or, d'après les croissances comparées, on a $\lim_{y\to +\infty} \operatorname{sh}(y)/y = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Toujours par parité, on en déduit que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. En conclusion, $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = +\infty$.
- 3. La fonction inverse, le sinus hyperbolique et l'identité sont dérivables sur leur ensemble de définition. On en déduit par produit et composées de fonctions dérivables que f est dérivable sur \mathbb{R}^* . De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \left[\frac{\operatorname{sh}(1/x)}{\operatorname{ch}(1/x)} - \frac{1}{x}\right] = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]$$

4. Étudions rapidement le signe de $y\mapsto \operatorname{th}(y)-y$. Il s'agit d'une fonction dérivable de dérivée $y\mapsto 1-\operatorname{th}^2(y)-1=-\operatorname{th}^2(y)$. Ainsi, la dérivée est de signe constant négatif, donc cette fonction est décroissante. De plus, elle s'annule en 0, puisque $\operatorname{th}(0)=0$. Ainsi, elle est de signe négatif sur \mathbb{R}^+ et de signe positif sur \mathbb{R}^- . Comme le cosinus hyperbolique est de signe constant positif, on en déduit que f' est de signe positif sur \mathbb{R}^{-*} et de signe négatif sur \mathbb{R}^{+*} , donc que f est croissante sur \mathbb{R}^{-*} et décroissante sur \mathbb{R}^{+*} .



Exercice 2 - Fonctions hölderiennes

1. Si f est constante, alors pour tous réels x, y dans I, |f(x) - f(y)| = 0, tandis que $1|x - y|^{\alpha} \ge 0$. Donc f est α -hölderienne. Réciproquement, supposons que f est α -hölderienne. Soit x, y deux réels distincts dans I, alors comme $\alpha > 1$, on a

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \le \mathsf{L}_f |x - y|^{\alpha - 1}$$

Ainsi, quand y tend vers x, $|x-y|^{\alpha-1}$ tend vers 0 puisque $\alpha-1>0$. Par conséquent, le taux d'accroissement de f en x tend vers 0. Donc f est dérivable en x et f'(x)=0. Ainsi, f est dérivable, de dérivée nulle sur un intervalle, donc constante.

2. Soit x et y deux réels positifs. On suppose dans un premier temps que $x \ge y$. Alors comme la racine carrée est croissante sur \mathbb{R}^+ , $\sqrt{x} \ge \sqrt{y}$. Comme $\sqrt{y} \ge 0$, on en déduit que $\sqrt{x}\sqrt{y} \ge y$ puisque y est positif. Mais alors

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \le x - y$$

On en déduit par croissance de la racine carrée sur \mathbb{R}^+ que

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \sqrt{x - y} = \sqrt{|x - y|}$$

Cette dernière inégalité est symétrique en x et y. On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \left| \sqrt{x} - \sqrt{y} \right| \le 1|x - y|^{1/2}.$$

Ainsi, le réel strictement positif 1 assure que la fonction S est 1/2-hölderienne.

3. Supposons par l'absurde que la fonction S est Lipschitzienne. Notons *k* un réel strictement positif tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \left| \sqrt{x} - \sqrt{y} \right| \le k|x-y|$$

En particulier, soit x un réel strictement positif et y = 0, on obtient alors

$$\forall x > 0, 0 \le \sqrt{x} \le kx$$

soit encore

$$\forall x > 0, 0 \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le k$$

La fonction $x\mapsto 1/\sqrt{x}$ est alors bornée sur \mathbb{R}^{+*} . Toutefois, on a la limite $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, ce qui invalide ce caractère borné. Cette absurdité montre que la fonction S n'est pas Lipschitzienne sur \mathbb{P}^+

4. Soit y un élément de]0,1] fixé et $F_y:[y,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto f_{\nu}(x)-f_{\nu}(y)-f_{\nu}(x-y)$. Comme f_{ν} est dérivable sur]0,1], on en déduit que F_y est dérivable sur]y,1] et

$$\forall x \in]y, 1], \quad \mathsf{F}'_y(x) = \nu x^{\nu - 1} - \nu (x - y)^{\nu - 1}$$

Mais alors, $\nu - 1 < 0$, donc $u \mapsto u^{\nu - 1}$ est décroissante sur]0,1]. Ainsi,

$$\forall x \in]y, 1], x - y \le x$$
, donc $(x - y)^{y-1} \ge x^{y-1}$, donc $F'_{y}(x) \le 0$

puisque ν est un réel positif. La fonction F_y est alors décroissante, nulle en y, donc négative sur [y,1]. On ainsi démontré

$$\forall y \in]0,1], \quad \forall x \in [y,1], \quad |x^{\nu} - y^{\nu}| = x^{\nu} - y^{\nu} \le (x-y)^{\nu} = |x-y|^{\nu}$$

Cette dernière inégalité est encore vraie pour y = 0 et symétrique en x et y. On en déduit

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x^{\nu} - y^{\nu}| \le |x - y|^{\nu}$$

La fonction f_{ν} est donc bien ν -hölderienne.

De même que précédemment, supposons par l'absurde que f_{ν} est Lipschzienne. Cela implique que $x\mapsto x^{\nu-1}$ est bornée. Or comme $\nu-1<0$, on dispose de la limite $\lim_{x\to 0^+}x^{\nu-1}=+\infty$ ce qui contredit ce caractère borné. Ainsi, f_{ν} n'est pas Lipschitzienne.

5. Soit t un élément de]0,1]. On introduit la fonction $\Psi_t:]0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto t^{\gamma}$. Alors Ψ_t est dérivable et

$$\forall \gamma \in]0,1], \Psi'_t(\gamma) = \ln(t)t^{\gamma} \leq 0$$

Ainsi Ψ_t est décroissante. Soit à présent x, y deux éléments de [0,1], alors |x-y| appartient à [0,1]. Si x=y, l'inégalité $|x-y|^{\beta} \le |x-y|^{\alpha}$ est trivialement vérifiée. Sinon, on a par décroissance de $\Psi_{|x-y|}$,

$$|x - y|^{\beta} \le |x - y|^{\alpha}$$

Soit $f \in H_{\beta}([0,1],\mathbb{R})$. On dispose d'un réel strictement positif L tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - (y)| \le L|x - y|^{\beta}$$

D'après les inégalités précédemment démontrées, cela entraîne

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - (y)| \le L|x - y|^{\alpha}$$

L'inclusion est ainsi démontrée.

6. Soit f une fonction de classe C^1 sur [0,1]. Alors f' est continue sur un segment, donc bornée. D'après l'inégalité des accroissements finis, cela implique que f est Lipschitzienne donc 1-hölderienne. D'après la question précédente, cela implique que f est α -hölderienne. Soit à présent f une fonction α -hölderienne et x un élément de [0,1], on dispose d'un réel positif L tel que

$$\forall y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \le L|x - y|^{\alpha}$$

Quand y tend vers x, comme $\alpha > 0$, on a $\lim_{y \to x} |x - y|^{\alpha} = 0$. On en déduit par théorème d'encadrement, que $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$, donc que f est continue en x, et ce, pour tout réel x dans [0,1]. Ainsi, f est continue. Les deux inclusions sont alors démontrées.

7. Pour tout réel x dans]0,1], $g(x)=\exp(x\ln(x))$. Par croissances comparées, $x\ln(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$. On en déduit par continuité de l'exponentielle que $g(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}1=g(0)$. Ainsi, g est continue en 0. De plus, elle est continue sur]0,1] comme composée et produit de fonctions usuelles. En outre, g est dérivable sur]0,1] par le même argument et

$$\forall x \in]0,1], g'(x) = (1 + \ln(x)) \exp(x \ln(x)) = (1 + \ln(x))g(x)$$

On a déjà vu que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$. D'autre part, $1 + \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, donc $g'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. D'après un corollaire du théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que g n'est pas dérivable en 0.

8. Soit $\alpha \in]0,1]$. On introduit la fonction $h:]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{x-\alpha} = \exp((x-\alpha)\ln(x))$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $(x-\alpha)\ln(x)$ tend vers $+\infty$ car $\alpha > 0$. D'après les limites de l'exponentielle, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$. Si g appartient à $H_{\alpha}([0,1],\mathbb{R})$, alors h est bornée au voisinage de 0, ce que la limite précédente infirme. Par conséquent, g n'appartient pas à H_{α} .

Problème - Une équation fonctionnelle

I - Questions préliminaires.

1. On établit la propriété (H_n) par récurrence. Initialisation en n=1. Soit u une application de classe C^1 sur A, v une application de classe C^1 sur B telle que $v(B) \subset A$ et u'(v(c)) = 0. Alors, $w = u \circ v$ est continue et dérivable. De plus, $w' = v'(u' \circ v)$. Mais alors, comme v' et $u' \circ v$ sont continues, w' est continue, donc w est de classe C^1 . De plus, $w'(c) = v'(c)u'(v(c)) = v'(c) \times 0 = 0$.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel ue (H_n) est vérifiée. Démontrons que (H_{n+1}) est valide. Soit y une application de classe C^{n+1} sur A, v une application de classe C^{n+1} sur B telle que $v(B) \subset A$ et $\forall k \in [[1, n+1]], u^{(k)}(v(c)) = 0$. Alors w est dérivable et $w' = v'(u' \circ v)$. Mais alors u' est une application de classe C^n sur A. D'après l'hypothèse de récurrence (H_n) , cela entraîne que $u' \circ v$ est une application de classe C^n sur B. Comme v' est de classe C^n , la fonction w' est alors

de classe C^n comme produit de fonctions de classe C^n d'après la formule de Leibniz. On en déduit que w est de classe C^{n+1} . En outre, en notant $s = u' \circ v$, la formule de Leibniz entraîne

$$w^{(n+1)}(c) = (w')^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} (v')^{(n+1-k)}(c) s^{(k)}(c)$$

Or on a $\forall k \in [[1, n]], (u')^{(k)}(v(c)) = 0$. Donc, d'après (H_n) appliqué à u' et v, on $\forall k \in [[1, n]], s^{(k)}(c) = 0$. De plus, s(c) = u'(v(c)) = 0. Par conséquent, la somme précédente est nulle et $w^{(n+1)}(c) = 0$. Toutes les dérivées précédentes sont nulles en c d'après l'hypothèse de récurrence.

- 2. Notons $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, c'est une fonction de classe C^∞ . Soit $f \in E_J$. Montrons que f est de classe C^∞ par récurrence. Initialisation en n=1. D'après l'équation fonctionnelle, f est dérivable (donc continue) et $f'=f\circ c$. Ainsi, f' est continue comme composée de fonctions continues, donc f est de classe C^1 . Hérédité: soit f'0 un entier naturel non nul tel que f1 est de classe f'2. Alors $f'=f\circ c$ 3 d'après l'équation fonctionnelle, donc f'3 est une composée de fonctions de classe f'4. D'après la question précédente, cela entraîne que f'4 est de classe f'5 donc que f'6 est de classe f'6. On conclut par récurrence que f'6 est de classe f'6.
- 3. Notons M un majorant de g'. On introduit alors la fonction $h:]a, b[\to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) Mx$. Celle-ci est dérivable et $\forall x \in]a, b[, h'(x) = g'(x) M \le 0$. Par conséquent, h est décroissante. Par conséquent, elle admet une limite éventuellement infinie en a. Toutefois, g est majorée et l'intervalle]a, b[est borné, donc h est majorée. Par conséquent, h admet une limite finie en a et par opération sur les limites, g admet une limite finie en a.

II - L'espace $E_{[-1,1]}$, étude partielle.

1. La fonction $T: [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto S(x) + S(-x)$ est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in [-1, 1], T'(x) = S'(x) - S'(-x) = S(x^2) - S((-x)^2) = S(x^2) - S(x^2) = 0$$

Ainsi, comme [-1,1] est un intervalle, T est constante égale à T(0) = 2S(0) = 2. En conclusion,

$$\forall x \in [-1, 1], S(x) + S(-x) = 2.$$

2. La fonction S est dérivable et vérifie $S'(1) = S(1^2) = S(1)$ d'après l'équation fonctionnelle. Par conséquent, la tangente au graphe de S en (1,S(1)) a pour équation

$$y = S(1) + S'(1)(x - 1) = S(1) + S'(1)x - S'(1) = S(1)x$$

Cette droite contient clairement le point (0,0).

3. Comme l'application S est de classe C¹, on peut effectuer une intégration par parties

$$\int_0^1 S(x)dx = [xS(x)]_0^1 - \int_0^1 xS'(x)dx = S(1) - \int_0^1 xS(x^2)dx$$

On effectue alors le changement de variable $u=x^2$ dans la dernière intégrale qui donne du=2xdx, soit

$$\int_0^1 S(x) dx = S(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 S(u) du$$

On en déduit que $\frac{3}{2}\int_0^1 S(u)du = S(1)$ donc que $\int_0^1 S(u)dt = \frac{2}{3}S(1)$.

4. On reconnaît une suite arithmético-géométrique de paramètres (2,1). La suite q vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, (q_{k+1}+1)=2(q_k+1)$ et $q_0+1=1$, donc la suite q+1 est géométrique de raison 2, de premier terme 1. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, q_k+1=2^k$. En conclusion,

$$\forall k \in \mathbb{N}. a_k = 2^k - 1$$

5. Soit *h* un élément de [0,1] et J = [0,h] et *f* une fonction de J dans \mathbb{R} .

- (a) L'intervalle J est un segment et f est continue sur ce segment. D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée, donc |f| est majorée, donc sa borne supérieure est un réel bien défini.
- (b) Démontrons ce résultat par récurrence. Initialisation en n = 1. Soit x un réel dans J. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme f(0) = 0, on a

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| = \left| \int_0^x f(t^2) dt \right|$$

De plus, $\forall t \in J, t^2 \in J, |f(t^2)| \le M$. Comme x est positif, on en déduit par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale que

$$|f(x)| \leq \int_0^x Mdt = Mx$$

L'initialisation est acquise. Hérédité : soit n un entier naturel non nul tel que $\forall x \in J$, $|f(x)| \le Mx^{q_n}$. En reprenant le mêmes manipulations d'intégrales, on obtient pour tout réel x dan J,

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| = \left| \int_0^x f(t^2) dt \right| \le \int_0^x M(t^2)^{q_n} dt = M \frac{x^{2q_n+1}}{2q_n+1} \le M x^{2q_n+1} = M x^{q_{n+1}}$$

Le résultat s'ensuit par récurrence.

Soit x un réel fixé dans J différent de 1. Alors, comme $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, la suite x^{q_n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après l'inégalité précédente, cela prouve par passage à la limite que f(x) = 0, et ce pour tout réel x. Ainsi, f est nulle sur $[0,1] \cap J$. Si J = [0,1], on en déduit par continuité en 1 de f, que f est égaleement nulle en 1. En conclusion, f est nulle sur J.

(c) On introduit la fonction $g: J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(0)S(x)$. Alors $g(0) = f(0) - f(0) \times 1 = 0$. De plus, g est dérivable et

$$\forall x \in J, g'(x) = f'(x) - f(0)S'(x) = f(x^2) - f(0)S(x^2) = g(x^2)$$

Par conséquent, la fonction g appartient à E_J . D'après ce qui précédente, on en conclut que g est la fonction nulle sur J, donc que

$$\forall x \in J$$
, $f(x) = f(0)S(x)$

6. L'intervalle J est stable par c. Soit $f \in E_J$, alors la restriction de f à [0,b] vérifie ce qui précède, donc est la restriction de f(0)S à [0,b]. Pour l'autre morceau, on introduit la fonction $\psi:[a,0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + f(0)S(-x)$. Celle-ci est dérivable et

$$\forall x \in [a, 0], \psi'(x) = f'(x) - f(0)S'(-x) = f(x^2) - f(0)S(x^2)$$

On remarque alors que $\forall x \in [a,0], x^2 \in [0,b]$. En exploitant ce qui précède, on a alors

$$\forall x \in [a, 0], \psi'(x) = f(0)S(x^2) - f(0)S(x^2) = 0$$

Comme [a, 0] est un intervalle, ψ est constante égale à $\psi(0) = 2f(0)$. On en déduit que

$$\forall x \in [a, 0], f(x) = 2f(0) - f(0)S(-x) = f(0)(2 - S(-x)) = f(0)S(x)$$

Ainsi, tout élément de E_J est la restriction à J de f(0)S. Réciproquement, on vérifie que toutes ces fonctions appartiennent à E_J . En conclusion,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{J}} = \left\{ \alpha \mathsf{S}_{|\mathsf{J}} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

III - Étude de E_{]0,1[}.

1. (a) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puisque la racine carrée stabilise J. Comme la racine carrée est strictement croissante, il suffit de comparer p_0 et p_1 . Or $p_0=p$ appartient]0,1[, donc $\sqrt{p}>p$, i.e $p_1>p_0$. On en déduit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Comme est elle est majorée par 1, elle est convergente. Comme la racine carrée est continue, sa limite est nécessairement un point fixe de $\sqrt{\cdot}$, soit 1.

(b) Notons que M_n est bien définie pour tout entier n d'après le théorème des bornes atteintes, puisque f est continue sur le segment $[p_n, p_{n+1}]$. Soit n un entier naturel non nul et x un réel dans $[p_n, p_{n+1}]$. Exploitons le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f(t^2)dt$$

Or, pour tout réel t dans $[p_n, p_{n+1}]$, le réel t^2 appartient à $[p_{n-1}, p_n]$, donc

$$\forall t \in [p_n, p_{n+1}], |f(t^2)| \le M_{n-1}$$

On en déduit par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale que

$$|f(x)| \le |f(p_n)| + \int_{p_n}^x M_{n-1} dt \le M_{n-1} + M_{n-1}(x - p_n) \le M_{n-1}(1 + p_{n-1} - p_n)$$

Ainsi, $M_{n-1}(1+p_{n-1}-p_n)$ est un majorant de |f| sur $[p_n,p_{n+1}]$, on en déduit par passage à la borne sup que

$$M_n \le M_{n-1}(1 + p_{n-1} - p_n)$$

Si l'un des réels M_n est nul, alors la suite est stationnaire en 0, donc la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Sinon, tous les M_n sont strictement positifs et on peut passer au logarithme. Comme le logarithme est croissant, l'inégalité précédente entraîne

$$\forall n \ge 1, \ln(M_n) \le \ln(M_{n-1}) + \ln(1 + p_{n+1} - p_n)$$

Mais alors d'après l'inégalité de concavité du logarithme $ln(1+x) \le x$, on a

$$\forall n \ge 1, \ln(M_n) - \ln(M_{n-1}) \le p_{n+1} - p_n$$

On somme tout ceci, ce qui donne par télescopage,

$$\forall N \ge 1$$
, $ln(M_N) - ln(M_0) \le p_{N+1} - p_1 \le 1 - p_1$

On en déduit que la suite $(\ln(M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Par conséquent, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

- (c) On pose $p=\alpha$. D'après la question précédente, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Notons M un majorant de cette suite. Soit $x\in [\alpha,1[$, alors comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, il existe un entier n tel que $x\in [p_n,p_{n+1}]$. Mais alors, $|f(x)|\leq M_n\leq M$. En conséquence, |f| est majorée par M, donc f est bornée sur $[\alpha,1[$. En outre, $[\alpha^2,1[\subset [\alpha,1[$, on en déduit d'après l'équation fonctionnelle que f' est bornée sur $[\alpha,1[$.
- (d) On peut alors appliquer la question I.3, à $x \mapsto f(1-x)$, ce qui entraîne que f admet une limite finie λ en 1. Toujours d'après l'équation fonctionnelle, cela entraîne également que f' admet une limite finie en 1, à savoir λ . D'après le théorème de la limite de la dérivée, cela implique que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \lambda$, donc que f satisfait l'équation fonctionnelle sur]0,1]. Ainsi, le prolongement de f appartient à $E_{]0,1]}$.
- 2. Comme précédemment, $]0,\beta^2] \subset]0,\beta]$. Ainsi, si f est majorée sur $]0,\beta]$, f' l'est également d'après l'équation fonctionelle. D'après la question I.3, on en déduit que f admet une limite finie l en 0. Comme précédemment, f' admet alors une limite finie en 0, à savoir l. D'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de f en 0 par l est dérivable en 0, et f'(0) = l. Par conséquent, il appartient à $E_{[0,1]}$. D'après les résultats de la partie II, ce prolongement ne peut être que $lS_{[0,1]}$.
- 3. Soit $\varepsilon > 0$. En contraposant, le résultat précédent, f n'est pas majorée sur $]0, \varepsilon]$. De plus, -f n'est pas la restriction de f(0)S à J, donc -f n'est majorée sur $]0, \varepsilon]$. Ainsi, f n'est pas minorée sur $]0, \varepsilon]$. Si f n'est pas la restriction de f(0)S à J et si f n'est ni majorée ni minorée sur $]0, \varepsilon]$,

$$\exists (a,b) \in]0, \varepsilon]^2, f(a) > 0, f(b) < 0.$$

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de x_0 dans $]0, \varepsilon[$ tel que $f(x_0) = 0$. En réitérant ce raisonnement sur $]0, x_0]$, on obtient $x_1 \in]0, x_0[$ tel que $f(x_1) = 0$. Par récurrence, on obtient une suite strictement décroissante de zéros de f dans $]0, \varepsilon[$.