Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble fini

Définition. Un ensemble E est dit fini lorsqu'il est vide ou en bijection avec un intervalle d'entiers de la forme $[\![1, n]\!]$. Dans le cas où $E = \varnothing$ on dira que E que son cardinal est nul et l'on notera $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} \varnothing = 0$. Dans le cas où E est en bijection avec un intervalle $[\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on dira que E est de cardinal n et l'on notera $\operatorname{Card} E = n$.

Remarque. On peut également noter $|E|$ au lieu de $\operatorname{Card} E$.

Proposition. Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction entre ensembles finis E, F de même cardinal. Alors :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Proposition. Soient E, F deux ensembles finis. Alors :

$$\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F - \operatorname{Card}(E \cap F)$$

Remarque. En particulier, E et F sont disjoints (i.e. $E \cap F = \varnothing$) si et seulement si $\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F$.

Proposition. Soit E un ensemble fini et $F \subseteq E$. Alors :

$$\operatorname{Card}(E \setminus F) = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} F$$

Proposition. Soient E, F deux ensembles finis. Alors :

$$\operatorname{Card}(E \Delta F) = \operatorname{Card}(E \cup F) - \operatorname{Card}(E \cap F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F - 2 \operatorname{Card}(E \cap F)$$

Proposition. Soient E, F deux ensembles finis. Alors :

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \operatorname{Card} F$$

Proposition. Soient E, F deux ensembles finis. Alors :

$$\operatorname{Card} F^E = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}$$

Proposition. Soit E un ensemble fini. Alors :

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}$$

II Listes et combinaisons

Définition. Soient E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-liste d'éléments de E est un p-uplet d'éléments de E. Une p-combinaison d'éléments de E est une partie à p éléments de E.

Proposition. Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a alors :

- $n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ p-listes d'éléments distincts de E.
- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ p-combinaisons d'éléments de E.
- $n!$ permutations de E.

Proposition. Soient E, F deux ensembles de cardinaux respectifs n, p. Il y a alors $\frac{n!}{(n-p)!}$ fonctions injectives allant de F vers E.

III Démonstrations combinatoires au programme

Proposition (Formule de Pascal)**.** Soient n, k deux entiers tels que $0 < k < n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Proposition (Formule du binôme de Newton)**.** Soient a, b des nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarque. Cette formule vaut toujours si a, b sont des éléments d'un anneau commutatif quelconque.