Planche 1

Question de Cours : Description des racines $n$ièmes de l'unité.

Exercice : Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$?

Planche 2

Question de cours Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia+ib} = e^{ia}e^{ib}$.

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que : $|a| = |b| = 1, a \neq b, z \in \mathbb{C}$, et $Z = \dfrac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b}$, montrer que Z^2 est réel négatif ou nul.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$; Montrer l'existence de A et $B \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$A^2 + B^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Expliciter A et B lorsque $n = 2$

Planche 3

Question de cours : Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et cas d'égalité.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est périodique s'il existe un réel t non nul tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)$$

On notera $\mathscr{T}_f$ l'ensemble des réels t tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)$

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon. Montrer que f est périodique et déterminer l'ensemble $\mathscr{T}_f$.
2. La somme de 2 fonctions périodiques est-elle périodique ?
   On pourra considérer les fonctions $f : x \longmapsto \cos(x)$ et $g : x \longmapsto \cos(\sqrt{2}x)$

Exercice Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$; On pose $z = u + iv$. Montrer que :

$$|z|^2 = u^2 + v^2 \iff \left(z = 0 \;\text{ ou }\; (u,v) \in \mathbb{R}^2\right)$$

Réserve

Exercice
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, montrer que :
a) $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$. Cette égalité est connue sous le nom de l'identité du Parallélogramme Do you see why ?
b) On pose $u^2 = zz'$, montrer que :

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$$

Exercice Soient trois réels (a, b, c) tels que $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Montrer qu'alors $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$.

Exercice Soient u et v deux nombres complexes de module 1 , tels que $uv \neq -1$. Montrer que $Z = \dfrac{u+v}{1+uv}$ est un réel.

Exercice
Soient x, y, z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls et de signe opposé.
On suppose que les implications suivantes sont vraies :
(a) $x = 0 \Longrightarrow y > 0$ (b) $x > 0 \Longrightarrow y < 0$ (c) $y \neq 0 \Longrightarrow z > 0$.
Classer les réels x, y, z dans l'ordre croissant.

Exercice Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z - |z| = 1 + 2i$
$z^2 - 2\mathrm{e}^{i\theta} z + 1 = 0 \quad (\theta \in \mathbb{R})$
$(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$ (On donnera l'écriture algébrique des solutions)
$\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$