

Exercices autour de deux thèmes

Ils porteront sur les endomorphismes d'un espace euclidien en particulier le théorème spectral et les isométries d'un tel espace.

Ils porteront sur le début des équations différentielles linéaires (**I** et **II**)

Cours ch 15 Equations différentielles linéaires

I. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.

Problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, méthode de variation de la constante.

II- Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

Problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, wronskien, équation d'ordre 1 vérifiée par le wronskien, le wronskien est nul si et seulement s'il s'annule en un point, caractérisation d'un système fondamental de solutions, méthode de variation des constantes, solutions développables en série entière, méthode du wronskien, méthode de Lagrange, changement de variables ;

III- Équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1.

- Equations différentielles linéaires vectorielles, problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, caractérisation d'un système fondamental de solutions, méthode de variation des constantes.

IV. Exponentielle d'une matrice, d'un endomorphisme

Propriété fondamentale en cas de commutation, continuité de l'exponentielle, caractère \mathcal{C}^∞ de $t \mapsto e^{ta}$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$ et dérivée de cette application, méthodes de calculs (cas diagonale, diagonalisable, nilpotent, trigonalisable, avec polynôme annulateur).

V. Système différentiel linéaire à coefficients constants

Problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire et expression de la solution, résolution pratique (cas diagonalisable, trigonalisable, homogène et avec second membre).

VI Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

Formulation matricielle d'ordre 1, problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, résolution dans le cas où la matrice compagne est diagonalisable.

Questions de cours : (avec preuve sauf mention contraire)

1. Théorème de Cauchy linéaire d'ordre 1 et d'ordre 2 (sans preuve pour l'ordre 2).
2. Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'ordre 2 homogène ou avec second membre.
3. Équation différentielle satisfaite par le wronskien d'un couple de solutions.
4. Le wronskien est nul si et seulement s'il s'annule en un point.
5. Caractérisation d'un système fondamental de solutions.
6. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
7. Solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre polynôme exponentielle.

8. Variation des constantes pour l'ordre 2.
9. Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle homogène ou avec second membre.
10. Caractérisation d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle.
11. Méthode de variation des constantes pour une équation différentielle linéaire vectorielle.
12. Continuité de \exp sur $\mathcal{L}(E)$.
13. Caractère \mathcal{C}^1 de $t \mapsto e^{ta}$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$ et dérivée de cette application.
14. Exponentielle d'une matrice diagonale, diagonalisable, trigonalisable.
15. Résolution du problème de Cauchy $x' = a(x), x(t_0) = x_0$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$.
- 16; Résolution de $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.
10. Résolution du problème de Cauchy $x' = a(x) + b(t), x(t_0) = x_0$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$ (preuve réservée au groupe 2).
11. Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n homogène ou avec second membre.
12. Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n à coefficients constants (énoncé et preuve réservés au groupe 2).