

MPSI IPESUP - Khôlle 1

CHONÉ-DUCASSE

07 octobre 2022

Exercice 1 – Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Indication : Reasonner par l'absurde et considérer : $A := \{x \in E \mid x \notin \phi(x)\}$.

Exercice 2 – Soient X et Y deux ensembles. Montrer que $X \subset Y$ si et seulement si $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$.

Exercice 3 – Soient A, B, C, D des ensembles tels que : $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 4 – Calculer la partie réelle et imaginaire de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 5 – Soient $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est réel si et seulement si $|u| = 1$.

Exercice 6 – Donner une expression des racines n -ièmes de $\sqrt{3} + i$.

Exercice 7 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre suivant les valeurs de n l'équation $z^n = (z+1)^n = 1$.

Exercice 8 – Calculer

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$