DM

Théorème de Cantor-Bernstein

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein :

« Si E et F sont deux ensembles tels qu'il existe une injection de E vers F et une injection de F vers E, alors E et F sont en bijection. »

Une première démonstration

1. Soit E un ensemble et soit A une partie de E telle qu'il existe une injection $u : E \longrightarrow A$. L'objectif de cette question est de montrer que A est en bijection avec E. On définit par récurrence une famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} B_0 = E \setminus A \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = u\left(B_n\right) \end{cases}$$

Puis on pose :

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Et enfin :

$$v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in B \\ x & \text{si } x \notin B \end{cases} \end{array}$$

   (a) Vérifier que v est bien à valeurs dans A.
   (b) Montrer que v est surjective.
   (c) i. Vérifier que B est stable par u, autrement dit que $u(B) \subseteq B$.
       ii. En déduire que v est injective.
   (d) Conclure.

2. Soient E et F des ensembles tels qu'il existe deux injections $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$.
   (a) On pose $A = g(F)$. En utilisant la question précédente, montrer que A est en bijection avec E.
   (b) Justifier que A est en bijection avec F.
   (c) Conclure.

Une seconde démonstration

1. Soit E un ensemble et $\Phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subseteq A' \Longrightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(A')$$

L'objectif de cette question est de montrer que Φ admet un point fixe, autrement dit qu'il existe $M \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\Phi(M) = M$.

On pose :

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E) \,|\, \Phi(A) \subseteq A\}$$

Ainsi que :

$$M = \bigcap_{A\in\mathcal{S}} A$$

   (a) i. Montrer que $\forall A \in \mathcal{S},\ \Phi(M) \subseteq A$.
       ii. En déduire que $\Phi(M) \subseteq M$.
   (b) i. Montrer que $\Phi(M) \in \mathcal{S}$.
       ii. En déduire que $M \subseteq \Phi(M)$.
   (c) Conclure.

2. Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe deux injections $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$. On pose :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & E \setminus g\left(F \setminus f(A)\right) \end{array}$$

   (a) Montrer que Φ admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$.
   (b) On définit une application $h : E \longrightarrow F$ par :

$$\forall x \in E,\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M \\ \left(g\big|^{g(F)}\right)^{-1}(x) & \text{si } x \notin M \end{cases}$$

   Montrer que h est bijective.