Exercices : Ils porteront sur tout le chapitre .

Cours

Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours

Topologie des espaces vectoriels normés

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie;*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires);*
- *introduire la notion de partie compacte dans un espace vectoriel normé, en soulignant le rôle qu'elle joue dans les résultats d'existence, notamment en matière d'optimisation;*
- *introduire la notion de composante connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et intervient en calcul différentiel;*
- *dégager l'idée fondamentale d'inégalité linéaire, qui apparaît lors de l'étude de la comparaison des normes et de la continuité des applications linéaires, et qui est quantifiée par la notion de norme d'opérateur.*

Les notions seront illustrées par des exemples variés. On pourra ainsi travailler dans les espaces $\mathbb{K}^n$, les espaces de polynômes, d'applications linéaires ou de matrices, ainsi que dans divers espaces fonctionnels.

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures. **Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.**

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Applications linéaires et multilinéaires continues	
($\star$) Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathcal{L}_c(E,F)$.
($\star$) Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.	Notations $\|\|\|u\|\|\|$, $\|u\|_{\mathrm{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. ($\star$) Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.
($\star$) Critère de continuité des applications bilinéaires. Critère de continuité des applications multilinéaires.	La démonstration n'est pas exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
g) Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Si B est une partie fermée incluse dans une partie compacte, alors B est compact. ($\star$) Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. ($\star$) Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
h) Applications continues sur une partie compacte	
Image continue d'une partie compacte. Théorème de Heine.	
Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.
i) Connexité par arcs	
Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points; partie connexe par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées. ($\star$) Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	($\star$) Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
($\star$) Image continue d'une partie connexe par arcs.	($\star$) Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
j) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
($\star$)Équivalence des normes en dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
($\star$) Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. ($\star$) Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé. Si E est de dimension finie, ($\star$) $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}_c(E,F)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

k) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
($\star$) Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Compléments : Soit $\mathscr{A}$ une algèbre normée de dimension finie. Soit $\|\| \ \|\|$ une norme d'algèbre sur $\mathscr{A}$. ($\star$) Si $\|\|a\|\| < 1$, alors $\sum a^n$ converge absolument, $1-a$ est inversible et $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$. ($\star$) Pour $a \in \mathscr{A}$, $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument ; Sa somme est noté $exp(a)$ ou e^a.	

l) Extension des résultats et thérèmes concernant les suites et séries de fonctions entre espaces vectoriels normés de dimension finie

Convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions d'une partie A d'un espace normé de dimension finie E dans F de dimension finie. Thérème de la double limite, de continuité. Convergence simple, uniforme, absolue, normale d'une série de fonctions d'une partie A d'un espace normé de dimension finie E dans F de dimension finie. Théorème de la double limite, de continuité. ($\star$) L'application exp définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.	

i) Compléments : Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & Commentaires
Soit A **une partie d'un espace normé de dimension finie**, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue ; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux ; – il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x, \cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout compact de A, ou sur d'autres parties adaptées à la situation.
Pour mémoire Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.