Kholle 20 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Règle de la chaîne.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) La dérivation dans E est-elle différentiable ? Si oui, exprimer sa différentielle.
   (b) L'application $E \times E \mapsto \mathbb{R}_{n^2}[X], (P, Q) \mapsto P \circ Q$ est-elle différentiable ? Si oui, exprimer sa différentielle.
3. Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ de neutre e. On note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x * y$ que l'on suppose de classe C^1.
   (a) Montrer que
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_2 f(x * y, e) = \partial_2 f(x, y) \partial_2 f(y, e)$$
   (b) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que φ est de classe C^1 et vérifie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ si et seulement si
   $$\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = a \int_e^x \frac{dt}{\partial_2 f(t, e)}$$

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 20 filière MP*
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs. Démonstration dans le cas convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. Les applications suivantes sont-elles différentiables ? Le cas échéant, exprimer leurs différentielles et dérivées partielles
   (a) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x + y, -xy)$.
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(e^x, -e^{-x})$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne habituelle, $f : E\backslash\{0\}, x \mapsto x/\|x\|^2$.
   (a) L'application f est-elle différentiable ? Si oui, exprimer sa différentielle.
   (b) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Interpréter géométriquement $Df(x)$ via la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x. En déduire que f conserve les angles.

⋆⋆⋆

IPESUP 2022/2023

Kholle 20 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$. Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ différentiable et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left[\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, f(tx) = t^k f(x)\right] \iff \left[\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i f(x) = k f(x)\right]$$

★★★