**Ipesup 2022/2023**

Kholle 4 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition d'une fonction dérivable en un réel $a$ de son ensemble de départ. Démontrer que le sinus est dérivable en 0 via des considérations géométriques et donner sa dérivée en 0.
2. Soit $x$ un réel. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $x$ a-t-on
$$4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}?$$
3. On pose pour tout réel $x$, $f(x) = \arcsin(x/\sqrt{x^2+1})$. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$ et donner une expression plus simple de $f$.

★★★

**IPESUP 2022/2023**

Kholle 4 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner les définitions des fonctions arcsinus et arccosinus. Montrer leur dérivabilité sur un intervalle adapté et démontrer une expression de leurs dérivées.
2. Soit $x$ un réel. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $x$ a-t-on $\sqrt{x}+x^{1/3}=2$ ?
3. Soit $x$ et $y$ des réels tels que $0<x<y$. Calculer $\arctan(x/y)+\arctan((y-x)/(y+x))$.

★★★

Kholle 4 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ si seulement si $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = a\displaystyle\int_1^x dt/t$.
2. Soit $x$ un réel. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\arccos(x) = 2\arccos(3/4)$ ?
3. On note $I = ]0, \pi/2]$ et pour tout réel $x$ dans $I$, $f(x) = 1/\sin(x)$. Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ dans un intervalle à déterminer. Expliciter sa réciproque.

★★★

Kholle 4 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

Exercice supplémentaire et plus corsé pour les gourmands :

1. Etudier la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x)$. Montrer en particulier qu'elle est positive.
2. En déduire que $\forall x \in ]0,1[, 1 + x \leqslant \exp(\mathrm{sh}(x)) \leqslant 1/(1-x)$.
3. Soit $p$ un entier naturel non nul. On note $S$ la suite définie par $\forall n \geqslant 2, S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}(1/k)$.

   Déduire de ce qui précède la limite de $S$.

★★★

Kholle 4 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Le prouver lorsque l'intégrande est à valeurs réelles et monotone.
2. On pose pour tout réel $x$, $f(x) = \sin(x)^{\cos(x)}$. Donner l'ensemble de définition de $f$ et étudier sa dérivabilité.
3. On définit pour tout entier $n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$. Déterminer la limite $S_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

★★★

Kholle 4 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Démontrer que l'exponentielle est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y, y(0) = 1$.
2. Soit $x$ un réel et $n$ un entier naturel. Déterminer des expressions factorisées de $A_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx)$.
3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle $x$ :
   (a) $\arccos(x) = \arccos(1/4) + \arcsin(1/3)$.
   (b) $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 4 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. On note $(E)$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + ay = 0$ avec $a$ continue de $I$ dans $\mathbb{C}$. Donner et démontrer l'ensemble de ses solutions.
2. Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $T_n : x \mapsto \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x))$. Montrer que $T_n$ est une fonction polynomiale de degré $n$. Calculer le maximum de $\{|T_n(x)| \mid x \in [-1,1]\}$.
3. On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives, $x < y$ des éléments distincts de $I$ et $\lambda \in ]0,1[$. On pose alors

$$\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto (1-\lambda) f(x) \alpha^{-\lambda(y-x)} + \lambda f(y) \alpha^{(1-\lambda)(y-x)}$$

Étudier les variations de $\varphi$ et étudier en particulier son minimum (s'il existe).

★★★