Agrégation interne de mathématiques

Corrigé - Epreuve écrite d'algèbre et de géométrie

PARTIE I

1. (a) Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(x-2)^2-4+(y-1)^2-1=0$, ce qui équivaut à $(x-2)^2+(y-1)^2=5$. On pose alors Ω le point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées $(2,1)$. D'après ce qui précède, $M \in \mathcal{C} \iff \Omega M^2 = 5 \iff \Omega M = \sqrt{5}$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

   (b) La droite $x=3$ n'est pas tangente à $\mathcal{C}$ car les tangentes verticales à $\mathcal{C}$ ont pour équation $x=2+\sqrt{5}$ et $x=2-\sqrt{5}$. On considère alors les droites non verticales passant par A. Une telle droite de pente m avec m un réel, a pour équation $y-mx=-2-3m$. Alors, la distance de Ω à cette droite vaut :

$$\frac{|1-2m+2+3m|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{|3+m|}{\sqrt{1+m^2}}$$

   Rappel : Si une droite a pour équation $ax+by+c=0$ et un point M pour coordonnées (x_M, y_M), la distance de M à D vaut $|ax_M+by_M+c|/\sqrt{a^2+b^2}$.

   Alors le carré de cette distance vaut $(3+m)^2/(1+m^2)$. Ainsi, une droite passant par A est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(3+m)^2/(1+m^2)=5$, ce qui équivaut à $9+6m+m^2=5+5m^2$ soit encore $4m^2-6m-4=0$. Or, le polynôme $4X^2-6X-4$ se factorise en $4(X^2-3X/2-1)=4(X-2)(X+1/2)$.
   En conclusion, les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A sont les droites d'équation $y=2x-8$ et $y=-x/2-1/2$.

   (c) Notons D_1 la droite d'équation $y=-x/2-1/2$. Alors $M(x,y) \in D_1 \cap \mathcal{C} \iff$

$$\begin{aligned}(x-2)^2+\frac{(x+3)^2}{4} &= 5\\ y &= -\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\iff$

$$\begin{aligned}5x^2-10x+5 &= 0\\ y &= -\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\iff$

$$\begin{aligned}x &= 1\\ y &= -1\end{aligned}$$

   Conclusion : $\mathcal{C} \cap D_1 = \{(1,-1)\}$.
   Notons D_2 la droite d'équation $y=2x-8$. Alors $M(x,y) \in D_2 \cap \mathcal{C} \iff$

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(2x-9)^2 &= 5\\ y &= 2x-8\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$5x^2 - 40x + 80 = 0$$
$$y = 2x - 8$$

$\Longleftrightarrow$

$$x = 4$$
$$y = 0$$

Conclusion : $\mathcal{C} \cap D_2 = \{(4, 0)\}$.

2. On considère les points $I(1,\,0)$, $J(0,\,1)$.

   (a) Les droites (OI), (OJ), (IJ) ont pour équations respectives

   $$y = 0$$
   $$x = 0$$
   $$y + x - 1 = 0$$

   Alors,

   $$d(M;(OI)) = |y|, \quad d(M;(OJ)) = |x| \quad \text{ et } d(M;(IJ)) = |x+y-1|/\sqrt{2}.$$

   (b) Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}'$ si et seulement si

   $$y^2 + x^2 + \frac{1}{2}(x+y-1)^2 = \frac{1}{3}$$

   ce qui équivaut à

   $$2y^2 + 2x^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y = \frac{2}{3}$$

   Soit encore
   $$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 2y + \frac{1}{3} = 0$$

   (c) L'expression cartésienne précédente est symétrique en x et y. On en déduit que le centre de cette conique est sur la droite d'équation $x = y$. Soit a un réel. L'équation cartésienne précédente est alors équivalente à

   $$3[(x-a)^2+2ax-a^2]+3[(y-a)^2+2ay-a^2]+2[(x-a)(y-a)+ay+ax-a^2]-2x-2y+\frac{1}{3} = 0$$

   soit encore

   $$3(x-a)^2+3(y-a)^2+2(x-a)(y-a)+x(6a+2a-2)+y(6a+2a-2)-8a^2+\frac{1}{3} = 0$$

   L'annulation des parties linéaires amène alors à choisir a tel que $6a+2a-2 = 0$ soit $a = 1/4$. On note alors Ω le point de coordonnées $(1/4, 1/4)$ et les coordonnées d'un point $M(x, y)$ du plan sont notées (x', y') dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce nouveau repère, la conique $\mathcal{C}'$ a pour équation :

$$3x'^2 + 3y'^2 + 2x'y' - \frac{1}{6} = 0$$

Remarque : Le centre (a, b) d'une conique définie par $f(x, y) = 0$ peut être également déterminé en étudiant le système $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Cette équation fait apparaître la forme quadratique $(x', y') \mapsto 3x'^2 + 3y'^2 + 2x'y'$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On diagonalise cette matrice notée A (c'est possible car elle est symétrique réelle). Son polynôme caractéristique vaut $(X-3)(X-3)-1 = X^2 - 6X + 8 = (X-4)(X-2)$. Alors, l'étude du système linéaire $AX = 4X$ implique $x = y$. Donc $(1, 1)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 4. De même, l'étude du système linéaire $AX = 2X$ implique $x + y = 0$. Donc $(1, -1)$ un vecteur propre de A pour la valeur propre 2.
Alors, dans le nouveau système de coordonnées $U = (x'+y')/\sqrt{2}, V = (x'-y')/\sqrt{2}$, l'équation de $\mathcal{C}'$ équivaut à

$$3\left(\sqrt{2}\frac{U+V}{2}\right)^2 + 3\left(\sqrt{2}\frac{U-V}{2}\right)^2 + 2\sqrt{2}\frac{U+V}{2}\sqrt{2}\frac{U-V}{2} - \frac{1}{6} = 0$$

soit encore

$$8U^2 + 4V^2 - \frac{1}{3} = 0$$

Ainsi, une équation réduite de $\mathcal{C}'$ est

$$\frac{V^2}{a^2} + \frac{U^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $b = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.
Alors $\mathcal{C}'$ est une ellipse. Son excentricité est donnée par $e = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}' \cap (OI)$ si et seulement si $y = 0$ et $3x^2 - 2x + 1/3 = 0$ soit $x = 1/3$ et $y = 0$. Conclucion $\mathcal{C}' \cap (OI) = \{(1/3, 0)\}$. Comme $\mathcal{C}'$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = y$. On en déduit que $\mathcal{C}' \cap (OJ) = \{(0, 1/3)\}$.

PARTIE II

1. La définition du point M' implique $z'^2 = c^2 - z^2 = (c-z)(c+z)$. On a alors $|z'^2| = |(c-z)(c+z)|$, soit encore $|z'|^2 = |c-z||c+z|$. On en déduit que $OM'^2 = MF \times MF'$.
2. On a toujours, d'après ce qui précède $z'^2 = (c-z)(c+z)$. Comme ces complexes sont nuls (l'ellipse ne contient ni O, ni F, ni F'), on peut prendre l'argument de cette égalité, ce qui implique

$$2\arg(z') \equiv \arg(c-z) + \arg(c+z)[2\pi]$$

Soit encore

$$2\arg(z') \equiv \arg(c-z) + \arg(-c-z) + \pi[2\pi]$$

ou bien

$$\arg(z') \equiv \frac{\arg(c-z)+\arg(-c-z)}{2} + \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Or les points de la bissectrice intérieure de $[MF)$ et $[MF')$ vérifient

$$\arg(s) \equiv \frac{\arg(c-z)+\arg(-c-z)}{2}[\pi]$$

soit

$$\arg(z') \equiv \arg(s) + \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Cela implique bien que (OM') est perpendiculaire à la bissectrice intérieure de $[MF)$ et $[MF')$.

3. La définition du module implique $|z+c|^2 = (z+c)(\overline{z}+\overline{c}) = |z|^2 + c(z+\overline{z}) + c^2$ car c est réel. De même, $|z-c|^2 = (z-c)(\overline{z}-\overline{c}) = |z|^2 - c(z+\overline{z}) + c^2$. L'addition de ces deux égalités implique

   $$|z+c|^2 + |z-c|^2 = 2|z|^2 + 2c^2$$

   En outre,

   $$(|z-c|+|z+c|)^2 = |z-c|^2 + |z+c|^2 + 2|z-c||z+c|$$

   D'après ce qui précède, $|z-c|^2 + |z+c|^2 = 2|z|^2 + 2c^2$. De plus, d'après la première question, $|z-c||z+c| = |z'|^2$. Donc,

   $$(|z-c|+|z+c|)^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2 + 2c^2$$

   Cette dernière quantité est symétrique en z et z'. De plus, la définition $z^2 + z'^2 = c^2$ est symétrique en z et z'. Donc, on a également

   $$(|z'-c|+|z'+c|)^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2 + 2c^2$$

   Ainsi,

   $$(|z'-c|+|z'+c|)^2 = (|z-c|+|z+c|)^2$$

   Comme ce sont des quantités réelles positives, on en déduit

   $$|z'-c|+|z'+c| = |z-c|+|z+c|$$

   Cela se traduit géométriquement par

   $$M'F + M'F' = MF + MF'$$

   Or, d'après la caractérisation bifocale de l'ellipse, $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} | MF + MF' = 2a\}$. Comme $M \in \mathcal{E}$, on en déduit que $M'F + M'F' = 2a$, donc que M' appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$.

4. D'après ce qui précède, on sait que M' appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$ et à la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de $[MF)$ et $[MF')$ passant par O. Cette dernière droite passe par O, donc possède deux points d'intersection avec l'ellipse $\mathcal{E}$. On peut choisir M' comme l'une de ces deux intersections.

5. On assemble le produit $nn' = (z+iz')(z-iz') = z^2 + z'^2$. Or d'après la définition de z', $z^2 + z'^2 = c^2$. Donc $nn' = c^2$. Le carré du module de n vaut

$$|n|^2 = n\overline{n} = (z+iz')(\overline{z} - i\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + i\overline{z}z' - iz\overline{z'}$$

De même,

$$|n'|^2 = n'\overline{n'} = (z-iz')(\overline{z} + i\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 - i\overline{z}z' + iz\overline{z'}$$

On en déduit que

$$(|n| + |n'|)^2 = |n|^2 + |n'|^2 + 2|nn'| = 2|z|^2 + 2|z'|^2 + 2|c|^2$$

Or d'après la deuxième égalité démontrée en II.3, $2|z|^2 + 2|z'|^2 + 2|c|^2 = (|z-c| + |z+c|)^2$. Donc $(|n| + |n'|)^2 = (|z-c| + |z+c|)^2$. Comme ce sont des quantités réelles positives, on en déduit

$$|n| + |n'| = |z-c| + |z+c|$$

Cela se traduit géométriquement par

$$ON + ON' = MF + MF'$$

6. On identifie parties réelles et imaginaires dans l'égalité $z^2 + z'^2 = c^2$, ce qui donne

$$x^2 - y^2 + x'^2 - y'^2 = c^2 \quad \text{et} \quad xy + x'y' = 0$$

Or M et M' sont sur l'ellipse $\mathcal{E}$, ce qui implique

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{et} \quad y'^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x'^2$$

Cela implique dans l'égalité des parties réelles

$$x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - b^2 + x'^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - b^2 = c^2$$

Soit encore

$$(x^2 + x'^2)(a^2 + b^2) = a^2(c^2 + 2b^2) = a^2(a^2 + b^2)$$

On en déduit donc $x^2 + x'^2 = a^2$. Il vient alors

$$a^2 - y^2 - y'^2 = c^2$$

Soit encore

$$y^2 + y'^2 = a^2 - c^2 = b^2$$

7. D'après la définition bifocale de l'ellipse et les résultats en II.5, on a $ON + ON' = 2a$ et $ON \times ON' = c^2$. On en déduit que

$$(ON - ON')^2 = (ON + ON')^2 - 4ON \times ON' = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2$$

Ceci implique que $ON - ON' = \pm 2b$. Comme les définitions de N et N' sont symétriques à l'échange de signe près, on peut choisir $ON - ON' = 2b$. Avec ce choix, on obtient

$$ON = a + b \quad \text{et} \quad ON' = a - b$$

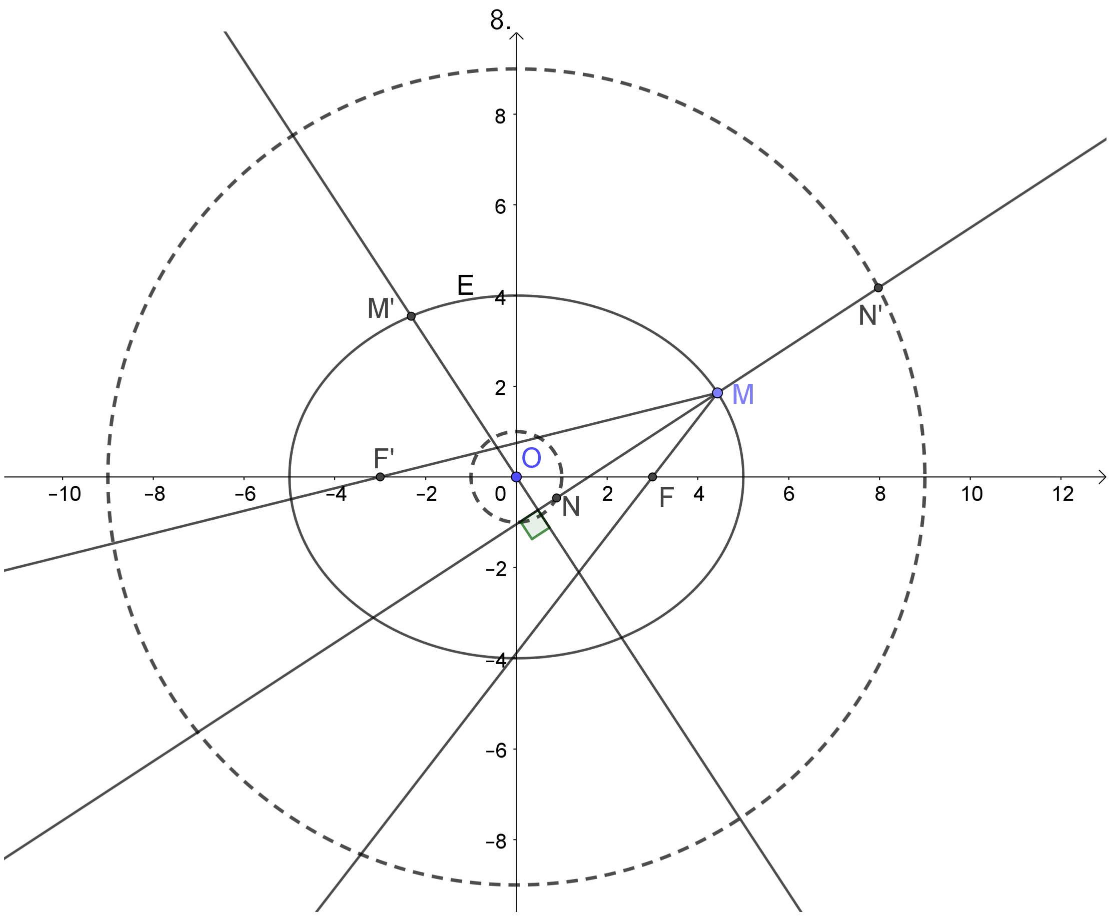
Ainsi, le lieu des points N et N' est inclus dans deux cercles : le cercle de centre O et de rayon $a+b$, et le cercle de centre O et de rayon $a-b$.
Réciproquement, soit n un complexe de module $a-b$. Alors la relation la relation précédente $n = z + iz'$ amène à considérer $(n-z)^2 = -z'^2 = z^2 - c^2$, soit encore $n^2 - 2nz = -c^2$. On définit donc $z = (n^2 + c^2)/(2n)$. Alors si l'on note $n = \alpha + i\beta$, et $z = x + iy$, on identifie parties réelle et imaginaire, ce qui donne

$$x = \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+c^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)} \quad \text{et} \quad y = \frac{\beta(\alpha^2+\beta^2-c^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

Mais alors, comme $\alpha^2 + \beta^2 = (a-b)^2$ et $a^2 = b^2 + c^2$,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} &= \frac{1}{4(a-b)^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}((a-b)^2+c^2)^2 + \frac{\beta^2}{b^2}((a-b)^2-c^2)^2\right) \\ &= \frac{1}{4(a-b)^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}(2a^2-2ab)^2 + \frac{\beta^2}{b^2}(2b^2-2ab)^2\right] \\ &= \frac{4(a-b)^2}{4(a-b)^4}[\alpha^2+\beta^2] \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc le point M d'affixe z est sur l'ellipse $\mathcal{E}$. Le même raisonnement avec un complexe de module $a+b$ et la même définition $z = (n^2+c^2)/(2n)$ fournit également un point sur l'ellipse. On a ainsi l'inclusion réciproque entre les cercles de rayon $a+b$ et $a-b$ dans le lieu des points N et N' de l'énoncé.



PARTIE III

1. (a) Soit $M(x,y) \in \mathcal{E} \cap D$. Alors

$$v^2 \frac{x^2}{a^2} + v^2 \frac{y^2}{b^2} = v^2$$

Soit encore

$$x^2 \frac{v^2}{a^2} + \frac{(w-ux)^2}{b^2} = v^2$$

Donc

$$\left(\frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{2wu}{b^2} x + \frac{w^2}{b^2} = v^2$$

Ainsi, x est racine d'un polynôme de degré 2 car $v^2/a^2 + u^2/b^2$ non nul. Donc il y a au plus 2 points dans $\mathcal{E} \cap D$.

(b) On est dans le cas $u = x_0/a^2$, $v = y_0/b^2$ et $w = 1$. Le couple (u,v) est non nul car O n'appartient pas à l'ellipse $\mathcal{E}$. D'après ce qui précède, si $M(x,y)$ est dans l'intersection de $\mathcal{E}$ et de cette droite, alors

$$\left(\frac{y_0^2}{a^2 b^4} + \frac{x_0^2}{a^4 b^2}\right) x^2 - 2\frac{x_0}{a^2 b^2} x + \frac{1}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^4}$$

Or $M_0 \in \mathcal{E}$, donc $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{a^2 b^2} x^2 - 2\frac{x_0}{a^2 b^2} x + \frac{x_0^2}{a^2 b^2} = 0$$

On en déduit

$$x^2 - 2x_0 x + x_0^2 = 0$$

Le polynôme $X^2 - 2x_0 X + x_0^2$ se factorise en $(X - x_0)^2$. Donc $x = x_0$, d'où $y = y_0$. L'intersection de $\mathcal{E}$ et D est donc incluse dans $\{M_0\}$. Réciproquement, M_0 appartient bien à la droite D car $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$. Conclusion, la droite D est bien tangente à $\mathcal{E}$ en M_0.

(c) Supposons qu'il existe un point de tangence entre D et $\mathcal{E}$. Notons-le $M_0(x_0, y_0)$. Alors, comme la tangente à $\mathcal{E}$ en M_0 est unique, D a également comme équation $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$. On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $u = \lambda x_0/a^2$, $v = \lambda y_0/b^2$ et $w = \lambda$. Alors

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = \lambda^2 \frac{x_0^2}{a^2} + \lambda^2 \frac{y_0^2}{b^2}$$

Or M_0 appartient l'ellipse, donc $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, ce qui implique

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = \lambda^2 = w^2$$

Réciproquement, soit (u,v) un couple non nul de réels et w un réel tels que $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$. Alors w est nécessairement non nul, ce qui implique

$$\frac{a^2 u^2}{w^2} + \frac{b^2 v^2}{w^2} = 1$$

On pose alors $x_0 = ua^2/w$ et $y_0 = vb^2/w$. D'après notre dernière égalité, le point $M_0(x_0, y_0)$ vérifie

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Donc, $M_0 \in \mathcal{E}$. D'autre part, $ux_0 + vy_0 = (u^2a^2 + v^2b^2)/w = w$. Donc M_0 appartient également à la droite D d'équation $ux + vy = w$. D'après les mêmes calculs que ceux qui précèdent, D a également pour équation $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$, donc est tangente à $\mathcal{E}$ en M_0.

(d) Les points M_1 et M_2 sont distincts si et seulement si $t_2 - t_1$ est non congru à 0 modulo 2π. Dans ce cadre, un point $M(x, y) \in (M_1M_2)$ si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = 0$, soit encore avec des notations évidentes

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

On pose alors $u = y_2 - y_1 = 2b(\sin(t_2) - \sin(t_1))$, $v = x_1 - x_2 = 2a(\cos(t_1) - \cos(t_2))$ et $w = x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1) = x_1y_2 - x_2y_1 = 4ab\sin(t_2 - t_1)$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $c_i = \cos(t_i)$ et $s_i = \sin(t_i)$. Alors, d'après l'équation tangentielle de $\mathcal{E}$, (M_1M_2) est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$, soit encore

$$4a^2b^2(s_2 - s_1)^2 + 4a^2b^2(c_1 - c_2)^2 = 16a^2b^2[\sin(t_2 - t_1)]^2.$$

Comme pour tout $i \in \{1, 2\}, c_i^2 + s_i^2 = 1$, ceci équivaut à

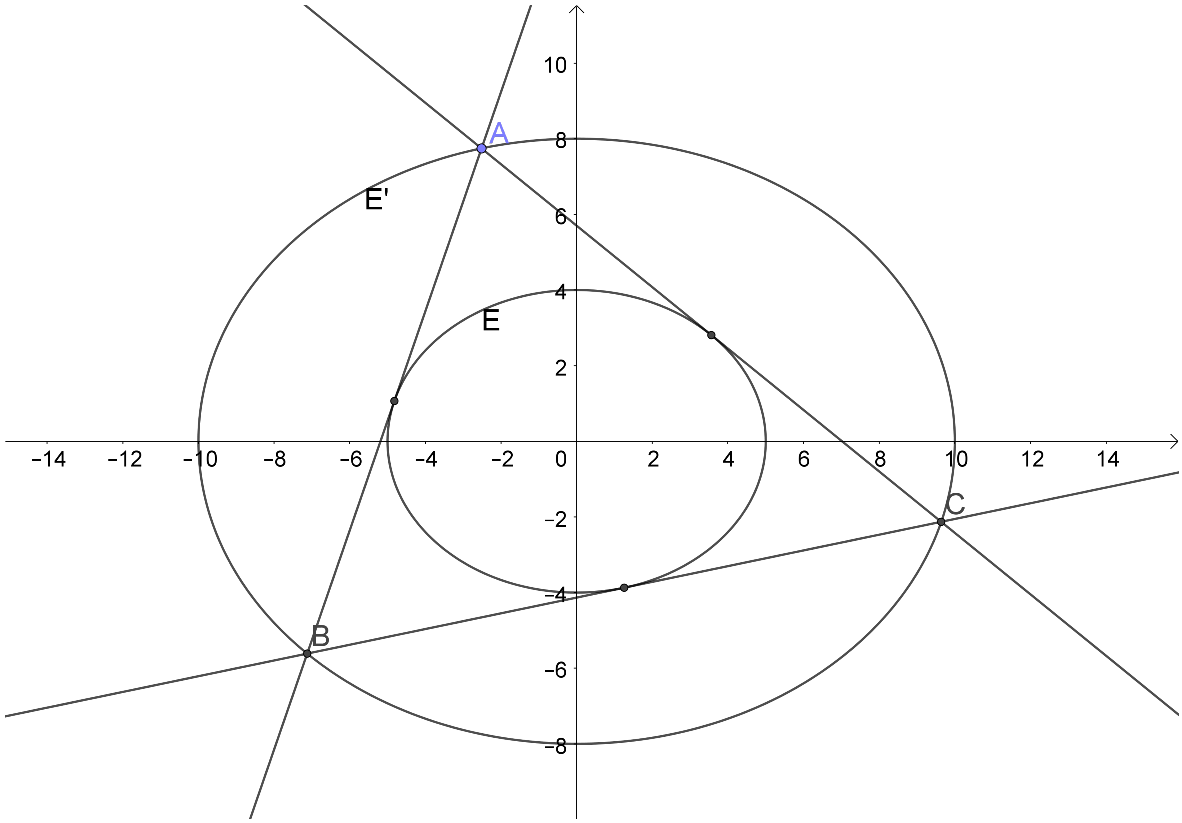
$$-2s_1s_2 - 2c_1c_2 + 2 = 4[\sin(t_2 - t_1)]^2$$

$$\iff -\cos(t_2 - t_1) + 1 = 2 - 2[\cos(t_2 - t_1)]^2$$

Ainsi, (M_1M_2) est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si $\cos(t_2 - t_1)^2$ est racine du polynôme $2X^2 - X - 1$. Or ce polynôme se factorise en $2(X - 1)(X + 1/2)$. Or $t_2 - t_1$ est non congru à 0 modulo 2π dans notre cadre, donc le cas $\cos(t_2 - t_1) = 1$ est exclu. D'autre part, l'équation $\cos\alpha = -1/2$ a pour solutions $\alpha \equiv \pm 2\pi/3[2\pi]$. Conclusion, (M_1M_2) est tangente si et seulement si $t_2 - t_1 \equiv \pm 2\pi/3[2\pi]$.

(e) On note t_A, t_B, t_C des paramètres réels tels que $A = (2a\cos t_A, 2b\sin t_A)$, etc. Alors d'après ce qui précède, $t_A - t_B \equiv \pm 2\pi/3[2\pi]$ et $t_A - t_C \equiv \pm 2\pi/3[2\pi]$. Comme B et C sont distincts, on en déduit que $t_A - t_B$ et $t_A - t_C$ sont non congrus modulo 2π. Quitte à échanger B et C, on peut supposer $t_A - t_B \equiv 2\pi/3[2\pi]$ et $t_A - t_C \equiv -2\pi/3[2\pi]$. Mais alors $t_B - t_C \equiv -4\pi/3[2\pi] \equiv 2\pi/3[2\pi]$. D'après le sens indirect de la question précédente, on en déduit que (BC) est tangente à $\mathcal{E}$.

(f)



2. (a) Les applications cosinus et sinus sont dérivables. Donc, pour tout réel t,

$$\overrightarrow{OM}'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$$

Ce vecteur est de norme plus grande que b (on rappelle que $a > b$), donc ne s'annule pas.

(b) Fixons un réel t. Alors, la droite D passant par $M(t)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{OM}'(t)$ admet pour vecteur normal $(b\cos(t), a\sin(t))$. Elle admet donc pour équation $b\cos(t)x + a\sin(t)y = b\cos(t)a\cos(t) + a\sin(t)b\sin(t) = ab$, ce qui amène à poser $u = b\cos(t)$, $v = a\sin(t)$ et $w = ab$. On assemble alors $a^2u^2 + b^2v^2 = a^2b^2\cos^2(t) + b^2a^2\sin^2(t) = a^2b^2$, qui vaut w^2. L'équation tangentielle étant satisfaite, on en déduit que D est tangente $\mathcal{E}$.

(c) Fixons un réel t non congru 0 modulo π. Alors, on peut étudier localement l'ellipse en étudiant la courbe $x \mapsto \pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ au voisinage de $M(t)$. Fixons t dans $]0, \pi[$, alors on peut étudier l'application $f : x \mapsto b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ au voisinage de $a\cos(t)$. Cette application est deux fois dérivable et vérifie dans un voisinage de $a\cos(t)$

$$f'(x) = b\frac{-x/a^2}{\sqrt{1 - x^2/a^2}}$$

et

$$f''(x) = b\left[\frac{-1/a^2}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} + \frac{(-x/a^2)(-1/2)(-2x/a^2)}{\sqrt{1 - x^2/a^2}(1 - x^2/a^2)}\right] = \frac{-b}{a^2\sqrt{1 - x^2/a^2}}$$

Alors, au voisinage de $M(t)$, f'' est négative, ce qui signifie que la courbe est en dessous de sa tangente dans ce voisinage.

Si l'on considère $t \in]-\pi, 0[$, on étudie l'application $x \mapsto -b\sqrt{1-x^2/a^2}$. Les mêmes outils indiquent qu'au voisinage de $M(t)$ est au-dessus de sa tangente.

Pour $t = 0$ ou π, les tangentes à l'ellipse sont verticales d'équation $x = a$ et $x = -a$. Or, pour tout point $M(x, y)$ de l'ellipse $|x| \leq a$, donc l'ellipse est à gauche de tangente en $(a, 0)$ et à droite de sa tangente en $(-a, 0)$.

(d) Soit t un réel. Un vecteur directeur de $[M(t)F)$ est $(c-a\cos(t), -b\sin(t))$. Alors, si l'on note $\vec{n}(t) = (b\cos(t), a\sin(t))$ un vecteur normal à $\mathcal{E}$ en $M(t)$, on assemble le produit scalaire $\vec{n}(t)\cdot\overrightarrow{M(t)F} = b\cos(t)(c-a\cos(t)) - b\sin(t)a\sin(t) = bc\cos(t) - ab$. On procède de même avec le vecteur $\overrightarrow{M(t)F'} = (-c-a\cos(t), -b\sin(t))$. Alors, $\vec{n}(t)\cdot\overrightarrow{M(t)F'} = b\cos(t)(-c-a\cos(t)) - b\sin(t)a\sin(t) = -bc\cos(t) - ab$.
De plus, $M(t)F^2 = (c-a\cos t)^2 + b^2\sin^2 t = a^2 - 2ac\cos t + c^2\cos^2 t = (a-c\cos t)^2$ car $a^2 = b^2 + c^2$. Donc $M(t)F = a - c\cos t$. De manière similaire, $M(t)F' = a + c\cos t$. Ainsi,

$$\frac{\vec{n}(t)\cdot\overrightarrow{M(t)F}}{\|\vec{n}(t)\|\|\overrightarrow{M(t)F}\|} = -b$$

et

$$\frac{\vec{n}(t)\cdot\overrightarrow{M(t)F'}}{\|\vec{n}(t)\|\|\overrightarrow{M(t)F'}\|} = -b$$

Ceci prouve que le cosinus de l'angle entre la normale et la demi-droite $[M(t)F)$ est le même que celui entre la normale et la demi-droite $[M(t)F')$, donc que la normale est bien la bissectrice des demi-droites $[M(t)F)$ et $[M(t)F')$.

PARTIE IV

1. (a) D'après la définition de D, on pose $w = u\alpha + v\beta$. L'équation tangentielle de $\mathcal{E}$ indique alors que D est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$a^2u^2 + b^2v^2 = w^2 = u^2\alpha^2 + 2u\alpha v\beta + v^2\beta^2.$$

Ceci équivaut à

$$u^2(a^2-\alpha^2) - 2\alpha\beta uv + v^2(b^2-\beta^2) = 0.$$

(b) D'après ce qui précède, il existe deux droites tangentes à $\mathcal{E}$ passant par M si et seulement si il existe deux solutions non nulles (à un facteur multiplicatif près) $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ de l'équation précédente. On note alors P le polynôme $(a^2 - \alpha^2)X^2 - 2\alpha\beta X + (b^2 - \beta^2)$.
Premier cas : $a^2 - \alpha^2 = 0$. Alors $\alpha = \pm a$ et la droite d'équation $x = \pm a$ passe par M et est tangente à $\mathcal{E}$ en $(\pm a, 0)$.
— Si $\beta = 0$, alors $M = (\alpha, \beta)$ appartient à l'ellipse, et il y a unicité de la tangente.
— Si β non nul, alors $u = (b^2-\beta^2)/(2\alpha\beta), v = 1$ définit une tangente à $\mathcal{E}$ d'après ce qui précède. Elle est bien distincte de la tangente d'équation $x = \pm a$.

Deuxième cas : $a^2 - \alpha^2$ non nul. Alors $(u, 1)$ est solution de l'équation précédente si et seulement si le discriminant de P est strictement positif, ce qui équivaut à

$$\alpha^2\beta^2 - (a^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2) > 0,$$

soit encore

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} > 1.$$

Cette dernière inégalité caractérise l'extérieur de l'ellipse, privée des deux droites $x = \pm a$.

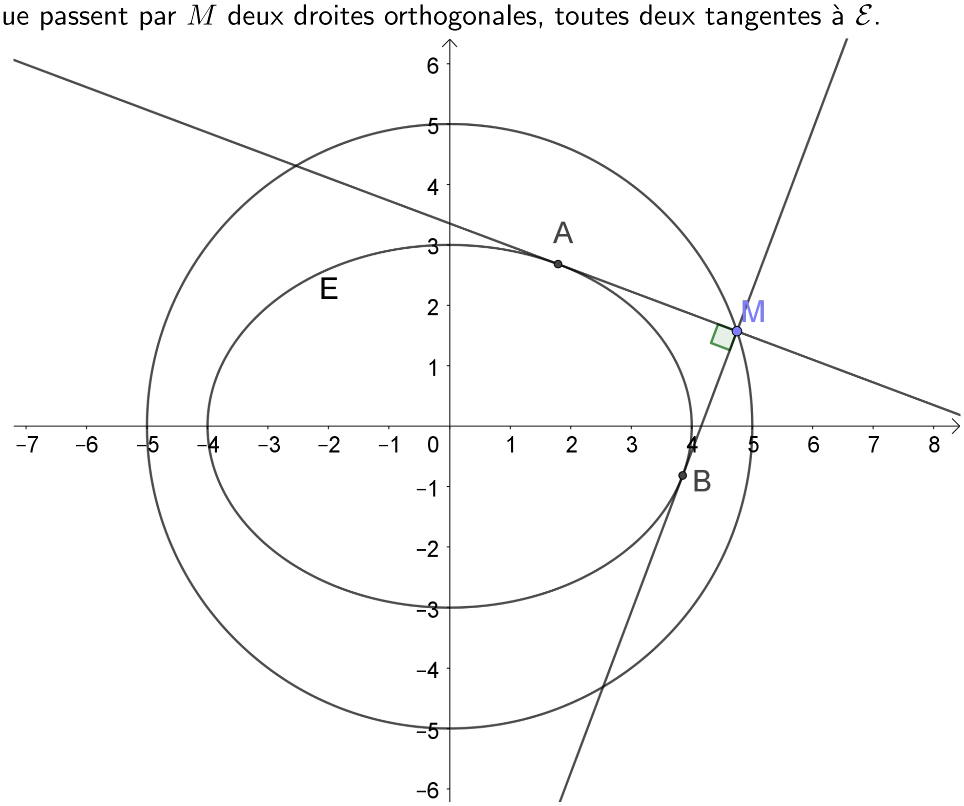
On regroupe les deux cas sous la forme : il existe deux tangentes à $\mathcal{E}$ passant par M si et seulement si M est à l'extérieur de l'ellipse.

(c) Premier cas : Il existe une tangente verticale à $\mathcal{E}$ passant par M. Alors, d'après ce qui précède, celle-ci a pour équation $x = \pm a$ et les coordonnées de $M(\alpha, \beta)$ vérifient $\alpha = \pm a$ et $\beta \neq 0$. D'autre part, l'autre tangente a pour équation $(b^2 - \beta^2)/(2\alpha\beta)x + y = w$. Cette dernière est orthogonale à $x = \alpha$ si et seulement si $b^2 - \beta^2 = 0$, soit $\beta = \pm b$.

Deuxième cas : les deux tangentes passant par M ne sont pas verticales. Dans ce cas, elles sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1. Or pour un polynôme de second degré $c_2X^2 + c_1X + c_0$, le produit des racines x_1x_2 vérifie $x_1x_2c_2 = c_0$. Ainsi, les deux tangentes sont orthogonale si et seulement si $-(a^2 - \alpha^2) = b^2 - \beta^2$, ce qui équivaut à

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$$

On regroupe les deux cas. Dans le premier cas, les points de coordonnées $(\pm a, \pm b)$ vérifient également $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$. Réciproquement, si $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$, alors (α, β) appartient bien à l'extérieur de l'ellipse et les calculs précédents démontrent que passent par M deux droites orthogonales, toutes deux tangentes à $\mathcal{E}$.



(d)

2. (a) On commence par déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{H}$ en $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{H}$. Les mêmes calculs que ceux de l'ellipse amènent à la droite d'équation :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

L'unicité de la tangente permet alors d'écrire une équation tangentielle : $ux+vy = w$ est tangente à $\mathcal{H}$ si et seulement si il existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$, il existe λ non nul tels que $u = \lambda x_0/a^2, v = -\lambda y_0/b^2, w = \lambda$, ce qui équivaut à

$$a^2u^2 - b^2v^2 = w^2 \quad \text{et} \quad w \neq 0$$

(b) On reprend les mêmes arguments que pour l'ellipse. Une droite $ux + vy = u\alpha + v\beta$ est tangente à $\mathcal{H}$ en $M(\alpha, \beta)$ si et seulement si

$$(a^2 - \alpha^2)u^2 - 2\alpha\beta uv - v^2(b^2 + \beta^2) = 0$$

Deux telles tangentes existent alors ssi le discriminant est strictement positif, ce qui amène à

$$a^2b^2 - \alpha^2b^2 + \beta^2a^2 > 0$$

soit encore

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} < 1$$

On trouve alors l'intérieur de l'hyperbole $\mathcal{H}$, c'est la partie connexe de $\mathcal{P}\backslash\mathcal{H}$ contenant O.

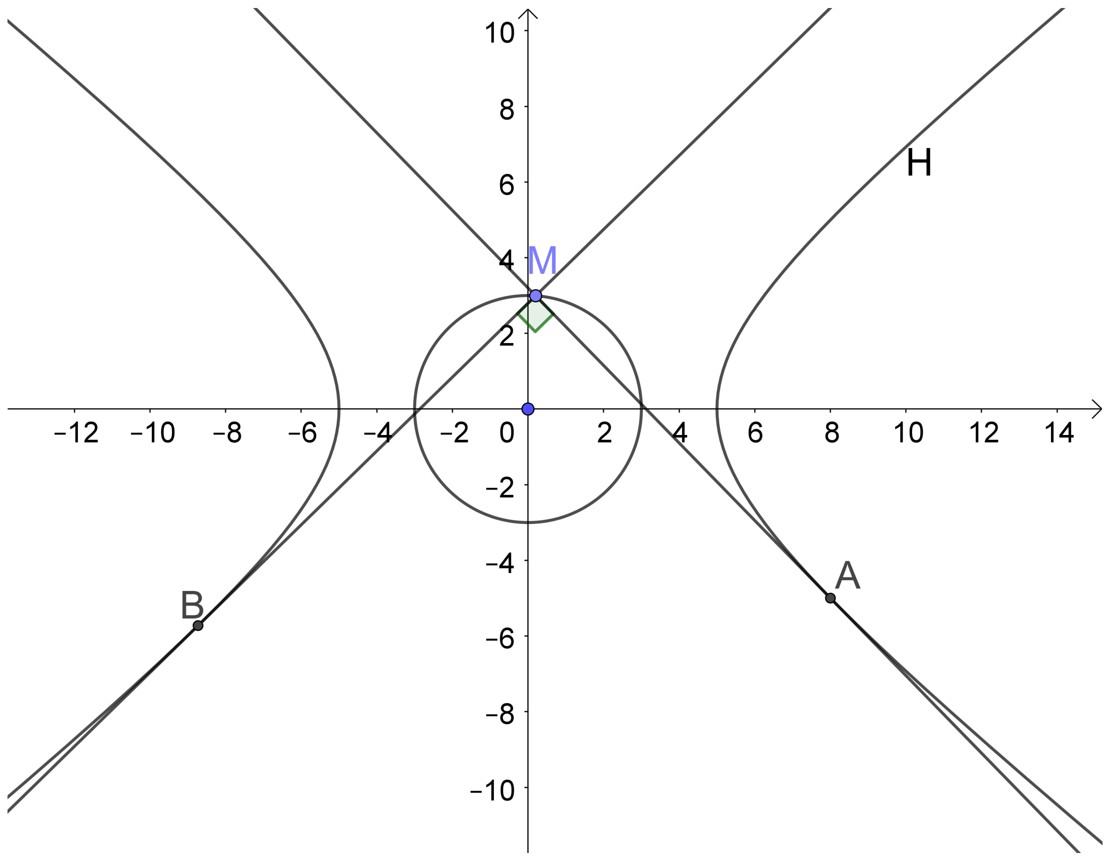
(c) L'étude du produit des racines amène à considérer

$$a^2 - \alpha^2 = b^2 + \beta^2$$

soit encore

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 - b^2$$

Ainsi, dans le cas $a < b$. Aucun point du plan M ne peut faire passer deux droites orthogonales tangentes à $\mathcal{H}$. Dans le cas $a = b$, un seul point serait candidat, le point O. Cependant, la condition $w \neq 0$ dans l'équation tangentielle empêche toute droite passant par O d'être tangente à $\mathcal{H}$. Dans le cas $a > b$, on obtient un cercle. Tous les calculs précédents peuvent être remontés.



PARTIE V

1. On a vu en partie III, que pour tout t, le vecteur $(-a\sin t, b\cos t)$ est tangent à l'ellipse en $M(t)$. On en déduit que le vecteur $(b\cos t, a\sin t)$ est normal à l'ellipse en $M(t)$.
2. D'après le texte, un cercle est tangent à l'ellipse si et seulement si leurs normales respectives au point d'intersection $M(t)$ sont confondues. Ainsi, un point $\Omega(\alpha,\beta)$ est centre d'un cercle tangent à l'ellipse si et seulement si il existe un réel t tel que la normale à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega M(t)}$, soit encore

$$\exists t\in\mathbb{R}, \exists\mu\neq 0, \alpha = a\cos t + \mu b\cos t \quad \text{et} \quad \beta = b\sin t + \mu a\sin t$$

Dans le cas $a+\mu b = 0$, Ω est sur l'axe (Oy). On note $B=(0,b)$. Alors le cercle de centre Ω et de rayon ΩB est tangent à $\mathcal{E}$ en B car de normale $x=0$. Dans le cas $b+\mu a = 0$, Ω est sur l'axe (Ox). On note $A=(a,0)$. Alors le cercle de centre Ω et de rayon ΩA est tangent à $\mathcal{E}$ en A car de normale $y=0$. Dans les autres cas, on a alors

$$\frac{\alpha^2}{(a+\mu b)^2} + \frac{\beta^2}{(b+\mu a)^2} = 1$$

Toutes ces possibilités impliquent :

$$\exists\mu\in\mathbb{R}\backslash\{-b/a,-a/b\}, \quad \left(\frac{\alpha}{a+\mu b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b+\mu a}\right)^2 = 1$$

Réciproquement, si Ω vérifie une telle condition, alors on couvre bien les cas $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Si Ω est sur l'ellipse, alors on peut choisir pour centre l'intersection de la normale en Ω avec l'ellipse, différente de Ω. Un μ convenable satisfait

$$\frac{(a+\mu b)^2\alpha^2}{a^4} + \frac{(b+\mu a)^2\beta^2}{b^4} = 1,$$

ce qui amène à

$$\mu = -2\frac{(\alpha^2 b^4 + a^4\beta^2)ab}{b^6\alpha^2 + a^6\beta^2}$$

3. L'application Ψ est dérivable et vérifie pour tout μ distinct de $-b/a$ et $-a/b$,

$$\Psi'(\mu) = -\frac{2b\alpha^2}{(a+\mu b)^3} - \frac{2a\beta^2}{(b+\mu a)^3}$$

La dérivée s'annule en μ_0 si et seulement si

$$-2b\alpha^2(b+\mu_0 a)^3 = 2a\beta^2(a+\mu_0 b)^3$$

Soit encore, en notant $u = (-a\beta^2)^{1/3}/(b\alpha^2)^{1/3}$,

$$\frac{b+\mu_0 a}{a+\mu_0 b} = u$$

Ceci à équivaut à

$$b - au = \mu_0(bu - a)$$

Or $bu - a$ est strictement négatif car $b > 0$, $a > 0$ et $u < 0$. Ainsi, la dérivée de Ψ s'annule en un seul réel $\mu_0 = (b-au)/(bu-a)$.
On a en outre l'encadrement $-a/b < \mu_0 < -b/a$. En effet $a^2 > b^2$ implique $a^2 - aub > b^2 - aub$, d'où $-a/b < (b-au)/(bu-a)$. D'autre part, $a^2 > b^2$ implique $a^2u < b^2u$ donc $ba - a^2u < -b^2u + ab$ donc $(b-au)/(bu-a) < -b/a$.
Comme Ψ admet pour limite $+\infty$ en $-a/b$ et $-b/a$, on dresse le tableau de variations suivant :

μ	$-\infty$		$-a/b$		μ_0		$-b/a$		$+\infty$
$\Psi(\mu)$	-1	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$\Psi(\mu_0)$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	-1

4. Sur chaque intervalle $]-\infty, -a/b[$, $]-a/b, \mu_0[$, $]\mu_0, -b/a[$ et $]-b/a, +\infty[$, Ψ est continue et strictement monotone. On en déduit que Ψ s'annule exactement une fois sur $]-\infty, -a/b[$ et exactement une fois sur $]-b/a, +\infty[$. Si $\Psi(\mu_0) < 0$, cela implique deux autres annulations. On en déduit que Ψ s'annule exactement trois fois si et seulement si $\Psi(\mu_0) = 0$.
Or, comme $b + \mu_0 a = u(a + \mu_0 b)$,

$$\begin{aligned}\Psi(\mu_0) &= \frac{\alpha^2u^2}{(b+\mu_0 a)^2} + \frac{\beta^2}{(b+\mu_0 a)^2} - 1 \\ &= \frac{\alpha^2u^2 + \beta^2}{(b+\mu_0 a)^2} - 1\end{aligned}$$

Donc $\Psi(\mu_0)$ est nul si et seulement si

$$\alpha^2 u^2 + \beta^2 = (b + \mu_0 a)^2$$

Or

$$\begin{aligned} b + \mu_0 a &= b + \frac{b - au}{bu - a} a \\ &= \frac{(b^2 - a^2)u}{bu - a} \end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi(\mu_0) = 0 \iff (\alpha^2 u^2 + \beta^2)(b - a/u)^2 = (b^2 - a^2)^2$. Or, d'après la définition de u, $-a/u = b\alpha^2 u^2/\beta^2$, donc

$$b - \frac{a}{u} = b\left(1 + \frac{\alpha^2 u^2}{\beta^2}\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (\alpha^2 u^2 + \beta^2)\left(b - \frac{a}{u}\right)^2 &= \frac{b^2}{\beta^4}\left(\alpha^2 u^2 + \beta^2\right)^3 \\ &= \left[b^{2/3}\beta^{-4/3}\alpha^2\left(\frac{a^{2/3}\beta^{4/3}}{b^{2/3}\alpha^{4/3}}\right) + b^{2/3}\beta^{2/3}\right]^3 \\ &= \left[(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3}\right]^3 \end{aligned}$$

Ainsi, Ψ s'annule exactement trois fois si et seulement si

$$(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

5. D'après ce qui précède, le lieu de ces points est l'ensemble des points vérifiant

$$(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

Alors $x = (a\alpha/(a^2 - b^2))^{1/3}$ et $y = (b\beta/(a^2 - b^2))^{1/3}$ vérifient $x^2 + y^2 = 1$, donc il existe un réel t tel que $x = \cos t$ et $y = \sin t$. On en déduit qu'on peut paramétriser ce lieu via

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad \beta = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

6. Notons pour tout réel t

$$\phi(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t\right)$$

la paramétrisation précédente. Cette application est 2π périodique, dérivable et vérifie pour tout réel t

$$\phi'(t) = \left(-3\frac{a^2 - b^2}{a}\sin t\cos^2 t, 3\frac{a^2 - b^2}{b}\cos t\sin^2 t\right)$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{A}$ présente des points singuliers aux points tels que $t \equiv 0[\pi/2]$, c'est-à-dire les points

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a},0\right), \quad \left(0,\frac{a^2-b^2}{b}\right), \quad \left(-\frac{a^2-b^2}{a},0\right) \quad \text{et} \quad \left(0,-\frac{a^2-b^2}{b}\right)$$

Etudions le point singulier $(\frac{a^2-b^2}{a},0)$ noté A, qui correspond à l'étude de ϕ au voisinage de 0. Un développement limité de ϕ donne

$$\phi(t) = \left(\frac{a^2-b^2}{a}(1-3t^2/2+o(t^2)), \frac{a^2-b^2}{b}(t^3+o(t^3)\right)$$

Donc le degré d'annulation de la première dérivée en x est paire, et celui en y est impaire. On est donc sur un point de rebroussement de première espèce.

Les autres points singuliers s'étudient de manière similaire et sont tous des points de rebroussement de première espèce.