

Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 15 : Calcul matriciel et le début du chapitre 16 : Polynômes, fractions rationnelles. Les exercices porteront sur le chapitre 15 : calcul matriciel. Notez que le chapitre 15 n'a pas vocation à introduire l'algèbre linéaire, mais à illustrer le chapitre sur les structures algébriques.

## Chapitre 15 : Calcul matriciel.

### Opérations sur les matrices.

Notion de matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes. Combinaison linéaire de matrices. Produit matriciel entre  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . (★) Produit de matrices élémentaires. Interprétation de  $AE_{i,j}$  et  $E_{k,l}A$ . Transposition, notation  $A^T$ . (★) Transposée d'un produit  $(AB)^T = B^T A^T$ . Représentation par blocs, compatibilité avec le produit matriciel.

### Matrices carrées.

Matrice identité. Structure d'anneau. Formules du binôme et de Bernoulli sous hypothèse de commutation. Matrices scalaires, symétriques, antisymétriques. (★) Décomposition symétrique/antisymétrique. Matrices diagonales, triangulaires, triangulaires strictes. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires. Groupe linéaire, transposée de l'inverse. Critère d'inversibilité des matrices diagonales et triangulaires, diagonale de l'inverse.

### Systèmes linéaires.

Matrices de transvection, de dilatation, de permutation. Effet par multiplication à gauche sur les lignes, par multiplication à droite sur les colonnes. Systèmes linéaires compatibles, de Cramer. Résolution de systèmes linéaires échelonnés, méthode d'échelonnement en lignes. Application à la détermination d'inverses.

## Chapitre 16 : Polynômes, fractions rationnelles.

### Anneau $\mathbb{K}[X]$ .

Opérations dans  $\mathbb{K}[X]$ , notion d'indéterminée, écriture  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$  avec  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  à support fini. Composition de polynômes. Degré d'un polynôme non nul, convention  $d(0) = -\infty$ . (★)  $d(P + Q) \leq \max(d(P), d(Q))$ ,  $d(PQ) = d(P) + d(Q)$ ,  $d(P \circ Q) = d(P)d(Q)$ . Intégrité de  $\mathbb{K}[X]$ . (★) L'ensemble des inversibles de l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est l'ensemble des polynômes de degré 0, i.e des polynômes constants non nuls. Relation de divisibilité (★) Caractérisation des polynômes associés. (★) Théorème de la division euclidienne de polynômes.

★ ★ ★ ★ ★