Les calculatrices ne sont pas autorisées

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il est rappelé qu'il sera tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies. Les résultats devront être encadrés.

Exercice 1.

Simplifier le plus possible les expressions suivantes

$$A = \frac{\frac{2}{56} + \frac{12}{4} - \frac{23}{7}}{\frac{5}{7} + \frac{1}{4}}, \quad B = \frac{\sin(\pi/6) + \cos(\pi/6) - 1}{\sqrt{12} - \sqrt{75}}$$

Exercice 2.

Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 3.

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant : $\sqrt{x^3 + 6x^2 + 6x + 5} = (x+2)\sqrt{x+1}$.

Exercice 4.

Etudier la convergence des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n-1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\displaystyle\int_0^1 x^n dx\right)\left(\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \dbinom{2n}{n} \Big/ \dbinom{2(n+1)}{n+1}$.

Pour chacune de ces suites on précisera en le justifiant, si la suite converge ou non, et en cas de convergence on précisera la limite.

Exercice 5. On considère une fonction périodique de période 2π, i.e $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)$ et de classe C^1 (dérivable et de dérivée continue). Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt + i\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

1. Procéder à une intégration par parties pour exprimer c_n en fonction de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)$ et de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)$.
2. En admettant que f' est bornée, démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 6.

On se donne trois entiers naturels tous non nuls n, p, q et on note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{n^p + x^2 n^q}$.

1. Démontrer que pour tout réel x non nul, $|f(x)| \leq \dfrac{|x|}{n^p}$ et $|f(x)| \leq \dfrac{1}{|x| n^q}$
2. Étudier les variations de f et démontrer en particulier que son maximum vaut $\dfrac{1}{2} n^{-(p+q)/2}$.

Exercice 7.

Soit n un entier naturel non nul. On procède à $2n$ lancers indépendants d'une pièce de monnaie. Celle-ci a la probabilité p de tomber sur pile avec p un réel dans $[0,1] \backslash \{1/2\}$, et la probabilité $q = 1 - p$ de tomber sur face à chaque lancer.

1. Quelle est la probabilité d'avoir autant de pile que de face au bout des $2n$ lancers ?
2. Démontrer que $\dbinom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ et en déduire la limite de la probabilité précédente quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.

1. Montrer pour tout entier naturel n, il existe un unique réel strictement positif a_n tel que $\ln(a_n) + n a_n = 0$. *On pourra introduire pour tout entier n l'application $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) + nx$.*
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 9. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

1. Donner l'ensemble D_f de définition de f.
2. Donner l'ensemble des points de dérivabilité de f, étudier ses variations sur son ensemble de définition, puis tracer son graphe.
3. Démontrer que f est une bijection de D_f dans $\mathbb{R}^+$ et que sa réciproque g vérifie pour tout réel positif t,

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆