Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le début chapitre 18 : espaces vectoriels. Les exercices porteront sur le chapitre 17 : analyse asymptotique.

Chapitre 18 : Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ est un corps fixé, la plupart du temps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espaces vectoriels

Opérations dans les espaces vectoriels, exemples

Axiomes des espaces vectoriels. (★) Règles de calcul : soit $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$, alors $\lambda 0_E = 0E, 0_K x = 0_E, -x = (-1)x, \lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0_K \vee x = 0_E)$. Exemples fondamentaux, $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(X, E)$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K} \subset L$ est une extension de corps, L est un K-ev. Produit d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels

Notion de sous-espaces vectoriel. (★) F est un sev de E ssi $0_E \in F$ et $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F$. (★) F est un sev de E ssi F est non vide et $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$. Exemples : plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$, suites à support fini, $\mathbb{K}_n[X]$, espaces fonctionnels, solutions d'équation différentielles homogènes, etc. Un intersection de sev est un sev. Sous-espace engendré par une partie $\mathrm{Vect}(A)$. (★) $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sev contenent A. (★) A est un sev ssi $A = \mathrm{Vect}(A)$, $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.

Familles finies de vecteurs.

Combinaison linéaire de vecteurs. (★) $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x_i)_i$. (★) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $i \in [[1, p]], \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_p)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j, \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_p)$.

- Familles finies génératrices. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice. Toute permutation d'une famille génératrice finie est génératrice.
- Famille finie libre, liée. Si l'un des vecteurs est CL des autres, la famille est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. (★) Toute famille de polynômes échelonnée est libre.
- Bases, exemples des bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. (★) Existence et unicité de la décomposition dans une base donnée.

Familles infinies de vecteurs.

Extension des notions précédentes. Famille à support fini. (★) La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre ssi $\forall J \subset I$ fini $(x_i)_{i \in J}$ est libre.

Somme de sous-espaces vectoriels.

Somme de sev. $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$. Somme de n sev. Somme directe. (★) F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0\}$.

Somme directe de n sev. Les sev $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe ssi $\forall i \in [[2, n]], F_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} F_j = \{0\}$.

Dimension d'un espace vectoriel

Construction de bases.

Notion de dimension finie. (★) Existence de base dans un ev de dimension finie. Théorème de la base extraite. (★) Théorème de la base incomplète (ou complétion en base).

★ ★ ★ ★ ★