Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$) sur le chapitre 29 : Fonctions de deux variables. Les exercices portent sur le chapitre 29 : Fonctions de deux variables.

Topologie de $\mathbb{R}^2$.

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique. Boules ouvertes, fermées. Parties ouvertes, fermées. ($\star$) Toute boule ouverte est ouverte. Toute boule fermée est fermée. Notion de limite dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathbb{N}}$ et $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, il y a équivalence $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \iff x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \wedge y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$. Continuité de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $C(\Omega,\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un sev et un sous-anneau de $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$.

Différentiation, dérivation dans $\mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles, notations $\partial_1 f(a), \partial_x f(a), \partial_2 f(a), \partial_y f(a)$. Règles opératoires. Notion de fonction C^1 via la continuité des dérivées partielles. ($\star$) Si f est de classe C^1 sur Ω, alors pour tout point (x_0, y_0) de Ω, on a le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $(0,0)$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o(\|(h,k)\|)$$

Notion de gradient, expression du DL1 à l'aide du gradient. Dérivée directionnelle, règles opératoires, expression à l'aide du gradient. Le gradient est la direction de plus grande croissance. Plan tangent à une surface $z = f(x, y)$. Notion de différentielle de f en a, définie comme $(h,k) \mapsto \partial_1 f(a)h + \partial_2 f(a)k$. Unicité de la différentielle sous réserve d'existence. Expression de la différentielle à l'aide du gradient et des dérivées directionnelles.

Dérivation de composées.

Notion d'arc à valeurs dans Ω. ($\star$) Règle de la chaîne (V1) : pour f de classe C^1 sur Ω et $\gamma = (x, y)$ arc C^1 tracé sur Ω, $f \circ \gamma$ est de classe C^1 et $\forall t \in I, (f\circ\gamma)'(t) = \partial_1 f(\gamma(t))x'(t) + \partial_2 f(\gamma(t))y'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$. Orthogonalité du gradient aux lignes de niveau. Règle de la chaîne (V2) : soit $\varphi : O \to \mathbb{R}$ et $\psi : O \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Im}(\varphi,\psi) \subset \Omega$ et f de classe C^1 sur Ω, alors $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe C^1 sur O et pour tout (u, v) dans O

$$\partial_1 g(u,v) = \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_1\varphi(u,v) + \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_1\psi(u,v)$$

$$\partial_2 g(u,v) = \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_2\varphi(u,v) + \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_2\psi(u,v)$$

Optimisation dans $\mathbb{R}^2$

Notion d'extremum global, local. ($\star$) Soit f de classe C^1 sur Ω ouvert, $a \in \Omega$. Si f présente un extremum local en a, alors $\nabla(f)(a) = 0$.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star$