Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^{2n} - (2\cos n\theta)\,\mathrm{X}^n + 1$.

1° *a*) P_n est un polynôme de degré $2n$ à coefficients réels.

Déterminons, pour le factoriser dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, ses racines *dans* $\mathbb{C}$; ce sont les $2n$ racines (distinctes ou non) de l'équation *d'inconnue complexe* z :

$$z^{2n} - (2\cos n\theta)\,z^n + 1 = 0 \qquad (1)$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire $y = z^n$. Le système :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} z^{2n} - (2\cos n\theta)\,z^n + 1 = 0 & (1) \\ y = z^n & (2) \end{cases}$$

est équivalent à :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} y = z^n & (2) \\ y^2 - (2\cos n\theta)\,y + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) a pour discriminant réduit $\Delta' = \cos^2 n\theta - 1 = -\sin^2 n\theta$ c'est-à-dire $\Delta' = (i\sin n\theta)^2$.

(3) a deux racines complexes conjuguées :

$$y' = \cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta}$$
$$y'' = \cos n\theta - i \sin n\theta = e^{-in\theta}$$

$\Bigg($ces racines sont réelles, et l'on a alors $y' = y''$, si et seulement si $\sin n\theta = 0$ ou encore $\theta = \dfrac{\lambda\pi}{n}, \lambda \in \mathbb{Z}\Bigg)$.

L'ensemble S des racines de l'équation (1) est la réunion de l'ensemble S_1 des solutions de l'équation :

$$z^n = e^{in\theta} \qquad \text{(a)}$$

et de l'ensemble S_2 des solutions de l'équation :

$$z^n = e^{-in\theta} \qquad \text{(b)}$$

Remarquons que $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$. Les solutions de (a) sont les n racines n-ièmes de $e^{in\theta}$. Puisque l'une d'elles est $e^{i\theta}$, on les obtient toutes en calculant les produits de $e^{i\theta}$ par chacune des n racines n-ièmes de l'unité :

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$$

D'où l'ensemble $S_1 = \left\{z_k\, e^{i\theta} \,\middle|\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$.

Puisque $e^{-in\theta} = (e^{-i\theta})^n$, l'ensemble des solutions de (b) est :

$$S_2 = \left\{z_k\, e^{-i\theta} \,\middle|\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$$

Tenant compte de l'équivalence :

$$z^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow \overline{z^n} = \overline{\left(e^{in\theta}\right)} \Leftrightarrow \left(\overline{z}\right)^n = e^{-in\theta}$$

On peut écrire : z est solution de (a) $\Leftrightarrow$ $\overline{z}$ est solution de (b).

Les solutions de (b) sont les nombres complexes conjugués des éléments de S_1, ce qui permet de décrire S_2. Comme suit :

$$S_2 = \left\{\overline{z_k}\, e^{-i\theta} \middle| k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$$

On obtient :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{S} = \left\{z_k\, e^{i\theta} \middle| k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\} \cup \left\{z_k\, e^{-i\theta} \middle| k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\} \\ \\ \textbf{ou} \\ \\ \mathbf{S} = \left\{z_k\, e^{i\theta} \middle| k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\} \cup \left\{\overline{z_k}\, e^{-i\theta} \middle| k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\} \end{array}}$$

Si $\theta = \dfrac{\lambda \pi}{n}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ alors $y' = y''$ et par suite $S_1 = S_2$: P_n a donc n racines doubles.

Chacune des racines de P_n a pour module 1 : $|z_k\, e^{i\theta}| = |z_k|\, |e^{i\theta}| = 1$ car $|z_k| = 1$ et $|e^{i\theta}| = 1$.

P_n, qui est normalisé, est le produit de $2n$ binômes normalisés de $\mathbb{C}[X]$. Chacun d'eux est irréductible.

D'après la 1re formulation de S on obtient :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left[(X - z_k\, e^{i\theta})\, (X - z_k\, e^{-i\theta})\right]$$

Puisque $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $z_k\, e^{i\theta} = e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ et $z_k\, e^{-i\theta} = e^{i\left(-\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}$. D'où la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

$$\boxed{\mathbf{P}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(\mathbf{X} - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\left(\mathbf{X} - e^{i\left(-\theta + \frac{2i\pi}{n}\right)}\right)\right]} \qquad \text{(A)}$$

La seconde forme de S conduit à :

$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(\mathrm{X} - z_k\, e^{i\theta}\right) \left(\mathrm{X} - \overline{z_k}\, e^{-i\theta}\right) \right]$$

$$\left(\mathrm{X} - z_k\, e^{i\theta}\right) \left(\mathrm{X} - \overline{z_k}\, e^{-i\theta}\right) = \mathrm{X}^2 - \left(z_k\, e^{i\theta} + \overline{z_k\, e^{i\theta}}\right) \mathrm{X} + \underbrace{z_k\, \overline{z_k}}_{1}\, \underbrace{e^{i\theta}\, e^{-i\theta}}_{1}$$

Puisque $z_k\, e^{i\theta} = e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \cos\left(\theta + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\theta + \dfrac{2k\pi}{n}\right)$,

$z_k\, e^{i\theta} + \overline{z_k\, e^{i\theta}} = 2 \cos\left(\theta + \dfrac{2k\pi}{n}\right)$.

On a donc :

$$\boxed{\mathbf{P}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left[\mathbf{X}^2 - 2\, \mathbf{X} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right]} \qquad \textbf{(B)}$$

Puisque chaque élément de S a pour module 1, P_n ne peut avoir pour racine réelle que 1 ou -1 :

1 est racine de $\mathrm{P}_n \iff 1 - 2 \cos n\theta + 1 = 0 \iff \cos n\theta = 1$

-1 est racine de $\mathrm{P}_n \iff 1 - 2\,(-1)^n \cos n\theta + 1 = 0 \iff \begin{cases} \cos n\theta = 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ \cos n\theta = -1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

Donc si n est pair et si $\theta = \dfrac{2\lambda\pi}{n}$ (avec $\lambda \in \mathbb{Z}$), 1 et -1 sont racines de P_n (chacune d'elles est double).

Si n est impair P_n a pour racine double 1 lorsque $\theta = \dfrac{2\lambda\pi}{n}$, pour racine double -1 lorsque $\theta = \dfrac{(2\lambda+1)\pi}{n}$ $(\lambda \in \mathbb{Z})$.

Lorsque P_n n'a pas de racine réelle, chacun des trinômes $\mathrm{X}^2 - 2\,\mathrm{X} \cos\left(\theta + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + 1$ à coefficients réels est irréductible dans $\mathbb{R}\,[\mathrm{X}]$ et (B) *est la factorisation de P_n en un produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}\,[X]$.*

Si 1 (resp. -1) est racine de P_n l'un de ces trinômes prend la forme $(X-1)^2$ $\left(\text{resp. } (X+1)^2\right)$. (B) donne encore la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, l'un des facteurs premiers étant $(X-1)$ $\left(\text{resp. } (X+1)\right)$ affecté de l'exposant 2.

b) On a vu que :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left[(X - z_k e^{i\theta})(X - z_k e^{-i\theta})\right]$$

$$(X - z_k e^{i\theta})(X - z_k e^{-i\theta}) = X^2 - z_k \underbrace{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}_{2\cos\theta} X + (z_k)^2 \underbrace{e^{i\theta} e^{-i\theta}}_{1}$$

On peut donc écrire :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left[X^2 - 2(z_k \cos\theta) X + (z_k)^2\right]$$

Remarquons que les coefficients des trinômes du second degré $X^2 - 2(z_k \cos\theta) X + (z_k)^2$ ne sont généralement pas réels.

De l'égalité ci-dessus il résulte :

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad z^{2n} - (2\cos n\theta) z^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left[z^2 - 2(z_k \cos\theta) z + (z_k)^2\right]$$

En remplaçant z par 1 on a :

$$1 - 2\cos n\theta + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 2 z_k \cos\theta + z_k^2)$$

et par suite :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 - 2 z_k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos n\theta)}$$

2° *a*) • Reprenons la factorisation (B).

Si $k = 0$ alors $X^2 - 2\,X\cos\left(\theta + \dfrac{2\,k\pi}{n}\right) + 1 = X^2 - 2\,X\cos\theta + 1$.

Il en résulte :

$$P_n = (X^2 - 2\,X\cos\theta + 1) \times \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1}\left[X^2 - 2\,X\cos\left(\theta + \frac{2\,k\pi}{n}\right) + 1\right]}_{\substack{\text{produit de } n-1 \text{ trinômes} \\ \text{à coefficients réels, donc} \\ \text{élément de } \mathbb{R}\,[X]}}$$

Dans $\mathbb{R}\,[X]$, P_n *est divisible par* $P_1 = X^2 - 2\,X\cos\theta + 1$.

• Si n est pair, $\dfrac{n}{2}$ est un entier de l'intervalle $[0, n-1]$.

Lorsque $k = \dfrac{n}{2}$, $\cos\left(\theta + \dfrac{2\,k\pi}{n}\right) = \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

et l'on a $X^2 - 2\,X\cos\left(\theta + \dfrac{2\,k\pi}{n}\right) + 1 = X^2 + 2\,X\cos\theta + 1$.

Dans $\mathbb{R}\,[X]$, *lorsque* n *est pair* P_n *est divisible par* $X^2 + 2\,X\cos\theta + 1$.

b) • Soit deux éléments m et n de $\mathbb{N}^*$. m divise $n \iff \exists q \in \mathbb{N}^*,\ n = mq$.

Utilisons la factorisation (B) pour exprimer chacun des polynômes P_n et P_m :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left[X^2 - 2\,X\cos\left(\theta + \frac{2\,k\pi}{n}\right) + 1\right]$$

$$P_m = \prod_{\lambda=0}^{m-1}\left[X^2 - 2\,X\cos\left(\theta + \frac{2\,\lambda\pi}{m}\right) + 1\right]$$

Si $n = mq$ on a $[\![0, n-1]\!] = [\![0, mq-1]\!]$. Cet ensemble contient les entiers 0, q, $2\,q$, …, $(m-1)\,q$, c'est-à-dire les entiers λq où λ décrit $[\![0, n-1]\!]$.

Lorsque $k = \lambda q$ on peut écrire :

$$\theta + \frac{2k\pi}{n} = \theta + \frac{2\lambda q\pi}{mq} = \theta + \frac{2\lambda\pi}{m}$$

Chacun des polynômes $X^2 - 2X\cos\left(\theta + \frac{2\lambda\pi}{m}\right) + 1$ avec $\lambda \in [\![0, m-1]\!]$ figure donc dans la décomposition de P_n.

Il existe par suite un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = P_m \times Q$.

Si m divise n alors P_m divise P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarques : 1) Cette propriété généralise la propriété « P_1 divise P_n » établie en *a*).

2) Les réels $\frac{2\lambda\pi}{m}$ où λ décrit $[\![0, m-1]\!]$ sont les arguments respectifs des m racines m-ièmes de l'unité. Or toute racine m-ième de 1 est solution de l'équation $z^m = 1$. Il en résulte $(z^m)^q = 1^q = 1$ c'est-à-dire $z^{mq} = 1$ ou encore $z^n = 1$.

Si m divise n l'ensemble $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\}$ des racines m-ièmes de l'unité est inclus dans l'ensemble $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ des racines n-ièmes de 1 : on peut par ce procédé *établir la propriété 2°, b).*

3° • Soit $A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone régulier convexe de n côtés. Il est inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon R. Soit I_1 le point défini par $\overrightarrow{OI_1} = \frac{1}{R}\overrightarrow{OA_1}$:

$$\left\|\overrightarrow{OI_1}\right\| = \left\|\frac{1}{R}\overrightarrow{OA_1}\right\| = \frac{1}{R}\left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| = \frac{1}{R} \times R = 1$$

Le vecteur $\vec{i} = \overrightarrow{OI_1}$ est donc un vecteur unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{OA_1}$ et de même sens que lui. Le cercle (Γ) de centre O passant par I_1, a pour rayon 1.

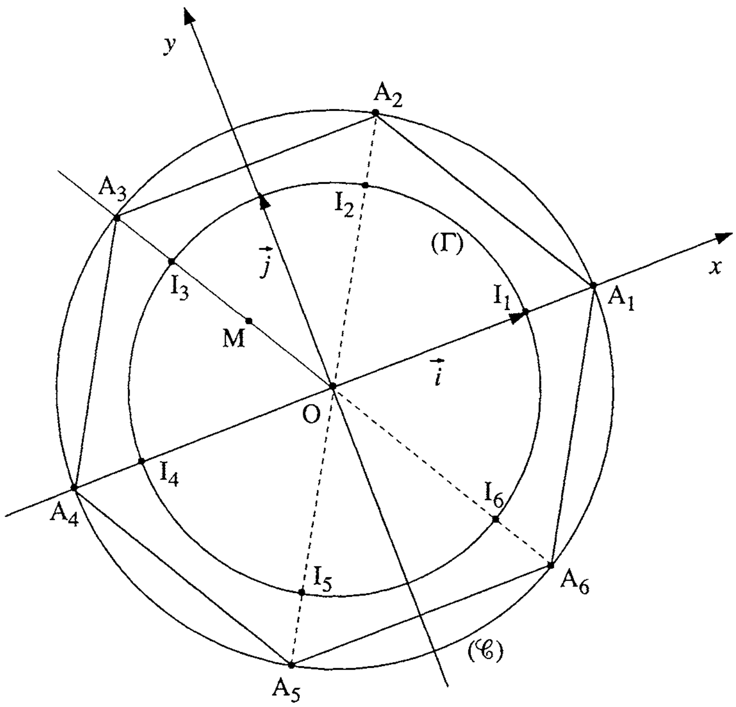
L'homothétie H de centre O et de rapport $\frac{1}{R}$ transforme le cercle ($\mathscr{C}$) en (Γ) et chacun des sommets $A_1, A_2, \ldots, A_n$ du polygone respectivement en $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

$I_1 I_2 \dots I_n$ est un polygone régulier convexe homothétique du polygone initial, et inscrit dans le cercle (Γ).

Si l'on oriente le plan au moyen du repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points I_1, I_2, ..., I_n sont les images des n racines n-ièmes de l'unité. I_1 a pour affixe $z_0 = 1$ et on peut choisir $\vec{j}$ (qui détermine l'orientation) de sorte que I_2 ait pour affixe $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ $\left(\widehat{\left(\overrightarrow{OI_1}, \overrightarrow{OI_2}\right)} \text{ a pour mesure } \frac{2\pi}{n} \bmod 2\pi\right)$.

$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a alors pour image I_{k+1}.

Soit M un point situé sur la demi-droite d'origine O passant par l'un des sommets A_k du polygone (M peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$. Sur la figure faite dans le cas où le polygone a 6 côtés, M est sur la demi-droite OA_3).



La propriété à démontrer fait intervenir les normes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MA_2}$, ..., $\overrightarrow{MA_n}$ ou encore les modules de leurs affixes respectives.

Soit z l'affixe de M. Ce point appartient à la demi-droite OA_k si, et seulement si, *il existe un réel positif a tel que* $\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{OA_k} = aR\,\overrightarrow{OI_k}$.

D'après ce qui précède, I_k a pour affixe z_{k-1}, donc *M a pour affixe* $z = aRz_{k-1}$.

La distance OM est le module de z_n, soit $aR\,|z_{k-1}|$; et l'on a :

$$(OM)^n = a^n\,R^n\,|z_{k-1}|^n = a^n\,R^n\,|z_{k-1}^n|. \text{ (Par hypothèse } a \geqslant 0.)$$

z_{k-1} étant une racine n-ième de l'unité, $z_{k-1}^n = 1$.

Il en résulte $|(OM)^n - R^n| = |a^n\,R^n - R^n| = R^n\,|a^n - 1|$ $\quad(\alpha)$.

$\overrightarrow{MA_1}$, …, $\overrightarrow{MA_n}$ ont pour affixes $Rz_0 - z$, …, $Rz_{n-1} - z$ puisque $\overrightarrow{OA_1} = R\,\overrightarrow{OI_1}$, …, $\overrightarrow{OA_n} = R\,\overrightarrow{OI_n}$.

$$\left\|\overrightarrow{MA_1}\right\| = |Rz_0 - z| = |Rz_0 - aRz_{k-1}| = R\,|z_0 - az_{k-1}|$$

On en déduit :

$$MA_1 \times \ldots \times MA_n = R\,|z_0 - az_{k-1}| \times \ldots \times R\,|z_{n-1} - az_{k-1}|$$

$MA_1 \times \ldots \times MA_n = R^n\,|(z_0 - az_{k-1}) \times \ldots \times (z_{n-1} - az_{k-1})|$ d'après les propriétés du module d'un produit ou encore :

$$MA_1 \times \ldots \times MA_n = R^n\,|(az_{k-1} - z_0) \times \ldots \times (az_{k-1} - z_{n-1})| \qquad (\beta).$$

L'égalité à établir est, d'après (α) et (β), équivalente à :

$$|a^n - 1| = |(az_{k-1} - z_0)\ \ldots\ (az_{k-1} - z_{n-1})| \qquad (\gamma)$$

Or si $\theta = 0$ alors $P_n = X^{2n} - 2\,X^n + 1 = (X^n - 1)^2$ car $n\theta = 0 \Rightarrow \cos n\theta = 1$.

Les racines de P_n sont, chacune avec pour ordre de multiplicité 2, les racines n-ièmes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ de l'unité et P_n a pour factorisation dans $\mathbb{C}\,[X]$:

$$P_n = (X^n - 1)^2 = (X - z_0)^2\,(X - z_1)^2 \ldots (X - z_{n-1})^2$$
$$\forall z \in \mathbb{C},\quad (z^n - 1)^2 = (z - z_0)^2\,(z - z_1)^2 \ldots (z - z_{n-1})^2$$

Dans le cas où $z = az_{k-1}$ on obtient :

$$(a^n z_{k-1}^n - 1)^2 = [(az_{k-1} - z_0)\,(az_{k-1} - z_1)\,\ldots\,(az_{k-1} - z_{n-1})]^2$$

1

Les deux nombres complexes figurant respectivement au premier membre et au second membre de cette égalité ont même module.

Or $|(a^n - 1)^2| = |a^n - 1|^2$ et :

$$|[(az_{k-1} - z_0)\,(az_{k-1} - z_1)\,\ldots\,(az_{k-1} - z_{n-1})]^2|$$

$$= |(az_{k-1} - z_0)\,(az_{k-1} - z_1)\,\ldots\,(az_{k-1} - z_{n-1})|^2$$

Les modules étant des réels positifs, s'ils ont même carré ils sont égaux, et l'égalité (γ) est vérifiée.

Exercice 2

$k = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. n est un entier naturel donné.

$K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$ de dimension égale à $n + 1$.

1° Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n + 1$ éléments distincts de K et L le produit des binômes de degré 1 : $X - a_0, X - a_1, \ldots, X - a_n$.

L est un polynôme de degré $n + 1$ que l'on peut noter $L = \prod_{i=0}^{n} (X - a_i)$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En supprimant dans le produit précédent le facteur $X - a_k$ on obtient le quotient (exact) de la division de L par $X - a_k$. *Le polynôme L_k* — que l'on peut désigner par $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$ — *a pour degré n et $L_k \in K_n[X]$.*

La fonction polynôme associée $\tilde{L}_k$ est nulle en a_i lorsque $i \neq k$ et prend en a_k la valeur $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)$. Ce produit est non nul puisque chaque facteur $a_k - a_i$ est, lorsque $i \neq k$, différent de 0.

Avec les conventions de notation faites lorsque le corps est infini
On écrira :

Si $i \neq k$ alors $L_k (a_i) = 0$; et $L_k (a_k) \neq 0$.

Puisque $K_n [X]$ a pour *dimension $n+1$,* la famille des $n+1$ polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$ est une base de $K_n [X]$ si, et seulement si, *elle est libre,* c'est-à-dire :

Quels que soient les éléments $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de K on a :

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0 \qquad (1)$$

Pour que le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$ soit le polynôme nul il faut et il suffit que, pour tout x de K, $P(x) = 0$.

Il est donc *nécessaire* que $P(a_k) = 0$ pour tout k de $[\![0, n]\!]$.

Or $P(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(a_k) = \alpha_k L_k(a_k)$

car si $i \neq k$, $L_i(a_k) = 0$.

$P(a_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k L_k(a_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = 0$ car $L_k(a_k) \neq 0$.

Donc $P = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. (Et il est évident que si $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ alors P est le polynôme nul.)

La famille libre $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ formée de $n+1$ polynômes de $K_n [X]$ est donc une base de $K_n [X]$.

2° Tout polynôme P de $K_n[X]$ est donc caractérisé par ses $n+1$ coordonnées $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ et l'on a : $P = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n$.

$$P(a_k) = b_k \Leftrightarrow \alpha_k L_k(a_k) = b_k$$

En effet si $i \neq k$ alors $L_i(a_k) = 0$.

Puisque $L_k(a_k) \neq 0$, $P(a_k) = b_k \Leftrightarrow \alpha_k = \dfrac{b_k}{L_k(a_k)}$.

Les α_k ($k \in [\![0, n]\!]$) étant déterminés de manière unique, il existe un polynôme P et un seul dans $K_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(a_k) = b_k$. Il est défini par l'égalité :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{L_k(a_k)} L_k} \qquad \text{(I)}$$

Si l'on désigne par E_k le polynôme de degré n tel que :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{L_k(a_k)} L_k = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}}$$

les polynômes $E_0, E_1, \ldots, E_n$ forment également une base de $K_n[X]$ et le polynôme P cherché s'écrit :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} b_k E_k} \qquad \text{(II)}$$

Remarque : la formule (I) $\big($ou (II)$\big)$ définissant le polynôme P de $K_n[X]$ tel que $P(a_k) = b_k$ pour tout k de $[\![0, n]\!]$ est la *formule d'interpolation de Lagrange* et les polynômes E_k sont les polynômes de Lagrange associés à $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Ceci permet, en analyse, de déterminer une fonction polynôme $\tilde{P}$ qui coïncide avec une fonction f de K dans K en $n+1$ points $a_0, a_1, \ldots, a_n$, c'est-à-dire telle que :

$$\left(\forall k \in [\![0, n]\!]\right)\ \tilde{P}(a_k) = f(a_k) \quad \big(\text{ce qu'on écrit aussi } P(a_k) = f(a_k)\big)$$

3° Écrivons la division euclidienne du polynôme S de $\mathbb{R}[X]$ par le polynôme $B = (X-1)X(X+1)(X+2)$.

$$\begin{cases} S = BQ + R \\ \text{et} \\ d^0(R) < d^0(B). \end{cases}$$

Les deux polynômes Q et R sont le quotient et le reste de cette division.

Puisque $d^0(B) = 4$ la condition $d^0(R) < d^0(B)$ peut être remplacée par : $R \in \mathbb{R}_3[X]$.

Le reste de la division de S par $X-a$ ($a \in \mathbb{R}$) est égal à $S(a)$.

D'autre part $S(a) = B(a)\,Q(a) + R(a)$.

Or *si* $a \in \{-2, -1, 0, 1\}$ alors $B(a) = 0$ et $S(a) = R(a)$.

R est donc *le* polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ caractérisé par : $R(1) = 1$; $R(0) = 2$; $R(-1) = -1$; $R(-2) = 3$.

On peut, pour déterminer R, utiliser la formule d'interpolation de Lagrange.

Ici $n = 3$; $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 0, -1, -2)$ et $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (1, 2, -1, 3)$.

On a donc :

$L_0 = X(X+1)(X+2)$ et $L_0(1) = 6$ d'où $E_0 = \frac{1}{6}X(X+1)(X+2)$

$L_1 = (X-1)(X+1)(X+2)$ et $L_1(0) = -2$ d'où $E_1 = -\frac{1}{2}(X-1)(X+1)(X+2)$

$L_2 = (X-1)X(X+2)$ et $L_2(-1) = 2$ d'où $E_2 = \frac{1}{2}(X-1)X(X+2)$

$L_3 = (X-1)X(X+1)$ et $L_3(-2) = -6$ d'où $E_3 = -\frac{1}{6}(X-1)X(X+1)$

Par suite $R = b_0 E_0 + b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3$

c'est-à-dire :

$$R = \frac{X(X+1)(X+2)}{6} - (X-1)(X+1)(X+2) - \frac{(X-1)X(X+2)}{2} - \frac{1}{2}(X-1)X(X+1)$$

D'où :

$$R = \frac{1}{6}(X^3+3X^2+2X) - (X^3+2X^2-X-2) - \frac{1}{2}(X^3+X^2-2X) - \frac{1}{2}(X^3-X)$$

En ordonnant on obtient :

$$\boxed{\mathbf{R = -\frac{11}{6}X^3 - 2X^2 + \frac{17}{6}X + 2}}$$

Les polynômes S cherchés sont tous les polynômes.

$$\mathbf{S = (X-1)X(X+1)(X+2)Q + \left(-\frac{11}{6}X^3 - 2X^2 + \frac{17}{6}X + 2\right)}$$

où le polynôme Q décrit $\mathbb{R}[X]$.

(R est le polynôme obtenu lorsque Q = 0.)

Si nous avons traité la question 3° comme un exemple d'application de la formule d'interpolation de Lagrange on peut bien sûr également obtenir le polynôme R par la méthode des coefficients indéterminés.

$$R \in \mathbb{R}_3[X] \iff R = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

On détermine les 4 réels a, b, c, d en écrivant :

$$\begin{cases} R(1) = 1 \\ R(0) = 2 \\ R(-1) = -1 \\ R(-2) = 3 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ d = 2 \\ -a + b - c + d = -1 \\ -8a + 4b - 2c + d = 3 \end{cases}$$

Vous pourrez vérifier que la résolution de ce système conduit à l'unique solution $(a, b, c, d) = \left(-\frac{11}{6}, -2, \frac{17}{6}, 2\right)$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et le polynôme P_n défini par :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$$

(Par convention $0! = 1$ et $1! = 1$.)

Ayant tous ses coefficients réels, P_n peut être envisagé comme élément de $\mathbb{R}[X]$, ou comme élément de $\mathbb{C}[X]$.

1°
$$\left.\begin{array}{l} P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{X^k}{k!} \\ \text{et} \\ P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{n+1} - P_n = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit un polynôme D de $\mathbb{R}[X]$, diviseur commun à P_{n+1} et P_n. D divise la différence $P_{n+1} - P_n$ des deux polynômes, donc D divise X^{n+1}.

Or les diviseurs de X^{n+1} sont, à une constante multiplicative près non nulle, les monomes $1, X, X^2, \ldots, X^{n+1}$.

Soit Q_k et R_k le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de P_n par X^k ($k \in [\![1, n+1]\!]$) :

$$\begin{cases} P_n = X^k Q_k + R_k \\ \text{et} \\ d^0(R_k) < k \end{cases}$$

(on a évidemment $Q_{n+1} = 0$ et $R_{n+1} = P_n$).

Les fonctions polynomiales associées sont liées par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \tilde{P}_n(x) = x^k \tilde{Q}_k(x) + \tilde{R}_k(x)$$

On en déduit $\tilde{P}_n(0) = \tilde{R}_k(0)$

c'est-à-dire $1 = \tilde{R}_k(0)$

(car X^k a, par hypothèse, au moins pour degré 1).

Puisque $\tilde{R}_k(0) \neq 0$, le polynôme R_k n'est pas le polynôme nul, et X^k n'est pas un diviseur de P_n.

P_n et P_{n+1} n'ont pas d'autres diviseurs communs que les polynômes constants non nuls. Leur P.G.C.D. normalisé est 1.

P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

Ils sont également premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$

2° • Si $m = 0$ alors $P_n = 1$.

Le polynôme P_0, polynôme constant non nul, n'a pas de racine.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le polynôme P_n, de degré n, a dans $\mathbb{C}$ n racines (distinctes ou non).

Supposons que α ($\alpha \in \mathbb{C}$) soit une racine d'ordre 2 (au moins) de P_n :

$$\left(\begin{array}{l}\alpha \text{ est une racine} \\ \text{double (au moins) de } P_n\end{array}\right) \Leftrightarrow \tilde{P}_n(\alpha) = \tilde{P}'_n(\alpha) = 0 \qquad (1)$$

De l'égalité $P_n = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^k}{k!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}$.

On déduit :

$$P'_n = 1 + \frac{2X}{2!} + \ldots + \frac{kX^{k-1}}{k!} + \ldots + \frac{nX^{n-1}}{n!}$$

or $k! = k \times (k-1)!$ si $k \in \mathbb{N}^*$.

Donc $P'_n = 1 + X + \ldots + \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}$.

(1) $\Leftrightarrow$ α est une racine commune à P_n et P_{n-1}

$\Leftrightarrow$ $X - \alpha$ est un diviseur commun à P_n et P_{n-1}.

Or P_n et P_{n-1} sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ et n'ont pas de diviseur commun de degré 1.

- *Remarque :* on peut aussi appliquer le théorème de Bezout.

$P_n \wedge P_{n-1} = 1 \Rightarrow \left(\exists (U, V) \in (\mathbb{C}[X])^2\right) UP_n + VP_{n-1} = 1$

Quel que soit le complexe α, $\tilde{U}(\alpha)\tilde{P}_n(\alpha) + \tilde{V}(\alpha)\tilde{P}_{n-1}(\alpha) = 1$ et il est impossible que $\tilde{P}_n(\alpha) = \tilde{P}_{n-1}(\alpha) = 0$.

P_n n'a donc pas de racine multiple.

Conclusion : P_n a n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

3° Déterminons le nombre de racines réelles de P_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

- Commençons par étudier les premières valeurs de n.

Le polynôme $P_1 = 1 + X$ *a une racine,* -1, qui est *réelle*.

Le polynôme $P_2 = 1 + X + \frac{X^2}{2}$, de degré 2, a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{2}$.

$\Delta < 0$ donc *P_2 n'a pas de racine réelle* (ses deux racines sont des éléments conjugués de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$).

Pour étudier $P_3 = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$, on peut remarquer que $P'_3 = P_2$.

Or $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0$.

La fonction $\tilde{P}_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ a donc une dérivée strictement positive.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\tilde{P}_3'(x) = \tilde{P}_2(x)$		$+$	
$\tilde{P}_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \tilde{P}_3(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{6} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tilde{P}_3(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{6} = -\infty$$

$\tilde{P}_3$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\tilde{P}_3(\mathbb{R})$.

L'étude de variation montre que $\tilde{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$\tilde{P}_3$ est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Par suite, 0 a un antécédent et un seul, x_1, dans $\mathbb{R}$.

P_3 a une racine réelle et une seule, x_1.

On étudierait de même P_4 sachant que $P_4' = P_3$.

- Ceci suggère une méthode — le raisonnement par récurrence — et un résultat :

Si n est impair P a une racine réelle et une seule.
Si n est pair P_n n'a pas de racine réelle.

On peut formuler comme suit la propriété $\mathcal{P}(k)$ dont nous voulons montrer qu'elle est vraie pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$.

$$\mathcal{P}(k) : \begin{cases} P_{2k-1} & \text{a une racine réelle et une seule} \\ \text{et} & \\ P_{2k} & \text{n'a pas de racine réelle.} \end{cases}$$

- L'étude préliminaire de P_1 et P_2 a établi que *$\mathcal{P}(1)$ est vraie.*

- Montrons que *si $\mathcal{P}(k)$ est vraie alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.*

Les polynômes P_{2k+1} et P_{2k+2} ont respectivement pour polynômes dérivés P_{2k} et P_{2k+1}.

D'après l'hypothèse de récurrence P_{2k} n'a pas de racine réelle.

La fonction $\tilde{P}_{2k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ est continue (comme toute fonction polynôme) et ne s'annule pas ; par suite elle garde toujours le même signe et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \tilde{P}_{2k}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} = +\infty$ on a :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ \tilde{P}_{2k}(x) > 0$$

On peut aussi remarquer que $\tilde{P}_{2k}(0) = 1$, ce qui entraîne, $\tilde{P}_{2k}$ gardant le même signe : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \tilde{P}_{2k}(x) > 0$.

La fonction $\tilde{P}_{2k+1}$, dont la dérivée $\tilde{P}_{2k}$ est strictement positive, est strictement croissante :

$$\lim_{x \to +\infty} \tilde{P}_{2k+1}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tilde{P}_{2k+1}(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\infty$$

x	$-\infty$		x_k		$+\infty$
$\tilde{P}_{2k}(x)$		$+$		$+$	
$\tilde{P}_{2k+1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction $\tilde{P}_{2k+1}$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\tilde{P}_{2k+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Il existe donc un réel x_k.

et un seul pour lequel $\tilde{P}_{2k+1}(x_k) = 0$.

$\tilde{P}_{2k+1}$ a une racine réelle et une seule x_k (a).

Du tableau précédent on déduit le signe de $\tilde{P}_{2k+1}$, dérivée de $\tilde{P}_{2k+2}$ et le tableau de variations de $\tilde{P}_{2k+2}$.

x	$-\infty$		x_k		$+\infty$
$\tilde{P}_{2k+1}(x)$		$-$	0	$+$	
$\tilde{P}_{2k+2}(x)$		↘	$\tilde{P}_{2k+2}(x_k)$	↗	

On voit que $\tilde{P}_{2k+2}$ a un minimum strict égal à $\tilde{P}_{2k+2}(x_k)$.

De l'égalité $P_{2k+2} = P_{2k+1} + \dfrac{X^{2k+2}}{(2k+2)!}$ il résulte :

$$\tilde{P}_{2k+2}(x_k) = \underbrace{\tilde{P}_{2k+1}(x_k)}_{0} + \frac{(x_k)^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

x_k est non nul $\left(\tilde{P}_{2k+1}(0) = 1 \text{ donc } 0 \text{ n'est pas racine}\right)$.

Donc $(x_k)^{2k+2} > 0$ et $\tilde{P}_{2k+2}(x_k) > 0$.

La fonction $\tilde{P}_{2k+2}$ est donc strictement positive.

P_{2k+2} n'a pas de racine réelle (b).

De (a) et (b) on déduit que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

- La propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k = 1$, et se transmet d'un entier à son successeur. Elle est donc vraie pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel donné et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n (y compris le polynôme nul).

$\mathbb{R}_n[X]$ est donc l'ensemble des polynômes $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels quelconques.

Nous avons vu que $\mathbb{R}_n$ *[X] est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}$ *[X]* des polynômes à coefficients réels.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n$ *[X] a pour base la famille de monômes* $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ *et pour dimension* $n + 1$.

Les coefficients a_0, a_1, ..., a_n sont les *coordonnées du polynôme P* dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

1° • Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si Φ est une *application linéaire* de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ *dans lui-même.*

- Il ne faut donc pas oublier d'établir au préalable que Φ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ *dans* $\mathbb{R}_n[X]$.

  Si P est un polynôme à coefficients réels il va de soi que les polynômes dérivés P′ et P″ sont à coefficients réels : *$\Phi(P)$ est donc élément de $\mathbb{R}[X]$. Étudions le degré de $\Phi(P)$.*

- Lorsque P est le polynôme nul alors $P' = P'' = 0$ et l'on a $\Phi(P) = 0$.

- Si P est un polynôme constant non nul, $P' = P'' = 0$ et $\Phi(P) = pqP$ est un polynôme constant.

- Si P a pour degré 1, P′ est un polynôme constant non nul et P″ est nul. XP′ et P ont pour degré 1, par suite $\Phi(P) = -(p + q - 1) \times P' + pqP$ a au plus pour degré 1 s'il n'est pas nul.

- Si $d^0(P) = n$ avec $n \geqslant 2$ alors $d^0(P') = n - 1$ et $d^0(P'') = n - 2$.

  Toute combinaison linéaire des trois polynômes de degré n X^2P'', XP′ et P est soit le polynôme nul, soit un polynôme dont le degré est au plus égal à n.

  $\Phi(P)$ est donc élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

- *Pour que l'application Φ soit linéaire il faut et il suffit que :*

$$\begin{cases} (\forall P_1 \in \mathbb{R}_n[X])\ (\forall P_2 \in \mathbb{R}_n[X]) & \Phi(P_1 + P_2) = \Phi(P_1) + \Phi(P_2) \quad \text{(a)} \\ (\forall P \in \mathbb{R}_n[X])\ \ (\forall \alpha \in \mathbb{R}) & \Phi(\alpha P) = \alpha\Phi(P) \quad \text{(b)} \end{cases}$$

- D'après les propriétés de la dérivation des polynômes on a $(P_1 + P_2)' = P_1' + P_2'$ et par suite $(P_1 + P_2)'' = P_1'' + P_2''$.

Il en résulte :

$$\begin{aligned}\Phi(P_1+P_2) &= X^2(P_1+P_2)'' - (p+q-1)\,X(P_1+P_2)' + pq(P_1+P_2)\\ &= X^2(P_1''+P_2'') - (p+q-1)\,X(P_1'+P_2') + pq(P_1+P_2)\\ &= X^2P_1'' - (p+q-1)\,XP_1' + pqP_1 + X^2P_2'' - (p+q-1)\,XP_2' + pqP_2\\ &= \Phi(P_1) + \Phi(P_2)\end{aligned}$$

- De même pour tout réel α on a $(\alpha P)' = \alpha P'$ et $(\alpha P)'' = \alpha P''$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha P) &= X^2(\alpha P)'' - (p+q-1)\,X(\alpha P)' + pq(\alpha P)\\ &= X^2(\alpha P'') - (p+q-1)\,X(\alpha P') + pq(\alpha P)\\ &= \alpha\,[X^2P'' - (p+q-1)\,XP' + pqP]\end{aligned}$$

donc $\Phi(\alpha P) = \alpha\Phi(P)$.

Les conditions (a) et (b) étant vérifiées, Φ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

- *Remarque :* on peut aussi établir la linéarité de Φ en montrant que, pour tout couple (α, β) de réels, pour tout couple (P_1, P_2) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\Phi(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha\Phi(P_1) + \beta\Phi(P_2)$$

2° • *Cherchons l'image par Φ de chacun des éléments $1, X, X^2, \ldots, X^n$ de la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.*

- Si $P = 1$ alors $P' = P'' = 0$ et l'on a $\Phi(1) = pq$.

- Si $P = X$ alors $P' = 1$, $P'' = 0$.

$$\Phi(X) = -(p+q-1)\,X + pqX \Leftrightarrow (1-p-q+pq)\,X = \Phi(X)$$

- *Si $n \geqslant 2$ et si $k \in [\![2, n]\!]$* alors :

$$(X^k)' = kX^{k-1} \quad \text{et} \quad (X^k)'' = k(k-1)\,X^{k-2}$$

On a donc :

$$\Phi(X^k) = k(k-1)\,X^2X^{k-2} - (p+q-1)\,X(kX^{k-1}) + pqX^k$$
$$= [k(k-1) - k(p+q-1) + pq]\,X^k$$
$$\Phi(X^k) = [k^2 - k(p+q) + pq]\,X^k = (k-p)(k-q)\,X^k$$

Remarquons que, s'il a fallu étudier à part les monômes 1 et X ($k=0$ et $k=1$), l'expression de $\Phi(X^k)$ trouvée pour $k \geqslant 2$ recouvre aussi les deux cas $k=0$ et $k=1$.

En conclusion :

$$\boxed{\left(\forall k \in [\![0, n]\!]\right)\ \Phi\ (X^k) = [k^2 - k(p+q) + pq]\ X^k = (k-p)(k-q)\ X^k}$$

On constate que, sauf s'il existe dans $[\![0, n]\!]$ un entier k tel que $(k-p)(k-q)=0$, chaque monôme X^k a pour image un monôme de même degré.

3° • Soit, dans $\mathbb{R}_n[X]$, le polynôme P de coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$.

De l'égalité $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + \ldots + a_nX^n$ on déduit, Φ étant linéaire :

$$\boldsymbol{\Phi(P) = a_0\Phi(1) + a_1\Phi(X) + \ldots + a_k\Phi(X^k) + \ldots + a_n\Phi(X^n)}$$

ou encore

$$\boldsymbol{\Phi(P) = a_0pq + a_1(1-p)(1-q)\,X + \ldots + a_k(k-p)(k-q)\,X^k + \ldots + a_n(n-p)(n-q)\,X^n}$$

Les coordonnées de $\Phi(P)$ dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^k, \ldots, X^n)$ sont donc :

$$a_0\,pq,\ a_1(1-p)(1-q),\ a_2(2-p)(2-q),\ \ldots,\ a_k(k-p)(k-q),\ \ldots,\ a_n(n-p)(n-q)$$

• **Noyau de Φ.**

Ker Φ qui est, rappelons-le, un *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$ est caractérisé par :

P est élément du noyau Ker Φ $\Leftrightarrow$ $\Phi(P) = 0$.

Donc :

$$
\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \Phi \iff \begin{cases} a_0\, pq = 0 & (0) \\ a_1 (1-p)(1-q) = 0 & (1) \\ \quad \dots & \dots \\ a_k (k-p)(k-q) = 0 & (k) \\ \quad \dots & \dots \\ a_n (n-p)(n-q) = 0 & (n) \end{cases}
$$

Ce système à résoudre, d'inconnues réelles a_0, a_1, …, a_k, …, a_n, comporte $n+1$ équations notées (0), (1), …, (k), …, (n).

p et q sont deux entiers naturels distincts donnés et l'on peut sans nuire à la généralité de l'étude supposer que $p < q$.

Trois cas peuvent se présenter :

$$(1) \quad 0 \leqslant n < p < q$$

Ni p ni q n'est élément de $[\![0, n]\!]$. Par suite :

$$\left(\forall k \in [\![0, n]\!]\right) \ (k-p)(k-q) \neq 0$$

et l'on a $(k) \iff (k-p)(k-q)\, a_k = 0 \iff a_k = 0.$

$$\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \Phi \iff a_0 = a_1 = \dots = a_k = \dots = a_n = 0 \iff \mathrm{P} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{Ker}\ \boldsymbol{\Phi} = \{\mathbf{0}\}}$$

Remarquons que, le seul élément du noyau étant le polynôme nul, *l'application Φ est injective.*

$$(2) \quad 0 \leqslant p \leqslant n < q$$

L'équation (p) c'est-à-dire $a_p (p-p)(p-q) = 0$ est vérifiée quel que soit le réel a_p.

Si $k \neq p$ l'équation (k) est équivalente à $a_k = 0$.

Un élément P du noyau est donc caractérisé par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] - \{p\}, \quad a_k = 0$$

On peut choisir a_p arbitrairement.

Ker Φ est donc l'ensemble des polynômes $a_p X^P$ où a_p décrit $\mathbb{R}$.

X^P étant un élément non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des combinaisons linéaires de X^P est une droite vectorielle.

$$\boxed{\textbf{Ker } \Phi \textbf{ est la droite vectorielle de base } (\mathbf{X^P})}$$

(3) $0 \leqslant p < q \leqslant n$

L'équation (p) est vérifiée par tout réel a_p.

L'équation (q) est vérifiée quel que soit le réel a_q.

Si $k \notin \{p, q\}$ alors : $(k) \Leftrightarrow a_k = 0$.

Un élément P du noyau est alors caractérisé par :

$$\left(\forall k \in [\![0, n]\!] - \{p, q\}\right) \; a_k = 0$$

Ker Φ est l'ensemble des polynômes $a_p X^p + a_q X^q$ où a_p et a_q sont deux réels quelconques.

La famille (X^p, X^q) est génératrice du noyau. C'est une famille libre ($a_p X^p + a_q X^q = 0$ si et seulement si $a_p = a_q = 0$), et par conséquent une base du noyau.

$$\boxed{\textbf{Ker } \Phi \textbf{ est le plan vectoriel de base } (\mathbf{X^p}, \mathbf{X^q})}$$

- **Image de Φ.**

L'image de Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et l'on sait que *$\dim(\mathrm{Ker}\,\Phi) + \dim(\mathrm{Im}\,\Phi) = \dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$.*

Reprenons chacun des trois cas étudiés.

$$(1) \quad 0 \leqslant n < p < q$$

Le noyau a pour dimension 0 puisque $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$. Donc $\dim(\operatorname{Im} \Phi) = n + 1$.

Le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n + 1$ est $\mathbb{R}_n[X]$ lui-même.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Im}\ \boldsymbol{\Phi} = \mathbb{R}_n\,[\mathbf{X}] \\ \\ \textbf{L'application } \boldsymbol{\Phi} \textbf{ est surjective.}\end{array}}$$

Puisque dans ce cas Φ est aussi injective, *Φ est une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ sur lui-même.*

$$(2) \quad 0 \leqslant p \leqslant n < q$$

Puisque $\dim(\operatorname{Ker} \Phi) = 1$, on peut prévoir que *$\operatorname{Im} \Phi$ est un espace vectoriel de dimension n.*

$\operatorname{Im} \Phi$ est l'ensemble des polynômes $\Phi(P)$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires de $\Phi(1), \Phi(X), \ldots, \Phi(X^n)$.

$$\Phi(X^k) = (k - p)(k - q)\, X^k$$

On en déduit $\Phi(X^p) = 0$.

- *Si $n = 0$* (et donc $p = 0$), *$\operatorname{Im} \Phi$ ne contient que le polynôme nul.*

- *Si* $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\forall k \in [\![0, n]\!] - \{p\}$, $\Phi(X^k)$ est de la forme $\alpha_k X^k$ avec $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$.

  $\operatorname{Im}\Phi$ est donc engendrée par les n polynômes $\Phi(X^k)$ où k décrit $[\![0, n]\!] - \{p\}$, ou encore — chaque polynôme $\Phi(X^k)$ étant colinéaire à X^k sans être nul — par les n polynômes X^k ($k \in [\![0, n]\!] - \{p\}$).

  Or dans un espace vectoriel *de dimension n* ($n \neq 0$), toute famille génératrice de n *vecteurs* est une base.

  $\operatorname{Im} \Phi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant pour base $(1, X, \ldots, X^{p-1}, X^{p+1}, \ldots, X^n)$.

$$(3) \quad 0 \leqslant p < q \leqslant n$$

Ker Φ est un plan vectoriel et *dim (Im Φ)* $= (n+1) - 2 = n - 1$.

Dans ce cas $\Phi(X^p) = \Phi(X^q) = 0$.

- *Si $n = 1$* (et donc $p = 0$, $q = 1$), *Im Φ est le singleton $\{0\}$.*
- *Si $n > 1$* alors $\forall k \in [\![0, n]\!] - \{p, q\}$ on peut écrire $\Phi(X^k) = \alpha_k X^k$ où α_k est un réel non nul.

Im Φ est engendré par les $n - 1$ monômes X^k où k décrit $[\![0, n]\!] - \{p, q\}$.

Cette famille génératrice de $n - 1$ éléments est, puisque $\dim(\mathrm{Im}\,\Phi) = n - 1$, une base de l'image.

Im Φ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant pour base $(1, X, \ldots, X^{p-1}, X^{p+1}, \ldots, X^{q-1}, X^{q+1}, \ldots, X^n)$.

- **Remarques.** *a*) Pensez à utiliser la propriété *dim (Ker f) + dim (Im f) = dim E* lorsque f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie (ou plus généralement lorsque f est une application linéaire d'un e.v. E de dimension finie dans un autre espace vectoriel F).

Elle permet de prévoir la dimension de l'image quand on connaît le noyau (et vice versa), ou de contrôler les résultats obtenus si vous avez déterminé noyau et image indépendamment l'un de l'autre : si, par exemple, dans un espace vectoriel E de dimension 3 vous trouvez pour noyau et pour image d'un endomorphisme deux droites vectorielles, il faut vous inquiéter…

b) Dans le cas où $0 \leqslant p \leqslant n < q$ on a $\dim(\mathrm{Im}\,\Phi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - 1$. L'image est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

4° • $\mathbb{R}_3[X]$ a pour base $(1, X, X^2, X^3)$ et pour dimension 4.

L'application : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & X^2P'' - 2XP' + 2P \end{array}$ est l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_3[X]$

associé à p et q lorsque :

$$\begin{cases} p+q-1=2 \\ pq=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q=3 \\ pq=2 \end{cases} \Leftrightarrow (p,q)=(1,2)\ (\text{si}\, p<q)$$

D'après l'étude faite dans la question précédente dans le cas (3) (ici $0 < 1 < 2 < 3$) on peut dire que *Im Φ est l'espace vectoriel de base* $(1, X^3)$.

L'équation proposée :

$$X^2P'' - 2\,XP' + 2\,P = X^3 + \lambda X + 1 \qquad (I)$$

est équivalente à :

$$\Phi(P) = X^3 + \lambda X + 1 \qquad (II)$$

L'ensemble des solutions de (II) est l'ensemble des antécédents du polynôme $X^3 + \lambda X + 1$.

Pour que (II) ait des solutions *il faut et il suffit que* $X^3 + \lambda X + 1$ *soit élément de* $Im\,\Phi$, c'est-à-dire que $\lambda = 0$.

Donc *(I) a des solutions si et seulement si* $\lambda = 0$.

L'équation s'écrit alors :

$$X^2P'' - 2\,XP' + 2\,P = X^3 + 1 \Leftrightarrow \Phi(P) = X^3 + 1$$

Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$

alors :

$$\Phi(P) = a_0pq + a_1(1-p)(1-q)\,X + a_2(2-p)(2-q)\,X^2 + a_3(3-p)(3-q)\,X^3$$

ce qui donne, puisque $p = 1$ et $q = 2$:

$$\Phi(P) = 2\,a_0 + 2\,a_3X^3$$

$$\Phi(P) = X^3 + 1 \Leftrightarrow 2\,a_0 = 1 \text{ et } 2\,a_3 = 1 \Leftrightarrow a_0 = a_3 = \frac{1}{2}$$

On peut choisir arbitrairement a_1 et a_2.

En résumé :

Si $\lambda \neq 0$ l'équation $X^2P'' - 2XP' + 2P = X^3 + \lambda X + 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_3[X]$.   **Si $\lambda = 0$ l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des polynômes $P = \frac{1}{2} + a_1 X + a_2 X^2 + \frac{1}{2} X^3$ où (a_1, a_2) décrit $\mathbb{R}^2$.**

Exercice 5

1° Soit $B \in \mathbb{R}[X]^*$ et deux polynômes P_1 et P_2 à coefficients réels.

Le quotient Q_1 et le reste R_1 de la division de P_1 par B sont les deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ définis, *de manière unique*, par :

$$P_1 = BQ_1 + R_1 \ \boxed{\text{et}} \ d^0(R_1) < d^0(B) \qquad (I)$$

De même le couple (Q_2, R_2) — quotient et reste de la division de P_2 par B — est caractérisé par :

$$P_2 = BQ_2 + R_2 \ \boxed{\text{et}} \ d^0(R_2) < d^0(B) \qquad (II)$$

a) • *Si* $R_1 = R_2$ alors (I) et (II) $\Rightarrow$ $P_1 - P_2 = B(Q_1 - Q_2)$ et *$P_1 - P_2$ est multiple de B.*

• *Réciproquement s'il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_1 - P_2 = BQ$ (III)* alors :

$$\text{(II) et (III)} \Rightarrow P_1 = BQ + P_2 = B(Q + Q_2) + R_2$$

$Q + Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ *et si R_2 est le reste de la division de P_2 par B* on a $d^0(R_2) < d^0(B)$: le couple $(Q + Q_2, R_2)$ satisfait alors aux conditions *caractérisant* le quotient et le reste de la division de P_1 par B.

On a donc $Q + Q_2 = Q_1$ et $R_2 = R_1$.

b) • De (I) et (II) on déduit :

$$P_1 + P_2 = B(Q_1 + Q_2) + R_1 + R_2$$

Le polynôme $(P_1+P_2)-(R_1+R_2)$ est donc un multiple de B et d'après *a*) *les restes des divisions de P_1+P_2 et de R_1+R_2 par B sont égaux*. On peut de plus constater que :

$$d^0(R_1) < d^0(B) \quad \text{et} \quad d^0(R_2) < d^0(B) \Rightarrow d^0(R_1+R_2) < d^0(B)$$

R_1+R_2 est donc *le reste de la division de P_1+P_2 par B.*

- Comparons maintenant les restes des divisions par B de P_1P_2 et de R_1R_2. De (I) et (II) on déduit :

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= (BQ_1+R_1)(BQ_2+R_2) \\ &= B^2Q_1Q_2 + R_1BQ_2 + R_2BQ_1 + R_1R_2 \end{aligned}$$

d'où $\quad P_1P_2 - R_1R_2 = B\underbrace{(BQ_1Q_2 + R_1Q_2 + R_2Q_1)}_{\text{élément de } \mathbb{R}[X]}$

$P_1P_2-R_1R_2$ est un multiple de B et par suite *les restes des divisions par B de P_1P_2 d'une part, et R_1R_2 d'autre part, sont égaux.*

Attention : de la double condition $d^0(R_1) < d^0(B)$ et $d^0(R_2) < d^0(B)$ on peut seulement déduire $d^0(R_1R_2) < 2\,d^0(B)$, et l'*on ne peut affirmer* que le reste de la division de P_1P_2 par B est R_1R_2.

Ceci n'est vrai que si $d^0(R_1R_2) < d^0(B)$.

2° • *Soit $B = X^3 - 1$.*

On peut écrire $\quad X^3 = X^3 - 1 + 1$
ou encore $\quad X^3 = B \times 1 + 1.$

Par suite *le reste de la division de X^3 par B est 1.*

En appliquant 1° *b*) on obtient :

$$X^3 \cdot X^3 \text{ a même reste que } 1 \times 1$$

le reste de la division de X^6 par B est 1. Ceci suggère de montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence portant sur l'entier q, que *le reste de la division de X^{3q} par B est 1.*

$\ast$ *La propriété est vraie pour $q = 0$* car alors $X^{3q} = X^0 = 1$ et $X^0 = B \times 0 + 1$.

$\ast$ Supposons que X^{3q} ait pour reste 1 dans la division par B et déterminons le reste de la division par B de $X^{3(q+1)}$.

$$X^{3(q+1)} = X^{3q+3} = X^{3q} \times X^3$$

X^{3q} et X^3 ayant chacun pour reste 1, d'après 1° *b*) le produit $X^{3q}X^3$ a même reste que 1×1, c'est-à-dire 1.

La propriété se transmet de l'entier q à l'entier $q + 1$.

$\ast$ En conclusion :

$\forall q \in \mathbb{N}$, *X^{3q} a pour reste 1 dans la division par $X^3 - 1$.*

- Soit q et r le quotient et le reste de la division de l'entier naturel n par 3. Ce sont les *entiers naturels* définis par : $n = 3q + r$ *et* $r < 3$.

  (Notons que : $r < 3 \iff r \in \{0, 1, 2\}$.)

  On a alors $X^n = X^{3q+r} = X^{3q} \cdot X^r$

  $$d^0(X^r) < 3 \Rightarrow d^0(X^r) < d^0(X^3 - 1)$$

  Les divisions par B de X^{3q} et X^r ayant respectivement pour restes 1 et X^r, X^n a même reste que $1 \cdot X^r$.

  Ce reste est X^r puisque $d^0(X^r) < d^0(B)$.

- Le polynôme $X^{19} + X^6 - X^2 + 5$ est la somme de trois polynômes : $P_1 = X^{19}$; $P_2 = X^6$; $P_3 = -X^2 + 5$.

  Puisque $19 = 3 \times 6 + 1$, le reste de la division de P_1 par B est $X^1 = X$. Le reste de la division de P_2 par B est, nous l'avons vu, égal à 1.

  Puisque $d^0(P_3) < d^0(B)$ l'égalité $P_3 = B \times 0 + P_3$ est celle de la division de P_3 par B et le reste est $P_3 = -X^2 + 5$.

Le reste de la division par B de $P_1 + P_2 + P_3$ est donc d'après la 1re question $X + 1 + (-X^2 + 5)$.

Le reste cherché est donc $-X^2 + X + 6$.

3° • Soit $S_1 = X^{2n} + X^n + 1$ et $S_2 = X^{2r} + X^r + 1$.

Pour que les divisions par $X^2 + X + 1$ de S_1 et S_2 aient même reste il faut et il suffit $\big($cf. 1° $a)\big)$ que $S_1 - S_2$ soit un multiple de $X^2 + X + 1$.

Or $S_1 - S_2 = (X^{2n} - X^{2r}) + (X^n - X^r) = (X^n - X^r)(X^n + X^r + 1)$.

La question précédente a montré que X^r est le reste de la division de X^n par $X^3 - 1$ (si r est le reste de la division de n par 3).

Il en résulte que $X^n - X^r$ est multiple de $X^3 - 1$ et, puisque :

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1),$$

$X^n - X^r$ *est multiple de* $X^2 + X + 1$.

Il existe donc un polynôme P tel que $X^n - X^r = P \times (X^2 + X + 1)$ et l'on a $S_1 - S_2 = P \times (X^2 + X + 1) \times (X^n + X^r + 1)$.

$S_1 - S_2$ est multiple de $X^2 + X + 1$. Par suite *les divisions de* $X^{2n} + X^n + 1$ *et* $X^{2r} + X^r + 1$ *par* $X^2 + X + 1$ *ont même reste*.

L'intérêt de ce résultat vient du fait que si n décrit l'ensemble *infini* $\mathbb{N}$, r par contre décrit l'ensemble *fini* $\{0, 1, 2\}$.

Il suffit d'étudier trois divisions, à savoir celle de $X^{2r} + X^r + 1$ par $X^2 + X + 1$ pour chacune des trois valeurs 0, 1, 2 de r.

✶ *Si* $r = 0$ alors $X^{2r} + X^r + 1 = X^0 + X^0 + 1 = 3$, ce polynôme constant a un degré inférieur à celui du diviseur $X^2 + X + 1$.

Dans ce cas la division par $X^2 + X + 1$ de $X^{2r} + X^r + 1$ a pour quotient 0 et pour *reste 3*.

∗ *Si $r = 1$* alors $X^{2r} + X^r + 1 = X^2 + X + 1$ et *le reste de la division par $X^2 + X + 1$ est 0.*

∗ *Si $r = 2$* alors $X^{2r} + X^r + 1 = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

$X^{2r} + X^r + 1$ est dans ce cas multiple de $X^2 + X + 1$ et *le reste de la division est 0.*

(On peut aussi remarquer que X est le reste de la division de X^4 par $X^3 - 1$ d'après la question 2, donc aussi le reste de la division de X^4 par $X^2 + X + 1$. $X^4 + X^2 + 1$ a même reste que $X + X^2 + 1$, soit 0, dans la division par $X^2 + X + 1$.)

- *En résumé :*

> - ***Si n est multiple de 3,*** **le reste de la division de $X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 + X + 1$ est égal à 3.**
> - ***Dans le cas contraire*** **(c'est-à-dire si $n = 3q + 1$ ou $n = 3q + 2$ avec $q \in \mathbb{N}$)** ***le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est multiple de $X^2 + X + 1$.***

Donc *pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$ il faut et il suffit que l'entier naturel n ne soit pas multiple de 3.*

Remarques. a) Peut-être faut-il rappeler — cela intervient à plusieurs reprises au cours de cet exercice — que si $d^0(A) < d^0(B)$ l'égalité $A = B \times 0 + A$ montre que 0 est le quotient et A le reste de la division par B du polynôme A.

b) B étant un polynôme non nul donné, la relation binaire, définie dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$P_1 \text{ est en relation avec } P_2 \Leftrightarrow P_1 - P_2 \text{ est multiple de B,}$$

est une relation d'équivalence (vous le démontrerez aisément) qu'on appelle *relation de congruence modulo B.*

On note $\boxed{\mathbf{P_1 \equiv P_2 \text{ mod } B \text{ pour exprimer que } B \text{ divise } P_1 - P_2}}$

Il en résulte : si R est le reste de la division par B d'un polynôme P alors $P \equiv R \text{ mod } B$.

Réciproquement si $P \equiv R \text{ mod } B$ **et** $d^0(R) < d^0(B)$ alors R est le reste de la division de P par B.

Exercice 6

1° *a*) Soit un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ dont le degré est n. On peut écrire *(formule de Taylor)*, a étant un réel quelconque :

$$P(X) = P(a) + \frac{(X-a)}{1\,!} P'(a) + \ldots + \frac{(X-a)^k}{k\,!} P^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(X-a)^n}{n\,!} P^{(n)}(a)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$ deux polynômes sont égaux si, et seulement si, les fonctions polynômes associées sont égales. Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = P(a) + \frac{(x-a)}{1\,!} P'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^k}{k\,!} P^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n\,!} P^{(n)}(a)$$

On en déduit :

$$P(a-1) = P(a) + \frac{-1}{1\,!} P'(a) + \ldots + \frac{(-1)^k}{k\,!} P^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(-1)^n}{n\,!} P^{(n)}(a)$$

Cette égalité est vraie pour tout réel a. On en déduit l'égalité des polynômes correspondants :

$$P(X-1) = P(X) + \frac{-1}{1\,!} P'(X) + \ldots + \frac{(-1)^k}{k\,!} P^{(k)}(X) + \ldots + \frac{(-1)^n}{n\,!} P^{(n)}(X)$$

c'est-à-dire lorsque n est un entier non nul :

$$\boxed{\mathbf{P(X-1) - P(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!} P^{(k)}(X)}}$$

b) *Étudions l'ensemble des polynômes P à coefficients réels satisfaisant à :*

$$P(X) - P(X-1) = X^4 \qquad (1).$$

- Aucun polynôme constant ne convient. En effet si $P(X) = C$ où $C \in \mathbb{R}$ alors $P(X-1) = C$ et $P(X) - P(X-1) = 0$.

- Soit un polynôme P de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) vérifiant la condition proposée. D'après ce qui précède :

$$(1) \Leftrightarrow -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!} P^{(k)}(X) = X^4$$

c'est-à-dire :

$$P'(X) - \frac{P''(X)}{2\,!} + \frac{P^{(3)}(X)}{3\,!} + \ldots + (-1)\frac{(-1)^n}{n\,!} P^{(n)}(X) = X^4$$

Pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$ le polynôme $P^{(k)}(X)$ a pour degré $n-k$. Le polynôme $H(X)$ figurant au premier membre de l'égalité ci-dessus a même degré que $P'(X)$ soit $n-1$.

$$H(X) = X^4 \Rightarrow d^0(H) = d^0(X^4) \Leftrightarrow n-1=4$$

P a nécessairement pour degré 5 et la condition (1) s'écrit :

$$\underbrace{P'(X) - \frac{P''(X)}{2\,!} + \frac{P^{(3)}(X)}{3\,!} - \frac{P^{(4)}(X)}{4\,!} + \frac{P^{(5)}(X)}{5\,!}}_{H(X)} = X^4$$

$d^0(H) = 4$ et d'après la *formule de Mac-Laurin :*

$$H(X) = H(0) + H'(0)\cdot X + \frac{H''(0)}{2\,!}X^2 + \frac{H^{(3)}(0)}{3\,!}X^3 + \frac{H^{(4)}(0)}{4\,!}X^4$$

Pour que $H(X) = X^4$ il faut et il suffit que :

$$H(0) = H'(0) = H''(0) = H^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad H^{(4)}(0) = 4\,!$$

P ayant pour degré 5, pour $k > 5$ $P^{(k)} = 0$.

De $H = P' - \frac{P''}{2\,!} + \frac{P^{(3)}}{3\,!} - \frac{P^{(4)}}{4\,!} + \frac{P^{(5)}}{5\,!}$ on déduit donc :

$$H' = P'' - \frac{P^{(3)}}{2\,!} + \frac{P^{(4)}}{3\,!} - \frac{P^{(5)}}{4\,!}$$
$$H'' = P^{(3)} - \frac{P^{(4)}}{2\,!} + \frac{P^{(5)}}{3\,!}$$
$$H^{(3)} = P^{(4)} - \frac{P^{(5)}}{2\,!} \quad \text{et} \quad H^{(4)} = P^{(5)}$$

On a donc :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} P'(0) - \frac{P''(0)}{2\,!} + \frac{P^{(3)}(0)}{3\,!} - \frac{P^{(4)}(0)}{4\,!} + \frac{P^{(5)}(0)}{5\,!} = 0 \\ P''(0) - \frac{P^{(3)}(0)}{2\,!} + \frac{P^{(4)}(0)}{3\,!} - \frac{P^{(5)}(0)}{4\,!} = 0 \\ P^{(3)}(0) - \frac{P^{(4)}(0)}{2\,!} + \frac{P^{(5)}(0)}{3\,!} = 0 \\ P^{(4)}(0) - \frac{P^{(5)}(0)}{2\,!} = 0 \\ P^{(5)}(0) = 4\,! \end{cases}$$

Par suite :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} P^{(5)}(0) = 4\,! = 24 \\ P^{(4)}(0) = \frac{P^{(5)}(0)}{2\,!} = 12 \\ P^{(3)}(0) = \frac{12}{2\,!} - \frac{24}{3\,!} = 6 - 4 = 2 \\ P''(0) = \frac{2}{2\,!} - \frac{12}{3\,!} + \frac{24}{4\,!} = 1 - 2 + 1 = 0 \\ P'(0) = -\frac{2}{3\,!} + \frac{12}{4\,!} - \frac{24}{5\,!} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} \end{cases}$$

Utilisons de nouveau la formule de Mac-Laurin ; nous obtenons :

$$P(X) = P(0) + P'(0)\cdot X + \frac{P''(0)}{2\,!}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3\,!}X^3 + \frac{P^{(4)}(0)}{4\,!}X^4 + \frac{P^{(5)}(0)}{5\,!}X^5$$
$$= P(0) - \frac{1}{30}X + \frac{2}{3\,!}X^3 + \frac{12}{4\,!}X^4 + \frac{24}{5\,!}X^5$$

P(0) peut être choisi arbitrairement. L'ensemble cherché est donc celui des polynômes :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{P(X) = C - \frac{1}{30}X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{5}X^5} \\ \\ \textbf{où C décrit } \mathbb{R}.\end{array}}$$

2° • En remplaçant successivement X par 1, 2, …, n dans (1) on obtient :

$$\begin{aligned} P(1) - P(0) &= 1^4 \\ P(2) - P(1) &= 2^4 \\ P(3) - P(2) &= 3^4 \\ &\dots \\ P(n) - P(n-1) &= n^4 \end{aligned}$$

Si l'on ajoute membre à membre ces n égalités il vient :

$$P(n) - P(0) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

D'après l'expression des polynômes P vérifiant (1) on a :

$$P(n) - P(0) = P(n) - C = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5}$$

Exercice 7

a) Soit la fraction $F = \dfrac{X}{(X^2-1)(X^2+X+1)}$.

Le trinôme X^2+X+1 a deux racines complexes conjuguées :

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\left(j \text{ et } \bar{j}=j^2\right.$ sont les deux racines cubiques non réelles de l'unité).

Le dénominateur $B=(X^2-1)(X^2+X+1)$ a pour décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: $(X-1)(X+1)(X^2+X+1)$.

Les polynômes X et B sont premiers entre eux, et la fraction F est écrite *sous forme irréductible*. Elle a *deux pôles simples réels 1 et −1, et une partie entière nulle* $\left(d^0(X)<d^0(B)\right)$.

Elle s'écrit, de manière unique :

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

où a, b, c, d sont quatre réels à déterminer.

Calcul de a.

Formons $\quad F_1=(X-1)\times F=\dfrac{X}{(X+1)(X^2+X+1)} \qquad (\alpha)$.

La décomposition ci-dessus montre que :

$$F_1=a+\frac{b(X-1)}{X+1}+\frac{(cX+d)(X-1)}{X^2+X+1}$$

et par suite $F_1(1)=a$ (en gardant la notation F_1 pour désigner la fonction rationnelle associée à la fraction F_1).

Or d'après (α) : $\quad F_1(1)=\dfrac{1}{2\times 3}$

$$\boxed{a=\frac{1}{6}}$$

Calcul de b.

Soit $F_2 = (X+1) \times F = \dfrac{X}{(X-1)(X^2+X+1)}$ (β).

$F_2(-1) = b$ et d'après (β) on a $F_2(-1) = \dfrac{-1}{-2}$.

$$\boxed{b = \frac{1}{2}}$$

Calcul de c et d. On utilise un procédé analogue en déterminant $(X^2+X+1) \times F$ ce qui conduit à l'égalité :

$$\frac{X}{X^2-1} = (X^2+X+1)\left[\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}\right] + cX + d$$

j est une racine de X^2+X+1 et l'on a $j^2+j+1=0$.

Si $E = \dfrac{X}{X^2-1}$ alors $E(j) = \dfrac{j}{j^2-1} = cj + d$

c'est-à-dire $j = c(j^3-j) + d(j^2-1)$.

Or $j^2 = -j-1$ et $j^3 = 1$.

Donc $j = c(1-j) + d(-j-2)$.

Ce qui équivaut à $c - 2d + j(-1-c-d) = 0$ (γ).

$\mathbb{C}$ est un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(1, j)$ en est une base. Quels que soient les *réels* u et v on a :

$$u + jv = 0 \Leftrightarrow u = v = 0$$

Par suite $(\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2d = 0 \\ 1 + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2d \\ 1 + 3d = 0. \end{cases}$

$$\boxed{(c, d) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$

F se décompose donc comme suit :

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6\,(X-1)}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\,(X+1)}} - \frac{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{X} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}{\mathbf{X^2+X+1}}}$$

Autre mode de calcul de c et d. Déterminons c et d sans faire appel aux nombres complexes. L'*utilisation d'une valeur particulière* — ici 0, car $F(0) = 0$ — donne une première relation :

$$F(0) = 0 = -a + b + d$$

D'où $d = a - b = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\cdot$

Une étude de limite complétera le calcul.

Reprenons la fonction rationnelle $F_1 = (X-1)\,F$. Nous avons vu que :

$$F_1 = \frac{X}{(X+1)(X^2+X+1)} = a + b\,\frac{X-1}{X+1} + \frac{(cX+d)(X-1)}{X^2+X+1}$$

Nous garderons la notation F_1 pour désigner la fonction rationnelle associée définie dans $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$F_1 : x \mapsto \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

F_1 a pour limite 0 en $+\infty$ car $F_1(x) \sim \frac{x}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

Or $F_1(x) = a + b\,\frac{x-1}{x+1} + \frac{cx^2 + (d-c)\,x - d}{x^2+x+1}\cdot$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} b\,\dfrac{x-1}{x+1} = b \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = b \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{cx^2 + (d-c)\,x - d}{x^2+x+1} = c \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} F_1(x) = a + b + c$$

On en déduit $a + b + c = 0$ c'est-à-dire $c = -a - b = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\cdot$

b) Posons $A = X^4 + X^2 + 2$ *et* $B = X^3 + 5X^2 + 8X + 4$.

Il est immédiat que $B(-1) = 0$, B est divisible par $X + 1$ et l'on a :

$$B = (X+1)(X^2+4X+4) = (X+1)(X+2)^2$$

On vérifiera que $A(-1) \neq 0$ et $A(-2) \neq 0$. *La fraction* $\frac{A}{B}$ *est sous forme irréductible* et admet *deux pôles réels* -1 — qui est un pôle simple — *et* -2 (pôle double).

- Sa partie entière est le quotient de la **division euclidienne** de A par B.

$$\begin{array}{r|l|l}
X^4 \qquad\quad + X^2 \qquad\quad + 2 & X^3+5X^2+8X+4 & \text{Le quotient est :} \\
-5X^3 - 7X^2 - 4X \;\; + 2 & X-5 & Q = X-5 \\
18X^2 + 36X + 22 & & \text{et le reste :} \\
 & & R = 18X^2+36X+22
\end{array}$$

La décomposition de la fraction G est donc de la forme :

$$G = X - 5 + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}$$

où a, b, c sont trois réels à déterminer.

Puisque $A = BQ + R$ on a $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}\cdot$

$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}$ est la décomposition en éléments simples de $\frac{R}{B}\cdot$

- *Déterminons d'abord la partie polaire relative à* -2 *de* $\frac{R}{B}$ *en faisant le changement d'indéterminée* $Y = X + 2$ (c.à.d. $X = Y - 2$).

$$\frac{18X^2+36X+22}{(X+1)(X+2)^2} = \frac{18(Y-2)^2+36(Y-2)+22}{(Y-1)Y^2} = \frac{18Y^2-36Y+22}{(Y-1)Y^2}$$

La fraction $\dfrac{\mathcal{R}(Y)}{\mathcal{B}(Y)} = \dfrac{18\,Y^2 - 36\,Y + 22}{(Y-1)\,Y^2}$ admet 0 pour *pôle d'ordre 2* et en effectuant la $\boxed{\textbf{division à l'ordre 1 suivant les puissances croissantes}}$ de $22 - 36\,Y + 18\,Y^2$ par $-1 + Y$ on obtiendra les coefficients de la partie polaire relative à 0 de $\dfrac{\mathcal{R}(Y)}{\mathcal{B}(Y)}$.

$$
\begin{array}{r|l}
22 - 36\,Y = 18\,Y^2 & \;-1 + Y \\ \cline{2-2}
-14\,Y + 18\,Y^2 & \;-22 + 14\,Y \\
4\,Y^2 &
\end{array}
$$

On en déduit $22 - 36\,Y + 18\,Y^2 = (-1 + Y)(-22 + 14\,Y) + 4\,Y^2$

et $\dfrac{\mathcal{R}(Y)}{\mathcal{B}(Y)} = \dfrac{-22 + 14\,Y}{Y^2} + \dfrac{4}{Y-1} = \dfrac{-22}{Y^2} + \dfrac{14}{Y} + \dfrac{4}{Y-1}$.

En remplaçant Y par $X + 2$ on obtient :

$$\frac{R}{B} = \frac{-22}{(X+2)^2} + \frac{14}{X+2} + \frac{4}{X+1}$$

- *En conclusion :*

$$\boxed{\mathbf{G = X - 5 + \frac{4}{X+1} + \frac{14}{X+2} - \frac{22}{(X+2)^2}}}$$

- *Autre méthode de détermination des coefficients a, b, c.*

$$\frac{R}{B} = \frac{18\,X^2 + 36\,X + 22}{(X+1)(X+2)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}$$

Formons $H_1 = (X+1) \times \dfrac{R}{B} = \dfrac{18\,X^2 + 36\,X + 22}{(X+2)^2}$

$$a = H_1(-1) = 18 - 36 + 22 = 4$$

De même si $\mathrm{H}_2 = (\mathrm{X}+2)^2 \times \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} = \dfrac{18\,\mathrm{X}^2 + 36\,\mathrm{X} + 22}{\mathrm{X}+1}$ on a :

$$c = H_2(-2) = \frac{18 \times 4 - 36 \times 2 + 22}{-1} = -22$$

On peut *terminer le calcul en utilisant une valeur particulière* (0 par exemple).

$$\frac{\mathrm{R}(0)}{\mathrm{B}(0)} = \frac{22}{4} = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$$

d'où l'égalité $b = 11 - 2\,a - \dfrac{c}{2}$.

Puisque $(a, c) = (4, -22)$ il vient $b = 11 - 8 + 11 = 14$.

Donc $b = 14$.