Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★). Les exercices peuvent exploiter les notions du chapitre 7 ou du chapitre 8. Les limites de suites n'ont pas encore été introduites en toute rigueur, mais on peut exploiter les théorèmes de lycée sur la convergence (notamment la convergence monotone).

Chapitre 8 : Suites numériques.

Exemples de suites numériques

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

— Suites numériques, majorées, minorées, bornées, monotones. (★) Opérations sur les suites monotones. Propriété vérifiée à partir d'un certain rang. Pour $a \in \mathbb{R}^+$, suite $n \mapsto a^n/n!$. Suite stationnaire.

— Suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, ensemble stable par une application f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Représentation graphique. (★) Si f est croissante, alors u est monotone selon le signe de $u_0 - u_1$. (★) Si f est décroissante, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires, selon le signe de $u_0 - u_2$. Si $x \mapsto f(x) - x$ est de signe contant, u est monotone selon ce signe. Si f est continue et u convergente, alors sa limite est un point fixe de f. Notion de point fixe attractif ou répulsif sous l'hypothèse f de classe C^1. Exemple $f : x \mapsto \mu x(1 - x)$ pour $\mu \in]0, 3]$. **La théorie complète est reportée au chapitre sur les fonctions dérivables**.

— Suites implicites. Traitement d'exemples $u_n = f_n^{-1}(0)$ avec f_n strictement croissante pour tout entier n. Cas où on peut se ramener à $u_n = g^{-1}(v_n)$ avec g fixé.

— Suites arithmético-géométriques $u_{n+1} = au_n + b$. Réduction au cas géométrique. (★) Expression du terme général dans les cas $a = 1$ et $a \neq 1$.

— Suites définies par récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Méthode algébrique : $E = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$. L'application $\varphi : E \to \mathbb{K}^2, u \mapsto (u_0, u_1)$ est linéaire et bijective. Polynôme caractéristique. (★) Forme générale des solutions complexes. Forme générale des solutions réelles.

★ ★ ★ ★ ★