Kholle 7 filière MPSI
Planche 1

★★★

1. Donner et démontrer l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique.
2. On se donne α, β, λ trois réels strictement positifs, puis la suite u définie par $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}$. Étudier la suite u et en particulier sa convergence.
3. Soit $f : [1, +\infty[, x \mapsto x\ln(x)/(x+1)$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel strictement positif α_n tel que $f(\alpha_n) = n$. Démontrer ensuite que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(\alpha_n e^{-n}) = n/\alpha_n$$

   et en déduire la limite de $(\alpha_n e^{-n})_{n\geqslant 1}$.

★★★

Kholle 7 filière MPSI
Planche 2

★★★

1. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application décroissante d'une partie A de $\mathbb{R}$ qui stabilise A. Soit $u_0 \in A$ et u définie par récurrence via $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Quel résultat sur la monotonie de u a-t-on ? Le démontrer.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on note
$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}^2 \leqslant 1 + u_n\sqrt{2}$.
   (b) Montrer que la suite u est convergente
3. On considère la suite u définie par $u_0 = -1, u_1 = -1$, et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} - (n+1)u_n$$
Donner le terme général de cette suite via l'étude de la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 7 filière MPSI
Planche 3

★★★

1. Soit a et b deux complexes avec $b \neq 0$. Soit u une suite complexe vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$. Donner l'expression du terme général de u et le démontrer.
2. Soit x un réel. pour tout entier naturel non nul n, on note

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

   Démontrer que la suite v converge et déterminer sa limite.
3. Soit n une entier naturel. Montrer qu'il existe un unique réel x_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $x_n \cos(x_n) - \sin(x_n) = 0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n < (2n+1)\pi/2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi + \arctan x_n$$

   Déterminer alors la limite de $(x_n/(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$.

★★★

Kholle 7 filière MPSI
Bonus

⋆⋆⋆

1. Étudier $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}}$.
2. $u_0 > 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{(1+u_n)/2}$. Démontrer que

$$\prod_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{u_0^2-1}}{\operatorname{argch}(u_0)}$$

⋆⋆⋆