Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$) sur le chapitre 20 : Applications linéaires. Les exercices porteront sur le début du chapitre 20 : applications linéaires jusqu'à la dualité non incluse.

Chapitre 20 : Applications linéaires.

Applications linéaires

Notion d'application linéaire, notation $\mathcal{L}(E,F)$. $f(0_E) = 0_F$. Si f linéaire bijective, alors f^{-1} linéaire. Image directe, image réciproque d'un sev par une application linéaire. $f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A))$. Noyau, image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau. ($\star$) $\mathcal{L}(E,F)$ est un sev de $\mathcal{F}(E,F)$. ($\star$) La composée d'applications linéaire est linéaire. Bilinéarité de la composition. Une application linéaire envoie une famille génératrice de E sur une famille génératrice de son image. Les applications linéaires injectives conservent la liberté. Notion de rang fini. ($\star$) Si f ou g est de rang fini, alors $g\circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$. Les isomorphismes conservent le rang fini par composition.

Endomorphismes

$\mathcal{L}(E)$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(E,E)$. Pour F et G sev supplémentaires dans E, projecteur sur F parallèlement à G. ($\star$) $f \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur ssi $f^2 = f$, auquel cas c'est le projecteur sur son image parallèlement à son noyau. Si f projecteur, $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Symétrie par rapport à F parallèlement à G. ($\star$) $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie ssi $f^2 = \mathrm{Id}_E$ auquel cas c'est la symétrie par rapport à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèmement à $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Lien entre projecteurs et symétries. Notion d'automorphisme, groupe des automorphismes de E.

Détermination d'une application linéaire

($\star$) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$. Cette application est injective ssi (f_i) est libre, surjective ssi (f_i) génératrice, bijective ssi (f_i) base. Si E et F sont de dimension finie, alors E et F sont isomorphes ssi de même dimension. Si $\dim E = \dim F < +\infty$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective ssi injective ssi surjective. Si $\dim E$ finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ inversible ssi inversible à gauche ssi inversible à droite. ($\star$)En dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E)\dim(F)$. Détermination d'une application linéaire à partir de restrictions sur $\oplus E_i = E$. ($\star$) Théorème du rang : forme géométrique, si S est un supplémentaire de $\ker u$, alors u induit un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(u)$. si $\dim(E)$ finie, u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u)$.

Dualité

$E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. Formes coordonnées relativement à une base. Liberté des formes coordonnées. En dimension finie, base duale. Hyperplan défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle. ($\star$) Soit H un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$. Si D droite de E admet un supplémentaire, celui-ci est un hyperplan. En dimension finie, les hyperplans sont les sev de dimension $\dim(E) - 1$. CNS pour que deux formes linéaires définissent le même hyperplan. En dimension finie, dimension d'une intersection d'hyperplans, tout sev de dimension finie est une intersection d'hyperplans.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star$