La formule d'Euler-Maclaurin

Introduction

L'objectif de ce problème est de démontrer la formule d'Euler-Maclaurin. Cette dernière permet de comparer pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ avec $m<n$ les nombres

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \quad \text{et} \quad \int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction suffisamment régulière. De plus, nous appliquerons ce résultat pour obtenir un développement asymptotique de la série harmonique et un développement asymptotique de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous commencerons par introduire les polynômes et les nombres de Bernoulli qui sont nécessaire pour énoncer la formule d'Euler-Maclaurin.

I. Les polynômes de Bernoulli

Pour définir les polynômes de Bernoulli, on commence par montrer un résultat intermédiaire.

1. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$Q'=P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

On en déduit que l'on peut définir la suite des polynômes de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $B_0=1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad B'_{n+1}=(n+1)B_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

2. Calculer les polynômes B_1 et B_2.

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme B_n est de degré n.

4. Montrer que $B_n(1)=B_n(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$.

5. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $B_n(1-X)=(-1)^nB_n(X)$.

6. Montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a

$$B_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}.$$

7. En déduire avec le formule de Taylor pour un polynôme que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad B_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}(0)X^k.$$

II. Les nombres de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième nombre de Bernoulli par $b_n = B_n(0)$.

1. En utilisant les questions **I.4** et **I.5**, montrer que $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

2. En utilisant les questions **I.4** et **I.7**, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k} b_k.$$

3. Montrer que l'on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{6}$, $b_4 = -\dfrac{1}{30}$ et $b_6 = \dfrac{1}{42}$.

III. La formule d'Euler-Maclaurin

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\tilde{B}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 1-périodique telle que

$$\forall t \in [0,1[, \quad \tilde{B}_n(t) = B_n(t).$$

On fixe $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m < n$. On considère une fonction $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^d$ où $d \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant p < n$. Montrer par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$ la relation

$$\frac{f(p)+f(p+1)}{2} = \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=2}^{d} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(p+1) - f^{(k-1)}(p)\right) + \frac{(-1)^{d+1}}{d!}\int_p^{p+1} \tilde{B}_d(t) f^{(d)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire la formule d'Euler-Maclaurin ci-dessous

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{d} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right) + \frac{(-1)^{d+1}}{d!}\int_m^n \tilde{B}_d(t) f^{(d)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

IV. Développement asymptotique de la série harmonique

Nous allons déterminer un développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2. On fixe un entier $d \in \mathbb{N}$ avec $d \geqslant 2$ et on considère $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1/t$. On définit également la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n = \int_n^{+\infty} \frac{\tilde{B}_d(t)}{t^{d+1}}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^k k!}{t^{k+1}}.$$

b) Montrer que la fonction $\tilde{B}_d$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale définissant R_n est convergente et que l'on a la relation $R_n = O(n^{-d})$ lorsque $n \to +\infty$.

c) En utilisant la formule d'Euler-Maclaurin, montrer qu'il existe une constante $\gamma_d \in \mathbb{R}$ indépendante de n tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma_d + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + R_n.$$

d) Conclure que l'on a

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{d-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^d}\right).$$

V. Raffinement de la formule de Stirling

Nous allons déterminer un développement asymptotique de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On fixe un entier $d \in \mathbb{N}$ avec $d \geqslant 2$.

1. En utilisant la formule d'Euler-Maclaurin et en vous inspirant de la partie précédente, montrer qu'il existe une constante $C_d \in \mathbb{R}$ indépendante de n tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_d + \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k(k-1)} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^d}\right).$$

2. En utilisant la formule de Stirling, montrer que $C_d = \ln(\sqrt{2\pi})$.

3. En déduire que

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\sum_{k=2}^{d} \frac{b_k}{k(k-1)} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^d}\right)\right).$$

4. Finalement, montrer que l'on a

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Fin