Introduction au calcul différentiel dans $\mathbb{R}^2$.

Cornou Jean-Louis

15 juin 2023

Dans tout ce qui suit, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

On rappelle qu'elle vérifie les propriétés de séparation, homogénéité absolue et l'inégalité triangulaire.
Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
L'une des difficultés essentielle de ce chapitre est de bien préciser ou savoir préciser si les objets manipulés sont dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}$.

1 Topologie de $\mathbb{R}^2$.

On accepte les démonstrations à l'aide de figures convaincantes pour prouver qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte/fermée ou non.

1.1 Ouverts, fermés

Définition 1 *Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle*

— *boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 | \|x-a\| < r\}$, notée $\mathrm{B}(a,r)$.*
— *boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 | \|x-a\| \leqslant r\}$, notée $\mathrm{B}_f(a,r)$.*
— *sphère de centre a et de rayon r l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 | \|x-a\| = r\}$, noté $\mathrm{S}(a,r)$.*

Définition 2 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est un ouvert (ou une partie ouverte) de $\mathbb{R}^2$ lorsque*

$$\forall x \in \mathrm{A}, \exists r > 0, \mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{A}$$

Exemple 1 *L'espace $\mathbb{R}^2$ est ouvert. Soit $x \in \mathbb{R}^2$, alors $\mathrm{B}(x,1) \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble vide $\varnothing$ est ouvert.*
La partie $\mathrm{A} =]0,1[\times \{0\}$ n'est pas ouverte. Soit $a = (1/2, 0) \in \mathrm{A}$ et $r > 0$. Montrons que $\mathrm{B}(a,r)$ n'est pas inclus dans A, ce qui revient à construire un élément de $\mathrm{B}(a,r)$ qui n'est pas dans A. On pose $b = a + (0, r/2)$. Cet élément de $\mathbb{R}^2$ vérifie $\|b-a\| = \|(0,r/2)\| = r/2 < r$ puisque $r > 0$. D'autre part, $b \notin \mathrm{A}$ car sa deuxième composante $r/2$ est non nulle puisque $r > 0$.
Résumons : $\exists a \in \mathrm{A}, \forall r > 0, \mathrm{B}(a,r) \not\subset \mathrm{A}$. C'est la négation du fait que A est ouvert, ainsi A n'est pas ouvert.
Soit $a \in \mathrm{A}$. Alors le singleton $\{a\}$ n'est pas ouvert. En effet, par séparation de la norme, pour tout réel strictement strictement positif r, $\mathrm{B}(a,r)$ contient des éléments différents de a, i.e $\forall r > 0, \mathrm{B}(a,r) \not\subset \{a\}$.

Propriété 1 *Soit $a \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+$. Alors $\mathrm{B}(a,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{B}(a,r)$. On cherche un réel strictement positif ρ tel que $\mathrm{B}(x,\rho) \subset \mathrm{B}(a,r)$. On choisit $\rho = r - \|x-a\|$ qui est bien strictement positif, puisque $\|x-a\| < r$. Montrons qu'avec ce choix, on a l'inclusion $\mathrm{B}(x,\rho) \subset \mathrm{B}(a,r)$. Soit $y \in \mathrm{B}(x,\rho)$. L'inégalité triangulaire entraîne

$$\|y-a\| = \|(y-x)+(x-a)\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| < \rho + \|x-a\| = r$$

i.e $y \in \mathrm{B}(a,r)$. On a ainsi l'inclusion $\mathrm{B}(x,\rho) \subset \mathrm{B}(a,r)$ et le caractère ouvert de $\mathrm{B}(a,r)$.

Exercice 1 *Soit A, B deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ sont des ouverts. Est-ce généralisable à une famille quelconque (éventuellement infinie) d'ouverts ?*

Définition 3 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^2$*. On dit que* A *est un fermé (ou une partie fermée) de* $\mathbb{R}^2$ *lorsque son complémentaire dans* $\mathbb{R}^2$ *est un ouvert.*

Exemple 2 *Tout singleton est fermé. Soit* $a \in \mathbb{R}^2$ *et* $A = \{a\}$*. Montrons que son complémentaire est ouvert. Soit* $b \in \mathbb{R}^2, b \neq a$*. Alors* $\|b-a\| \neq 0$*. De plus,* $B(b, \|b-a\|/2) \subset \bar{A}$*, ce qui prouve que le complémentaire de* A *est ouvert, donc que* A *est fermé. Le demi-plan* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0\}$ *est fermé. Pour cela, on considère son complémentaire* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\}$*. Soit* $b = (x,y) \in B$*. Comme* x *est non nul, on pose* $r = |x|/2$*, mais alors* $B(b, |x|/2)$ *est inclus dans* B*.*

⚠ **Attention**
Une partie de $\mathbb{R}^2$ *peut être à la fois ouverte et fermée (*$\mathbb{R}^2$ *et* $\varnothing$ *le sont). Il existe des parties ni ouvertes, ni fermées de* $\mathbb{R}^2$*, prenons par exemple* $A =]0,1] \times \{0\}$*. En reproduisant le raisonnement de l'exemple précédent, on montre que* A *n'est pas ouvert. Montrons que* A *n'est pas fermée. On note alors* $B = \mathbb{R}^2 \backslash A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\vee y \neq 0\}$*. Montrons que* B *n'est pas ouvert. Soit* $b = (0,0) \in B$*, mais toute boule ouverte* $B(b,r)$ *contient* $(r/2, 0)$ *qui n'appartient pas à* B*, donc* B *n'est pas ouvert et* A *n'est pas fermé.*

Propriété 2 *Soit* $a \in \mathbb{R}^2$ *et* $r \in \mathbb{R}_+$*. Alors* $B_f(a,r)$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$*.*

Démonstration. Soit $b \in \mathbb{R}^2 \backslash B_f(a,r)$ (ce qui signifie $\|b-a\| > r$). On cherche un réel strictement positif ρ tel que $B(b,\rho) \subset \mathbb{R}^2 \backslash B_f(a,r)$. On propose $\rho = \|b-a\| - r > 0$. Soit $c \in B(b,\rho)$. Alors l'inégalité triangulaire entraîne

$$\|b-a\| - \|c-a\| \leqslant \|c-b\| < \rho = \|b-a\| - r$$

soit encore $\|c-a\| > r$, i.e c appartient au complémentaire de $B_f(a,r)$. Ainsi, $B(b,\rho) \subset \mathbb{R}^2 \backslash B_f(a,r)$, donc $\mathbb{R}^2 \backslash B_f(a,r)$ est ouvert et $B_f(a,r)$ est fermé.

☞ **Remarque**
L'idée des fermés est qu'on ne peut pas « en sortir ». Ils contiennent leur frontière.

1.2 Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Parlons rapidement de notion de limite dans $\mathbb{R}^2$. Si l'on considère une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, il est plutôt naturel de proposer que cette suite converge vers (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ lorsque $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$ et $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} y$. On va proposer une définition équivalente qui se généralisera plus aisément l'année prochaine.

Définition 4 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*. On dit qu'elle est convergente lorsque*

$$\exists a \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|a_n - a\| \leqslant \varepsilon$$

On a l'équivalence naturelle suivante.

Propriété 3 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ *et* $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$*. On a l'équivalence*

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \iff (x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x) \wedge (y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y)$$

Démonstration. Preuve rapide : si $(a_n)_n$ tend vers a, alors $\|a_n - a\|$ tend vers 0. Or $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x| \leqslant \|a_n - a\|$, donc $(x_n)_n$ tend vers x par encadrement. De même $\forall n \in \mathbb{N}, |y_n - y| \leqslant \|a_n - a\|$ prouve la convergence de $(y_n)_n$ vers y. Réciproquement, $\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n - a\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$ montre que les convergences de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ entraînent celle de $(a_n)_n$ vers a.

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Rappelons tout d'abord la définition de la continuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en un réel a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[, |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

On peut voir l'intervalle $]a-\delta, a+\delta[$ comme une boule ouverte de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue classique de $\mathbb{R}$ qui est une norme. La norme de $\mathbb{R}^2$ qu'on utilise permet de généraliser :

Définition 5 *Soit $a \in \Omega$. On dit que f est continue en a lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{B}(a,\delta) \cap \Omega, |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

☞ **Remarque**
Comme on a choisi un ouvert comme ensemble de départ pour f, on est assuré qu'on peut toujours choisir $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,\delta) \subset \Omega$. On s'affranchit ainsi des problèmes de « bord » qui correspondent aux limites à gauche et à droite dans $\mathbb{R}$.

☞ **Remarque**
La caractérisation séquentielle fonctionne encore.

Définition 6 *On dit que f est continue (ou continue sur Ω lorsque pour tout a dans Ω, f est continue en a.*

Essayons de relier cette notion de continuité à celle qu'on connaît sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

⚠ **Attention**
Il ne suffit pas qu'il y ait « continuité selon des droites » passant par a pour que f soit continue en a. Prenons la droite $\mathrm{D} = \mathbb{R} \times \{0\} = \mathrm{Vect}(1,0)$ et $f = \mathbb{1}_{\mathrm{D}}$ l'indicatrice de D. Elle vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0 \text{ si } y \neq 0, 1 \text{ si } y = 0$$

Sa restriction à D peut être vue comme une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x,0) = 1$ constante égale 1 qui est bien continue en 0. Pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, on choisit $\varepsilon = 1/2$. Soit $\delta > 0$, le vecteur $(0,\delta/2)$ est de norme $\delta/2$ donc dans $\mathrm{B}((0,0),\delta)$ et pourtant $|f(0,\delta/2) - f(0,0)| = 1 > \varepsilon$.
On pourrait alors rajouter $\mathrm{D}' = \mathrm{Vect}(0,1)$ et considérer $h = \mathbb{1}_{\mathrm{D} \cup \mathrm{D}'}$. Sa restriction à D et D' peut être vue comme une fonction constante à égale à 1. Pourtant h n'est toujours pas continue en $(0,0)$. Avec les mêmes notations que précédemment, on choisit $x = (\delta/2, \delta/2)$ de norme $\delta/\sqrt{2}$ de sorte que $f(x) = 0$ et $\|f(x) - f(0,0)\| = 1 > 1/2$.
Imaginons que toutes les restrictions de f à toutes les droites passant par 0 soient continues. Cela suffit-il ? La réponse est toujours non. On considère la partie $\mathrm{A} = \{(x,x^2) | x \in \mathbb{R}^*\}$ dans $\mathbb{R}^2$ (penser au graphe d'une parabole épointée), puis $f = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$. Elle vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 1 \text{ si } x \neq 0 \wedge y = x^2, 0 \text{ sinon}$$

Toute restriction de f à une droite passant par $(0,0)$ est continue en 0 (elle est constante égale à 0 sauf peut-être en un point distinct de $(0,0)$). Pourtant, f n'est pas continue en 0. Avec les notations précédentes, pour $\delta < 2$ on choisit le vecteur $a = (\delta/2, \delta^2/4)$ qui est de norme $\delta/2\sqrt{1+\delta^2/4} < \delta$ et pourtant, $|f(a) - f(0,0)| = 1 > 1/2$.

Propriété 4 *L'ensemble $\mathrm{C}(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient la fonction constante nulle. Soit $(f,g) \in \mathrm{C}(\Omega,\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. D'après les continuités de f et g en a, on dispose de $\delta_f > 0$ et $\delta_g > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{B}(a,\delta_f) |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{B}(a,\delta_g) |g(x) - g(a)| \leqslant \varepsilon$$

On choisit alors $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$, ce qui permet d'écrire

$$\forall x \in \mathrm{B}(a,\delta), |(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |\lambda||g(x) - g(a)| = \varepsilon(1 + |\lambda|)$$

On a ainsi la continuité de $f + \lambda g$. La fonction constante égale à 1 est continue. On remarque que

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega |fg(x) - fg(a)| &= |f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))| \\ &\leqslant |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| \\ &\leqslant |f(a)||g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| \end{aligned}$$

Avec le même δ que précédemment, on obtient

$$\forall x \in \mathrm{B}(a,\delta), |fg(x) - fg(a)| \leqslant |f(a)|\varepsilon + \varepsilon^2 + |g(a)|\varepsilon$$

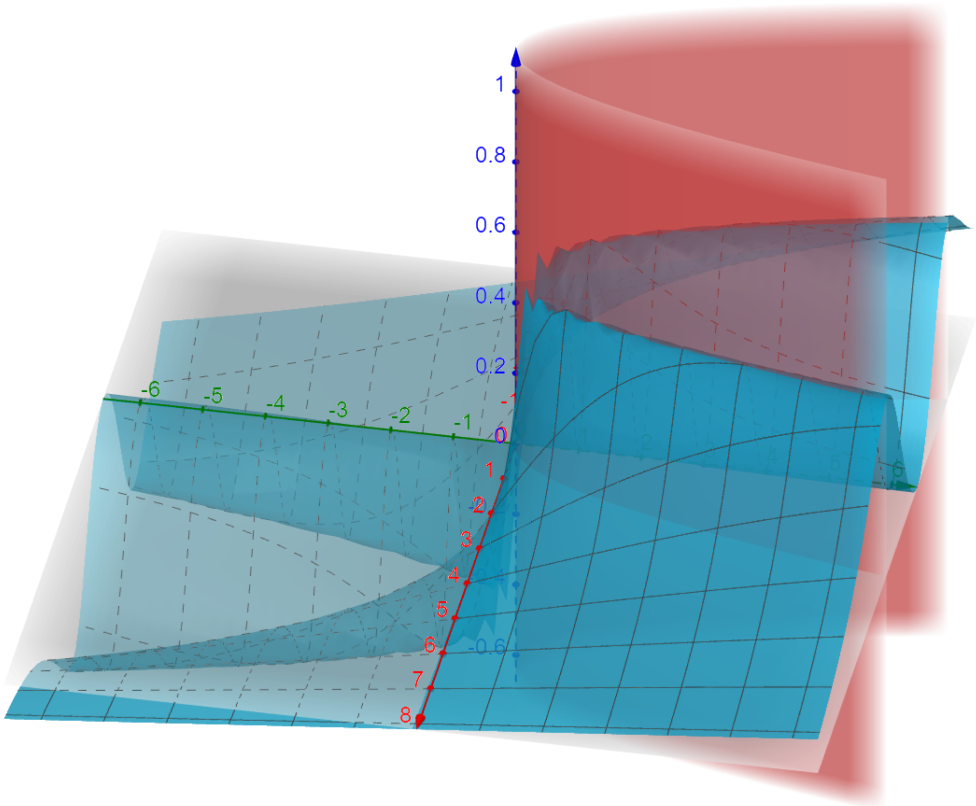
Exemple 3 *Toutes les fonctions polynomiales de deux variables, i.e de la forme* $(x,y) \mapsto \sum_{i,j} a_i, j x^i y^j$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$*. En particulier, toutes les formes linéaires de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont continues.*

Propriété 5 *Soit* $f \in \mathrm{C}(\Omega, \mathbb{R})$ *telle que* $\forall a \in \Omega, f(a) \neq 0$*. Alors* $1/f$ *est continue sur* Ω*.*

Démonstration. Laissée à titre d'exercice.

Exercice 2 *Soit* $\mathrm{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction polynomiale de deux variables. Montrer que* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{P}(x,y) \neq 0\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, puisque la fonction polynomiale* $1/\mathrm{P}$ *définie sur* Ω *est continue.*

Exercice 3 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$*,* $f(0,0) = 0$*. Etudier sa continuité en* $(0,0)$ *selon des droites vectorielles. Etudier sa continuité en* $(0,0)$*.*



2 Différentiation, dérivation dans $\mathbb{R}^2$.

Lors de l'étude de la dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a défini la dérivée comme une limite de taux d'accroissement via les expressions $(f(x)-f(y))/(x-y)$. On ne dispose pas de quotient dans $\mathbb{R}^2$, on va exploiter une autre caractérisation de la dérivabilité pour généraliser cette notion dans $\mathbb{R}^2$: les développements limités. On peut ensuite faire le lien avec la notion de dérivée partielle, fortement exploitée en sciences physiques. Afin de rendre l'exposé plus lisible, on commence par les notions de dérivées partielles.

2.1 Dérivées partielles

Définition 7 *Soit $a=(a_1,a_2)\in\Omega$. On dit que*

— *f est dérivable en a selon sa première variable lorsque l'application $V_1\to\mathbb{R}, h\mapsto f(a_1+h,a_2)$ défine sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ est dérivable en 0 . Sé dérivée en 0 est alors notée $\partial_1 f(a)$, ou encore $\partial_x f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. On l'appelle la première dérivée partielle de f en a.*

— *f est dérivable en a selon sa seconde variable lorsque $V_2\to\mathbb{R}, k\mapsto f(a_1,a_2+k)$ défine sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ est dérivable en 0. Sa dérivée en 0 est alors notée $\partial_2 f(a)$, ou encore $\partial_y f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. On l'appelle la seconde dérivée partielle de f en a.*

☞ **Remarque**
En termes de limites, on peut écrire

$$\partial_1 f(a)=\lim_{h\to 0,h\neq 0}\frac{f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h}$$

$$\partial_2 f(a)=\lim_{k\to 0,k\neq 0}\frac{f(a_1,a_2+k)-f(a_1,a_2)}{k}$$

Définition 8 *On dit que f admet des dérivées partielles sur Ω lorsque pour tout a dans Ω, f est dérivable selon sa première variable et sa seconde variable en a. On note alors $\partial_1 f$ ou $\partial_x f$, l'application $\Omega\to\mathbb{R}, a\mapsto\partial_1 f(a)$, puis $\partial_2 f$ ou $\partial_y f$, l'application $\Omega\to\mathbb{R}, a\mapsto\partial_2 f(a)$.*

Exemple 4 *L'idée est simplement de fixer l'une des variables réelles et de dériver par rapport à l'autre comme dans $\mathbb{R}$. Cherchons les dérivées partielles de $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},(x,y)\mapsto\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$. Elle admet des dérivées partielles en tout point a non nul de $\mathbb{R}^2$ via*

$$\forall a=(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \partial_x f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \partial_y f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

⚠ **Attention**
L'existende de dérivées partielles en a selon la première et la seconde variable n'impliquent pas nécessairement la continuité en a, contrairement au cas réel.

Propriété 6 *Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et f,g définies sur Ω admettant des dérivées partielles en $a\in\Omega$ selon leur première et seconde variable. Alors $f+\lambda g$ et fgadmettent des dérivées partielles en a selon leur première et seconde variable et*

$$\partial_1(f+\lambda g)(a)=\partial_1 f(a)+\lambda\partial_1 g(a) \quad \partial_2(f+\lambda g)(a)=\partial_2 f(a)+\lambda\partial_2 g(a)$$

$$\partial_1(fg)(a)=\partial_1 f(a)g(a)+f(a)\partial_1 g(a) \quad \partial_1(fg)(a)=\partial_2 f(a)g(a)+f(a)\partial_2 g(a)$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer les règles de dérivation dans $\mathbb{R}$.

Définition 9 *On dit que f est de classe C^1 lorsque f admet des dérivées partielles en tout point a de Ω et les applications $\Omega\to\mathbb{R}, a\mapsto\partial_1 f$ et $\Omega\to\mathbb{R}, a\mapsto\partial_2 f$ sont continues.*

Théorème 1 *Si f est de classe C^1, pour tout point (x_0, y_0) de Ω, on a le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $(0,0)$*

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o(\|(h,k)\|)$$

où $o(\|(h,k)\|)$ désigne une fonction ε définie sur un voisinage de $(0,0)$ telle que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

Démonstration. Preuve hors-programme. On fixe $B((x_0,y_0),r)$ un voisinage ouvert de (x_0,y_0) inclus dans Ω. Soit $(h,k) \in]-r,,r[^2$. On découpe et on exploite le TRI

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) \\ &= \int_0^k \partial_2 f(x_0+h, y_0+u)\,du + \int_0^h \partial_1 f(x_0+v, y_0)\,dv \end{aligned}$$

Examinons ces deux intégrales séparément

$$\begin{aligned} \left| \int_0^h \partial_1 f(x_0+v, y_0)\,dv - \partial_1 f(x_0,y_0)h \right| &= \left| \int_0^h \left(\partial_1 f(x_0+v, y_0) - \partial_1 f(x_0,y_0)\right) dv \right| \\ &\leqslant |h| \sup_{|v|\leqslant |h|} |\partial_1 f(x_0+v, y_0) - \partial_1 f(x_0,y_0)| \end{aligned}$$

D'après la continuité de la dérivée partielle $\partial_1 f$, cette borne supérieure tend vers 0, quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^k \partial_2 f(x_0+h, y_0+u)\,du - \partial_2 f(x_0,y_0)k \right| &= \left| \int_0^k \left(\partial_2 f(x_0+h, y_0+u) - \partial_2 f(x_0,y_0)\right) du \right| \\ &\leqslant |k| \sup_{|u|\leqslant |k|} |\partial_2 f(x_0+h, y_0+u) - \partial_2 f(x_0,y_0)| \end{aligned}$$

La continuité de ∂_2 assure que cette borne supérieure tend vers 0 quand (h,k) tend vers 0.
Conclusion, pour tous (h,k) au voisinage de 0

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \partial_1 f(x_0,y_0)h - \partial_2 f(x_0,y_0)k| \leqslant \|(h,k)\|\psi(h,k)$$

avec $\psi(h,k)$ de limite nulle en $(0,0)$, ce qui est bien le résultat annoncé.

☞ **Remarque**
Une remarque immédiate du caractère C^1 est le fait que f est continue en prenant la limite quand (h,k) tend vers $(0,0)$ dans ce qui précède.

Définition 10 *Si f est de classe C^1 et $a \in \Omega$, on appelle gradient de f en a, le vecteur $(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a))$ dans $\mathbb{R}^2$, notée $\nabla f(a)$. Comme $a \mapsto \partial_1 f(a)$ et $a \mapsto \partial_2 f(a)$ sont continues, on dit que $a \mapsto \nabla f(a)$ est continue.*

Propriété 7 *Si f est de classe C^1, pour tout point a de Ω, on a le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $(0,0)$*

$$f(a+v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v\rangle + o(\|v\|)$$

où $o(\|v\|)$ désigne une fonction telle que $\lim\limits_{v\to(0,0)} \frac{o(\|v\|)}{\|v\|} = 0$.

Démonstration. Immédiat d'après ce qui précède.

Exemple 5 *Déterminons le gradient de $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, (x,y) \mapsto 1/\|(x,y)\|$. On admet les opérations sur les fonctions de classe C^1. On peut écrire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{-1/2}$, ce qui donne*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \partial_1 f(x,y) = -\frac{1}{2}2x(x^2+y^2)^{-3/2} = -\frac{x}{\|(x,y)\|^3}, \quad \partial_2 f(x,y) = -\frac{1}{2}2y(x^2+y^2)^{-3/2} = -\frac{y}{\|(x,y)\|^3}$$

On synthétise le tout

$$\forall a \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \nabla f(a) = -\frac{a}{\|a\|^3}$$

Cela est utile pour la détermination des champs dipolaires à longue distance.

Exemple 6 *Un exemple d'équation aux dérivées partielles. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \partial_1 f(x,y)=0$. Soit $(x,x',y)\in\mathrm{R}^3$, alors*

$$f(x',y)-f(x,y)=\int_x^{x'}\partial_1 f(u,y)du=0$$

Par conséquent, en notant $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, y\mapsto f(0,y)$, on obtient

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=g(y)$$

La fonction f ne « dépend que de y ».
Si l'on suppose de plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\nabla f(x,y)=0$, on a $\partial_2 f=0$, i.e $g'=0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, g est constante et f est constante.

2.2 Dérivation directionnelle

Définition 11 *Soit $a\in\Omega$ et $v\in\mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. On dit que f est dérivable en a selon le vecteur v lorsque $t\mapsto\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ admet une limite en 0. Dans ce cas, sa limite en 0 est appelée dérivée directionnelle selon v de f en a, notée $\mathrm{D}_v(f)(a)$.*

☞ **Remarque**
La première dérivée partielle est la dérivée directionnelle selon le vecteur $(1,0)$. La deuxième dérivée partielle est la dérivée directionnelle selon le vecteur $(0,1)$.

Propriété 8 *Soit $a\in\Omega$ et $v\in\mathbb{R}^2$ un vecteur non nul, f et g dérivables en a selon v et λ un réel. Alors $f+\lambda g$ est dérivable en a selon v.*

$$\mathrm{D}_v(f+\lambda g)(a)=\mathrm{D}_v(f)(a)+\lambda\mathrm{D}_v(g)(a)$$

Si de plus, g est continue en a, alors fg est dérivable en a selon v et

$$\mathrm{D}_v(fg)(a)=\mathrm{D}_v f(a)g(a)+f(a)\mathrm{D}_v g(a)$$

⚠ **Attention**
L'existence de dérivées directionnelles selon toutes les directions n'entraîne pas nécessairement la continuité.

Propriété 9 *Soit f de classe C^1 sur Ω. Alors f admet des dérivées en tout a de Ω, selon tout vecteur v non nul et*

$$\mathrm{D}_v f(a)=\langle\nabla f(a),v\rangle$$

Démonstration. Notons $v=(h,k)$ et soit $t\in\mathbb{R}$ au voisinage de 0. On connaît le développement limité

$$f(a+tv)=f(a)+\langle\nabla f(a),tv\rangle+o(\|tv\|)=f(a)+t\langle\nabla f(a),v\rangle+|t|\|v\|o(1)$$

On en déduit pour tout t non nul au voisinage de 0,

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\langle\nabla f(a),v\rangle+o(1)$$

Le membre de droite admet une limite quand t tend vers 0, donc f est dérivable en a selon le vecteur v et cette limite vaut

$$\mathrm{D}_v f(a)=\langle\nabla f(a),v\rangle$$

Propriété 10 *Soit f de classe C^1 sur Ω. Soit $a\in\Omega$. On suppose que $\nabla f(a)\neq 0$.*

- *Alors pour tout $t>0$ suffisamment petit (dans un voisinage droit épointé de 0), $f(a+t\nabla(f))>f(a)$. On dit que f croît strictement dans la direction $\nabla f(a)$ au voisinage de a.*
- *De plus, pour tout v de norme 1, pour tout $t>0$ suffisamment petit, $f(a+t\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|})\geqslant f(a+tv)$. On dit que le gradient est la direction de plus grande croissance de f.*

Démonstration. Découle du développement limité et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 12 *Soit f de classe C^1 sur Ω. Soit $a=(x_0,y_0)\in\Omega$. On note $z_0=f(a)$. Le plan affine P défini par*

$$\mathrm{P}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=z_0+\partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0)\}$$

est appelé plan tangent en (x_0,y_0,z_0) à la surface d'équation $z=f(x,y)$.

Propriété 11 *La direction de l'orthogonal du plan tangent est une droite engendrée par $(1,-\nabla f(a))$.*

2.3 Différentielle

Définition 13 *Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω et $a \in \Omega$. L'application*

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (h,k) \mapsto \partial_1 f(a)h + \partial_2 f(a)k$$

est appelée différentielle de f en a, notée $df(a)$.

☞ **Remarque**
Pour tout a dans Ω, l'application $df(a)$ est une forme linéaire.

Définition 14 *Soit f une fonction de classe C^1. L'application*

$$\Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), a \mapsto df(a)$$

est appelée différentielle de f, notée df.

Propriété 12 (Unicité de la différentielle) *Soit f de classe C^1. On suppose que f admet un développement limité de la forme*

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + L(h,k) + o(\|h,k\|)$$

avec L une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors L est la différentielle de f en (x_0,y_0).

Démonstration. Notons $a = (x_0,y_0)$ et $L' = df(a)$. En soustrayant les deux développements limités, on obtient pour tout (h,k).

$$L(h,k) - L'(h,k) = o(\|(h,k)\|)$$

Fixons (h,k). Ce qui précède implique

$$\forall t \in [0,1], (L-L')(t(h,k)) = o(\|t(h,k)\|)$$

On en déduit

$$\forall t \in [0,1], t(L-L')((h,k)) = \|(h,k)\| o(t)$$

Ainsi, $\forall t \in]0,1], (L-L')((h,k)) = \|(h,k)\| o(1)$. On en déduit par passage à la limite quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $(L-L')(h,k) = 0$, et ce pour tout (h,k) dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, on a égalité des formes linéaires L et $df(a)$, donc l'unicité de la différentielle de f en a.

Exemple 7 *Si f est constante, sa différentielle est nulle.*

⚠ **Attention**
La réciproque est fausse si on ne fait pas attention au domaine de définition. Dans $\mathbb{R}$, on doit se placer sur un intervalle. Dans $\mathbb{R}^2$, on doit se placer sur des ouverts dits connexes par arcs.

Exemple 8 *Considérons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sin(xy)$. Calculons ses dérivées partielles en effectuant un développement limité. Fixons $a = (x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit (h,k) dans $\mathbb{R}^2$.*

$$\sin((x+h)(y+k)) = \sin(xy+xk+yh+hk) = \sin(xy)\cos(xk+yh+hk) + \cos(xy)\sin(xk+hy+hk)$$

On remarque que

$$\sin(xy)\cos(xk+yh+hk) = \sin(xy) + O(\|(h,k)\|^2)$$
$$\cos(xy)\sin(xk+hy+hk) = \cos(xy)(xk+hy) + O(\|(h,k)\|^2)$$

en retenant $|hk| \leqslant \|(h,k)\|^2/2$. On identifie alors par unicité de la différentielle, $df(x,y)(h,k) = \cos(xy)(xk+hy)$, ce qui correspond bien à $\partial_1 f(x,y) = \cos(xy)y$ et $\partial_2 f(x,y) = \cos(xy)x$.

Propriété 13 *Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors*

$$df(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle = D_v(f)(a)$$

3 Dérivation, différentation de composées

Définition 15 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$*. On appelle composantes de* f *les fonctions* f_1 *et* f_2*. On dit que* f *est continue, lorsque* f_1 *et* f_2 *le sont. On dit que* f *est de classe* C^1 *lorsque* f_1 *et* f_2 *sont de classe* C^1*. On note alors* $f' = (f_1', f_2')$

Définition 16 *On appelle arc à valeurs dans* Ω *ou arc tracé dans* Ω *toute fonction continue d'un intervalle réel non réduit à un point à valeurs dans* Ω*.*

Théorème 2 (Règle de la chaîne) *Soit* $\gamma = (x, y) : \mathrm{I} \to \Omega$ *un arc tracé dans* Ω *de classe* C^1*. Alors la fonction*

$$f \circ \gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(x(t), y(t))$$

est de classe C^1 *sur* I *et vérifie*

$$\forall t \in \mathrm{I}, (f \circ \gamma)'(t) = \partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t)$$

Démonstration. On effectue un développement limité. Soit $t \in \mathrm{I}$ et h suffisamment petit.

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\
&= f(x(t) + x'(t)h + o(h), y(t) + y'(t)h + o(h)) \\
&= f(x(t), y(t)) + \partial_1 f(x(t), y(t))(x'(t)h + o(h)) + \partial_2 f(x(t), y(t))(y'(t)h + o(h)) + o(\|((x'(t)h + o(h), y'(t)h + o(h))\|) \\
&= f(x(t), y(t)) + h\left(\partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t)\right) + o(h)
\end{aligned}$$

On en déduit que $f \circ \gamma$ est dérivable en t et que sa dérivée vérifie $(f \circ \gamma)'(t) = \partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t)$. Comme on a supposé γ et f de classe C^1, cette dérivée est continue, donc $f \circ \gamma$ est de classe C^1.

Propriété 14 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment,*

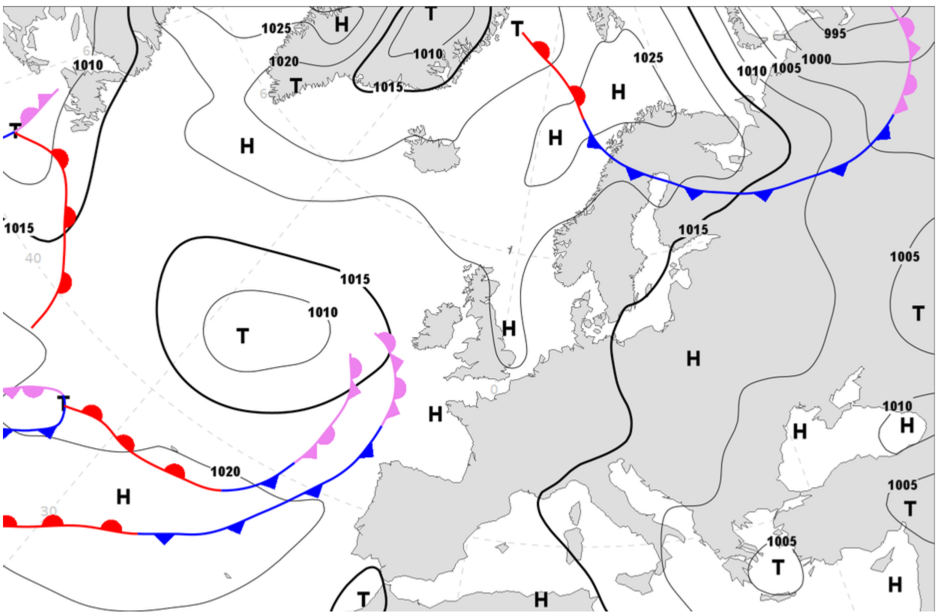
$$\forall t \in \mathrm{I}, (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Définition 17 *On appelle ligne de niveau de* f *l'image réciproque d'un singleton dans l'image de* f*, i.e une partie de* Ω *de la forme*

$$\{(x, y) \in \Omega | f(x, y) = b\}$$

avec b *dans* $f(\Omega)$*.*

Exemple 9 *On utilise une représentation du graphe de* $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ *à l'aide d'une surface dans* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $z = x^2 - y^2$ *(cette surface s'appelle le paraboloïde hyperbolique, ou PH). L'intersection du plan* $z = b$ *et de cette surface donne une ligne de niveau, qui donne le graphe d'une hyperbole 2D. On peut également représenter les lignes de niveau en 2D comme les isobares sur une carte de prévisions météorologiques.*



Propriété 15 *Soit $\gamma : \mathrm{I} \to \Omega$ un arc C^1 tracé dans Ω. On suppose que $\gamma(\mathrm{I})$ est inclus dans une ligne de niveau de f, i.e $f \circ \gamma$ constante. Alors le gradient de f sur cette ligne de niveau est orthogonal à cette ligne de nveau.*

Démonstration. Notons b tel que $\forall t \in \mathrm{I}, f\circ\gamma(t) = b$. Alors, la fonction $f\circ\gamma$ de classe C^1 est de dérivée nulle. D'après la première règle de la chaîne,

$$\forall t \in \mathrm{I}, (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$$

Fixons t et $a = \gamma(t)$. $\gamma'(t)$ représente un vecteur tangent à la ligne de niveau. L'égalité précédente donne alors $\langle \nabla f(a), \gamma'(t)\rangle = 0$, soit l'orthogonalité entre cette ligne de niveau en a et le gradient de f en a.

☞ Remarque
Cette propriété n'a pas beaucoup d'intérêt si le gradient de f est nul.

Théorème 3 (Règle de la chaîne) *Soit $\varphi : \mathrm{O} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathrm{O} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose de plus que $\forall (u,v) \in \mathrm{O}, (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in \Omega$. Alors la fonction*

$$g : \mathrm{O} \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

est de classe C^1. Ses dérivées partielles vérifient

$$\forall (u,v) \in \mathrm{O}, \partial_1 g(u,v) = \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_1\varphi(u,v) + \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_1\psi(u,v)$$

$$\forall (u,v) \in \mathrm{O}, \partial_2 g(u,v) = \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_2\varphi(u,v) + \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_2\psi(u,v)$$

Démonstration. Pour alléger, nous procédons en deux temps. Soit $(u,v) \in \mathrm{O}$, h un réel suffisamment petit.

$$\begin{aligned}
g(u+h,v) &= f(\varphi(u+h,v),\psi(u+h,v)) \\
&= f(\varphi(u,v) + \partial_1\varphi(u,v)h + o(h), \psi(u,v) + \partial_1\psi(u,v)h + o(h)) \\
&= f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) + \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))(\partial_1\varphi(u,v)h + o(h)) \\
&+ \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))(\partial_1\psi(u,v)h + o(h)) + o(\|(\partial_1\varphi(u,v)h + o(h), \partial_1\psi(u,v)h + o(h)\|) \\
&= g(u,v) + \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_1\varphi(u,v)h + \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_1\psi(u,v)h + o(h)
\end{aligned}$$

On reproduit le même procédé avec k un réel suffisament petit.

$$\begin{aligned}
g(u,v+k) &= f(\varphi(u,v+k),\psi(u,v+k)) \\
&= f(\varphi(u,v) + \partial_2\varphi(u,v)k + o(k), \psi(u,v) + \partial_2\psi(u,v)k + o(k)) \\
&= f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) + \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))(\partial_2\varphi(u,v)k + o(k)) \\
&+ \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))(\partial_2\psi(u,v)k + o(k)) + o(\|(\partial_2\varphi(u,v)k + o(k), \partial_2\psi(u,v)k + o(k)\|) \\
&= g(u,v) + \partial_1 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_2\varphi(u,v)k + \partial_2 f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\partial_2\psi(u,v)k + o(k)
\end{aligned}$$

On identifie bien les dérivées partielles de g qui sont continues d'après les hypothèses, ce qui fournit le caractères C^1 de g.

☞ Remarque
De manière plus général, la règle de chaîne repose sur les compositions des différentielles.

Exemple 10 *On note $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$, $\mathrm{D} = \{(x,0) | x \leqslant 0\}$ et $\mathrm{P} = \mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{D}$. On peut montrer que D est un fermé, donc que P est un ouvert. On note*

$$\varphi : \Omega \to \mathrm{P}, (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Notons $x : (r,\theta) \mapsto r\cos\theta$ et $y : (r,\theta) \mapsto r\sin\theta$. Ces fonctions sont C^1 et

$$\partial_1 x(r,\theta) = \partial_r x(r,\theta) = \cos(\theta) = \frac{x(r,\theta)}{r}, \quad \partial_2 x(r,\theta) = \partial_\theta x(r,\theta) = -r\sin\theta = -y(r,\theta)$$

$$\partial_2 y(r,\theta) = \partial_r x(r,\theta) = \sin(\theta) = \frac{y(r,\theta)}{r}, \quad \partial_2 y(r,\theta) = \partial_\theta y(r,\theta) = r\cos(\theta) = x(r,\theta)$$

On considère à présent une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et on note $g = f \circ \varphi$. Soit (r,θ). On note $\mathrm{M} = \varphi(r,\theta)$ pour raccourcir les notations. On sait que g est de classe C^1 et que

$$\partial_r g(r,\theta) = \partial_1 f(\mathrm{M})\frac{x(r,\theta)}{r} + \partial_2 f(\mathrm{M})\frac{y(r,\theta)}{r} = \frac{1}{r}\left(\partial_1 f(\mathrm{M})x(r,\theta) + \partial_2 f(\mathrm{M})(r,\theta)\right)$$

$$\partial_\theta g(r,\theta) = -\partial_1 f(\mathrm{M})y(r,\theta) + \partial_2 f(\mathrm{M})x(r,\theta)$$

Exercice 4 *Étudier les dérivées partielles de la réciproque du changement de variable précédent :*

$$\psi : \mathrm{P} \to \Omega, (x,y) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})).$$

Exemple 11 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 sinon.*

Exemple 12 *On recherche les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui satisfont l'équation aux dérivées partielles :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_x f(x,y) - \partial_y f(x,y) + 3(x-y)f(x,y) = 0.$$

Pour cela, utilisons le changement de variable $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (xy, x+y)$. Cette fonction est de classe C^1 et induit une bijection Φ de $\mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x-y>0\}$ dans $\mathrm{V} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v^2-4u>0\}$. La réciproque de Φ est $\Phi^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}, (\frac{1}{2}(v+\sqrt{v^2-4u}), \frac{1}{2}(v-\sqrt{v^2-4u}))$ et celle-ci est de classe C^1.
Soit f de classe C^1 sur U, on note $g = f \circ \Phi^{-1}$ qui est de classe C^1 sur V. Sachant que $f = g \circ \Phi$, il en résulte

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}, \partial_x f(x,y) = y\partial_u g(xy, x+y) + \partial_v(xy, x+y) \quad \partial_y f(x,y) = x\partial_u g(xy,x+y) + \partial_v g(xy,x+y)$$

Ainsi, f est solution de l'EDP sur U ssi g vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}(y-x)\partial_u g(xy,x+y) + 3(x-y)g(xy,x+y) = 0$$

ou encore

$$\forall (u,v) \in \mathrm{V}, \partial_u g(u,v) = 3g(u,v)$$

On en déduit que $h : (u,v) \mapsto g(u,v)e^{-3u}$ vérifie $\partial_u h = 0$. Comme V est convexe, il existe une fonction $\lambda \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall (u,v) \in \mathrm{V}, g(u,v) = \lambda(v)e^{3u}$. Alors, $\forall (x,y) \in \mathrm{U}, f(x+y) = \lambda(x+y)e^{3xy}$.

Exercice 5 *Utiliser un changement de variable en coordonnées polaires pour résoudre sur $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y>0\}$ l'EDP d'inconnue $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{D},\mathbb{R})$*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D}, x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$$

Indication : les solutions sont de la forme : $(x,y) \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3+y^3} + \mathrm{A}\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$.

4 Optimisation dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 18 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. On dit que f atteint un maximum (resp. minimum) global en a lorsque*

$$\forall b \in \Omega, f(b) \leqslant f(a) \quad (resp. f(b) \geqslant f(a))$$

Le réel $f(a)$ est alors appelé maximum (resp. minimum) global de a. On dit que ce maximum (resp. minimum) est strict si de plus

$$\forall b \in \Omega \backslash \{a\}, f(b) < f(a) \quad (resp. f(b) > f(a))$$

Définition 19 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. On dit que f atteint un maximum (resp. minimum) local en a lorsqu'il existe un voisinage ouvert V de a tel que $f_{|\mathrm{V}}$ admet un maximum (resp. minimum) global en a. Le réel $f(a)$ est alors appelé maximum (resp. minimum) local de f*

Propriété 16 *Soit $a \in \Omega$ tel que $f(a)$ est un un extremum (i.e un maximum ou un minmum) local de f. Alors $\nabla f(a) = (0,0)$.*

Démonstration. Soit v un vecteur non nu. La fonction $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(a+tv)$ définie sur un voisinage ouvert de 0 admet un extremum local en 0. Comme 0 est intérieur à v, $g'(0) = 0$, or c'est précisément la dérivée directionnelle de f en a, i.e $\mathrm{D}_v f(a) = 0$. En particularisant ce résultant aux deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on obtient $\partial_1 f(a) = 0$ et $\partial_2 f(a) = 0$, donc $\nabla f(a) = (0,0)$.

⚠ Attention

Cette condition est nécessaire, mais non suffisante. Des critères suffisants seront abordés l'année prochaine à l'aide de la Hessienne.

Exemple 13 *Cherchons les extrema sur* $\mathbb{R}^2$ *de* $f : (x,y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$*. On commence par remarquer* f *est doublement périodique de période* (π,π) *et paire, ce qui permet de restreindre l'étude au pavé* $\mathrm{P} = [0,\pi/2] \times [-\pi/2,\pi/2]$*. De plus,* f *est* C^1 *et*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x,y) = \sin(y)(\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)) = \sin(y)\sin(2x+y)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_2 f(x,y) = \sin(x)(\cos(y)\sin(x+y) + \sin(y)\cos(x+y) = \sin(x)\sin(2y+x)$$

Par conséquent, les seuls points critiques de f *dans* P *sont* $(0,0)$ *et* $(\pi/3,\pi/3)$

On a d'une part, $f(0,0) = 0$ *et* $\forall x \in \mathbb{R} f(x,x) = \sin^2 x \sin(2x)$ *qui change de signe en* 0*. Par conséquent,* f *n'admet pas d'extremum local en* $(0,0)$*. On peut prouver que* f *admet un maximum local en* $(\pi/3,\pi/3)$ *égal à* $3\sqrt{3}/8$ *à l'aide d'outils de seconde année.*

Exemple 14 *Recherchons les extrema sur* $\mathbb{R}^2$ *de* $f : (x,y) \mapsto -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$*. Cette fonction est de classe* C^1 *et*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 4(x-y), \partial_2 f(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$$

Par conséquent, $(0,0)$ *est un point critique de* f*. Si* (x,y) *est un autre point critique, alors* $x+y=0$ *et* $x^3 - 2x = 0$*, ce qui donne deux points critiques* $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ *et* $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$*.*

Le point $(0,0)$ *n'est pas un extremum car* $\forall x \in]0,2[, f(x,-x) = -2x^2(4-x^2) < 0$ *et* $f(x,x) = 2x^4 > 0$*. Pour* $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$*, on assemble pour tout* (h,k) *au voisinage de* 0*,*

$$f(\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+h) = -8 + \left(10h^2 + 4hk + 10k^2\right) + 4\sqrt{2}(h^3 - k^3) + h^4 + k^4 = -8 + \mathrm{Q}(h,k) + o(\|h,k\|^2)$$

avec $\mathrm{Q}(h,k) = 10h^2 + 4hk + 10k^2 + 10(h-k/5)^2 + 48k^2/5 \geqslant 0$*. Cela prouve que* f *atteint un minimum local en* $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$*. Comme* f *est paire, on en déduit que c'est également le cas en* $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$*.*

Exercice 6 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$*. Quelle est la borne supérieure de* f *sur* $[0,1]^2$ *? Passer par* $\ln(f)$ *pour l'intérieur. Etudes aux bords. Etude de* $x \mapsto f(x,1)$*.*