Exercices : Toutes notions sur les programmes de Kholle 9, 10 et 11.

Cours

Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours et sont des points du programme. Ceux marqués d'une double astérisque, sont des exemples ou compléments traités en classe et qui sont en tant que tels, des exercices à savoir faire et exposer.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. ($\star$) Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$. ($\star\star$) L'application $\chi : A \mapsto \chi_A$ est continue.
Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. ($\star\star$) Exemple de Calcul : le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon ($\star$) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre. ($\star$) La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres. Traduction matricielle. Cas des projecteurs, des symétries. Interprétation en termes d'endomorphisme. Dans les exercices pratiques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes. ($\star$) Il y a équivalence entre : - u est diagonalisable. - La somme des sous-espaces propres de u est égale à E. -La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à la dimension de E. -χ_u est scindé et pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle. Cas où χ_u est scindé à racines simples.

Contenus	Capacités & Commentaires
($\star$) Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé. ($\star$) Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.	

e) Endomorphisme et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
($\star$) Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. ($\star$) Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
($\star$) Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé.	

f)Endomorphisme nilpotent et matrice nilpotente

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie n , matrice nilpotente.	
($\star$)Il y a équivalence entre -u est un endomorphisme nilpotent de E. -u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. -$\chi_u = X^n$	($\star$) Caractérisation d'une matrices nilpotente avec le polynôme caractéristique, similitude avec une matrice triangulaire stricte.
($\star$) L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques

($\star\star$) Théorème de Cayley-Hamilton. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé; ($\star$ E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u. ($\star$) Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	La démonstration n'est pas exigible. ($\star$) Dimension d'un sous-espace caractéristique.