Kholle 13 filière MPSI/MP2I
Planche 1

⋆⋆⋆

1. Soit G un groupe et A une partie de G. Définition du sous-groupe engendré par A. Démontrer qu'il s'agit du plus petit sous-groupe de G contenant A.
2. Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On suppose que $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Montrer que $H \subset K$ ou $K \subset H$.
3. On note $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On le munit de la loi suivante :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in G^2, \quad (x,y) \otimes (x',y') = (xx', xy' + y)$$

   Montrer que cette structure est un groupe, puis qu'elle est non isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$.

⋆⋆⋆

Kholle 12 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Que valent $f(e_G)$ et $f\left(x^{-1}\right)$ pour tout élément x de G ? Le démontrer.
2. Exhiber deux groupes de cardinal 4 non isomorphes. Montrer qu'il s'agit des deux seuls groupes de cardinal 4 à isomorphisme près.
3. Soit G un groupe et H une partie finie de G non vide et stable par la lci de G. Montrer que H est un sous-groupe de G.

⋆⋆⋆

Kholle 13 filière MPSI/MP2I
Planche 3

★★★

1. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Définition du noyau et de l'image de f. Démontrer qu'il s'agit de groupes.
2. On considère $G =]-1,1[$. On le munit de l'application $\oplus : G^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to (x+y)/(1+xy) = x \oplus y$. Montrer qu'il s'agit d'une loi de composition interne et que $(G,\oplus)$ est un groupe.
3. Soit G un groupe. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul n tel que l'application $f : G \to G, x \mapsto x^n$ est un morphisme de groupe surjectif.
   (a) Démontrer qu'alors
   $$\forall (x,y) \in G^2, \quad x^{n-1}y = yx^{n-1}$$
   (b) On suppose de plus que l'application $G \to G, x \mapsto x^{n-1}$ est surjective. Démontrer qu'alors G est commutatif.

★★★

Kholle 13 filière MPSI/MP2I
Bonus

★★★

1. Soit G un groupe. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe pour le produit d'applications. Déterminer $\widehat{\mathbb{U}_3}$.
2. On se donne Q un ensemble à 8 éléments notés

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

On définit une table de multiplication sur Q via la table

	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

Démontrer que Q muni de cette loi est un groupe non commutatif, mais que tous ses sous-groupes stricts sont commutatifs.

★★★