On cherche à déterminer
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\frac{x^4}{4}} = \int_0^1 \frac{4dx}{4+x^4}$$
Factorisation :
$$X^4+4 = X^4+4X^2+4-4X^2 = (X^2+2)^2-(2X)^2 = (X^2+2X+2)(X^2-2X+2)$$
Forme de la décomposition en éléments simples :
$$\frac{4}{4+X^4} = \frac{aX+b}{X^2+2X+2} + \frac{cX+d}{X^2-2X+2}$$
Parité et unicité de la décomposition en éléments simples :
$$a=-c \quad \text{et} \quad b=d$$
Evaluation en 0 :
$$1 = \frac{b}{2}+\frac{b}{2} = b$$
Evalution en 1 :
$$\frac{4}{5} = \frac{a+b}{5} + \frac{-a+b}{1} = \frac{-4a+6b}{5} = \frac{-4a+6}{5} \quad \text{donc} \quad 4a = 6-4 = 2, \quad a = \frac{1}{2}$$
Décomposition en éléments simples :
$$\frac{4}{4+X^4} = \frac{\frac{1}{2}X+1}{X^2+2X+2} + \frac{\frac{-1}{2}X+1}{X^2-2X+2}$$
Changement de variable $u = x+1$
$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{u}{1+u^2}+\frac{1}{1+u^2}\right)du$$
Primitivation
$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+\arctan(u)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ln(5)+\frac{1}{2}\arctan(2)-\frac{1}{4}\ln(2)-\frac{1}{2}\arctan(1)$$
Changement de variable $v = x-1$
$$\int_0^1 \frac{\frac{-1}{2}x+1}{x^2-2x+2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x-1)-1}{(x-1)^2+1}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^0 \left(\frac{v}{v^2+1}-\frac{1}{v^2+1}\right)dv$$
Primitivation
$$\int_0^1 \frac{\frac{-1}{2}x+1}{x^2-2x+2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+v^2)-\arctan(v)\right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}\ln(2)+\frac{1}{2}\arctan(1)$$
Conclusion
$$\int_0^1 \frac{4dx}{4+x^4} = \frac{1}{4}\ln(5)+\frac{1}{2}\arctan(2)$$