IPESUP 2022/2023

Kholle 18 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Passage au logarithme dans les équivalents.
2. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos(x)^{\sin(x)}$.
3. Résoudre le système non linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$.

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = 1 \\ xyz & = -4 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} & = 1 \end{array}\right.$$

Indication : On pourra exploiter les relations coefficients-racines

★★★

Kholle 18 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Unicité du développement limité sous réserve d'existence.
2. Développement à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.
3. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Démontrer que pour tout entier n la fonction

$$H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n \frac{G^{(n)}(x)}{G(x)}$$

   est polynomiale. Quel est son degré et son coefficient dominant ?

⋆⋆⋆

Kholle 18 filière MPSI/MP2I
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Formule de Taylor-Young
2. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1+\sin(x))^{-1/2}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines complexes du polynômes $P = (X+1)^n - e^{i2n\alpha}$.
   En déduire la valeur de
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right)$$

⋆⋆⋆

Kholle 18 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Soit A, B, C trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants, premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A + B = C$. On note m le nombre de racines complexes distinctes de ABC. Montrer que
$$A\left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}\right) = B\left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B}\right)$$
En déduire que $\max(d(A), d(B), d(C) < m$.

2. En déduire que si $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, il n'existe pas de polynômes P, Q, R dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n + R^n = 0$, sans que P, Q et R soient tous égaux à une constante multiplicative près à un même polynôme.

⋆⋆⋆