Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$) sur le chapitre 21 : Séries numériques. Les exercices porteront sur la fin des applications linéaires et les séries numériques. Notez que les matrices n'ont pas encore abordées du point de l'algèbre linéaire.

# Chapitre 21 : Séries numériques

## Suites et séries

Notion de série, série convergente, divergente. L'ensemble des séries convergentes est un sev. Linéarité de la somme en cas de convergence. Reste d'une série convergente. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière. Exemples de télescopage. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature. CNS de convergence d'une série géométrique, expression de la somme en cas de convergence. ($\star$) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$.

## Séries à termes réels positifs ou nuls

Une série à termes positifs est convergente ssi la suite de ses sommes partielles est majorée. ($\star$) Comparaison des séries à termes positifs. ($\star$) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n$ de signe positif, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Critère de D'Alembert.

## Outils d'intégration

($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonction décroissante positive continue. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt$ et $\sum f(n)$ a même nature que $(\int_0^n f(t)dt)_n$. ($\star$) CNS de convergence des séries de Riemann.

## Séries absolument convergentes

Notion d'absolue convergence. ($\star$) L'absolue convergence entraîne la convergence. Espace $\ell^1(\mathbb{K})$, l'application $N : \ell^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+, u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est définie positive, positivement homogène et vérifie l'inégalité triangulaire. ($\star$) Si $u_n = O(v_n)$, $(v_n)_n$ positive et $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente. ($\star$) Formule de Stirling (on ne démontre que la forme de l'équivalent et non la constante $\sqrt{2\pi}$).

## Séries alternées

($\star$) Critère spécial des séries alternées.

$\star$ $\star$ $\star$ $\star$ $\star$