Topologie de $\mathbb{R}$

Cornou Jean-Louis

14 novembre 2022

1 Ensembles de nombres.

1.1 Un peu de théorie des ensembles

Axiome 1 *Il existe un ensemble infini qui contient $\emptyset$ et stable par application du sucesseur $x \mapsto x \cup \{x\}$. Le plus petit de ces ensembles s'appelle ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$.*

Exemple 1 *On note* $0 = \emptyset$ *et* $1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$.

Définition 1 *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On définit l'addition de n et 1, comme le successeur de n, noté $n+1$.*

L'axiomatique de $\mathbb{N}$ permet de définir des applications par récurrence. On construit ainsi l'addition de deux entiers naturels, leur produit, la puissance de l'un par l'autre. La relation d'ordre de $\mathbb{N}$ découle de l'inclusion entre parties.

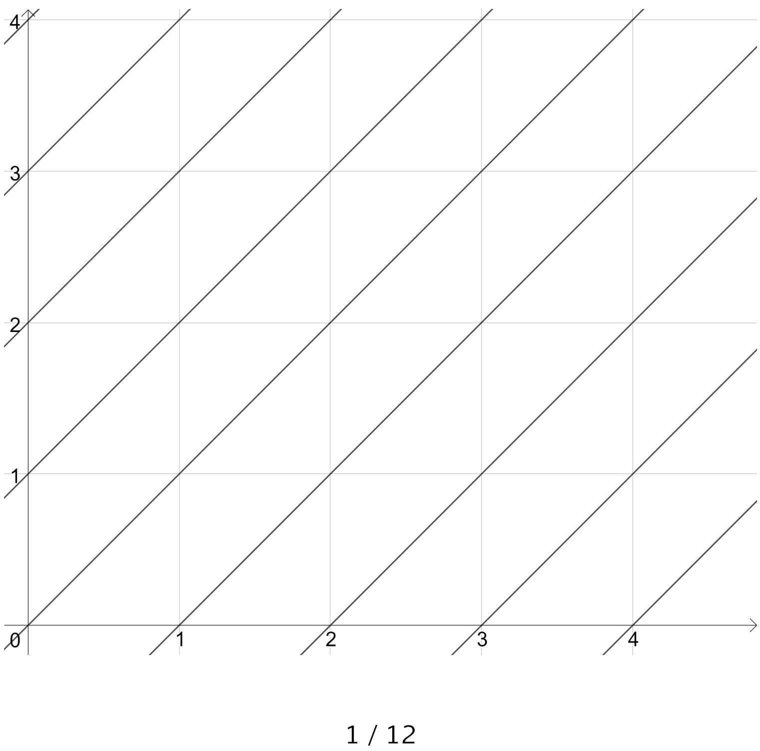
Propriété 1 *On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^2$ via*

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4, (a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a+d = b+c$$

Cette relation est une relation d'équivalence. De plus, pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathrm{C}(a,b) = \{(a+n, b+n) | n \in \mathbb{N}\}$$

Définition 2 *L'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$ est appelé ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$.*



Propriété 2 *Soit p un élément de $\mathbb{Z}$ et (a,b) un représentant de p , q un élément de $\mathbb{Z}$ et (c,d) un représentant de q. Alors on définit la somme de p et q dans $\mathbb{Z}$ via $p+q = \mathrm{C}(a+b, c+d)$. Cette définition ne dépend pas des représentants de p et q choisis.*

Propriété 3 *Soit p un élément de $\mathbb{Z}$, alors $p + \mathrm{C}(0,0) = p$. Si (a,b) est un représentant de p, alors $p + \mathrm{C}(b,a) = \mathrm{C}(0,0)$. On note alors $0_{\mathbb{Z}} = \mathrm{C}(0,0)$ et $-p = \mathrm{C}(b,a)$. Cette définition ne dépend pas du représentant (a,b) de p choisi.*

La multiplication de $\mathbb{Z}$ s'étend naturellement.

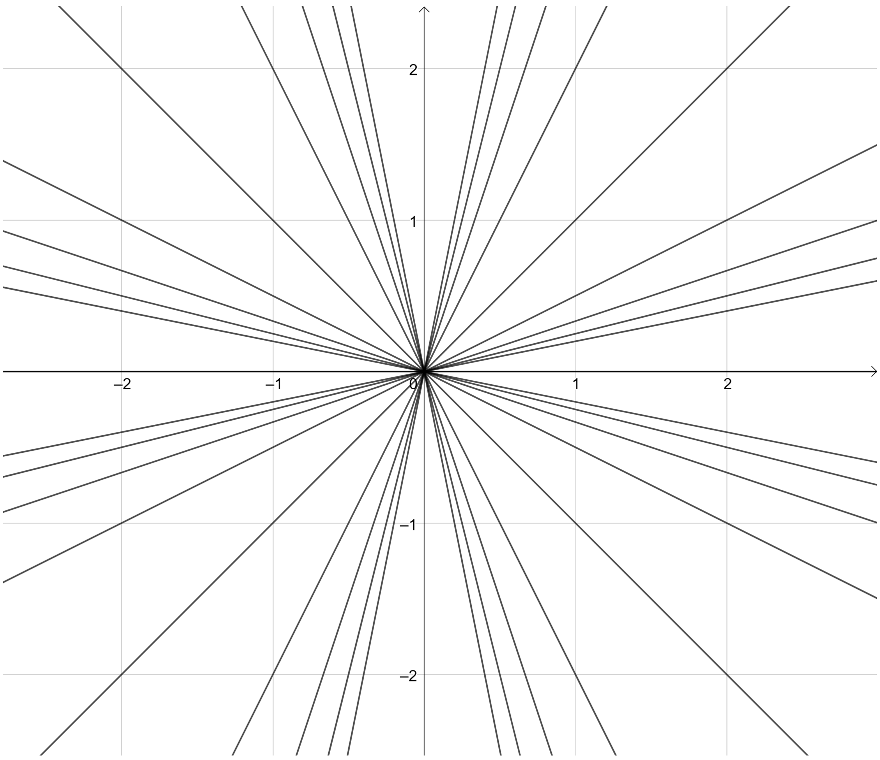
Propriété 4 *On définit une relation binaire sur $\mathbb{Z}^2$ via*

$$\forall (p,q,r,s) \in \mathbb{Z}^4, (p,q)\mathcal{R}(r,s) \iff ps = rq$$

Cette relation induit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. De plus, pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$,

$$\mathrm{C}(a,b) = \{(an, bn) | n \in \mathbb{Z}^*\}$$

Définition 3 *L'ensemble quotient $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\mathcal{R}$ est appelé ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$.*



Propriété 5 *Soit p, q des rationnels. On note (a,b) un représentant de p et (c,d) un représentant de q. On définit alors le produit $pq = \mathrm{C}(ac, bd)$, cette définition ne dépend pas des représentants choisis de p et q choisis. On définit la somme $p+q = \mathrm{C}(ad+bc, bd)$, cette définition ne dépend pas des représentants choisis de p et q.*

Propriété 6 *On définit $0_{\mathbb{Q}} = \mathrm{C}(0,0)$ et $1_{\mathbb{Q}} = \mathrm{C}(1,1)$. Soit $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ et (a,b) un représentant de p. Alors $\mathrm{C}(b,a)\mathrm{C}(a,b) = \mathrm{C}(1,1) = 1_{\mathbb{Q}}$. Tout rationnel non nul dispose ainsi d'un inverse.*

Exemple 2 *Une suite de rationnels gênante. On définit par récurrence la suite de rationnels suivante :*

$$u_0 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

On vérifie par récurrence qu'elle est bien définie. Il suffit d'établir par exemple que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \geq u_n \geq 1$, ce qui assure qu'on peut bien diviser par u_n. L'initialisation est claire d'après le choix de u_0. Soit n

un entier tel que $1 \leq u_n \leq 2$. Alors, toutes quantités positives, $1 = \frac{2}{2} \leq \frac{2}{u_n} \leq \frac{2}{1} = 2$, ce qui implique $\frac{1}{2}(1+1) \leq \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2}(2+2)$ soit encore $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. D'autre part, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1}^2 - 2| = \frac{1}{4}\left|u_n^2 + 4 + \frac{4}{u_n^2} - 8\right| = \frac{1}{4}\left|u_n - \frac{2}{u_n}\right|^2 = \frac{1}{4u_n^2}\left|u_n^2 - 2\right|^2 \leq \frac{1}{4}\left|u_n^2 - 2\right|^2$$

Grâce à la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{Q}^+$, on en déduit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n^2 - 2| \leq 2^{-2^{n+1}+2}$$

En effet, pour $n = 0$, $|u_0^2 - 2| = |1-2| = 1$, tandis que $2^{-2^1+2} = 2^{-2+2} = 2^0 = 1$. Soit n un entier naturel tel que $|u_n^2 - 2| \leq 2^{-2^{n+1}+2}$. Alors d'après ce qui précède, la croissance du carré sur $\mathbb{Q}^+$ implique

$$|u_{n+1}^2 - 2| \leq \frac{1}{4}\left(2^{-2^{n+1}+2}\right)^2 = 2^{-2^{n+2}+4-2} = 2^{-2^{n+2}+2}$$

En particulier, pour tous entiers p et q, on a

$$|u_p - u_q| = \frac{|u_p^2 - u_q^2|}{|u_p + u_q|} \leq 2|u_p^2 - u_q^2| \leq 2\left|u_p^2 - 2 - (u_q^2 - 2)\right| \leq 2(\left|u_p^2 - 2\right| + \left|u_q^2 - 2\right|) \leq 2^{-2^{p+1}+3} + 2^{-2^{q+1}+3}$$

Ainsi, les termes de cette suite rationnelle se rapprochent indéfiniment les uns des autres. On serait alors tenté de dire qu'elle converge. Cependant, si elle admettait une limite rationnelle l, celle-ci vérifierait $l^2 = 2$ et on sait bien que ceci est absurde. Par conséquent, elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Cet exemple (parmi tant d'autres) motive la construction de $\mathbb{R}$ comme « complétion » de $\mathbb{Q}$.

Pour construire $\mathbb{R}$, on peut considérer l'ensemble des suites de rationnels « dont les termes se rapprochent indéfiniment ». On le munit d'une relation d'équivalence en disant que deux telles suites sont en relation si leur différence tend vers 0. L'ensemble quotient correspondant est l'ensemble des réels et il vérifiera que toute suite réelle « dont les termes se rapprochent indéfiniment » est convergente.

Définition 4 *Soit $-\infty$ et $+\infty$ des objets distincts non réels. On appelle droite réelle achevée l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ qui prolonge celle des réels et vérifie :*

$$\forall a \in \mathbb{R}^2, -\infty \leq a \leq +\infty$$

On note $\overline{\mathbb{R}}$ cet ensemble. $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ est alors un ensemble totalement ordonné.

⚠ Attention
La droite réelle achevée ne dispose pas de règles d'addition ou du multiplication, uniquement d'une relation d'ordre.

1.2 Parties de $\mathbb{R}$.

Définition 5 *Soit x un réel et n un entier naturel. On appelle approximation décimale à 10^{-n} près par défaut de x le rationnel $\lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$. Le rationnel $(\lfloor 10^n x \rfloor + 1)10^{-n}$ est appelé approximation décimale à 10^{-n} près par excès de x.*

Propriété 7 *En notant $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites d'approximations décimales de x par défaut et par excès, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n \leq x < e_n = d_n + 10^{-n}$$

Les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limite x.

Démonstration. Soit n un entier naturel. Rappelons que la partie entière $\lfloor y \rfloor$ d'un réel y vérifie $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Alors en appliquant ceci au réel $y = 10^n x$, il vient

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

Comme $10^{-n} > 0$, on obtient par multiplication par 10^{-n}

$$\lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n} \leq x < \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n} + 10^{-n}$$

On reconnaît alors

$$d_n \leq x < e_n = d_n + 10^{-n}$$

On déduit de cet encadrement par addition de $-d_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x - d_n < 10^{-n}$$

Alors, comme 10^{-n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, par théorème d'encadrement, la suite $(x-d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convegente de limite x. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = d_n + 10^{-n}$, on en déduit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente de limite x.

Exercice 1 *Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Que serait une approximtion à p^{-n} près par défaut de x ? par excès ? Quel encadrement vérifient-elles ? Y a-t-il également convergence quand n tend vers $+\infty$?*

Propriété 8 *Soit I un intervalle réel tel que $\mathring{\mathrm{I}} \neq \emptyset$. Alors il existe (a, b) dans I^2 tel que $a < b$ et $]a, b[\subset \mathrm{I}$.*

Démonstration. D'après la liste des intervalles, I est nécessairement différent de $\emptyset$ et des singletons $\{a\} = [a, a]$ pour tout réel a. Par conséquent, il contient deux éléments distintcts a et b qu'on ordonne de manière croissante (quitte à les ordonner, puisque la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ est totale). Par transivité de la relation d'ordre, $\forall x \in]a, b[, x \in \mathrm{I}$, donc $]a, b[\subset \mathrm{I}$.

Définition 6 *On dit qu'un intervalle réel I est ouvert lorsque $\mathring{\mathrm{I}} = \mathrm{I}$. D'après la liste des intervalles faite au chapitre 3, cela équivaut au fait que I est d'une des formes suivantes*

$$]-\infty, +\infty[, \quad]-\infty, b[, \quad]a, +\infty[, \quad]a, b[, \quad \emptyset$$

Définition 7 *Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout intervalle I ouvert non vide, $\mathrm{I} \cap \mathrm{X} \neq \emptyset$ (on dit que I rencontre X).*

☞ **Remarque**

Le fait de préciser que les intervalles considérés sont ouverts non vides est vital. Sinon la définition est pauvre, $\mathbb{R}$ serait la seule partie dense (considérer tous les singletons de $\mathbb{R}$).

Propriété 9 *Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Alors X est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{X}^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} x_n = a$$

Démonstration. Supposons que X est dense dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel. Soit n un entier naturel. Considérons l'intervalle réel $\mathrm{I}_n =]a - 2^{-n}, a + 2^{-n}[$. Comme $2^{-n} > 0$, il n'est ouvert non vide, donc il contient un élément de X, notons-le x_n. On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a - 2^{-n} < x_n < a + 2^{-n}$$

Comme 2^{-n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
Réciproquement, supposons que X vérifie la propriété indiquée. Montrons alors que X est dense dans $\mathbb{R}$. Soit donc I un intervalle réel ouvert non vide et un sous-intervalle $]a, b[$ avec $a < b$ comme prouvé précédemment. En particulier, il existe une suite d'éléments de X qui tend vers $(a+b)/2$. Notons-la $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme elle tend vers $(a+b)/2$, on peut choisir un rang N tel que $|x_{\mathrm{N}} - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$ puisque $b - a > 0$. Mais alors

$$-\frac{b-a}{2} < x_{\mathrm{N}} - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$$

soit encore

$$a < x_{\mathrm{N}} < b$$

Ainsi, $x_{\mathrm{N}} \in]a, b[\subset \mathrm{I}$, donc $x_{\mathrm{N}} \in \mathrm{I}$ et $\mathrm{I} \cap \mathrm{X} \neq \emptyset$.

Théorème 1 *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Dans le cas de $\mathbb{Q}$, la propriété précédente entraîne qu'il suffit de démontrer que tout réel est limite d'une suite de rationnels. Or les approximations décimales fournissent une telle suite. Par conséquent, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Prouvons à présent que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel, construisons une suite d'irrationnels de limite a.

— Premier cas : a est irrationnel. Dans ce cas, il suffit de choisir la suite constante égale à a qui est bien à valeurs irrationnelles.

— Deuxième cas : a est rationnel. On remarque alors astucieusement que $a+\sqrt{2}$ est irrationnel (puisque $\mathbb{Q}$ est stable par addition et soustraction et $\sqrt{2}$ est irrationnel). D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite $a+\sqrt{2}$. Mais alors, par le même argument que précédemment, la suite $(q_n-\sqrt{2})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs irrationnelles et convergente de limite $a+\sqrt{2}-\sqrt{2}=a$.

Dans tous les cas, on a construit une suite adéquate, donc $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Application 1 (Les fonctions additives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est additive, i.e*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Alors, $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$, donc $f(0)=0$. De plus, $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$. On en déduit via une récurrence rapide que

$$\forall n\in\mathbb{N}, f(n)=nf(1)$$

Mais alors, soit m un entier relatif négatif. On a $0=f(0)=f(-m+m)=f(-m)+f(m)$. D'après ce qui précède, on a alors $f(m)=-f(-m)=-(-mf(1))=mf(1)$. Ainsi,

$$\forall m\in\mathbb{Z}, f(m)=mf(1)$$

Soit q un rationnel, on note $q=r/s$ avec $(r,s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$. Alors

$$sf(q)=\underbrace{f(q)+\cdots+f(q)}_{s\text{ termes}}=f(sq)=f(r)=rf(1)$$

Comme s est non nul, on en déduit que $f(q)=qf(1)$.
On ne peut poursuivre le raisonnement à $\mathbb{R}$ sans une hypothèse supplémentaire. Supposons à présent que f est de plus continue. Alors soit a un réel. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on dispose de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels de limite a. Ce qui précède assure que

$$\forall n\in\mathbb{N}, f(q_n)=q_nf(1)$$

Comme f est continue, $f(q_n)$ tend vers $f(a)$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit par passage à la limite que

$$f(a)=af(1)$$

et ce pour tout réel a. En conclusion, $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=xf(1)$, i.e f est une homothétie. Réciproquement, une telle application est clairement continue et additive.

Exercice 2 *Montrer que toute fonction additive monotone est une homothétie.* Indication : on pourra utiliser les encadrements des approximations décimales.

Propriété 10 *Soit* I *un intervalle réel d'intérieur non vide. Alors* I *contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.*

Démonstration. On va construire par récurrence une suite strictement décroissante de rationnels de I pour établir que I contient une infinité de rationnels. Comme I est d'intérieur non vide, il contient un sous-intervalle de la forme $]c,d[$ avec $c<d$. Comme $]c,d[\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$, il existe un rationnel dans $]c,d[$, notons le q_0. On considère alors l'intervalle $I_1=]c,q_0[$, il est ouvert non vide car q_0 est différent de c car dans $]c,d[$. Par conséquent, il existe un rationnel dans I_1 que l'on note q_1 et il vérifie $c<q_1<q_0$. Soit n un entier naturel non nul, supposons construit un rationnel q_n tel que $c<q_n<q_{n-1}$. Alors l'intervalle $I_{n+1}=]c,q_n[$ est ouvert non vide, puisque $c<q_n$, donc il contient un rationnel que l'on note q_{n+1}. Celui-ci vérifie de plus $c<q_{n+1}<q_n$. On a ainsi construit une suite strictement décroissante de rationnels dans $]c,d[$ donc dans I, ce qui prouve que I contient une infinité de rationnels puisqu'une application strictement décroissante est injective.
On peut procéder de manière similaire pour l'infinité de rationnels ou alors remarquer que l'intervalle $\{a+\sqrt{2}|a\in I\}$ est d'intérieur non vide donc contient une infinité de rationnels $(q_a)_{a\in A}$ avec A infini. Mais alors les irrationnels $(q_a-\sqrt{2})_{a\in A}$ sont en nombre infini et appartiennent à I.

Exemple 3 *On note* $E=\{p2^{-n}+m|n\in\mathbb{N},p\in[\![0,2^n-1]\!],m\in\mathbb{Z}\}$. *Alors* E *est dense dans* $\mathbb{R}$. *En effet, pour tout réel x dans $[0,1[$, on dispose de l'approximation dyadique $\lfloor 2^nx\rfloor 2^{-n}$ de limite x. De plus, $p=\lfloor 2^nx\rfloor<2^nx<2^n\leq 2^n-1$. On propose alors la suite $\lfloor 2^n(x-\lfloor x\rfloor)\rfloor 2^{-n}+\lfloor x\rfloor$ qui est bien à valeurs dans* E *et de limite $x-\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor=x$.*

Exercice 3 *Soit* X *une partie de* $\mathbb{R}$. *On suppose que*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow]a,b[\cap X \neq \emptyset.$$

Montrer que X *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 4 *On considère l'ensemble* $\mathbb{D}$ *des décimaux, i.e des rationnels de la forme* $p10^{-n}$ *avec* p *parcourant* $\mathbb{Z}$ *et* n *parcourant* $\mathbb{N}$. *Montrer que cet ensemble est dense dans* $\mathbb{R}$.

2 Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

2.1 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Les constructions de $\mathbb{R}$ sont toutes très techniques et demandent beaucoup d'outils de topologie générale qui sont sorties du programme de seconde année. On propose pour l'année de maths sup la construction axiomatique suivante.

Définition 8 *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné. On rappelle qu'une partie* X *de* E *admet une borne supérieure lorsque l'ensemble des ses majorants admet un minimum. Ce minimum est alors unique, appelé la borne supérieure de* X, *noté* sup X.
On dit que $(E, \leq)$ *vérifie la* ***propriété de la borne supérieure****, lorsque toute partie* X *de* E *non vide et majorée admet une borne supérieure.*

Exemple 4 *L'ensemble* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure. La partie* $\{q \in \mathbb{Q} | q^2 < 2\}$ *est non vide, majorée, mais n'admet pas de borne supérieure (cf chapitre 3).*

Théorème 2 (admis) *L'ensemble des réels* $\mathbb{R}$ *est totalement ordonné et vérifie la propriété la borne supérieure, i.e toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

☞ **Remarque**
On peut montrer que tout corps totalement ordonné et vérifiant la propriété de la borne supérieure est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Démonstration. Voici une idée de preuve en se basant sur la notion de « complétude » de $\mathbb{R}$. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On note a un élément de A et M un majorant de A. Alors on examine le réel $(a+M)/2$, si c'est un majorant de A, on recommence avec la paire $(a, (a+M)/2)$, sinon on considère la paire $((a+M)/2, M)$. On construit ainsi par récurrence une suite (a_n, M_n) telle que pour tout entier n, M_n est un majorant de A. L'écart entre les termes de cette suite sont des sommes de suites géométriques de raison 1/2 donc qui tendent vers 0. Ainsi, les termes de la suite (M_n) se rapprochent indéfiniment. La complétude de $\mathbb{R}$ assure que cette suite converge. Sa limite sera le minimum des majorants de A par construction (à prouver), ce qui fournit l'existence de la borne supérieure de A.

Exemple 5 *Soit* a *et* b *deux réels, alors* $\sup(]a,b[) = \min([b,+\infty[) = b$.
D'autre part, $\sup(]a,b]) = \min([b,+\infty[) = b$.

Théorème 3 *Soit* X *une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *et* a *un réel. Alors*

$$a = \sup(X) \iff (\forall x \in X, x \leq a) \wedge (\forall y < a, \exists x \in X, y < x)$$

⚠ **Attention**
Ce théorème est fondamental et doit devenir une seconde nature pour la détermination de bornes supérieures!

Démonstration. Procédons par double implication. Supposons que $a = \sup(X)$ et montrons les deux propriétés attendues. Comme $a = \sup(X)$, c'est un majorant de X, donc $\forall x \in X, x \leq a$. Supposons qu'il existe un réel $y < a$ tel que $\forall x \in X, y \geq x$. Alors y est un majorant de X strictement plus petit que a. Par conséquent, a n'est plus le minimum des majorants de X, ce qui est absurde. On en déduit la négation de cette supposition, i.e $\forall y < a, \exists x \in X, y < x$.
Supposons à présent que a vérifie les deux propriétés de droite et démontrons que $a = \sup(X)$. Comme $\forall x \in X, x \leq a$, on en déduit que a est un majorant de X. Soit alors b un majorant de X, montrons que $a \leq b$, ce qui suffira à établir que a est le minimum des majorants de X. Supposons par l'absurde que $b < a$. Alors d'après la seconde assertion, il existe un élément x de X tel que $b < x$. Dans ce cas, b ne majore plus l'élément x de X, ce qui contredit son statut de majorant de X. Donc l'assertion $b < a$ est absurde, donc $a \leq b$. Ainsi, a est le minimum des majorants de X, ie. $a = \sup(X)$.

Propriété 11 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$*, alors*

— *Si* $\mathrm{A} = \emptyset$*, alors* $\sup(\mathrm{A}) = -\infty$*.*

— *Si* A *est non vide, alors*

  — *Si* A *possède un majorant réel, alors la borne supérieure de* A *dans* $\mathbb{R}$ *est la même dans* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

  — *Si* A *ne possède pas de majorant réel, alors* $\sup(\mathrm{A}) = +\infty$*.*

Démonstration. Dans le premier cas, l'ensemble des majorants de $\emptyset$ est $\overline{\mathbb{R}}$, dont le minimum vaut $-\infty$. Dans le second cas, alors l'ensemble des majorants de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ est celui de A dans $\mathbb{R}$ auquel on adjoint $+\infty$. Dans ce cas, le minimum de cet ensemble de majorants est réel et vaut la borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$. Dans le dernier cas, l'ensemble des majorants de A se réduit au singleton $+\infty$, donc de minimum $+\infty$ et $\sup(\mathrm{A}) = +\infty$.

Convention
On convient, en se basant sur la relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ *que* $\sup(\emptyset) = -\infty$*. Pour toute partie* X *non vide et non majorée, on convient que* $\sup(\mathrm{X}) = +\infty$*. Cette convention permet notamment d'étendre le théorème de caractérisation des bornes supérieures. En effet, une partie* X *non vide est non majorée si et seulement si*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathrm{X}, y < x$$

Propriété 12 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$ *admettant un maximum. Alors* $\max(\mathrm{A}) = \sup(\mathrm{A})$*. On dit que la borne supérieure de* A *est atteinte.*

Démonstration. La démarche est classique, on procède par double inégalité. Le maximum de A est un majorant de A donc $\sup(\mathrm{A}) \leq \max(\mathrm{A})$, puisque $\sup(\mathrm{A})$ est le plus petit de ces majorants. D'autre part, $\max(\mathrm{A})$ est un élément de A, donc plus petit que n'importe quel majorant de A, en particulier $\sup(\mathrm{A})$. Ainsi, $\max(\mathrm{A}) \leq \sup(\mathrm{A})$. Ainsi, $\sup(\mathrm{A}) = \max(\mathrm{A})$.

Méthode
Si une partie de $\mathbb{R}$ *admet un maximum, on connaît immédiatement sa borne supérieure, il s'agit de son maximum. Attention, toute partie de* $\mathbb{R}$ *non vide majorée n'admet pas nécessairement pas de maximum. Dans ce dernier cas,* $\sup(\mathrm{A})$ *n'appartient pas à* A*.*

Propriété 13 *Soit* A *et* B *deux parties non vides et majorées de* $\mathbb{R}$ *telles que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$*. Alors* $\sup(\mathrm{A}) \leq \sup(\mathrm{B})$*.*

Démonstration. Technique de preuve fondamentale à retenir. $\sup(\mathrm{B})$ est un majorant de B. Or tout élément de A est un élément de B. Donc

$$\forall a \in \mathrm{A}, a \leq \sup(\mathrm{B})$$

Ainsi, $\sup(\mathrm{B})$ est un majorant de A, donc il est plus grand que le minimum des majorants de A, i.e $\sup(\mathrm{A})$, i.e

$$\sup(\mathrm{A}) \leq \sup(\mathrm{B})$$

Exemple 6 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle majorée. Pour tout entier k, on considère l'ensemble* $\mathrm{A}_k = \{u_n | n \geq k\}$*, l'image de la suite u à partir du rang k. Pour tout entier k, la partie* A_k *est non vide et majorée par un majorant de la suite u. Par conséquent, elle admet une borne supérieure. D'autre part, pour tout entier k,* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k+1 \Rightarrow n \geq k$*, donc*

$$\{n \in \mathbb{N} | n \geq k+1\} \subset \{n \in \mathbb{N} | n \geq k\}.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_{k+1} \subset \mathrm{A}_k$$

D'après la propriété précédente, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sup(\mathrm{A}_{k+1}) \leq \sup(\mathrm{A}_k)$$

Autrement dit, la suite $(\sup(\mathrm{A}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

Propriété 14 *Soit* A *et* B *deux parties non vides et majorées de* $\mathbb{R}$*. On note* $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \{a+b | (a,b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}\}$*. Alors* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *est non vide majorée et*

$$\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leq \sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B})$$

Démonstration. Technique de preuve fondamentale. Soit x un élément de $A+B$, alors $\exists(a,b)\in A\times B, x=a+b$. Mais alors, $a\leq \sup(A)$ et $b\leq \sup(B)$ puisque les bornes supérieures sont des majorants. On en déduit que $x\leq sup(A)+\sup(B)$. Ainsi, on a établi
$$\forall x\in A+B, x\leq \sup(A)+\sup(B),$$
donc que $A+B$ est majorée par $\sup(A)+\sup(B)$. Comme elle est non vide (A et B sont non vides), $A+B$ admet une borne supérieure et $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$, donc plus petit que $\sup(A)+\sup(B)$. En conclusion,
$$\sup(A+B)\leq \sup(A)+\sup(B)$$

Exercice 5 *Soit* λ *un réel positif et* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$. *On note* $\lambda A=\{\lambda a|a\in A\}$. *Montrer que* λA *est non vide et majorée et que* $\sup(\lambda A)=\lambda\sup(A)$. *Cela est-il encore vrai pour* λ *strictement négatif ?*

Exercice 6 *Soit* A *et* B *deux parties non vides majorées de* $\mathbb{R}$. *Que peut-on dire de* $\sup(A\cap B)$ *? de* $\sup(A\cup B)$ *?*

Même si les opérations sur les limites de suites ne sont pas encore prouvées à ce stade de l'année, on propose déjà une caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Théorème 4 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure) *Soit* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *et* a *un réel. Alors on a l'équivalence*
$$a=\sup(A)\iff(\forall x\in A, x\leq a)\wedge(\exists(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty}a_n=a)$$

Démonstration. Raisonnons par double implication. Supposons que $a=\sup(A)$. Alors a est un majorant de A, ce qui prouve le premier point. Soit à présent un entier naturel n. D'après la première caractérisation de la borne supérieure, alors le réel $a-2^{-n}$ vérifie $a-2^{-n}<a$, donc il existe un élément a_n de A tel que $a-2^{-n}<a_n$. On a alors l'encadrement $a-2^{-n}<a_n\leq a$. On a ainsi construit une suite d'éléments de A qui converge vers a par théorème d'encadrement.
Suppsosons à présent que a vérifie les deux propriétés indiquées. Montrons alors que a vérifie la seconde partie de la caractérisatin de la borne supérieure. Soit y un réel tel que $y<a$. Alors $a-y>0$ et comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a quand n tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que $|a_N-a|\leq(a-y)/2$, i.e
$$-\frac{a-y}{2}\leq a_N-a\leq\frac{a-y}{2}.$$
En particulier, $a_N\geq a-\frac{a-y}{2}=\frac{a+y}{2}>y$ et $a_N\in A$. On a ainsi prouvé que
$$\forall y<a,\exists x\in A, y<x$$
D'après la caractérisation de la borne supérieure, $a=\sup(A)$.

Exemple 7 *Soit* I *un intervalle non vide majoré de* $\mathbb{R}$ *et* $f:I\to\mathbb{R}$ *une application continue et croissante sur* I. *Montrons alors que* $\sup f(A)=f(\sup(A))$. *Comme* $\sup(A)$ *est un majorant de* A, $\forall x\in A, x\leq\sup(A)$. *On en déduit par croissance de* f *que* $\forall x\in A, f(x)\leq f(\sup(A))$, *donc que* $f(\sup(A))$ *est un majorant de* $f(A)$. *Comme* A *est non vide,* $f(A)$ *est non vide. On en déduit que* $f(A)$ *possède une borne supérieure. D'autre part, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *telle que* $\lim_{n\to+\infty}a_n=\sup(A)$. *On en déduit, via la continuité de* f *que la suite* $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $f(\sup(A))$. *Comme cette dernière suite est à valeurs dans* $f(A)$, *cela entraîne via la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, que* $f(\sup(A))=\sup(f(A))$.

2.2 Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Notation
Pour toute partie A *de* $\mathbb{R}$, *on note* $-A=\{-a|a\in A\}$.

Définition 9 *On rappelle qu'une partie* A *de* $(E,\leq)$ *un ensemble ordonné admet une borne inférieure lorsque l'ensemble de ses minorants admet un maximum. Celui-ci est alors unique et noté* $\inf(A)$.

Théorème 5 *Soit* A *une partie non vide minorée de* $\mathbb{R}$. *Alors* A *admet une borne inférieure et* $\inf(A)=-\sup(-A)$.

Démonstration. Soit m un minorant de A. Alors $\forall x \in \mathrm{A}, m \leq x$, on en déduit par décroissance de $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ que $\forall x \in \mathrm{A}, -x \leq -m$. Par conséquent, $\forall y \in -\mathrm{A}, y \leq -m$. Donc $-m$ est un majorant de $-\mathrm{A}$ et la partie $-\mathrm{A}$ est majorée. Comme A est non vide, $-\mathrm{A}$ est non vide. La propriété de la borne supérieure implique alors que $-\mathrm{A}$ possède une borne supérieure. Motrons alors que $-\sup(-\mathrm{A})$ est la borne inférieure de A.
Comme $\sup(-\mathrm{A})$ est un majorant de $-\mathrm{A}$, on a

$$\forall y \in -\mathrm{A}, y \leq \sup(-\mathrm{A})$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathrm{A}, -x \leq \sup(-\mathrm{A})$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathrm{A}, x \geq -\sup(-\mathrm{A})$$

Par conséquent, $-\sup(-\mathrm{A})$ est un minorant de A. Montrons à présent que c'est le plus grand. Soit m un minorant quelconque de A. Alors d'après les manipulations d'inégalités que précédemment, $-m$ est un majorant de $-\mathrm{A}$. D'après la définition de la borne supérieure, $-m \geq \sup(-\mathrm{A})$, puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants. On en déduit que $m \leq -\sup(-\mathrm{A})$ et ce pour tout minorant de A. Ainsi, $-\sup(-\mathrm{A})$ est le plus grand des minorants de A, i.e sa borne inférieure.

On traduit alors tout le paragraphe précédent sur la borne supérieure au cas de la borne inférieure.

Convention
On convient que $\inf(\emptyset) = +\infty$ *et pour toute partie* A *non vide et non minorée,* $\inf(\mathrm{A}) = -\infty$.

Théorème 6 *Soit* X *une partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *et a un réel. Alors*

$$a = \inf(\mathrm{X}) \iff (\forall x \in \mathrm{X}, x \geq a) \wedge (\forall y > a, \exists x \in \mathrm{X}, y > x)$$

Propriété 15 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$ *admettant un minimum. Alors* $\min(\mathrm{A}) = \inf(\mathrm{A})$. *On dit que la borne inférieure de* A *est atteinte.*

Propriété 16 *Soit* A *et* B *deux parties non vides et minorées de* $\mathbb{R}$ *telles que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. *Alors* $\inf(\mathrm{A}) \geq \inf(\mathrm{B})$.

Propriété 17 *Soit* A *et* B *deux parties non vides et minorées de* $\mathbb{R}$. *Alors* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *est non vide minorée et*

$$\inf(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geq \inf(\mathrm{A}) + \inf(\mathrm{B})$$

Théorème 7 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure) *Soit* A *une partie non vide minorée de* $\mathbb{R}$ *et a un réel. Alors on a l'équivalence*

$$a = \inf(\mathrm{A}) \iff (\forall x \in \mathrm{A}, x \geq a) \wedge (\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} a_n = a)$$

Exemple 8 *Soit x un réel et* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$. *Alors* $\{|x-a| | a \in \mathrm{A}\}$ *est une partie non vide minorée de* A, *sa borne inférieure est la distance de x à* A, *notée* $d(x, \mathrm{A})$. *Par exemple,* $\forall x \in \mathbb{Q}, d(x, \mathbb{Q}) = 0$.

Exercice 7 *Soit x et y deux réels et* A *une partie non vide. Montrer que*

$$|d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A})| \leq |x-y|$$

2.3 Intervalles et partie entière dans $\mathbb{R}$.

On propose ici une rapide application de ces notions aux intervalles de $\mathbb{R}$. Leur définition via une liste de dix cas est lourde à manipuler et on cherche une caractérisation plus maniable.

Définition 10 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit que* A *est convexe lorsque*

$$\forall (a, b) \in \mathrm{A}^2, a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset \mathrm{A}$$

Exemple 9 *Tout segment réel est convexe.* $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *ne sont pas convexes.*

Théorème 8 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$. *Alors* A *est convexe si et seulement si* A *est un intervalle.*

Démonstration. Si A est un intervalle, a, b deux éléments de A, alors d'après la liste faite en chapitre 3, la transitivité de la relation d'ordre assure que $\forall x \in [a, b], x \in A$, donc que A est convexe. Soit A une partie convexe de $\mathbb{R}$. Alors on va distinguer différents cas selon les valeurs de sup(A) et inf(A) dans $\overline{\mathbb{R}}$, sachant que $\inf(A) \leq \sup(A)$ dans le cas où A est non vide. Motrons dans ce cas que l'intervalle $]\inf(A), \sup(A)[$ est inclus dans A. Soit $x \in]\inf(A), \sup(A)[$, alors d'après la caractérisation des bornes supérieure et inférieure, il existe a et b dans A tels que $a < x < b$. Alors $x \in]a, b[\subset [a, b]$. Or la convexité de A entraîne $[a, b] \subset A$, donc $x \in A$.
Il reste alors à distinguer si A contient ses bornes supérieures ou inférieures (ce qui n'est possible que si ces quantités sont réelles).

	$\sup(A) = -\infty$	$\sup(A) \in \mathbb{R} \cap A$	$\sup(A) \in \mathbb{R} \cap A^c$	$\sup(A) = +\infty$
$\inf(A) = -\infty$		$]-\infty, \sup(A)]$	$]-\infty, \sup(A)[$	$\mathbb{R}$
$\inf(A) \in \mathbb{R} \cap A$		$[\inf(A), \sup(A)]$	$[\inf(A), \sup(A)[$	$[\inf(A), +\infty[$
$\inf(A) \in \mathbb{R} \cap A^c$		$]\inf(A), \sup(A)]$	$]\inf(A), \sup(A)[$	$]\inf(A), +\infty[$
$\inf(A) = +\infty$	$\emptyset$			

Dans tous les cas possibles, on trouve bien à chaque fois un intervalle.

On démontre ici le résultat admis sur l'existence de la partie entière. On ne peut pas à ce stade utiliser la caractérisation de la partie entière par encadrement.

Théorème 9 *Soit x un réel, alors $\{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}$ admet un maximum (on rappelle que ce maximum est appelé la partie entière de x).*

Démonstration. On note $A = \{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}$ majorée par x. Si elle était vide, $\mathbb{Z}$ serait non vide, minoré par x, ce qui n'est pas car alors $\inf(\mathbb{Z}) - 1 < \inf(\mathbb{Z})$ est toujours un élément de $\mathbb{Z}$. D'après la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que cette borne supérieure est un maximum. Soit n un entier naturel non nul. On considère les réels $y_n = \sup(A) - 1/n$ et $z = \sup(A) - 1$. Comme ils sont tous deux strictement inférieurs à sup(A), il existe deux éléments p_n et q de A tels que $y_n < p_n \leq \sup(A)$ et $z < q \leq \sup(A)$. Mais alors, l'entier relatif $p_n - q$ vérifie

$$y - \sup(A) < p_n - q < \sup(A) - z$$

i.e

$$-\frac{1}{n} < p_n - q < 1$$

Par conséquent, pour tout entier naturel non nul n, $p_n = q$. D'autre part, la suite (p_n) tend vers sup(A) par encadrement. Par conséquent, $\sup(A) = q$ appartient à A, donc c'est un maximum de A.

Propriété 18 *La fonction partie entière est croissante.*

Démonstration. Soit x et y deux réels tels que $x \leq y$. Alors par transitivité de la relation d'ordre, $\{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\} \subset \{m \in \mathbb{Z}, m \leq y\}$. Par conséquent, $\sup(\{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}) \leq \sup\{m \in \mathbb{Z}, m \leq y\}$. Or a on vu que ces sup étaient des maximums, i.e $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

Exercice 8 *Soit x un réel. Montrer que la partie $\{m \in \mathbb{Z}, m \geq x\}$ admet un minimum.*

Propriété 19 *Soit a un réel strictement positif et b un réel positif. Alors il existe un entier naturel n tel que $na > b$. On dit que l'ensemble des réels est archimédien.*

Démonstration. L'idée centrale est de considérer la partie $A = a\mathbb{N} = \{an | n \in \mathbb{N}\}$. Imaginons un instant que cette partie est majorée par b. Alors A est non vide majorée donc admet une borne supérieure. Mais alors, comme sup(A) est un majorant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a \leq \sup(A)$$

Cela implique en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, na \leq \sup(A) - a$$

Comme a est strictement positif, $\sup(A) - a$ est alors un majorant de A strictement plus petit que sup(A), ce qui contredit la minimalité de sup(A) parmi les majorants de A. Par conséquent, la partie A n'est pas majorée par b, i.e il existe un entier naturel n tel que $na > b$.

2.4 Bornes supérieure et inférieure d'une application à valeurs réelles

Définition 11 *Soit* E *un ensemble non vide et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une application. Si* f *est majorée, on note* $\sup(f) = \sup(f(E))$*. Si* f *est minorée, on note* $\inf(f) = \inf(f(E))$*. Si* f *est n'est pas majorée, on note* $\sup(f) = +\infty$*. Si* f *est n'est pas minorée, on note* $\inf(f) = -\infty$*.*

Notation
On rencontre également les notations $\sup_{x\in E} f(x)$ *ou* $\inf_{x\in E} f(x)$*. Si on restreint l'ensemble de départ de* f *à une partie* F *de* E*, on note également* $\sup_F f$ *ou* $\sup_{x\in F} f(x)$ *ou les notations correspondantes pour les bornes inférieures.*

☞ **Remarque**
La borne supérieure (ou inférieure) porte bien sur l'image de l'application. On peut construire des applications dont l'ensemble de départ est un espace très abstrait et à valeurs dans $\mathbb{R}$*. Par exemple, si l'on considère l'ensemble* $C([a,b],\mathbb{R})$ *des fonctions continues sur un segment* $[a,b]$*, on peut construire l'application* $T : C(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f$ *et considérer les bornes supérieure et inférieure de* T*, même si l'espace* $C([a,b],\mathbb{R})$ *est « gigantesque ». C'est par exemple par une borne supérieure qu'on définira proprement l'intégrale ou une somme de série infinie.*

Exemple 10 *On parle de bornes supérieure et inférieure de suites à valeurs réelles, de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *avec* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Ce sera un outil fondamental pour les prochains chapitres, notamment pour les applications monotones.*

Exemple 11 *Soit* E *l'espace des fonctions polynomiales dont tous les coefficients sont de valeur absolue plus petites ou égales à 1 et* $x_0 \in [0,1[$*. On considère l'application* $u : E \to \mathbb{R}, P \to P(x_0)$*. Alors montrons que* $\sup(u) = 1/(1-x_0)$*. On commence par montrer que* u *est majorée par* $1/(1-x_0)$*. Soit* P *un élément de* E*, on note* n *son degré et* $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ *ses coefficients. Alors, comme* x_0 *et ses puissances sont positives, on a*

$$P(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k \leq \sum_{k=0}^{n} 1 x_0^k = \frac{1-x_0^{n+1}}{1-x_0} \leq \frac{1}{1-x_0}$$

On a ainsi démontré

$$\forall P \in E, u(P) \leq \frac{1}{1-x_0},$$

donc que $1/(1-x_0)$ *est un majorant de* u*. Démotrons à présent que la borne supérieure de* u*. Pour cela, on utilise la caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Pour tout entier naturel* n*, on définit la fonction polynomiale* Q_n *via* $\forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$*. Alors, pour tout entier naturel* n*,* $Q_n \in E$ *et* $u(Q_n) = \frac{1-x_0^{n+1}}{1-x_0}$*. Comme* $x_0 < 1$*, la suite* x_0^{n+1} *tend vers 0, donc* $u(Q_n)$ *tend vers* $1/(1-x_0)$*. Ainsi, il existe une suite de* $u(E)$ *qui tend vers le majorant* $1/(1-x_0)$*, donc c'en est la borne supérieure.*

Exemple 12 *On considère une application* $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ *telle que* $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda z) = |\lambda| N(z)$ *et* A *une partie de* $\mathbb{C}$ *telle que* $N_{|A}$ *est majorée. Montrons que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sup_{z\in A} N(\lambda z) = |\lambda| \sup_{z\in A} N(z).$$

Attention, tout excès de formalisme est invalide ! Soit λ *un réel et* z *un élément de* A*. Alors, comme* $|\lambda|$ *est positif,*

$$N(\lambda z) = |\lambda| N(z) \leq |\lambda| \sup_{z\in A} N(z)$$

Par conséquent $|\lambda| \sup_{z\in A} N(z)$ *est un majorant de* $\{\mathbb{N}(\lambda z) | z \in A\}$*, donc* $\sup_{z\in A} N(\lambda z) \leq |\lambda| \sup_{z\in A} N(z)$*. Démontrons à présent l'inégalité inverse. Pour cela, il faut considérer le cas où* λ *est nul. Dans ce cas, l'égalité revient à montrer que* $N(0) = 0$*, ce qui est immédiat d'après la propriété d'homogénétié absolue de* N*. Supposons à présent que* λ *est non nul. Soit* z *un élément de* A*, alors on écrit*

$$N(z) = N(\frac{1}{\lambda}\lambda z) = \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda z) = \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda z)$$

Comme $1/|\lambda|$ est strictement positif, et l'application $A \to \mathbb{R}, z \mapsto N(\lambda z)$ est majorée d'après ce qui précède, on a alors

$$N(z) \leq \frac{1}{|\lambda|} \sup_{z \in A} N(\lambda z)$$

Ainsi, on a démontré que

$$\forall z \in A, N(z) \leq \frac{1}{|\lambda|} \sup_{z \in A} N(\lambda z)$$

donc que $\frac{1}{|\lambda|} \sup_{z \in A} N(\lambda z)$ est un majorant de $\{N(z) | z \in A\}$, ainsi $\sup_{z \in A} N(z) \leq \frac{1}{|\lambda|} \sup_{z \in A} N(\lambda z)$. Comme $|\lambda|$ est positif, on en déduit que $|\lambda| \sup_{z \in A} N(z) \leq \sup_{z \in A} N(\lambda z)$. Ces deux inégalités combinées fournissent bien l'égalité attendue.