ProBlème 1

1) Soit $A_0 = E_{12} + I_n$ $\quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1

donc par (**)

$\varphi(A_0) = 1 + \mathrm{Tr}(E_{12}) = 1$ $\quad$ donc $\underline{\varphi(A_0) \neq 0}$

2) a Par (*) utilisé avec $A = B = I_n$, on a:

$\varphi(I_n) = \varphi(I_n)^2$ $\quad$ donc $\varphi(I_n)\left(1 - \varphi(I_n)\right) = 0$

et $\varphi(I_n) = 0$ ou $\varphi(I_n) = 1$

Par l'absurde, si $\varphi(I_n) = 0$ Alors par (*)

$\varphi(A_0) = \varphi(A_0 \times I_n) = \varphi(A_0)\varphi(I_n)$ $\quad$ donc $\varphi(A_0) = 0$

ce qui n'est pas.

Ainsi $\underline{\varphi(I_n) = 1}$

2.b Soit $A \in Gl_n(\mathbb{K})$, on a : $\varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\varphi(A^{-1})$

donc $\varphi(I_n) = \varphi(A)\varphi(A^{-1})$

or $\varphi(I_n) = 1$ $\quad$ donc $\varphi(A)\varphi(A^{-1}) = 1$ et $\underline{\varphi(A) \neq 0}$

2.c Soit A, B des matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in Gl_n(\mathbb{K})$

tel que : $A = PBP^{-1}$

Par (*) $\varphi(A) = \varphi(P)\varphi(B)\varphi(P)^{-1} = \varphi(P)\varphi(P^{-1})\varphi(B)$

or $\varphi(P)\varphi(P^{-1}) = \varphi(PP^{-1}) = \varphi(I_n) = 1$ $\quad$ donc

$\underline{\varphi(A) = \varphi(B)}$

3-a) Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$

$$D_i(\alpha) = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1) E_{ii}$$

si $\alpha = 1$ $\quad D_i(1) = I_n$ et $\varphi(D_i(1)) = 1$

si $\alpha \neq 1$ $\quad (\alpha-1)E_{ii}$ est une matrice de rang 1

donc par $(**)$

$$\varphi(D_i(\alpha)) = 1 + (\alpha - 1)\overbrace{Tr(E_{ii})}^{=1} = \alpha$$

Ceci vaut même si $\alpha = 0$ car $D_i(0) = I_n - E_{ii}$ avec $rang(E_{ii}) = 1$

b $\quad T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$ avec $i \neq j$ or αE_{ij} est une matrice de rang 1, donc par $(**)$

$\varphi(T_{ij}(\alpha)) = 1 + Tr(\alpha E_{ij}) = 1$ car $i \neq j$

c $\quad P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \quad (i \neq j)$

$$= I_n + \underbrace{\left[(-E_{ii} + E_{ji}) + (E_{ij} - E_{jj})\right]}_{= A}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \end{array} \begin{pmatrix} \ddots & 0 & & 0 & \\ & -1 & & 1 & \\ & 0 & & 0 & \\ & 1 & & -1 & \\ & 0 & & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1 dont la Trace vaut -2

Par (**), on a $\mathcal{C}(P_{ij}) = 1 + (-2) = -1$

d $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} D_i(\alpha_i)$

On en déduit par (*) étendue à un produit fini que $\mathcal{C}(D) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}(D_i(\alpha_i)) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \det(D)$

4 Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$L_i \leftarrow \alpha L_i$ a pour traduction matricielle $D_i(\alpha) \times A$

$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ a pour traduction matricielle $T_{ij}(\alpha) \times A$

$L_i \leftrightarrow L_j$ a pour traduction matricielle $P_{ij} \times A$

En ce qui concerne les opérations sur les colonnes.

$A \times D_i(\alpha)$ Traduit $\mathcal{C}_i \leftarrow \alpha \mathcal{C}_i$

$A \times T_{ij}(\alpha)$ Traduit $\mathcal{C}_j \leftarrow \mathcal{C}_j + \alpha \mathcal{C}_i$

$A \times P_{ij}$ Traduit $\mathcal{C}_j \leftrightarrow \mathcal{C}_i$

5) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, montrons la propriété

HR_n : " Pour toute matrice $A \in Gl_n(\mathbb{K})$, il existe $T_1, \dots T_r, T'_1, \dots T'_s$ matrices de transvections de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$T_1 \times \dots \times T_r \; A \; T'_1 \times \dots \times T'_s$ soit diagonale "

. Pour $n = 1$, il n'y a rien à prouver

.. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, supposons HR_{n-1}

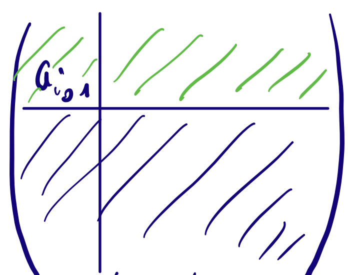
Soit $A = (a_{ij}) \in Gl_n(\mathbb{K})$

i) Si $a_{11} = 0$, comme A est inversible, sa première colonne $C_1(A)$ n'est pas nulle

Soit $i_0 = \min \{ i \in [\![2, n]\!] \mid a_{i1} \neq 0 \}$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_{i_0}$ conduit à une matrice

$A_{11} = T_{1 i_0}(1) \, A =$



avec $a_{i_0 1} \neq 0$. A_{11} est une matrice dont l'élément d'indice $(1,1)$ est non nul

ii) On note $A_{11} = (a'_{ij})$. En fait, seule la ligne 1 de A a été changée.

On " dégraisse " la 1^{re} colonne de A_1 en dessous de a'_{11}

Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} L_1$. On obtient :

$$A_1 = \prod_{i=2}^{n} T_{i1}\left(-\frac{a'_{i1}}{a'_{11}}\right) \times A_{11} = \left(\begin{array}{c|c} a'_{11} \; \cancel{a'_{12}} & \cancel{\cdots \; a'_{1n}} \\ \hline 0 & \\ \vdots & A'_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$\det A = \det A_1 = a'_{11} \det(A'_1)$ comme $\det A \neq 0$,

$\det A'_1 \neq 0$ donc $A'_1 \in Gl_{n-1}(\mathbb{K})$

Par HR_{n-1}, on dispose de $T_1, \dots T_r$, $T'_1, \dots T'_s$ matrices de Transvections de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que

$T_1 \times \dots \times T_r \; A'_1 \; T'_1 \times \dots \times T'_s$ soit une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On pose pour $i \in [\![1, r]\!]$, $j \in [\![1, s]\!]$

$$\hat{T}_i = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & T_i \end{array}\right) \qquad \widehat{T'_j} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & T'_j \end{array}\right)$$

$\hat{T}_1, \dots \hat{T}_r$, $\widehat{T'_1}, \dots \widehat{T'_s}$ sont des matrices de Transvections de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on a

$$\hat{T}_1 \times \cdots \times \hat{T}_r \times A \times \widehat{T'_1} \times \cdots \times \widehat{T'_s} = \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \hline 0 & \alpha_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \alpha_n \end{array}\right)$$

On a $\det A = \det A_1 = a'_{11} \alpha_2 \times \cdots \alpha_n \neq 0$ donc

$\alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont tous non nuls

On fait alors pour $j \in [\![2, n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j - \frac{a'_{1j}}{a'_{11}} C_1$

On obtient alors

$$A_2 = A_1 \times \prod_{j=2}^{n} T_{1j}\left(-\frac{a'_{1j}}{a'_{11}}\right)$$

En remplaçant, on exhibe un ensemble fini de transvections $\tilde{T}_1, \ldots \tilde{T}_q$, $\tilde{\tilde{T}}_1, \ldots \tilde{\tilde{T}}_r$ tel que

$$\tilde{T}_1 \times \tilde{T}_2 \times \cdots \times \tilde{T}_q \times A \times \tilde{\tilde{T}}_1 \times \cdots \times \tilde{\tilde{T}}_s = \begin{pmatrix} a'_{11} & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

d'où HR_n

Conclusion – $\forall n \in \mathbb{N}^*$, HR_n

Retour : Soit $A \in Gl_n(\mathbb{K})$, $T_1, \ldots T_r$, $T'_1, \ldots T'_s$ matrices de transvections telles que :

● $T_1 \times \cdots \times T_r \times A \times T'_1 \times \cdots \times T'_s = D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Par (*) (étendue à un produit fini de matrices)

$$\prod_{i=1}^{r} \varphi(T_i) \times \varphi(A) \times \prod_{j=1}^{s} \varphi(T'_s) = \varphi(D)$$

Donc par 3-b et 3-d

$$\varphi(A) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{et par } \bullet \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

donc $\boxed{\varphi(A) = \det A}$

6- Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et

$$D_i(0) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

$D_i(0) = I_n - E_{ii}$ avec E_{ii} de rang 1, donc

$\varphi(D_i(0)) = 1 + \mathrm{Tr}(-E_{ii}) = 0$

Or pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$M \times D_i(0) = \begin{array}{c} \ i \\ \ \downarrow \\ \left(C_1(M) \,|\, \dots \,|\, 0 \,|\, \dots \,|\, C_n(M) \right) \end{array}$$

donc

$$J_{nr} = I_n \times D_{r+1}(0) \times \dots \times D_n(0) = \prod_{k=r+1}^{n} D_k(0)$$

donc

$$\varphi(J_{nr}) = \prod_{k=r+1}^{n} \varphi(D_k(0)) = 0$$

NB. On aurait pu remarquer que :

Autre

Preuve

$J_{n,r}$ et $\widetilde{J_{n,r}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$, étant de rang r,

sont équivalentes. On dispose de $(P, Q) \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $J_{nr} = P \widetilde{J_{nr}} Q$. Or $\left(\widetilde{J_{n,r}}\right)^n = 0$ donc par $(*)$ étendue à un produit fini on a :

$$\left(\varphi(\widetilde{J_{nr}})\right)^n = \varphi(0)$$

or $0 = \prod_{i=1} D_i(0)$ donc $\varphi(0) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(D_i(0)) = 0$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r = rg(A)$

Si $A = 0$ $\quad \varphi(A) = 0$

Sinon on a : $1 \leq r < n$ et A est équivalente à J_{nr}

Soit $(P, Q) \in Gl_n(\mathbb{K})^2$ tel que : $A = P J_{nr} Q$

Il en résulte par $(*)$ $\quad \varphi(A) = \varphi(P)\varphi(J_{nr})\varphi(Q) = 0$

Cl $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus Gl_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = 0$

8. On déduit de ce qui précède que si $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifie $(*)$ et $(**)$, alors $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = \det(A)$

Réciproquement, pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$

De plus, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 et soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$,

non nul tel que : $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}(U)$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $C_i(A) \in \operatorname{vect}(U)$ donc il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$

tel que $C_i(A) = \lambda_i . U$. On note $\mathcal{C} = (E_1, \dots, E_n)$ la base

canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$$\det(I_n + A) = \det_{\mathcal{C}}(E_1 + \lambda_1 U, \dots, E_i + \lambda U, \dots E_n + \lambda U)$$

Par n linéarité de $\det_{\mathcal{C}}$

$$\det(I_n + A) = \det_{\mathcal{C}_n}(E_1, \dots E_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \det(E_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{U}, \dots E_n)$$

or pour $i \in [\![1, n]\!]$

$$\det_{\mathcal{C}_n}(E_1, \dots U, \dots E_n) = \det_{\mathcal{C}_n}(E_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\sum_{k=1}^{n} u_k E_k}, \dots E_n)$$

$$= \det_{\mathcal{C}_n}(E_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{u_i E_i + \sum_{k \neq i} u_k E_k}, \dots E_n$$

L'opération $\mathcal{C}_i \leftarrow \mathcal{C}_i - \sum_{k \neq i} u_k \mathcal{C}_k$ donne:

$$\det_{\mathcal{C}_n}(E_1, \dots, u_i E_i + \sum_{k \neq i} u_k E_k, \dots E_n) = u_i \underbrace{\det_{\mathcal{C}_n}(E_1 \dots E_i \dots E_n)}_{= 1}$$

Ainsi

$$\det(I_n + A) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Comme $A = (a_{ij})_n$ avec $a_{ij} = \lambda_j u_i$, on a:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1} a_{ii} = \operatorname{Tr} A$$

Finalement $\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{Tr}\, A$

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifie $(*)$ et $(**)$

Conclusion.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe une seule application } \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ \text{vérifiant :} \\ \quad \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \\ \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ (\mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow \varphi(A) = 1 + \mathrm{Tr}\, A)\end{array}}$

NB ♡ En ce qui concerne la question 5, on peut montrer que si A est inversible, alors il existe $T_1, \dots, T_m$ matrices de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$T_1 \times \dots \times T_m \times A$ est diagonale.

C'est un reste plus pénible à coder

Problème 2 : Matrices à coefficients dans $\{-1,1\}$

A. Matrices nilpotentes

1. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On note $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ leurs coefficients. Soit λ, μ deux scalaires. Alors
$$\forall i \in [\![1,n]\!], (\lambda A + \mu B)_{i,i} = \lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}$$
On en déduit par sommation
$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda A + \mu B)_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}$$
soit encore $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$, ce qui entraîne la linéarité de la trace. Comme est elle à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire. D'autre part
$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = \mathrm{tr}(BA)$$

2. Notons $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ les coefficients d'une telle matrice. Alors
$$\mathrm{tr}(AA^{\mathsf{T}}) = \sum_{i=1}^{n} (AA^{\mathsf{T}})_{i,i} = \sum_{i=1}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 0$$
On remarque que tous les termes de cette somme sont positifs car des carrés de réels. Comme cette somme est nulle, cela implique que $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,k} = 0$, i.e $A = 0$.

3. Notons k un entier naturel non nul tel que $A^k = 0$. D'après la multiplicativité du déterminant, $\det(A^k) = \det(A)^k = \det(0) = 0$. On en déduit que $\det(A) = 0$.

4. Notons k un entier naturel non nul tel que $M^k = 0$. Alors $(M^k)^2 = 0^2 = 0$, d'où $(M^2)^k = 0$. Comme k est entier naturel non nul, on en déduit que M^2 est nilpotente.

5. Notons $(k,p) \in \mathbb{N}_*^2$ tel que $M^k = 0$ et $N^p = 0$. On pose $q = \min(k,p) \in \mathbb{N}^*$. Comme M et N commutent, $(MN)^q = M^q N^q$. D'après le choix de q, $M^q = 0$ ou $N^q = 0$, ce qui entraîne $(MN)^q = 0$, donc la nilpotence de MN. D'autre part, on pose $r = k + p - 1$. Comme M et N commutent, on peut appliquer le binôme de Newton, ce qui donne
$$(M+N)^r = \sum_{s=0}^{r} \binom{s}{r} M^s N^{r-s} = \sum_{s=0}^{k-1} \binom{s}{r} M^s N^{r-s} + \sum_{s=k}^{r} \binom{s}{r} M^s N^{r-s}$$
Or $\forall s \in [\![0,k-1]\!], r - s \ge r - k + 1 = p, N^{r-s} = 0$ et $\forall s \in [\![k,r]\!], s \ge k, M^s = 0$. On en déduit que ces deux sommes sont nulles et que $(M+N)^r = 0$. Comme r est un entier naturel non nul, $M+N$ est bien nilpotente.

6. Attention, le binôme ne s'applique pas. $(M+N)^2 - M^2 - N^2 = NM + MN$. D'après la question 1,
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(MN) &= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(MN+NM)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(M+N)^2 - \mathrm{tr}(M^2) - \mathrm{tr}(N^2)\right) \\ &= 0 \quad \text{car ces trois matrices sont nilpotentes et le résultat admis en préambule}\end{aligned}$$

7. Supposons M nilpotente. D'après le résultat admis en préambule, $\mathrm{tr}(M) = 0$. D'après la question 3, $\det(M) = 0$. Réciproquement, supposons $\det(M) = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors
$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = -(ad - bc)I_2 + \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ca + dc & d^2 + ad \end{pmatrix} = -\det(M)I_2 + \mathrm{tr}(M)M = 0$$
Ainsi, M est nilpotente.

8. Soit A une matrice réelle symétrique nilpotente. Alors A^2 est nilpotente d'après la question 4. Comme A est symétrique, on en déduit que $AA^T = 0$, donc que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$, donc que $A = 0$ d'après la question 2. Réciproquement, la matrice nulle est bien symétrique et nilpotente.
9. Comme A est antisymétrique, $A^TA = -A^2$. De plus, $(A^TA) = A^TA$ donc cette matrice est symétrique. Comme A est nilpotente, $-A^2$ est nilpotente d'après la question 4. En appliquant la question 8, on en déduit que $A^TA = 0$. Comme précédemment, la trace et la question 2 entraînent $A = 0$.
10. Pour $n = 3$, on propose la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice possède une colonne nulle, donc est non injective, donc de déterminat nul. Ses coefficients diagonaux sont tous nuls, donc $\mathrm{tr}(A) = 0$. De plus, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui empêche cette matrice d'être nilpontente. Dans le cas général, on propose la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0_{n-2,n-2} & 0_{n-2,1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-2} & 0 & -1 \\ 0_{1,n-2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie les mêmes propriétés que A.

B. Résultats algébriques

1. Pour tout entier i dans $[\![1,n]\!]$, $E_i = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}(V - 2E_i)$. On remarque alors que $V \in \mathcal{V}_{n,1}$ (tous ses coefficients valent 1) et $\forall i \in [\![1,n]\!], V - 2E_i \in \mathcal{V}_{n,1}$ (son coefficient de ligne i vaut -1, les autres valent 1). Par conséquent, $\forall i \in [\![1,n]\!], E_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V}_{n,1})$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(E_i)_{1\le i\le n} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{V}_{n,1})$, i.e $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{V}_{n,1})$. L'autre inclusion étant évidente, on a l'égalité souhaitée.
2. On note $J = \{k \in [\![1,n]\!] \mid (C_1,\dots,C_k) \text{ est libre}\}$. J est une partie de $\mathbb{N}$, elle contient 1, puisque C_1 est non nulle. Ainsi, J est non vide et majorée par n. Elle admet donc un maximum, que l'on note j. Alors $(C_1,\dots,C_j)$ est libre. Comme $j+1 \notin J$, la famille $(C_1,\dots,C_{j+1})$ est liée. Il existe un $n+1$-uplet non nul de réels $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})$ tel que $\sum_{i=1}^{j+1} \alpha_i C_i = 0$. Comme $(C_1,\dots,C_j)$ est libre, α_{n+1} est non nul et $C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_j)$. De plus, $(C_1,\dots,C_n)$ est liée, donc $j \neq n$, d'où $j \in [\![1,n-1]\!]$. On a ainsi démontré l'existence d'un tel entier.

   Soit k un autre entier satisfaisant cette propriété. Si $k \neq j$, alors quitte à les permuter, on peut choisir $k < j$. Comme $(C_1,\dots,C_{k+1})$ est libre comme sous-famille de $(C_1,\dots,C_j)$, cela contredit $C_{k+1} \in \mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_k)$. Ainsi, $k = j$, ce qui entraîne l'unicité.
3. Soit $d \in [\![1,n]\!]$, $(U_1,\dots,U_d)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $H = \mathrm{Vect}(U_1,\dots,U_d)$. Démontrer qu'il existe des entiers $i_1,\dots,i_d$ vérifiant $1 \le i_1 < \dots < i_d \le n$ tels que l'application

$$H \to \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{pmatrix}$$

   est bijective.

   On note $A \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ la matrice de colonnnes $U_1,\dots,U_d$. Comme cette famille de colonnes est libre, la matrice A est de rang d. On sait alors qu'on peut extraire une matrice carrée B inversible de taille d de A. Notons alors $i_1,\dots,i_d$ des lignes ainsi extraites, classées par ordre croissant. L'application f construite

$$H \to \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{pmatrix}$$

   est alors clairement linéaire. De plus, elle envoie la base $(U_j)_{1\le j\le n}$ de H sur les colonnes de B. Comme cette matrice B est inversible, ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, f est bijective.
4. On note $U_1,\dots,U_d$ une base de W et on applique ce qui précède à W. L'application f précédemment construite est bijective, donc $W \cap \mathcal{V}_{n,1}$ est de même cardinal que $f(W \cap \mathcal{V}_{n,1})$. Cette image directe

par f est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$: les coordonnées de ses éléments valent plus ou moins 1, donc son cardinal est majoré par 2^d. En conclusion,

$$\mathrm{card}(W \cap \mathcal{V}_{n,1}) \leq 2^d$$

C. Matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

1. D'après la question A.7, cet ensemble vaut $\{M \in \mathcal{V}_2 | \det(M) = 0 \wedge \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$.

$$M \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}_2 \iff m_{1,1} + m_{2,2} = 0 \wedge m_{1,1} m_{2,2} = m_{1,2} m_{2,1}$$

   On dénombre toutes les possibilités

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   ce qui donne un cardinal égal à 4.

2. On dénombre les cas possibles avec la condition nécessaire et suffisante $m_{1,1} m_{2,2} \neq m_{1,2} m_{2,1}$, ce qui donne 8 possibilités

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Le sens indirect est clair. Réciproquement, supposons (C, C') liée. Comme ces deux colonnes sont non nulles, il existe un réel α tel que $C = \alpha C'$. Le premier coefficient de chaque colonne vaut plus ou moins 1, donc $\alpha = \pm 1$, ce qui conclut.

4. Soit $M \in \mathcal{V}_{n,2}$ de colonnes (C, C'). Comme ses coefficients sont tous non nuls, la matrice M est non nulle et $\mathrm{rg}(M) \geq 1$. Elle est de rang 2 si et seulement si ses colonnes forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$. Par conséquent, M est de rang 1 ssi ses colonnes sont liées. D'après ce qui précède, $\mathrm{rg}(M) = 1 \iff [C = C \vee C = -C']$. Ces dernières conditions sont bien sûr incompatibles puisque les colonnes de M sont non nulles. Il nous reste alors à dénombrer les matrices M telles que $C = C'$, ce qui revient à dénombrer les matrices colonnes de $\mathcal{V}_{n,1}$, il y en a 2^n. Idem pour les matrices dont les colonnes sont opposées, il y en a 2^n. En conclusion, il y a exactement 2^{n+1} matrices de rang 1 dans $\mathcal{V}_{n,2}$.