# Rapport de colle 3

Travail à compléter : 6/20

## Question de cours : Binome de Newton

Enoncé :

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Démonstration par récurrence :

Soit $a, b$ deux complexes

* pour $n=0$ : $(a+b)^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{-k} = 1$$

D'où l'initialisation.

* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$
$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

On pose $l = k+1$, alors :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n-l+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

or $\binom{n}{-1} = 0$ et $\binom{n}{n+1} = 0$

d'où : $(a+b)^{n+1} = \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{l} b^{n-l+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{k} b^{n-k+1}$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} a^{l} b^{n-l+1} \left( \binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right)$$

On $\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} = \binom{n+1}{l}$

d'où $(a+b)^{n+1} = \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} a^{l} b^{n-l+1}$

d'où l'hérédité et la demonstration

Nickel

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$

calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$

ainsi que A_n et B_n

$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{k} 1^{n-k} = (1+1)^{n}$

$\boxed{A_n + B_n = 2^{n}}$

Correct

$A_n - B_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} - \binom{n}{k}$

On pour $k$ impair, $(-1)^{k} = -1$ et pour $k$ pair, $(-1)^{k} = 1$

D'où :

$A_n - B_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} 1^{n-k} \binom{n}{k} = (1-1)^{n}$$

$\boxed{A_n - B_n = 0}$

Correct

Il manque la conclusion sur les valeurs de A_n et B_n

**exercice 2 :** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a < b$.

Montrer que $\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\ln\left(1+\frac{a}{b}\right) \leq \ln^2(2)$

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{array}$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que composée de fonction dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$

Alors pour $x > 0$ :

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln^2(1+bx)}$$

$$= \frac{1}{\ln^2(1+bx)} \ln\left[\frac{(1+bx)^{\frac{a}{1+ax}}}{(1+ax)^{\frac{b}{1+bx}}}\right]$$

posons $g : x \longmapsto \dfrac{(1+bx)^{\frac{a}{1+ax}}}{(1+ax)^{\frac{b}{1+bx}}}$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que quotient et composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

alors pour $x > 0$ :

Calculs à détailler très très largement

$$g'(x) = -\frac{a^2\ln(1+bx)}{(1+ax)^2} + \frac{b^2\ln(1+ax)}{(1+bx)^2}$$

$$= \frac{b^2\ln(1+ax) - a^2\ln(1+bx)}{(1+ax)^2(1+bx)^2}$$

On $b^2\ln(1+ax) - a^2\ln(1+bx) \leq 0$ A démontrer

ainsi $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

également, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, A justifier

ainsi, puisque $g$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(x) \geq 1$

il en découle que pour $x>0$, $\ln\left(\dfrac{(1+bx)^{\frac{a}{1+ax}}}{(1+ax)^{\frac{b}{1+bx}}}\right) \geq 0$

On $\dfrac{1}{\ln^2(1+bx)} \geq 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) \geq 0$

Ainsi $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On $a<b$, d'où $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

d'où: $f\left(\frac{1}{a}\right) > f\left(\frac{1}{b}\right)$

ie $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1+\frac{b}{a})} > \dfrac{\ln(1+\frac{a}{b})}{\ln(2)}$ or $\ln(2) > 0$ et $\ln(1+\frac{b}{a}) > 0$ puisque $(1+\frac{b}{a}) > 1$

D'où $\boxed{\ln^2(2) > \ln(1+\frac{a}{b})\ln(1+\frac{b}{a})}$ Démarche comprise.