Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★). On prêtera attention à vérifier les capacités calculatoires portant sur les complexes et/ou la trigonométrie réelle, ainsi que l'utilisation correcte des quantificateurs, des implications et des équivalences. Toutefois, les compléments sur les sommes finies et les produits finis n'ont pas encore été vus en cours. Les éléments du programme encore non détaillés dans le cours sont inscrits en italique.

Chapitre 1 : Logique et théorie des ensembles

Rudiments de logique

Notion de prédicat, table de vérité, négation, conjonction, disjonction. Implication, contraposée, réciproque, équivalence. (★) Associativité de la conjonction et de la disjonction. (★) Distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction. Les preuves sont faites via des tables de vérité. Quantification, quantificateur universel, existentiel, existence d'un unique élément. Négation d'une assertion utilisant des quantificateurs. Modes de raisonnements, disjonction de cas, analyse-synthèse, récurrences simple, double, forte.

Ensembles

Définition d'un ensemble par extension, par compréhension. Eléments, relation d'appartenance. Parties, relation d'inclusion. Ensemble vide. Complémentaire, union, intersection, différence, différence symétrique. (★) Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A) = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

Chapitre 2 : Complexes et trigonométrie réelle

Complexes

Notion de nombre complexe, parties réelle, imaginaire. $\mathbb{R}$-linéarité des applications $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$. Conjugaison, additivité, multiplicativité. Module, multiplicativité. (★) Application : $\mathbb{C}$ est intègre via l'intégrité de $\mathbb{R}$ (règle du produit nul). Détermination de l'inverse d'un complexe non nul sous forme algébrique. (★) $\forall z\in\mathbb{C}, |\mathfrak{Re}(z)|\leq|z|$ avec égalité si et seulement si z est réel. $\forall z\in\mathbb{C}, |\mathfrak{Im}(z)|\leq|z|$ avec égalité si et seulement si z est imaginaire pur. (★) Inégalité triangulaire, cas d'égalité. (★) Inégalité triangulaire inverse.

Trigonométrie réelle

Rappels géométriques sur le cosinus et le sinus, $\cos(k\pi/2\pm x)$, $\sin(k\pi/2\pm x)$ pour $k\in\{0,1,2,4\}$. Valeurs remarquables. Fonction tangente. Notation $D_{\tan}=\mathbb{R}\backslash\{\pi/2+k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$. $\tan(k\pi/2\pm x)$ pour $k\in\{0,1,2\}$ quand cette formule a du sens. Valeurs remarquables. Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques à l'aide du cercle unité. Démonstration géométrique via le produit scalaire de la formule d'addition $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$. *Les propriétés analytiques des lignes trigonométriques et les fonctions circulaires réciproques n'ont pas encore été abordées.*

Exponentielle complexe

Définition $e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$ pour tout réel t. (★) On insiste sur $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, e^{ia+ib}=e^{ia}e^{ib}$ démontrée via la formule d'addition du cosinus. Propriétés de l'exponentielle imaginaire pure (inverse, module, conjugué, périodicité). Surjectivité dans $\mathbb{U}$ admise. Formules d'Euler, formules d'addition et de duplication des lignes trigonométriques, (★) technique de l'angle moitié pour la factorisation de $e^{ip}\pm e^{iq}$ pour tous réels p et q. Formule de Moivre. *Les calculs de sommes et techniques de linéarisation n'ont pas encore été abordés en toute généralité.* Applications : forme trigonométrique d'un complexe non nul, arguments d'un complexe. La notation $\arg(z)$ pour z non nul est autorisée à condition de n'être manipulée qu'à l'aide de congruences. Arguments d'un produit de complexes non nuls, du conjugué d'un complexe non nul. (★) $\forall(a,b,t)\in\mathbb{R}^3, \exists A\in\mathbb{R}^+, \varphi\in\mathbb{R}, a\cos(t)+b\sin(t)=A\cos(t-\varphi)$. La démonstration du cours passe par le complexe $(a-ib)e^{it}$. Extension de l'exponentielle à $\mathbb{C}$, via $\forall z\in\mathbb{C}, e^z=e^{\mathfrak{Re}(z)}e^{i\mathfrak{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme, conjugué, module et arguments d'une exponentielle complexe.

Équations dans $\mathbb{C}$

Théorème de D'Alembert-Gauss admis. *La factorisation d'un polynôme P par $X - a$ avec $P(a) = 0$ n'a pas été abordée*. Résolution de $z^2 = \Delta$ avec Δ sous forme algébrique. Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$, relations coefficients-racines. ($\star$) Description des racines n-ièmes de l'unité. Résolution de $z^n = a$ avec a complexe non nul sous forme trigonométrique et n entier non nul. ($\star$) Résolution de $\exp(z) = a$ avec a complexe non nul.

Géométrie dans $\mathbb{C}$

Correspondance entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Notion d'affixe complexe d'un point de $\mathbb{R}^2$. On admet si besoin la confusion dans le cadre géométrique entre un complexe z et le point du plan d'affixe z. Interprétation du module et des arguments du complexe $(c - a)/(b - a)$ dans le cas a, b, c, trois complexes deux à deux distincts. Traduction complexe de relations d'alignement et d'orthogonalité. Equation complexe d'une droite D de la forme $z\overline{\alpha} + \overline{z}\alpha = c$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Equations d'un cercle $\mathcal{C}$ de la forme $|z - \omega| = r$ ou $z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + \beta = 0$ avec $\omega \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in]-\infty, |\alpha|^2]$. Similitudes directes, cas particuliers des translations, rotations, homothéties. Similitudes indirectes, cas particulier d'une réflexion orthogonale par rapport à une droite $\mathrm{Im}(z) = c$ avec c un réel.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star$