Exercices Ils porteront sur ce chapitre hors connexité par arcs.

Cours

Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours. **Toutes** les définitions de ce chapitre doivent être connues **sans aucune faute** même si elles ne sont pas marquées d'une astérisque.

Topologie des espaces vectoriels normés

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires) ;*
- *introduire la notion de partie compacte dans un espace vectoriel normé, en soulignant le rôle qu'elle joue dans les résultats d'existence, notamment en matière d'optimisation ;*
- *introduire la notion de composante connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et intervient en calcul différentiel ;*
- *dégager l'idée fondamentale d'inégalité linéaire, qui apparaît lors de l'étude de la comparaison des normes et de la continuité des applications linéaires, et qui est quantifiée par la notion de norme d'opérateur.*

Les notions seront illustrées par des exemples variés. On pourra ainsi travailler dans les espaces $\mathbb{K}^n$, les espaces de polynômes, d'applications linéaires ou de matrices, ainsi que dans divers espaces fonctionnels.

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures. Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$, $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\\| \\|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\\| \\|_1$ et $\\| \\|_2$.
($\star$) Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. ($\star$) Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Voisinage d'un point.	($\star$) Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur de A : ($\star$) Caractérisation comme le plus grand ouvert inclus dans A, adhérence de A : ($\star$) Caractérisation comme le plus petit fermé contenant A, frontière d'une partie. ($\star$) Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	($\star$) Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. ($\star$)Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. ($\star$) Caractérisation séquentielle. ($\star$) Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.
e) Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A. ($\star$) Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\\|x\\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. ($\star$) Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. ($\star$) Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	($\star$) Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E.
f) Applications linéaires et multilinéaires continues	
($\star$) Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $$\forall x \in E,\ \\|u(x)\\| \leqslant C\\|x\\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$.

(⋆) Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.	Notations $\|\|\|u\|\|\|$, $\|u\|_{\mathrm{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$. (⋆) Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.
(⋆) Critère de continuité des applications bilinéaires. Critère de continuité des applications multilinéaires.	La démonstration n'est pas exigible.

g) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. (⋆) Une partie compacte est fermée et bornée. (⋆) Si B est une partie fermée incluse dans une partie compacte, alors B est compact. (⋆) Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. (⋆) Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

h) Applications continues sur une partie compacte

(⋆) Image continue d'une partie compacte. (⋆) Théorème de Heine.	
(⋆) Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.

i) Connexité par arcs

Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points; partie connexe par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées. (⋆) Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	(⋆) Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
(⋆) Image continue d'une partie connexe par arcs.	(⋆) Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.