Exercices : Toutes notions sur les programmes de Kholle 9 et 10.

Cours

Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours et sont des points du programme. Ceux marqués d'une double astérisque, sont des exemples ou compléments traités en classe et qui sont en tant que tels, des exercices à savoir refaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, ($\star$) morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Traduction matricielle.
($\star$)Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. ($\star\star$) Exemple d'endomorphisme qui n'admet pas de polynôme minimal. ($\star\star$) Polynôme minimal d'une matrice compagnon. ($\star$) Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.
h) Lemme de décomposition des noyaux	
($\star$) Si $P_1,\dots,P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$	
Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
($\star$) La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	($\star$) Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Contenus	Capacités & Commentaires
($\star$) Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	
($\star$) Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Le noyau et l'image de u sont stables par v.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Exemple : ($\star\star$) Éléments propres de la transposée d'une matrice compagnon. ($\star$)Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
($\star$) Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	($\star$) Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
($\star$) Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.	

Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. ($\star$) Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$. ($\star\star$) L'application $\chi : A \mapsto \chi_A$ est continue.