Exercices

Ils porteront sur les révisions d'analyse et compléments du chapitre 1.
Chaque étudiant aura un exercice simple à traiter sur la nature d'une intégrale généralisée.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Cours

Les points marqués d'une astérisque pourront faire l'objet d'une question de cours.

Chapitre 1

A- *Révisions d'analyse du cours de Sup et Complément :*

• Analyse réelle : Borne supérieure, borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Application à la détermination des sous groupes du groupe $(\mathbb{R},+)$ (Attention, c'est hors programme).

• Suites numériques : Révisions : en particulier, Théorème de Césaro, suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

• Suites extraites. Valeurs d'adhérence d'une suite de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: définition avec les suites extraites. On note $\mathrm{Adh}(u)$ leur ensemble. On a les équivalences suivantes :

$(\star)$ $\ell \in \mathrm{Adh}(u) \iff \forall \varepsilon > 0, \Delta_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - \ell| \leqslant \varepsilon$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.
$\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 > N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

• Rappel du Théorème de Bolzano Weierstrass dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$(\star)$ Une suite bornée de $\mathbb{K}^N$ qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence converge.

B- *Complément sur les séries numériques.*

• Technique de comparaison série-intégrale.

Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.

• Règle de d'Alembert.

• $(\star)$ Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent. La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : $(\star)$ théorème de Césaro (pour une limite finie ou infinie).

Application au DA de certaines suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) \underset{0}{=} x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ avec $\alpha > 1$ et $a > 0$.

Chapitre 2 Intégration sur un intervalle quelconque.

On se limite dans ce chapitre aux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

$(\star)$ Définition : celle ci est une question qui gêne beaucoup de candidats à l'oral chaque année.

Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.

Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Notations : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Intégrale convergente en $+\infty$.

Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée. Ecriture $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$.

Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge. (On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

Pour f de signe constant, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Un calcul montrant que $\displaystyle\int_I |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Fonction intégrable en $+\infty$.

Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:

- si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.

Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Intégrale convergente en b, en a.

Ecriture $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente.

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

• Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

• Intégration par parties sur un intervalle quelconque $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$.

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothéses de régularité.

• Changement de variable : Etant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi\ :\ ]\alpha,\beta[\to\ ]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels (affine).

Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

($\star$) La convergence absolue implique la convergence.

Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente. Fonction intégrable en b, en a.

Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$. Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\displaystyle\int_I f$.

Inégalité triangulaire.

($\star$) Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.

Si $\alpha\in\mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha}\mathrm{d}x$. La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t\mapsto f(a+t)$ (resp. $t\mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Intégration des relations de comparaison

($\star$) Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence. La fonction de référence est réelle de signe constant.

Complément sur les intégrales semi-convergentes

Ce n'est pas explicitement au programme.

L'exemple ci-dessous a été traité.

Les étudiants doivent pouvoir montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ diverge.