Exercices

Ils porteront sur les intégrales généralisées et toutes notions du chapitre 2.

Cours

Tous les énoncés des théorèmes de ce chapitre doivent être connus sans hésitation. Des exemples simples testant ces théorèmes peuvent faire l'objet de questions de cours.
Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours.
L'étude complète de la fonction dzéta a été faite en cours et peut aussi faire l'objet d'une question de cours.

Suites et séries de fonctions

A - Suites et séries de fonctions

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *définir différents modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *introduire la thématique de l'approximation, reliée à la notion topologique de densité, à travers deux théorèmes d'approximation uniforme susceptibles de nombreuses applications.*

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
($\star$)Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment

($\star$) Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.

d) Dérivation d'une suite de fonctions

($\star$) Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.

e) Séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. ($\star$) La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Approximation uniforme	
($\star$) Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Pour le groupe 2 : Théorème de Weierstrass ($\star$) : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.