Kholle 14 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Définir la loi de Poisson de paramètre λ. Démontrer qu'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson est d'espérance finie et déterminer cette espérance.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la famille

$$((i+j)^{\alpha})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

   est-elle sommable ?
3. Soit $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.
   (a) Démontrer que l'on définit une mesure de probabilité $\mathbb{P}_s$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en imposant $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_s(\{n\}) = n^{-s}/\zeta(s)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_s(k\mathbb{N}^*)$.
   (c) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille des $(p\mathbb{N}^*)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants dans leur ensemble.

★★★

Kholle 14 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Définir la loi géométrique de paramètre p. Démontrer qu'une variable aléatoire suivant une loi géométrique est d'espérance finie et déterminer cette espérance.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on note d_n le nombre de ses diviseurs positifs. Montrer que la série entière $\sum d_n z^n$ a un rayon de convergence non nul, puis que pour tout complexe z dans un voisinage de 0,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$
3. On note $a = 2.1$ et on suppose que la probabilité qu'une famille ait n enfants suit une loi de Poisson de paramètre a. On suppose de plus qu'un enfant naît avec une probabilité 1/2 d'être une fille.
   (a) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.
   (b) On suppose que les enfants d'une famille ne comporte qu'une fille. Quelle est la probabilité que cette famille possède deux enfants ?

★★★

Kholle 14 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Énoncer et démontrer les propriétés de linéarité et de croissance de l'espérance.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que

$$AB = BA \iff \forall t \in \mathbb{R}, \exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$$

3. Comparer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés.
   Indication : on admet que $24\ln(7) + 20\ln(5) > 44\ln(6)$.

★★★

Kholle 14 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Que peut-on dire de $f(X)$ et $g(Y)$? Le démontrer.
2. On se donne une matrice nilpotente N d'indice de nilpotence m, et on introduit la fonction
$$D : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C}), t \mapsto \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} N^k$$
puis la fonction $S : t \mapsto \exp(D(t))$. En étudiant ces deux fonctions, montrer que $\exp(D(1)) = I + N$.
3. On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, puis B l'événement défini par « aucun des A_n n'est réalisé ». Montrer que
$$\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\right)$$

★★★