Exercices

Ils porteront sur les suites et séries de fonctions (voir programme de la Kholle 2)

Cours

Tous les énoncés des théorèmes de ce chapitre doivent être connus sans hésitation.
Des exemples simples testant ces théorèmes peuvent faire l'objet de questions de cours.
Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours.
L'étude complète de la fonction Gamma a été faite en cours et peut aussi faire l'objet d'une question de cours.

Intégrales à paramètres (entier ou réel)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Convergence dominée	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
g) Intégration terme à terme	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0,+\infty]$, $$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Contenus	Capacités & Commentaires
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \lvert f_n(t)\rvert \,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

h) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

($\star$) Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$, , I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux; – il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x, \cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
($\star$) Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I; – pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I; – il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.