Compléments sur la convexité

Cornou Jean-Louis

28 décembre 2022

I désigne un intervalle non réduit à un point. Il n'est pas nécessairement ouvert. a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Exemple 1 *Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ (continue) croissante. Alors sa primitive s'annulant en a est convexe.*

Théorème 1 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est localement bornée.*

Théorème 2 *Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe. Le max d'une famille finie de fonctions convexes est convexe.*

☞ **Remarque**
Le produit et la composée de fonctions convexes ne sont pas nécessairement convexes $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x$, $x \mapsto -x^2$.

Propriété 1 *Soit f convexe et φ convexe croissante, alors $\varphi \circ f$ est convexe.*

Théorème 3 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est Lipschitzienne sur tout segment inclus dans $\mathring{\mathrm{I}}$.*

Théorème 4 *Soit f continue sur I, convexe sur $\mathring{\mathrm{I}}$. Alors f est convexe sur I.*

Exemple 2 *Soit f et g convexes telles que $f + g$ est affine. Montrer que f et g sont affines.*

Exemple 3 *Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto xf(1/x)$. Montrer que f est convexe ssi g est convexe.*

Théorème 5 *Soit I un intervalle ouvert et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite et f'_g et f'_d sont croissantes.*

Exercice 1 *Soit $q : \mathbb{R} \to \mathrm{R}^+$ non identiquement nulle et y une solution bornée de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$. Montrer que $y = 0$.*

Exemple 4 *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de réels positifs tels que $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que*

$$\prod_{i=1}^{n} (2 + x_i) \geq 3^n$$

Caractériser les cas d'égalité.

Exemple 5 *Déterminer les ellipses de périmètre maximal à surface $\mathrm{S} > 0$ donnée.*