Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$) sur le début du chapitre 22 : Matrices et le chapitre 23 : Dénombrement. Les exercices porteront sur le début du chapitre 22 : Matrices et le chapitre 23 : Dénombrement.

Chapitre 22 : Matrices

On fixe E et F deux K espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n, ainsi que $b = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, et $b' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Matrices et applications linéaires

Matrice d'un vecteur dans une base, notée $M(x)_b$, Matrice d'une famille de vecteurs dans une base b, notée $M(y_1, \dots, y_r)_b$. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, b base de E, b' base de F, matrice de u dans les bases E et F, notée $M(u)^b_{b'}$. La notation plus classique $M(u)_{b,b'}$ a été mentionnée. ($\star$) L'application $\mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mapsto M(u)^e_f$ est un isomorphisme d'espace vectoriels. $M(u(x))_{b'} = M(u)^b_{b'} M(x)_b$. ($\star$) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, b une base de E, b' une base de F, b'' une base de G, alors $M(v \circ u)^b_{b''} = M(v)^{b'}_{b''} M(u)^b_{b'}$. L'application $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), u \mapsto M(u)^b_b$ est un isomorphisme d'anneau. Dans le cas $n = p$, u est un isomorphisme ssi $M(u)^b_{b'}$ est inversible.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $f_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \mapsto AX$. Dans les bases canoniques de b de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et b' de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), M(f_A)^b_{b'} = A$. Image de A, noyau de A, rang de A. L'image est engendré par les colonnes de A. Les lignes de A fournissent un système d'équations du noyau. ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) A est inversible, (ii) $\ker(A) = \{0\}$, (iii) les colonnes de A engendrent $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, (iv) $\mathrm{rg}(A) = n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A est inversible ssi A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite. Lien entre les diverses notions de rang.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les solutions du système linéaire $AX = B$ d'inconnue X dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont soit l'ensemble vide lorsque $B \in \mathrm{im}(A)$, soit un espace affine de direction $\ker(A)$ lorsque $B \in \mathrm{im}(A)$. ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = B$ possèede une unique solution, ssi pour toute base $(E_1, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les systèmes linéaires $AX = E_i$ possèdent tous une unique solution.

Exemples d'utilisation de polynômes de matrices pour le calcul d'inverse et/ou de puissances de matrices carrées.

Changements de bases

Matrice de passage d'une base b à une base b', notée $P^{b'}_b$. La notation plus classique $P_{b,b'}$ a été mentionnée. $P^{b'}_b = M(\mathrm{Id}_E)^{b'}_b$. Toute matrice de passage est inversible et $(P^{b'}_b)^{-1} = P^b_{b'}$. $M(x)_b = P^{b'}_b M(x)_{b'}$. ($\star$) Soit e, e' deux bases de E, f, f' deux bases de F, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $M(u)^{e'}_{f'} = P^f_{f'} M(u)^e_f P^{e'}_e$. Cas particulier des endomorphismes.

Matrice J_r. ($\star$) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r. Alors il existe une base b de E, et une base b' de F telles que $M(u)^b_{b'} = J_r$. Matrices équivalentes. ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min(n, p)]\!]$, alors $\mathrm{rg}(A) = r$ ssi A est équivalente à J_r. Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang. Invariance du rang par transposition.

Chapitre 23 : Dénombrement

Notion de cardinal fini. ($\star$) Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles finis de même cardinal. f est injective ssi surjective ssi bijective. Cardinal d'une union, d'ue différence symétrique, d'un produit cartésien, des applications de E dans F, des parties de E. Notions de p-liste, de p-combinaison. ($\star$) Soit E fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$, E possède $n!/(n-p)!$ p-listes d'éléments de E, $n!/(p!(n-p)!)$ p-combinaisons d'éléments de E, $n!$ permutations. Nombre de fonctions injectives de F dans E. Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal et de la formule du binôme.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star$