Intégration

Cornou Jean-Louis

30 mars 2023

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère deux réels a et b tels que $a < b$, ainsi que le segment réel $[a, b]$. On veut définir proprement l'intégrale d'une fonction continue (par morceaux). Pour cela, on va utiliser une méthode très générale en mathématique. On va exploiter des fonctions simples, les fonctions en escalier, définir leur intégrale, puis « approcher » les fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier, et en déduire l'intégrale de ces fonctions plus générales.

1 Approximation uniforme

1.1 Subdivisions

Définition 1 *On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ telle que*

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

On appelle n la taille de la subdivision, le réel $\max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$ s'appelle le pas de la subdivision σ. On le note $|\sigma|$.

Exemple 1
- *La subdivision régulière définie par $\forall i \in [\![0, n+1]\!], x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ est une subdivision à $n+1$ points, de taille n, de pas $(b-a)/n$. Elle découpe le segment $[a, b]$ en n sous-segments.*
- *On peut « pointer » la subdivision précédente de la manière suivante : Pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, on choisit un élément ξ_i dans $]x_i, x_{i+1}[$. On forme alors la suite finie $(a, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, b)$ qui est bien une subdivision de $[a, b]$. Elle est de taille $2n$, découpe le segment $[a, b]$ en $2n$ sous-segments et son pas est majoré par $(b-a)/n$.*

Notation
L'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ est noté $Sub([a, b])$ (notation non officielle).

Définition 2 *Soit σ, σ' deux subdivisions de $[a, b]$.*
- *On appelle union de ces subdivisions la suite finie obtenue en réunissant leurs éléments puis en les réordonnant. Elle est notée $\sigma \vee \sigma'$.*
- *On dit que σ est plus fine que σ' lorsque tous les éléments de σ' sont dans la liste de σ. On note (abusivement) $\sigma' \subset \sigma$.*

☞ **Remarque**
« Plus fin » car on découpe en davantage d'intervalles. On parle également de raffinement de subdivisions lorsqu'on les étend via une union.

Exemple 2 *L'union des deux subdivisions de l'exemple précédent est la suite finie $(a, \xi_0, x_1, \xi_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_{n-1}, b)$. L'union de deux subdivisions est plus fine que chacune d'entre elles.*

Propriété 1 *Soit σ, σ' deux subdivisions de $[a, b]$ de tailles respectives n et p. Alors, le pas de $\sigma \vee \sigma'$ est majoré par $\min(|\sigma|, |\sigma'|)$.*

Démonstration. On note $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ et $\sigma' = (y_0, y_1, \dots, y_n)$. Soit deux éléments consécutifs α et β de la subdivision $\sigma \vee \sigma'$. Si ces deux éléments font partie de σ, alors $|\alpha - \beta| \leq |\sigma|$ et aucun élément de σ' ne s'est intercalé entre α et β, donc on a également $|\alpha - \beta| \leq |\sigma'|$. On le synthétise en $|\alpha - \beta| \leq \min(|\sigma|, |\sigma'|)$. On conclut de la même façon lorsque α et β sont partie de σ'. Si $\alpha \in \sigma$ et $\beta \in \sigma'$, alors β s'est intercalé entre α et le suivant dans la liste de σ, donc $|\alpha - \beta| \leq |\sigma|$. De manière symétrique, α s'est intercalé entre β et l'élément précédent dans σ', donc $|\alpha - \beta| \leq |\sigma'|$. Dans tous les cas, $|\alpha - \beta| \leq \min(|\sigma|, |\sigma'|)$. En passant au max, on en déduit que $|\sigma \vee \sigma'| \leq \min(|\sigma|, |\sigma'|)$.

⚠ **Attention**
Le pas décroît avec l'union.

1.2 Fonctions en escalier sur $[a, b]$

Définition 3 *On appelle fonction en escalier sur $[a, b]$ toute application $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, telle que pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, la restriction de φ à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ est constante.*

Exemple 3
- *Les fonctions constantes sont des fonctions en escalier sur tout segment.*
- *Les restrictions à tout segment des fonctions partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et signe $x \mapsto sgn(x)$ sont en escalier.*
- *La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, restreinte à n'importe quel segment n'est pas en escalier. En effet, tout intervalle ouvert contient des rationnels et des irrationnels, il est impossible $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ y soit constante.*
- *La fonction indicatrice de l'ensemble triadique de Cantor n'est pas en escalier sur $[0, 1]$.*

Notation
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Définition 4 *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. On appelle subdivision adaptée à φ toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ qui vérifie, pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, la restriction de φ à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ est constante.*

⚠ **Attention**
Une telle subdivision n'est pas unique. Si φ est constante, toute subidivion de $[a, b]$ est adaptée à φ.

Propriété 2 *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et σ une subdivision adaptée à φ. Toute subdivision plus fine que σ est adaptée à φ.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence pour alléger les notations. Notons $c \in]a, b[$ qui ne fait pas partie de $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. On note i l'unique entier dans $[\![1, n]\!]$ tel que $c \in]x_{i-1}, x_i[$. Alors comme φ est constante sur sur $]x_{i-1}, x_i[$, elle est également constante sur $]x_{i-1}, c[$ et sur $]c, x_i[$. Par conséquent, $\sigma \vee (c)$ est adaptée à φ.

Notation
On note $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Théorème 1 *L'ensemble $\mathcal{E}(a, b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ et un sous-anneau de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ (on dit que c'est une sous-algèbre).*

Démonstration.
- Soit φ une fonction en escalier et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivsion adaptée. Alors φ prend au plus $2n+1$ valeurs : $(\varphi(x_i))_{0 \leq i \leq n}, (\varphi((x_i + x_{i+1})/2))_{0 \leq i \leq n-1}$. On note M un majorant du module de ces $2n+1$ valeurs, ce qui fournit une borne pour φ. Ainsi, $\mathcal{E}(a, b) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\varphi, \psi) \in (\mathcal{E}(a, b))^2$. On note σ et σ' des subdivisions adaptées à ces deux fonctions en escalier. Alors $\sigma \vee \sigma'$ est une subdivision plus fine que σ donc adaptée à φ, et plus fine que σ' donc adaptée à ψ. Si l'on note $\sigma \vee \sigma' = (x_0, x_1 \dots, x_n)$, alors $\lambda\varphi + \mu\psi$ est constante sur tout intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ de cette subdivision. Par conséquent, $\lambda\varphi + \mu\psi$ est une fonction en escalier.
- Avec les mêmes notations que précédemment, $\varphi\psi$ est constante sur tout intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ de cette subdivision. On a ainsi la stabilité par produit. De plus, la fonction constante égale à 1 est en escalier.

Propriété 3 *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. Alors $|\varphi| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.*

Démonstration. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ. Alors pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, φ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. Donc pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, $|\varphi|$ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.

1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 5 *On appelle fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ toute application $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$,*

- *la restriction de f sur chaque intervalle **ouvert** $]x_i, x_{i+1}[$ est continue.*
- *f admet admet une limite **finie** à droite en x_i et une limite **finie** à gauche en x_{i+1}.*

Exemple 4

- *Les fonctions continues sont continues par morceaux sur tout segment.*
- *Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.*
- *$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$ n'est pas continue par morceaux car elle n'admet pas de limite finie en 0^+.*
- *$g : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$ n'est pas continue morceaux. Il faudrait une subdivision de taille infinie pour s'assurer que toute restriction soit continue.*

Notation
On note $\mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 6 *Soit $f \in \mathbb{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$. On appelle subdivision adaptée à f toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$,*

- *la restriction de f sur chaque intervalle **ouvert** $]x_i, x_{i+1}[$ est continue.*
- *f admet admet une limite **finie** à droite en x_i et une limite **finie** à gauche en x_{i+1}.*

⚠ **Attention**
Il n'y a pas unicité d'une telle subdivision, c'était déjà le cas pour les fonctions en escalier qui sont continues par morceaux.

Propriété 4 *Soit $f \in \mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$, σ une subdivision adaptée à f. Toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.*

Démonstration. Comme pour les fonctions en escalier, on procède par récurrence. Notons $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f, i un entier dans $[\![1, n]\!]$ et $c \in]x_{i-1}, x_i[$. Comme f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$, elle est continue sur $]x_{i-1}, c[$, sur $]c, x_i[$ et admet des limites finies à gauche et droite en c, puisque continue en c. Par conséquent, $\sigma \vee (c)$ est adaptée à f.

Théorème 2 *L'ensemble $\mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{K})$ et un sous-anneau de $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{K})$.*

Démonstration.

- Soit $f \in \mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, comme f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$ et admet une limite finie à gauche en x_{i-1} et une limite finie à droite en x_i, on peut la prolonger en une fonction continue g_i sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$. D'après le théorème des bornes atteintes, celle-ci est bornée, disons par un réel positif M_i. Cette borne est également une borne pour f restreinte à $]x_{i-1}, x_i[$. Mais alors le réel positif
$$\mathrm{M} = \max((f(x_i))_{0 \le i \le n}, (\mathrm{M}_i)_{1 \le i \le n})$$
est une borne de f, donc $\mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a,b], \mathbb{K})$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (f, g) \in (\mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K}))^2$, σ, σ' des subdivisions adaptées à f et g. Alors $\sigma \vee \sigma'$ est une subdivision adaptée à f et g. Si on la note $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, soit $i \in [\![1, n]\!]$, comme f et g sont continues sur $]x_{i-1}, x_i[$, $\lambda f + \mu g$ est également continue sur $]x_{i-1}, x_i[$. D'autre part, par linéarité des limites, $\lambda f + \mu g$ admet des limites finies à droite en x_{i-1} et à gauche en x_i. Ainsi, $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux.
- De même que précédemment, fg est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$ et admet des limites finies à droite en x_{i-1} et à gauche en x_i, comme les limites finies sont compatibles avec les produits. Ainsi, fg est continue par morceaux.

Propriété 5 *Soit $f \in \mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$. Alors $|f| \in \mathrm{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$.*

Démonstration. Si l'on prend une subdivision adaptée à f, alors comme le module est compatible avec les limites (via l'inégalité triangulaire inverse), toutes les propriétés de limites et de continuité sur conservées pour $|f|$ sur chaque intervalle.

1.4 Continuité uniforme

On souhaite « approcher » les fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier. Pour cela, on doit approfondir les notions de continuité vues au premier semestre.

Définition 7 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$. On dit que f est uniformément continue (sur I) lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

☞ **Remarque**
Comparons avec la définition de la continuité classique :

$$\forall y \in \mathrm{I}, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathrm{I}, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Dans cette définition, δ est un réel construit après avoir fixé y dans I, il peut donc tout à fait dépendre de y, on peut le noter $\delta_{\epsilon,y}$ pour comprendre ses dépendances. On peut voir la continuité comme une propriété locale, il suffit de vérifier que f est continue en tout réel y de I. La continuité uniforme est une propriété globale, on requiert que f soit continue « de la même façon » (uniformément) en tout point de I.

Propriété 6 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction uniformément continue. Alors f est continue.*

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{I}$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la continuité uniforme, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\forall (s, t) \in \mathrm{I}^2, |s - t| \leq \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$. En particulier, $\forall x \in\in \mathrm{I}, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Ainsi, f est continue en y. On conclut donc à l'hérédité de f sur I.

Exemple 5

— *$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0, 1]$, mais pas uniformément continue. On prend $\varepsilon = 1$. Soit $\delta > 0$. Si $\delta \geq 1$, on choisit $x = 1$ et $y = 1/3$, ce qui donne $|x - y| = 2/3 \leq \delta$, alors que $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = 2 > 1 = \varepsilon$. Si $0 < \delta < 1$, on choisit $x = \delta$ et $y = \delta/2$, qui vérifient $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|x - y| = \delta/2 \leq \delta$ et $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon$.*

— *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais non uniformément continue. On choisit $\varepsilon = 1$. Soit $\delta > 0$. On choisit $x = \frac{1}{\delta}$ et $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Ces deux réels vérifient $|x - y| = \frac{\delta}{2} \leq \delta$ et $|x^2 - y^2| = 1 + \delta^2/4 > 1 = \varepsilon$.*

— *Toute fonction affine, toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue (prendre $\delta = \varepsilon/k$).*

— *$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue (voir le DS sur les fonctions hölderiennes).*

— *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivable, de dérivée bornée. Alors f est uniformément continue, via l'inégalité des accroissements finis.*

Théorème 3 (Heine) *Soit $\mathrm{I} = [a, b]$ un segment réel non réduit à un point et $f \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{K})$. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n, y_n) \in \mathrm{I}^2, |x_n - y_n| \leq 1/n \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. On dispose alors de deux suites à valeurs dans un segment, donc bornées. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire (quitte à le faire deux fois), pour obtenir deux suites convergentes $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}, (y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de limites respectives x et y. Mais alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$$

Comme les sous-suites sont convergentes, on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$, ce qui entraîne $|x - y| \leq 0$, donc $x = y$. On exploite alors la continuité de f en x, ce qui donne par caractérisation séquentielle, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. Cependant, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon > 0$$

ce qui amène par passage à la limite $0 > 0$. Cette absurdité prouve que f est uniformément continue.

Pourquoi ce théorème ? Si on se donne une précision ε, on souhaite découper TOUT le segment $[a, b]$ de manière adaptée. On voudrait ne pas avoir à découper différemment selon les points considérés.

Théorème 4 *Soit $f \in \mathbb{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2$ tel que*

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

Démonstration. On commence par traiter le cas où f est continue. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, on dispose d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit n un entier naturel non nul supérieur à $(b-a)/\delta$. On considère la subdivision régulière $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ de taille n de $[a,b]$. Elle est de pas $(b-a)/n \leq \delta$. Pour tout entier i dans $[\![1,n]\!]$, f est continue sur le segment $[x_{i-1},x_i]$ donc bornée. On note alors $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ et $\mathrm{M}_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$. On sait que ces bornes sont atteintes, disons en des réels c_i, d_i dans $[x_{i-1},x_i]$. Alors $|c_i - d_i| \leq |x_{i-1}-x_i| \leq \delta$, donc $|m_i - \mathrm{M}_i| = |f(c_i)-f(d_i)| \leq \varepsilon$ l'uniforme continuité de f. On définit alors les fonctions en escalier φ et ψ par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \varphi(x_i) = f(x_i), \psi(x_i) = f(x_i), \forall x \in]x_{i-1},x_i[, \varphi(x) = m_i, \psi(x) = \mathrm{M}_i$$

D'après ce qui précède, $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.
Reprenons le cas général où f est continue par morceaux. On dispose d'une subdivision adaptée $\sigma = (x_0,x_1,\dots,x_n)$. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on applique ce qui précède au prolongement par continuité de f sur $]x_{i-1},x_i[$, ce qui permet de construire des fonctions en escalier satisfaisantes sur $]x_{i-1},x_i[$. On complète en posant $\varphi(x_i) = f(x_i) = \psi(x_i)$.

☞ Remarque
Une autre façon de formuler le résultat est de dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que $\varphi \leq f \leq \varphi + \varepsilon$. On dit également que $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. Peut-on approcher plus que des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ? Oui, cela s'appelle des fonctions réglées et dépasse largement le cadre du programme.

Propriété 7 (Extension au cas complexe) *Soit $f \in \mathrm{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}, |\varphi - f| \leq \varepsilon$$

Démonstration. D'après la propriété précédente, on dispose de fonctions en escalier ψ et χ à valeurs réelles telles que $|\mathfrak{Re}(f) - \psi| \leq \varepsilon/2$ et $|\mathfrak{Im}(f) - \chi| \leq \varepsilon/2$. On pose alors $\varphi = \psi + \mathrm{i}\chi$ qui est bien en escalier et vérifie $|\varphi - f| \leq |\mathfrak{Re}(f) - \psi| + |\mathfrak{Im}(f) - \chi| \leq \varepsilon$.

2 Intégrale de Riemann

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition 8 *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à φ. Pour tout entier i dans $[\![0,n-1]\!]$, on note $c_i = \varphi(\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}))$. On pose alors*

$$\mathrm{I}(\varphi,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$$

Théorème 5 *La quantité précédente ne dépend pas de la subdivision adaptée à φ. Elle est appelée intégrale de φ sur le segment $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]} \varphi$, ou $\int_a^b \varphi$.*

Démonstration. Soit $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à φ et $c \in [a,b]$ qui ne fait pas partie de σ. On note j l'unique entier dans $[\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]x_j,x_{j+1}[$. On sait déjà que $\sigma' = \sigma \vee (x)$ est adaptée à φ. On note pour tout entier i dans $[\![0,n-1]\!]$, $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$ et $c_i = \varphi(\xi_i)$.

$$\mathrm{I}(\varphi,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1}-x_i) = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} c_i(x_{i+1}-x_i) + c_j(x_{j+1}-x_j) = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} c_i(x_{i+1}-x_i) + c_j(x_{j+1}-x) + c_j(x-x_j)$$

Comme on sait que φ est constante sur $]x_j,x_{j+1}[$, on reconnaît la quantité $\mathrm{I}(\varphi,\sigma')$. On en déduit par récurrence que pour toute subdivision σ' adaptée plus fine que σ, $\mathrm{I}(\varphi,\sigma) = \mathrm{I}(\varphi,\sigma')$.
A présent, considérons deux subdivisions σ,σ' adaptées à φ. Alors, $\sigma \vee \sigma'$ est adaptée à φ et plus fine que ces deux dernières. D'après ce qui précède, $\mathrm{I}(\varphi,\sigma) = \mathrm{I}(\varphi,\sigma\vee\sigma') = \mathrm{I}(\varphi,\sigma')$.

Propriété 8 *L'application $\mathrm{I} : \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi$ est linéaire, i.e*

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\varphi,\psi) \in (\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}))^2, \int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_a^b \varphi + \mu \int_a^b \psi$$

Démonstration. On dispose de subdivisions σ, σ' adaptées respectivement à φ et ψ. On travaille avec $\sigma \vee \sigma'$ qui est adaptée à φ et ψ. Notons-la $(x_0, \ldots, x_n)$, et posons pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\lambda\varphi + \mu\psi)(\xi_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\lambda\varphi(\xi_i) + \mu\psi(\xi_i)) \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\varphi(\xi_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\psi(\xi_i) \\
&= \lambda \int_a^b \varphi + \mu \int_a^b \psi
\end{aligned}$$

Propriété 9 (Relation de Chasles) *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$ et $c \in]a,b[$, alors*

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}$$

Démonstration. Notons $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ. On sait alors que $\sigma \vee (c)$ est adaptée à φ. Avec les notations usuelles, on a

$$\int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} = \sum_{i=0}^{j-1} (x_{i+1} - x_i)c_i + (c - x_j)c_j \quad \text{et} \quad \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} = c_j(x_{j+1} - c) + \sum_{i=j+1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)c_i$$

En sommant, on obtient

$$\int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} = \sum_{i=0}^{j-1} (x_{i+1} - x_i) + c_j(x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)c_i = \int_{[a,b]} \varphi$$

Propriété 10 (Croissance) *Soit φ, ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi \leq \psi$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.*

Démonstration. On commence par montrer le cas où $\psi \geq 0$. Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à ψ. Alors pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, $\psi((x_i + x_{i+1})/2) \geq 0$ et $x_{i+1} - x_i \geq 0$. Par conséquent,

$$\int_a^b \psi = \sum_{i=0}^{n-1} \psi((x_i + x_{i+1})/2)(x_{i+1} - x_i) \geq 0$$

comme somme de quantités positives. Dans le cas général, on applique ce qui précède à $\psi - \varphi \geq 0$, ce qui implique $\int_a^b (\psi - \varphi) \geq 0$. Par linéarité, on en déduit que $\int_a^b \psi \geq \int_a^b \varphi$.

⚠ **Attention**

La réciproque est fausse, on peut avoir deux fonctions de même intégrale sans qu'elles soient égales. L'indicatrice du singleton $\{0\}$ est d'intégrale nulle sur $[0,1]$, pourtant elle n'est pas nulle.

Propriété 11 (Inégalité triangulaire) *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$. Alors*

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$$

Démonstration. Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ. On note pour tout entier i dans $[\![0, n-1]\!]$, $c_i = \varphi((x_i + x_{i+1})/2)$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|(x_{i+1} - x_i) \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$$

2.2 Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

On doit commencer par le cas réel, l'extension au cas complexe ne posera pas problème.

Définition 9 *Soit $f \in \mathbb{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. On considère l'ensemble*

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi | \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$$

On appelle intégrale de f la borne supérieure de A.

☞ **Remarque**
Commençons par remarquer que cette quantité est bien définie. On a vu que f est bornée. Si M est un majorant de f, soir φ en escalier telle que $\varphi \leq f$, alors $\varphi \leq M$. D'après la croissance des intégrales des fonctions en escalier (la fonction constante M est en escalier), on a $\int_a^b \varphi \leq M(b-a)$. Par conséquent, l'ensemble A est majoré. De plus, si on note m un minorant de f, alors la fonction constante égale à m est une fonction en escalier inférieure ou égale à f, donc A est non vide. Ainsi, $\sup(A)$ *est un réel.*

Exemple 6 *Si f est elle-même en escalier, alors le sup précédent est atteint, et on a bien l'égalité des intégrales de f au sens des fonctions continues par morceaux et en escalier.*

Notation
L'intégrale de f est notée$\int_a^b f$, $\int_{[a,b]} f$ ou encore $\int_a^b f(x)dx$. Toutefois, il faudra faire attention à bien ordonner a et b. On étend la notation lorsque $a = b$, par $\int_{[a,b]} f = 0$, lorsque $a > b$ par $\int_a^b f = -\int_b^a f$. Si $c \in]a,b[$, on note $\int_a^c f = \int_a^c f_{|[a,c]}$.

Théorème 6 *Soit $f \in \mathbb{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. On considère l'ensemble*

$$B = \left\{ \int_a^b \psi | \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } f \leq \psi \right\}$$

Alors $\inf(B) = \sup(A) = \int_a^b f$.

Démonstration. Commençons par remarquer $\forall \varphi \leq f, \forall \psi \geq f, \varphi \leq f \leq \psi$. Par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier, $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$. Fixons $\varphi \leq f$, ce qui précède indique que $\int_a^b \varphi$ est un minorant de B, donc $\int_a^b \varphi \leq \inf(B)$. Comme ceci a été établi pour tout $\varphi \leq f$, $\inf(B)$ est un majorant de A, donc $\sup(A) \leq \inf(B)$.
Supposons un instant que $\sup(A) < \inf(B)$. On pose alors $\varepsilon = \inf(B) - \sup(A) > 0$. D'après le théorème d'approximation de f par des fonctions en escalier, il existe $\varphi \leq f$ et $\psi \geq f$ telles que $\psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Mais alors par croissance et linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier,

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Comme $\int_a^b \psi \geq \inf(B)$ et $\int_a^b \varphi \leq \sup(A)$, on en déduit

$$\inf(B) - \sup(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

soit encore $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est absurde.

Avant de traiter complètement la linéarité, on regarde si l'intégrale est compatible avec le signe.

Propriété 12 (Intégrale et signe) *Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. Alors $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.*

Démonstration. Avec les mêmes notations que précédemment, on a

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi | \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \varphi \leq f \right\}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\varphi \leq f$. Alors d'après la linéarité des intégrales de fonctions en escalier, $\int_a^b (-\varphi) = -\int_a^b \varphi$ et $-\varphi \geq -f$. Comme on a l'équivalence $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \varphi \leq g \iff -\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), -\varphi \geq -f$, on vient de démontrer que

$$-\mathrm{A} = \left\{ \int_a^b \psi | \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \psi \geq -f \right\}$$

D'après ce qui précède, on sait que cet ensemble est minoré et que sa borne inférieure vaut $\int_a^b (-f)$. Ainsi,

$$\inf(-\mathrm{A}) = \int_a^b (-f)$$

D'après les propriétés sur les bornes inférieures et les bornes supérieures, on a alors

$$\int_a^b (-f) = -\sup(\mathrm{A}) = -\int_a^b f$$

Propriété 13 (Linéarité) *Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, soit $(f,g) \in (\mathbb{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}))^2$. Alors*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Démonstration. — On commence par traiter l'homogénéité dans le cas $\lambda > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\varphi \leq f \leq \varphi + \varepsilon$.. Comme $\lambda > 0$, on a

$$\lambda\varphi \leq \lambda f \leq \lambda\varphi + \lambda\varepsilon$$

D'une part, $\lambda\varphi$ est une fonction en escalier inférieure ou égale à λf. Par définition de l'intégrale, on a alors

$$\int_a^b (\lambda\varphi) \leq \int_a^b (\lambda f)$$

Mais alors, on exploite la linéarité de l'intégrale sur les fonctions en escalier, ce qui entraîne

$$\lambda \int_a^b \varphi \leq \int_a^b (\lambda f)$$

ou encore puisque $\lambda > 0$,

$$\int_a^b \varphi \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b (\lambda f)$$

On vient de trouver un majorant de l'ensemble $\mathrm{A} = \left\{ \int_a^b \varphi | \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \varphi \leq f \right\}$, donc sa borne supérieure lui y est inférieure, i.e

$$\int_a^b f \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b \lambda f$$

soit encore

$$\lambda \int_a^b f \leq \int_a^b \lambda f$$

On applique ce qu'on vient de prouver à la fonction continue par morceaux λf et au réel $1/\lambda > 0$, ce qui entraîne

$$\frac{1}{\lambda} \int_a^b \lambda f \leq \int_a^b \frac{1}{\lambda} \lambda f$$

soit encore

$$\int_a^b \lambda f \leq \lambda \int_a^b f$$

Ainsi, on a l'égalité $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

— Homogénéité si $\lambda = 0$. Alors, la borne supérieure est atteinte puisque la fonction constante nulle est en escalier et l'égalité $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$ est bien vérifiée.

— Homogénéité dans le cas $\lambda < 0$. On applique le premier cas à la fonction f et au réel $\mu = -\lambda > 0$, ce qui entraîne

$$\int_a^b (-\lambda f) = (-\lambda) \int_a^b f$$

Or, on a vu la compatibilité du signe avec l'intégrale, donc $\int_a^b(-\lambda f) = -\int_a^b \lambda f$. On obtient alors

$$-\int_a^b \lambda f = -\lambda \int_a^b f$$

soit encore

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

— Additivité : Soit φ et ψ des fonctions en escalier telles que $\varphi \leq f$ et $\psi \leq g$. On en déduit que $\varphi + \psi \leq f + g$. Or $\varphi + \psi$ est une fonction en escalier par morceaux, elle est inférieure ou égale à $f + g$, donc $\int_a^b(\varphi+\psi) \leq \int_a^b(f+g)$ par définition de l'intégrale de $f + g$. Or, on sait que l'intégrale est linéaire sur les fonctions en escalier, donc

$$\int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \leq \int_a^b (f+g)$$

On le réécrit sous la forme

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b \psi$$

et ce pour toute fonction en escalier φ inférieure ou égale à f. On a donc trouve un majorant des intégrales de ces fonctions. Par passage au sup, on en déduit

$$\int_a^b f \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b \psi$$

On le réécrit

$$\int_a^b \psi \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b f$$

On vient de trouver un majorant des intégrales des fonctions en escaliers inférieures ou égales à g. Par passage au sup, on obtient

$$\int_a^b g \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b f$$

soit encore

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f+g)$$

On applique ce résultat aux fonctions continues par morceaux $f + g$ et $-g$, ce qui entraîne

$$\int_a^b (f+g) + \int_a^b (-g) \leq \int_a^b (f+g-g)$$

D'après la compatibilité avec le signe, on en déduit

$$\int_a^b (f+g) - \int_a^b g \leq \int_a^b f$$

soit encore

$$\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b g + \int_a^b f$$

On en déduit l'égalité $\int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

☞ **Remarque**

La linéarité fonctionne encore pour $a \geq b$.

Propriété 14 (Croissance) *Soit $(f, g) \in (\mathrm{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R}))^2$ telle que $f \leq g$. Alors*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

⚠ **Attention**

C'est faux pour $a > b$. Faites attention à l'ordonnancement des bornes.

Démonstration. Soit φ une fonction en escalier telle que $\varphi \leq f$. En particulier, $\varphi \leq g$ par transitivité. On en déduit que $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b g$, puisque $\int_a^b g$ est un majorant de toutes les intégrales de fonctions en escalier inférieures ou égales à g. Ainsi, $\int_a^b g$ est un majorant de toutes les intégrales de fonctions en escalier inférieures ou égales à f. Par passage au sup, on en déduit que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Propriété 15 (Positivité) *Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$. Alors $\int_a^b f \geq 0$.*

⚠ Attention
C'est faux pour $a > b$. Faites attention à l'ordonnancement des bornes.

⚠ Attention
La réciproque est fausse ! Il existe des fonctions d'intégrales positives qui ne sont pas de signe constant.

Démonstration. Il suffit de constater que la fonction nulle est continue par morceaux et d'intégrale nulle.

Propriété 16 (Relation de Chasles) *Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, $c \in]a,b[$. Alors*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose φ une fonction en escalier telle que $\varphi \leq f \leq \varphi + \varepsilon$. D'après la croissance,

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \varphi + (b-a)\varepsilon$$

Or sait que l'intégrale des fonctions en escalier vérifie la relation de Chasles, donc

$$\int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi + (b-a)\varepsilon$$

De plus, l'inégalité $\varphi \leq f \leq \varphi + \varepsilon$ étant vraie sur $[a,b]$, elle est a fortiori vraie sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Donc $\int_a^c \varphi \leq \int_a^c f \leq \int_a^c \varphi + (c-a)\varepsilon$ et $\int_c^b \varphi \leq \int_c^b f \leq \int_c^b \varphi + (b-c)\varepsilon$. On en déduit

$$\int_a^c f - (c-a)\varepsilon + \int_c^b f - (b-c)\varepsilon \leq \int_a^b f \leq \int_a^c f + (c-a)\varepsilon + \int_c^p f + (b-c)\varepsilon + (b-a)\varepsilon$$

soit encore

$$\int_a^c f + \int_c^b f - (b-a)\varepsilon \leq \int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f + 2(b-a)\varepsilon$$

Comme toutes les intégrales ne dépendent pas de ε, on passe à la limite quand ε tend vers 0, ce qui entraîne

$$\int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$$

donc l'égalité souhaitée.

☞ Remarque
La relation de Chasles fonctionne encore pour a, b, c dans l'ordre que l'on souhaite pourvu que les fonctions soient définies et continues par morceaux sur le segment qui les contient tous.

Exemple 7 *Une application de la croissance pour la comparaison série-intégrale : on cherche à déterminer un équivalent de la suite $(H_n)_{n\geq 1} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$. Soit k un entier naturel non nul, soit t dans $[k, k+1]$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a*

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Après intégration sur $[k, k+1]$, on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{kt} \frac{1}{k} dt$$

soit encore

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Soit à présent n un entier supérieur ou égal à 2, on somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$, cela entraîne

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ce qu'on réécrit

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1) \leq \mathrm{H}_{n-1}$$

On pouvait également éviter la primitivation sur chaque segment $[k, k+1]$ en ne primitivant qu'à la fin, puisque la relation de Chasles fait apparaître $\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) - \ln(1)$. En réordonnant les inégalités précédentes, on obtient

$$\mathrm{H}_n - 1 \leq \ln(n) \leq \mathrm{H}_{n-1}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \mathrm{H}_n \leq \ln(n) + 1$$

On remarque alors que $n \sim n+1$ de limite $+\infty$, donc par passage au logarithme dans les équivalents $\ln(n+1) \sim \ln(n) \sim \ln(n)+1$. Par théorème d'encadrement sur les équivalents, $\mathrm{H}_n \sim \ln(n)$. Pour les curieux, le terme suivant dans le développement asymptotique de H_n est un constante appelée constante d'Euler-Mascheroni.

Théorème 7 (Inégalité triangulaire) *Soit $f \in \mathrm{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$, alors*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration. On commence par remarquer que $-|f| \leq f \leq |f|$ (distinguer les cas si besoin). La croissance de l'intégrale entraîne alors

$$\int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

D'après la linéarité, on en déduit que

$$-\left(\int_a^b |f| \right) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

On en déduit que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

⚠ **Attention**

C'est faux pour $a > b$. Attention à l'ordre des bornes d'intégration !

Définition 10 *Soit $f \in \mathrm{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Théorème 8 *Valeur moyenne Soit f continue sur $[a, b]$. Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.*

⚠ **Attention**

C'est faux pour une fonction uniquement continue par morceaux. La fonction signe est de moyenne nulle sur $[-1, 1]$ et ne prend jamais la valeur 0.

Démonstration. Comme f est continue sur un segment, on peut appliquer le théorème des bornes atteintes. On note α et β des éléments de $[a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_a^b f(\alpha) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f(\beta)$$

soit encore

$$(b-a)f(\alpha) \leq \int_a^b f \leq (b-a)f(\beta)$$

Comme $b-a>0$, on en déduit

$$f(\alpha)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f\leq f(\beta)$$

Comme f est continue, on peut alors exploiter le théorème des valeurs intermédiaires, donc $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ est dans l'image de f.

Théorème 9 (Séparation) *Soit f continue sur $[a,b]$ et de signe constant telle que $\int_a^b f=0$. Alors $f=0$.*

⚠ **Attention**
C'est faux pour une fonction continue par morceaux. L'indicatrice du singleton $\{0\}$ est positive d'intégrale nulle sur $[0,1]$, mais non nulle.

Démonstration. Considérons le cas où f est de signe constant positif. Supposons un instant que f n'est pas la fonction nulle. Il existe un réel x_0 dans $[a,b]$ tel que $f(x_0)\neq 0$. Comme f est continue sur $[a,b]$, elle est continue en x_0. On choisit alors $\varepsilon=f(x_0)/2>0$, puisque f est supposée positive. On dispose alors d'un réel $\delta>0$ tel que $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b],|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$. En particulier,

$$\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b],f(x)\geq f(x_0)-\varepsilon=f(x_0)/2>0$$

Quitte à restreindre δ, on peut supposer $a\leq x_0-\delta$ et $x_0+\delta\leq b$. On exploite alors la relation de Chasles

$$\int_a^b f=\int_a^{x_0-\delta}f+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f+\int_{x_0+\delta}^{b}f$$

Par croissance et positivité de l'intégrale, on a $\int_a^{x_0-\delta}f\geq 0$, $\int_{x_0+\delta}^b f$, puis $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f\geq 2\delta f(x_0)/2$. Cela amène

$$\int_a^b f\geq\delta f(x_0)>0$$

ce qui contredit l'hypothèse $\int_a^b f=0$. Cette absurdité assure que $f=0$.
Le cas f de signe constant négatif se prouve en appliquant ce qui précède à $-f$.

Extension aux fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 11 *Soit $f\in C_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. On définit l'intégrale de f par*

$$\int_a^b f=\int_a^b\mathfrak{Re}(f)+\mathrm{i}\int_a^b\mathfrak{Im}(f)$$

Propriété 17 (Linéarité) *Soit $(f,g)\in(C_{pm}([a,b],\mathbb{C}))^2,(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$. Alors*

$$\int_a^b\lambda f+\mu g=\lambda\int_a^b f+\int_a^b g$$

Démonstration. Retourner aux parties réelles et imaginaires, puis exploiter la linéarité pour les fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$.

☞ **Remarque**
Encore valable pour $a>b$.

Propriété 18 (Relation de Chasles) *Soit $f\in C_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ et $c\in]a,b[$. Alors*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

Démonstration. Retourner aux parties réelles et imaginaires, puis exploiter la relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$.

☞ **Remarque**
Encore valable pour a,b,c ordonnés de manière quelconque.

On ne dispose pas de croissance puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. On garde toutefois l'inégalité triangulaire

Propriété 19 (Inégalité triangulaire) *Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ telle que $|f-\varphi| \leq \varepsilon$. Alors $|\mathfrak{Re}(f-\varphi)| \leq \varepsilon$ et $|\mathfrak{Im}(f-\varphi)| \leq \varepsilon$. L'inégalité triangulaire de même que la croissance ont été démontrées dans le cas réel, donc

$$\left|\int_a^b \mathfrak{Re}(f-\varphi)\right| \leq \int_a^b |\mathfrak{Re}(f-\varphi)| \leq (b-a)\varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b \mathfrak{Im}(f-\varphi)\right| \leq \int_a^b |\mathfrak{Im}(f-\varphi)| \leq (b-a)\varepsilon$$

On majore alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b (f-\varphi)+\varphi\right| \\
&= \left|\int_a^b (f-\varphi)+\int_a^b \varphi\right| \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\
&\leq \left|\int_a^b (f-\varphi)\right| + \left|\int_a^b \varphi\right| \quad \text{inégalité triangulaire de complexes} \\
&\leq \sqrt{\left|\int_a^b \mathfrak{Re}(f-\varphi)\right|^2 + \left|\int_a^b \mathfrak{Im}(f-\varphi)\right|^2} + \int_a^b |\varphi| \quad \text{définition et inégalité triangulaire dans } \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}) \\
&\leq \sqrt{2}(b-a)\varepsilon + \int_a^b |\varphi - f + f| \\
&\leq \sqrt{2}(b-a)\varepsilon + \int_a^b |\varphi - f| + \int_a^b |f| \quad \text{inégalité triangulaire et croissance dans } \mathbb{R} \\
&\leq \sqrt{2}(b-a)\varepsilon + (b-a)\varepsilon + \int_a^b |f| \quad \text{croissance dans } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dans cette dernière inégalité, les intégrales ne dépendent de ε, en passant à la limite quand ε tend vers 0, on obtient

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Propriété 20 (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire) *Soit $f \in C([a,b],\mathbb{C})$. Il y a égalité $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ si et seulement si il existe un réel θ tel que $\forall x \in [a,b], f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$.*

Démonstration. Le sens indirect est clair. Pour le sens direct, commençons par le cas réel. Alors $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ ou $\int_a^b f = -\int_a^b |f|$. Prenons le premier cas $\int_a^b f = \int_a^b |f|$. Celui-ci implique $\int_a^b (|f|-f) = 0$. Or, $|f|-f \geq 0$ et $|f|-f$ est continue. On en déduit via le théorème de séparation que $|f|-f=0$. On peut alors choisir $\theta = 0$. Dans le cas $\int_a^b f = -\int_a^b |f|$, on trouve similairement $f+|f| = 0$, ce qui amène à poser $\theta = \pi$. Le cas complexe est admis pour l'instant. On le prouvera lorsqu'on traitera les espaces préhilibertiens en fin d'année.

Propriété 21 *Soit $f \in C_{pm}([-a,a],\mathbb{C})$ avec $a > 0$.*

- *Si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.*
- *Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.*

Démonstration. Cela découle de la relation de Chasles et du changement de variable en partie suivante.

Propriété 22 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que toutes les restrictions à un segment de f sont continues par morceaux. On suppose que f est périodique de période $T > 0$. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

La quantité $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ est appelée valeur moyenne de f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Cela découle de la relation de Chasles et du changement de variable en partie suivante.

2.3 Sommes de Riemann

Définition 12 *On appelle subdivision pointée du segment $[a,b]$ tout couple (σ,ξ) tel que $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ est une subdivision pointée de $[a,b]$ et $\xi = (\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$ est une suite finie de réels tels que $\forall i \in [\![0,n-1]\!], \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.*

Définition 13 *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et $(\sigma,\xi) = (x_0,\dots,x_n,\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$ une subdivision pointée de $[a,b]$. On appelle somme de Riemann de f associée à (σ,ξ) le scalaire*

$$\mathrm{S}(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i))$$

Exemple 8 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (a + k(b-a)/n)_{0\leq k\leq n}$ la subdivision régulière de taille n de $[a,b]$. On peut pointer à gauche chaque sous-intervalle en posant $\forall k \in [\![0,n-1]\!], \xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, ou bien pointer à droite chaque sous-intervalle en posant $\forall k \in [\![0,n-1]\!], \zeta_k = x_{k+1} = a + (k+1)\frac{b-a}{n}$. Cela amène à considérer les sommes de Riemann associées*

$$\mathrm{S}_n^-(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad et \quad \mathrm{S}_n^+(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Ces deux sommes se révèlent très utiles dans le cas $[a,b] = [0,1]$.

Théorème 10 (Sommes de Riemannn, hors programme) *Soit $f \in \mathrm{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel δ strictement positif tel que pour toute subdivision pointée (σ,ξ) telle que $|\sigma| \leq \delta$ (de pas inférieur à δ), on a*

$$\left|\mathrm{S}(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon$$

Démonstration. On ne traite le cas f continue sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon/(b-a) > 0$. D'après le théorème de Heine, il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Considérons à présent une subdivision pointée $(\sigma,\xi) = (x_0,\dots,x_n,\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$ de $[a,b]$ telle que $|\sigma| \leq \delta$. Alors, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{S}(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right| \\ &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right)\right|\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de la moyenne, pour tout entier i dans $[\![0,n-1]\!]$, il existe un réel c_i dans $[x_i,x_{i+1}]$ tel que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = f(c_i)(x_{i+1}-x_i)$. On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{S}(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) - f(c_i)(x_{i+1}-x_i))\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i) - f(c_i)|(x_{i+1}-x_i)\end{aligned}$$

On remarque alors que pour tout entier i dans $[\![0,n-1]\!]$, $\xi_i - c_i \leq |x_{i+1}-x_i| \leq \delta$ d'après la majoration du pas de σ. On est alors dans le cadre d'application de l'uniforme continuité, ce qui entraîne $\forall i \in [\![0,n-1]\!], |f(\xi_i) - f(c_i)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. On peut alors poursuivre les majorations via

$$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma,\xi)-\int_a^b f\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1}-x_i)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Exemple 9 *Ce théorème exprime entre autres la convergence des suites* $(S_n^-(f))_n$ *et* $(S_n^+(f))_n$ *vers* $\int_a^b f$. *Par exemple*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On note qu'alors $f:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ *est bien continue, donc cette somme converge vers* $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan(1)=\pi/4$. *Autre exemple,*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

On exploite alors la fonction $g:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{1+x}$ *qui est bien continue. On en déduit que la suite converge vers* $\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(2)$.

Théorème 11 (Sommes de Riemann, au programme) *Soit* $f\in C_{pm}([a,b],\mathbb{K})$.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)dt$$

Démonstration. Démonstration non exigible.

On exprime une majoration de l'erreur dans le cas où f est L-Lipschitzienne (ce qui est le cas des fonctions de classe C^1 sur un segment).

Théorème 12 *Soit f une fonction* L*-Lipschitzienne sur* $[a,b]$. *Alors pour tout entier naturel n non nul,*

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{L(b-a)^2}{2n}$$

En particulier

Démonstration. Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$, en notant $x_k=a+k(b-a)/n$ et $x_{k+1}=x_k+(b-a)/n$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)dt\right| &= \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x_k)-f(t))\,dt\right|\\ &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x_k)-f(t))|dt\\ &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}}L|x_k-t|dt\\ &\leq L\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}\\ &\leq L\frac{(b-a)^2}{2n^2}\end{aligned}$$

Reprenons la quantité initiale, d'après la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(t)dt\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{L}\frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&\leq \frac{\mathrm{L}(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

Exemple 10 *Pour tout entier n non nul, on écrit*

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

On reconnaît alors une somme de Riemann de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ qui est bien continue (mais pas Lipschitzienne), donc

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

Exemple 11 *On cherche la limite de la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit

$$\mathrm{P}_n = \left[\frac{1}{n^n}\prod_{k=n+1}^{2n} k\right]^{1/n} = \left[\prod_{j=1}^{n}(1+\frac{j}{n})\right]^{1/n}$$

Toutes quantités strictement positives, on passe au logarithme, ce qui entraîne

$$\ln(\mathrm{P}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln(1+\frac{j}{n})$$

On reconnaît alors une somme de Riemann de $[0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$ qui est bien continue par morceaux. Par conséquent, $\ln(\mathrm{P}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)dx = [x\ln(x)-x]_1^2 = 2\ln(2)-1$. La continuité de l'exponentielle assure alors que

$$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}= \exp(2\ln(2)-1) = \frac{4}{e}$$

Exemple 12 *Un exemple d'exploitation de DES et de somme de Riemann. On cherche à évaluer pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} dt/(z-e^{it})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Assemblons une somme de Riemann correspondante à $t \mapsto 1/(z-e^{it})$ qui est bien continue sur $[0,2\pi]$, en subdivisant $[0,2\pi]$ via les $(\exp(2k\pi/n))_{0\leq k\leq n}$.*

$$\mathrm{S}_n = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z-e^{i2k\pi/n}}$$

Notons pour tout entier k dans $[\![0,n-1]\!]$, $\omega_k = \exp(2ik\pi/n)$. L'expression précédente fait penser à une décomposition en éléments simples d'un polynôme ayant pour racines les $(\omega_k)_{0\leq k\leq n-1})$, i.e $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X}-\omega_k)$. Comme tous les $(\omega_k)_k$ sont distincts, on en déduit

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\mathrm{X}-\omega_k} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{n\mathrm{X}^{n-1}}{\mathrm{X}^n-1}$$

On en déduit après évaluation en z,

$$\mathrm{S}_n = \frac{2\pi z^{n-1}}{z^n - 1}$$

Le passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ nécessite de distinguer deux cas.

— *Si $|z| < 1$, la limite précédente vaut 0, et $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z-e^{it}} = 0$.*

— *Si $|z| > 1$, la limite précédente vaut 2π et $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z-e^{it}} = 2\pi$.*

3 Les grands théorèmes d'intégration

3.1 Intégration et primitive

Théorème 13 (Théorème fondamental du calcul intégral) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{K}$. Alors l'application*

$$\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est de classe C^1 et $\mathrm{F}' = f$.

Démonstration. On commence par montrer que F est dérivable de dérivée f. Pour cela, on considère un réel x_0 dans I, puis x dans I différent de x_0. On assemble, via la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(x)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_x^{x_0} f(t)dt - (x - x_0)f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\int_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f en x_0 nous donne un réel $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap \mathrm{I}, |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. On considère à présent un réel $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap \mathrm{I}$. Alors pour tout réel t dans $[\min(x, x_0), \max(x, x_0)], |t - x_0| \leq \delta$, donc $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} |f(t) - f(x_0)|\, dt \leq \varepsilon |x - x_0|$$

On en déduit que

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(x)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Synthétisons : pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un réel $\delta > 0$ tel que pour tout réel x dans I différent de x_0,

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \left|\frac{\mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(x)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, on a montré que le taux d'accroissement de F admettait une limite en x_0, donc que F est dérivable en x_0 et que $\mathrm{F}'(x_0) = f(x_0)$. Ceci étant valable pour tout réel x_0 dans I, on obtient que F est dérivable sur I, de dérivée f. Comme f est continue, F est alors de classe C^1.

⚠ **Attention**

Sous seule hypothèse de continuité par morceaux, ce théorème ne fonctionne pas. Prenons par exemple f la fonction partie entière sur $[0,2]$, alors $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(x)$ vérifie $\forall x \in [0,1], \mathrm{F}(x) = 0, \quad \forall x \in [1,2], \mathrm{F}(x) = x - 1$. Elle est dérivable à gauche en 1 avec $\mathrm{F}'_g(1) = 1$ et dérivable à droite en 1 avec $\mathrm{F}'_d(1) = 0$, donc non dérivable en 1.

On en déduit tous les théorèmes classiques d'intégration, rappelés en début d'année :

Propriété 23 *Soit f continue sur I, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$, F une primitive de f, alors $\int_a^b f = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.*

Théorème 14 (Intégration par parties) *Soit $(f, g) \in (\mathrm{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}))^2$, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$. Alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Théorème 15 (Changement de variables) *Soit $f \in \mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $(a,b) \in \mathrm{J}^2$ et $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathrm{J}, \mathrm{I})$. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Exemple 13 *Avec les notations (abusives) de primitives, pour $k \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{I}_k = \int \frac{dx}{(1+x^2)^k}$. On effectue une intégration par parties en intégrant la fonction constante égale à 1. Cela entraîne*

$$\mathrm{I}_k = \frac{x}{(1+x^2)^k} - \int x\frac{(-k)(2x)}{(1+x^2)^{k+1}}dx = \frac{x}{(1+x^2)^k} - 2k\mathrm{I}_k + 2k\mathrm{I}_{k+1}$$

On déduit une relation de récurrence entre toutes les primitives des éléments de seconde espèce dans les décompositions en éléments simples de fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$.

Exemple 14 *Quelques calculs de primitives :*

— $\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$.

— *On a la décomposition en éléments simples $\mathrm{F} = \frac{1}{\mathrm{X}^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1} + \frac{2-\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}\right)$. De plus, $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1/2)^2 + 3/4$, ce qui amène*

$$\int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 1 *Déterminer une relation de récurrence entre primitives de $t \mapsto 1/(t^2-t+1)^n$.*

3.2 Formules de Taylor

Théorème 16 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathrm{K})$. Alors pour tout $(a,x) \in \mathrm{I}^2$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Démonstration. Il s'agit simplement d'intégrations par parties successives. Démontrons cette propriété par récurrence. Pour $n = 0$, soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \int_a^x \frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0 dt = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

On sait que cela vaut $f(x)$ d'après le théorème fondamental du calcul intégral. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule de Taylor avec reste intégral est vérifiée. Soit $f \in \mathbb{C}^{n+2}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, alors $f^{(n+1)} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, et on effectue une intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt &= \left[f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}(-1)\right]_a^x - \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}(-1)dt \\ &= f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt\end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral au rang n, on en déduit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt$$

soit le résultat au rang $n+1$.

Théorème 17 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Pour tout $(a,x) \in \mathrm{I}^2$,*

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leq \sup_{t \in ``[a,x]"} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Si on veut rester dans les limites du programme, on peut établir ce résultat avec la croissance de l'intégrale et TRI, sinon on peut exploiter l'égalité de Taylor-Lagrange dans les chapitres d'analyse précédents. Sous l'hypothèse C^{n+1}, on remarque que $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $''[a,x]''$, donc bornée. On peut alors majorer brutalement

$$\left|\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{(n)!}dt\right| \leq \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} \sup_{t\in''[a,x]''} |f^{(n+1)}(t)|\frac{|x-t|^n}{(n)!}dt = \frac{\sup_{t\in''[a,x]''}|f^{(n+1)}(t)|}{(n)!}\int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} |x-t|^n dt$$

Cette dernière intégrale se calcule en distinguant le cas $a \leq x$ et $a \geq x$, on obtient dans tous les cas $\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$. On en déduit

$$\left|\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{(n)!}dt\right| \leq \sup_{t\in''[a,x]''} |f^{(n+1)}(t)|\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui donne le résultat attendu d'après la formule de Taylor avec reste intégral.

Exemple 15 *Calcul de la somme de la série harmonique alternée. On exploite la fonction* $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *de classe* C^∞ *sur* $]-1,+\infty[$. *De plus,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $a = 0$ *et* $x = 1$, *ce qui donne*

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(1)^k\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{(n)!}{(1+t)^k}\right|\frac{|1|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Comme le minorant de droite tend vers 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$, *on en déduit via le théorème d'encadrement que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

Exercice 2 *Démontrer que pour tout réel* t,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^t$$

Exercice 3 *Pour tout entier naturel* n *non nul, pour tout réel* a *positif, on pose* $I_n(a) = \int_0^a e^{-nx}\ln(n+x)dx$. *Montrer que pour tout entier* n *non nul,* $I_n(a)$ *possède une limite quand* a *tend vers* $+\infty$. *On la note* J_n. *Montrer ensuite que* $J_n \sim \ln(n)/n$.

Exercice 4 *On note* $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x e^{-(xt)^2}\frac{dt}{t}$. *Démontrer que* f *admet un maximum et déterminer en quels points il est atteint.*

Synthèse sur les formules de Taylor :

- La formule de Taylor polynomiale est une *égalité de polynômes*.
- La formule de Taylor Young est un développement limité, il s'agit d'une *limite*. On suppose la n-dérivabilité en un point.
- L'égalité de Taylor-Lagrange est une égalité *locale*. L'existence dun réel c_x dépend de x et a. On requiert la n-dérivabilité sur $]a,x[$.
- L'inégalité de Taylor-Lagrange est une inégalité *globale*. On requiert la $n+1$-dérivabilité sur $]a,x[$, et un maximum de $|f^{(n+1)}|$. La version du programme demande le caractère C^{n+1}.
- La formule de Taylor avec reste intégral est une égalité *globale* entre fonctions sur $[a,b]$. On requiert le caractère C^{n+1} sur $[a,b]$

4 Annexe : Calcul approché d'intégrales

Tout d'abord un exemple de l'intérêt de l'approximation.

Exemple 16 (Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. On pose pour tout entier n non nul, $c_n = \int_a^b f(t)e^{int}dt$ et on souhaite démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle. On commence par l'évaluer sur des fonctions en escalier. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, ,et n non nul, $\int_a^b \alpha e^{int}dt = \frac{\alpha}{in}(e^{inb} - e^{ina})$. Ainsi, $|\int_a^b \alpha e^{int}| \leq 2|\alpha|/n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On déduit via Chasles que le résultat est acquis pour toute fonction en escalier. Reprenons le cas général.*
Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un rang N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, |c_n| \leq \varepsilon$. Commençons par manipuler l'expression de c_n en introduisant φ une fonction en escalier a priori quelconque.

$$\begin{aligned} c_n &= \int_a^b f(t)e^{int}dt \\ &= \int_a^b (f(t)-\varphi(t))e^{int} + \int_a^b \varphi(t)e^{int} \end{aligned}$$

On en déduit via l'inégalité triangualaire et la croissance de l'intégrale que

$$|c_n| \leq \int_a^b |f(t)-\varphi(t)|dt + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right|$$

On sait qu'on peut choisir une fonction en escalier φ telle que $|f-\varphi| \leq \varepsilon/(2(b-a))$. On sait alors que pour cette fonction φ, il existe un rang N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, \left|\int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right| \leq \varepsilon/2$. On en déduit que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |c_n| \leq \varepsilon$$

ce qui donne le résultat attendu.

On a vu d'après les sommes de Riemann qu'on pouvait approcher des intégrales par des sommes. Dans le cas L-Lipschitzien, on a établi la majoration de l'erreur suivante :

Théorème 18 *Soit f une fonction L-Lipschitzienne sur $[a,b]$. Alors pour tout entier naturel n non nul,*

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{\mathrm{L}(b-a)^2}{2n}$$

L'approximation de l'intégrale de f par cette somme s'appelle la méthode des rectangles. On va voir qu'on peut faire bien mieux sans beaucoup de calculs supplémentaires : la méthode des trapèzes. Pour cela on considère f de classe C^2 sur $[a,b]$, n un entier naturel non nul, σ la subdivsion régulière $(x_k)_{0\leq k\leq n} = (a + k(b-a)/n)_{0\leq k\leq n}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$, on approche la fonction f non pas par une constante, mais par une fonction affine qui coïncide avec f en x_k et en x_{k+1}, i.e $g_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x_k) + (x - x_k)\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$. On détermine son intégrale via un calcul d'aire de trapèze

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)dx = \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{2n}(f(x_{k+1}) + f(x_k))$$

On propose alors comme approximation

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)dx = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) + f(x_k)) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Théorème 19 *Soit f de classe C^2 sur $[a,b]$, n un entier non nul. On note $\mathrm{M}_2 = \sup|f''|$. Alors*

$$\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\mathrm{M}_2$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas $n = 1$, la suite en découlera par découpage. Comme f est de classe C^2, on peut mener une intégration par parties pour déterminer

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f(x)\right]_a^b - \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)dx \\ &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)dx\end{aligned}$$

Poursuivons l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)dx &= \left[f'(x)\frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)f''(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)f''(x)dx\end{aligned}$$

On remarque qu'alors pour tout x dans $[a, b]$,

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 = (b-x)(x-a)$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = -\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx$$

Par croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire, on en déduit

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| \leq \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)|f''(x)|dx \leq \frac{M_2}{2}\frac{(b-a)^3}{6}$$

D'où le résultat pour $n = 1$.
D'après la relation de Chasles, on en déduit que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)\right| \leq n\frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{M_2}{12} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

Exercice 5 *Implémenter en Python la méthode des rectangles et des trapèzes pour évaluer l'intégrale suivante*

$$\int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)dx = \frac{3(e^{-2\pi}-1) - 10\pi e^{-2\pi}}{25}$$

Vérifier les erreurs commises en fonction du nombre de points considérés.