MPSI Ipésup - Khôlle 2

Aimeric Tuffal

10 octobre 2022

1 Groupe 1

Bouron 13
Question de cours :
Si $f : E \to F$ est strictement monotone avec $(E, <)$ totalement ordonné alors f est INJ.
Tu ne te rappelles pas de la stratégie pour le démontrer, je te l'indique et tu finis bien. A REVOIR

Exercice :
Ex 1 :
Soit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Déterminer $f^{\circ n}(x)$ (composée n-ième de f) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}$.

Ex 2 :
Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application $\mathbb{1}_A$ de E dans $\{0, 1\}$ telle que :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. 1 - $\mathbb{1}_A$;
2. $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$;
3. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ (le démontrer en utilisant uniquement les Q1 et Q2).

Ex 1 : Exercice simple mais tu ne fais pas d'erreur et fais les calculs pour les premières valeurs de n puis conjecture et démontre avec succès le résultat.
Ex 2 : Bien pour les deux premières, dommage pour la dernière.

Bilan :
La question de cours est à revoir. Les exercices sont relativement faciles mais tu ne fais pas d'erreur, essaye d'aller plus vite.

Bottazzi 12
Question de cours :
$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
Attention à la rédaction tu as tendance à ne pas voir ce qu'il y a à démontrer chose qui te poseras des problèmes plus tard dans la colle.

Ex :
Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout A de $P(E)$, on a $f(A^c) = f(A)^c$ où B^c désigne le complémentaire de B dans son ensemble naturel de définition.

Pour le sens direct c'est pas trop mal mais dès que tu es bloqué tu as tendance à affirmer sans te référer clairement au cours (ça sent parfois la tentative d'arnaque). Pour le sens retour c'est plus subtil il faut prendre $A = \{x\}$ pour l'injectivité et $A = E$ pour la surjectivité.

Bilan :
Soit plus rigoureux à de nombreuses reprises tu écris des trucs "de cours" qui n'en sont pas ; ça renvoie une mauvaise impression.

Neville 10
Question de cours :
Les classes d'équivalences forment une partion de l'ensemble.
La démonstration de cours est à revoir !

Ex :
Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.
2. Est-ce toujours le cas pour une injection ? Pour une surjection ?

Tu ne réalises qu'après 15 mins que c'est bien de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ donc c'est pas si absurde comme énoncé ! Problème pour quantifier la limite, préjugés sur la fonction (croissante à partir d'un certains rang, non borné implique tend vers l'infini, ...) ; toutes ces erreurs sont à méditer et l'exercice est à refaire. On n'a pas le temps de faire la dernière question.

Bilan :
Le cours est à revoir en priorité, attention avec les affirmations hautement fausse du genre "non borné implique tend vers l'infini" ; ça témoigne d'un gros manque de recul.

2 Groupe 2

BRIARD 12
Question de cours :
Si $f : E \to F$ est strictement monotone avec $(E, <)$ totalement ordonné alors f est INJ.
Petite erreur de présentation mais c'est bien.

Ex :
Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.
2. Est-ce toujours le cas pour une injection ? Pour une surjection ?

Ta colle à partir de là est une suite d'erreur de logique similaire à celles de Mr NEVILLE chose assez agaçante pour un élève ayant déjà vu le programme.

Bilan :
Le "c'est ce que j'allais faire" est trop facile et exaspère l'examinateur surtout quand je t'ai laissé 10 min pour faire la chose en question et que tu ne l'as pas faite. Exercice à revoir, bien pour le cours.

LAUZE 13
Question de cours :
f BIJ $\Leftrightarrow \exists g$ tq $g \circ f = id_F$ et $f \circ g = id_F$.
Très bien.

Ex :
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} | \sigma(n) < n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} | \sigma(n) \geq n\}$. Est-il possible que :

1. A et B soient tous 2 finis ?
2. A et B soient tous 2 infinis ?
3. A soit fini et B infini ?
4. A soit infini et B fini ?

Tu perds un temps fou pour remarquer (je t'aide) et démontrer que $A \cup B = \mathbb{N}$. Donc le cas 1 n'est pas possible ! Pour le cas 2 je te laisse chercher sans résultat c'est dommage.

Très bien pour le cours dommage pour l'exercice, essaye de prendre un peu de recul en début d'exercice pour comprendre les objets introduits.

LECORNU 16
Question de cours :
Les classes d'équivalences forment une partions de l'ensemble.
Très bien.

Ex :
Soit p un nombre premier et $f : X \to X$ avec X fini tel que : $f^{\circ(p)} = id$.
En considérant la relation d'équivalence sur X : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = f^{\circ(k)}(y)$.
Démontrer que $|X| \equiv |Fix(f)|\ [p]$,   où $Fix(f)$ est l'ensemble des points fixes de f.

Exercice difficile sans l'indication mais avec il devient faisable surtout que je te donne la démo de cours qui correspond à l'exercice. Bien pour mq la rel est une rel d'équivalence, dommage de ne pas penser à la partitions en classe à la suite de ta démo et de l'indication mais quand je te le dis c'est pas mal, il te manque à montrer que $|Cl(x)| \mid p$ pour conclure, ce qui n'est pas trivial.

Bilan :
Le cours est su et c'est un plaisir ! Dommage pour l'exercice qui reste un exercice difficile.