

Calcul local et asymptotique

Groupe 3

Samuel Placek

Exercice. Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de

$$(\cos(x))^2$$

Exercice. Montrer que $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution x_n dans \mathbb{R} et donner un développement asymptotique à trois termes de x_n .

Cours ok. Efficace sur les calculs du DL, un peu moins sur le deuxième exercice plus exotique.
Note : 15

Valentin Phamgia

Exercice. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \sin(x) + b \tan(x) \underset{0}{=} x + O(x^5)$$

Exercice. Un idéal I d'un anneau $(A, +, \times)$ est un sous-groupe pour l'addition qui est stable par multiplication : $\forall a \in A, aI \subset I$. Un idéal est principal s'il est engendré par un unique élément

$$I = \langle a \rangle = \left\{ \sum_i a \times b_i \mid (b_i) \in A \right\}$$

Un anneau est principal si tous ses idéaux sont principaux.
Montrer que $\mathcal{K}[X]$ est principal.

et un exercice d'application

Exercice. Soit P un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ qui s'annule en $1 + \sqrt{2}$. Déterminer $P(1 - \sqrt{2})$.

Cours ok. Ok sur les DLs, si ce n'est quelques confusions sur les systèmes linéaires. Tu avais fait quasiment tous mes exos de polynômes donc on a dû partir sur du hors programme.
Note : 18

Yahia Ben Letaief

Exercice. Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$$

Exercice. Soit $a, b > 0$. Déterminer un équivalent de $\ln(\ln(ax+b)) - \ln(\ln(x))$ en $+\infty$.

Cours ok. Pas mal d'erreur de calcul sur les DLs, et une erreur de formule pour le développement de $1/(1-x)$. Mon seul conseil pour éviter les erreurs de calcul est de faire plus d'étapes. On a eu peu de temps pour le deuxième exercice mais il faut penser à factoriser pour faire apparaître un développement en 0 que l'on connaît, plutôt qu'en $+\infty$: $\ln(ax+b) = \ln(ax) + \ln(1 + \frac{b}{ax})$.
Note : 12

Groupe 1

Ulysse Bottazzi

Exercice. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(\lambda x) \underset{+\infty}{=} o(\sin(x))$

Exercice. Montrer que $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution x_n dans \mathbb{R} et donner un développement asymptotique à trois termes de x_n .

Cours ok. Efficace et assez autonome sur tes deux exercices, c'est bien.
Note : 17

Eduard van den Hoek

Exercice. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(x) - \frac{1-ax^2}{1-bx^2} = o(x^n)$ avec n maximal.

Exercice. Soit P un polynôme tel que les restes de la division euclidienne de P par $(X-1)$, $(X-2)$ et $(X-3)$ soient 2, 2 et 2 respectivement. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$. Et si les restes sont 3, 7 et 13 ?

Cours ok. Pas de problème sur le DL. Tu as bien court-circuité le deuxième exercice quand les restes sont égaux. Par contre quelques oublis sur les contraintes sur le reste dans la division euclidienne polynomiale.
Note : 15

Raphaël Neville

Exercice. Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$$

Exercice. Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$. Montrer que f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Déterminer un développement limité à l'ordre 6 en 0 de f^{-1} .

Cours ok. Quelques erreurs de calculs sur le premier DL (et surtout il ne faut pas oublier à changer les $o(x^d)$ quand tu divises par x). On manque de temps pour le deuxième exercice mais tu étais lancé. C'est important de connaître la technique générale pour obtenir le DL d'une réciproque, et ici de penser à se simplifier la vie par des arguments de parité.
Note : 14