Dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

Cornou Jean-Louis

6 décembre 2022

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point. Cela revient à dire que son intérieur est non vide, donc qu'il existe $(b, c) \in \mathrm{I}^2$ tels que $b < c$ et $]b, c[\subset \mathrm{I}$. a désigne un réel appartenant à I. f désigne une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On distinguera les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ quand ce sera nécessaire.

1 Fonctions dérivables, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité locale

Définition 1 *On appelle taux d'accroissement de f en a l'application $\tau_a : \mathrm{I}\backslash\{a\} \to \mathbb{K}, x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.*

Définition 2 *On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction τ_a admet une limite finie en a, il est équivalent de dire que τ_a possède des limites finies et égales à gauche et à droite en a, puisque τ_a n'est pas définie en a.*

Notation
On note $f'(a) = \lim_{x \to a, x \neq a} \tau_a(x)$. C'est le nombre dérivé de f en a.

Propriété 1 *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a*

⚠ **Attention**
La réciproque est bien entendu fausse, comme le montre la valeur absolue en 0.

Théorème 1 (Développement limité d'ordre 1 en a) *La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction ε définie dans un voisinage V de 0 et de limite nulle en 0 telle que*

$$\forall h \in \mathrm{V}, f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

☞ **Remarque**
Cette formulation permet d'éviter de se tracasser avec des dénominateurs nuls.

Propriété 2 *Soit f et g dérivables en a, α et β des scalaires. Alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont dérivables en a et*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a) \quad \text{et} \quad (fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

Propriété 3 *Soit $g : \mathrm{J} \to \mathbb{K}$ dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Propriété 4 *Si f ne s'annule pas en a et f dérivable en a, alors $1/f$ est définie au voisinage de a et dérivable en a.*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$$

Propriété 5 *$f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est dérivable en a si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables en a auquel cas*

$$f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$$

1.2 Dérivabilité globale

Définition 3 *On dit que f est dérivable sur I lorsque pour tout élément a de I, f est dérivable en a. L'application $\mathrm{I} \to \mathbb{K}, a \mapsto f'(a)$ est appelée fonction dérivée de f, notée f'.*

Notation
On note $\mathrm{D}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions dérivables sur* I

Propriété 6 *L'espace* $\mathrm{D}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *est stable par combinaison linéaire et par produit.*

Exemple 1 *Soit $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de fonctions dérivables. Alors*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \left(\prod_{k=1, k \neq i}^{n} f_k\right)$$

Théorème 2 *Si $f : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$ est dérivable et $f'(a) \neq 0$, alors ....*

Catalogue de fonctions dérivées, de dérivées de fonctions composées

2 Variations des fonctions dérivables

Ici, f est à valeurs réelles.

2.1 Extrema, théorème de Rolle

Définition 4 *On dit que f admet un extremum local en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que a est un extremum de $f_{|\mathrm{V} \cap \mathrm{I}}$*

Exemple 2 *Sinus, $x \mapsto x \sin(x)$*

Propriété 7 *On suppose que a appartient à l'intérieur de I, et que f est dérivable en a. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$*

Démonstration. Etablir le signe du taux d'accroissement à gauche et à droite en a, puis passer à la limite.

Exemple 3 *C'est bien entendu faux si a est une extrémité réelle de I.*

Théorème 3 (Rolle) *Soit a, b deux réels tels que $a < b$, f continue sur $[a, b]$ et f dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors*

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

Démonstration. D'après le théorème des bornes atteintes, comme f est continue sur un segment, f atteint son maximum et son minimum dans le segment $[a, b]$. Si les deux extrema sont atteints aux bornes, alors f est constante, donc de dérivée nulle sur $[a, b]$. Sinon, l'un de ces extremums est atteint dans $]a, b[$. D'après ce qui précède, la dérivée de f s'annule en ce point.

Exemple 4 *Pas de généralisation au cas complexe. La fonction $t \mapsto e^{it}$ est périodique, mais se dérivée ne s'annule jamais.*

2.2 Accroissements finis

Théorème 4 (Égalité des accroissements finis) *Soit a, b deux réels tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Démonstration. Appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Théorème 5 (Égalité des accroissements finis généralisée) *f et g tout ça.*

Théorème 6 (Inégalité des accroissements finis) *Soit a, b deux réels dans I tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose de plus que*

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}^+, \forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq \mathrm{M}$$

Alors

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq \mathrm{M}|x - y|$$

☞ **Remarque**

Ce théorème est l'un des rares à posséder une généralisation dans le cas complexe

Propriété 8 *Avec les mêmes hypothèses que précédemment, f est M-Lipschitzienne.*

2.3 Variations

Propriété 9 *On suppose f dérivable sur I. Alors*

- *f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.*
- *f est strictement croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et $\{x \in \mathrm{I} | f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.*
- *f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.*
- *f est strictement décroissante si et seulement si $f' \leq 0$ et $\{x \in \mathrm{I} | f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.*

Propriété 10 *Il suffit que $f' > 0$ pour que f soit strictement croissante. Il suffit que $f' < 0$ pour que f soit strictement décroissante.*

Exemple 5 *Dérivabilité du sinus cardinal en 0. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $x \mapsto 1$ si $x = 0$. Alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.*

Théorème 7 (Limite de la dérivée) *On considère le cas où $a \in \mathrm{I}$, f continue sur I, f' dérivable sur $\mathrm{I} \backslash \{a\}$. On suppose que $f'_{|\mathrm{I} \backslash \{a\}}$ admet une limite finie l en a. Alors f est dérivable en a, $f'(a) = l$ et f' est continue en a.*

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Opérations sur les fonctions de classe C^k. Formule de Leibniz, quotient, composition, réciproque.