Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 27 : Espaces préhilbertiens réels. Les exercices portent sur le chapitre 27 : Espaces préhilbertiens réels.

Espace préhilbertien réel.

Produit scalaire. Produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Produit scalaire $(f|g) = \int_a^b fg$ sur $C([a,b],\mathbb{R})$. (★) Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité. Exemples de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme préhilbertienne, distance associée. Egalités remarquables, identités de polarisation $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$. Notion d'angle non orienté.

Orthogonalité

Eléments orthogonaux, parties orthogonales. Orthogonal $A^\perp$ d'une partie A. Exemples d'orthogonaux, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$. (★) $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$. Deux sev orthogonaux sont en somme directe. (★) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. Famille orthogonale, orthonormale. Théorème de Pythagore. Toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre, toute famille orthonormale est libre. (★) Processus d'orthonormalisation d'une famille libre de Gram Schmidt. Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Complétion de familles orthonormales en base orthonormale dans un espace euclidien. Egalités $x = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$, $(x|y) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)(y|e_i)$ dans une base orthornormée. Représentation de Riesz dans un espace euclidien. Calculs matriciels dans un espace euclidien.

Projections orthogonales

(★) Pour F de dimension finie, $F^\perp$ est un supplémentaire de F. C'est le supplémentaire orthogonal de F. Dimension dans le cas euclidien, double orthogonal. Projection orthogonale sur F, expression dans une base orthonormée de F. (★) Inégalité de Bessel, cas d'égalité. Distance à un sev de dimension finie. (★) Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur z de E tel que $\|x-z\| = d(x,F)$. Cas d'une droite, d'un hyperplan en dimension finie. Symétrie orthogonale.

★ ★ ★ ★ ★