

# Analyse numérique

Cornou Jean-Louis

10 janvier 2023

Ce chapitre est l'occasion de mettre en pratique les différentes notions d'analyse étudiées durant les deux derniers mois : topologie réelle, suites numériques, fonctions de la variable réelle. L'implémentation d'algorithmes apporte un autre éclairage sur les preuves des théorèmes ou les objets manipulés en analyse réelle. L'objectif n'est pas temps d'apprendre tout ce qui suit, mais de comprendre en quoi une preuve peut se traduire en méthode de résolution, théorique ou pratique. Il ne faut toutefois pas négliger l'aspect mathématique de tout ce qui suit. Résoudre un exercice en classes prépas ne passe pas par le hasard, mais des méthodes éprouvées. Leur mise en place découle de résultats précis et non d'une heuristique hasardeuse.

Tout d'abord, un petit complément : la formule de Taylor-Lagrange. Celle-ci sera revue au second semestre.

**Théorème 1 (Formule de Taylor-Lagrange)** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b$  deux réels de  $I$  tels que  $a < b$  et  $n$  un entier naturel. On suppose que  $f$  est de classe  $C^n$  sur le segment  $[a, b]$  et  $n+1$ -fois dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ . Alors il existe un réel  $c$  dans l'intervalle ouvert  $]a, b[$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Démonstration.* Le cas  $n = 0$  n'est rien d'autre que l'égalité des accroissements finis. On pourrait être tenté de prouver ce théorème via une récurrence, mais il existe une méthode directe via le théorème de Rolle. Je pose

$$\alpha = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[ f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

Notre objectif est de démontrer qu'il existe un réel  $c$  dans  $]a, b[$  tel que  $A = f^{(n+1)}(c)$ . J'introduis alors la fonction

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha$$

Comme la fonction  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$ , tout comme les fonctions polynomiales, la fonction  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ . De plus, comme  $f$  est  $n+1$ -fois dérivable sur  $]a, b[$ , la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]a, b[$ . De plus,  $\varphi(b) = 0$  et

$$\varphi(a) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha = 0$$

d'après la définition de  $\alpha$ . La fonction  $\varphi$  vérifie alors les hypothèses du théorème de Rolle, donc il existe un réel  $c$  dans  $]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ . Mais alors,

$$\varphi'(c) = \sum_{k=1}^n \frac{(b-c)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(c) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) + \frac{(b-c)^n}{n!} \alpha$$

Il reste après télescopage

$$\varphi'(c) = \frac{(b-c)^n}{n!} (-f^{(n+1)}(c) + \alpha)$$

Comme  $c \neq b$ , on en déduit que  $\alpha = f^{(n+1)}(c)$ .

# 1 Vitesse de convergence

Dans toute cette section,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne une suite réelle convergente de limite  $l$ . Notre objectif est d'obtenir une valeur approchée de  $l$  à l'aide de la suite  $u$ . On suppose de plus que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq l$  (sinon l'objectif est trivialement atteint).

## 1.1 Vitesse de convergence

**Définition 1** On suppose que la suite  $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $\lambda$ . On dit alors que la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $l$  est :

- lente lorsque  $\lambda = 1$ ,
- géométrique de rapport  $\lambda$ , lorsque  $\lambda \in ]0, 1[$ .
- rapide, lorsque  $\lambda = 0$ .

**Définition 2** On dit que le réel  $\lambda$ , quand il existe, est le coefficient de convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 1** On suppose que la suite  $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Montrer que sa limite appartient à l'intervalle  $[0, 1]$ .

### Remarque

Dans la pratique, on ne connaît pas toujours la limite  $l$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mais on peut parfois calculer le coefficient de convergence  $\lambda$ .

**Exercice 2** On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède un coefficient de convergence  $\lambda$  dans  $] -1, 1[ \setminus \{0\}$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \neq u_{n-1}$ . Montrer qu'alors la suite  $\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right)$  converge vers  $\lambda$ .

Montrer que le résultat précédent est faux avec des valeurs absolues en considérant la suite  $u$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = (-1)^n \lambda^{2n}, u_{2n+1} = (-1)^n \lambda^{2n+1}$ .

**Exercice 3** Étudier la vitesse de convergence des suites suivantes :

1.  $b \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1/n^b$ .
2.  $\forall n \geq 2, b_n = 1/\ln(n)$ .
3.  $0 < |a| < 1, \forall n \in \mathbb{N}, c_n = a^n$ .
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = 1/n!$ .
5.  $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = n!/n^n$ .

**Exercice 4** Soit  $v$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{2n} = 1/n, v_{2n+1} = 2/(n+1)$ . Montrer que  $v$  converge mais n'a pas de vitesse de convergence.

**Exercice 5** On définit la suite  $u$  via

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. Expliciter la formule de Taylor-Lagrange du logarithme entre 1 et  $1 + 1/n$  à l'ordre 1. En déduire que  $n(u_n - e) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ .
2. Montrer que la convergence de  $u$  est lente, et que la convergence de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.

**Exercice 6** 1. Expliciter la formule de Taylor-Lagrange de l'exponentielle entre 0 et 1 à l'ordre  $n$ .

2. Montrer que la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

est rapide.

**Exercice 7** Soit  $I = [a, b]$  un segment réel non réduit à un point,  $f : I \rightarrow I$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $\forall x \in I, 0 < |f'(x)| < 1$ .

1. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $l \in I$ .
2. Soit  $u_0 \in I \setminus \{l\}$ . On définit la suite  $u$  via  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ . Montrer que cette suite converge vers  $l$  et que la convergence est géométrique de rapport  $|f'(l)|$ .

## 1.2 Ordre de convergence

**Définition 3** Soit  $r > 1$ . On dit que la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est d'ordre  $r$  lorsqu'il existe un réel  $\lambda$  non nul tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|^r} = \lambda$$

### Convention

Une convergence lente ou géométrique est dite d'ordre 1. Lorsque  $r \geq 2$ , on dit que la convergence est super-linéaire. Lorsque  $r = 2$ , on dit que la convergence est quadratique.

**Exercice 8** Montrer que sous réserve d'existence, l'ordre de convergence est unique.

**Exercice 9** Soit  $I = [a, b]$  un segment non réduit à un point,  $r \geq 2$  et  $f : I \rightarrow I$  de classe  $C^r$  telle que  $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$ .

1. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $l$  appartenant à  $I$ .

2. On suppose que

$$\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, f^{(k)}(l) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I, f^{(r)}(x) \neq 0.$$

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 \in I \setminus \{l\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ . Montrer que cette suite converge vers  $l$  et que la convergence est d'ordre  $r$ .

Dans cette situation, on dit que  $l$  est un point fixe super-attractif de  $f$ .

**Exercice 10** Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$ ,  $g \in C^3([a, b], \mathbb{R})$  telle que  $g(a)g(b) < 0$ ,  $\forall x \in I, g'(x) \neq 0$  et  $g''(x) \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe un unique réel  $x$  dans  $]a, b[$  tel que  $g(x) = 0$ .

2. On note  $f$  la fonction définie par  $\forall x \in [a, b], f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ . Montrer que  $f'(l) = 0$  et  $f''(l) \neq 0$ .

3. On note  $J = [l - \eta, l + \eta]$  un voisinage de  $l$  tel que  $\forall x \in J, f''(x) \neq 0$ ; Montrer que la suite définie par  $u_0 \in J \setminus \{l\}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers  $l$  et que la convergence est d'ordre 2.

## 1.3 Qui va plus vite ?

**Définition 4** Soit  $v$  une suite convergente vers  $l$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq l$ . On dit que  $v$  converge plus vite vers  $l$  que  $u$  lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - l}{u_n - l} = 0$$

**Exercice 11** On considère les suites  $u$  et  $v$  de l'exercice 5. Montrer que  $v$  converge plus vite que  $u$  vers  $e$ .

**Exercice 12** On définit les suites  $u$  et  $v$  via

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

Montrer que  $v$  converge vers  $e$ , plus vite que  $u$ . Quel sont les différents coûts de calcul pour obtenir une valeur de  $e$  approchée à  $10^{-16}$  près ?

## 2 Résolution d'équations numériques

$I$  désigne un intervalle réel d'intérieur non vide et  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On s'intéresse ici à l'approximation des solutions, quand elles existent, d'une équation numérique  $f(x) = 0$ . Trois problèmes essentiels vont se poser :

- Le problème qualitatif de l'existence et de l'unicité d'une solution  $x$  dans  $I$  de l'équation  $f(x) = 0$ .
- Le problème de l'approximation numérique d'une telle solution. On cherche à construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $I$  qui converge vers la solution en question.
- Pour juger de la performance d'une méthode, il est important d'avoir une majoration aussi fine que possible de l'erreur d'approximation.

## 2.1 La méthode de dichotomie

Rappelons le résultat essentiel : le théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème 2** Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ . On suppose que  $f(a)f(b) < 0$ . Alors il existe un réel  $\alpha$  dans  $]a, b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

### Corollaire

Soit  $a, b$  les extrémités (non nécessairement réelles) de  $I$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $I$  et admet des limites  $l_1$  et  $l_2$  en  $a$  et  $b$ . Si  $l_1 l_2 < 0$ , alors il existe un réel  $\alpha$  dans  $\overset{\circ}{I}$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

**Exercice 13** 1. En appliquant la méthode de dichotomie de la preuve du TVI, écrire en Python une fonction qui prend en entrée, une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , deux réels  $a < b$ , une précision  $\varepsilon > 0$ , un nombre maximal d'itérations  $N$  et renvoie un réel  $c$  dans  $]a, b[$  proche à  $\varepsilon$  près d'une solution de  $f(x) = 0$ .

2. Quelle est la vitesse de convergence de la suite construite ?

**Exercice 14** 1. Montrer qu'il existe un unique réel  $x$  tel que  $e^x + x = 2$ . Chercher une approximation à  $10^{-8}$  près de cette solution à l'aide de l'algorithme précédent. Combien d'itérations vous a-t-il fallu pour obtenir une telle valeur ?

2. Montrer qu'il existe un réel unique  $\alpha$  dans  $[0, 1]$  tel que  $2 \cos(1 + \alpha^2) - \alpha = 1$ . En donner une approximation à  $10^{-8}$  près ? Combien cela vous a-t-il coûté ?

**Exercice 15** 1. Implémenter la méthode de dichotomie pour trouver la racine du polynôme  $L : x \mapsto x(63x^4 - 70x^2 + 15)/8$  sur l'intervalle  $[0.6, 1]$  avec une précision de  $10^{-10}$ .

2. Représenter graphiquement l'évolution de la suite  $(|L(x_k)|)_{k \in \mathbb{N}}$  et estimer un ordre de convergence de la méthode de dichotomie.

## 2.2 Approximations successives, points fixes

Parfois, il est pertinent pour résoudre l'équation  $f(x) = 0$  d'inconnue réelle  $x$  d'introduire la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  et chercher les points fixes de cette fonction. On rappelle le résultat suivant :

**Propriété 1** Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $g(I) \subset I$ . On définit la suite  $u$  via  $u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$ . Si la suite  $u$  est convergente, alors sa limite est un point fixe de  $g$ .

*Démonstration.* Notons  $l$  la limite de  $u$ . La suite  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $u$ , donc également convergente vers  $l$ . D'autre part, par caractérisation séquentielle de la limite, comme  $g$  est continue en  $l$ , la suite  $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $g(l)$ . On en déduit par unicité de la limite que  $g(l) = l$ .

Tout le problème est d'établir si oui ou non une telle suite est convergente. Nous ne disposons pas de tous les outils pour le démontrer dans le cas le plus général. Toutefois, si  $I$  est borné et qu'on parvient à démontrer la monotonie d'une telle suite, c'est gagné (cf chapitre sur les suites numériques).

**Exercice 16** Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x^2$ .

1. Montrer que  $I$  est stable par  $f$  et que  $g$  a un unique point fixe  $\alpha$  dans  $I$ .

2. Vérifier que  $g \circ g$  a trois points fixes  $\gamma < \alpha < \delta$  dans  $I$ .

3. Soit  $x_0 \neq \alpha$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ .

(a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq \alpha$  et que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

(b) On suppose que  $x_0 < \alpha$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = \gamma$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = \delta$ .

**Définition 5** On dit qu'une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement contractante lorsqu'il existe un réel  $\lambda$  dans  $[0, 1[$  tel que  $g$  est  $\lambda$ -Lipschitzienne, soit encore

$$\forall (x, y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

On dit alors que  $g$  est  $\lambda$ -contractante.

**Théorème 3** Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\lambda$ -contractante. Alors  $g$  admet un unique point fixe  $\alpha$  dans  $I$ . De plus, pour tout réel  $d$  dans  $I$ , la suite  $x_0 = d, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$ , converge vers  $\alpha$  et on a la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|$$

*Démonstration.* Admis, nous l'établirons en fin d'année, dans le chapitre sur les séries.

On peut se contenter à ce stade de l'année d'un résultat plus faible à l'aide de la dérivabilité.

**Définition 6** Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $g(I) \subset I$ . On appelle orbite suivant  $g$  toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de  $x_0$  dans  $I$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1} = g(x_n)$ .

**Propriété 2** Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose que  $g'$  est bornée sur  $I$  et que  $\sup_{x \in I} |g'(x)| = \lambda < 1$ . Alors  $g$  admet un unique point fixe  $\alpha$  et toute orbite suivant  $g$  converge vers  $\alpha$ .

*Démonstration.* Il suffit d'adapter la résolution de l'exercice 7. L'existence d'un point fixe est donnée par le théorème précédent. Le reste est strictement similaire.

**Exercice 17** 1. Soit  $a$  un réel. Étudier la nature et le comportement de la suite définie par  $x_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \cos(x_n)$

2. Donner une estimation à  $10^{-8}$  près de sa limite à l'aide d'un algorithme en Python.

**Exercice 18** Soit  $f \in C^1(I)$  telle que l'équation  $f(x) = 0$  d'inconnue  $x \in I$  admet une unique racine  $\alpha$  dans  $I$ . On suppose que  $f'(\alpha) > 0$ .

1. Montrer qu'il existe un réel  $\eta > 0$  tel que l'intervalle  $J = [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$  est contenu dans  $I$  et  $\forall x \in J, f'(x) > 0$ .
2. On note  $m_1 = \inf_{x \in J} f'(x)$  et  $M_1 = \sup_{x \in J} f'(x)$ . Pour tout  $\lambda$ , on pose  $f_\lambda : x \mapsto x - \lambda f(x)$ . Montrer qu'il existe un unique réel  $\mu > 0$  tel que

$$\forall x \in J, |f'_\mu(x)| \leq \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$$

3. Montrer que pour tout réel  $x_0$  dans  $J$ , on peut définir la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $J$  par  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_\mu(x_n)$ . Démontrer que cette suite converge vers  $\alpha$  et donner une majoration de l'erreur d'approximation.
4. On désigne par  $f : ]3\pi/2, 5\pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) - x$ .
  - (a) Montrer que  $f$  possède un unique zéro  $\alpha$  dans l'intervalle  $J = [a, b] = [7.65, 7.75]$ .
  - (b) Déterminer le coefficient  $\mu$  de la question 2.
  - (c) Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-6}$  près.

**Théorème 4** Soit  $f \in C^1(I)$  admettant un unique point fixe  $\alpha$  dans  $I$ .

- Si  $|f'(\alpha)| < 1$ , il existe un réel  $\eta > 0$  tel que  $J = [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$  est stable par  $f$  et pour tout  $x_0 \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ , l'orbite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .
- Si  $|f'(\alpha)| > 1$  et  $f(I) \subset I$ , alors pour tout  $x_0$  dans  $I$ , l'orbite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est soit stationnaire sur  $\alpha$ , soit divergente.

*Démonstration.* 1. Dans le premier cas, comme  $f'$  est continue, il existe un voisinage  $J$  de la forme  $[\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ , tel que  $\forall x \in J, |f'(x)| < 1$ . L'inégalité des accroissements finis assure que cet intervalle est stable par  $f$ . On reproduit alors l'exercice 7 et son adaptation en propriété 2 sur l'intervalle  $J$ .

2. Dans le second cas, on dispose encore d'un voisinage  $J$  de  $\alpha$  tel que  $\forall x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta], |f'(x)| > 1$ . Mais, si  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq \alpha, |x_{n+1} - \alpha| \geq \inf_J |f'| |x_n - \alpha|$ . Par comparaison avec une suite géométrique de raison strictement plus grande que 1, on en déduit que cette orbite est divergente.

**Exercice 19** On note  $f : x \mapsto (x - 1)e^x$  qui possède pour unique zéro 1, puis  $g_0 : x \mapsto \ln(xe^x)$ ,  $g_1 : x \mapsto (e^x + x)/(e^x + 1)$ , et  $g_2 : x \mapsto (x^2 - x + 1)/x$ .

1. Étudier numériquement le comportement des orbites  $x_0^i = 2, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^i = g_i(x_n^i)$ .
2. Estimer l'ordre de convergence dans chaque cas et comparer à  $g_i'(1)$ .

## 2.3 La méthode de Newton-Raphson

L'idée de la méthode de Newton-Raphson pour résoudre l'équation  $f(x) = 0$  est de remplacer au voisinage de la solution  $\alpha$  de cette équation (en supposant que cette solution existe est unique) le graphe de  $f$  par celui de la tangente à ce graphe en un point. Soit  $x$  un point de  $I$ , alors l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en  $(x, f(x))$  est

$$Y = f(x) + f'(x)(X - x)$$

Si  $f'(x) \neq 0$ , le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses a pour abscisse  $x - f(x)/f'(x)$ . La résolution de l'équation  $f(x) = 0$  est ainsi ramené à la résolution du problème de point fixe  $x - f(x)/f'(x) = x$ , ce qui revient à considérer la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$x_0 \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cette méthode s'applique si  $\alpha$  est racine simple de  $f$ , c'est-à-dire  $f(\alpha) = 0$  et  $f'(\alpha) \neq 0$ . Dans ce cas, on a  $f'(x) \neq 0$  pour  $x$  voisin de la racine  $\alpha$ .

**Théorème 5** Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ . On suppose que

$$f(a)f(b) < 0, \quad \forall x \in [a, b], f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$$

Alors pour tout  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ , on peut définir la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $[a, b]$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cette suite est monotone et converge vers l'unique zéro  $\alpha$  de  $f$  dans  $]a, b[$ . Si l'on note  $m_1 = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ ,  $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ , alors on dispose de la majoration suivante de l'erreur d'approximation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq |x_0 - \alpha|^{2^n} \left( \frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1}$$

*Démonstration.* Comme  $f''$  est continue, on peut supposer via le TVI que  $\forall x \in [a, b], f''(x) > 0$ . L'hypothèse  $f(x_0)f''(x_0) > 0$  se traduit alors par  $f(x_0) > 0$ . De plus, comme  $f$  est continue, le TVI assure qu'il existe un réel  $\alpha$  dans  $]a, b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . De plus, comme  $f'$  est continue, elle est de signe constant par le TVI (encore lui!). Par conséquent,  $f$  est strictement monotone sur  $[a, b]$ , donc injective. Ainsi, il existe un unique réel  $\alpha$  dans  $]a, b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie puisque  $f'$  ne s'annule pas. Notons  $g : x \mapsto x - f(x)/f'(x)$ . La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à  $f$  entre  $x$  et  $\alpha$  implique

$$\forall x \in [a, b], \exists c_x \in ]x, \alpha[, 0 = f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(x - \alpha)^2}{2} f''(c_x)$$

Mais alors

$$\forall x \in [a, b], \exists c_x \in ]x, \alpha[, g(x) - \alpha = -\frac{f(x) + (\alpha - x)f'(x)}{f'(x)} = (x - \alpha)^2 \frac{f''(c_x)}{f'(x)}$$

On distingue alors deux cas :

1. Premier cas :  $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$ . Alors,  $\forall x \in [a, b], g(x) \geq \alpha$ . De plus,  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq f(\alpha) = 0$  et  $g(x) = x - f(x)/f'(x) \leq x$ . On a donc  $g([a, b]) \subset [\alpha, b]$  et la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie si on choisit  $x_0 \in [a, b]$ , ce qui équivaut à dire que  $f(x_0) > 0$ . Dans ces conditions, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n+1} \geq \alpha$$

Cette suite est donc décroissante minorée, donc convergente. Sa limite est point fixe de  $g$ , donc zéro de  $f$ . Ce ne peut être que  $\alpha$ .

2. Deuxième cas :  $\forall x \in [a, b], f'(x) < 0$ . Alors  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq f(\alpha) = 0$  et  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \geq x$ . On a donc  $g([a, b]) \subset [a, \alpha]$  et la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie si on choisit  $x_0 \in [a, b]$ , ce qui équivaut à dire que  $f(x_0) > 0$ , soit  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . Dans ces conditions, on a

$$\forall n \geq 0, x_n \leq x_{n+1} \leq \alpha$$

Ainsi, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante majorée, donc convergente. Sa limite ne peut être que l'unique zéro  $\alpha$  de  $f$ .

Dans tous les cas, la formule de Taylor-Lagrange implique

$$\forall n \geq 0, |x_{n+1} - \alpha| = |x_n - \alpha|^2 \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq |x_n - \alpha|^2 \frac{M_2}{2m_1}$$

L'erreur de majoration s'ensuit par récurrence.

**Exercice 20** Soit  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $a$  un réel strictement positif. Implémenter la méthode de Newton-Raphson pour calculer la racine  $p$ -ième de  $a$ . Donner une majoration de l'erreur d'approximation.

## 3 Discrétisation d'équations différentielles

La résolution exacte d'équations différentielles n'est pas toujours possible. On lui préfère des résolutions approchées. Je vous renvoie à vos manuels de Terminale pour la méthode d'Euler explicite.

**Exercice 21 (Pendule simple)** On étudie le système différentiel

$$x'(t) = y(t), y'(t) = -\sin(x(t))$$

On se donne un réel  $h = 0,1$ .

1. On définit les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1}), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(-\sin(x_n) - \sin(x_{n+1}))$$

Les implémenter en Python, les tracer, ainsi que le portrait de phase.

2. Obtient-on des trajectoires périodiques avec une méthode d'Euler explicite ?

**Exercice 22 (Système proies-prédateurs)** On se donne quatre réels strictement positifs  $a, b, c, d$ . On étudie le système différentiel

$$x'(t) = x(t)(a - by(t)), y'(t) = y(t)(dx(t) - c)$$

1. Soit  $x, y$  une solution strictement positive de ce système. Montrer que la fonction  $t \mapsto by(t) - dx(t) - a \ln(x(t)) - c \ln(y(t))$  est constante.

2. Résoudre numériquement ce système à l'aide d'une méthode d'Euler explicite, puis à l'aide d'une méthode Crank-Nicholson. Quelle méthode permet d'obtenir des solutions périodiques ?

## 4 Optimisation

L'optimisation est la recherche d'extrema locaux de fonctions à valeurs réelles, c'est un champ vaste et très riche. Il désigne un intervalle réel non réduit à un point et  $J$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour simplifier le traitement, on va utiliser les notions de convexité du dernier chapitre d'analyse. On rappelle que si une fonction convexe admet un minimum local, alors il est global. Pour s'assurer de l'existence et l'unicité d'un minimum de  $J$ , on introduit un cadre plus maniable :

**Définition 7** Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. On dit que  $J$  est  $\alpha$ -convexe (ou  $\alpha$ -elliptique) lorsque

$$\forall (u, v) \in I^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v) - \alpha \frac{t(1-t)}{2} |u - v|^2$$

On dit que  $J$  est fortement convexe (ou elliptique) lorsqu'il existe un réel  $\alpha$  strictement positif tel que  $J$  est  $\alpha$ -convexe.

**Exercice 23** 1. Montrer que la fonction  $\mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\ln(x)$  est convexe, mais non elliptique.

2. Montrer que la fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4$  est 4-elliptique.

**Exercice 24** Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que  $J$  est  $\alpha$ -convexe si et seulement si  $x \mapsto J(x) - \frac{\alpha}{2}x^2$  est convexe.

**Théorème 6** Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. On suppose que  $J$  est  $\alpha$ -elliptique. Alors  $J$  admet un minimum qui est atteint en unique point  $x^*$ . De plus

$$\forall x \in I, \quad |x^* - x|^2 \leq \frac{4}{\alpha} [J(x) - J(x^*)]$$

Alors, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $I$  telle que  $J(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J(x^*)$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x^*$ .

*Démonstration.* Admis

**Exercice 25 (Algorithme de descente de gradient à pas fixe)** On suppose que  $J$  est  $\alpha$ -convexe, dérivable, puisque  $J'$  est  $C$ -Lipschitzienne, avec  $\alpha$  et  $C$  deux réels strictement positifs. On se donne un réel  $\mu \in ]0, 2\alpha/C^2[$  et  $u_0 \in I$ .

1. Montrer que la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \mu J'(u_n)$  converge vers l'unique point de minimisation de  $J$ .
2. Implémenter cet algorithme pour minimiser la fonction  $J : x \mapsto 100x^4 + (1-x)^2$ .