• *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

• *Ce devoir est long, il n'est pas fait pour être terminé, mais vous devez donner le meilleur de vous même dans les parties traitées.*

• *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*

• *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*

• *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*

• *Les exercices, le problème sont de difficultés variées. Ils peuvent traités dans n'importe quel ordre à condition de mentionner clairement leurs numéros.*

Exercice 1. Logique

Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f vérifie la propriété (C) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$$

1. Démontrer que l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ vérifie la propriété (C).
2. Donner la négation logique de la propriété (C).
3. On note h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie $\forall x \geq 0, h(x) = 1$, et $\forall x < 0, h(x) = -1$. Montrer que l'application h ne vérifie pas la propriété (C).

Exercice 2. Résolution d'égalités dans l'ensemble des complexes.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $z + |z|^2 = 1 + i$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $\mathrm{Im}(z^3 + z) = 0$.
4. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $\exp(z) = -1 + i$.

Exercice 3. Trigonométrie : résolution d'égalité et d'inégalités comportant des fonctions trigonométriques.

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|\cos(2x) - i\sin(x) + 1| \leq 1$.

Exercice 4. Une suite défine par récurrence. Soit x un réel fixé. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence via :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(2^n x) u_n$$

1. À quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $2^n u_n \sin(x) = \sin(2^n x)$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5. Modules

1. Énoncer et redémontrer l'inégalité triangulaire pour deux complexes z_1 et z_2 (on ne demande pas de redémontrer le cas d'égalité).
2. Démontrer que pour tous complexes non nuls z_1, z_2, en notant θ_1 un argument de z_1 et θ_2 un argument de z_2, on a
$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$$
3. On considère 12 complexes notés $(z_1, \dots, z_{12})$ tous de module 1. Montrer que
$$\exists (i,j) \in [\![1,12]\!], i \neq j, |z_i - z_j| \leq 1$$
où $[\![1,12]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et 12.

Problème de théorie des ensembles. On considère E un ensemble, On rappelle que l'ensemble des parties de E est notée $\mathcal{P}(E)$. Pour toute partie A de E, on appelle indicatrice de A la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ qui tout à élément x de E associe 0 si x n'appartient pas à A et 1 si x appartient à A. On rappelle que pour toutes parties A et B de E, la notation $A\Delta B$ désigne la différence symétrique de A et B. On utilise la notation A^c pour désigner le complémentaire d'une partie A dans E.

1. Manipulations de fonctions indicatrices. On considère ici deux parties A et B de E.
   (a) Démontrer qu'on a l'équivalence $A = \emptyset \iff \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = 0$.
   (b) Donner une expression de l'indicatrice de A^c en fonction de l'indicatrice de A et la démontrer.
   (c) Démontrer qu'on a l'égalité de fonctions $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, i.e
   $$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$$
   (d) La propriété suivante est-elle vraie ?
   $$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$$
   (e) Démontrer l'équivalence suivante :
   $$A \subset B \iff [\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)]$$
2. Différences symétriques. On considère trois parties A, B, C de E.
   (a) Démontrer que $A\Delta A = \emptyset$.
   (b) A quoi est égale la partie $A\Delta(A^c)$?
   (c) Démontrer qu'on a l'égalité de fonctions $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, i.e
   $$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - 2\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$$
   (d) Démontrer que pour toutes parties A, B, C de E, on a l'égalité d'ensembles
   $$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$
   à l'aide des fonctions indicatrices.
   (e) A-t-on l'égalité d'ensembles
   $$(A\Delta B)\Delta C = (A\cup B\cup C)\backslash(A\cap B\cap C)\,?$$
3. On se donne trois parties A, B, C de E. Pour tout élément x de E, on souhaite tester si l'élément x appartient à deux ou plus de ces parties. On définit alors la fonction $M : E \to \{0,1\}, x \mapsto 1$ si x appartient à deux parties ou plus parmi les parties A, B, C, et 0 sinon. Donner une expression de M en fonction des indicatrices de A, B, et C.
   Indication : on pourra commencer par étudier les 8 cas possibles d'appartenance pour x

★ ★ ★ ★ ★