IPESUP 2022/2023

Kholle 9 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel. On se donne $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Majorer $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right)$ et caractériser le cas d'égalité.
2. Soit E un espace vectoriel. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante : f est une homothétie si et seulement si $\forall x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
3. Soit n un entier naturel non nul. Quelles sont les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = 0$?

★★★

Kholle 9 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Que dire de l'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E), P \mapsto P(u)$?
2. On considère $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$$

est libre dans E.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 9 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Définir l'indice de nilpotence d'un endomorphisme u de E de dimension finie. Le majorer et démontrer cette majoration.
2. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $F \cup G = E$. Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence

$$E = \operatorname{Im}(f) \oplus \ker(f) \iff \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$$

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 9 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Énoncer et démontrer l'expression du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Détailler le cas d'une matrice triangulaire.
2. Soit M une matrice carrée de trace nulle. Montrer par récurrence que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M est inversible et M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $|\det(M)| = 1$.

★★★