# IPESUP 2022/2023

Kholle 2 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f$ et telle que pour tout entier $n$, $f_n$ est une fonction en escalier.

2. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t) - \cos(t)}{t^{5/2}}\, dt$$

3. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2(x)}$$

⋆⋆⋆

★★★

1. Énoncer un théorème de dérivation de la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Le démontrer.
2. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

3. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

converge.

(a) Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t} dt$$

converge et calculer sa valeur.

(b) Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt$$

★★★

★★★

1. Démontrer que la limite d'une suite de fonctions continues $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est continue sur $A$.
2. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$$

3. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f(x) = o(1/x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_{1}^{+\infty} |\sin(x)|^x dx$$

   On pourra utiliser le fait que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx \sim \sqrt{\pi/(2n)}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

★★★

$\star\star\star$

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. On appelle logarithme intégral l'application Li : $[2, +\infty[, x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\mathrm{Li}(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Généraliser.
2. Calculer l'intégrale
$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx$$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. On pose pour tout réel $a$,
$$D(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)| dt$$
   (a) Montrer que $\lim\limits_{a \to 0} D(a) = 0$.
   (b) Démontrer que $D(a)$ possède une limite quand $a$ tend vers $+\infty$ et la déterminer.

$\star\star\star$