IPESUP 2022/2023

Kholle 26 filière MPSI/MP2I
Jeudi 01 juin 2023

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que pour toute base $b = (e_1, \dots, e_n)$ de E, le scalaire $\det_b(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base b.
2. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ de degré $n-1$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (P(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Soit $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et f une forme n-linéaire alternée. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \dots\dots$$
Formule à compléter, démonstration attendue par la suite.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto \det(xI_n - M)$ est polynomiale de degré n.
   (b) Déterminer son terme constant, son terme de plus haut degré et son terme de degré $n-1$.
   (c) En déduire qu'il existe un entier naturel N non nul tel que $\forall k \geqslant N, M - \frac{1}{k} I_n \in GL_n(\mathbb{K})$.

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Montrer l'invariance du déterminant par transposition.
2. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$
3. Soit A, B deux matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que pour tout entier k dans $[\![0, 4]\!]$, $A + kB$ est inversible d'inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Démontrer qu'alors $A + 5B$ est inversible d'inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

$\star\star\star$

Bonus

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Démontrer que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$.
2. Soit A, B deux matrices réelles. On suppose qu'elles sont semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

$\star\star\star$