Exercices :

Chaque élève aura un exercice sur les probabilités et un sur les espaces préhilbertiens réels.

Cours

Espaces préhilbertiens réels

Espaces préhilbertiens réels :
- Produit scalaire, norme euclidienne, identités de polarisation, ($\star$) inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, la norme euclidienne est une norme.
- Vecteurs orthogonaux, liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls, théorème de Pythagore, orthogonal d'une partie, propriétés de l'orthogonal d'une partie, sev orthogonaux, orthogonal d'une famille génératrice.
($\star$) Cas de deux sev dont la somme vaut l'espace et qui sont orthogonaux.
- Famille orthonormale, liberté, orthonormalisation de Gram-Schmidt, bases orthonormales, formules matricielles dans un espace euclidien muni d'une base orthonormale.
- ($\star$) Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie, ($\star$) projection orthogonale sur un sev de dimension finie,
($\star$) Caractérisation géométrique du projeté orthogonal avec dessin.
($\star$) Formule du projeté orthogonal avec une base orthonormée d'un sev de dimension finie,
($\star$)Inégalité de Bessel, projecteur orthogonal,
($\star$) Caractérisation d'un projecteur orthogonal en tant que projecteur 1-lipschitzien , caractérisation métrique du projeté orthogonal.
- Exemples ASFA : ($\star$) Distance a un hyperplan dans un espace euclidien.

Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est double :

- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre* 2.

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Adjoint d'un endomorphisme	
($\star$) Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
($\star$) Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
($\star$) Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
($\star$) Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
($\star$) Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$,	($\star$) Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
($\star$) Caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.