Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur la fin du chapitre 22 : Matrices et le chapitre 24 : Groupe symétrique. Les exercices porteront sur la fin du chapitre 22 : Matrices et le chapitre 24 : Groupe symétrique.

Chapitre 22 : Matrices

Matrices équivalentes et rang

Matrice J_r. (★) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r. Alors il existe une base b de E, et une base b' de F telles que $M(u)_{b'}^{b} = J_r$. Matrices équivalentes. (★) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$, alors $\operatorname{rg}(A) = r$ ssi A est équivalente à J_r. Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang. Invariance du rang par transposition. Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses lignes. (★) Le rang d'une matrice est le maximum des tailles de ses matrices carrées inversibles extraites.

Matrices semblables et trace

Matrices semblables. La relation de similitude est une relation d'équivalence. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases. Exemples de changements de bases d'endomorphismes. Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace. (★) Pour toutes matrices carrées A et B, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme. Linéarité, pour tout couple d'endomorphismes (u,v), $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$. (★) La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Chapitre 24 : Groupe symétrique

Groupe symétrique S_n. Support d'une permutation, orbite d'un élément de $[\![1,n]\!]$ sous une permutation. Cycle, transposition. (★) Deux cycles à supports disjoints commutent. Permutations conjuguées. (★) Les transpositions sont conjugées entre elles. Toute permutation induit un cycle sur chacune de ses orbites. (★) Toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près en produit de cycles à supports disjoints (unicité admise). Algorithme de décomposition. Les transpositions engendrent le groupe S_n. Notion d'inversion. La signature d'une permutation est $(-1)^k$ avec k le nombre de ses inversions. (★) $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$. (★) La signature est un morphisme de groupes. C'est le seul morphisme non trivial de S_n dans $\mathbb{C}^*$. Groupe alterné.

★ ★ ★ ★ ★