Espaces préhilbertiens réels

Cornou Jean-Louis

15 avril 2023

Dans tout ce qui suit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1 Espace préhibertien réel

1.1 Produit scalaire

Définition 1 *On appelle produit scalaire sur* E *toute application* $B : E \times E \to \mathbb{R}$ *qui vérifie les critères suivants :*

— *Pour tout vecteur* x *de* E*, l'application* $E \times \mathbb{R}, y \mapsto B(x, y)$ *est linéaire. (linéarité à droite)*

— *Pour tout vecteur* y *de* E*, l'application* $E \times \mathbb{R}, x \mapsto B(x, y)$ *est linéaire. (linéarité à gauche)*

— $\forall (x, y) \in E^2, B(x, y) = B(y, x)$ *(symétrie)*

— $\forall x \in E \backslash \{0\}, B(x, x) > 0$ *(définie positive)*

Notation
Pour tous vecteurs x *et* y *de* E*, on note plutôt* $(x|y)$*,* $x \cdot y$ *ou* $\langle x, y\rangle$ *le produit scalaire de* x *et* y*.*

Définition 2 *On appelle espace préhilbertien réel tout couple* (E, B) *où* E *est un espace vectoriel réel et* B *un produit scalaire sur* E*. On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Propriété 1 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. L'application*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ *appelé produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

Propriété 2 *Soit* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$*. L'application*

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto Tr(A^T B)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *appelé produit scalaire canonique de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*.*

Propriété 3 *Soit* a, b *deux réels tels que* $a < b$*. L'application*

$$C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_a^b fg$$

est un produit scalaire

1.2 Inégalités dans les espaces préhilbertiens

On fixe $(\mathrm{E},(|))$ un espace préhilbertien réel.

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Shwarz)

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2, (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Définition 3 *L'application* $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ *est appelée norme au produit scalaire* $(|)$.

Propriété 4 *Avec les notations précédentes, l'application* N *vérifie*

- $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) \geq 0$ *et* $\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0$.
- $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$.
- $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \mathrm{N}(x+y) \leq \mathrm{N}(x)+\mathrm{N}(y)$.

Propriété 5 *Soit* $(x,y)\in \mathrm{E}^2$*, il y a égalité* $\mathrm{N}(x+y) = \mathrm{N}(x)+\mathrm{N}(y)$ *ssi x et y sont positivements liés.*

Définition 4 *L'application* $d : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \mathrm{N}(x-y)$ *est appelée distance associée au produit scalaire* $(|)$.

Propriété 6 *L'application d vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, d(x,y) = 0 \iff x = y$.
- $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, d(x,y) = d(y,x)$.
- $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^2, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

1.3 Egalités remarquables

Je note désormais $\|\cdot\|$ l'application N associée au produit scalaire $(|)$

Propriété 7

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$

Propriété 8 (Polarisation)

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2, (x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

2 Orthogonalité

2.1 Eléments orthogonaux

Définition 5 *Soit x, y deux vecteurs de* E*, on dit que x et y sont orthogonaux lorsque* $(x|y) = 0$.

Définition 6 *Soit* A *une partie de* E*. On appelle orthogonal de* A *l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de* A*, i.e*

$$\{x \in \mathrm{E} | \forall a \in \mathrm{A}, (x|a) = 0\}$$

Il est noté $\mathrm{A}^\perp$.

Propriété 9 *Soit* A *une partie de* E*. Alors son orthogonal* $\mathrm{A}^\perp$ *est un sev de* E.

Définition 7 *Soit* $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de* E.

- *On dit que cette famille est orthogonale lorsque*

$$\forall (i,j) \in \mathrm{I}, i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) = 0$$

— *On dit que cette famille orthonormale lorsqu'elle est orthogonale et*

$$\forall i \in \mathrm{I}, \|x_i\| = 1$$

Propriété 10 (Théorème de Pythagore) *Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille orthogonale alors pour toute partie finie J de I,*

$$\left\|\sum_{j\in\mathrm{J}} x_j\right\|^2 = \sum_{j\in\mathrm{J}} \|x_j\|^2$$

Propriété 11 *Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Alors cette famille est libre.*

2.2 Bases orthogonales, orthonormales.

Théorème 2 (Orthogonalisation/orthonormalisation de Gram-Schmidt) *Soit $(x_i)_{1\le i\le n}$ une famille libre. Alors il existe une famille $(y_i)_{1\le i\le n}$ orthonormale qui vérifie*

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \mathrm{Vect}(x_i)_{1\le i\le j} = \mathrm{Vect}(y_i)_{1\le i\le j}$$

3 Projections orthogonales