Kholle 16 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Donner et démontrer une formule pour le produit de deux matrices élémentaires.
2. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer un réel α tel que
$$A^3 - 4A^2 + \alpha A - 15 I_3 = 0$$
En déduire que A est inversible et donner son inverse.
3. On considère l'ensemble
$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \wedge ad - bc = 1 \right\}$$
Montrer qu'il s'agit d'un groupe multiplicatif.

★★★

Kholle 16 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Démontrer qu'une matrice carrée se décompose de manière unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère la matrice carrée J_n dont tous les coefficients valent 1, puis $A = J_n - I_n$. Démontrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$, puis en déduire que A est inversible. Quel est son inverse ?
3. On considère l'ensemble
$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
Montrer qu'il s'agit d'un anneau isomorphe à $\mathbb{C}$.

⋆⋆⋆

Kholle 16 filière MPSI/MP2I
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Énoncer et démontrer des formules pour le degré d'une somme de polynômes et le degré d'un produit de polynômes.
2. Soit $(A, D) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que D est diagonale, que tous ses coefficients diagonaux sont distincts, puis que $AD = DA$. Montrer que A est diagonale.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ selon la valeur du réel t :

$$\begin{cases} (2+t)x + 2y - z &= 0 \\ 2x + (t-1)y + 2z &= 0 \\ -x + 2y + (2+t)z &= 0 \end{cases}$$

⋆⋆⋆

Kholle 16 filière MPSI/MP2I
Bonus

★★★

1. Pour toute matrice carrée X, on appelle trace de X, notée $\mathrm{Tr}(X)$, la somme de ses coefficients diagonaux. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + X^T = \mathrm{Tr}(X)A$$

d'inconnue X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.

★★★