• *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

• *Ce devoir est long, il n'est pas fait pour être terminé, mais vous devez donner le meilleur de vous même dans les parties traitées.*

• *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*

• *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*

• *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*

• *Les problèmes peuvent être traités dans n'importe quel ordre à condition de mentionner clairement leurs numéros.*

Problème 1 : Cercles de Chasles d'une ellipse.

On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout couple (P,Q) de points du plan, PQ désigne la distance entre P et Q. On se donne deux réels strictement positifs a et b tels que $a > b$. On considère alors la partie

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}.$$

On pose de plus $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $F=(c,0)$ et $F'=(-c,0)$. On admet le résultat suivant : Pour tout point du plan $M=(x,y)$ du plan, M appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $MF-MF'=-2cx/a$.

1. Montrer que pour tout point du plan $M=(x,y)$ d'affixe $z=x+iy$, M appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $MF+MF'=2a$.
2. Soit $M=(x,y)$ un point de $\mathcal{E}$ d'affixe $z=x+iy$. Expliquer via un théorème du cours pourquoi il existe un point M' d'affixe $z'=x'+iy'$ qui vérifie $z'^2+z^2=c^2$.

   On fixe M un point de $\mathcal{E}$ et un tel point M' dans ce qui suit jusqu'à la question 8 incluse.
3. Montrer que $OM'^2 = MF\times MF'$.
4. Montrer alors que la bissectrice intérieure des demi-droites $[MF)$ et $[MF')$ est perpendiculaire à la droite (OM').
5. Montrer que :

$$\begin{aligned} |z-c|^2+|z+c|^2 &= 2\left(|z|^2+|c|^2\right)\\ (|z-c|+|z+c|)^2 &= 2\left(|z|^2+|z'|^2+|c|^2\right)\\ MF+MF' &= M'F+M'F'. \end{aligned}$$

   En déduire que le point M' appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
6. Déduire des deux questions précédentes une construction géométrique du point M'.
7. Soient les points N et N' d'affixes respectifs, $n=z+iz'$ et $n'=z-iz'$. Montrer que

$$nn'=c^2\ ;\ |z-c|+|z+c|=|n|+|n'|.$$

   En déduire que : $MF+MF'=ON+ON'$.

8. Démontrer enfin les relations :

$$\begin{aligned} xy + x'y' &= 0 \\ x^2 + x'^2 &= a^2 \\ y^2 + y'^2 &= b^2. \end{aligned}$$

9. Exprimer alors ON et ON' en fonction de a et b. En déduire que l'ensemble des points décrits par N et N' lorsque M décrit l'ensemble $\mathcal{E}$ forme deux cercles que l'on précisera.
10. La dernière page de l'énoncé comporte une figure avec la partie $\mathcal{E}$ dans le cas $a = 5$ et $b = 4$ ainsi qu'un point M de $\mathcal{E}$. Compléter cette figure en faisant apparaître les points F, F', les demi-droites $[MF)$ et $[MF')$ et leur bissectrice intérieure, un point M', la droite (OM'), les points N, N' ainsi que les deux cercles précédemment déterminés. Joindre cette feuille à votre copie.

Problème 2 : Transformations de Möbius.

On pose $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\omega\}$ avec $\omega \notin \mathbb{C}$, (aucune autre propriété n'est supposée sur l'objet ω). On rappelle qu'un point fixe d'une application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ est un élément w de $\widehat{\mathbb{C}}$ tel que $f(w) = w$. Une application $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ est dite involutive lorsque $g \circ g = \mathrm{Id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ (l'identité de $\widehat{\mathbb{C}}$).

1. Composition d'homographies
   (a) On se donne $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. L'application $s : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ définie par
   $$s(\omega) = \omega \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C}, s(z) = \alpha z + \beta$$
   est appelée encore une similitude. Montrer que s est une bijection. Donner sa réciproque.
   (b) On se donne des complexes $a,\ b,\ c,\ d$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. L'application $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ définie par
   $$h(\omega) = \frac{a}{c}, \quad h\left(-\frac{d}{c}\right) = \omega, \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
   est appelée homographie non dégénérée. Montrer que h est une bijection et donner son application réciproque.
   (c) On appelle homographie une application qui est soit du type s soit du type h. Montrer que la composée de deux homographies est encore une homographie. Donner la formule correspondant à la composée de deux homographies.
   (d) À quelle condition nécessaire et suffisante une homographie est-elle involutive ?
   (e) Montrer qu'une homographie différente de l'identité possède soit un, soit deux points fixes (on ne cherchera pas à déterminer ces points fixes).
   (f) On suppose que h est une homographie non dégénérée et possède deux points fixes distincts w_1 et w_2. On définit alors l'application $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ via
   $$\varphi(\omega) = 1, \quad \varphi(w_1) = \omega, \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{w_1\}, \varphi(z) = \frac{z - w_2}{z - w_1}.$$
   Pourquoi φ est-elle bijective ? Que vaut $\psi = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$? Quels sont ses points fixes ?
   (g) On suppose que h est une homographie non dégénérée et ne possède qu'un seul point fixe w_0. Dans ce deuxième cas, on définit l'application $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ via
   $$\varphi(\omega) = 0, \quad \varphi(w_0) = \omega \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{w_0\}, \varphi(z) = \frac{1}{z - w_0}.$$
   Dans ce cas, que vaut $\psi = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$? Quels sont ses points fixes ?

2. Images de cycles par une homographie. On appelle cycle soit un cercle soit une droite complétée par le point ω. On admet que par trois éléments z_1, z_2, z_3 distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$ passe un unique cycle.

   (a) Montrer qu'un point z_4 appartient au cycle déterminé par trois points distincts z_1, z_2, z_3 si et seulement si

   $$\Phi = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \div \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \in \mathbb{R} \cup \{\omega\}$$

   (b) Soit f une homographie et $(z_i)_{1 \leq i \leq 4}$ une famille de quatre éléments de $\widehat{\mathbb{C}}$. On pose $Z_i = f(z_i)$ pour tout entier $i \in [\![1, 4]\!]$. Montrer que :

   $$\frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 - Z_1} \div \frac{Z_4 - Z_2}{Z_4 - Z_1} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \div \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$

   En déduire que l'image d'un cycle par une homographie est encore un cycle.

   (c) On considère l'homographie non dégénérée $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ définie par

   $$h(\omega) = 3, \quad h(-3) = \omega, \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{-3\}, h(z) = \frac{3z - 3}{z + 3}$$

   ainsi que le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Quelles sont les images directes successives de $\mathcal{C}$ par h, i.e les parties $h(\mathcal{C}), h(h(\mathcal{C})), h(h(h(\mathcal{C}))), \ldots$?

3. Homographies laissant stable une partie du plan

   (a) On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et on considère une homographie f telle que $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. On note a, b, c, d des complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{-d/c\}, f(z) = (az + b)/(cz + d)$.

      i. Montrer que

      $$\forall t \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{a}be^{-it}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{c}de^{-it})$$

      ii. En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a}b = \overline{c}d$.

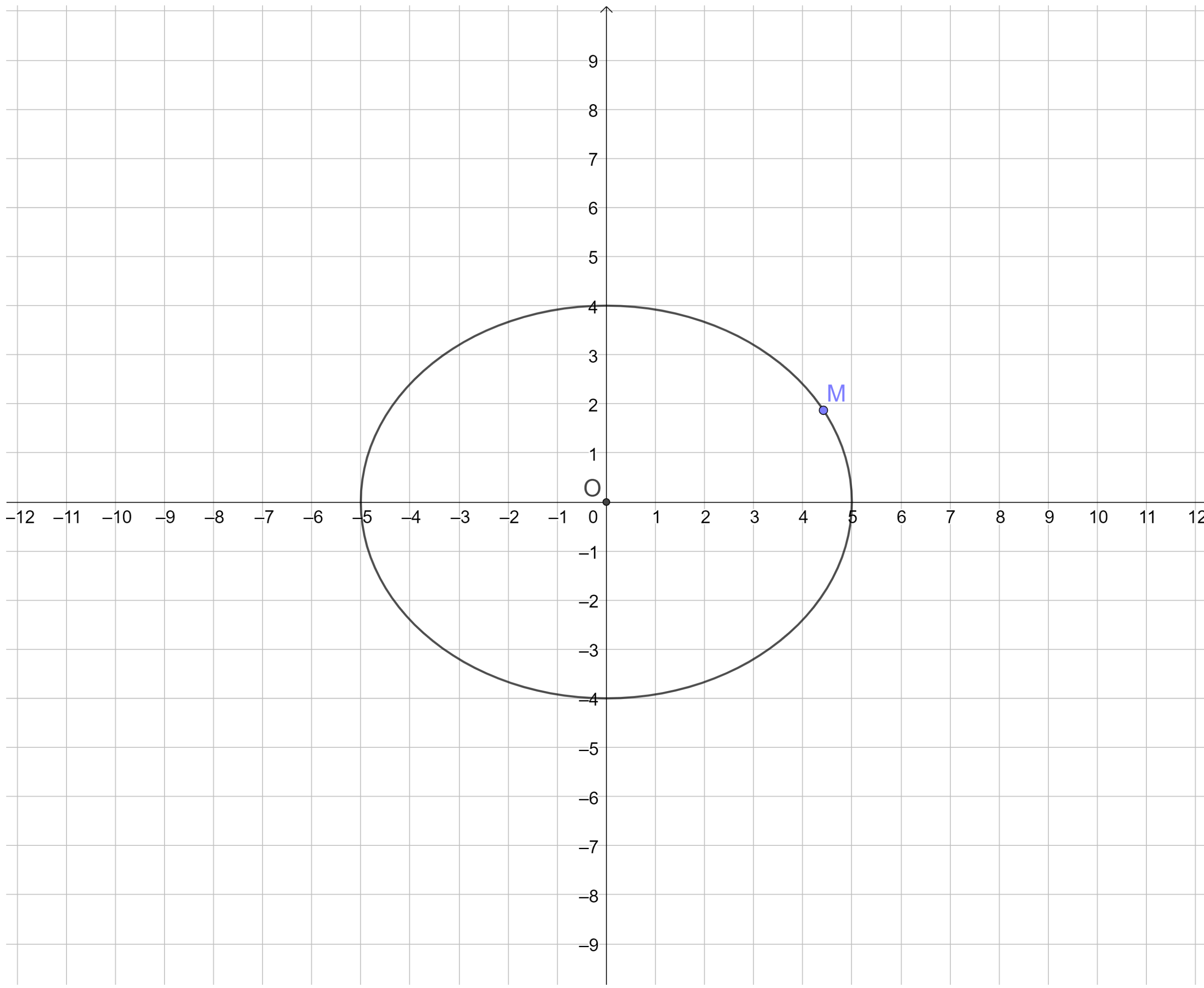
      iii. Dans le cas $a = 0$, qu'en déduire sur f ?

      iv. Dans le cas a non nul, démontrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$

      v. Toujours dans le cas a non nul, montrer que $|a| = |d|$. Que dire alors de f ?

   (b) A quelle condition nécessaire et suffisante une homographie f vérifie-t-elle $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$?

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆



M
O