- *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*
- *Ce devoir nécessite de prendre des initiatives. Le barème sera adapté en fonction de vos performances.*
- *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*
- *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*
- *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*

Exercice 1 - Une étude de fonction

On note $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x\,\mathrm{sh}(1/x)$.

1. Quelle est la parité de f ?
2. Étudier les limites éventuelles de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$
4. Dresser le tableau de variations de f et tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2 - Fonctions hölderiennes

Soit α un réel strictement positif, I un intervalle réel non réduit à un point et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est α-hölderienne sur I lorsque
$$\exists \mathrm{L}_f \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \mathrm{L}_f |x-y|^\alpha.$$
L'ensemble des fonctions α-hölderiennes sur I est noté $\mathrm{H}_\alpha(\mathrm{I},\mathbb{R})$. On note $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha > 1$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est α-hölderienne, si et seulement si, f est constante.
2. Montrer que la fonction racine carrée $\mathrm{S} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est 1/2-hölderienne sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que S n'est pas Lipschitizienne sur $\mathbb{R}^+$.
4. Soit ν un élément de $]0,1[$. On note f_ν la fonction $[0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\nu$. Montrer que f_ν est ν-hölderienne sur $[0,1]$, mais non Lipschitzienne sur $[0,1]$.
5. On se donne deux réels α, β tels que $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ et on note $\mathrm{I} = [0,1]$. Montrer qu'on a l'inclusion
$$\mathrm{H}_\beta(\mathrm{I},\mathbb{R}) \subset \mathrm{H}_\alpha(\mathrm{I},\mathbb{R})$$
6. Soit α un élément de $]0,1]$. Montrer les inclusions
$$\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathrm{H}_\alpha([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$$
7. On note
$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x^x & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}.$$
Montrer que g est continue. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
8. Montrer que
$$\forall \alpha \in]0,1], \quad g \notin \mathrm{H}_\alpha([0,1],\mathbb{R})$$

Problème - Une équation fonctionnelle

Dans tout ce qui suit, J désigne un intervalle non réduit à un point, inclus dans $[-1,1]$ tel que $\forall x \in \mathrm{J}, x^2 \in \mathrm{J}$. On étudie l'ensemble, noté $\mathrm{E_J}$, des applications dérivables de J dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad f'(x) = f\left(x^2\right)$$

I - Questions préliminaires.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir le résultat (H_n) suivant : Soit u une application de classe C^n d'un intervalle A dans $\mathbb{R}$, et v une application de classe C^n d'un intervalle B dans $\mathbb{R}$ telle que $v(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}$. Alors $w = u \circ v$ est de classe C^n sur B. Si de plus, il existe un réel c dans B tel que $\forall k \in [\![1,n]\!], u^{(k)}(v(c)) = 0$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!], w^{(k)}(c) = 0$.
2. Soit $f \in \mathrm{E_J}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur J.
3. Soit g une application dérivable d'un intervalle borné ouvert $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, avec a, b deux réels tels que $a < b$. On suppose que g et g' sont toutes deux majorées sur $]a,b[$. Montrer qu'alors g admet une limite finie en a.

II - L'espace $\mathrm{E}_{[-1,1]}$, étude partielle.

⚠ Attention
On admet qu'il existe une fonction* S *dans* $\mathrm{E}_{[-1,1]}$ *telle que* $\mathrm{S}(0) = 1$*. On la fixe dans tout ce qui suit.

1. Démontrer que $\forall x \in [-1,1], \mathrm{S}(x) + \mathrm{S}(-x) = 2$.
2. Démontrer que la tangente en $(1, \mathrm{S}(1))$ au graphe de S passe par $(0,0)$.
3. Démontrer que
$$\int_0^1 \mathrm{S}(x)dx = \frac{2}{3}\mathrm{S}(1)$$
4. On définit une suite d'entiers $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $q_0 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, q_{k+1} = 2q_k + 1$. Expliciter le terme général de la suite $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
5. Soit h un élément de $]0,1]$, $\mathrm{J} = [0,h]$ et f une fonction de J dans $\mathbb{R}$.
   (a) On suppose que f appartient à $\mathrm{E_J}$ et que $f(0) = 0$. On pose $\mathrm{M} = \sup_{t\in\mathrm{J}} |f(t)|$. Pourquoi M est-il un réel bien défini ?
   (b) Avec les mêmes hypothèses qu'en question précédente, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathrm{J}, \quad |f(x)| \leq \mathrm{M}x^{q_n}$$
   En déduire que f est la fonction nulle.
   (c) On suppose cette fois que f appartient à $\mathrm{E_J}$ et que $f(0)$ est quelconque. Montrer que
   $$\forall x \in \mathrm{J}, \quad f(x) = f(0)\mathrm{S}(x)$$
6. Soit a, b deux réels que $-1 \leq a \leq 0 < b \leq 1$ et $a^2 \leq b$. On considère $\mathrm{J} = [a,b]$. Déterminer $\mathrm{E_J}$.

III - Étude de $\mathrm{E}_{]0,1[}$.

Dans cette partie, J désigne l'intervalle ouvert $]0,1[$.

1. Soit $f \in \mathrm{E_J}$
   (a) Soit $p \in \mathrm{J}$. On pose $p_0 = p$ et $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \sqrt{p_n}$. Étudier la monotonie de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.
   (b) On pose pour tout entier n, $\mathrm{M}_n = \sup_{x\in[p_n,p_{n+1}]} |f(x)|$. Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{M}_n \leq \mathrm{M}_{n-1}(1 + p_{n+1} - p_n)$$
   En déduire que la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(c) Établir que, pour tout élément α de J, les fonctions f et f' sont bornées sur $[\alpha, 1[$.

(d) Montrer que f a une limite λ en 1 et que si l'on pose $f(1) = \lambda$, la fonction ainsi prolongée à $]0, 1]$ appartient à $E_{]0,1]}$.

2. Soit $f \in E_J$. On suppose qu'il existe β appartenant à J tel que f est majorée sur $]0, \beta]$. Montrer que f et f' ont une même limite finie l en 0 et qu'en prolongeant f par continuité en 0 par l, on obtient un élément de $E_{[0,1[}$.
3. Soit $f \in E_J$. On suppose que f n'est pas le produit de la restriction de S à J par une constante. Montrer qu'alors pour tout ε dans J, f n'est ni majorée, ni minorée sur $]0, \varepsilon]$, puis que f s'annule en une infinité de points de $]0, \varepsilon]$.