Kholle 11 filière MPSI/MP2I
Planche 1

⋆⋆⋆

1. Énoncer et démontrer l'égalité des accroissements finis.
2. Étudier la dérivabilité de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$
3. Soit a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^1 de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(a)f'(a) < 0$$
Montrer que f' s'annule sur $]0, a[$.

⋆⋆⋆

Kholle 11 filière MPSI/MP2I
Planche 2

★★★

1. Énoncer et démontrer le théorème de la limite de la dérivée
2. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si} x \neq 0 \\ 0 & \text{si} x = 0 \end{cases}$.

   Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(1-x)$$

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 11 filière MPSI/MP2I
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Que dire d'une composée de fonctions dérivables ? Le démontrer.
2. On note $f : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, x \mapsto x^3/(x^2-1)$. Calculer pour tout entier n la dérivée n-ième de f.
3. Soit f une application de classe C^2 sur le segment réel $[a,b]$. On suppose que $f(a) = f'(a)$ et que $f(b) = f'(b)$. Montrer que

$$\exists c \in]a,b[, \quad f''(c) = f(c)$$

⋆⋆⋆

Kholle 11 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Soit $(f,g) \in C([a,b],\mathbb{R})^2$. On suppose que $g \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$
2. Soit α un réel. On suppose qu'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré $d \geqslant 2$ tel que $P(\alpha) = 0$ et que c'est le polynôme de plus petit degré le vérifiant. Montrer à l'aide des accroissements finis que
$$\exists C \in \mathbb{R}^{+*}, \forall r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}$$

⋆⋆⋆