IPESUP 2022/2023

Kholle 5 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral. Le démontrer lorsque l'intégrande est une fonction monotone à valeurs réelles.
2. Rechercher une primitive de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t \arctan(t)$.
3. On considère l'équation différentielle $(E) : |x|y'(x) + y(x) = x^3$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. La résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, sur $\mathbb{R}^{-*}$, puis sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆

Kholle 5 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une fonction continue de I dans $\mathbb{C}$, et (E) l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue $y : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Donner et démontrer l'ensemble des solutions de (E).
2. Déterminer une primitive de $t \mapsto \sin(t)/\cos^3(t)$ sur un intervalle adapté.
3. Rechercher une primitive de $t \mapsto 1/\cos(t)$ sur un intervalle adapté contenant 0. En déduire une solution particulière de l'équation différentielle $(E) y' + \cos(y) = 0$ qui s'annule en 0.

⋆⋆⋆

IPESUP 2022/2023

Kholle 5 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit a et b deux complexes et (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable. Donner et démontrer l'ensemble des solutions de (E).
2. Déterminer une primitive de $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(\ln(t))$ de deux façons différentes :
   (a) en passant par les complexes,
   (b) à l'aide du changement de variables $u = \ln(t)$.
3. On considère deux réels a et b tels que $a < b$, le segment $I = [a, b]$, ainsi que $y : I \to \mathbb{C}$ une fonction deux fois dérivable. A quelle condition nécessaire et suffisante y satisfait-elle
$$y'' + y' + y = 0, \quad y(a) = 0 \quad \text{et} \quad y(b) = 0 \quad ?$$

⋆⋆⋆

Kholle 5 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Soit I un intervalle de R, a, b, c continues de I dans $\mathbb{R}$, x_0 dans I et (E) : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$. Montrer que les tangentes aux points d'abscisse x_0 des courbes des solutions de (E) sont concourantes ou parallèles.

2. Pour tout entier n, on considère la fonction $K_n : x \mapsto (x^2 - 1)^n$ et $P_n = K_n^{(n)}$. Montrer que pour tous entiers m et n distincts

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

Que vaut $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx$?

★★★