IPESUP 2022/2023

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition de la bijectivité d'une application $f : E \to F$. Démontrer que f est bijective si et seulement si
$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$$

2. On définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation binaire $\mathcal{R}$ via
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2, x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre non totale sur $\mathbb{N}^*$.

   (b) Déterminer l'ensemble des majorants de la partie $\{2,3\}$ de $\mathbb{N}^*$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto (1+ix)/(1-ix)$. Déterminer son ensemble de définition, $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

★★★

1. Cours
2. (a) En choisissant $n = 1$, pour tout x dans $\mathbb{N}^*$, $x = x^1$, donc $x\mathcal{R}x$, d'où réflexivité. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors il existe n, m des entiers naturels non nuls tels que $x = y^n = x^{nm}$. Comme x est non nul, $x^{nm-1} = 1$. Donc $nm - 1 = 0$, donc n divise 1, donc $n = m = 1$ et $y = x$. Si $x\mathcal{R}y\mathcal{R}z$, alors $x = y^n = z^{nm}$ avec $nm \in \mathbb{N}^*$. Donc relation d'ordre. 2 et 3 ne sont pas comparables puisque les majorants de 2 ne contiennent pas 3 et les majorants de 3 sont tous impairs.
   (b) Soit x un majorant de $\{2, 3\}$, alors il existe des entiers naturels n et m tels que $2 = x^n$ et $3 = x^m$. Donc si $x \neq 1$, n est la fois pair et impair, ce qui est absurde. Donc $x = 1$. Toutefois, 1 ne majore pas 2 puisque pour tout entier non nul n, $2^n > 1$. Donc l'ensemble des majorants est vide.
3. Pour tout réel x, $1 - ix$ est non nul, puisque de partie réelle non nulle. Donc $D_f = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $|f(x)| = |1 + ix|/|1 - ix| = 1$, donc $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$. Réciproquement soit z de module 1. Alors, on cherche x un réel tel que $z = (1 + ix)/(1 - ix)$. Supposons qu'un tel réel existe pour pouvoir le construire plus aisément par la suite. Alors $z(1 - ix) = 1 + ix$, donc $ix(z + 1) = 1 - z$. On voit que $z = -1$ pose problème. Supposons alors que $z =\neq -1$, on trouve $x = -i\dfrac{1 - z}{1 + z}$. Par technique de l'angle moitié, on retrouve que x est réel. Enfin, $f(z) = -1 \iff 1 + ix = ix - 1 \iff 1 = -1$. Donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{1\}$.

IPESUP 2022/2023

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Soit E un ensemble. Donner la définition d'une relation d'équivalence sur E. Démontrer que l'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence forme une partition de E.
2. On définit l'application $f : [0,1] \to [0,1], x \mapsto x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $x \mapsto 1-x$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est bijective. Quelle est alors sa réciproque ?
3. On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. Déterminer son ensemble de définition.

★★★

1. Cours.
2. On vérifie que $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ par disjonction de cas.
3. $\tan(a)$ est définie ssi $a \not\equiv \pi/2[x]$, donc $f(x)$ définie ssi $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \not\equiv 1[2]$, i.e $(1+x)/(1-x) \geqslant 0, 1-x \neq 0$ et $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \not\equiv 1[2]$. L'étude de signe donne $x \in [-1,1[$. Il reste à résoudre à n fixé dans $\mathbb{Z}$.
$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 2n+1 \iff \frac{1+x}{1-x} = 4p+1 \iff x = \frac{2p}{2p+1}$$
Pour $p \in \mathbb{Z}^-, 2p/2p+1 > 1$, donc
$$D_f = [-1,1[\setminus\{\frac{2p}{2p+1}|p \in \mathbb{N}\}$$

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux applications monotones. Démontrer que $g \circ f$ est monotone. Soit X un ensemble. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subset)$ et A une partie de F. L'application $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), B \mapsto A \cup B^c$ est-elle monotone ?
2. On note $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$. Déterminer l'ensemble des applications affines g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
   (a) $f_1 \circ g = g \circ f_1$.
   (b) $f_2 \circ g = g \circ f_2$.
   (c) g commute avec une application affine donnée.
3. On note $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi/x)$ et la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \iff h(x) = h(y)$ sur $\mathbb{R}^*$. Décrire l'ensemble de ses classes d'équivalence.

⋆⋆⋆

1. Cours. L'application est la composé de $X \mapsto X^c$ qui est décroissante et de $X \mapsto A \cup X$ qui est croissante, elle est donc décroissante.
2. (a) Soit g telle que $\forall x \in \mathbb{R}, (ax^2+b) = (ax+b)^2$, soit $ax^2+b = a^2x^2+2abx+b^2$. Pour $x=0$, on obtient $b=b^2$. Par dérivation, et $x=0$, $2ab=0$. On trouve alors $x \mapsto x$ et $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$ et vérifications aisées.
   (b) $2(ax+b)+1 = a(2x+1)+b$, soit $2b+1 = a+b$. $x \mapsto ax+a-1$.
   (c) $a(cx+d) = c(ax+b)+d$, soit $ad+b = cb+d$, i.e $d(a-1) = b(c-1)$, i.e $(a-1,b)$ et $(c-1,d)$ colinéaires.
3. Soit x, y deux réels non nuls. Alors $h(x) = h(y) \iff \pi/x \equiv \pi/y[2\pi] \vee \pi/x \equiv \pi - \pi/y[2\pi]$. La première condition équivaut à

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \pi/x = \pi/y + 2n\pi \iff \exists n \in \mathbb{Z}, 1/x = 1/y + 2n \iff \exists n \in \mathbb{Z}, x = \frac{y}{1+2ny}$$

On a alors $C(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{x}{1+2nx}\}$ quand x n'est pas l'inverse d'un entier pair. Le deuxième cas donne des enmbles similaires à l'exclusion d'inversion d'entiers impairs. D'autre part $\sin(n\pi) = 0$ et $\sin(n\pi + \pi/2) = 1$.

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les variations de $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $\mathbb{R}$. Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ est-elle injective ?
2. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
3. On munit $\mathbb{N}^2$ de la relation d'ordre lexicographique. Montrer que $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, x \mapsto (x, 0)$ est injective monotone. On note $\omega = (0, 1)$, montrer que ω est un majorant de $s(\mathbb{N})$. Quels sont les majorants de $s(\mathbb{N})$?

★★★

1. Signe de $(1-x^{n+1})(1-x)$ selon la parité de n. Théorème de la bijection truc.
2. Si une telle surjection existe, alors $A = \{x \in E | x \notin \pi(\{x\})\}$ est un objet contradictoire de la théorie via ses antécédents par π.
3. Les majorants sont $0 \times \mathbb{N}^*$.