Applications linéaires

Cornou Jean-Louis

2 avril 2023

Dans tout ce chapitre, on fixe $\mathbb{K}$ un corps, E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On a vu dans le cours sur les structures algébriques le concept de morphisme (de groupe, d'anneau). Les morphismes relatifs à la structure d'espace vectoriels s'appellent des applications linéaires.

1 Applications linéaires

1.1 Premières propriétés

Définition 1 *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On dit que f est linéaire (ou un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) lorsque*

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall(x,y)\in\mathrm{E}^2, f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

L'ensemble de ces applications est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Exemple 1 *L'application nulle $\mathrm{E}\to\mathrm{F}, x\mapsto 0_\mathrm{F}$ est linéaire.*
La transposition $\mathrm{T}:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{A}\mapsto\mathrm{A}^\mathrm{T}$ est linéaire.
L'application $f:\mathbb{C}^2\mapsto\mathbb{C}^3, (z_1,z_2)\mapsto(iz_1-z_2, 2z_2, z_1+z_2)$ est linéaire.
La dérivée seconde $\mathrm{D}_2:\mathbb{K}[\mathrm{X}]\to\mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}''$ est linéaire.
Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, l'homothétie de rapport λ, $\mathrm{E}\to\mathrm{E}, x\mapsto\lambda x$ est linéaire.

Propriété 1 (Règle de calcul) *Soit $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors $f(0_\mathrm{E})=0_\mathrm{F}$ et f est un morphisme de groupes de $(\mathrm{E},+)$ dans $(\mathrm{F},+)$.*

Démonstration. On choisit $\lambda=1, x=0_\mathrm{E}, \mu=0_\mathrm{K}, y=0_\mathrm{E}$, ce qui donne d'après les règles de calculs dans les espaces vectoriels,

$$f(0_\mathrm{E})=0_\mathrm{K}f(0_\mathrm{E})=0_\mathrm{F}$$

La définition de la linéarité avec $\lambda=\mu=1$ donne le caractère morphique de f.

Exemple 2 *Les translations $x\mapsto x+u$ de vecteur u non nul sont non linéaires.*
Les applications $\mathfrak{Re}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}, \mathfrak{Im}\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires, mais non $\mathbb{C}$-linéaires.

Exercice 1 *On fixe Q un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et on considère les applications $f:\mathbb{K}[\mathrm{X}]\to\mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}\circ\mathrm{Q}$, $g:\mathbb{K}[\mathrm{X}]\to\mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P}\mapsto\mathrm{Q}\circ\mathrm{P}$. Sont-elles tous deux linéaires ?*

Propriété 2 *Soit $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On suppose que f est bijective. Alors sa réciproque f^{-1} est linéaire. Dans ce cas, on dit que f est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriels, puis que E et F sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, (x,y)\in\mathrm{F}^2$. On assemble

$$\begin{aligned} f(\lambda f^{-1}(x)+\mu f^{-1}(y)) &= \lambda f(f^{-1}(x))+\mu f^{-1}(y) \quad \text{car f est linéaire} \\ &= \lambda x+\mu y \quad \text{car } f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_\mathrm{F} \end{aligned}$$

On applique f^{-1} à cette dernière égalité :

$$f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(x)+\mu f^{-1}(y)))=f^{-1}(\lambda x+\mu y)$$

Comme $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, on en déduit

$$\lambda f^{-1}(x)+\mu f^{-1}(y)=f^{-1}(\lambda x+\mu y)$$

ce qui donne bien la linéarité de f^{-1}.

Exemple 3 *Soit* $(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, \mathrm{E} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$. *Alors l'application* $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{C}^2, u \mapsto (u_0, u_1)$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-ev.*

Exercice 2 *Montrer que* $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, (z_1, z_2) \to (2z_1 - 3z_2, z_1 - iz_2)$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-ev.*

Propriété 3 *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, A *un sous-espace vectoriel de* E, B *un sous-espace vectoriel de* F. *Alors*

- $f(\mathrm{A})$ *est un sev de* F.
- $f^{-1}(\mathrm{B})$ *est un sev de* E.

Démonstration.
- Comme A est un sev, 0_E appartient à A, donc $0_\mathrm{F} = f(0_\mathrm{E})$ appartient à $f(\mathrm{A})$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, (x,y) \in f(\mathrm{A})^2$. On note $(a,b) \in \mathrm{A}^2$ tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. On en déduit par linéarité de f que

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b)$$

Or A est un sev de E, donc $\lambda a + \mu b$ appartient à A. Par conséquent, $\lambda x + \mu y$ possède un antécédent dans A, donc appartient à $f(\mathrm{A})$. Conclusion, $f(\mathrm{A})$ est un sev de F.
- Comme $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$ et 0_F appartient à B (c'est un sev de F), 0_E appartient à $f^{-1}(\mathrm{B})$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, (x,y) \in f^{-1}(\mathrm{B})$. Alors, par linéarité de f,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Or $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à B, comme c'est un sev de F, $\lambda f(x) + \mu f(y) \in \mathrm{B}$. Ainsi, $f(\lambda x + \mu y)$ appartient à B, donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(\mathrm{B})$. Conclusion, $f^{-1}(\mathrm{B})$ est un sev de E.

Exemple 4 *Soit* $\mathrm{A} = \{f \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f'' + f = 0\}$ *et* $\varphi : \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)$. *Alors* $\varphi(\mathrm{A})$ *est un sev de* $\mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. *Démontrez à titre d'exercice que* $\mathrm{A} = \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$ *et que* $\varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\sin)$.
Soit $\mathrm{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ *et* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x - y + z, y - z, x)$. *Que vaut* $f^{-1}(\mathrm{B})$ *? Vérifier qu'il s'agit d'un sev de* $\mathbb{R}^3$.

Propriété 4 *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, A *une partie de* E, B *une partie de* F. *Alors*

- $f(\mathrm{Vect}(\mathrm{A})) = \mathrm{Vect}(f(\mathrm{A}))$.
- $f^{-1}(\mathrm{Vect}(\mathrm{B})) \supset \mathrm{Vect}(f^{-1}(\mathrm{B}))$.

Démonstration.
- Soit $x \in f(\mathrm{Vect}(\mathrm{A}))$. Alors il existe y dans $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})$ tel que $x = f(y)$. On sait d'après la description des espaces engendrés par une partie que :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \exists(a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{A}^n, y = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$$

Mais alors, par linéarité de f,

$$x = f(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$$

Ainsi, x est combinaison linéaire d'éléments de $f(\mathrm{A})$ (les $(f(a_i))_i$), donc $x \in \mathrm{Vect}(f(\mathrm{A}))$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Vect}(f(\mathrm{A}))$, alors

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n, \exists(y_1,\ldots,y_n) \in f(\mathrm{A})^n, x = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Or

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \exists a_i \in \mathrm{A}, y_i = f(a_i)$$

On en déduit par linéarité de f que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i f(a_i) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i a_i\right)$$

De plus, $\sum_{i=1}^n x_i a_i$ est une combinaison linéaire d'éléments de A, donc appartient à Vect(A). Ainsi, x est image par f d'un élément de Vect(A), i.e $x \in f(\mathrm{Vect}(\mathrm{A}))$.

— Soit $x \in \mathrm{Vect}(f^{-1}(\mathrm{B}))$, alors il existe une famille à support fini $(\lambda_a)_{a\in f^{-1}(\mathrm{B})}$ telle que

$$x = \sum_{a\in f^{-1}(\mathrm{B})} \lambda_a a$$

On en déduit par linéarité de f

$$f(x) = \sum_{a\in f^{-1}(\mathrm{B})} \lambda_a f(a)$$

Or pour tout a dans $f^{-1}(\mathrm{B})$, $f(a) \in \mathrm{B}$, donc $f(x)$ est CL d'éléments de B, ie. $f(x) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{B})$. Conclusion, $x \in f^{-1}(\mathrm{Vect}(\mathrm{B}))$.

Définition 2 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle noyau de f, l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$, noté $\ker(f)$. On appelle image de f, l'ensemble $f(\mathrm{E})$, noté $\mathrm{Im}(f)$.*

Propriété 5 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Le noyau de f est un sev de E. L'image de f est un sev de F.*

Démonstration. L'espace nul $\{0_\mathrm{F}\}$ est un sev de F, donc $\ker(f) = f^{-1}(\{0_\mathrm{E}\})$ est un sev de E. E est un sev de E, donc $\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{E})$ est un sev de F.

Exemple 5 *$\{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \int_0^2 (f(t) + f'(t)e^t)dt = 0\}$ est un sev de $\mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ peut être vu comme le noyau de $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^\mathrm{T} + \mathrm{A}$.*

Exercice 3 *Déterminer le noyau de $\mathbb{K}[\mathrm{X}] \to \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}' - \mathrm{P}(0)$.*

Propriété 6 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.*

Démonstration. Supposons injective. Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0_\mathrm{F} = f(0_\mathrm{E})$. D'après l'injectivité de f, $x = 0_\mathrm{E}$. Réciproquement, $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$, donc $0_\mathrm{E} \in \ker(f)$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$. Réciproquement, supposons $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f, $f(x-y) = 0_\mathrm{F}$, donc $x - y \in \ker(f)$. Ainsi, $x - y = 0_\mathrm{E}$ et $x = y$. Conclusion, f est injective.

Exemple 6 *Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$. Elle est linéaire d'après la bilinéarité du produit matriciel. Vérifions que f est injective. Soit $\mathrm{X} = (x,y,z)^\mathrm{T} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{AX} = 0$. Alors*

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ -x + 2z & = 0 \\ x + z & = 0 \end{cases}$$

L'opération $\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3$ entraîne $3z = 0$, donc $z = 0$, puis $x = 0$. Alors L_1 donne $y = 0$. Conclusion, $\mathrm{X} = 0$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et f est injective.

1.2 Opérations dans $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Rappelons que comme F est un espace vectoriel, $\mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ possède une structure d'espace vectoriel via

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}), \forall x \in \mathrm{E}, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}), \forall x \in \mathrm{E}, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Théorème 1 *L'ensemble $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.*

Démonstration. L'application nulle de E dans F, $x \mapsto 0_\mathrm{F}$ est linéaire comme vu dans les exemples précédents. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, (f,g) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2$, soit $(a,b) \in \mathrm{K}^2$, $(x,y)^2 \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(ax+by) &= \lambda f(ax+by) + \mu g(ax+by) \quad \text{définition de la CL de deux applications à valeurs dans F} \\ &= \lambda(af(x) + bf(y)) + \mu(ag(x) + bg(y)) \quad \text{linéarités de f et g} \\ &= a(\lambda f(x) + \mu g(x)) + b(\lambda f(y) + \mu g(y)) \quad \text{règles de calculs dans les ev} \\ &= a(\lambda f + \mu g)(x) + b(\lambda f + \mu g)(y) \quad \text{définition de la CL de deux applications à valeurs dans F} \end{aligned}$$

On a ainsi montré que l'application $\lambda f + \mu g$ est linéaire, donc que $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Propriété 7 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.*

Démonstration. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, (x,y) \in \mathrm{E}^2$,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\lambda x+\mu y) &= g\left[f(\lambda x+\mu y)\right] && \text{définition de la composée d'application}\\ &= g\left[\lambda f(x)+\mu f(y)\right] && \text{linéarité de f}\\ &= \lambda g(f(x))+\mu g(f(y)) && \text{linéarité de g}\\ &= \lambda(g\circ f)(x)+\mu(g\circ f)(y) && \text{définition de la composée d'applications}\end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f$ est linéaire.

Exemple 7 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathrm{R}^3(x,y) \mapsto (x, x-y, y+x)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto 2x-y+z$. Déterminer la composée $g \circ f$.*
Dans $\mathrm{E} = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $\mathrm{D} : f \mapsto f'$ et $\mathrm{P} : f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t)dt)$, puis $\mathrm{Z} : f \mapsto f(0)$ (la fonction constante égale à $f(0)$). Alors $\mathrm{P} \circ \mathrm{D} = \mathrm{id}_\mathrm{E} - \mathrm{Z}$ et $\mathrm{D} \circ \mathrm{P} = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Propriété 8 (Bilinéarité de la composition) *Soit $(f_1,f_2) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2$ et $(g_1,g_2) \in (\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}))^2$, puis $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Alors*

$$(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f_1 = \lambda_1(g_1 \circ f_1) + \lambda_2(g_2 \circ f_1)$$

et

$$g_1 \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1(g_1 \circ f_1) + \lambda_2(g_1 \circ f_2)$$

Démonstration. Les deux preuves sont différentes contrairement à ce qu'on pourrait penser. Soit $x \in \mathrm{E}$.

$$\begin{aligned}\left[(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)\circ f_1\right](x) &= (\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)(f_1(x)) && \text{définition de la composition d'applications}\\ &= \lambda_1 g_1(f_1(x))+\lambda_2 g_2(f_1(x)) && \text{définition de CL d'applications à valeurs dans G}\\ &= \lambda_1(g_1\circ f_1)(x)+\lambda_2(g_2\circ f_2)(x) && \text{définition de la composition d'applications}\\ &= \left[\lambda_1(g_1\circ f_1)+\lambda_2(g_2\circ f_2)\right](x) && \text{définition de la CL d'applications à valeurs dans G}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[g_1\circ(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\right](x) &= g_1\left[(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x)\right] && \text{définition de la composition d'applications}\\ &= g_1\left[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)\right] && \text{définition de la CL d'applications à valeurs dans F}\\ &= \lambda_1 g_1(f_1(x))+\lambda_2 g_1(f_2(x)) && \text{linéarité de } g_1\\ &= \lambda_1(g_1\circ f_1)(x)+\lambda_2(g_1\circ f_2)(x) && \text{définition de la composée d'applications}\\ &= \left[\lambda(g_1\circ f_1)+\lambda_2(g_1\circ f_2)\right](x) && \text{définition de la CL d'applications à valeurs dans G}\end{aligned}$$

Exemple 8 *Calculer $\mathrm{D} \circ (\mathrm{P}+\mathrm{Z})$ et $(\mathrm{Z}+\mathrm{id}(\mathrm{E})) \circ (\mathrm{D}+\mathrm{P})$ avec les notations de l'exemple précédent.*

Exemple 9 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer l'équivalence $v \circ u = 0 \iff Im(u) \subset \ker(v)$.*

1.3 Application linéaire et familles de vecteurs

Propriété 9 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille génératrice de E. Alors la famille $(f(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.*

Démonstration. Comme vu précédemment, $f(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}) = \mathrm{Vect}(f(x_i)_{i\in\mathrm{I}})$. On en déduit

$$f(\mathrm{E}) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_i)_{i\in\mathrm{I}})$$

Autrement dit, la famille $f(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Propriété 10 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille libre de E. On suppose que f est injective. Alors la famille $(f(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est libre dans F.*

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathrm{K}^{(\mathrm{I})}$ une famille de scalaires à support fini tel que $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda f(x_i) = 0_\mathrm{F}$. On en déduit par linéarité

$$f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i\right) = 0_\mathrm{F}$$

Comme f est injective, son noyau est réduit à $\{0_\mathrm{E}\}$. Ce qui précède implique donc

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0_\mathrm{E}$$

Or la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre, donc $\forall i \in \mathrm{I}, \lambda_i = 0_\mathrm{K}$. Conclusion, la famille $(f(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est libre dans F.

Propriété 11 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de E, f un isomorphisme de E dans F, alors $f(x_i)_{i\in I}$ est une base de F.*

Définition 3 *Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. On dit que f est de rang fini lorsque $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension fini. Dans ce cas, on appelle rang de f, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, noté $\mathrm{rg}(f)$.*

Propriété 12 *Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. On suppose que f ou g est de rang fini, alors $g\circ f$ est de rang fini et*

$$\mathrm{rg}(g\circ f)\leq \min(\mathrm{rg}(g),\mathrm{rg}(f))$$

Démonstration. Supposons f de rang fini n. On note alors $(f_i)_{1\leq i\leq n}=f(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. En particulier, elle est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Mais alors, d'après la propriété 10, la famille $g(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de $g(\mathrm{Im}(f))=g(f(E))=(g\circ f)(E)=\mathrm{Im}(g\circ f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(g\circ f)$ est de dimension finie, de dimension inférieure ou égale à n, ie. $\mathrm{rg}(g\circ f)\leq\mathrm{rg}(f)$.
Supposons g de rang fini p. Alors $g(\mathrm{Im}(f))\subset\mathrm{Im}(g)$. Comme $\mathrm{Im}(g)$ est de dimension finie, $g(\mathrm{Im}(f))$ est de dimension finie inférieure ou égale à p, i.e $(g\circ f)(E)=\mathrm{Im}(g\circ f)(E)$ est de dimension inférieure ou égale à p. Ainsi, $\mathrm{rg}(g\circ f)\leq\mathrm{rg}(p)$.

Propriété 13 *Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$.*

— *Si f est de rang fini et g un isomorphisme, alors $g\circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g\circ f)=\mathrm{rg}(f)$.*

— *Si f est un isomorphisme et g de rang fini, alors $g\circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g\circ f)=\mathrm{rg}(g)$.*

Démonstration.
— Le fait que le rang est fini a déjà été démontré puisque f est de rang fini. La démonstration précédente montrer que $(g\circ f)(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathrm{Im}(g\circ f)$ puisque g est un isomorphisme. Ainsi, $\mathrm{rg}(g\circ f)=n$.
— Même commentaire pour le rang fini. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de $\mathrm{Im}(g)$, alors $f^{-1}(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de $\mathrm{Im}(g\circ f)$.

Exercice 4 *Soit $(u,v)\in\mathcal{L}(E,F)^2$ tels que u et v sont tous deux de rang fini. Montrer que $u+v$ est de rang fini et que $\mathrm{rg}(u+v)\leq\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$. En déduire (sans se fatiguer) que $|\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)|\leq rg(u+v)$.*

2 Endomorphismes

2.1 Structure d'anneau

Notation
On note $\mathcal{L}(E)=\mathcal{L}(E,E)$. Les éléments de $\mathcal{L}(E)$ s'appellent des endomorphismes de E.

Propriété 14 *L'application id_E est linéaire.*

Démonstration. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,(x,y)\in E^2$.

$$\mathrm{id}_E(\lambda x+\mu y)=\lambda x+\mu y=\lambda\,\mathrm{id}_E(x)+\mu\,\mathrm{id}_E(y)$$

Théorème 2 *L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(E,E)$. Il est non commutatif dès que E est dimension infinie ou finie supérieure ou égale à 2.*

Démonstration. Comme vu précédemment, l'identité est linéaire et c'est le neutre de la composition dans $\mathcal{F}(E,E)$. D'autre part, comme c'est un sev, $(\mathcal{L}(E),+)$ est un groupe. La stabilité par composition a été vue en proposition 8. Dans le cas où E de dimension infinie ou supérieure ou égale à 2, on se donne (e_1,e_2) une famille libre de E. On note alors $f:x_1e_1+x_2e_2\mapsto x_1e_2$ et $g:x_1e_1+x_2e_2\mapsto x_2e_1$ des applications linéaires définies sur $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ sev de E. Alors $(g\circ f)(e_2)=g(f(e_2))=g(0)=0$ tandis que $(f\circ g)(e_2)=f(g(e_2))=f(e_1)=e_2$ de sorte que $f\circ g\neq g\circ f$.

Notation
On omet parfois le symbole $\circ$ dans la composition. Attention toutefois à garder en tête la signification de gf.

☞ **Remarque**
Toutes ces opérations font de $\mathcal{L}(E)$ une structure appelée algèbre sur $\mathbb{K}$.

Exemple 10 (Application aux calculs de suites récurrentes) *Soit* $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(3x+y,3y)$ *et* $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(y,0)$. *Alors* $u=3Id_{\mathbb{R}^2}+v$. *Comme* v *et* $Id_{\mathbb{R}^2}$ *commutent, on peut appliquer le binôme puisque* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *est un anneau. On remarque*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, v^2(x,y)=v(y,0)=(0,0)$$

soit $v^2=0$. *On déduit que pour tout entier naturel* n*,*

$$u^n=3^n Id_{\mathbb{R}^2}+n3^{n-1}v$$

Soit à présent deux réels x_0 *et* y_0 *et les suites récurrentes définies par*

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=3x_n+y_n, y_{n+1}=3y_n \quad \text{soit encore}(x_{n+1},y_{n+1})=u(x_n,y_n)$$

On en déduit

$$\forall\in\mathbb{N},(x_n,y_n)=u^n(x_0,y_0)=(3^n x_0+n3^{n-1}y_0,3^n y_0)$$

Exercice 5 *Soit* $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que* u *est une homothétie si et seulement si* $\forall x\in\mathrm{E},\exists\lambda\in\mathbb{K},u(x)=\lambda x$.

Exemple 11 *Soit* λ,μ *deux scalaires distincts.*

— *Montrons que* $\ker(u-\lambda\,\mathrm{id})$ *et* $\ker(u-\mu\,\mathrm{id})$ *sont en somme directe. Soit* $x\in\ker(u-\lambda\,\mathrm{id})\cap\ker(u-\mu\,\mathrm{id})$. *Alors*

$$u(x)=\lambda x \quad \text{et} \quad u(x)=\mu x$$

ce qui entraîne $\lambda x=\mu x$. *Comme on a supposé* $\lambda\neq\mu$*, cela implique* $x=0$. *Ainsi, la somme est directe.*

— *Montrons que* $\ker((u-\lambda\,\mathrm{id})^2)$ *et* $\ker((u-\mu\,\mathrm{id})^2)$ *sont en somme directe. Soit* $x\in\ker((u-\lambda\,\mathrm{id})^2)\cap\ker((u-\mu\,\mathrm{id})^2)$. *Alors*

$$(u-\lambda\,\mathrm{id})^2(x)=u^2(x)-2\lambda u(x)+\lambda^2x=0 \quad \text{et} \quad (u-\mu\,\mathrm{id})^2(x)=u^2(x)-2\mu u(x)+\mu^2x=0$$

La soustraction de ces deux égalités amène

$$2(\lambda-\mu)u(x)=(\lambda^2-\mu^2)x=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)x$$

Comme on a supposé $\lambda\neq\mu$*, on en déduit* $2u(x)=(\lambda+\mu)x$. *On en déduit par linéarité de* u*,* $u^2(x)=\frac{1}{2}(\lambda+\mu)u(x)=\frac{(\lambda+\mu)^2}{4}x$. *D'autre part,* $\mu(u-\lambda\,\mathrm{id})^2(x)-\lambda(u-\mu\,\mathrm{id})^2(x)=0$ *fournit*

$$(\mu-\lambda)u^2(x)+(\lambda^2\mu-\lambda\mu^2)x=0$$

soit encore, puisque $\lambda\neq\mu$*,*

$$u^2(x)=\lambda\mu x$$

Les deux expressions de $u^2(x)$ *obtenues entraînent* $4\lambda\mu x=(\lambda+\mu)^2x$*, soit encore* $(\lambda-\mu)^2x=0$. *Comme* $\lambda\neq\mu, x=0$ *et la somme de sev est directe.*

2.2 Projecteurs et symétries

Définition 4 *Soit* $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$. *On dit que* f *est un projecteur (ou une projection) lorsqu'on dispose de sous-espaces vectoriels* F *et* G *supplémentaires dans* E *tels que*

$$\forall x\in\mathrm{E},\exists!(x_\mathrm{F},x_\mathrm{G})\in\mathrm{F}\times\mathrm{G}, x=x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}, f(x)=x_\mathrm{F}$$

Dans ce cas, on dit que f *est la projection sur* F *parallèlement à* G *(ou de direction* G*)*

☞ **Remarque**
Cette définition est légitime puisqu'on dispose de l'existence et unicité de la décomposition de x *dans* $\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

Propriété 15 *Tout projecteur est linéaire.*

Démonstration. Soit $(x,y) \in E^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On note $x = x_F + x_G$ l'unique décomposition de x dans $E = F \oplus G$ et $y = y_F + y_G$ celle de y. Alors $\lambda x + \mu y = (\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$. Comme F et G sont des sev, $\lambda x_F + \mu y_F \in F$ et $\lambda x_G + \mu y_G \in G$. Par conséquent, cette dernière écriture est la décomposition de $\lambda x + \mu y$ dans $F \oplus G$. On en déduit $p(\lambda x + \mu y) = \lambda x_F + \mu y_F = \lambda p(x) + \mu p(y)$.

Définition 5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est idempotent lorsque $f^2 = f$ (i.e $f \circ f = f$).*

Théorème 3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$. Dans ce cas, f est le projecteur sur son image parallèlement à son noyau.*

Démonstration. Supposons que f est un projecteur. On note F et G les sev supplémentaires dans E correspondants. Soit $x \in E$ que l'on écrit $x = x_F + x_G$ avec des notations évidentes. Alors $f(x) = x_F$. En particulier, $f(x)$ appartient à F, donc $f(x) = x_F + 0$ est la décomposition de $f(x)$ dans $F \oplus G$. On en déduit que $f(f(x)) = x_F$. Ainsi, $f(f(x)) = f(x)$. Conclusion, $f^2 = f$.
Réciproquement, supposons que $f^2 = f$. On pose alors $F = \mathrm{Im}(F)$ et $G = \ker(f)$. Démontrons que f est le projecteur sur F parallèlement à G. Démontrons tout d'abord que F et G sont supplémentaires dans E.

— Soit $x \in E$. On écrit $x = f(x) + (x - f(x))$. Notons $y = f(x)$ et $z = x - f(x)$. Il est clair que $y \in \mathrm{Im}(F) = F$. De plus, par linéarité, $f(z) = f(x) - f(f(x))$. Or, $f^2 = f$, donc $f(z) = f(x) - f(x) = 0$ et $z \in \ker(f) = G$. On vient de démontrer que $F + G = E$.
— Soit $x \in F \cap G$, alors il existe un élément a de E tel que $x = f(a)$. Mais alors $f(x) = f(f(a)) = f(a)$ puisque $f^2 = f$. Comme $x \in G, f(x) = 0$, donc $f(a) = 0$. On en déduit $x = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0\}$.

Conclusion, $F \oplus G = E$. De plus, nous avons démontré que $x = f(x) + (x - f(x))$ est l'unique décomposition de x dans $F \oplus G$. Ainsi, $f(x)$ est bien la composante dans F de cette décomposition, i.e f est le projecteur sur F parallèlement à G.

☞ **Remarque**
On a prouvé au passage que $f^2 = f$ implique $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

Exemple 12 *Soit* $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), A \mapsto AX$. *Démontrer que f est un projecteur. Donner son image et sa direction.*

Propriété 16 *Soit f un projecteur de E et $x \in E$. Alors $x \in \mathrm{Im}(f) \iff f(x) = x$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{id}_E)$.*

Démonstration. Si x appartient à $\mathrm{Im}(f)$. Alors il existe un vecteur a tel que $x = f(a)$. Mais alors, $f(x) = f^2(a) = f(a) = x$. Réciproquement, si $f(x) = x$, alors x est antécédent de x par f, donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.

Exemple 13 *L'application partie réelle est une projection sur $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.*

Propriété 17 *Soit F, G deux sev supplémentaires dans E. Soit f le projecteur sur F parallèmement à G. Alors $\mathrm{id}_E - f$ est le projecteur sur G parallèlement à F.*

Démonstration. Notons $g = \mathrm{id}_E - f$. Alors comme id_E et f commutent, $g^2 = \mathrm{id}_E^2 - 2\,\mathrm{id}_E \circ f + f^2 = \mathrm{id}_E - 2f + f = \mathrm{id}_E - f = g$. On en déduit que g est le projecteur sur son image relativement à son noyau. Or $\mathrm{Im}(g) = \ker(g - \mathrm{id}_E) = \ker(f) = G$ et $\ker(g) = \ker(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(f) = F$. Ainsi, g est le projecteur sur G parallèlement à F.

Définition 6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une symétrie lorsqu'on dispose de F et G deux sev supplémentaires dans E tels que*

$$\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G, f(x) = x_F - x_G$$

Dans ce cas, on dit que f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Propriété 18 *Toute symétrie est linéaire.*

Démonstration. Laissée à titre d'exercice.

Théorème 4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est une symétrie si et seulement si $f^2 = \mathrm{id}_E$. Dans ce cas, f est la symétrie par rapport à $\ker(f - id_E)$ parallèment à $\ker(f + \mathrm{id}_E)$. On appelle $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ son espace invariant et $\ker(f + \mathrm{id}_E)$ son espace anti-invariant.*

Démonstration. Supposons que f est une symétrie. On note alors F et G des sev supplémentaires de E tels que f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ sa décomposition dans $F \oplus G$, ce qui entraîne $f(x) = x_F - x_G$. Mais alors, comme $-x_G$ appartient à G (c'est un sev de E), on reconnaît la décomposition du vecteur $f(x)$ dans $F \oplus G$, Ainsi, $f(f(x)) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x$. Conclusion, $f^2 = \mathrm{id}_E$.
Réciproquement, supposons $f^2 = \mathrm{id}_E$. Notons $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $G = \ker(f + \mathrm{id}_E)$, ce sont des sev de E puisque des noyaux d'applications linéaires. Montrons que F et G sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$, on note $y = \frac{1}{2}(x + f(x))$ et $z = \frac{1}{2}(x - f(x))$ qui vérifient $y + z = x$. De plus, $f(y) = \frac{1}{2}(f(x) + f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + x) = y$, donc $y \in F$. En outre, $f(z) = \frac{1}{2}(f(x) - f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - x) = -z$, donc $z \in G$. Ceci prouve que $F + G = E$. Soit $x \in F \cap G$, alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$, donc $2x = 0$, d'où $x = 0$. Par conséquent, cette somme de sev est directe et $F \oplus G = E$. Soit $x \in E$, d'après ce qui précède, x se décompose sous la forme $y + z = \frac{1}{2}(x + f(x)) + \frac{1}{2}(x - f(x))$ dans cette somme directe. On a vu que $f(y) = y$ et $f(z) = -z$. donc f est bien la symétrique par rapport à F parallèlement à G.

☞ **Remarque**
On a prouvé au passage que $s^2 = \mathrm{id}_E$ *implique* $\ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_E) = E$.

Exemple 14 *La transposition matricielle est une symétrie. Son espace invariant est l'espace des matrices symétriques, son espace anti-invariant est l'espace des matrices antisymétriques.*

Propriété 19 *Soit* F *et* G *deux sev supplémentaires dans* E*. Soit p un projecteur sur* F *parallèlement à* G*, alors* $2p - \mathrm{id}_E$ *est la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G*. Réciproquement, si s est une symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G*, alors* $\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$ *est le projecteur sur* F *parallèlement à* G*.*

Démonstration. Pour tout x de E, on note $x_F + x_G$ sa décomposition dans $F \oplus G$. Alors $p(x) = x_F$ et $(2p - \mathrm{id}_E)(x) = 2x_F - x = x_F - x_G$, donc $2p - \mathrm{id}_E$ est bien la symétrie annoncée. Réciproquement, si s est la symétrie sur F parallèlement à G, $\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)(x) = \frac{1}{2}(x_F + x_G + x_F - x_G) = x_F$, donc cet endomorphisme est la projection sur F parallèlement à G.

Exemple 15 *On considère* $\mathbb{C}$ *comme un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension un. On se donne* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$*. A quelle CNS, l'application* $z \mapsto az + b\overline{z}$ *est-elle une symétrie ? Donner son espace invariant et anti-invariant le cas échéant.*

2.3 Automorphismes

Définition 7 *On appelle automorphisme de* E *tout endomorphisme de* E *bijectif. Leur ensemble est noté* GL(E)*, appelé groupe linéaire.*

Exemple 16 *Toute symétrie est un automorphisme.*

Propriété 20 *L'ensemble* $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Démonstration. C'est le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 17 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $\Phi : E \times F \to E \times F, (x, y) \mapsto (x, y - u(x))$*. Montrons que* Φ *est un automorphisme de* $E \times F$*. La vérification de la linérité est laissée à titre d'exercice. Soit* $((x, y), (x', y')) \in (E \times F)^2$*.*

$$\begin{aligned}(x', y') = \Phi(x, y) &\iff x' = x \quad \wedge \quad y' = y - u(x) \\ &\iff x = x' \quad \wedge \quad y = y' + u(x')\end{aligned}$$

Par conséquent, tout élément (x', y') *de* $E \times F$ *possède exactement un antécédent dans* $E \times F$ *par* Φ*, à savoir* $(x', y' + u(x'))$*, ce qui prouve la bijectivité de* Φ*.*

Exercice 6 *Soit* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z)$*. Montrer que u est un automorphisme de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 7 *Déterminer toutes les projections qui sont des automorphismes.*

3 Détermination d'une application linéaire

On vient de voir qu'on peut définir une application linéaire à l'aide de décomposition dans des sev supplémentaires. On généralise cette technique à l'aide de bases.

Théorème 5 *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i$$

Démonstration. Rappelons que comme $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, pour tout x dans E, il existe une unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$. Avec ces notations, on définit de manière univoque l'application u en posant pour tout x dans E, $u(x) = \sum_{i\in I} x_i f_i$. Montrons qu'alors u est linéaire et vérifie le critère attendu. Soit $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On note $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i\in I} y_i e_i$ les décompositions uniques de x et y dans la base $(e_i)_{i\in I}$. On remarque qu'alors

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i\in I} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$$

donc que les $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i\in I}$ sont les coordonnées du vecteur $\lambda x + \mu y$ dans la base $(e_i)_{i\in I}$. Avec la définition de u que l'on a donnée, cela entraîne

$$u(\lambda x + \mu y) = \sum_{i\in I} (\lambda x_i + \mu y_i) f_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i f_i + \mu \sum_{i\in I} y_i f_i = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Ainsi, u est linéaire. De plus, soit $i \in I$, alors $e_i = \sum_{j\in J} \delta_{i,j} e_j$ est l'unique décomposition de (e_i) dans la base $(e_j)_{j\in J}$. On en déduit

$$u(e_i) = \sum_{j\in J} \delta_{i,j} f_j = f_i$$

L'existence est bien prouvée. Montrons à présent l'unicité. Soit f et g deux applications linéaires telles que

$$\forall i \in I, f(e_i) = g(e_i) = f_i$$

Soit $x \in E$, on écrit la décomposition de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$ via $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$. D'après la linéarité de f et g,

$$f(x) = \sum_{i\in I} x_i f(e_i) = \sum_{i\in I} x_i f_i \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i\in I} x_i g(e_i) = \sum_{i\in I} x_i f_i$$

Par conséquent, $f(x) = g(x)$, et ce pour tout x de E, donc $f = g$.

☞ **Remarque**
Pour vérifier que deux applications linéaires sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur une base de l'espace de départ.

Exemple 18 *Pour vérifier qu'une application linéaire est nulle, il suffit de vérifier qu'elle annule une base de E. Soit (a, b, c) un triplet de réels. A quelle condition nécessaire est suffisante, l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto ((a^2 + b + c)x + (2a - 2b)y + cz, 2cx - (2b^2 + c^2)y + az, (a + c)x - c^2 z)$ est-elle l'application nulle ? En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on constate que cela équivaut à $a^2 + b + c = 0, (2a - 2b) = 0, c = 0, 2c = 0, (2b^2 + c^2) = 0, a = 0, a + c = 0, c^2 = 0$, soit encore $a = b = c = 0$.*

Propriété 21 *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Soit u l'unique application dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i$$

- *u est injective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est libre dans F.*
- *u est surjective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est une base de F.*

Démonstration. — Supposons u injective et montrons que $(f_i)_{i\in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i f_i = 0$. On écrit alors par linéarité de u,

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i) = u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = 0$$

Ainsi, $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in \ker(u)$. Par injectivité de u, $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0$. Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une base, elle est libre, donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0$. Ainsi, la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre.

Réciproquement supposons la famille $(f_i)_{i\in I}$ libre et montrons que u est injective. Comme elle est linéaire, il suffit de prouver $\ker(u) = \{0\}$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. On note $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ la décomposition de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$. Par linéarité de u, $0 = u(x) = \sum_{i\in I} x_i u(e_i) = \sum_{i\in I} x_i f_i$. Comme la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre, on en déduit $\forall i \in I, x_i = 0$. Par conséquent, $x = 0$ et u est injective.

— Supposons u surjective. Soit $y \in F$. Comme u est surjective, il existe un vecteur x dans E tel que $y = u(x)$. On écrit la décomposition de x dans la base E : $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, ce qui entraîne par linéarité de u, $y = \sum_{i\in I} x_i u(e_i) = \sum_{i\in I} x_i f_i$. Ainsi, on a trouvé une famille $(x_i)_{i\in I}$ de scalaires à support fini qui établit que y est combinaison linéaires des $(f_i)_{i\in I}$. Comme cela est valable pour tout y dans F, cette famille est génératrice.

  Réciproquement, si la famille $(f_i)_{i\in I}$ est génératrice, on montre que u est surjective. Soit $y \in F$. Alors il existe une famille $(y_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ telle que $y = \sum i \in I y_i f_i$. On pose alors $x = \sum_{i\in I} y_i e_i$, ce vecteur de E vérifie par linéarité de u, $u(x) = \sum_{i\in I} y_i u(e_i) = \sum_{i\in I} y_i f_i = y$. Par conséquent, y possède un antécédent par u, et ce, pour tout y dans F. Ainsi, u est surjective.

— Conséquence des deux points précédents.

☞ **Remarque**
Ne pas oublier le point important, il suffit qu'une application linéaire transporte une base sur une base pour être un isomorphisme, auquel cas elle envoie toute base sur une base.

Théorème 6 *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors* E *et* F *sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.*

Démonstration. Supposons E et F isomorphes et notons $u \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme. Soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E avec $n = \dim(E)$. D'après ce qui précède, la famille $u(e_i)_{1\le i\le n}$ est une base de F, donc $\dim(F) = n = \dim(E)$. Réciproquement, supposons que E et F ont même dimension que l'on note n. On note $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E et $(f_i)_{1\le i\le n}$ une base de F. On peut alors définir de manière univoque l'application linéaire u qui envoie la base $(e_i)_{1\le i\le n}$ sur la famille $(f_i)_{1\le i\le n}$ puisque celles-ci ont même longueur. D'après ce qui précède, u est alors un isomorphisme, donc E et F sont isomorphes.

Exemple 19 *Tout espace de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Autrement dit, tout espace vectoriel de dimension finie n « se comporte comme » l'espace $\mathbb{K}^n$. C'est bien sûr faux en dimension infinie, au sens où il existe des espaces de dimension infinie non isomorphes : par exemple, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*

Théorème 7 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que* E *et* F *sont de dimension finie et que* $\dim(E) = \dim(F)$. *Alors, on a l'équivalence : u bijective ssi u injective ssi u surjective.*

Démonstration. Les sens directs sont clairs. Supposons u injective. Soit $(e_1)_{1\le i\le n}$ une base de E avec $n = \dim(E)$. Alors la famille $(u(e_i))_{1\le i\le n}$ est libre dans F qui est de dimension n. Par conséquent, c'est une base de F. D'après ce qui précède, u est alors un isomorphisme. Supposons à présent u surjective. la famille $(u(e_i))_{1\le i\le n}$ est alors génératrice dans F qui est de dimension n, donc c'est une base de F. On en déduit que u est un isomorphisme.

⚠ **Attention**
Ne pas oublier le critère sur la dimension. C'est faux en dimension infinie, la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$ est surjective, mais non injective.

Théorème 8 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose* E *de dimension finie. Alors on a l'équivalence f est inversible ssi f est inversible à gauche ssi f est inversible à droite.*

Démonstration. Les sens directs sont clairs. Supposons f inversible à gauche. On note g un endomorphisme de E tel que $gf = \mathrm{id}_E$. Montrons qu'alors f est injective, cela suffit à démontrer qu'elle est inversible d'après ce qui précède. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$. Alors $g(f(x)) = g(0) = 0$, soit encore $\mathrm{id}_E(x) = x = 0$. Supposons à présent f inversible à droite. Notons g un endomorphisme de E tel que $fg = \mathrm{id}_E$. Montrons qu'alors f est surjective, cela suffit à prouver que c'est un isomorphime d'après ce qui précède. Soit $x \in E$, alors $f(g(x)) = x$, donc $g(x)$ est un antécédent de x par f, ce qui prouve la surjectivité de f.

Propriété 22 *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et* $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E)\dim(F)$.

Démonstration. On note $n = \dim(E)$, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, puis $p = \dim(F)$ et $(f_1,\dots,f_p)$ une base de F. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On définit de manière univoque une application linéaire $u_{i,j}$ en posant

$$\forall k \in [\![1,n]\!], u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} f_j$$

Montrons que la famille d'applications linéaires $(u_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ ainsi définie est une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

— Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathbb{K}^{np}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}u_{i,j} = 0$. Fixons k dans $[\![1, n]\!]$ et évaluons cette dernière application linéaire en le vecteur e_k. Cela entraîne

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}\delta_{i,k}f_j = 0$$

La sélection des indices via le symbole de Kronecker entraîne

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_{k,j}f_j = 0$$

Or la famille $(f_j)_{1\leq j\leq p}$ est une base donc libre. Cela entraîne $\forall j \in [\![1, p]\!], \lambda_{k,j} = 0$, et ce, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$. Ainsi, la famille de scalaires est nulle, ce qui entraîne la liberté des $(u_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$.

— Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On cherche à décomposer u selon la famille précédente. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on décompose le vecteur $u(e_k)$ dans la base $(f_j)_{1\leq j\leq p}$, ce qui fournit l'existence d'une famille $(\lambda_{k,j})_{1\leq j\leq p} \in \mathbb{K}^p$ telle que

$$u(e_k) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_{k,j}f_j$$

On a ainsi construit une famille $(\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. Vérifions que $u = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}u_{i,j}$. Pour cela, fixons $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}u_{i,j}\right)(e_k) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}u_{i,j}(e_k)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}\delta_{i,k}f_j\\ &= \sum_{j=1}^{p}\lambda_{k,j}f_j\\ &= u(e_k)\end{aligned}$$

Par conséquent, les applications linéaires u et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}u_{i,j}$ coïncident sur une base, donc sont égales. La famille $(u_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ est alors génératrice.

Propriété 23 *Soit* E_1 *et* E_2 *deux sous-espaces supplémentaires dans* E*,* $u_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1, \mathrm{F})$*,* $u_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_2, \mathrm{F})$*. Alors il existe une unique application* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *qui coïncide avec* u_1 *sur* E_1 *et avec* u_2 *sur* E_2*.*

Démonstration. Pour tout x dans E, on note $x = x_1 + x_2$ son unique décomposition dans $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. On définit alors $u : x \mapsto u_1(x_1) + u_2(x_2)$, ce qui définit bien u de manière univoque puisque la décomposition de x est unique. Montrons que u satisfait les critères attendus.

— Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Avec des notations évidentes, $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$ est l'unique décomposition du vecteur $\lambda x + \mu y$ dans $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$, puisque E_1 et E_2 sont des sev de E. On en déduit

$$\begin{aligned}u(\lambda x + \mu y) &= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + u_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \quad \text{définition de } u\\ &= \lambda u_1(x_1) + \mu u_1(y_1) + \lambda u_2(x_2) + \mu u_2(y_2) \quad \text{linéarité de } u_1 \text{ et } u_2\\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \quad \text{définition de } u\end{aligned}$$

Conclusion u est linéaire.

— Soit $x \in \mathrm{E}_1$, alors $x = x + 0$ est l'unique décomposition de x dans $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Donc $u(x) = u_1(x) + u_2(0) = u_1(x)$. De même, pour tout x dans E_2, $x = 0 + x$ est l'unique décomposition de x dans $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$, donc $u(x) = u_1(0) + u_2(x) = u_2(x)$.

L'existence est bien établie. Démontrons l'unicité. Soit v une autre application linéaire satisfaisant les mêmes critères et $x \in \mathrm{E}$. Alors

$$\begin{aligned}u(x) &= u(x_1) + u(x_2) \quad \text{linéarité de } u\\ &= u_1(x_1) + u_2(x_2) \quad \text{restrictions de } u\\ &= v(x_1) + v(x_2) \quad \text{restrictions de } v\\ &= v(x) \quad \text{linéarité de } v\end{aligned}$$

Donc $u = v$ et l'unicité est démontrée.

Propriété 24 *Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_q$ des sev de E tels que $\bigoplus_{i=1}^{q} \mathrm{E}_i = \mathrm{E}$, puis $(u_i)_{1 \leq i \leq q} \in \prod_{i=1}^{q} \mathcal{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$. Alors il existe une unique application linéaire u dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que*

$$\forall i \in [\![1, q]\!], u_{|\mathrm{E}_i} = u_i$$

Démonstration. Récurrence à l'aide de la propriété précédente.

Théorème 9 (Théorème du rang : forme géométrique) *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, on suppose qu'il existe un supplémentaire S de $\ker(u)$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(u)$.*

Démonstration. On note u_{S} l'application linéaire $\mathrm{S} \to \mathrm{Im}(u), x \mapsto u(x)$. u_{S} est clairement surjective puisqu'on a corestreint à l'image de u. Montrons que u_{S} est injective. Soit $x \in \mathrm{S}$ tel que $u_{\mathrm{S}}(x) = 0$. Alors $u_{\mathrm{S}}(x) = u(x) = 0$, donc $x \in \ker(u)$. Alors $x \in \ker(u) \cap \mathrm{S}$. Or $\mathrm{S} \cap \ker(u) = \{0\}$ puisque S et $\ker(u)$ sont supplémentaires dans E. Ainsi $x = 0$ et u_{S} est injective. Conclusion, l'application u_{S} est un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(u)$.

Théorème 10 (Théorème du rang) *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie. Alors u est de rang fini et*

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, on sait que le sev $\ker(u)$ de E possède un supplémentaire S dans E. D'après ce qui précède, S et $\mathrm{Im}(u)$ sont alors isomorphes. Comme S est de dimension finie, on en déduit que $\mathrm{Im}(u)$ aussi, donc que u est de rang fini égal à $\dim(\mathrm{S})$. Or $\dim(\mathrm{S}) + \dim(\ker(u)) = \dim(\mathrm{E})$, donc $\mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(\mathrm{E})$.

⚠ Attention
C'est la dimension de l'espace de départ qui intervient dans le théorème du rang.

4 Dualité

Définition 8 *Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire. L'ensemble des formes linéaires $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ est appelé dual de E, noté E^*.*

Exemple 20 *L'application $\mathbb{K}[\mathrm{X}] \to \mathbb{K}, \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'(0)$ est une forme linéaire. L'application trace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \mathrm{A} \mapsto \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{A}]_{i,i}$ est une forme linéaire.*

☞ Remarque
La notation $\mathbb{K}^*$ est ambigüe. Dans le cadre des espaces vectoriels, on note $\mathrm{E} \backslash \{0\}$ pour désigner l'ensemble des vecteurs non nuls.

Propriété 25 *Soit $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base de E. Soit $i \in \mathrm{I}$. L'application $\mathrm{E} \to \mathbb{K}, x \mapsto \lambda_i$ avec $x = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i e_i$ l'unique décomposition de x dans la base $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une forme linéaire, appelée i-ième forme coordonnée relativement à cette base, notée e_i^*.*

Démonstration. Il s'agit de l'application linéaire uniquement déterminée par la donnée de la base $(e_j)_{j \in \mathrm{I}}$ et de la famille $(\delta_{i,j})_{j \in \mathrm{J}}$.

☞ Remarque
On peut écrire la décomposition d'un vecteur x de E dans une base $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ sous la forme $x = \sum_{i \in \mathrm{I}} e_i * (x) e_i$. Il est pratique de retenir la définition des formes coordonnées via $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \mathrm{I}^2$.

Théorème 11 *Soit $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base de E. Alors la famille $(e_i^*)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille libre de E.*

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}$ une famille de scalaires à support fini telle que $\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i e_i^* = 0$. Soit $j \in \mathrm{I}$. On évalue la forme linéaire précédente en e_j, ce qui entraîne $0 = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i e_i^*(e_j) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$, et ce pour tout $j \in \mathrm{I}$. Par conséquent, la famille de scalaires est nulle, ce qui prouve la liberté de la famille.

Théorème 12 *On suppose E de dimension finie n, doté d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de la base $(e_1, \dots, e_n)$.*

Démonstration. La liberté a déjà été prouvée dans l'énoncé précédent. Soit $\varphi \in E^*$. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on pose $\lambda_i = \varphi(e_i)$. On vérifie ensuite que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$ en les évaluant sur la base $(e_1,\dots,e_n)$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*\right)(e_j) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j)\\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j}\\ &= \lambda_j\\ &= \varphi(e_j)\end{aligned}$$

Comme ces applications linéaires coïncident sur une base, elles sont égales, ce qui prouve que la famille est génératrice.

⚠ **Attention**

C'est faux pour une base infinie, la famille des formes coordonnées n'est pas génératrice. La forme $\varphi : \sum_{i\in I} x_i e_i \mapsto \sum_{i\in I} x_i$ ne peut s'exprimer comme une somme finie des formes coordonnées.

Exemple 21 *Décrivons le dual de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Je prétends que pour toute forme linéaire φ de E, il existe une matrice B de E telle que*

$$\forall A \in E, \varphi(A) = tr(BA)$$

Vérifions tout d'abord que ces applications sont bien des formes linéaires. Soit $B \in E$. Par bilinéarité du produit matriciel,

$$\forall (A_1,A_2) \in E^2, \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2, B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 BA_1 + \lambda_2 BA_2$$

La linéarité de la trace entraîne alors

$$\forall (A_1,A_2) \in E^2, \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2, tr(B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)) = \lambda_1 tr(BA_1) + \lambda_2 tr(BA_2)$$

Ainsi, $A \mapsto tr(BA)$ est bien linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Réciproquement, soit φ une forme linéaire de E. On évalue φ sur la base canonique de E, notée $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ et on note

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, b_{i,j} = \varphi(E_{j,i})$$

Notons $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq n} \in E$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}tr(BE_{i,j}) &= tr\left(\left(\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n b_{k,l}E_{k,l}\right)E_{i,j}\right)\\ &= tr\left(\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n b_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}\right)\\ &= tr\left(\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n b_{k,l}\delta_{l,i}E_{k,j}\right)\\ &= tr\left(\sum_{k=1}^n b_{k,i}E_{k,j}\right)\\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i}\, tr(E_{k,j})\\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i}\delta_{k,j}\\ &= b_{j,i}\\ &= \varphi(E_{i,j})\end{aligned}$$

Par conséquent, les formes linéaires φ et $A \mapsto tr(BA)$ coïncident sur la base canonique de E, donc sont égales.

Exercice 8 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire le dual de $\mathbb{K}^n$.*

Définition 9 *Soit $\mathrm{H} \subset \mathrm{E}$. On dit que H est un hyperplan de E lorsqu'il existe une forme linéaire* ***non nulle*** *φ telle que $\mathrm{H} = \ker \varphi$.*

Définition 10 *On suppose E de dimension finie, muni d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit H un hyperplan et φ une forme linéaire non nulle telle que $\mathrm{H} = \ker \varphi$. On appelle équation de H dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'écriture*

$$x_1 \varphi(e_1) + \cdots + x_n \varphi(e_n) = 0$$

C'est une façon d'écrire

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1} x_i e_i \in \mathrm{H} \iff \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = 0$$

Propriété 26 *Soit H un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{D}$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{D} \backslash \mathrm{H}$ et $\varphi \in \mathrm{E}^* \backslash \{0\}$. Remarquons tout d'abord que a est non nul, puisque n'appartenant pas à H, donc que a est libre dans D, donc une base de D (car D de dimension 1). Soit $x \in \mathrm{E}$, cherchons une décomposition de x dans $\mathrm{H} + \mathrm{D}$ par analyse-synthèse.
Analyse : soit $(y, z) \in \mathrm{H} \times \mathrm{D}$ tel que $x = y + z$. Alors $\varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(z)$. Or il existe un unique scalaire λ tel que $z = \lambda a$ puisque $z \in \mathrm{D}$. On en déduit que $\varphi(z) = \lambda \varphi(a)$. De plus, $\varphi(a) \neq 0$ puisque a n'appartient pas à H, ainsi $\lambda = \varphi(z)/\varphi(a) = \varphi(x)/\varphi(a)$ et

$$z = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a \quad \text{et} \quad y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$$

Cette phase d'analyse prouve l'unicité.
Synthèse : soit $x \in \mathrm{E}$. On pose $z = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ et $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ puisque $\varphi(a) \neq 0$ comme vu précédemment. Il est clair que $y + z = x$. En outre, $z \in \mathrm{Vect}(a) = \mathrm{D}$. Enfin, $\varphi(y) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \varphi(a) = 0$, donc $y \in \mathrm{H}$.

Propriété 27 *Soit D une droite de E, et H un supplémentaire de D dans E. Alors H est un hyperplan.*

Démonstration. Soit a une base de D (il revient au même de prendre un élément non nul de D). On note $a^* \in \mathrm{D}^*$ la forme linéaire correspondante. Si l'on doit la détailler, on peut écrire pour tout x de D, $x = a^*(x) a$. On note de plus (abusivement) $0 : \mathrm{H} \to \mathrm{R}, h \mapsto 0$ la forme linéaire nulle de H. Comme $\mathrm{H} \oplus \mathrm{D} = \mathrm{E}$, on peut définir la forme linéaire $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ via $\forall x \in \mathrm{D}, \varphi(x) = a * (x)$ et $\forall x \in \mathrm{H}, \varphi(x) = 0$.

- On remarque que $\varphi(a) = 1$, donc que φ est une forme linéaire non nulle.
- Soit $x \in \ker(\varphi)$, alors on note $x = d + h$ son unique décomposition dans $\mathrm{D} \oplus \mathrm{H}$. Alors par linéarité de φ, $0 = \varphi(x) = \varphi(d) + \varphi(h) = \varphi(d)$. Par conséquent, $d = \varphi(d) a = 0$ et $x = h$ appartient à H, donc $\ker(\varphi) \subset \mathrm{H}$. Soit $x \in \mathrm{H}$, alors $\varphi(x) = 0$ par définition de φ, donc $\mathrm{H} \subset \ker(\varphi)$.

Conclusion, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan.

Propriété 28 *On suppose E de dimension finie. Alors H sev de E est un hyperplan ssi $\dim(\mathrm{H}) = \dim(\mathrm{E}) - 1$.*

Démonstration. Si H est de dimension $\dim(\mathrm{E}) - 1$, notons $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H que l'on complète en base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. On reconnaît alors $\mathrm{H} = \ker(e_n *)$. Réciproquement, si H est un hyperplan, on note φ une forme linéaire non nulle telle que $\mathrm{H} = \ker(\varphi)$. Comme E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang, qui donne $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\ker(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{H}) + \mathrm{rg}(\varphi)$. Or comme φ est non nulle, il existe un vecteur x dans E telle que $\varphi(x) \neq 0$. Par conséquent, pour tout λ dans $\mathbb{K}$, $\varphi(\frac{\lambda}{\varphi(x)} x) = \lambda$, donc φ est surjective. En conclusion, $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{H}) + 1$.

Propriété 29 *Soit H un hyperplan et φ une forme linéaire non nulle telle que $\ker \varphi = \mathrm{H}$. Soit $\psi \in \mathrm{E}^*$. Alors $\ker \psi = \mathrm{H} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda \varphi$.*

Démonstration. Sens direct : supposons $\ker \varphi = \ker \psi$. Comme φ est non nulle, il existe un vecteur a dans E tel que $\varphi(a) \neq 0$. Comme $a \notin \ker(\varphi)$, $a \notin \ker(\psi)$, donc $\psi(a)$. Posons alors $\lambda = \psi(a)/\varphi(a)$, ce scalaire est non nul. Vérifions que $\psi = \lambda \varphi$. Pour cela on remarque que $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(a)$ n'est pas inluse dans H, donc supplémentaire avec H. Comme ψ et $\lambda \varphi$ sont linéaires, il suffit de vérifier qu'elles sont égales sur D, puis sur H. Comme a est une base de D, et $\psi(a) = \lambda \varphi(a)$, φ et ψ coïncident sur D. D'autre part, les restrictions de ψ et φ à H sont toutes deux nulles, donc coïncident. Ainsi, $\psi = \lambda \varphi$.
Sens indirect : supposons qu'il existe un scalaire non nul λ tel que $\psi = \lambda \varphi$. Alors $\ker(\varphi) \subset \ker(\psi)$. De plus, $\varphi = \frac{1}{\lambda} \psi$, donc $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$. Ainsi, $\ker(\psi) = \ker(\varphi) = \mathrm{H}$.

Propriété 30 *On suppose* E *de dimension finie* n*. Soit* $m \in \mathbb{N}^*$*. Alors l'intersection de* m *hyperplans est un sev de* E *de dimension au moins* $n-m$*. Réciproquement, tout sous-espace de* E *de dimension* $n-m$ *est l'intersection de* m *hyperplans.*

Démonstration. Notons $H_1, \dots, H_m$ une famille de m hyperplans de E. $H_1 + H_2$ est un sev de E, de dimension n, donc $\dim(H_1 + H_2) \leq n$. Par la formule de Grassmann, on en déduit $\dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2) \leq n$, soit $\dim(H_1 \cap H_2) \geq 2n - 2 - n = n - 2$. Ceci prouve le résultat pour $m = 2$, au rang $m = 1$, il est évident puisque $\dim(H_1) = m - 1$. Supposons que $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_{m-1}) \geq n - (m-1)$, Notons $F = H_1 \cap \dots \cap H_{m-1}$, alors $\dim(F + H_m) \leq n$, donc $\dim(F \cap H_m) \geq \dim(F) + \dim(H_m) - n \geq n - m + 1 + n - 1 - n = n - m$.
Réciproquement, soit F un sev de E de dimension $n - m$. On note $(e_1 \dots, e_{n-m})$ une base de F que l'on complète en $(e_1 \dots, e_n)$ une base de E. On note alors pour tout i dans $[\![n-m+1, n]\!]$, $H_i = \ker(e_i^*)$. Montrons que $F = \bigcap_{i=n-m+1}^{n} H_i$.
Soit $x \in F$, alors il est CL des $(e_i)_{1 \leq i \leq n-m}$.

$$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n-m} \in \mathbb{K}^{n-m}, x = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i e_i$$

Soit $k \in [\![n-m+1, n]\!]$, la linéarité de la k-ième forme linéaire e_k^* entraîne

$$e_k^*(x) = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i e_k^*(e_i) = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i \delta_{i,k} = 0$$

puisque $\forall i \in [\![1, n-m]\!], i < k$, ce qui prouve $x \in H_k$. Ainsi, $F \subset \bigcap_{i=n-m+1}^{n} H_i$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{i=n-m+1}^{n} H_i$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E,

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit $k \in [\![n-m+1, n]\!]$, d'après la définition de la base duale, $\lambda_k = e_k^*(x)$. Comme $x \in H_k = \ker(e_k^*)$, $\lambda_k = 0$. Mais alors

$$x = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-m}) = F$$

Exemple 22 *Soit* $D = \{(t, -2t) | t \in \mathbb{R}\}$*. Démontrer que* D *est un sev de* $\mathbb{R}^2$ *puis le décrire via une équation d'hyperplan ou une forme linéaire non nulle. Soit* $P = \{(u+v, u-v, 2u+3v) | (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$*. Montrer qu'il s'agit d'un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$*. Déterminer une forme linéaire* φ *non nulle telle que* $P = \ker(\varphi)$*. Soit* $D' = \{(t, -t, 2t) | t \in \mathbb{R}\}$ *décrire* D′ *comme une intersection de deux hyperplans de* $\mathbb{R}^3$*.*

5 Géométrie affine

On ne traite pas le cas général car la notion d'espace affine nécessite trop de formalisme supplémentaire (notions d'actions de groupes libres et transitives).

Définition 11 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On appelle sous-espace affine de* E*, toute partie* $\mathcal{F}$ *de* E *telle qu'il existe un élément* x *de* E *et un sous-espace vectoriel* F *de* E *vérifiant*

$$\mathcal{F} = \{x + v | v \in F\} = x + F$$

Notation
On change légèrement les notations pour montrer qu'on raisonne sur une structure différente. Les éléments d'un sous-espace affine sont appelés points, notés avec des lettres latines majuscule, A, B, C*, etc. Les éléments du sous-espace vectoriel* F *sous-jacent sont appelés vecteurs et notés avec des flèches* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$*, etc.*

Propriété 31 *Soit* $\mathcal{F}$ *un sous-espace affine de* E*. Alors il existe un unique sous-espace vectoriel* F *de* E *tel que*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathcal{F} = A + F$$

Ce sev de E *est appelé direction de* $\mathcal{F}$*, noté* $\overrightarrow{\mathcal{F}}$*.*

Démonstration. Soit A un point de $\mathcal{F}$, F et G deux sev de E tels que $\mathcal{F}$ = A+F = A+G. Soit $\overrightarrow{u} \in$ F, alors A+$\overrightarrow{u} \in \mathcal{F}$ = A+G, donc il existe $\overrightarrow{v}$ dans G tel que A + $\overrightarrow{u}$ = A + $\overrightarrow{v}$. On en déduit que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \in$ G. Ainsi, F ⊂ G. On procède de même pour l'autre inclusion et F = G. Ceci prouve l'unicité.
Soit B un point de $\mathcal{F}$, alors il existe $\overrightarrow{u}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tel que B = A + $\overrightarrow{u}$. Mais alors pour tout C de B + $\overrightarrow{\mathcal{F}}$, il existe $\overrightarrow{v}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tel que C = B + $\overrightarrow{v}$. On en déduit C = A + $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ puisque $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est un sev de E. Ainsi, B + $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset$ A + $\overrightarrow{\mathcal{F}}$. On montre de même que A + $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset$ B + $\overrightarrow{\mathcal{F}}$, d'où l'égalité $\forall \mathrm{B} \in \mathcal{F}, \mathcal{F} = \mathrm{B} + \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Exemple 23 *Droites affines, plans affines, hyperplans affines.* $\{(1+t, 2-3t, -2t) | t \in \mathbb{R}\}$ *est une droite affine de* $\mathbb{R}^3$ *de direction* $\mathrm{Vect}(1,-3,-2)$ *passant par* $\mathrm{A} = (1,2,0)$. *L'ensemble* $\{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] | \mathrm{P} + \mathrm{P}' = \mathrm{X}\}$ *est un hyperplan affine de* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *de direction* $\ker(\mathrm{id} + \mathrm{D})$ *passant par* $\mathrm{A} = \mathrm{X} - 1$.

Propriété 32 *Soit* $\mathcal{F}$ *un sous-espace affine de* E. *Alors*

$$\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{\mathrm{B} - \mathrm{A} | (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{F}^2\}$$

Démonstration. Soit C un point de $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F} = \mathrm{C} + \overrightarrow{\mathcal{F}}$. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{F}^2$. Il existe deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tels que A = C + $\overrightarrow{u}$ et B = C + $\overrightarrow{v}$. Alors B − A = $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ puisque ce dernier est un sev de E. Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$, alors $\overrightarrow{v} + \mathrm{C} \in \mathcal{F}$. Donc il existe un point A de $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{v}$ = A − C.

Notation
On note parfois (souvent (quand ça nous arrange)) le vecteur B − A *sous la forme* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Propriété 33 *Soit* $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille de sea de* E. *Alors* $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{F}_i$ *est soit vide, soit un sea de* E, *de direction* $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \overrightarrow{\mathcal{F}_i}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{F}_i$. S'il est non vide, on dispose de A ∈ $\mathcal{F}$. On sait déjà que $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \overrightarrow{\mathcal{F}_i}$ est un sev de E comme intersection de sev de E. On le note F. Montrons à présent que $\mathcal{F}$ = A + F. On a vu précédemment que la direction de $\mathcal{F}$ est l'ensemble des différences de points $\mathcal{F}$, ce qui donne le résultat attendu.

☞ **Remarque**
Comme on dispose de la stabilité par intersection quelconque, on peut définir la notion de sous-espace affine engendré par une partie.

Propriété 34 *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $a \in \mathrm{F}$. *L'ensemble*

$$u^{-1}(\{a\}) = \{x \in \mathrm{E} | u(x) = a\}$$

est soit vide, soit un sous-espace affine de E, *de direction* $\ker u$.

Démonstration. Premier cas : $a \notin \mathrm{Im}(u)$. Alors, cet ensemble est vide.
Deuxième cas : $a \in \mathrm{Im}(u)$. On note $b \in \mathrm{E}$ tel que $u(b) = a$. Montrons que alors que $u^{-1}(\{a\}) = b + \ker(u)$. Soit $x \in \mathrm{E}$, on a les équivalences

$$x \in u^{-1}(\{a\}) \iff u(x) = a \iff u(x) = u(b) \iff u(x-b) = 0 \iff x - b \in \ker(u) \iff x \in b + \ker(u)$$

Exemple 24
— *Dans* $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, *on note* $\mathrm{S} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ *l'application linéaire de décalage (S pour « shift » en anglais) des suites numériques. Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ *et* $u = \mathrm{S}^2 + a\mathrm{S} + b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.. *L'ensemble*

$$\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c\}$$

est l'ensemble $u^{-1}(\{c\})$ *en identifiant le scalaire c et la suite constante égale à c. Il est vide ou un sous-espace affine de direction* $\ker(v)$ *l'ensemble des solutions homogènes.*
— *Dans* $\mathrm{E} = \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *on note* D *l'opérateur de dérivation. Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $v = \mathrm{D}^2 + a\mathrm{D} + b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. *Soit* $g \in \mathrm{E}$, *l'ensemble*

$$\{f \in \mathrm{E} | \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + a f'(x) + b f(x) = g(x)\}$$

est l'ensemble $v^{-1}(\{g\})$, *soit vide soit un sous-espace affine de direction* $\ker(v)$, *l'ensemble des solutions homogènes.*

Définition 12 *On suppose que* E *est de dimension finie de base* $(e_1, \dots, e_n)$*. Soit* $\mathcal{H}$ *un hyperplan affine (i.e un sous-espace affine dont la direction est un hyperplan de* E*) et* $\mathrm{A} \in \mathcal{H}$ *telle que* $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$*, et* φ *une forme linéaire non nulle telle que* $\overrightarrow{\mathcal{H}} = \ker(\varphi)$*. L'écriture*

$$x_1 \varphi(e_1) + \cdots + x_n \varphi(e_n) = a_1 \varphi(e_1) + \dots a_n \varphi(e_n)$$

est appelée équation affine de l'hyperplan affine $\mathcal{H}$*. Elle traduit l'équivalence*

$$\forall x \in \mathrm{E}, x \in \mathcal{H} \iff \varphi(x) = \varphi(\mathrm{A})$$

à l'aide de la décomposition dans la base $(e_1, \dots, e_n)$*.*