Problème 1 : Cercles de Chasles d'une ellipse.

1. Soit M un point d'affixe $z = x + iy$. Alors $(MF + MF')(MF - MF') = MF^2 - MF'^2$. Ainsi, comme c est réel, on a les égalités

$$(MF + MF')(MF - MF') = |z - c|^2 - |z + c|^2 = (x - c)^2 + y^2 - (x + c)^2 - y^2 = -4cx$$

Premier cas : Si $MF - MF' = 0$, alors M appartient à la médiatrice de $[FF']$, i.e la droite d'équation $x = 0$. Dans ce cas particulier, $MF+MF' = \sqrt{c^2 + y^2}+\sqrt{c^2 + y^2} = 2\sqrt{c^2 + y^2}$. Alors $MF+MF' = 2a \iff \sqrt{c^2 + y^2} = a \iff c^2+y^2 = a^2$ puisque c^2+y^2 et a sont des réels positifs. Ainsi $MF+MF' = 2a \iff y^2 = a^2 - c^2 = b^2 \iff \dfrac{0^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \iff M \in \mathcal{E}$.

Deuxième cas : Si $MF - MF' \neq 0$. Alors, d'après le calcul de départ

$$MF + MF' = 2a \iff 2a(MF - MF') = -4cx \iff MF - MF' = \frac{-4cx}{2a} = -2cx/a \iff M \in \mathcal{E}$$

d'après le résultat admis en préambule.

2. On sait d'après le cours qu'on peut toujours extraire des racines carrées de complexes. Ainsi, le complexe $c^2 - z^2$ possède toujours des racines carrées, i.e il existe un complexe z' tel que $z'^2 = c^2 - z^2$, soit $z'^2 + z^2 = c^2$. Le point M' du plan d'affixe z' satisfait alors la propriété attendue.

3. La définition du point M' implique $z'^2 = c^2 - z^2 = (c - z)(c + z)$. On a alors $|z'^2| = |(c - z)(c + z)|$, soit encore $|z'|^2 = |c - z||c + z|$. On en déduit que $OM'^2 = MF \times MF'$.

4. On a toujours, d'après ce qui précède $z'^2 = (c - z)(c + z)$. Comme ces complexes sont nuls (l'ensemble $\mathcal{E}$ ne contient ni O, ni F, ni F'), on peut considérer leurs arguments dans cette égalité, ce qui implique

$$2\arg(z') \equiv \arg(c - z) + \arg(c + z)[2\pi]$$

Soit encore

$$2\arg(z') \equiv \arg(c - z) + \arg(-c - z) + \pi[2\pi]$$

ou bien

$$\arg(z') \equiv \frac{\arg(c - z) + \arg(-c - z)}{2} + \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Or les points d'affixe s de la bissectrice intérieure de $[MF)$ et $[MF')$ vérifient

$$\arg(s) \equiv \frac{\arg(c - z) + \arg(-c - z)}{2}[\pi]$$

soit

$$\arg(z') \equiv \arg(s) + \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Cela implique bien que (OM') est perpendiculaire à la bissectrice intérieure de $[MF)$ et $[MF')$.

5. La définition du module implique $|z + c|^2 = (z + c)(\overline{z} + \overline{c}) = |z|^2 + c(z + \overline{z}) + c^2$ car c est réel. De même, $|z - c|^2 = (z - c)(\overline{z} - \overline{c}) = |z|^2 - c(z + \overline{z}) + c^2$. L'addition de ces deux égalités implique

$$|z + c|^2 + |z - c|^2 = 2|z|^2 + 2c^2$$

En outre,

$$(|z - c| + |z + c|)^2 = |z - c|^2 + |z + c|^2 + 2|z - c||z + c|$$

D'après ce qui précède, $|z-c|^2+|z+c|^2 = 2|z|^2+2c^2$. De plus, d'après la première question, $|z-c||z+c| = |z'|^2$. Donc,

$$(|z-c|+|z+c|)^2 = 2|z|^2+2|z'|^2+2c^2$$

Cette dernière quantité est symétrique en z et z'. De plus, la définition $z^2+z'^2 = c^2$ est symétrique en z et z'. Donc, on a également

$$(|z'-c|+|z'+c|)^2 = 2|z|^2+2|z'|^2+2c^2$$

Ainsi,

$$(|z'-c|+|z'+c|)^2 = (|z-c|+|z+c|)^2$$

Comme ce sont des quantités réelles positives, on en déduit

$$|z'-c|+|z'+c| = |z-c|+|z+c|$$

Cela se traduit géométriquement par

$$M'F+M'F' = MF+MF'$$

Or, d'après la caractérisation de $\mathcal{E}$ prouvée en première question, $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} | MF+MF' = 2a\}$. Comme $M \in \mathcal{E}$, on en déduit que $M'F+M'F' = 2a$, donc que M' appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

6. D'après ce qui précède, on sait que M' appartient à $\mathcal{E}$ et à la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de $[MF)$ et $[MF')$ passant par O. Cette dernière droite passe par O, donc possède deux points d'intersection avec l'ensemble $\mathcal{E}$. On peut choisir M' comme l'une de ces deux intersections.
7. On assemble le produit $nn' = (z+iz')(z-iz') = z^2+z'^2$. Or d'après la définition de z', $z^2+z'^2 = c^2$. Donc $nn' = c^2$. Le carré du module de n vaut

$$|n|^2 = n\overline{n} = (z+iz')(\overline{z}-i\overline{z'}) = |z|^2+|z'|^2+i\overline{z}z'-iz\overline{z'}$$

De même,

$$|n'|^2 = n'\overline{n'} = (z-iz')(\overline{z}+i\overline{z'}) = |z|^2+|z'|^2-i\overline{z}z'+iz\overline{z'}$$

On en déduit que

$$(|n|+|n'|)^2 = |n|^2+|n'|^2+2|nn'| = 2|z|^2+2|z'|^2+2|c|^2$$

Or d'après la deuxième égalité démontrée en II.5, $2|z|^2+2|z'|^2+2|c|^2 = (|z-c|+|z+c|)^2$. Donc $(|n|+|n'|)^2 = (|z-c|+|z+c|)^2$. Comme ce sont des quantités réelles positives, on en déduit

$$|n|+|n'| = |z-c|+|z+c|$$

Cela se traduit géométriquement par

$$ON+ON' = MF+MF'$$

8. On identifie parties réelles et imaginaires dans l'égalité $z^2+z'^2 = c^2$, ce qui donne

$$x^2-y^2+x'^2-y'^2 = c^2 \quad \text{et} \quad xy+x'y' = 0$$

Or M et M' sont dans $\mathcal{E}$, ce qui implique

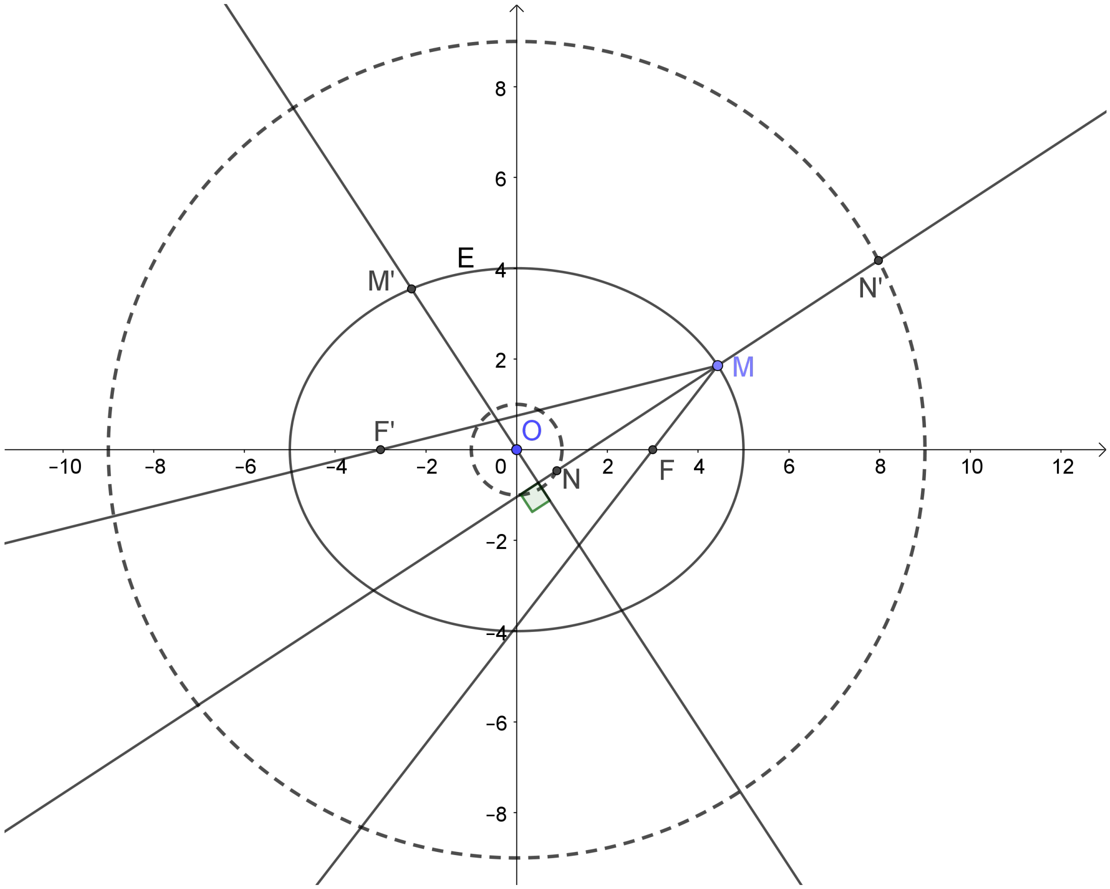
$$y^2 = b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{et} \quad y'^2 = b^2-\frac{b^2}{a^2}x'^2$$

Cela implique dans l'égalité des parties réelles

$$x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-b^2+x'^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-b^2 = c^2$$

Soit encore
$$(x^2+x'^2)(a^2+b^2)=a^2(c^2+2b^2)=a^2(a^2+b^2)$$
On en déduit donc $x^2+x'^2=a^2$. Il vient alors
$$a^2-y^2-y'^2=c^2$$
Soit encore
$$y^2+y'^2=a^2-c^2=b^2$$

9. D'après la caractérisation de $\mathcal{E}$ et les résultats en II.7, on a $ON+ON'=2a$ et $ON\times ON'=c^2$. On en déduit que
$$(ON-ON')^2=(ON+ON')^2-4ON\times ON'=4a^2-4c^2=4b^2$$
Ceci implique que $ON-ON'=\pm 2b$. Comme les définitions de N et N' sont symétriques à l'échange de signe près, on peut choisir $ON-ON'=2b$. Avec ce choix, on obtient
$$ON=a+b \quad \text{et} \quad ON'=a-b$$
Ainsi, le lieu des points N et N' est inclus dans deux cercles : le cercle de centre O et de rayon $a+b$, et le cercle de centre O et de rayon $a-b$.
Réciproquement, soit n un complexe de module $a-b$. Alors la relation la relation précédente $n=z+iz'$ amène à considérer $(n-z)^2=-z'^2=z^2-c^2$, soit encore $n^2-2nz=-c^2$. On définit donc $z=(n^2+c^2)/(2n)$. Alors si l'on note $n=\alpha+i\beta$, et $z=x+iy$, on identifie parties réelle et imaginaire, ce qui donne
$$x=\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+c^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)} \quad \text{et} \quad y=\frac{\beta(\alpha^2+\beta^2-c^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$
Mais alors, comme $\alpha^2+\beta^2=(a-b)^2$ et $a^2=b^2+c^2$,
$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}&=\frac{1}{4(a-b)^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}((a-b)^2+c^2)^2+\frac{\beta^2}{b^2}((a-b)^2-c^2)^2\right)\\&=\frac{1}{4(a-b)^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}(2a^2-2ab)^2+\frac{\beta^2}{b^2}(2b^2-2ab)^2\right]\\&=\frac{4(a-b)^2}{4(a-b)^4}[\alpha^2+\beta^2]\\&=1\end{aligned}$$
Donc le point M d'affixe z est dans l'ensemble $\mathcal{E}$. Le même raisonnement avec un complexe de module $a+b$ et la même définition $z=(n^2+c^2)/(2n)$ fournit également un point dans $\mathcal{E}$. On a ainsi l'inclusion réciproque entre les cercles de rayon $a+b$ et $a-b$ dans le lieu des points N et N' de l'énoncé.

10. 

Problème 2 : Transformations de Moebius.

1. Composition d'homographies
   (a) Soit $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$. Si $z' = \omega$, son unique antécédent est ω puisque $s(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ ne contient pas ω. Si $z' \in \mathbb{C}$, alors un élément z de $\widehat{C}$ vérifie $s(z) = z'$ si et seulement si $z \in \mathbb{C}$ et $z' = (z-\beta)/\alpha$ puisque $\alpha \neq 0$. Donc tout élément de $\widehat{\mathbb{C}}$ a un unique antécédent par s et s est bijective. Sa réciproque est donnée par

$$s^{-1}(\omega) = \omega \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C}, s^{-1}(z) = \frac{z-\beta}{\alpha}$$

   (b) — Posons $E = \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $F = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Soit $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. $h(z) = \frac{a}{c}$ ne se réalise que pour $z = \omega$. En effet, $h(z) - \frac{a}{c} = \frac{ad-bc}{c(cz+d)} \neq 0$. De plus, h induit une bijection h_0 de E sur F. En effet, tout complexe distinct de $\frac{a}{c}$ a un unique antécédent par h_0, à savoir $\zeta = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

   — $z = \frac{a}{c}$ a, par définition, pour unique antécédent ω et $z = \omega$ a pour unique antécédent $\frac{-d}{c}$.

   — Par recollement, l'application g de $\widehat{\mathbb{C}}$ vers $\widehat{\mathbb{C}}$, définie par

$$z \mapsto g(z) = \begin{cases} \frac{-d}{c} & \text{si } z = \omega \\ \omega & \text{si } z = \frac{a}{c} \\ \frac{dz-b}{-cz+a} & \text{sinon} \end{cases}$$

   définit la bijection réciproque de h.

(c) — Sauf pour les cas particuliers, que nous verrons ci-dessous, soit, $h = h_2 \circ h_1$ avec $h_1(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ et $h_2(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{\alpha \frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma \frac{az+b}{cz+d} + \delta} \\ &= \frac{(\alpha a+\beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a+\delta c)z+\gamma b+\delta d} \\ &= \frac{Az+B}{Cz+D} \end{aligned}$$

$AD - BC = (\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma ab + \delta c) = (ad-bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$.
Si $C = 0$, on obtient une similitude.
Si h_1 ou h_2 est du type similitude le résultat reste acquis.On obtient une fonction du type h ou s.

— Si $z = -\dfrac{d}{c}$ alors $h_1(z) = \omega$ et $h_2 \circ h_1(z) = \dfrac{\alpha}{\gamma} = h\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \dfrac{\alpha(ad-bc)}{\gamma(ad-bc)}$.

— si $z = \omega$ alors $h_1(z) = \dfrac{a}{c}$ et $h_2 \circ h_1(z) = \dfrac{\alpha a+\beta c}{\gamma a+\delta c} = \dfrac{A}{C} = h(\omega)$

— Si $h_1(z) = -\dfrac{\delta}{\gamma}$ alors $h_2 \circ h_1(z) = \omega$. Or $h_1(z) = -\dfrac{\delta}{\gamma}$ si et seulement si $z = -\dfrac{\gamma b+\delta d}{\gamma a+\delta c}$ donc par définition des homographies, on a aussi $h(z) = \omega$.

— Cas des similitudes. Soit $s_1 : z \mapsto az+b$ et $s_2 : z \mapsto \alpha z+\beta$ lorsque $z \neq \omega$. Notons $s = s_2 \circ s_1$
On a $s_2 \circ s_1(z) = \alpha az + \alpha b + \beta$ et $\alpha a \neq 0$.
Si $z = \omega$, $s_1(z) = \omega$ et $s_2(\omega) = \omega = s(\omega)$ car $\alpha a \neq 0$.

(d) — Cas des similitudes.
On a $s \circ s(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$,(ω vérifiant l'égalité), si, et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $(a^2-1)z = -b(a+1)$ ce qui nous donne deux cas possibles, $a = 1$, $b = 0$ ou $a = -1$. Le premier cas donne l'application identité de $\mathbb{C}$, $z \mapsto z$; le second cas donne l'application $z \mapsto -z+b$ où $b \in \mathbb{C}$, c'est une symétrie centrale.

— Cas des homographies non dégénérées.
Si $h \circ h$ est involutive alors $-\dfrac{d}{c} \mapsto \omega \mapsto \dfrac{a}{c}$, donc $a+d = 0$ car $c \neq 0$ pour une homographie non dégénérée. On obtient ainsi, $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz-a}$, $z \neq \dfrac{a}{c}$.
Réciproquement, on a $\dfrac{a}{c} \mapsto \omega \mapsto \dfrac{a}{c}$, puis $\omega \mapsto \dfrac{c}{a} \mapsto \omega$ et enfin, pour les autres complexes, sachant que $ad - bc = -a^2 - bc \neq 0$ et $c \neq 0$

$$\begin{aligned} h \circ h(z) &= \frac{a \frac{az+b}{cz-a} + b}{c \frac{az+b}{cz-a} - a} \\ &= \frac{a^2 z + ab + bcz - ab}{acz + bc - acz + a^2} \\ &= \frac{(a^2+bc)z}{a^2+bc} = z. \end{aligned}$$

— Les seules seules homographies non dégénérées involutives sont celles où $a+d = 0$.

(e) — Cas des similitudes.
Le point ω est point fixe. Soit $z \in \mathbb{C}$, l'équation $az+b = z$ revient à $(a-1)z = -b$, si $a \neq 1$, on a le point fixe $z_0 = \dfrac{-b}{a-1}$. Ce qui correspond aux homothéties ou aux rotations de centre le point z_0. $a = 1$ amène $b = 0$ or on a exclu l'identité.

— Cas des homographies non dégénérées.
Les points particuliers n'entrent pas en compte car ils ne sont pas fixes. Soit z un complexe distinct des cas particuliers, l'équation $h(z) = z$ est équivalente à $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ qui est une équation de degré 2 car $c \neq 0$. Elle a une ou deux solutions dans $\mathbb{C}$ d'après le cours.

(f) L'application φ est une homographie non dégénérée car $1 \neq 0$ et $w_1 \neq w_2$. D'après la question 2, elle est bijective. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{w_1\}$, $\varphi^{-1}(z) = \dfrac{w_1 z - w_2}{z-1}$ avec $1 \to \omega$ et $\omega \to w_1$.
Puis :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ distinct de $\dfrac{-d}{c}$, de 1 et de w_1 , on a :

$$\begin{aligned}\varphi(h(z)) &= \frac{h(z)-h(w_2)}{h(z)-h(w_1)}\\ &= \frac{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw_2+b}{cw_2+d}}{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw_1+b}{cw_1+d}}\\ &= \frac{(z-w_2)(ad-bc)(cz-d)(cw_1+d)}{(z-w_1)(ad-bc)(cz-d)(cw_2+d)}\\ &= \frac{cw_1+d}{cw_2+d}\varphi(z)\end{aligned}$$

Donc, sachant que φ est bijective,

$$\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{cw_1+d}{cw_2+d} z$$

$\dfrac{cw_1+d}{cw_2+d} \neq 0$ car on sait que $w_1 \neq w_2 \neq \dfrac{-d}{c}$.
On vérifie que ω a pour image ω par $\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$: $\omega \to w_1 \to w_1 \to \omega$.
En outre $z = 1 \to \omega \to \dfrac{a}{c} \to \varphi\left(\dfrac{a}{c}\right)$ qui existe car $\dfrac{a}{c} \neq w_1$ parce que $ad - bc \neq 0$.
Finalement ψ est une similitude car $\dfrac{cw_1+d}{cw_2+d} \neq 1$, et en particulier, ψ est une rotation ou une homothétie de centre le point d'affixe 0, dont les points fixes sont 0 et ω

(g) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{w_0\}$, $\varphi^{-1}(z) = \dfrac{w_0 z + 1}{z}$ et $0 \to \omega$ et $\omega \to w_0$. Puis :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ distincts de 0 et w_0, on a :

$$\begin{aligned}\varphi \circ h(z) &= \frac{1}{h(z)-h(w_0)}\\ &= \frac{(cz+d)(cw_0+d)}{(z-w_0)((ad-bc)}\end{aligned}$$

Sachant que $w_0 = \dfrac{a-d}{2c}$ et $(a-d)^2 + 4bc = 0$, donc $ad - bc = \dfrac{1}{4}(a+d)^2 \neq 0$, et $a + d \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} &= \frac{(cz+d)2(a+d)}{(z-w_0)((a+d)^2}\\ &= \frac{2(cz+d)}{(z-w_0)(a+d)}\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\varphi\circ h(z)-\varphi(z) &= \frac{1}{z-w_0}\left(\frac{2cz+2d-a-d}{a+d}\right)\\ &= \frac{1}{z-w_0}\frac{2c}{a+d}\left(z-\frac{a-d}{2c}\right)\\ &= \frac{2c}{a+d}\end{aligned}$$

Il reste à voir le cas où $z=w_0$, on a la suite d'images $w_0\to\omega\to\dfrac{a}{c}\to\varphi\left(\dfrac{a}{c}\right)$ qui existe car $\dfrac{a}{c}\neq w_0=\dfrac{a-d}{c}$ sinon $a+d=0$, ce qui est impossible comme on l'a vu plus haut.
Par suite, sachant que φ est bijective, on obtient :

$$\varphi\circ h\circ\varphi^{-1}(z)=z+\frac{2c}{a+d}$$

et ψ est une translation. Le seul point fixe est ω.

2. Image d'un cycle par une homographie.
   (a) — $\Phi=0$ correspond à $z_4=z_1$. $\Phi=\omega$ correspond à $z_4=z_2$ et enfin $\Phi=1$ qui donne $(z_2-z_1)(z_3-z_4)=0$, correspond à $z_4=z_3$. Dans ces cas on a bien le résultat. On exclut ces cas dans la suite.
   — Si z_1,z_2,z_3 sont alignés, la relation est vérifiée pour $z_4=\omega$ sinon, si $z_4\in\mathbb{C}$, sachant que $\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\in\mathbb{R}$ et $z_2\neq z_1$, on a $\dfrac{z_4-z_2}{z_4-z_1}\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ ce qui caractérise la droite complétée (z_1z_2).
   — Si z_1,z_2,z_3 ne sont pas alignés, ils déterminent un cercle. Son équation $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ s'écrit en complexes $z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+c=0$ où $z=x+\mathrm{i}y$, $\alpha=a+\mathrm{i}b$, où x,y,a,b sont des réels. Le rayon ρ est déterminé par $\rho^2=\alpha\overline{\alpha}-c>0$.
   Les points z_i, $1\leq i\leq 4$ sur le cercle vérifient $z_i=\dfrac{\alpha\overline{z_i}-c}{\overline{z_i}-\overline{\alpha}}$. Par suite $z_i-z_j=\dfrac{(\overline{z_i}-\overline{z_j})(c-\overline{\alpha}\alpha)}{(\overline{z_i}-\overline{\alpha})(\overline{z_j}-\overline{\alpha})}$.
   Un calcul facile montre que $\Phi=\dfrac{\overline{z_3}-\overline{z_2}}{\overline{z_3}-\overline{z_1}}\div\dfrac{\overline{z_4}-\overline{z_2}}{\overline{z_4}-\overline{z_1}}$
   Ainsi $\Phi=\overline{\Phi}$ donc Φ est réel.
   — Réciproquement, supposons Φ réel. Si z_4 n'est pas sur le cercle déterminé par z_1,z_2,z_3, il existe d tel que $z_4=\dfrac{\alpha\overline{z_4}-d}{\overline{z_4}-\overline{\alpha}}$. On a $\Phi-\overline{\Phi}=0$ soit :

$$\frac{z_3-z_2}{z_3-z-1}\times\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{\overline{\overline{z_3}-\overline{z_2}}}{\overline{\overline{z_3}-\overline{z_1}}}\times\frac{\overline{\overline{z_4}-\overline{z_1}}}{\overline{\overline{z_4}-\overline{z_2}}}.$$

   On se souvient que $z_i-z_j==\dfrac{(\overline{z_i}-\overline{z_j})(c-\overline{\alpha}\alpha)}{(\overline{z_i}-\overline{\alpha})(\overline{z_j}-\overline{\alpha})}$ pour i,j distincts entre 1 et 3 dans ce cas là.
   D'autre part : $z_4-z_i=\dfrac{(c-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_4}-(d-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_i}}{(\overline{z_4}-\overline{\alpha})(\overline{z_i}-\overline{\alpha})}$ pour $i=1,2$.
   Par suite :

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\frac{(\overline{z_3}-\overline{z_2})(c-\overline{\alpha}\alpha)}{(\overline{z_3}-\overline{\alpha})(\overline{z_2}-\overline{\alpha})}}{\frac{(\overline{z_3}-\overline{z_1})(c-\overline{\alpha}\alpha)}{(\overline{z_3}-\overline{\alpha})(\overline{z_1}-\overline{\alpha})}}\times\frac{\frac{(c-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_4}-(d-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_1}}{(\overline{z_4}-\overline{\alpha})(\overline{z_1}-\overline{\alpha})}}{\frac{(c-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_4}-(d-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_2}}{(\overline{z_4}-\overline{\alpha})(\overline{z_2}-\overline{\alpha})}}\\ &= \frac{\overline{z_3}-\overline{z_2}}{\overline{z_3}-\overline{z_1}}\times\frac{(c-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_4}-(d-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_1}}{(c-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_4}-(d-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_2}}\end{aligned}$$

   En simplifiant l'égalité $\Phi=\overline{\Phi}$ on obtient :

$$\frac{(c-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_4}-(d-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_1}}{(c-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_4}-(d-\overline{\alpha}\alpha)\overline{z_2}}=\frac{\overline{z_4}-\overline{z_1}}{\overline{z_4}-\overline{z_2}}.$$

On développe et on réduit pour obtenir :

$$(\overline{z_2}-\overline{z_1})\overline{z_4}(d-c)=0$$

donc $d=c$ et les points sont cocycliques soit $z_4=0$ est le cercle passe par l'origine car $c=0$ puisque $z_4=\dfrac{\alpha\overline{z_4}-c}{\overline{z_4}-\overline{\alpha}}$.

(b) On prend $z \neq -\dfrac{d}{c}$.

On a $Z_i - Z_j = (z_i - z_j)\dfrac{ad-bc}{(cz_i+d)(cz_j+d}$ par suite la relation en découle.

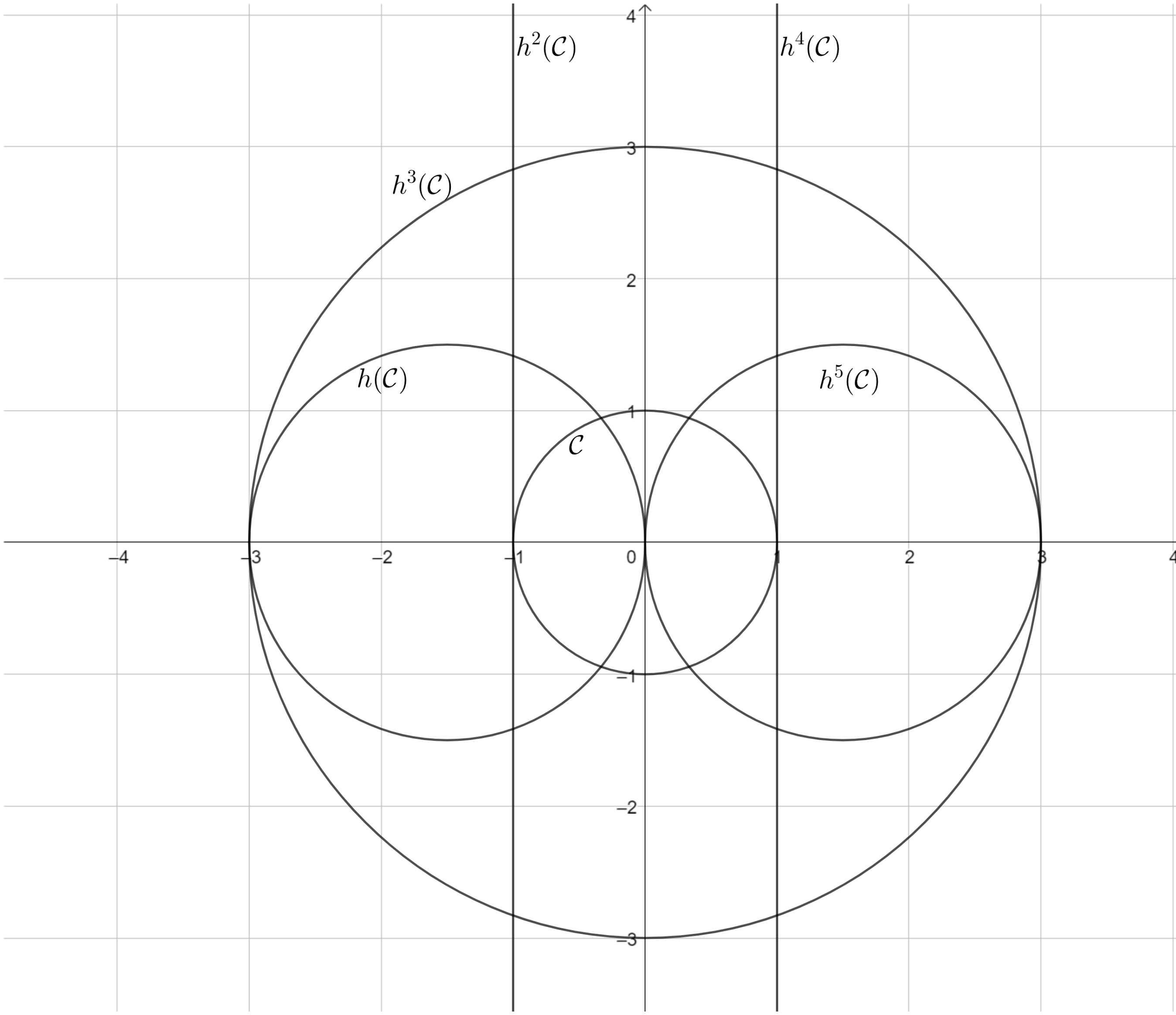
Par suite si $\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \div \dfrac{z_4-z_2}{z_4-z_1} \in \mathbb{R}$, il en est de même pour $\dfrac{Z_3-Z_2}{Z_3-Z_1} \div \dfrac{Z_4-Z_2}{Z_4-Z_1}$. Comme h est bijective tout le cycle est obtenu.

Si $\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \div \dfrac{z_4-z_2}{z_4-z_1} = \omega$ alors $z_4 = z_2$ et il en est de même pour Z_4 et Z_2 car h est une bijection.

(c) Un cycle étant défini par trois points distincts, on retrouve le le cercle de centre O et de rayon 1 après six compositions :

$$\begin{cases} 1 \to 0 \to -1 \to -3 \to \omega \to 3 \to 1 \\ \mathrm{i} \to -\dfrac{3}{5}+\mathrm{i}\dfrac{6}{5} \to -1+2\mathrm{i} \to 3\mathrm{i} \to 1+2\mathrm{i} \to \dfrac{3}{5}+\mathrm{i}\dfrac{6}{5} \to \mathrm{i} \\ -1 \to -3 \to \omega \to 3 \to 1 \to 0 \to -1 \end{cases}$$

Les différentes images sont représentées sur la figure suivante :



3. Homographies laissant stable une partie une plan

   (a) i. Soit t un réel. Alors le complexe e^{it} est de module 1, donc $|f(e^{it})| = 1$. En particulier $-d/c$ n'est pas de module 1 car $\omega \notin \mathbb{U}$. Ainsi, $|ae^{it}+b| = |ce^{it}+d|$. On calcule alors classiquement

$$|ae^{it}+b|^2 = |ae^{it}|^2 + |b|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{ae^{it}}b) = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{a}be^{-it})$$

De même, on exprime

$$|ce^{it}+d|^2 = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{c}de^{-it})$$

Ainsi

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{a}be^{-it}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{c}de^{-it})$$

   ii. Posons $\alpha = |a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2$ et $\beta = \overline{a}b-\overline{c}d$. La question précédente montre par linéarité de la partie réelle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha + \mathfrak{Re}(\beta e^{-it}) = 0$$

Si β est non nul, alors en notant u un argument de β, et en appliquant ce qui précède au réel $u - \pi/2$, on obtient

$$\alpha + \mathfrak{Re}(|\beta|e^{iu}e^{-iu+i\pi/2}) = \alpha + |\beta|\mathfrak{Re}(i) = \alpha = 0$$

Mais alors, on applique l'égalité précédente pour $t = u$, ce qui entraîne

$$0 + \mathfrak{Re}(|\beta| e^{iu} e^{-iu}) = |\beta| = 0$$

Par conséquent, $\beta = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $\beta = 0$ et α est également nul. En conclusion,

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \quad \text{et} \quad \overline{a}b = \overline{c}d$$

iii. Si $a = 0$, alors $\overline{c}d = 0$ et $\overline{c} = 0$ ou $d = 0$, soit $c = 0$ ou $d = 0$. Comme $ad - bc = -bc \neq 0$, c ne peut être nul. On en conclut que $d = 0$, puis que $|b| = |c|$, donc que b est non nul. On note alors s un argument de b/c et on en déduit que f est de la forme

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, f(z) = e^{is}\frac{1}{z}, \quad \text{et} \quad f(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = \omega$$

iv. Si a est non nul, alors $\overline{a}$ est non nul et on a $b = \dfrac{\overline{c}}{\overline{a}}d$. On en déduit que

$$|a|^2 + \left|\frac{\overline{c}}{\overline{a}}d\right|^2 = |a|^2 + \frac{|c|^2}{|a|^2}|d|^2 = |c|^2 + |d|^2$$

Ainsi,

$$|a|^4 + |c|^2|d|^2 - |a|^2|c|^2 + |a|^2|d|^2 = 0$$

On reconnaît alors la factorisation

$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$$

v. La question précédente implique que $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$ puisqu'il s'agit de réels positifs. Dans le cas où $|a| = |c|$, on a alors $|\overline{a}b| = |\overline{c}d|$, donc puisque a est non nul, $|b| = |d|$. On a de plus, b et d non nuls, sinon $ad - bc$ est nul. On note alors $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des arguments respectifs de a, b, c, d. L'égalité $\overline{a}b = \overline{c}d$ entraîne alors, tous modules non nuls,

$$\beta - \alpha \equiv \delta - \gamma [2\pi]$$

soit encore

$$\alpha + \gamma \equiv \beta + \gamma [2\pi]$$

Mais alors $ad = bc$, ce qui est contradictoire. Ainsi, $|a| \neq |c|$ et on en déduit que $|a| = |d|$. L'égalité sur les modules donne alors $|b| = |c|$ et celle comportant les conjugaisons implique

$$\beta - \alpha \equiv \delta - \gamma [2\pi]$$

comme précédemment dans le cas b non nul. On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-d/c\}, f(z) = \frac{|a|e^{i\alpha}z + |b|e^{i\beta}}{|c|e^{i\gamma} + |d|e^{i\delta}} = \frac{|a|e^{i\alpha}}{|d|e^{i\delta}} \frac{z + \frac{|b|}{|a|}e^{i(\beta-\alpha)}}{\frac{|b|}{|a|}e^{i(\gamma-\delta)} + 1}$$

On pose alors $Z = -\dfrac{|b|}{|a|}e^{i(\beta-\alpha)}$ et $\varphi = \alpha - \delta + \pi$. En particulier, $|Z| \neq 1$, $Z \neq 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1/\overline{Z}\}, f(z) = e^{i\varphi}\frac{z - Z}{\overline{Z}z - 1}$$

Enfin, dans le cas b nul, il suffit de choisir $Z = 0$.

(b) La question précédente démontre qu'il y a deux formes possibles pour de telles homographies. Vérifions qu'elles satisfont effectivement $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. Soit s un réel. On définit l'homographie g tel que $\forall z \neq 0, f(z) = e^{is}/z$. Alors pour tout complexe z de module 1, $|f(z)| = |e^{is}|/|z| = 1/1 = 1$, donc $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On en déduit que $f(f(\mathbb{U})) \subset f(\mathbb{U})$, mais ici $f\circ$ est une rotation de centre O, donc $f(f(\mathbb{U})) = \mathbb{U}$ et $\mathbb{U} \subset f(\mathbb{U})$ et on a bien l'égalité d'ensembles $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ par double inclusion. Considérons à présent un complexe Z tel que $|Z| \neq 1$ et un réel φ, puis l'homographie f définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1/\overline{Z}\}, f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-Z}{\overline{Z}z-1}$$

Alors pour tout complexe z de module 1, on a

$$\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= \frac{|z-Z|^2}{|\overline{Z}z-1|^2} \\
&= \frac{|z|^2+|Z|^2-2\mathfrak{Re}(z\overline{Z})}{|\overline{Z}z|^2+1-2\mathfrak{Re}(\overline{Z}z)} \\
&= \frac{1+|Z|^2-2\mathfrak{Re}(z\overline{Z})}{|Z|^2+1-2\mathfrak{Re}(z\overline{Z})} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc $|f(z)| = 1$. Ceci démontre que $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Pour démontrer, l'autre inclusion, on considère un élément z de $\mathbb{U}$. Mais alors, on remarque, d'après la réciproque de f que

$$f^{-1}(z) = e^{-i\varphi}\frac{z-Z}{\overline{Z}z-1}$$

Le même calcul que précédement montre que $|f^{-1}(z)| = 1$, donc que z est l'image par f d'un complexe de module 1, à savoir $f^{-1}(z)$. Ainsi, $\mathbb{U} \subset f(\mathbb{U})$ et l'égalité d'ensembles est démontrée par double inclusion.

En conclusion, les seules homographies qui conservent le cercle unité sont uniquement de deux formes, celles précisées précédemment.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆