

Suites à valeurs réelles ou complexes

Cornou Jean-Louis

28 novembre 2022

Dans tout ce qui suit, le symbole \mathbb{K} désigne l'ensemble \mathbb{R} ou l'ensemble \mathbb{C} . Les éléments de \mathbb{K} sont appelés scalaires.

1 Exemples de suites numériques

1.1 Rappels et généralités

Définition 1 On appelle suite numérique toute application de \mathbb{N} dans \mathbb{K} ou d'un intervalle d'entiers $[[n_0, +\infty[[$ dans \mathbb{K} avec n_0 un entier naturel.

Notation

Si u désigne une telle application, on peut également la noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n , on note également u_n au lieu de $u(n)$. L'ensemble des suites numériques à valeurs dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition 2 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u est

- majorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- bornée lorsqu'elle majorée et minorée.

Propriété 1 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. Alors u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée.

Démonstration. Si $|u|$ est majorée, alors $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M$. Par conséquent, M est un majorant de u , et $-M$ est un minorant de u , donc u est bornée. Si u est bornée. Alors $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. On pose alors $B = \max(|m|, |M|)$, cela implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq |M| \leq B) \wedge (u_n \geq -|m| \geq -B)$$

Ainsi, quel que soit le signe de u_n , on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq B$$

Ainsi, B est un majorant de $|u|$.

Définition 3 Soit u une suite numérique à valeurs complexes. On dit que u est bornée lorsque $|u|$ est bornée, i.e

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Propriété 2 Soit u une suite numérique à valeurs complexes. Alors u est bornée si et seulement si $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont bornées.

Démonstration. Supposons u bornée. Alors il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Or on sait que $\forall z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leq |z| \wedge |\Im(z)| \leq |z|$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\Re(u_n)| \leq M \wedge |\Im(u_n)| \leq M$$

Ainsi, $|\Re(u)|$ et $|\Im(u)|$ sont majorées, donc d'après la propriété précédente, $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont bornées.

Réciproquement, supposons $\Re(u)$ et $\Im(u)$ bornées. Alors $|\Re(u)|$ et $|\Im(u)|$ sont majorées, donc

$$\exists (M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |\Re(u_n)| \leq M_1 \wedge |\Im(u_n)| \leq M_2$$

On en déduit par croissance du carré sur \mathbb{R}^+ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\operatorname{Re}(u_n)|^2 + |\operatorname{Im}(u_n)|^2 \leq M_1^2 + M_2^2$$

On termine via la croissance de la racine carrée sur \mathbb{R}^+ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

Ainsi, u est bornée.

Définition 4 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u est

- croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- strictement croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
- strictement décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.
- monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Attention

Il n'existe aucun équivalent de ces notions pour les suites à valeurs complexes.

Propriété 3 Soit u et v deux suites numériques à valeurs réelles monotones. Si u et v ont même monotonie, alors $u + v$ est monotone de même monotonie. Si u et v sont monotones de même monotonie et de signe positif, alors uv est monotone. Si u est de signe constant et ne s'annule pas, alors $1/u$ est monotone de monotonie contraire.

Démonstration. Soit n un entier naturel, alors si u est croissante de u implique $u_n \leq u_{n+1}$, donc $u_n + v_n \leq u_{n+1} + v_n$. Mais alors comme v est croissante (même monotonie que u), $u_{n+1} + v_n \leq u_{n+1} + v_{n+1}$. Par transitivité, $u_n + v_n \leq u_{n+1} + v_{n+1}$ donc $u + v$ est croissante. Le cas où u et v sont toutes deux décroissantes est laissé à titre d'exercice. Supposons u croissante de signe positif, et v croissante de signe positif. Soit n un entier naturel. Alors, $u_n \leq u_{n+1}$. Comme v_n est positif, on en déduit que $u_n v_n \leq v_n u_{n+1}$. Mais alors comme $u_{n+1} \geq 0$, et $v_n \leq v_{n+1}$, on a alors $u_{n+1} v_n \leq u_{n+1} v_{n+1}$. Par transitivité, $u_n v_n \leq u_{n+1} v_{n+1}$ donc uv est croissante. Supposons u croissante, soit n un entier naturel, alors $0 < u_n \leq u_{n+1}$. La décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{++} entraîne alors $1/u_{n+1} \leq 1/u_n$. Ainsi $1/u$ est décroissante. Les cas restants sont laissés à titre d'exercice.

Attention

Si u et v sont de monotonies contraires, on ne peut rien dire a priori de la monotonie de $u + v$. Sans hypothèse sur les signes, on ne peut dire a priori sur la monotonie du produit ou du quotient. Voici quelques contre-exemples. $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2$ et $v : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2 + (-1)^n$ sont bien toutes deux croissantes, mais $u - v$ n'est pas monotone. Les suites $w : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 1/n$ et $t : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto -1 + 2/n$ sont toutes deux décroissantes, mais leur produit n'est pas monotone. La suite $s : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto -1 + 3/(2n)$ est décroissante et s'annule pas, mais son inverse n'est pas monotone.

Définition 5 Soit \mathcal{P} un prédicat et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que cette suite vérifie la propriété \mathcal{P} à partir d'un certain rang (à pcr en abrégé) lorsque

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \text{ vérifie } \mathcal{P}$$

Remarque

Quand on étudiera le comportement d'une suite quand n tend vers $+\infty$, il nous suffira souvent de vérifier qu'une suite vérifie certaines propriétés à partir d'un certain rang. Le comportement des dix, des mille ou des 10^{100} premiers termes peut être mis de côté. Ce genre de propriétés caractérise ce qu'on appelle le comportement asymptotique de la suite étudiée.

Exercice 1 On considère une suite u bornée à partir d'un certain rang. Montrer que u est bornée.

Exemple 1 Soit a un réel positif. On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n/n!$. Montrons que u est décroissante à partir d'un certain rang. Si a est nul, la suite est constante nulle, donc décroissante. Si a est non nul, alors u est strictement positive. On écrit alors pour tout entier n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

Par conséquent, en posant $N = \lfloor a \rfloor$, pour tout entier naturel $n \geq N$, puisque $n + 1$ est positif

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{N+1}{N+1} = 1$$

Comme u est à valeurs positives, on en déduit que

$$\forall n \geq N, u_{n+1} < u_n$$

Ainsi, on a démontré dans le cas a non nul, que cette suite est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

Définition 6 On dit qu'une suite est stationnaire lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang. Correctement quantifié, cela s'écrit

$$\exists a \in \mathbb{K}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = a$$

Attention

L'ordre des quantificateurs est primordial comme toujours ! Ecrire qu'une suite u vérifie

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \exists a \in \mathbb{K}, u_n = a$$

n'indique rien de plus que cette suite est à valeurs dans \mathbb{K} .

Exemple 2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{Z} convergente. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. Notons l sa limite, alors il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \frac{1}{3}$$

On en déduit via l'égalité triangulaire

$$\forall n \geq N, |u_n - u_N| = |(u_n - l) - (u_N - l)| \leq |u_n - l| + |u_N - l| \leq \frac{2}{3} < 1$$

Or, pour tout entier naturel n , $u_n - u_N$ est un entier relatif, donc égal à 0. Ainsi,

$$\forall n \geq N, u_n = u_N$$

On a ainsi démontré que la suite u est stationnaire. Au passage, cela démontre également que sa limite est dans \mathbb{Z} .

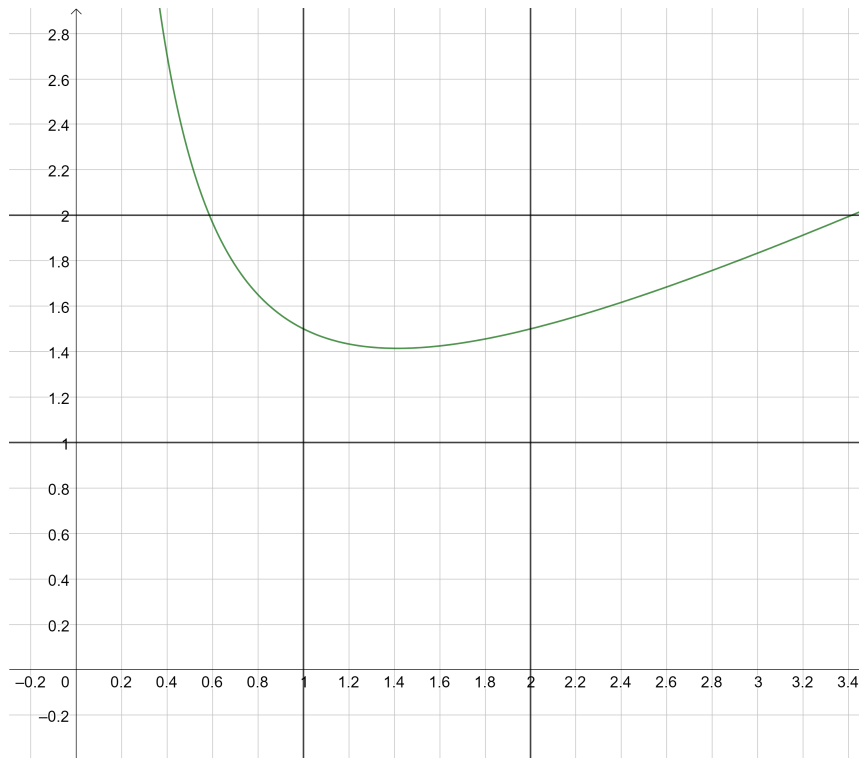
1.2 Suites définies par récurrence, de manière implicite

1.2.1 Systèmes dynamiques

Notre objectif est ici de définir une suite par récurrence à l'aide d'une application.

Définition 7 Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ une application de A dans \mathbb{K} avec A une partie de \mathbb{K} . Soit B une partie de A . On dit que B stable par f (ou f -stable) lorsque $f(B) \subset B$

Exemple 3 Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(x + 2/x)$. Alors l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f . Le sinus stabilise $[0, 1]$, le cosinus stabilise $[0, \pi/2]$



Exemple 4 Soit $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z-1}{z}$. Alors le demi-plan $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ est stable par h .

Théorème 1 (admis) Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ une application d'une partie A de \mathbb{K} dans \mathbb{K} avec A stable par f . Soit $a \in A$. Alors il existe une et une seule suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{K} telle que

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$.

Démonstration. Laurent Schwartz, Analyse 1, Théorie des ensembles et topologie, pages 57 et 58.

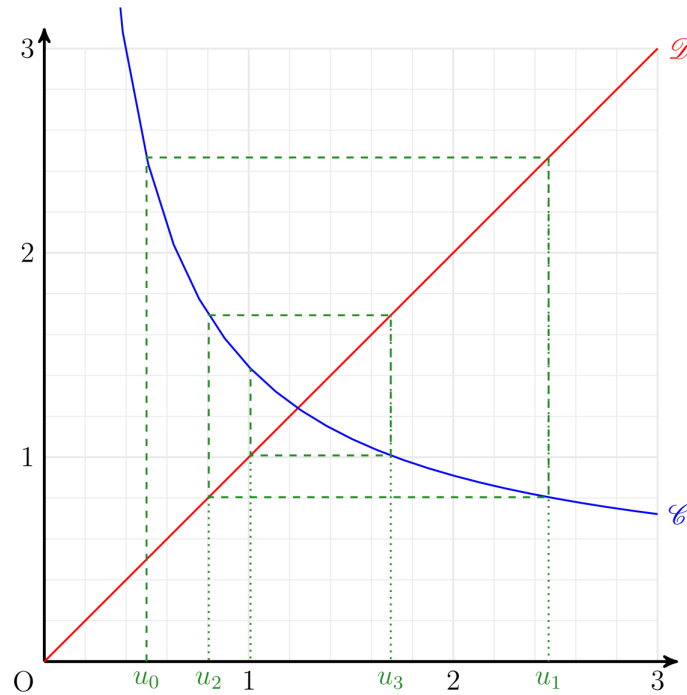
On admet également qu'on peut définir via des relations de récurrence double des suites numériques. Soit $g : A \times A \rightarrow \mathbb{K}$ désigne une fonction de $A \times A$ dans \mathbb{K} avec A une partie de \mathbb{K} et $g(A \times A) \subset A$, $(a, b) \in A \times A$, alors il existe une unique suite numérique telle que $u_0 = a$, $u_1 = b$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = g(u_n, u_{n+1})$$

A présent, on fixe $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur une partie A de \mathbb{R} telle que A est stable par f et $a \in A$. On note u l'unique suite à valeurs réelles telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Représentation graphique

L'idée est de représenter le graphe de f d'une part et la première bissectrice d'autre part. Soit n un entier naturel tel que u_n est construit. Alors on place de le point $(u_n, 0)$ en abscisse. Le point $(u_n, f(u_n))$ du graphe de f permet de lire u_{n+1} en ordonnée. On trace alors la droite $x = u_{n+1}$ pour construire le point (u_{n+1}, u_{n+1}) par intersection avec la première bissectrice, puis on le rabat sur l'axe des abscisses en $(u_{n+1}, 0)$.



Propriété 4 Si f est croissante, alors la suite u est monotone. Plus précisément,

- Si $u_0 \leq u_1$, alors u est croissante.
- Si $u_0 \geq u_1$, alors u est décroissante.

Démonstration. Dans le premier cas, on montre que u est croissante par récurrence. Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{H}_n : u_n \leq u_{n+1}$. Le premier cas donne l'initialisation et assure \mathcal{H}_0 . Soit n un entier naturel tel que \mathcal{H}_n est vérifiée. Alors $u_n \leq u_{n+1}$, comme f est croissante, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Ainsi, \mathcal{H}_{n+1} est vérifiée. Par conséquent, u est croissante par récurrence. Le deuxième cas se prouve exactement de la même façon.

Propriété 5 Si f est strictement croissante et si $u_0 \neq u_1$, alors la suite est strictement monotone. Plus précisément,

- Si $u_0 < u_1$, alors u est strictement croissante.
- Si $u_0 > u_1$, alors u est strictement décroissante.

Démonstration. Laissée à titre d'exercice.

Exemple 5 On considère $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$, $x \mapsto \sin(x)$. Alors f est strictement croissante. On choisit $u_0 = 1$. Alors u est strictement décroissante, puisque $\forall x > 0, \sin(x) < x$, donc $u_1 < u_0$.

Propriété 6 Si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de variations contraires.

Démonstration. Si f est décroissante, alors $g = f \circ f$ est croissante. Alors les suites v et w définies par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}, w_n = u_{2n+1}$ vérifient $v_0 = u_0, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n), w_0 = u_1, \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = g(w_n)$. On sait d'après la propriété précédente que v et w sont monotones. Supposons que v est croissante, i.e $v_0 \leq v_1$. Alors comme f est décroissante, $f(v_0) \geq f(v_1)$, i.e $w_0 \geq w_1$, par conséquent, w est décroissante. Si v est décroissante, la décroissance de f montre de la même manière que w est croissante. Ainsi, les monotones de v et w sont contraires.

Propriété 7 On suppose que $f - \text{id}_A$ est de signe constant. Alors

- Si ce signe est positif, alors la suite u est croissante.
- Si ce signe est négatif, alors la suite u est décroissante.

Démonstration. Dans le premier cas, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (f - \text{id}_A)(u_n) \geq 0$. Ainsi u est croissante. Le deuxième cas se traite de manière similaire.

Voici quelques résultats sur la convergence de ces suites récurrentes. Nous les prouverons en détail lors de l'étude des fonctions continues et des fonctions dérivables.

Théorème 2 Si f est continue et u converge. Alors sa limite l vérifie $f(l) = l$.

Attention

Ce théorème ne prouve pas la convergence de la suite u . Il indique uniquement une condition nécessaire sur la limite éventuelle de u .

Démonstration. La preuve repose sur plusieurs résultats que nous n'avons pas encore prouvés. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l alors $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Si f est continue en l alors $f(u_n)$ tend vers $f(l)$ quand n tend vers $+\infty$. En cas de convergence, la limite d'une suite est unique.

Théorème 3 Si f est de classe C^1 et possède un point fixe l tel que $|f'(l)| < 1$, alors il existe un intervalle ouvert contenant l tel que pour tout réel a dans cette intervalle, la suite u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l . On dit alors que l est un point fixe attractif.

Si le point fixe l vérifie $|f'(l)| > 1$, alors il existe un intervalle ouvert contenant l tel que pour tout réel a dans cet intervalle, différent de l , la suite u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ ne converge pas vers l . On dit alors que l est un point fixe répulsif.

Remarque

Ce théorème est bien plus puissant, puisqu'il donne la convergence ou non de ces suites récurrentes. Le prix à payer est la condition de régularité supplémentaire sur f . De plus, si $|f'(l)| = 1$, on n'a pas de conclusion, les deux cas peuvent se produire.

Démonstration. Ce résultat résulte de l'égalité des accroissements finis qui découle du théorème de Rolle. Cela sera étudié au chapitre 10.

Exemple 6 La suite logistique. On considère un réel μ dans $[0, 4]$ et la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \mu x(1 - x)$, ainsi qu'un réel $a \in [0, 1]$, puis la suite u telle que

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Des comportements très variés peuvent se produire selon les valeurs de μ . L'étude rapide de f , montre qu'elle est positive, strictement croissante sur $[0, 1/2]$, décroissante sur $[1/2, 1]$ et que son maximum vaut $\mu/4$, donc qu'elle stabilise bien l'intervalle $[0, 1]$. Cherchons les points fixes de f . Si $\mu = 0$, il est clair que 0 est le seul point fixe de f . Supposons à présent μ non nul et soit x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$. Alors $\mu x(1 - x) = x$. Alors $x = 0$ ou $\mu(1 - x) = 1$. Cette dernière égalité équivaut à $x = 1 - 1/\mu$. Par conséquent, si $\mu \in [0, 1]$, f ne possède qu'un point fixe, à savoir 0. Si $\mu \in [1, 4]$, alors f possède deux points fixes, 0 et $1 - 1/\mu$. De plus, f est de classe C^1 et $\forall x \in I, f'(x) = \mu(1 - 2x)$. D'où, $f'(0) = \mu$ et $f'(1 - 1/\mu) = 2 - \mu$. Ainsi, le point fixe 0 est attractif si et seulement si $\mu \in [0, 1]$, répulsif si et seulement si $\mu > 1$. Le point fixe $1 - 1/\mu$ est attractif pour $\mu \in]1, 3[$ et répulsif pour $\mu > 3$.

Exercice 2 (difficile) Étudier le comportement de la suite logistique pour $\mu \in]3, 1 + \sqrt{6}[$. On pourra exploiter $x \mapsto ((f \circ f)(x) - x)/(f(x) - x)$

Exemple 7 On se donne x_0 et y_0 des réels, et on définit par récurrence les suites x et y par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \right) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$$

Montrons que ces suites convergent en passant par les complexes. On pose $z = x + iy$, cette suite vérifie $z_0 = x_0 + iy_0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$. Si $z_0 = 0$, il est clair que z est alors la suite constante nulle. Sinon, on écrit $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, ce qui implique $z_1 = \rho \frac{1+e^{i\theta}}{2} = \rho e^{i\theta/2} \cos(\theta/2)$. Par récurrence, on en déduit que $z_n = \rho e^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos(\theta/2^k)$. Le produit des cosinus se traite en le multipliant par $\sin(\theta/2^n)$ et on en déduit que $\sin(\theta/2^n) z_n = \rho \frac{\sin(\theta)}{2^n} e^{i\theta/2^n}$. Dans le cas où $\theta = 0$, la suite z est constante égale à ρ , donc tend vers ρ . Dans le cas où θ n'est pas nul, alors pour tout entier n non nul, $\sin(\theta/2^n) \neq 0$ et $z_n = \rho \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin(\theta/2^n)}$. On en déduit via le taux d'accroissement du sinus en 0 que z converge vers $\rho \sin(\theta)/\theta$.

1.2.2 Suites implicites

Nous ne formons pas de théorie générale ici et donnons seulement quelques méthodes. Soit $(f_n)_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions bijectives sur un intervalle I de \mathbb{R} . On note pour tout entier naturel n , $u_n = f_n^{-1}(0)$. Alors on peut étudier le comportement de la suite u_n via l'étude de $f_{n+1} - f_n$.

Exemple 8 Pour tout entier naturel n , on note $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + nx - 1$. Alors, on montre via une rapide étude que pour tout entier naturel n , f_n est strictement croissante bijective. On note alors pour tout entier naturel n , $u_n = f_n^{-1}(0)$. Fixons n un entier naturel, alors $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n \geq 0$. Ainsi, u_n appartient à $]0, 1[$. De plus, pour tout x dans $]0, 1[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x > 0$, donc $f_{n+1}(u_{n+1}) - f_n(u_{n+1}) > 0$. Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a $f_n(u_{n+1}) < 0$. Mais alors, $f_n(u_n) - f_n(u_{n+1}) = f_n(u_{n+1}) > 0$, soit $f_n(u_n) > f_n(u_{n+1})$. Ainsi, comme f_n est strictement croissante, $u_n > u_{n+1}$.

Ainsi, la suite u est strictement décroissante. Comme est elle minorée par 0, elle est convergente. Enfin, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_n = \frac{1 - u_n^3}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Par théorème d'encadrement, la suite u tend vers 0.

Exemple 9 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $P_n :]0, 1[\rightarrow]-1, 1[, x \mapsto x^n + x - 1$. Cette fonction est strictement croissante. On note alors pour tout entier naturel non nul n , $\alpha_n = P_n^{-1}(0)$. Soit n un entier naturel non nul, alors $\alpha_n^n = 1 - \alpha_n$. Comme toutes ces quantités sont strictement positives, on peut prendre le logarithme, ce qui implique $n \ln(\alpha_n) = \ln(1 - \alpha_n)$, donc $n = \ln(1 - \alpha_n) / \ln(\alpha_n)$ puisque $\alpha_n \neq 1$. On note alors $f :]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto \ln(1 - x) / \ln(x)$. Alors comme $]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto -\ln(1 - x)$ et $]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto -1/\ln(x)$ sont croissantes positives, f est croissante. Autre possibilité, f est dérivable et

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = -\frac{(1-x)\ln(1-x) + x\ln(x)}{x(1-x)(\ln(x))^2} > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante, de limite 0 en 0 et $+\infty$ en 1. Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (f^{-1}(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, cette suite est de même monotonie que la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donc strictement croissante. Comme elle est majorée par 1, elle est convergente. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 1$. Ainsi, par composition, α converge vers 1.

1.3 Suites arithmético-géométriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On étudie l'ensemble des suites numériques à valeurs dans \mathbb{K} telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Une telle suite est appelée suite arithmético-géométrique. Notons $E = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\}$

Propriété 8 Soit $(u, v) \in E^2$, alors $u - v$ est une suite géométrique de raisons a .

Démonstration. Soit n un entier naturel, alors

$$(u - v)_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = au_n + b - (av_n + b) = a(u_n - v_n) = a(u - v)_n$$

Ainsi, $u - v$ est bien géométrique de raison a .

Théorème 4 Si $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$. Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n$

Démonstration. Dans le premier cas, il est immédiat que u est arithmétique. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} b = nb$$

Dans le second cas, on remarque que la suite constante $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = b/(1-a)$. Alors d'après la propriété précédente, $u - c$ est géométrique de raison a , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - c_n = a^n(u_0 - c_0)$$

Soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n$$

Exemple 10 On considère deux suites u et v telles que $u_0 = 1, v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - (2u_n + 3v_n) = u_n - v_n$$

Par conséquent, la suite $u - v$ est constante égale à $u_0 - v_0 = -1$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n + 2(u_n + 1) = 5u_n + 2$$

Ainsi, u est arithmético-géométrique et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 1/2 = 5^n(u_0 + 1/2)$$

soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 5^n - 1)$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 5^n + 1)$$

Exemple 11 Une étude de chaîne de Markov : on dispose de deux pièces A et B. La pièce A est équilibrée, tandis que la pièce B donne pile avec la probabilité $1/4$ et face avec la probabilité $3/4$. On effectue une succession de lancers de la manière suivante : en début de partie, on choisit au hasard une des deux pièces et on la lance. A l'issue de chaque lancer, si on obtient pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « Le n^{e} lancer s'effectue avec la pièce A » et a_n la probabilité de l'événement A_n .

- À l'aide d'un arbre pondéré, préciser les valeurs de a_1 et a_2 . Remarquons que $a_1 = p(A_1) = 1/2$ puisque « en début de partie, on choisit au hasard une des deux pièces et on la lance ». Pour la suite, on utilise le conditionnement $a_2 = p(A_2) = p(A_2|A_1)p(A_1) + p(A_2|B_1)p(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$.
- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$. En déduire une expression explicite de la suite a et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.

Soit n un entier naturel non nul. On utilise un conditionnement comme précédemment : $a_{n+1} = p(A_{n+1}|A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}|B_n)p(B_n) = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{4}(1 - a_n) = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$. Alors $a - 3/5$ est géométrique de raison $-1/4$, dont on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 3/5 + (a_1 - 3/5)(-1/4)^{n-1} = 3/5 - 1/10(-1/4)^{n-1}$. Ainsi, a converge vers $3/5$.

1.4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Soit a et b deux éléments de \mathbb{K} tels que b est non nul. On cherche à étudier toutes les suites numériques vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$. Ce problème est structurellement très proche de la résolution d'équations différentielles. Afin de ne pas passer 3 heures à écrire des récurrences doubles, on privilégie ici une approche d'algèbre linéaire. Cette digression est l'occasion de renforcer le vocabulaire de l'algèbre. L'ensemble des suites numériques à valeurs dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On peut considérer une partie de cet ensemble :

$$E = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$$

En relâchant les conditions initiales, on va pouvoir manier cet espace plus aisément. On rappelle qu'on peut définir la somme de deux suites et le produit d'une suite par un scalaire via $(u + v)_n = u_n + v_n$ et $(\lambda u)_n = \lambda u_n$ pour tout entier naturel n .

Propriété 9 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, (u, v) \in E^2$. Alors $\alpha u + \beta v \in E$. On dit que l'ensemble E est stable par combinaison linéaire.

Théorème 5 On considère l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^2, u \mapsto (u_0, u_1)$. Alors φ est linéaire, i.e

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v).$$

De plus, φ est une bijection.

Démonstration. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Alors, d'après la définition du produit par un scalaire et de la somme d'applications à valeurs dans \mathbb{K} , $(\alpha u + \beta v)_0 = \alpha u_0 + \beta v_0$ et $(\alpha u + \beta v)_1 = \alpha u_1 + \beta v_1$. Ainsi, l'application φ est bien linéaire. Montrons à présent qu'elle est bijective. On commence par étudier $\varphi^{-1}\{(0, 0)\}$. Soit donc u une suite dans E telle que $\varphi(u) = (0, 0)$. Montrons alors que u est la suite nulle par récurrence double. On note $\mathcal{H}_n : u_n = 0$. Les propriétés \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 sont vérifiées puisque $\varphi(u) = (0, 0)$, ce qui prouve l'initialisation. Soit à présent n un entier naturel tel que $u_n = 0$ et $u_{n+1} = 0$. Alors comme u appartient à E , $u_{n+2} = -\alpha u_{n+1} - \beta u_n = 0$. Ainsi \mathcal{H}_{n+2} est vérifiée. On en déduit par récurrence double que la suite u est nulle. Montrons à présent que φ est injective. Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Alors comme φ est linéaire, $\varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v) = (0, 0)$. D'après ce qui précède, on en déduit que $u - v$ est la suite nulle, donc que $u = v$. Ainsi, φ est injective. Montrons à présent que φ est surjective. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors le théorème admis sur la définition des suites par récurrence implique qu'il existe une suite u telle que $u_0 = \lambda$, $u_1 = \mu$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\alpha u_{n+1} - \beta u_n$. Cette suite u est alors dans E et vérifie $\varphi(u) = (\lambda, \mu)$. En conclusion, φ est bijective.

Définition 8 Le polynôme caractéristique de la suite u est le polynôme $X^2 + aX + b$.

L'idée clé de la résolution de ces études de suites récurrentes est de rechercher des suites géométriques solutions, puis de les combiner.

Théorème 6 On se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit u une suite dans E . On note (λ, μ) les racines du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$. On distingue deux cas :

— $\lambda \neq \mu$. Alors

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \lambda^n + \beta \mu^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de E .

— $\lambda = \mu$. Alors

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n) \lambda^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de E .

Démonstration. On peut prouver ce théorème en détaillant des récurrences doubles. Utilisons plutôt les propriétés de φ . Soit v une racine de $X^2 + aX + b$, alors pour tout entier naturel n , $v^{n+2} + av^{n+1} + bv^n = v^n(v^2 + av + b) = v^n \times 0 = 0$, donc la suite géométrique $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E . Si $X^2 + aX + b$ possède une racine double, on considère alors la suite $(nv^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $v = -a/2$ cette racine double. Pour tout entier naturel n ,

$$(n+2)v^{n+2} + a(n+1)v^{n+1} + bnv^n = nv^n(v^2 + av + b) + v^{n+1}(2v + a) = 0 + 0 = 0$$

Ainsi $(nv^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient bien à E .

Prouvons à présent les formes indiquées dans le premier cas. Pour cela, on remarque que pour tout (α, β) dans \mathbb{C}^2 , la suite $w = \alpha(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E , et que $\varphi(w) = (\alpha + \beta, \alpha\lambda + \beta\mu)$. Comme φ est injective, il suffit de déterminer un couple (α, β) tel que $(\alpha + \beta, \alpha\lambda + \beta\mu) = (u_0, u_1)$, ce qui revient à résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Comme $1 \times \mu - 1 \times \lambda = \mu - \lambda \neq 0$, ce système possède une unique solution, à savoir $(\alpha, \beta) = ((u_1 - u_0\mu)/(\lambda - \mu), (u_0\lambda - u_1)/(\lambda - \mu))$.

Synthétisons tout cela : On pose (α, β) comme précédemment. Alors, par stabilité de E par combinaison linéaire, la suite $w = \alpha(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E et $\varphi(w) = (u_0, u_1) = \varphi(u)$. Par injectivité de φ , on en déduit que $u = w$.

Dans le deuxième cas, on procède de la même façon. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, la suite $w = \alpha(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(n\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E , et que $\varphi(w) = (\alpha, (\alpha + \beta)\lambda)$. On cherche un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\varphi(w) = (u_0, u_1)$, ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que 0 n'est pas racine double de $X^2 + aX + b$, car sinon $b = 0$, ce qui est exclu dans notre cadre d'étude. Par conséquent, $\lambda \neq 0$ et $1 \times \lambda - \lambda \times 0 = \lambda \neq 0$. Donc ce système linéaire possède une solution unique, à savoir $(u_0, u_1/\lambda - u_0)$. Synthétisons alors. On pose (α, β) comme précédemment. Alors, par stabilité de E par combinaison linéaire, la suite $w = \alpha(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(n\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E et $\varphi(w) = (u_0, u_1) = \varphi(u)$. Par injectivité de φ , on en déduit que $u = w$.

Théorème 7 On se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, i.e $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Soit u une suite dans E . On note (λ, μ) les racines complexes du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$. On distingue deux cas :

— $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \neq \mu$. Alors

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \lambda^n + \beta \mu^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de E .

— $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda = \mu$. Alors

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n) \lambda^n$$

On dit que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de E .

— $(\lambda, \mu) \notin \mathbb{R}^2$. Alors en notant $\lambda = r e^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$,

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta)$$

ou encore

$$\exists(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A r^n \cos(n\theta + \varphi)$$

Démonstration. Cela copie le traitement des équations différentielles. Pour tous complexes $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, pour tout entier n , $\overline{\alpha \lambda^n + \beta \mu^n} = \overline{\alpha} \overline{\lambda}^n + \overline{\beta} \overline{\mu}^n$. Si une telle suite est réelle et λ et μ sont réels distincts, alors $\alpha + \beta = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ et $\alpha \lambda + \beta \mu = \overline{\alpha} \lambda + \overline{\beta} \mu$. Alors, $(\lambda - \mu)\beta = (\lambda - \mu)\overline{\beta}$. Comme $\lambda \neq \mu$, $\beta = \overline{\beta}$, puis $\alpha = \overline{\alpha}$, donc α et β sont réels. Dans le deuxième cas, $\alpha = \overline{\alpha}$ et $(\alpha + \beta)\lambda = (\overline{\alpha} + \overline{\beta})\lambda$. Comme λ est non nul (le cas d'une racine double nulle est exclu puisque $b \neq 0$, $\beta = \overline{\beta}$, donc α et β sont réels. Dans le troisième cas, alors les racines λ et μ sont conjuguées. Alors $\alpha + \beta = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ et $\alpha \lambda + \beta \overline{\lambda} = \overline{\alpha} \overline{\lambda} + \overline{\beta} \lambda$. Alors $(\alpha - \overline{\beta})(\lambda - \overline{\lambda}) = 0$. Comme λ n'est pas réel, $\alpha = \overline{\beta}$. On pose alors $\alpha = \frac{1}{2}(c + id)$ avec $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, ce qui entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c r^n \cos(n\theta) + d r^n \sin(n\theta)$$

Exemple 12 Soit a, b, c des entiers naturels tous non nuls tels que c n'est pas un carré d'entier. On considère les suites u et v définies par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (a + b\sqrt{c})^n$ et $v_n = (a - b\sqrt{c})^n$. On pose alors $\lambda = a + b\sqrt{c}$ et $\mu = a - b\sqrt{c}$. Ces réels vérifient $\lambda + \mu = 2a$ et $\lambda\mu = a^2 - b^2c$ donc sont les racines du polynôme $P = X^2 - 2aX + a^2 - b^2c$. Par conséquent, les suites u et v vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - 2aw_{n+1} + (a^2 - b^2c)w_n = 0$$

D'autre part, la suite $u + v$ a pour premiers termes $u_0 + v_0 = 0$ et $u_1 + v_1 = 2a$ qui sont entiers. Il s'ensuit, via une récurrence rapide que la suite $u + v$ est à valeurs dans \mathbb{Z} .

Exemple 13 On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^{++}$ telle que $\forall x > 0, f(f(x)) + f(x) = 2x$. Soit f une telle fonction. On fixe un réel $x > 0$ et on introduit la suite u définie par récurrence via $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, d'après la propriété satisfaite par f , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(f(u_n)) = 2u_n - f(u_n) = 2u_n - u_{n+1}$$

Par conséquent, la suite u satisfait la récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$$

Son polynôme caractéristique $X^2 + X - 2$ se factorise en $(X + 2)(X - 1)$ dont les racines sont -1 et 2 distinctes. Par conséquent, il existe des réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(1)^n + \mu(-2)^n = \lambda + \mu(-2)^n$$

Or, comme f stabilise \mathbb{R}^{++} , la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est valeurs strictement positives. Or $(-2)^{2n+1} = -2 \cdot 4^n$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\mu = 0$ et la suite u est constante égale à son premier terme x . En particulier, $f(x) = u_1 = u_0 = x$. Ainsi, on a montré que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = x$.

Réciproquement, si $f = \text{id}_{\mathbb{R}^{++}}$, alors pour tout réel $x > 0$, $f(f(x)) + f(x) = x + x = 2x$, donc f vérifie bien la propriété étudiée.

Exemple 14 Une autre méthode de résolution via les suites géométriques : On considère l'espace

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 0\}$$

Procédons différemment du cours. Le polynôme caractéristique de cette récurrence linéaire double à coefficients constants vaut $X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{3}{2} = (X+3)(X-1/2)$. Soit u une suite appartenant à E . On introduit alors la suite v définie via $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n u_n$. Soit n un entier naturel. Alors

$$2v_{n+2}2^{-(n+2)} + 5v_{n+1}2^{-(n+1)} - 3v_n2^{-n} = 0$$

soit encore après simplification par $2^{-(n+1)}$ qui est non nul

$$v_{n+2} + 5v_{n+1} - 6v_n = 0$$

qu'on réorganise astucieusement en

$$v_{n+2} - v_{n+1} = -6(v_{n+1} - v_n)$$

Alors la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -6 . Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (-6)^n (v_1 - v_0)$$

On utilise alors une somme télescopique pour exprimer le terme général de v .

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (-6)^k (v_1 - v_0) = (v_1 - v_0) \frac{1 - (-6)^n}{1 - (-6)}$$

puisque la raison -6 est différente de 1. Au final,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{-n} v_n = 2^{-n} \left[u_0 + \frac{2u_1 - u_0}{7} (1 - (-6)^n) \right] = \frac{6u_0 + 2u_1}{7} 2^{-n} + \frac{u_0 - 2u_1}{7} (-3)^n$$

Exemple 15 On cherche l'ensemble des suites u à valeurs complexes vérifiant $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2i - 3)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$. Le polynôme caractéristique de cette récurrence double linéaire à coefficients constants est $X^2 - (3 - 2i)X + (5 - 5i)$. Son discriminant vaut $\Delta = (3 - 2i)^2 - 4(5 - 5i) = -15 + 8i = (1 + 4i)^2$ et ses racines valent $\frac{1}{2}((3 - 2i) - (1 + 4i)) = 1 - 3i$ et $\frac{1}{2}((3 - 2i) + (1 + 4i)) = (2 + i)$. Par conséquent, il existe des complexes α et β tels que $\forall u_n \alpha(1 - 3i)^n + \beta(2 + i)^n$. En particulier, $u_0 = 0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = 1 + 4i = \alpha(1 - 3i) + \beta(2 + i)$. Ce système linéaire implique $\alpha = -\beta$ et $\alpha(-1 - 4i) = 1 + 4i$, soit $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n$$

Examinons à présent l'ensemble des suites u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2i - 3)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n + 9 - 7i$. Soit v et w deux telles suites. Alors $v - w$ vérifie la relation de récurrence double précédente. Par conséquent, il suffit de chercher une suite particulière solution pour déterminer cet ensemble. On la recherche sous forme constante a . Celle-ci vérifie alors nécessairement $a = a(2i - 3) - a(5 - 5i) + 9 - 7i$, soit $a = 1$. En conclusion, toute suite u vérifie cette relation de récurrence si et seulement si

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \alpha(1 - 3i)^n + \beta(2 + i)^n$$

2 Limite d'une suite réelle

2.1 Notion de limite finie

Dans tout ce qui suit, u désigne une suite numérique à valeurs dans \mathbb{K} . La définition de la convergence de u vers un scalaire donné est légèrement différente de celle du lycée mais bien sûr équivalente.

Définition 9 Soit l un élément de \mathbb{K} . On dit que u converge vers l , ou encore que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Notation

On rencontre les notations $u_n \longrightarrow l$ ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Exemple 16 Les suites constantes sont convergentes vers leur constante.

Analyse des quantificateurs et des inégalités : Si l'on veut comprendre cette définition en langue française, on peut comprendre ε comme une précision arbitrairement petite, mais non nulle. Quelle que soit cette précision, aussi petite soit-elle, il existe un rang (éventuellement gigantesque) au delà duquel tous les termes de la suite sont proches de la limite l à cette précision. Il est important de comprendre que ces rangs (il n'y en a pas qu'un) dépendent de la précision choisie. Pour cela, on peut éventuellement noter

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

afin de rappeler qu'on ne peut pas intervertir les quantificateurs n'importe comment.

Exemple 17 Considérons la suite u telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1/n^2$. Montrons qu'elle tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche à construire un rang N non nul tel que $\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$. Or pour tout entier naturel non nul n , on a l'équivalence $1/n^2 \leq \varepsilon \iff 1/\varepsilon \leq n^2$ puisque ε et n sont strictement positifs. On aimerait choisir $1/\sqrt{\varepsilon}$ pour le rang, mais ce n'est pas un entier. On pose alors $N = 1 + \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor$. Cette définition est légitime puisque $\varepsilon > 0$ et fait de N entier naturel non nul. Soit alors n un entier naturel tel que $n \geq N$. D'après les propriétés de la partie entière, $n \geq N \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$. On en déduit par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{+*} que $1/n \leq \sqrt{\varepsilon}$, puis par croissance du carré sur \mathbb{R}^+ que $1/n^2 \leq \varepsilon$, donc que $|u_n - 0| \leq \varepsilon$. Ainsi, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

donc que la suite u converge vers 0. Notez par exemple que pour $\varepsilon = 10^{-12}$, le rang que l'on a construit vaut $10^6 + 1$. Pour $\varepsilon = 10^{-12!}$, le rang construit est supérieur à 10^{10^8} .

Exemple 18 Continuons sur l'analyse des quantificateurs de la définition de la limite. Considérons un instant qu'une suite u vérifie

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall \varepsilon > 0, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Considérons alors n un entier naturel supérieur ou égal à N et montrons que $u_n = l$. Si u_n est différent de l , on peut alors exploiter la propriété vérifiée par u pour le réel strictement positif $\varepsilon = |u_n - l|/2$. Cela implique $|u_n - l| \leq |u_n - l|/2$, donc comme $|u_n - l|$ est strictement positif $2 < 1$ ce qui est absurde. Ainsi, $u_n = l$, et ce pour tout entier n supérieur ou égal à N . En conclusion, toute suite u vérifiant cette propriété est stationnaire, ce qui diffère bien du comportement attendu des limites.

Exemple 19 Considérons un instant une suite u vérifiant

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Appliquons cette propriété pour $\varepsilon = 0$. Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| = 0$. Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = l$. Ainsi, u est stationnaire.

Exemple 20 Considérons un instant une suite u vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq 3\varepsilon$$

Montrons que la suite u converge vers l . Soit $\varepsilon > 0$, alors le réel $\varepsilon' = \varepsilon/3$ est strictement positif, on lui applique la propriété précédente. On sait qu'il existe alors un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq 3\varepsilon' = \varepsilon$. Ainsi, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

donc que u converge vers l .

Faisons à présent le lien avec la définition de la limite proposée en terminale.

Propriété 10 Soit u une suite numérique et l un élément de \mathbb{K} . Alors u converge vers l si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite u à partir d'un certain rang.

Démonstration. Supposons que u converge vers l . Soit I un intervalle ouvert contenant l , comme il est ouvert et non vide (car contenant l), il est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$. Dans tous les cas, il contient un sous-intervalle de la forme $]a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < l < b$. On pose alors $\varepsilon = \frac{1}{2} \min(b - l, l - a)$ qui est bien un réel strictement positif d'après l'encadrement précédent. La définition de la limite indique alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

A fortiori, pour tout entier n supérieur ou égal à N ,

$$-\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$$

donc

$$-(l-a) < -\frac{1}{2}(l-a) \leq u_n - l \leq \frac{1}{2}(b-l) < b-l$$

soit

$$a < u_n < b$$

donc $u_n \in]a, b[\subset I$. Ainsi, à partir du rang N , l'intervalle I contient toutes les valeurs de la suite u .

Réciproquement, supposons que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite u à partir d'un certain rang. Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'intervalle $I =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Celui-ci est bien ouvert et contient l puisque ε est strictement positif. Par conséquent, il existe un rang N tel que toutes les valeurs de la suite u à partir du rang N sont dans I . Correctement quantifié, cela s'écrit

$$\forall n \geq N, u_n \in I$$

soit encore

$$\forall n \geq N, u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[.$$

On reformule cela à l'aide d'inégalités,

$$\forall n \geq N, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$

i.e

$$\forall n \geq N, -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$$

On en déduit qu'à fortiori,

$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon \leq \varepsilon$$

Ainsi, on démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

donc que u converge vers l .

Exercice 3 Soit u une suite numérique et l un élément de \mathbb{K} . Montrer que u converge vers l si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Définition 10 Soit u une suite numérique. On dit que u est convergente lorsqu'il existe un scalaire l tel que u converge vers l .

Théorème 8 (Unicité de la limite) Soit u une suite numérique convergente. Alors il existe un unique scalaire l tel que u converge vers l . On le note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou encore $\lim u$.

Démonstration. Soit l_1 et l_2 des scalaires tels que u converge vers l_1 et u converge vers l_2 . Montrons que $l_1 = l_2$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $l_1 \neq l_2$. On pose alors $\varepsilon = |l_1 - l_2|/3$ qui est bien un réel strictement positif d'après l'hypothèse précédente. Les convergences impliquent qu'il existe un rang N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - l_1| \leq \varepsilon$ et un rang N_2 tel que $\forall n \geq N_2, |u_n - l_2| \leq \varepsilon$.

A fortiori, au rang $N = \max(N_1, N_2)$, on a via l'inégalité triangulaire,

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_N - (l_2 - u_N)| \leq |l_1 - u_N| + |l_2 - u_N| \leq 2\varepsilon = 2|l_1 - l_2|/3$$

Comme $|l_1 - l_2| > 0$, on a $1 < 2/3$, ce qui est absurde. En conclusion, $l_1 = l_2$, ce qui prouve bien l'unicité de la limite en cas de convergence.

 **Remarque**

La méthode employée lors de la dernière preuve s'appelle une méthode de séparation.

 **Attention**

Les notations $\lim u$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ne sont autorisées qu'après avoir démontré la convergence de la suite u .

Définition 11 Soit u une suite numérique. On dit que u est divergente lorsque u n'est pas convergente, autrement dit lorsque pour tout élément l , u ne converge pas vers l . Correctement quantifié, cela s'écrit

$$\forall l \in \mathbb{K}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| > \varepsilon$$

Remarque

Nous verrons quelques critères plus maniables pour prouver qu'une suite est divergente.

Exemple 21 On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Montrons qu'elle ne tend pas vers 1. Pour cela, on remarque que pour tout entier naturel impair $|u_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > 1$. Par conséquent, on choisit $\varepsilon = 1$. Soit N un entier naturel, alors on choisit $n = 2N + 1$, il s'agit bien d'un entier naturel supérieur ou égal à N . De plus, d'après ce qui précède, $|u_n - 1| > \varepsilon$. Ainsi, on a vérifié la négation de la convergence de u vers 1.

2.2 Opérations sur les limites finies

Propriété 11 Soit u et v deux suites numériques convergentes, a et b deux scalaires. Alors la suite $au + bv$ est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + bv_n) = a \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) + b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right)$$

On dit que la limite est linéaire sur l'espace des suites numériques convergentes.

Démonstration. Notons l et l' les limites respectives de u et v et montrons que $au + bv$ converge vers $al + bl'$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à construire un rang N convenable pour encadrer $|au + bv - (al + bl')|$. On remarque alors que pour tout entier naturel n , l'inégalité triangulaire implique

$$|(au + bv)_n - (al + bl')| = |a(u_n - l) + b(v_n - l')| \leq |a||u_n - l| + |b||v_n - l'|$$

Si a est nul, alors pour tout entier naturel n , $|a||u_n - l| = 0 \leq \varepsilon/2$. Si a n'est pas nul, on utilise alors la convergence de u vers l pour la précision $\varepsilon/(2|a|)$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq \varepsilon/(2|a|)$, donc puisque $|a| > 0$, $\forall n \geq N_1, |a||u_n - l| \leq \varepsilon/2$. Dans tous les cas, on dispose d'un rang N_u tel que $\forall n \geq N_u, |a||u_n - l| \leq \varepsilon/2$.

Répétons cette procédure pour le terme $|b||v_n - l'|$. Si b est nul, alors pour tout entier naturel n , $|b||v_n - l'| = 0 \leq \varepsilon/2$. Si b n'est pas nul, on utilise alors la convergence de v vers l' pour la précision $\varepsilon/(2|b|)$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N_2 tel que $\forall n \geq N_2, |v_n - l'| \leq \varepsilon/(2|b|)$, donc puisque $|b| > 0$, $\forall n \geq N_2, |b||v_n - l'| \leq \varepsilon/2$. Dans tous les cas, on dispose d'un rang N_v tel que $\forall n \geq N_v, |b||v_n - l'| \leq \varepsilon/2$.

Combinons ces deux études et posons $N = \max(N_u, N_v)$. Alors

$$\forall n \geq N, |(au + bv)_n - (al + bl')| = |a(u_n - l) + b(v_n - l')| \leq |a||u_n - l| + |b||v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, on a démontré que $au + bv$ converge et que sa limite vaut $a \lim u + b \lim v$.

Quelques petits résultats intermédiaires avant d'établir la limite d'un produit. Nous les réexploiterons lors des critères de convergence/divergence.

Propriété 12 Soit u une suite numérique convergente. Alors u est bornée.

Démonstration. Notons l la limite de u et exploitons la définition de la limite pour la précision $\varepsilon = 1$. Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq 1$. On en déduit via les inégalités triangulaires que

$$\forall n \geq N, |u_n| - |l| \leq |u_n - l| \leq |u_n - l| \leq 1$$

donc que

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq 1 + |l|$$

On note alors $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |l|)$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Ainsi, $|u|$ est majorée, donc u est bornée.

Propriété 13 Soit u une suite bornée et v une suite convergente de limite nulle. Alors la suite produit uv est convergente de limite nulle.

Démonstration. Comme u est bornée, $|u|$ est majorée. Notons alors M un majorant strictement positif de $|u|$ et montrons que uv est convergente de limite nulle. On remarque que pour tout entier naturel n , $|u_n v_n| \leq M|v_n|$. Soit $\varepsilon > 0$, exploitons la limite nulle de v avec la précision ε/M qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |v_n - 0| \leq \varepsilon/M$. On en déduit, toutes quantités positives, que

$$\forall n \geq N, |(uv)_n - 0| = |u_n v_n| \leq M\varepsilon/M = \varepsilon$$

On a ainsi bien démontré que la suite uv est convergente de limite nulle.

Propriété 14 Soit u et v deux suites numériques convergentes. Alors la suite produit uv est convergente et

$$\lim(uv) = (\lim u)(\lim v)$$

Démonstration. Notons l et l' les limites respectives de u et v . Alors

$$uv - ll' = uv - l'u + l'u - ll' = u(v - l') + l'(u - l).$$

Comme u est convergente, u est bornée. D'autre part, par linéarité, $v - l'$ tend vers 0. D'après la propriété précédente, $u(v - l')$ tend vers 0. De plus, la suite $u - l$ tend vers 0, donc par linéarité, $u(v - l') + l'(u - l)$ converge vers $0 + l' \times 0 = 0$. Toujours par linéarité, on en conclut que uv tend vers ll' .

Exercice 4 Refaire cette preuve en « epsilonisant » tout ceci.

Les limites d'un quotient nécessitent quelques précautions

Propriété 15 Soit u une suite numérique convergente. On suppose que $\lim u$ est non nulle. Alors la suite u ne s'annule jamais à partir d'un certain rang N et la suite $(1/u_n)_{n \geq N}$ converge vers $1/\lim u$.

Démonstration. Notons l la limite non nulle de u et exploitons la définition de la limite de u pour la précision $\varepsilon = |l|/2$ qui est bien un réel strictement positif. Alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq |l|/2$. En particulier, les inégalités triangulaires entraînent

$$\forall n \geq N, |u_n| \geq |l| - |u_n - l| \geq |l| - |l|/2 = |l|/2 > 0$$

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à N , u_n n'est pas nul. Ainsi, on peut considérer la suite inverse à partir du rang N . On remarque alors que

$$\forall n \geq N, \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n||l|} \leq \frac{2}{|l|^2} |u_n - l|$$

Soit $\varepsilon > 0$, on exploite la convergence de u vers l à la précision $\varepsilon|l|^2/2$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N' tel que $\forall n \geq N', |u_n - l| \leq \varepsilon|l|^2/2$. On pose alors $N'' = \max(N, N')$, ce qui implique, toutes quantités positives,

$$\forall n \geq N'', \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| \leq \frac{2}{|l|^2} \varepsilon \frac{|l|^2}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, la suite inverse tend vers $1/l$.

Exercice 5 Soit u et v deux suites convergentes telles que $\lim v \neq 0$. Montrer qu'alors la suite u/v est bien définie à partir d'un certain rang, convergente et que $\lim(u/v) = \lim u / \lim v$.

Propriété 16 (Passage à la limite dans les inégalités) Soit u et v deux suites numériques convergentes telles que $u \leq v$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u \leq \lim v$.

Démonstration. Notons $w = v - u$ et N un rang tel que $\forall n \geq N, w_n \geq 0$. Supposons un instant que $\lim w < 0$. Alors, comme dans la limite d'un quotient, on sépare w de 0 en utilisant la limite de w pour la précision $|\lim w|/2$ qui est bien un réel strictement positif. Ainsi, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |w_n - \lim w| \leq |\lim w|/2$$

Comme $\lim w < 0$, on en déduit que

$$\forall n \geq \max(N, N'), w_n \leq \lim w / 2 < 0$$

Ceci contredit l'hypothèse de positivité de w à partir d'un certain rang. Ainsi, $\lim w \geq 0$. Par linéarité, on en déduit que $\lim u \leq \lim v$.

Exemple 22 On utilise typiquement cette propriété avec des suites constantes pour encadrer les limites d'une suite convergente. Cela fonctionne également avec des suites stationnaires.

Attention

Le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes! La suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente strictement positive, alors que sa limite est nulle.

Attention

Cette propriété requiert que les suites étudiées sont convergentes. Une inégalité $u \leq v$ ne permet pas d'établir la convergence de l'une ou de l'autre dans le cas général.

2.3 Notion de limite infinie

Nous sommes obligés de distinguer les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ici.

Définition 12 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u tend vers $+\infty$ ou que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

Notation

On rencontre les notations $u_n \rightarrow +\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exemple 23 La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Soit A un réel. On introduit alors l'entier $N = \lfloor A \rfloor + 1$. Alors,

$$\forall n \geq N, n \geq N \geq A$$

Exemple 24 La suite $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$. Soit A un réel. On introduit alors $N = \lfloor \exp(A) \rfloor + 1$ qui est un entier supérieur ou égal à $\exp(A)$. Alors, la croissante du logarithme népérien donne

$$\forall n \geq N, \ln(n) \geq \ln(N) \geq \ln(\exp(A)) = A$$

Définition 13 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On dit que u tend vers $-\infty$ ou que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq -A$$

Notation

On rencontre les notations $u_n \rightarrow -\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Propriété 17 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. Alors u tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. Supposons que u tend vers $+\infty$. Soit A un réel. Alors la limite $+\infty$ de u avec le réel $-A$ entraîne qu'il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, u_n \geq -A$$

On en déduit

$$\forall n \geq N, -u_n \leq A$$

On a ainsi construit un rang idoine. Ainsi, $-u$ tend vers $-\infty$. Réciproquement, si $-u$ tend vers $-\infty$, on fixe A un réel quelconque. La limite de $-u$ avec le réel $-A$ implique qu'on dispose d'un rang N tel que

$$\forall n \geq N, -u_n \leq -A$$

Mais alors

$$\forall n \geq N, u_n \geq A$$

Ainsi, u tend vers $+\infty$.

Définition 14 Soit u une suite numérique à valeurs complexes. On dit que u tend vers l'infini (ou est coercive) lorsque $|u|$ tend vers $+\infty$, i.e

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \geq A$$

⚠ Attention

On rappelle qu'il n'y a pas de relation d'ordre sur \mathbb{C} , donc qu'on ne peut parler de « $+\infty$ » ou de « $-\infty$ » dans cet ensemble.

📖 Remarque

Cette notion est peu utilisée. On préfère manipuler la limite de $|u|$ vers $+\infty$.

2.4 Opérations sur les limites infinies

On dispose de moins d'opérations sur les limites infinies.

Propriété 18 Soit u une suite à valeurs réelles qui tend vers $+\infty$ et a un réel non nul. Si $a > 0$, alors au tend vers $+\infty$. Si $a < 0$, alors au tend vers $-\infty$.

Démonstration. Soit A un réel. Alors A/a est un réel bien défini puisque a est non nul. Comme u tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, u_n \geq A/a$$

Si a est strictement positif, on en déduit que

$$\forall n \geq N, au_n \geq A$$

donc que au tend vers $+\infty$. Si a est strictement négatif, on en déduit que

$$\forall n \geq N, au_n \leq A$$

donc que au tend vers $-\infty$.

Propriété 19 Soit u et v deux suites à valeurs réelles qui tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Alors $u + v$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. Soit A un réel. Dans le premier cas, les limites respectives de u et v impliquent qu'il existe des rangs N et N' tels que

$$\forall n \geq N, u_n \geq A/2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq N', v_n \geq A/2$$

On en déduit

$$\forall n \geq \max(N, N'), u_n + v_n \geq A/2 + A/2 = A$$

donc que $u + v$ tend vers $+\infty$. L'autre cas se traite, en remarquant qu'alors $-u$ et $-v$ tendent vers $+\infty$, donc que $-u + (-v)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $u + v$ tend vers $-\infty$.

Propriété 20 Soit u et v deux suites à valeurs réelles.

- On suppose que u tend vers $+\infty$ et que v est convergente de limite non nulle a . Si $a > 0$, alors uv tend vers $+\infty$. Si $a < 0$, alors uv tend vers $-\infty$.
- On suppose que u tend vers $+\infty$ et que v tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Alors uv tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. — Si $a > 0$, comme v est convergente de limite a , l'intervalle ouvert $]a/2, +\infty[$ contient toutes valeurs de v à partir d'un certain rang N , i.e

$$\forall n \geq N, v_n \geq a/2 > 0$$

Soit A un réel positif. Alors on exploite la limite de u via le réel $2A/a$ qui est bien défini puisque a est non nul. Alors, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', u_n \geq 2A/a \geq 0$$

Toutes quantités positives, on en déduit que

$$\forall n \geq \max(N, N'), u_n v_n \geq A \geq 0$$

Ce rang $\max(N, N')$ convient a fortiori pour tous les réels B négatifs. Ainsi, uv tend vers $+\infty$. Si $a < 0$, on exploite alors le fait que $-v$ converge vers $-a > 0$. Alors $-uv$ tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède, donc uv tend vers $-\infty$.

- Soit A un réel positif, alors il existe des rangs N et N' tels que $\forall n \geq N, u_n \geq \sqrt{A}$ et $\forall n \geq N', v_n \geq \sqrt{A}$. On en déduit, toutes quantités positives, que

$$\forall n \geq \max(N, N') u_n v_n \geq A$$

Ce rang convient a fortiori pour tous les réels B négatifs. Ainsi, uv tend vers $+\infty$. Dans l'autre cas, il suffit d'exploiter $-uv$.

Exercice 6 Énoncer une variante de ce théorème en supposant que u tend vers $-\infty$.

Propriété 21 Soit u une suite à valeurs réelles qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Alors u est non nulle à partir d'un certain rang N , et la suite $(1/u_n)_{n \geq N}$ est convergente, de limite nulle.

Démonstration. Considérons le cas où u tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on exploite la limite de u pour le réel $A = 1/\varepsilon$ bien défini puisque ε est non nul. Ainsi, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, u_n \geq A > 0$. Cela prouve que u est non nulle à partir du rang N . D'autre part, la décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{++} implique

$$\forall n \geq N, 0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{A} = \varepsilon$$

soit encore

$$\forall n \geq N, \left| \frac{1}{u_n} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, $1/u$ est convergente de limite nulle. Dans le cas où u tend vers $-\infty$, on remarque que $-u$ tend vers $+\infty$, donc que $-1/u$ tend vers 0, donc que $1/u$ tend vers $-0 = 0$.

Attention

Si u est de limite nulle sans s'annuler, cela n'implique pas que $1/u$ tend vers $\pm\infty$. La suite $((-1)^n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0, mais son inverse $(n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend ni vers $-\infty$, ni vers $+\infty$.

Propriété 22 Soit u une suite à valeurs réelles qui tend vers 0. On suppose de plus que u est de signe constant et ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

- Si ce signe est positif, la suite $1/u$ tend vers $+\infty$.
- Si ce signe est négatif, la suite $1/u$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. — Soit A un réel positif non nul. Alors on exploite la limite de u via le réel $\varepsilon = 1/A$ bien défini et strictement positif. Alors il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq 1/A$$

On note N' un rang tel que $\forall n \geq N', u_n > 0$, alors

$$\forall n \geq \max(N, N'), 0 < u_n \leq 1/A$$

La décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{++} entraîne alors

$$\forall n \geq \max(N, N'), 0 < A \leq 1/u_n$$

Ainsi, $1/u$ tend vers $+\infty$

- Il suffit d'appliquer ce qui précède à la suite $-u$.

Exemple 25 Quelques formes indéterminées : On note u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n$ et $v = 1/u$, alors u tend vers $+\infty$ et v tend vers 0, mais uv tend vers 1. De même, v^2 tend vers 0, mais uv^2 tend vers 0. De plus, u^2 tend vers $+\infty$, mais u^2v tend vers $+\infty$. De plus, $1/v$ tend vers $+\infty$, mais $u - v$ tend vers 0, et $u^2 - 1/v$ tend vers $+\infty$.

Application 1 Limites des suites polynomiales et rationnelles en $+\infty$. Soit u une suite rationnelle (i.e la restriction d'une fonction rationnelle à \mathbb{N} éventuellement privé d'un nombre fini d'entiers) à valeurs rationnelles. On suppose qu'elle est de degré $m \in \mathbb{Z}$. On note a_m son coefficient de degré m , nécessairement non nul. Alors

- Si $m > 0$, et si $a_m > 0$, alors $\lim u = +\infty$. Si $m > 0$ et si $a_m < 0$, alors $\lim u = -\infty$.
- Si $m = 0$, alors $\lim u = a_m$.
- Si $m < 0$, alors $\lim u = 0$.

Récapitulatif

Limite d'une somme :

$\lim u$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u + v)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

Limite d'un produit :

$\lim u$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim v$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u \times v)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$

Limite d'un quotient : deux cas

1) le dénominateur a une limite non nulle :

$\lim u$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim v$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$\pm\infty$
$\lim(u/v)$	L/L'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$

2) le dénominateur a une limite nulle : on étudie son signe

$\lim u$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim v$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim(u/v)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$

⚠ Attention

Très peu de ces opérations sur les limites infinies fonctionnent dans le cas des suites complexes. On notera simplement que les produits fonctionnent en passant au module. Les sommes ne fonctionnent pas puisqu'on ne peut distinguer $+\infty$ et $-\infty$ dans le cadre complexe. Préférez toujours passer au module et étudier ces limites dans \mathbb{R} .

2.5 Conditions nécessaires et/ou suffisantes de convergence ou de divergence

On rappelle et établit des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'une suite numérique soit convergente.

Propriété 23 Soit u une suite numérique et l un scalaire. Alors u est convergente de limite l si et seulement si $u - l$ est convergente de limite nulle si et seulement si $|u - l|$ est convergente de limite nulle.

Démonstration. Laissée à titre d'exercice

Propriété 24 Soit u une suite numérique convergente. Alors u est bornée.

Cela s'applique par sa contraposée. Si une suite est non bornée, elle n'a aucune chance de converger.

Exemple 26 La suite $(n \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée, donc non convergente.

Propriété 25 Soit u une suite qui tend vers $\pm\infty$. Alors u est non bornée.

Démonstration. Prenons le cas où u tend vers $+\infty$ et montrons que u est non majorée. Soit A un réel, alors d'après la définition de la limite, il existe un rang N tel que $u_N \geq A$. Ainsi, u vérifie la négation du fait d'être majorée ($\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n < A$). De même, si u tend vers $-\infty$, $-u$ tend vers $+\infty$ donc est non majorée. Alors u est l'opposé d'une suite non majorée, donc non minorée. Dans tous les cas, u est non bornée.

Attention

La réciproque est fausse. Une suite non bornée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour cela. Il ne suffit pas de prendre des valeurs arbitrairement grandes, il faut prendre des valeurs arbitrairement grandes à partir d'un certain rang.

Propriété 26 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. On suppose que u tend vers l avec $l \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$. Alors $u > 0$ à partir d'un certain rang. Si u tend vers l avec $l \in \mathbb{R}^{-*} \cup -\infty$, alors $u < 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration. Dans le cas où l est réel strictement positif, il suffit d'utiliser la définition de la limite pour $\varepsilon = l/2$, ce qui assure que $u \geq l/2 > 0$ à partir d'un certain rang. Si $l = +\infty$, alors le réel $A = 1$ dans la définition de cette limite, assure que $u \geq 1 > 0$ à partir d'un certain rang. Il suffit d'appliquer ceci à la suite $-u$ pour obtenir le second point.

Remarque

Cette propriété facilite le traitement des inégalités, puisqu'on sait que le signe d'une telle suite est constant à partir d'un certain rang.

Théorème 9 (Encadrement, gendarmes) Soit u une suite numérique et l un scalaire. Alors u converge vers l si et seulement si il existe une suite v à valeurs réelles de limite nulle telle que

$$|u - l| \leq v \text{ à partir d'un certain rang}$$

Remarque

C'est sans doute le théorème le plus maniable pour démontrer qu'une suite est convergente.

Démonstration. Supposons u convergente vers l . Alors on introduit la suite $v = |u - l|$ et on montre qu'elle tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$ d'après la convergence de u vers l . Ainsi, $\forall n \geq N, |v_n - 0| \leq \varepsilon$, ce rang N convient ainsi pour démontrer la convergence de v vers 0. De plus, $|u - l| = |v| \leq |v|$. Réciproquement, supposons l'existence d'une telle suite v . Notons N un rang tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq v_n$. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de v vers 0 implique qu'il existe un entier N' tel que $\forall n \geq N', |v_n| \leq \varepsilon$. On en déduit

$$\forall n \geq \max(N, N'), |u_n - l| \leq |v_n| \leq \varepsilon$$

Ainsi, le rang construit $\max(N, N')$ satisfait la définition de la limite à la précision ε , donc u est convergente de limite l .

Attention

Sans l'hypothèse de convergence de v vers 0, c'est totalement faux. La suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est encadrée en module par 1, mais ne converge pas vers 0. Elle est simplement bornée par 1. La suite $(\sin(n)/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est en revanche majorée en module par $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui tend vers 0, donc tend aussi vers 0.

Propriété 27 Soit u une suite numérique convergente vers l . Alors $|u|$ converge vers $|l|$ et \bar{u} converge vers \bar{l} .

Démonstration. L'inégalité triangulaire inverse donne $||u| - |l|| \leq |u - l|$. Comme précédemment, la suite $|u - l|$ tend vers 0. Le théorème précédent implique alors que $|u|$ tend vers $|l|$. D'autre part, $|\bar{u} - \bar{l}| = |\overline{u - l}| = |u - l|$. Comme u tend vers l , $|u - l|$ tend vers 0, donc \bar{u} tend vers \bar{l} .

Propriété 28 Soit u une suite numérique à valeurs complexes. Alors u est convergente si et seulement si $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont convergentes, auquel cas

$$\lim u = \lim \Re(u) + i \lim \Im(u)$$

Démonstration. Supposons que u est convergente. Notons l sa limite. Alors par linéarité de la partie réelle, $\Re(u - l) = \Re(u) - \Re(l)$. Or d'après les inégalités sur les complexes, $|\Re(u - l)| \leq |u - l|$. Ainsi, $|\Re(u) - \Re(l)| \leq |u - l|$ et $|u - l|$ tend vers 0. On en déduit que $\Re(u)$ tend vers $\Re(l)$. Le même argument implique que $\Im(u)$ est alors convergente de limite $\Im(l)$. Réciproquement, supposons $\Re(u)$ et $\Im(u)$ convergentes. Notons $l = \lim \Re(u) + i \lim \Im(u)$ et montrons que u est convergente de limite l . Soit $\varepsilon > 0$, d'après les convergences respectives de $\Re(u)$ et $\Im(u)$ vers leurs limites, il existe des rangs N et N' tels que

$$\forall n \geq N, |\Re(u_n) - \lim \Re(u)| \leq \varepsilon/2$$

$$\forall n \geq N', |\Im(u_n) - \lim \Im(u)| \leq \varepsilon/2$$

On en déduit, par croissance du carré sur \mathbb{R}^+ ,

$$\forall n \geq \max(N, N'), |u_n - l|^2 = |\Re(u_n) - \lim \Re(u)|^2 + |\Im(u_n) - \lim \Im(u)|^2 \leq \varepsilon^2/2 \leq \varepsilon^2$$

Alors, par croissance de la racine carrée sur \mathbb{R}^+ , on a

$$\forall n \geq \max(N, N'), |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On a donc bien prouvé la convergence de u vers l .

Théorème 10 Soit u une suite numérique à valeurs réelles. Alors u tend vers $+\infty$ si et seulement si il existe une suite v à valeurs réelles qui tend vers $+\infty$ et telle que $v \leq u$ à partir d'un certain rang. La suite u tend vers $-\infty$ si et seulement si il existe une suite w à valeurs réelles qui tend vers $-\infty$ et telle que $u \leq w$ à partir d'un certain rang.

Démonstration. Le sens direct est immédiat puisque $u \leq u$. Réciproquement supposons qu'il existe une telle suite v . Alors notons N un rang tel que $\forall n \geq N, v \leq u$. Soit A un réel, comme v tend vers $+\infty$, il existe un rang N' tel que $\forall n \geq N', v_n \geq A$. On en déduit par transitivité

$$\forall n \geq \max(N, N'), u_n \geq v_n \geq A$$

donc que u tend vers $+\infty$. Pour l'autre cas, il suffit de remarquer que u tend vers $-\infty$ si et seulement si $-u$ tend vers $+\infty$.

Exemple 27 La suite H définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$. En effet,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k} \geq \frac{1}{t}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

La relation de Chales indique alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$$

Comme $n \mapsto \ln(n+1)$ tend vers $+\infty$, la suite H tend vers $+\infty$.

3 Exemples fondamentaux de suites convergentes ou divergentes

3.1 Suites définies par récurrence

Propriété 29 Soit u une suite arithmétique. Alors u est convergente si et seulement si sa raison est nulle. Si sa raison est non nulle, alors $|u|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. Si sa raison est nulle, elle est alors constante, donc convergente. Si sa raison b est non nulle, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$, donc $|u_n| \geq n|b| - |u_0|$. D'après les opérations sur les limites, $|u|$ tend vers $+\infty$.

Propriété 30 Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul. Alors u est convergente si et seulement si $|q| < 1 \vee q = 1$. Dans le premier cas, elle est de limite nulle. Dans le second cas, sa limite vaut son premier terme. Si $|q| > 1$, alors $|u|$ tend vers $+\infty$.

La démonstration de ce lemme passe entre autres par le lemme suivant, parfois appelé inégalité de Bernoulli :

Lemme 1 Soit $x \in]-1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Démonstration. Ce lemme se prouve classiquement par récurrence. Pour $n = 1$, $(1+x)^1 = 1+x$, tandis que $1+1 \times x = 1+x$, ce qui prouve l'initialisation. Soit n un entier naturel tel que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Alors comme $1+x > 0$, $(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$, soit encore $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ puisque $nx^2 \geq 0$. Ainsi, cette propriété est héréditaire, et donc valide pour tout entier n par récurrence.

Démonstration. Soit q la raison de u . Si q est un réel et $q > 1$, alors l'inégalité de Bernoulli pour $x = q-1$, implique $\forall n \in \mathbb{N}^*, q^n \geq 1+n(q-1)$. Ce minorant tend vers $+\infty$, donc $(q^n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$, comme le premier terme de u est non nul, u tend vers $\pm\infty$ selon son signe. En particulier, $|u|$ tend vers $+\infty$ et u est non convergente. Supposons à présent que q est réel et $q < 1$, alors $|u|$ tend par le même argument vers $+\infty$ en considérant la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n$. Enfin, si q est complexe et vérifie $|q| > 1$, alors $|u|$ est géométrique réelle de raison $|q|$, tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. En particulier, elle est non bornée, et donc non convergente.

Si $q = 0$, la suite est stationnaire en 0 donc convergente. Dans le cas où q est complexe non nul et vérifie $|q| < 1$, alors la suite $1/u$ vérifie le cas précédent, donc $|1/u|$ tend vers $+\infty$, donc $|u|$ tend vers 0, donc u tend vers 0.

Enfin, traitons le cas où q est complexe et $|q| = 1$. Si $q = 1$, la suite est constante égale à son premier terme, donc convergente. Notons à présent θ un argument de q dans $]0, 2\pi[$ de sorte que $q = e^{i\theta}$. Alors pour tout entier n , $q^n = \exp(in\theta)$. Si cette suite convergeait vers un complexe l , celui vérifierait $l = ql$ (extraction ou continuité de $z \mapsto ze^{i\theta}$). Or comme $(|q|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $|l|$, $|l| = 1$, donc $l \neq 0$. Ainsi, $q = 1$, ce qui est contradictoire.

Exemple 28 On considère la suite S définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k}$. Alors, comme $1/2 \neq 1$, les sommes de suites géométriques entraînent

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{2^{-1} - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-1}} = 1 - 2^{-n}$$

Alors, S converge vers 1 par linéarité.

Exemple 29 On considère une suite numériques à valeurs réelles u strictement positive telle que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite λ . Montrons que si $\lambda < 1$, alors u est convergente, puis que si $\lambda > 1$, alors u tend vers $+\infty$. Dans le premier cas, comme $\lambda < 1$, alors l'intervalle ouvert $]0, (\lambda+1)/2[$ contiendra toutes les valeurs de $(u_{n+1}/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang N . On note $\mu = (1+\lambda)/2 < 1$. Comme toutes les quantités sont positives, on a $\forall n \geq N, u_n \leq u_N \mu^{n-N}$ par produit télescopique. Comme $\mu < 1$, on en déduit par théorème d'encadrement que u tend vers 0. Le second se traite en considérant la suite inverse de u .

Propriété 31 Soit u une suite arithmético-géométrique telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$. Alors u est convergente si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $a = 1$ et $b = 0$ ou
- $|a| < 1$ ou
- $(|a| > 1$ ou $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\})$ et $u_0 = b/(1-a)$.

Démonstration. Laissée à titre d'exercice

Propriété 32 Soit $E = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$ avec $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Si les racines (λ, μ) du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$ sont de module strictement plus petit que 1, alors toutes les suites de E sont convergentes. Si l'une de ces racines est du module supérieur ou égale à 1, distincte de 1, alors E contient une suite divergente.

Exemple 30 Il suffit en particulier dans le cas a, b réels tels que $a^2 - 4b < 0$, d'avoir $|b| < 1$ pour que toutes les solutions soient convergentes.

3.2 Suites monotones

Théorème 11 (Convergence monotone) Soit u une suite numérique à valeurs réelles monotone. Alors u admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément,

- Dans le cas où u est croissante, u tend vers $\sup u$.
 - Si u est majorée, $\sup u$ appartient à \mathbb{R} , et u est convergente.
 - Si u n'est pas majorée, $\sup u = +\infty$ et u tend vers $+\infty$.
- Dans le cas où u est décroissante, u tend vers $\inf u$.
 - Si u est minorée, $\inf u$ appartient à \mathbb{R} , et u est convergente.
 - Si u n'est pas minorée, $\inf u = -\infty$ et u tend vers $-\infty$.

Démonstration. Commençons par traiter le cas où u est croissante majorée. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\sup(u) - \varepsilon < \sup(u)$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément de $u(\mathbb{N})$, notons-le u_N tel que $\sup(u) - \varepsilon < u_N$. Or comme u est croissante, $\forall n \geq N, \sup(u) - \varepsilon < u_N \leq u_n$. On a ainsi, l'encadrement,

$$\forall n \geq N, \sup(u) - \varepsilon < u_n \leq \sup(u)$$

A fortiori,

$$\forall n \geq N, |u_n - \sup(u)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, u est convergente de limite $\sup(u)$.

Supposons à présent u croissante non majorée. Alors $u(\mathbb{N})$ est non majorée. D'après la convention adoptée sur les bornes supérieures, $\sup(u) = +\infty$. Montrons que u tend vers $+\infty$. Soit A un réel strictement positif, comme u est non majorée, il existe un entier N tel que $u_N \geq A$. Mais alors, comme u est croissante, $\forall n \geq N, u_n \geq u_N \geq A$. Ainsi, u tend vers $+\infty$.

Le cas décroissante découle de ce qui précède, en considérant la suite $-u$.

Exemple 31 Supposons qu'on arrive à établir la monotonie d'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors il suffit de la majorer ou de la minorer pour obtenir sa convergence.

Définition 15 Soit u et v deux suites numériques à valeurs réelles. On dit que u et v sont adjacentes lorsque

- u est croissante
- v est décroissante
- la suite $u - v$ est convergente de limite nulle.

Théorème 12 (Convergence des suites adjacentes) Soit u et v deux suites numériques à valeurs réelles et adjacentes. Alors u et v sont convergentes et $\lim u = \lim v$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Pour cela, on remarque $u - v = u + (-v)$ est la somme de deux suites croissantes, donc est croissante. En particulier, pour tout entiers naturels k et n tels que $k \geq n$, $u_k - v_k \geq u_n - v_n$. On fixe alors n et on remarque qu'on peut passer à la limite quand k tend vers $+\infty$ puisque la suite $u - v$ est convergente. Comme les inégalités sont compatibles avec les passages à la limite, on en déduit que $\lim(u - v) \geq u_n - v_n$, soit $0 \geq u_n - v_n$. Donc $u_n \leq v_n$. Comme v est décroissante, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq v_0$, donc que u est majorée. Comme u est croissante, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n$, donc que v est minorée. Ainsi, u est croissante majorée, donc convergente. De même, v est décroissante minorée, donc convergente. Par linéarité de la limite, $\lim(u) - \lim(v) = \lim(u - v) = 0$, donc $\lim(u) = \lim(v)$.

Exemple 32 On note pour tout entier naturel non nul n , $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Alors les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par conséquent, elles convergent vers la même limite. On en déduit (en anticipant la prochaine partie) que la suite S converge (sa limite vaut $-\ln(2)$).

3.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Exemple 33 La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente. Pourtant, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes car constantes.

Définition 16 On appelle extractrice (ou fonction d'extraction) toute application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Propriété 33 Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Démonstration. Cela se prouve par récurrence. $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geq 0$. Ainsi l'initialisation est vérifiée. Soit n un entier naturel tel que $\varphi(n) \geq n$. Alors φ est strictement croissante, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Comme il s'agit d'entiers naturels, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$, donc $\varphi(n+1) \geq n+1$. Ainsi la propriété est héréditaire, donc valable pour tout entier n par récurrence.

Définition 17 Soit u une suite numérique. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de u toute application de la forme $u \circ \varphi$ avec φ une extractrice.

Notation

On note en général les sous-suites sous la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

⚠ Attention

Il s'agit d'une composition à droite, une extraction d'extraction est de la forme $u \circ \varphi \circ \psi$ qui se note alors $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 34 Construction d'une extractrice par récurrence.

Propriété 34 Soit u une suite numérique convergente. Alors toutes ses suites extraites sont convergentes de limite $\lim u$. Soit u une suite numérique réelle qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors toute suite extraite de u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. Notons $l = \lim u$ dans le cas u convergente. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$. D'après la propriété précédente, on en déduit que $\forall n \geq \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc que $|u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$. Ainsi, $u \circ \varphi$ est convergente de limite l et ce quelque soit l'extractrice φ . Supposons à présent que u tend vers $+\infty$. Soit A un réel, alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, u_n \geq A$. Alors, pour toute extractrice φ , $\forall n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc $u_{\varphi(n)} \geq A$. Ainsi, $u \circ \varphi$ tend vers $+\infty$. On traite le cas $-\infty$ de la même manière.

On en déduit par contraposée

Propriété 35 Soit u une suite numérique. On suppose qu'il existe deux suites extraites convergentes de u de limites distinctes. Alors u est divergente.

Exemple 35 Soit u une suite numérique convergente de limite non nulle. Alors la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n$ est divergente.

Propriété 36 Soit u une suite numérique. Alors il faut et il suffit que les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes de même limite pour que u soit convergente.

Démonstration. Soit l la limite commune des deux suites mentionnées. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et il existe un rang N' tel que $\forall n \geq N', |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$. On pose alors $N'' = \max(2N, 2N' + 1)$. Soit $n \geq N$, alors si n est pair, il existe un entier p tel que $n = 2p$, ce qui entraîne $p \geq N$, donc $|u_{2p} - l| \leq \varepsilon$, soit $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Si n est impair, il existe un entier q tel que $n = 2q + 1$, ce qui entraîne $q \geq N'$, donc $|u_{2q+1} - l| \leq \varepsilon$, soit $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Dans tous les cas,

$$\forall n \geq N'', |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, u est convergente de limite l .

Théorème 13 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) Soit u une suite numérique bornée. Alors il existe une sous-suite de u convergente.

Démonstration. Commençons par le cas où u est réelle et construisons une sous-suite convergente par dichotomie. Notons $[a, b]$ un segment réel tel que a est un minorant de u et b un majorant de u . On va construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sorte que pour tout entier n le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u . On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ qui contient tous les termes de la suite u donc une infinité d'entre eux. On pose alors $c = (a_0 + b_0)/2$. Alors au moins l'un des deux intervalles $[a_0, c], [c, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite u , puisque \mathbb{N} est infini. Si $[a_0, c]$ contient une infinité de termes de u , on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c$. Si ce n'est pas le cas, on pose $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$. Dans les deux cas, $a_0 \leq a_1, b_1 \leq b_0, b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ et le segment $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes de la suite u .

Soit n un entier naturel non nul. Supposons construits a_n et b_n des réels tels que $a_{n-1} \leq a_n, b_n \leq b_{n-1}, b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$ et le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u . Alors, on pose $c_n = (a_n + b_n)/2$. Alors au moins l'un des deux intervalles $[a_n, c_n], [c_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u puisque \mathbb{N} est infini. Si c'est le cas pour le segment $[a_n, b_n]$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Sinon, on pose $a_{n+1} = c_n$

et $b_{n+1} = b_n$. Dans les deux cas, on aura bien $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \geq b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ et le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite u .

On a ainsi construit par récurrences deux suites a et b telles que a est croissante et b décroissante. De plus, $b - a$ est géométrique de raison $1/2$, donc convergente de limite nulle. D'après le théorème des suites adjacentes, les suites a et b sont convergentes de même limite. Notons cette dernière l . Construisons à présent une sous-suite de u qui tend vers l . On pose $\varphi(0) = 0$ qui vérifie $u_0 \in [a_0, b_0]$. Alors $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes de u , en particulier une infinité de termes de $(u_k)_{k > \varphi(0)}$ puisque je n'ai ainsi ôté qu'un nombre fini de termes de u . On en choisit un et on note son indice sous la forme $\varphi(1)$. Celui-ci vérifie en particulier $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$. Soit n un entier naturel non nul tel que $\varphi(n)$ est construit vérifiant $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$. Construisons $\varphi(n+1)$. Comme $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite u par construction, ce segment contient une infinité de termes de la suite $(u_k)_{k > \varphi(n)}$ puisque je n'ai ôté ainsi qu'un nombre fini de termes de u . Je choisis l'un de ces termes et note son indice $\varphi(n+1)$. Ceci assure que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. La construction de la fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ assure qu'elle est strictement croissante donc qu'il s'agit d'une extractrice. De plus, pour tout entier naturel n , $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$. Comme a et b sont convergentes de même limite, le théorème d'encadrement assure que $u \circ \varphi$ est convergente de limite l .

Terminons par le cas où u est à valeurs complexes. Comme u est bornée, alors $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont bornées. D'après le cas précédent, il existe une sous-suite $\Re(u) \circ \varphi$ de $\Re(u)$ convergente. Mais alors, $\Im(u) \circ \varphi$ est encore bornée (puisque d'image incluse dans celle de $\Im(u)$). On peut en extraire une sous-suite convergente $\Im(u) \circ \varphi \circ \psi$. Mais alors $\Re(u) \circ \varphi \circ \psi$ est encore convergente comme extraction d'une suite convergente. On en conclut $u \circ (\varphi \circ \psi)$ est convergente d'après la caractérisation de la convergence d'une suite complexe par ses parties réelle et imaginaire.

Application 2 Soit x une suite réelle bornée. On suppose que $e^{ix_n} \rightarrow 1$ et $e^{ix_n\sqrt{2}} \rightarrow 1$. On va montrer que x converge vers 0. Comme d'habitude, le logarithme complexe est banni! On sait que x admet une sous-suite convergente. Notons l la limite d'une telle suite. Alors comme $x \mapsto e^{ix}$ et $x \mapsto e^{ix\sqrt{2}}$ sont continues, alors $e^{ix_{n_k}} \rightarrow e^{il}$ comme sous-suite d'une suite convergente et $e^{ix_n\sqrt{2}} \rightarrow e^{il\sqrt{2}}$ par le même argument. Par unicité de la limite, on en déduit que $e^{il} = 1$ et $e^{il\sqrt{2}} = 1$. Par conséquent, il existe des entiers relatifs p et q tels que $l = 2q\pi$ et $l\sqrt{2} = 2p\pi$. Si l est non nul, alors $\sqrt{2} = p/q$ ce qui est absurde. Par conséquent, l est nul, et ce pour toute limite de sous-suite convergente de x . Supposons alors que x ne tend pas vers 0, donc

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n| > \varepsilon$$

Alors, cela permet de construire une sous-suite extraite de x tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(n)}| > \varepsilon$. Comme sous-suite d'une suite bornée, elle est encore bornée, donc possède une sous-suite convergente et sa limite L vérifie $|L| > \varepsilon$. Or cette dernière est encore une sous-suite de x donc de limite nulle, ce qui contredit l'inégalité précédente.

Ainsi, x converge vers 0.

Propriété 37 Soit u une suite à valeurs réelles non majorée (resp. non minorée). Alors il existe une sous-suite de u qui tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

Démonstration. Commençons par le cas u non majorée. On construit cette suite extraite par récurrence. Comme u est non majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 0$. On pose alors $\varphi(0) = n_0$. Alors la suite $(u_k)_{k > \varphi(0)}$ est non majorée, sinon u serait majorée via le maximum d'un nombre fini de réels. Par conséquent, il existe un entier $n_1 > \varphi(0)$ tel que $u_{n_1} \geq 1$. On pose alors $\varphi(1) = n_1$ qui vérifie $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $u_{\varphi(1)} \geq 1$. Soit n un entier naturel non nul. Supposons construit un entier $\varphi(n)$ tel que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $u_{\varphi(n)} \geq n$. Alors comme précédemment, la suite $(u_k)_{k > \varphi(n)}$ est non majorée, car sinon la suite u serait majorée par le maximum d'un nombre fini de réels. Par conséquent, il existe un entier n_{k+1} tel que $u_{n_{k+1}} \geq n+1$, notons cet indice $\varphi(n+1)$. Il vérifie alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \geq n+1$. On a ainsi construit par récurrence une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. C'est donc bien une extractrice et la suite extraite vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \geq n$. Comme n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, la suite $u \circ \varphi$ tend vers $+\infty$.

Dans l'autre cas, on applique ce qui précède à $-u$.

4 Retour sur la topologie.

4.1 Epsilonisation de propriétés topologiques

Propriété 38 Soit X une partie de \mathbb{R} . Alors X est dense dans \mathbb{R} si et seulement si pour tout réel a , il existe une suite à valeurs dans X convergente de limite a si et seulement si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, |x - a| < \varepsilon$$

Exemple 36 Soit X une partie dense dans \mathbb{R} . Alors X est non majorée, et non minorée.

Propriété 39 Soit X une partie non vide majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $a = \sup(X)$ (resp. $\inf(X)$) si et seulement si a majore (resp. minore) X et il existe une suite à valeurs dans X convergente de limite a si et seulement si

$$\begin{aligned} & \forall x \in X, x \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, a - \varepsilon < x \leq a \\ & (\text{resp. } \forall x \in X, x \geq a \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, a - \varepsilon > x \geq a) \end{aligned}$$

4.2 Notion de voisinage

Définition 18 Soit a un scalaire et r un réel positif. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(l, r) = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - l| < r\}$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il s'agit de l'intervalle $]a - r, a + r[$.

Attention

Le cas $r = 0$ donne l'ensemble vide qui est un cas trop particulier.

Définition 19 On appelle voisinage de l toute partie V de \mathbb{K} telle qu'il existe un réel r strictement positif tel que $V \supset B(l, r)$. On appelle voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) toute partie V de \mathbb{R} telle qu'il existe un réel A vérifiant $V \supset]A, +\infty[$ (resp. $V \supset]-\infty, A[$). On appelle voisinage de ∞ dans \mathbb{C} toute partie V de \mathbb{C} telle que qu'il existe un réel $r \geq 0$ vérifiant $V \supset B(0, r)^c$ (i.e V contient le complémentaire d'une boule).

Définition 20 On appelle voisinage de $+\infty$ dans \mathbb{N} toute partie V de \mathbb{N} telle qu'il existe un entier N vérifiant $V \supset]N, +\infty[$.

Propriété 40 Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et u une suite numérique à valeurs réelles. Alors u tend vers l si et seulement si pour tout voisinage V de l , u appartient à V à partir d'un certain rang. Soit $l \in \mathbb{C} \cup \infty$ et u une suite numérique à valeurs complexes. Alors u tend vers l si et seulement si pour tout voisinage V de l , u appartient à V à partir d'un certain rang.

Exercice 7 (Théorique et difficile) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que u converge vers l si et seulement si pour tout voisinage V de l , $u^{-1}(V)$ est un voisinage de $+\infty$.

Définition 21 Soit A une partie de \mathbb{K} . On dit que A est ouverte lorsque

$$\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subset A$$

Remarque

Cela ne contredit pas la définition des intervalles ouverts.

Définition 22 Soit A une partie de \mathbb{K} et a un élément de \mathbb{K} . On dit que a est adhérent à \mathbb{K} lorsqu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Attention

Cela n'implique pas nécessairement que a appartient à A . Il suffit de prendre le cas de l'intervalle $]0, 1]$ auquel adhère le réel 0 qui pourtant ne lui appartient pas.

Exemple 37 Soit A une partie réelle non vide majorée. Alors $\sup(A)$ est adhérent à A .

Propriété 41 Soit A une partie de \mathbb{K} et a un élément de \mathbb{K} . Alors a est adhérent à \mathbb{K} si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, |b - a| < \varepsilon$$

Remarque

Dans le cadre réel, on convient que $+\infty$ est adhérent à toute partie non vide et non majorée. On convient que $-\infty$ est adhérent à toute partie non vide et non minorée.

Notation

L'ensemble des points adhérents à une partie A est noté \overline{A} .