

Exercices :

Ils porteront sur les équations différentielles : toutes notions du chapitre 15.

Cours**Ch16 Calcul différentiel et optimisation**

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 . Les objectifs de cette section sont les suivants :

- généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur \mathbb{R} ;
- donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel normé F de dimension finie.

Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v .

Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.

Dérivées partielles dans une base.

Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.

Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.

b) Différentielle

Application différentiable au point a .

Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.

(★) Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.

(★) Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.

Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a . (★) Unicité de la différentielle et (★) relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$.

Notation $df(a)$.

Application différentiable sur un ouvert Ω . Différentielle sur Ω .

Notation df .

Cas particuliers : application constante, application linéaire.

CONTENUS

(★) Lien entre différentielle et dérivées partielles.

Cas des fonctions d'une variable :

Si Ω est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , (★) la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a . Expression du gradient en base orthonormée.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

(★) Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et si f est à valeurs dans \mathbb{R}^m , la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques. Élément générique de cette matrice.

Notation $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

c) Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et où f_1, \dots, f_p sont des applications différentiables. Preuve dans le cas où $p = 2$.
