Rapport de khôlle n° 5

Khôlleur : Mr Tuffal
Date : 14/11/22
Note : 14/20

Question de cours : Formes des solutions d'une équation homogène linéaire de degré 1.

On note $(E_h) : y' + ay = 0$

Soit A une primitive de a. Alors :

$$f \text{ solution de } (E_h) \iff \exists c \in \mathbb{C},\ \forall x \in I,\ f(x) = c\exp(-A(x))$$

Démonstration : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

On pose : $g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto f(x)e^{A(x)} \end{array}$ dérivable par produit et composition.

De plus :

$$\forall x \in I,\quad g'(x) = f'(x)e^{A(x)} + a(x)f(x)e^{A(x)}$$
$$= e^{A(x)}\left[f'(x) + a(x)f(x)\right]$$

Alors

$$f \text{ solution de } (E_h) \iff f' + af = 0$$
$$\iff e^{A(x)}(f' + af) = 0 \quad \text{puisque } e^{A(x)} \text{ ne s'annule pas.}$$
$$\iff \forall x \in I,\ g'(x) = 0$$
$$\iff \exists c \in \mathbb{C},\ \forall x \in I,\ g(x) = c$$
$$\iff \exists c \in \mathbb{C},\ \forall x \in I,\ f(x) = c\exp(-A(x))$$

Exercice : Déterminer tous les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toutes les solutions de $(E) : y'' + ay' + by = 0$ soient bornées.

On note $(P) : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique de (E)

On a : $\Delta_P = a^2 - 4b$

<u>1er cas :</u> $\Delta_P > 0$

Alors, en notant λ et μ les racines de (P), les solutions de (E) sont de la forme :

$$\alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x} \quad , \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ces solutions sont bornées si et seulement si $\lambda = \mu = 0$.
Or $\Delta > 0$ donc c'est impossible.
Ces solutions ne sont donc pas bornées

<u>2ème cas :</u> $\Delta = 0$

Alors les solutions de (E) sont de la forme :

$(\alpha + \beta x)e^{\lambda x}$ avec λ la racine double de (P).
et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Ces solutions ne sont pas bornées. En effet :

- si $\lambda = 0$, alors les solutions sont de la forme $\alpha + \beta x$ et donc ne sont pas bornées
- si $\lambda \neq 0$, alors évidemment les solutions ne sont pas bornées.

3ème cas : $\Delta < 0$

On note λ et μ les racines complexes conjuguées de (P) et $\lambda = \delta + i\omega$

Les solutions de (E) sont alors de la forme :

$$\alpha e^{\delta x} \cos(\omega x) + \beta e^{\mu x} \sin(\omega x) \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Ces solutions sont bornées si et seulement si $\delta = \mu = 0$

Or : $\delta = \lambda - i\omega = 0 \Leftrightarrow \lambda = i\omega$

Alors : $\frac{-a}{2} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = i\omega$ ie $\frac{-a}{2} = 0$ par unicité de l'écriture algébrique.

Donc $\boxed{a = 0}$

De plus, $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega$ donc $-\Delta = 4\omega^2 \Leftrightarrow 4b - \cancel{a}^{2} = 4\omega^2$ (0)

$\Leftrightarrow b = \omega^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{b} = \omega$

$\Leftrightarrow \boxed{b > 0}$

Conclusion : Les couples (a, b) tels que les solutions de l'équation sont bornées sont : $(0, b)$ avec $b > 0$

Bilan de la khôlle :

- La question de cours aurait due être mieux traitée.
- L'exercice n'est pas difficile mais demande un recul assez grand par rapport à l'énoncé.

Étant donné que j'étais seul face au khôlleur, je ne me suis pas offert autant de temps pour réfléchir qu'à l'accoutumée.