Kholle 16 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E un espace préhilbertien réel. Soit x un élément de E. Définir et caractériser géométriquement le projeté orthogonal de x sur F.
2. Soit $\alpha > 0$. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, $X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/n^{1+\alpha})$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est presque sûrement égal à un ensemble que l'on déterminera.
3. Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que sa norme vérifie

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

   Montrer que E est préhilbertien réel.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 16 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.
2. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E\left[e^{i\theta X}\right] e^{-ikt} d\theta$$

   (b) On considère $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi : $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$. On pose pour tout entier n non nul, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que la série de terme général $P(S_{2n} = 0)$ diverge.
3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. On le munit du produit

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

   Montrer que c'est un produit scalaire, puis déterminer l'orthogonal du sous-espace $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$.

★★★

Kholle 16 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Soit u un endomorphisme de E un espace euclidien. Soit F un sous-espace de E stable par u. Que dire de $F^\perp$? Le démontrer.
2. (a) Soit X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto E(|X-y|)$. Montrer que f est lipschitzienne et convexe.

   (b) On suppose que X est d'espérance finie et $E[X] = 0$. Soit Y une variable indépendante de X de même loi. Montrer que $E(|X-Y|) \geqslant E(|X|)$.
3. Soit E un espace préhilbertien réel. Pour toute famille finie $(y_1,\dots,y_p)$ de vecteurs de E, on note $g(y_1\dots,y_p) = \det((y_i|y_j)_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant p})$. Soit V un sous-espace de E de base $(e_1,\dots,e_n)$ et x un élément de E. Montrer que

$$(d(x,V))^2 = \frac{g(e_1,\dots,e_n,x)}{g(e_1,\dots,e_n)}$$

★★★