

# Classes préparatoires MPSI et MP2I

## Programme de mathématiques

### Table des matières

## Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

### Objectifs de formation

En classe préparatoire scientifique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux autres disciplines scientifiques.

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

### Description et prise en compte des compétences

#### Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

#### Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

### **Représenter**

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

### **Raisonner, argumenter**

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

### **Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique**

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.

Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

### **Communiquer à l'écrit et à l'oral**

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

## **Unité de la formation scientifique**

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

## Architecture et contenu du programme

L'année est découpée en deux semestres. Les contenus du programme peuvent se répartir en trois champs : algèbre, analyse et probabilités. L'algèbre et l'analyse occupent le plus grand volume sur les deux semestres, tandis que les probabilités sont introduites au second semestre. Si la géométrie n'apparaît pas comme un champ autonome, son importance dans la représentation des objets du programme ne saurait être sous-estimée. Ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour l'étude des nombres complexes, l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.

L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec les autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

Outre l'étude des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude de l'arithmétique des entiers relatifs et des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'une section spécifique, qui est exploitée ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation. Enfin, les familles sommables et les fonctions de deux variables préparent au programme de deuxième année.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste. L'accent mis sur cette notion permet de travailler rapidement avec des événements construits en termes de variables aléatoires.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.

Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés, TIPE).

## Organisation du texte

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; il précise aussi certains points de terminologie et certaines notations. Il fixe clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre « Premier semestre ».

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

## Premier semestre

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs.

- Aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur, en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, trois sections jouent un rôle particulier.
  - La section « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Cette section n'a pas vocation à être enseignée d'un seul tenant ni en tout début de semestre.
  - Les sections « Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie » et « Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral » sont axées sur les techniques de calcul. La seconde est fondée sur des théorèmes admis à ce stade, mais démontrés plus loin dans le programme. Cette présentation en deux temps, destinée à faciliter les apprentissages, peut être modulée par le professeur.
- Susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux.
  - La section « Nombres complexes » permet l'étude algébrique et géométrique de ces nombres. Elle aborde des applications à la trigonométrie ainsi qu'une première approche des équations algébriques.
  - Les sections « Nombres réels et suites numériques » et « Limites, continuité, dérivabilité » fondent l'analyse réelle sur des bases solides.
  - La section « Calcul matriciel et systèmes linéaires » fournit le vocabulaire et les techniques de résolution des systèmes linéaires, et prépare l'algèbre linéaire du second semestre.
  - Par les possibilités qu'elle offre de combiner beaucoup d'idées et de techniques étudiées au cours du premier semestre, la section « Polynômes » constitue un objet d'étude pertinent pour la fin du semestre.

Le professeur organise l'enseignement de la manière qui lui semble la plus profitable, en gardant à l'esprit le fait que la maîtrise rapide des techniques de calcul est un impératif, notamment en vue de l'enseignement de physique-chimie. Les ensembles de nombres usuels  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  sont supposés connus. Toute construction est hors programme.

### Raisonnement et vocabulaire ensembliste

*Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.*

*Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.*

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Rudiments de logique

Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.

#### b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$ , $\overline{A}$ et $A^c$ pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$ .
Recouvrement disjoint, partition.	

### c) Applications et relations

Application d'un ensemble dans un ensemble.  
Graphe d'une application.

Le point de vue est intuitif : une application de  $E$  dans  $F$  associe à tout élément de  $E$  un unique élément de  $F$ .  
Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.  
Notations  $\mathcal{F}(E, F)$  et  $F^E$ .

Famille d'éléments d'un ensemble.  
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.  
Restriction et prolongement.  
Image directe.  
Image réciproque.

Notation  $\mathbb{1}_A$ .  
Notation  $f|_A$ .  
Notation  $f(A)$ .  
Notation  $f^{-1}(B)$ . Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.

Composition.  
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.  
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.  
Relation binaire sur un ensemble.  
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.

Notation  $f^{-1}$ . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

La notion d'ensemble quotient est hors programme.  
Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent.  
Congruences dans  $\mathbb{R}$ , dans  $\mathbb{Z}$ . Notation  $a \equiv b [c]$ .

Relation d'ordre. Ordre partiel, total.

## Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;
- résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;
- manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations ;
- utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.

### a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations  $\sum_{i \in I} a_i$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i$ ,  $\prod_{i \in I} a_i$ ,  $\prod_{i=1}^n a_i$ . Cas où  $I$  est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k$ .

Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ .

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Exemples de sommes triangulaires.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Convention  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k < 0$  et  $k > n$ .

Formule du binôme dans  $\mathbb{R}$ .

### b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

Interprétation géométrique : intersection de droites dans  $\mathbb{R}^2$ , de plans dans  $\mathbb{R}^3$ .

Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.

Notations  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ( $\lambda \neq 0$ ),  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .



**c) Inégalités**

Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Compatibilité avec les opérations.  
Intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Dans  $\mathbb{R}$ , parties majorées, minorées, bornées.  
Majorant, minorant; maximum, minimum.  
Partie entière d'un nombre réel.

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq b$ .

Notation  $\lfloor x \rfloor$ .

**d) Trigonométrie**

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.

Relation de congruence modulo  $2\pi$  sur  $\mathbb{R}$ .

Cosinus et sinus de  $\pi \pm x$ , de  $\frac{\pi}{2} \pm x$ .

Cosinus et sinus des angles usuels.

Formules d'addition  $\cos(a \pm b)$ ,  $\sin(a \pm b)$ . Cas particulier des formules de duplication :  $\cos(2a)$ ,  $\sin(2a)$ .

Fonctions circulaires cosinus et sinus.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , inégalité  $|\sin(x)| \leq |x|$ .

Fonction tangente.

Tangente de  $\pi \pm x$ . Tangente des angles usuels.

Formule d'addition  $\tan(a \pm b)$ .

Notation  $a \equiv b [2\pi]$ .

Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant  $\cos(a)\cos(b)$ ,  $\cos(a)\sin(b)$ ,  $\sin(a)\sin(b)$ .

On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

Notation  $\tan$ . Dérivée, variations, représentation graphique.

Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de  $\cos(t)$  et  $\sin(t)$  en fonction de  $\tan(t/2)$ .

**Nombres complexes**

*L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :*

- l'étude algébrique du corps  $\mathbb{C}$  et la notion d'équation algébrique;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

**a) Nombres complexes**

Parties réelle et imaginaire.

Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de  $\sum_{k=0}^n x^k$ , de la factorisation de  $a^n - b^n$ , de la formule du binôme.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

La construction de  $\mathbb{C}$  est hors programme.

On identifie  $\mathbb{C}$  au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

**b) Conjugaison et module**

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Module.

Relation  $|z|^2 = z\bar{z}$ , module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Image du conjugué dans le plan complexe.

Interprétation géométrique de  $|z - z'|$ , cercles et disques.



### c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de  $e^{it}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de  $1 \pm e^{it}$ , de  $e^{ip} \pm e^{iq}$ .

Formule de Moivre.

Notation  $\mathbb{U}$ .

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant  $\cos(p) \pm \cos(q)$ ,  $\sin(p) \pm \sin(q)$ .

Linéarisation, calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$  et de  $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$ .

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de  $\cos(nt)$  et  $\sin(nt)$  en fonction de  $\cos t$  et  $\sin t$ .

### d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique  $re^{i\theta}$  ( $r > 0$ ) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de  $a \cos t + b \sin t$  en  $A \cos(t - \varphi)$ .

### e) Équations algébriques

Pour  $P$  fonction polynomiale à coefficients complexes admettant  $a$  pour racine, factorisation de  $P(z)$  par  $z - a$ . Résolution des équations du second degré dans  $\mathbb{C}$ . Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

### f) Racines $n$ -ièmes

Description des racines  $n$ -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation  $\mathbb{U}_n$ .  
Représentation géométrique.

### g) Exponentielle complexe

Définition de  $e^z$  pour  $z$  complexe :  $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$ .

Exponentielle d'une somme.

Pour tous  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\exp(z) = \exp(z')$  si et seulement si  $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .

Résolution de l'équation  $\exp(z) = a$ .

Notations  $\exp(z)$ ,  $e^z$ . Module et arguments de  $e^z$ .

### h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de  $\frac{c-a}{b-a}$ .

Interprétation géométrique des applications  $z \mapsto az + b$  pour  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ .

Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

L'étude générale des similitudes est hors programme.

## Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

### A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction  $f$  à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de  $f$  celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme  $x \mapsto f(x+a)$  ou  $x \mapsto f(ax)$ . Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.  
La fonction  $f$  est bornée si et seulement si  $|f|$  est majorée.

#### b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Dérivées d'ordre supérieur.

Notations  $f'(x)$ ,  $\frac{d}{dx}(f(x))$ .

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

#### c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Relations  $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ ,  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ ,  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ .

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités  $\exp(x) \geq 1+x$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ .

Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Fonctions hyperboliques sh, ch, th.

Dérivée, variations, représentation graphique.  
Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est  $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ .

#### d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.  
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.  
Dérivée de  $\exp(\varphi)$  où  $\varphi$  est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.  
Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

### B - Primitives et équations différentielles linéaires

#### a) Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue  $f$ ,  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$  a pour dérivée  $f$ .

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

On pourra noter  $\int_{x_0}^x f(t) dt$  une primitive générique de  $f$ .

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Primitives de  $x \mapsto e^{\lambda x}$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , application aux primitives de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$  et  $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ .

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Intégration par parties, changement de variable.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

#### b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction  $a$  est constante.

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

#### c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Équation homogène associée.

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires et  $f$  est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.

Ensemble des solutions de l'équation homogène.  
Principe de superposition.  
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Si  $a$  et  $b$  sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme  $x \mapsto Ae^{\lambda x}$  avec  $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ ,  $x \mapsto B \cos(\omega x)$  et  $x \mapsto B \sin(\omega x)$  avec  $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$ .

La démonstration de ce résultat est hors programme.

## Nombres réels et suites numériques

*L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles. On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.*

*Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).*

### a) Ensembles de nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.  
Approximations décimales d'un réel.

Tout intervalle ouvert non vide rencontre  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  
Droite achevée  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de  $\mathbb{R}$ ) sont hors programme.  
Valeurs décimales approchées à la précision  $10^{-n}$  par défaut et par excès.

### b) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .  
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).  
Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si pour tous  $a, b \in X$  tels que  $a \leq b$ ,  $[a, b] \subset X$ .

Notations  $\sup X$ ,  $\inf X$ .

### c) Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.  
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

### d) Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.  
Unicité de la limite.  
Suite convergente, divergente.  
Toute suite convergente est bornée.  
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.  
Passage à la limite d'une inégalité large.  
Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell > 0$ , alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.  
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ ).

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.  
Notations  $u_n \rightarrow \ell$ ,  $\lim u_n$ .

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Utilisation d'une majoration de la forme  $|u_n - \ell| \leq v_n$ , où  $(v_n)$  converge vers 0.

**e) Suites monotones**

Théorème de la limite monotone.

Théorème des suites adjacentes.

**f) Suites extraites**

Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.

Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  tendent vers  $\ell$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $\ell$ .

Principe de démonstration par dichotomie.

**g) Traduction séquentielle de certaines propriétés**Partie dense de  $\mathbb{R}$ .

Caractérisation séquentielle de la densité.

Une partie de  $\mathbb{R}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.

Si  $X$  est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de  $\mathbb{R}$ , il existe une suite d'éléments de  $X$  de limite  $\sup X$  (resp.  $+\infty$ ).Résultats analogues pour  $X$  non vide minorée (resp. non minorée).**h) Suites complexes**

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

**i) Suites particulières**

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Pour une relation de récurrence  $u_{n+1} = au_n + b$  où  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$ , recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si  $(u_n)$  converge vers un élément  $\ell$  en lequel  $f$  est continue, alors  $f(\ell) = \ell$ .Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de  $(u_n)$ , on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de  $f(x) - x$ , et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de  $f$ .**Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité**

Dans cette section, on démontre les théorèmes de base relatifs aux fonctions réelles de variable réelle et on développe l'étude des fonctions convexes amorcée en terminale. Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-e), sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction  $f$  définie sur  $I$  est vraie au voisinage de  $a$  si elle est vraie sur l'intersection de  $I$  avec un intervalle ouvert centré en  $a$  si  $a$  est réel, avec un intervalle  $]A, +\infty[$  si  $a = +\infty$ , avec un intervalle  $]-\infty, A[$  si  $a = -\infty$ .

L'étude des suites récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$  est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on met en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On pourra en particulier présenter la méthode de Newton. De même, l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d'Euler.

## A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point  $a$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  appartenant à  $I$  ou extrémité de  $I$ , limite finie ou infinie d'une fonction en  $a$ .

Unicité de la limite.

Si  $f$  est définie en  $a$  et possède une limite en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Si  $f$  possède une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ ).

Théorème de la limite monotone.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Notations  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

### b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.

Continuité à gauche, à droite.

Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

La continuité de  $f$  au point  $a$  de  $I$  est définie par la relation  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ .

### c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue.

Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Principe de démonstration par dichotomie.

La démonstration n'est pas exigible.

La démonstration n'est pas exigible.

### d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

## B - Dérivabilité

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.  
La dérivabilité entraîne la continuité.  
Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.  
Caractérisation : une fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ . Dans ce cas

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Interprétation géométrique : tangente.  
Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.  
Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

### b) Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

### c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.  
Égalité des accroissements finis.  
Inégalité des accroissements finis : si  $f$  est dérivable et si  $|f'|$  est majorée par  $K$ , alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

Interprétations géométrique et cinématique.  
La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.  
Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.  
Théorème de la limite de la dérivée : si  $f$  est continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .  
Extension au cas où  $\ell = \pm\infty$ .

La fonction  $f'$  est alors continue en  $a$ .

### d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ .  
Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

### e) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.  
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.  
On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».



## C - Convexité

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Généralités

La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si, pour tous  $(x, y) \in I^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ .

Inégalité de Jensen : si  $f$  est une fonction convexe sur un intervalle  $I$ , on a l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

quels que soient les réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de somme 1 et quels que soient les éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $I$ .

Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.

Interprétation géométrique.

Tout développement général sur les barycentres est hors programme.

### b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

## Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

*L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.*

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , diviseurs, multiples.  
Théorème de la division euclidienne.

Caractérisation des couples d'entiers associés.

### b) PGCD et algorithme d'Euclide

PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.

Algorithme d'Euclide.

Extension au cas de deux entiers relatifs.

Relation de Bézout.

PPCM.

Notation  $a \wedge b$ . Le PGCD de  $a$  et  $b$  est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans  $\mathbb{N}$ ) de l'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et  $b$ .

L'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et  $b$  est égal à l'ensemble des diviseurs de  $a \wedge b$ .

$a \wedge b$  est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et  $b$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , PGCD de  $ka$  et  $kb$ .

Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Notation  $a \vee b$ .

**c) Entiers premiers entre eux**

Couple d'entiers premiers entre eux.

Théorème de Bézout.

Lemme de Gauss.

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et divisent  $n$ , alors  $ab$  divise  $n$ .

Si  $a$  et  $b$  sont premiers à  $n$ , alors  $ab$  est premier à  $n$ .

PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Forme irréductible d'un rationnel.

**d) Nombres premiers**

Nombre premier.

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.

Pour  $p$  premier, valuation  $p$ -adique.

Valuation  $p$ -adique d'un produit.

Crible d'Ératosthène.

Notation  $v_p(n)$ .

Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations  $p$ -adiques.

Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations  $p$ -adiques.

**e) Congruences**

Relation de congruence modulo un entier sur  $\mathbb{Z}$ .

Opérations sur les congruences : somme, produit.

Utilisation d'un inverse modulo  $n$  pour résoudre une congruence modulo  $n$ .

Petit théorème de Fermat.

Notation  $a \equiv b [n]$ .

Les anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont hors programme.

**Structures algébriques usuelles**

*Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.*

**a) Loi de composition interne**

Loi de composition interne.

Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.

Partie stable.

On évite l'étude de lois artificielles.

Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.

**b) Structure de groupe**

Groupe.

Notation  $x^n$  dans un groupe multiplicatif,  $nx$  dans un groupe additif.

Exemples usuels : groupes additifs  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , groupes multiplicatifs  $\mathbb{Q}^*$ ,  $\mathbb{Q}_+^*$ ,  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{U}_n$ .

Notation  $S_X$ .

Groupe des permutations d'un ensemble.

Groupe produit.

Sous-groupe : définition, caractérisation.

Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.

Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.

Notations  $\text{Im } f$ ,  $\text{Ker } f$ .

Isomorphisme.

**c) Structures d'anneau et de corps**

Anneau.	Tout anneau est unitaire.
Calcul dans un anneau.	Exemples usuels : $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ . Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si $a$ et $b$ commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

**Calcul matriciel et systèmes linéaires**

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

**a) Opérations sur les matrices**

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ . Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si $X$ est une matrice colonne, $AX$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A$ .
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ .
Transposée d'une matrice.	Notation $A^T$ .
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

**b) Opérations élémentaires**

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.

**c) Systèmes linéaires**

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si $B$ est combinaison linéaire des colonnes de $A$ .
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$ , où $X_0$ est une solution particulière et où $Y$ parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

**e) Anneau des matrices carrées**

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .	Non commutativité si $n \geq 2$ . Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation $I_n$ .
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ , $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.  
Inverse d'une transposée.  
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.  
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système  $AX = Y$ .  
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

Notation  $GL_n(\mathbb{K})$ .

Toute technicité est exclue.

Cas particulier des matrices diagonales.

## Polynômes et fractions rationnelles

*L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et fractions rationnelles. Il s'agit d'objets particulièrement riches, dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes abordés pendant le semestre. Par exemple :*

- l'étude des équations algébriques enrichit le calcul algébrique et suggère des problèmes de localisation des racines, mettant en jeu des techniques analytiques dans le cas réel, plus géométriques dans le cas complexe;
- l'interpolation de Lagrange permet de reconstituer un polynôme en fonction de ses valeurs en suffisamment de points et donne lieu à des problèmes issus de la théorie de l'approximation (majoration de l'erreur d'interpolation).

*L'arithmétique de  $\mathbb{K}[X]$  est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de  $\mathbb{Z}$ , ce qui autorise un exposé allégé. Le programme se limite au cas où le corps de base  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

### a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau  $\mathbb{K}[X]$ .  
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.  
Degré d'une somme, d'un produit.  
Composition.

La construction de  $\mathbb{K}[X]$  est hors programme.  
Ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de degré au plus  $n$ .  
L'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est intègre.

### b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans  $\mathbb{K}[X]$ , diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.  
Théorème de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne.

### c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.  
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.  
Multiplicité d'une racine.  
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).

Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».  
Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.  
Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants; les autres doivent être retrouvées rapidement.

### d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.  
Formule de Taylor polynomiale.  
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

### e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.  
Algorithme d'Euclide.

Relation de Bézout.

PPCM.

Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.

PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Tout diviseur commun à  $A$  et  $B$  de degré maximal est appelé un PGCD de  $A$  et  $B$ .

L'ensemble des diviseurs communs à  $A$  et  $B$  est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de  $A$  et  $B$  sont associés. Un seul est unitaire, on le note  $A \wedge B$ .

Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Notation  $A \vee B$ .

Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans  $\mathbb{Z}$ .

### f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ . Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ . Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

La démonstration est hors programme.

Caractérisation de la divisibilité dans  $\mathbb{C}[X]$  à l'aide des racines et des multiplicités.

Deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

Factorisation de  $X^n - 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  ont même multiplicité.

### g) Formule d'interpolation de Lagrange

Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments distincts de  $\mathbb{K}$  et  $y_1, \dots, y_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$ , il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $P(x_i) = y_i$  pour tout  $i$ .

Expression de  $P$ .

Description des polynômes  $Q$  tels que  $Q(x_i) = y_i$  pour tout  $i$ .

### h) Fractions rationnelles

Corps  $\mathbb{K}(X)$ .

Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.

Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

La construction de  $\mathbb{K}(X)$  est hors programme.

### i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ .

La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue.

Application au calcul de primitives, de dérivées  $k$ -ièmes.

Si  $\lambda$  est un pôle simple, coefficient de  $\frac{1}{X - \lambda}$ .

Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ .

## Deuxième semestre

Le deuxième semestre s'organise autour de trois objectifs majeurs.

- Introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.
- Prolonger les sections d'analyse du premier semestre par l'étude de l'analyse asymptotique, de l'intégration sur un segment, des séries numériques, des familles sommables et par une brève introduction aux fonctions de deux variables.
- Consolider et enrichir les notions relatives aux variables aléatoires sur un univers fini introduites au lycée.

Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement du semestre de la manière qui lui semble la mieux adaptée. Il est cependant fortement préconisé de traiter la section « Analyse asymptotique » en début de semestre et la section « Fonctions de deux variables » à la fin.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux sections. La première étudie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires ; la seconde fait le lien avec le calcul matriciel. Cette séparation n'est qu'une commodité de rédaction et le professeur peut organiser l'ensemble comme il le souhaite.

### Analyse asymptotique

*L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.*

*Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.*

*Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.*

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Relations de comparaison : cas des fonctions

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point  $a$  de  $\mathbb{R}$ .  
Lien entre ces relations.

Notations

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x).$$

La relation  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  est définie à partir du quotient  $\frac{f(x)}{g(x)}$  sous l'hypothèse que la fonction  $g$  ne s'annule pas localement.

Pour la relation  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , on donne les deux formes

$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 1$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$ , en insistant sur l'interêt de la seconde dans les calculs.

Pour mener une étude locale de  $f$  au voisinage de  $a \neq 0$ , on étudie  $f(a+h)$  pour  $h \rightarrow 0$ .

Traduction à l'aide du symbole  $o$  des croissances comparées de  $\ln^\beta(x)$ ,  $x^\alpha$ ,  $e^{rx}$  en  $+\infty$ , de  $\ln^\beta(x)$ ,  $x^\alpha$  en 0.

Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles  $o$  et  $O$ .

Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles  $f$ ,  $g$ ,  $h$  vérifient  $f \leq g \leq h$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ , alors  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ .

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

## b) Développements limités

Développement limité à l'ordre  $n$  d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ , développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de  $h \mapsto f(a+h)$ .

Développement limité à tout ordre en 0 de  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $\operatorname{Arctan}$ .

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\tan$ .

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $a$  peut se ramener à celui de  $h \mapsto f(a+h)$  en 0.

Signe de  $f$  au voisinage de  $a$ .

On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

## c) Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.

Notations  $u_n = O(v_n)$ ,  $u_n = o(v_n)$ ,  $u_n \sim v_n$ .

## d) Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de  $\ln(n!)$ .

La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

La démonstration n'est pas exigible.

## Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;
- reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;
- présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général ; on en tirera parti par de nombreuses figures.

Le corps  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.



## A - Espaces vectoriels

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Espaces vectoriels

Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$ , $\mathbb{K}[X]$ , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$ , cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ .
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

### b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ . Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$ .
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie $A$ .	Notations $\text{Vect}(A)$ , $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ . Tout sous-espace vectoriel contenant $A$ contient $\text{Vect}(A)$ .

### c) Familles de vecteurs

Famille (partie) génératrice.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre.
Famille (partie) libre, liée.	Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , $\mathbb{K}_n[X]$ , $\mathbb{K}[X]$ . Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ .

### d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$ est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

## B - Espaces de dimension finie

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre $E$ et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie $I$ de $\{1, \dots, n\}$ , alors il existe une partie $J$ de $\{1, \dots, n\}$ contenant $I$ pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de $E$ .	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

## b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de  $n + 1$  vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimension de  $\mathbb{K}^n$ , de  $\mathbb{K}_n[X]$ , de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension  $n$ , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de  $n$  vecteurs.

Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

## c) Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

## C - Applications linéaires

### a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Noyau d'une application linéaire.

Caractérisation de l'injectivité.

Si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$ .

Application linéaire de rang fini.

Notation  $\text{rg}(u)$ .

Le rang de  $v \circ u$  est majoré par  $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$ . Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

**b) Endomorphismes**

Identité, homothéties.  
Anneau  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ .

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par  $p^2 = p$ , par  $s^2 = \text{id}$ .  
Automorphismes. Groupe linéaire.

Notations  $\text{id}_E$ ,  $\text{id}$ .

Non commutativité si  $\dim E \geq 2$ .

Notation  $\nu u$  pour la composée  $\nu \circ u$ . Notation  $u^k$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation  $\text{GL}(E)$ .

Notation  $u^k$  pour  $u \in \text{GL}(E)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

**c) Détermination d'une application linéaire**

Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ , alors il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $u(e_i) = f_i$ .

Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie.

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces de  $E$  tels que  $E = E_1 \oplus E_2$ , si  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ ,  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ , il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  coïncidant avec  $u_1$  sur  $E_1$  et avec  $u_2$  sur  $E_2$ .

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de  $u$ .

**d) Théorème du rang**

Forme géométrique du théorème du rang : si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ , alors  $u$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } u$ .

Théorème du rang : si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$ .

**e) Formes linéaires et hyperplans**

Forme linéaire.

Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite non contenue dans  $H$ , alors  $E = H \oplus D$ .

Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si  $E$  est un espace de dimension finie  $n$ , l'intersection de  $m$  hyperplans est de dimension au moins  $n - m$ . Réciproquement, tout sous-espace de  $E$  de dimension  $n - m$  est l'intersection de  $m$  hyperplans.

Formes coordonnées relativement à une base.

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

En dimension  $n$ , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension  $n - 1$ .

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel; cas des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ , des droites et plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

L'étude de la dualité est hors programme.

## D - Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Le but de cette partie, qu'il convient d'illustrer par de nombreuses figures, est double :

- montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.
- modéliser un problème affine par une équation  $u(x) = a$  où  $u$  est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.

Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.

Intersection de sous-espaces affines.

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme  $u(x) = a$  où  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $a \in F$ . L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par  $\text{Ker } u$ .

L'écriture  $B = A + \vec{u}$  est équivalente à la relation  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

Sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.

## Matrices

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;
- étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  ;
- introduire brièvement la relation de similitude sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.

Isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  induit par le choix d'un couple de bases.

Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  induit par le choix d'une base.

Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Exemple : matrice, dans la base  $(1, i)$  de  $\mathbb{C}$  vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur  $a + ib$ .

Cas particulier des endomorphismes.

#### b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Noyau, image et rang d'une matrice.

Une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace  $\mathbb{K}^n$  ou si et seulement si son rang est  $n$ .

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

On identifie ici  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}^n$ .

Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Lien entre les diverses notions de rang.

**c) Systèmes linéaires**

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

Le système  $AX = B$  est compatible si et seulement si  $B$  appartient à l'image de  $A$ .

Si  $A$  est carrée et inversible, le système  $AX = B$  possède une unique solution.

Structure affine de l'ensemble des solutions.

Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

**B - Changements de bases, équivalence et similitude****a) Changements de bases**

Matrice de passage d'une base à une autre.

Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.

Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

**b) Matrices équivalentes et rang**

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang  $r$ , il existe un couple de bases dans lequel  $u$  a pour matrice  $J_r$ .

Matrices équivalentes.

Une matrice est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à  $J_r$ .

Invariance du rang par transposition.

Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

La matrice  $J_r$  a tous ses coefficients nuls à l'exception des  $r$  premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.

Classification des matrices équivalentes par le rang.

Application : calcul du rang.

**c) Matrices semblables et trace**

Matrices semblables.

Interprétation géométrique.

Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Notation  $\text{tr}(A)$ .

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité de la trace, relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , invariance par similitude.

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation  $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$ .

Notation  $\text{tr}(u)$ .

Trace d'un projecteur.

## Groupe symétrique et déterminants

### A - Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Généralités

Groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .  
Cycle, transposition.  
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.

Notation  $S_n$ .  
Notation  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ .  
La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.

#### b) Signature d'une permutation

Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.  
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de  $S_n$  dans  $\{-1, 1\}$  envoyant toute transposition sur  $-1$ .

La démonstration n'est pas exigible.

### B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Formes $n$ -linéaires alternées

Forme  $n$ -linéaire alternée sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .  
Antisymétrie, effet d'une permutation.

La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.  
Si  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée et si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille liée, alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

#### b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si  $e$  est une base, il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  pour laquelle  $f(e) = 1$ ; toute forme  $n$ -linéaire alternée est un multiple de  $\det_e$ .  
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.  
Comparaison, si  $e$  et  $e'$  sont deux bases, de  $\det_e$  et  $\det_{e'}$ .  
La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base si et seulement si  $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

Notation  $\det_e$ . La démonstration de l'existence n'est pas exigible.

Dans  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^3$ ), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).

#### c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.  
Déterminant d'une composée.

Caractérisation des automorphismes.

#### d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.  
Déterminant d'un produit.

Caractère  $n$ -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.  
Relation  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

Caractérisation des matrices inversibles.  
L'application  $\det$  induit un morphisme de  $GL(E)$  (resp.  $GL_n(\mathbb{K})$ ) sur  $\mathbb{K}^*$ .  
Déterminant d'une transposée.

Caractère  $n$ -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

### e) Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires.  
Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.  
Déterminant d'une matrice triangulaire.  
Déterminant de Vandermonde.

Lien avec les polynômes de Lagrange.

### f) Comatrice

Comatrice.  
Relation  $A \operatorname{Com}(A)^T = \operatorname{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$ .

Notation  $\operatorname{Com}(A)$ .  
Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

## Intégration

*Cette section a pour principal objectif de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment et d'en établir les propriétés principales. Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.*

*Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.*

*La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme.*

*Le corps  $\mathbb{K}$  est pris égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Le professeur peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter en premier lieu le cas réel avant de procéder à une brève extension.*

### a) Continuité uniforme

Continuité uniforme.  
Théorème de Heine.

Exemple des fonctions lipschitziennes.  
La démonstration n'est pas exigible.

### b) Fonctions continues par morceaux

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.  
Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.

Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .  
Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

### c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Le programme n'impose pas de construction particulière.  
Interprétation géométrique de l'intégrale.

Notations  $\int_{[a,b]} f$ ,  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ .

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale :  $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$ .

Relation de Chasles.

Extension de la notation  $\int_a^b f(t) dt$  au cas où  $b \leq a$ .  
Propriétés correspondantes.



Si  $f$  est continue, à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et si  $\int_{[a,b]} f = 0$ , alors  $f = 0$ .

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

#### d) Sommes de Riemann

Pour  $f$  continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$ ,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique.

Démonstration exigible pour  $f$  lipschitzienne.

#### e) Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  pour  $f$  continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

#### f) Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.

On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

### Dénombrement

*Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.*

*Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :*

- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

#### a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations  $|A|$ ,  $\text{Card}(A)$ .

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

La formule du crible est hors programme.

#### b) Listes et combinaisons

Nombre de  $p$ -listes (ou  $p$ -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal  $n$ , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre de parties à  $p$  éléments (ou  $p$ -combinaisons) d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

## Probabilités

Cette section, qui a vocation à interagir avec l'ensemble du programme, a pour objectif de donner aux étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini.

Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un  $n$ -uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter un  $n$ -uplet de variables aléatoires peut être présentée, mais ne constitue pas un objectif du programme.

Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov en temps fini, sur des permutations aléatoires (loi uniforme sur  $S_n$ ), des graphes aléatoires, des inégalités de concentration...

Le programme de probabilités de première année s'achève sur une approche non asymptotique de la loi faible des grands nombres qui justifie l'approche fréquentiste des probabilités.

### A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Univers, événements, variables aléatoires

Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.

On se limite au cas d'un univers fini.

Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).

Une variable aléatoire  $X$  est une application définie sur l'univers  $\Omega$  à valeurs dans un ensemble  $E$ .

Notations  $\{X \in A\}$  et  $(X \in A)$ .

#### b) Espaces probabilisés finis

Probabilité sur un univers fini.

Espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

Notations  $P(X \in A)$ ,  $P(X = x)$  et  $P(X \leq x)$ .

Une distribution de probabilités sur un ensemble  $E$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{R}^+$  indexée par  $E$  et de somme 1.

Une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  est déterminée par la distribution de probabilités  $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ .

Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1.

Probabilité uniforme.

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.

La formule du crible est hors programme.

#### c) Probabilités conditionnelles

Si  $P(B) > 0$ , la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  est définie par la relation  $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

L'application  $P_B$  est une probabilité.

Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

Par convention,  $P(A|B)P(B) = 0$  lorsque  $P(B) = 0$ .

#### d) Loi d'une variable aléatoire

Loi  $P_X$  d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $E$ .

La probabilité  $P_X$  est déterminée par la distribution de probabilités  $(P(X = x))_{x \in E}$ .

On note  $X \sim Y$  la relation  $P_X = P_Y$ .

Variable aléatoire  $f(X)$ .

Si  $X \sim Y$  alors  $f(X) \sim f(Y)$ .

Variable uniforme sur un ensemble fini non vide  $E$ .

Notation  $X \sim \mathcal{U}(E)$ .

Variable de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ .

Notation  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

Interprétation comme succès d'une expérience.

Variable binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ .

Notation  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire  $X$  sachant un événement  $A$ .

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation  $P(X = x, Y = y)$ .

Extension aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

### e) Événements indépendants

Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

Famille finie d'événements indépendants.

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $A$  et  $\bar{B}$  le sont aussi.

Si  $P(B) > 0$ , l'indépendance de  $A$  et  $B$  s'écrit  $P(A|B) = P(A)$ .

L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

Extension au cas de  $n$  événements.

### f) Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur l'univers  $\Omega$  sont indépendantes si pour tout  $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$  et tout  $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.

Extension aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Si les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  le sont aussi.

Notation  $X \perp Y$ . Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de  $(X, Y)$  est donnée par  $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$ .

Modélisation de  $n$  expériences aléatoires indépendantes par une suite finie  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de variables aléatoires indépendantes.

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de  $n$  expériences indépendantes ayant chacune la probabilité  $p$  de succès.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

## B - Espérance et variance

### a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Espérance  $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$  d'une variable aléatoire  $X$ .

Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.

Formule de transfert :  $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

L'espérance est un indicateur de position.

Formule  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ .

Variable aléatoire centrée.

Exemple :  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .

On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux  $n$ -uplets.

Extension au cas de  $n$  variables aléatoires indépendantes.

### b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.

Relation  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

Relation  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.

Covariance de deux variables aléatoires.

Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.

Si  $\sigma(X) > 0$ , la variable  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.

Relation  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ , cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme, cas de variables décorréélées.

On retrouve la variance d'une variable binomiale.

### c) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Application à l'obtention d'inégalités de concentration.

Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

## Espaces préhilbertiens réels

*La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.*

*Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.*

### a) Produit scalaire

Produit scalaire.

Espace préhilbertien, espace euclidien.

Produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

Produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$  sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

Notations  $\langle x, y \rangle$ ,  $(x|y)$ ,  $x \cdot y$ .

Expressions  $X^\top Y$ ,  $\text{tr}(A^\top B)$ .

Exemples de produits scalaires intégraux sur  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

### b) Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, distance.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Identité remarquable  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ .

Exemples : sommes finies, intégrales.

Formule de polarisation associée.

### c) Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.

Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de Pythagore.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Notation  $X^\perp$ .

L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.

### d) Bases orthonormées

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.

Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

### e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace  $F$  de dimension finie. Projection orthogonale sur  $F$ . Expression du projeté orthogonal d'un vecteur  $x$  dans une base orthonormée de  $F$ .

Distance d'un vecteur à  $F$ .

Le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  est l'unique élément de  $F$  qui réalise la distance de  $x$  à  $F$ .

En dimension finie : dimension de  $F^\perp$ , vecteur normal à un hyperplan.

Notation  $d(x, F)$ .

En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan  $\text{Vect}(u)^\perp$ ; distance de  $x$  à  $\text{Vect}(u)^\perp$ .

## Procédés sommatoires discrets

L'étude des séries prolonge celle des suites et permet d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique. Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans  $[0, +\infty]$  se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps.

On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.  
Convergence, divergence, somme.

La série est notée  $\sum u_n$ .

En cas de convergence, sa somme est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Reste d'une série convergente.

Lien suite-série.

Divergence grossière.

La suite  $(u_n)$  et la série télescopique  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  sont de même nature.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .

### b) Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si  $0 \leq u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ , la convergence de  $\sum v_n$  implique celle de  $\sum u_n$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont positives et si  $u_n \sim v_n$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Si  $f$  est monotone, encadrement des sommes partielles de  $\sum f(n)$  à l'aide de la méthode des rectangles.

Séries de Riemann.

Application à l'étude de sommes partielles.

### c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Si  $(u_n)$  est une suite complexe, si  $(v_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^+$ , si  $u_n = O(v_n)$  et si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

### d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en décroissant vers 0,  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

### e) Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans  $[0, +\infty]$ .

Borne supérieure dans  $[0, +\infty]$ .

Somme d'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $[0, +\infty]$ , définie comme borne supérieure dans  $[0, +\infty]$  de l'ensemble des sommes  $\sum_{i \in F} u_i$  quand  $F$  décrit l'ensemble des parties finies de  $I$ .

La somme est notée  $\sum_{i \in I} u_i$ .

Cas où  $I$  est fini, où  $I = \mathbb{N}$  (lien avec les séries). On note  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$  si la série  $\sum u_n$  d'éléments de  $\mathbb{R}^+$  diverge.

Invariance de la somme par permutation.

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^+$  est dite sommable si  $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$ .

Opérations : somme, multiplication par un réel positif.  
Théorème de sommation par paquets : si  $I$  est réunion disjointe des  $I_j$  pour  $j \in J$  et si  $(u_i)_{i \in I}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , alors  $\sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$ .

Cas où  $I$  est un produit : théorème de Fubini positif.

On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.

La démonstration est hors programme.

## f) Familles sommables de nombres complexes

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{C}^I$  est dite sommable si  $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$ .

Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes et soit  $(v_i)$  une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout  $i \in I$ ,  $|u_i| \leq v_i$ . Alors  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets : si  $I$  est réunion disjointe des  $I_j$  pour  $j \in J$ , si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors

$$\sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

Cas où  $I$  est un produit : théorème de Fubini.

Si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_{i'})_{i' \in I'}$  sont sommables alors  $(a_i b_{i'})_{(i,i') \in I \times I'}$  est sommable et

$$\sum_{(i,i') \in I \times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{i' \in I'} b_{i'}.$$

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Notation  $\ell^1(I)$ .

Pour  $I = \mathbb{N}$ , lien avec les séries.

Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.

Si  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable et si  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ , il existe une partie finie  $F$  de  $I$  telle que  $\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq \varepsilon$ .

Invariance de la somme par permutation.

La démonstration est hors programme.

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de  $(\mathbb{C}, +)$  dans  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

## Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$ , fonctions continues

Boules de  $\mathbb{R}^2$  muni de la norme euclidienne canonique.

Ouverts.

Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface.

La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.

### b) Dérivées partielles

Dérivées partielles en un point d'une fonction  $f$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert.

Développement limité à l'ordre 1 au point  $(x_0, y_0)$  d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

Gradient d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Expression du développement limité à l'aide du gradient.

Notations  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Définition par la continuité des dérivées partielles.

La notion de fonction différentiable est hors programme.

Démonstration hors programme.

On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  et l'interprétation de

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

comme équation du plan tangent en  $(x_0, y_0)$  à la surface d'équation  $z = f(x, y)$ .

Notation  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

Le gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  définit la direction dans laquelle  $f$  croît le plus vite.

### c) Dérivées partielles et composées

Dérivée selon un vecteur.

Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de  $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ .

Expression à l'aide du gradient  $\langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$ .

Interprétation comme dérivée de  $f$  le long d'un arc  $\gamma$  donné par  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  et expression à l'aide du gradient

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

où  $\gamma'(t)$  est défini par  $(x'(t), y'(t))$ .

Le gradient de  $f$  est orthogonal aux lignes de niveau de  $f$ .

### d) Extremums

Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  est un point critique.

Exemples d'étude de points critiques.