IPESUP 2022/2023

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition de la bijectivité d'une application $f : E \to F$. Démontrer que f est bijective si et seulement si
$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$$

2. On définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation binaire $\mathcal{R}$ via
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n$$
   (a) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre non totale sur $\mathbb{N}^*$.
   (b) Déterminer l'ensemble des majorants de la partie $\{2, 3\}$ de $\mathbb{N}^*$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto (1 + ix)/(1 - ix)$. Déterminer son ensemble de définition, $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit E un ensemble. Donner la définition d'une relation d'équivalence sur E. Démontrer que l'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence forme une partition de E.
2. On définit l'application $f : [0,1] \to [0,1], x \mapsto x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $x \mapsto 1 - x$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est bijective. Quelle est alors sa réciproque ?
3. On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. Déterminer son ensemble de définition.

⋆⋆⋆

Ipesup 2022/2023

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux applications monotones. Démontrer que $g \circ f$ est monotone. Soit X un ensemble. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subset)$ et A une partie de F. L'application $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), B \mapsto A \cup B^c$ est-elle monotone ?
2. On note $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$. Déterminer l'ensemble des applications affines g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
   (a) $f_1 \circ g = g \circ f_1$.
   (b) $f_2 \circ g = g \circ f_2$.
   (c) g commute avec une application affine donnée.
3. On note $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi/x)$ et la relation d'équivalence $x \mathcal{R} y \iff h(x) = h(y)$ sur $\mathbb{R}^*$. Décrire l'ensemble de ses classes d'équivalence.

⋆⋆⋆

IPESUP 2022/2023

Kholle 2 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les variations de $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $\mathbb{R}$. Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ est-elle injective ?
2. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
3. On munit $\mathbb{N}^2$ de la relation d'ordre lexicographique. Montrer que $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, x \mapsto (x, 0)$ est injective monotone. On note $\omega = (0, 1)$, montrer que ω est un majorant de $s(\mathbb{N})$. Quels sont les majorants de $s(\mathbb{N})$?

⋆⋆⋆