

Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 17 : Analyse asymptotique. Les exercices porteront sur le chapitre 16 : polynômes et fractions rationnelles et/ou sur un développement limité simple en 0.

## Chapitre 17 : Analyse asymptotique

Toutes les preuves de ce chapitre peuvent être menées sous l'hypothèse de non annulation à partir d'un certain rang, ou dans un voisinage épointé de  $a$ .

### Comparaison asymptotique de suites.

#### Domination

Relation de domination.  $u = O(v) \iff u/v$  bornée. Transitivité de la relation de domination. Compatibilité avec les combinaisons linéaires à gauche, les produits et les fonctions puissances. Composition à droite.

#### Prépondérance

Relation de prépondérance.  $u = o(v) \iff u/v \rightarrow 0$ . Transitivité de la relation de prépondérance. Compatibilité avec les combinaisons linéaires à gauche, les produits et les fonctions puissances. Si  $\alpha < \beta$ ,  $n^\alpha = o(n^\beta)$ . Si  $|a| < |b|$ ,  $a^n = o(b^n)$ . Croissances comparées de l'exponentielle, des puissances et du logarithmes. (★)  $a^n = o(n!)$ , (★)  $n! = o(n^n)$ . Composition à droite.

#### Equivalents

Relation d'équivalence :  $u \sim v$  lorsque  $u - v = o(v)$ .  $u \sim v \iff u/v \rightarrow 1$ . La relation d'équivalence est une relation d'équivalence. Compatibilité avec le produit, avec les puissances. Si  $u \leq v \leq w$  à pcr et  $u \sim w$ , alors  $v \sim w$ . Si  $u \sim v$  et  $u$  de signe constant à pcr, alors  $v$  de ce même signe constant à pcr. Si  $u \sim v$  et  $u$  admet une limite, alors  $v$  admet la même limite. (★) Passage au logarithme dans les équivalents.

#### Développement asymptotique

Formule de Stirling. Exemples de développements asymptotiques : Suite  $\tan(x_n) = x_n$  avec  $x_n$  dans  $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ ,  $x_n = n\pi + \pi/2 - 1/(n\pi) + o(1/n)$ . Suite  $u_0 = 1$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n)$  via Cesaro,  $u_n \sim \sqrt{3/n}$ .

### Comparaison locale de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

Extension de tous les résultats précédents au cas des fonctions en  $a$  un point adhérent à  $I$  (éventuellement infini).

### Développements limités

#### Opérations

Notion de développement limité en  $a \in I$ . (★) Unicité sous réserve d'existence. Partie régulière d'un  $DL_n(a)$ . Troncature,  $DL_n(0)$  d'une fonction paire, impaire. (★) Formule de Taylor-Young. Primitivation des DL, dérivation des DL sous hypothèse de  $n$ -dérivabilité en  $a$ . Combinaison linéaire de DL, produit de DL, composition de DL.

#### Catalogue usuel

(★)  $DL_n(0)$  de  $e^x, \sin(x), \cos(x), \operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x), (1+x)^\alpha, 1/(1+x), \sqrt{1+x}, \ln(1+x), \arctan(x)$ .  $DL_3(0)$  de  $\tan(x)$ .

#### Etude locale de fonctions

Si  $f$  admet un  $DL_p(a)$  de la forme  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$  avec  $p \geq 2$  et  $a_p \neq 0$ , position relative de la courbe de  $f$  et de sa tangente en  $a$  au voisinage de  $a$  selon la parité de  $p$  et le signe de  $a_p$ . Dans le cas  $f'(a) = 0$ , présence ou non d'extremum local en  $a$ . Position par rapport à une asymptote.

★ ★ ★ ★ ★