Kholle 10 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Définition du polynôme minimal d'un endomorphisme en dimension finie.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ en dimension finie. Démontrer que la suite des noyaux itérés $(\ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, puis stationnaire. Démontrer en particulier que si $k \in \mathbb{N}^*$ vérifie $\ker u^k = \ker u^{k+1}$, alors $\forall p \geqslant k, \ker u^k = \ker u^p$.
3. Soit A, B, C, D des matrices carrées de taille n sur $\mathbb{K}$. On suppose que $DC = CD$. Montrer que si D est inversible,
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

★★★

Kholle 10 filière MP*
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Énoncer et démontrer le lemme des noyaux.
2. Soit n un entier non nul. On note

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | MJ_n = J_nM\} = \mathbb{K}[J_n]$.
3. On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P = (X-2)^2(X-3)$ annule M. Construire des polynômes U_1, U_2 tels que $1 = U_1(X-3) + U_2(X-2)^2$, et en déduire une expression de $\exp(M)$.

⋆⋆⋆

IPESUP 2022/2023

Kholle 10 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Démontrer que les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.
2. Soit M une matrice carrée de taille 2 et de déterminant 1. En admettant que $\chi_A(A) = 0$, démontrer que
$$\mathrm{Tr}\left(M^4\right) = \mathrm{Tr}\left(M\right)^4 - 4\mathrm{Tr}\left(M\right)^2 + 2.$$
3. Soit A une matrice carrée de taille et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. À quelle condition sur A le polynôme minimal de B est-il scindé à racines simples ?

★★★

Kholle 10 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Soit u et v deux endomorphismes qui commutent. Que dire de leurs sous-espaces propres ?
2. On considère $p : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{C}, p(\lambda A) \leqslant |\lambda| p(A), \quad p(A+B) \leqslant p(A)+p(B) \quad p(AB) \leqslant p(A)p(B)$$

   Montrer que p est soit nulle, soit une norme.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier naturel n non nul vérifiant $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

★★★