Kholle 17 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Caractériser matriciellement les endomorphismes auto-adjoints.
2. Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que sa norme vérifie

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

   Montrer que E est préhilbertien réel.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer qu'elle est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 17 filière MP*
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Énoncer et démontrer le théorème spectral.
2. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$. On le munit du produit

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

   Montrer que c'est un produit scalaire, puis déterminer l'orthogonal du sous-espace $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $X_1, \dots, X_n$. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on note $\|X_i\| = \sqrt{X_i^T X_i}$. Démontrer l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(M)| \leqslant \|X_1\| \dots \|X_n\|$$

⋆⋆⋆

Kholle 17 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Proposer une réduction des isométries en base orthonormée.
2. (a) Soit E un espace préhilbertien réel. Pour toute famille finie $(y_1,\dots,y_p)$ de vecteurs de E, on note $g(y_1\dots,y_p)=\det((y_i|y_j)_{1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant p})$. Soit V un sous-espace de E de base $(e_1,\dots,e_n)$ et x un élément de E. Montrer que
$$(d(x,V))^2=\frac{g(e_1,\dots,e_n,x)}{g(e_1,\dots,e_n)}$$
   (b) Montrer que l'application
$$\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},(a_1,\dots,a_n)\mapsto\int_0^1(1+a_1x+\dots+a_nx^n)^2dx$$
   admet un minimum en un point unique. Déterminer ce minimum.
   Indication : on pourra utiliser les déterminants de Cauchy $|1/(a_i+b_j)|=\prod_{i<j}(a_j-a_i)\prod_{i<j}(b_j-b_i)/\prod_{i,j}(a_i+b_j)$.
3. Soit $S\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive R telle que $R^2=S$.

★★★