Eliot Neutz

Rapport de khôlle n° 6

Khôlleur : Mr Camau
Date : 23/11
Note : 14/20

Question de Cours : Énoncez et démontrez la caractérisation séquentielle de la densité.

Caractérisation séquentielle de la densité :

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

X est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$

Démonstration :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons X dense dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $I_n =]a-2^{-n} ; a+2^{-n}[$.

$2^{-n} > 0$ donc I_n est non vide. De plus, par densité de X dans $\mathbb{R}$, on dispose d'un élément x_n de X appartenant à I_n.

Alors : $a-2^{-n} < x_n < a+2^{-n}$

Par théorème d'encadrement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a puisque $2^{-n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

On a bien $\boxed{\text{l'existence d'une suite à valeurs dans } X \text{ qui converge vers } a.}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$

Soit I un intervalle ayant non vide. Alors on dispose de $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $]a;b[\subset I$.

Par hypothèse, on dispose d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\frac{a+b}{2}$.

D'où : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,$ $0 < |x_n - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$

$$\text{ie} \quad \frac{a-b}{2} < x_n - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$$

$$\text{ie} \quad a < x_n < b$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $x_n \in]a;b[\subset I$.

Donc $x_n \in I$. Or $x_n \in X$, d'où : $\underline{X \cap I \neq \emptyset}$

Finalement : $\boxed{X \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$

Exercice 1 :

On note $X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$

Déterminer $\sup(X)$ et $\inf(X)$

- Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors, $p \geq 1$ donc $\frac{1}{p} \leq 1$. De même, $\frac{1}{q} \leq 1$

D'où : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 2$ donc 2 est un majorant de X. De plus,

$\max(X) = 2$. Finalement : $\boxed{\sup(X) = 2}$

- On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. De plus, 0 est un minorant de X. Donc par

caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\boxed{\inf(X) = 0}$

- J'ai mis du temps pour déterminer $\sup(X)$ et je n'ai pas eu le réflexe de passer par le max

- Attention aux notations sur les suites, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bon

$\Rightarrow$ tout écrire sous une même suite.

⚠ doubles limites

Exercice 2 : On se donne une partie G de $\mathbb{R}$ qui contient 0 mais non réduite à 0.

On suppose : $\forall (x,y) \in G^2$, $x-y \in G$ & $\inf(G \cap \mathbb{R}^{*+}) = 0$

Montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit I un intervalle ouvert non vide. Alors : $\exists (a,b) \in I$ tel que : $]a;b[\subset I$.

Soit $x \in G$. Montrons que $x \in]a;b[$ ie $a < x < b$

$0 < b-a$ donc par caractérisation de la borne inférieure,
il existe $y \in G$ tq $0 < y < b-a$

On pose $x = \left(\lfloor \frac{a}{y} \rfloor + 1\right) y$

On a : $\frac{a}{y} < \lfloor \frac{a}{y} \rfloor + 1 < \frac{a}{y} + 1$

d'où $a < y\left(\lfloor \frac{a}{y} \rfloor + 1\right) < a+y < b$

donc $\boxed{a < x < b}$

Exercice qui demande une certaine autonomie que je n'ai pas encore acquis

Bilan : La remarque qui revient souvent est que je dois être + autonome.
Je pense devoir faire + d'exercices.