Exercices :

Ils porteront sur les notions vues en MPSI pour les fonctions numériques de 2 ou 3 variables : (continuité, existence des dérivées partielles d'ordre 1, fonction numérique de classe C1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) et le début du cours de calcul différentiel de Spé.

Cours

Ch16 Calcul différentiel et optimisation

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Révisions du programme précédent	
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables. ($\star$) Preuve dans le cas où $p=2$.	
($\star$) Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, ($\star$) si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t)=\mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t)=x+tv$. ($\star$) Dérivation de $t\mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
($\star$) Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	($\star$) Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m)\mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$
d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$	
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	

Contenus	Capacités & commentaires
(⋆) Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0)=a$ et $\gamma(1)=b$, alors : $$f(b)-f(a)=\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t)=a+tv$ pour tout $t\in[0,1]$.
(⋆) Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon>0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0)=x, \gamma'(0)=v$.	Notation T_xX pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : (⋆) sous-espace affine, (⋆) sphère d'un espace euclidien, (⋆) graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x\in X$ et $\mathrm{d}g(x)\neq 0$, alors T_xX est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple :(⋆) plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\dots\partial x_{j_1}}$,$\partial_{j_k}\dots\partial_{j_1}f$,$\partial_{j_1,\dots,j_k}f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
(⋆) Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles mais ont été faites.