IPESUP 2022/2023

Kholle 17 filière MPSI/MP2I
Planche 1

⋆⋆⋆

1. Soit P un polynôme non nul. Que dire de l'ensemble $Z(P)$ des racines de P et du degré de P ? Le démontrer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n}+1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis décomposer $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des réels distincts, $(y_1, \dots, y_n)$, $(z_1, \dots, z_n)$ des réels. Existe-t-il un polynôme P tel que
$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad P'(x_i) = z_i ?$$
Si oui, y en a-t-il un unique de plus petit degré ?

⋆⋆⋆

Kholle 17 filière MPSI/MP2I
Planche 2

★★★

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor polynomiale.
2. Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Montrer que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n\wedge m} - 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $X^n + 1$. Démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$$

   On pourra introduire la fraction rationnelle $F = X^p/(X^n + 1)$ pour p un entier non nul.

★★★

Kholle 17 filière MPSI/MP2I
Planche 3

★★★

1. Établir la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
3. Soit n un entier naturel non nul, on note $\omega = e^{2i\pi/n}$, puis

$$\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ k\wedge n=1}}^{n} \left(X - \omega^k\right)$$

   (a) Déterminer $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$.

   (b) Soit p un entier premier. Exprimer Φ_p.

   (c) Démontrer que $X^n - 1 = \prod_{d\in D^+(n)} \Phi_d$.

   (d) En déduire que Φ_n est à coefficients entiers.

★★★

Kholle 17 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers dont les racines complexes sont de module inférieur ou égal à 1.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_n$ est fini.
   (b) Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Montrer que toute racine de P est soit nulle, soit de module égal à 1.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. On note
$$\mathcal{I}_\alpha = \{P \in \mathbb{Q}[X] | P(\alpha) = 0\}.$$
   Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire π_α tel que $\mathcal{I}_\alpha = \pi_\alpha \mathbb{Q}[X]$. Déterminer ce polynôme pour $\alpha = 2^{1/3} + j$.

⋆⋆⋆