Kholle 4 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition du caractère monogène d'un groupe. Énoncer le théorème de structure d'un groupe monogène et le démontrer.
2. On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/x$ si $x \neq 0, 0 \mapsto f'(0)$ est de classe C^∞.
3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.
   (a) Montrer qu'elle est bien définie et continue.
   (b) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 4 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit A un anneau commutatif. Donner la définition d'un idéal de A. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux, I un idéal de A et J un idéal de B. Que dit le cours de $f^{-1}(J)$? de $f(I)$? Le démontrer.
2. Pour tout réel $s > 1$, on pose
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$
Montrer que cela définit une application de classe C^∞, puis que $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.
3. Soit $a > -1$. Calculer
$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos(x))}{\cos(x)} dx$$

⋆⋆⋆

Kholle 4 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Soit A un anneau commutatif. Donner la définition d'un élément inversible de A. Décrire l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$ une application continue. Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose

$$F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t)dt$$

Démontrer que $F(\alpha)^{1/\alpha}$ possède une limite quand α tend vers 0 par valeurs supérieures et déterminer cette limite.
3. On note pour tout réel x n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$, pour tout entier N,

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

   (a) Montrer que S_N converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et que sa limite simple S est continue et périodique de période 1.
   (b) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$$

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 4 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

Exercice supplémentaire et plus corsé pour les gourmands :

1. Pour $\beta > 0$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_\beta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t} dt$$

Démontrer que I_β satisfait l'équation différentielle $y - y'' = \dfrac{\beta}{\beta^2 + x^2}$

2. On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_\beta(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2 + t^2} dt$$

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_{\beta(x)} = \frac{1}{2}\left(e^x F_\beta(x) + e^{-x} F_\beta(-x)\right)$$

3. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

★★★