IPESUP 2022/2023

Kholle 19 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Règles de calcul dans les espaces vectoriels.
2. Développement limité à l'ordre 2 en $+\infty$ de

$$x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$$

3. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de l'arcsinus au voisinage de -1.

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 19 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
2. Développement limité à l'ordre 10 de
$$F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$
3. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto xe^{1/x}\arctan(x)$. Rechercher une asymptote du graphe de f au voisinage de $+\infty$ et étudier leurs positions relatives.

⋆⋆⋆

Ipesup 2022/2023

Kholle 19 filière MPSI/MP2I
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Caractérisation de la liberté d'une famille infinie de vecteurs.
2. Donner un équivalent quand n vers $+\infty$ de $\binom{2n}{n}$.
3. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

⋆⋆⋆

IPESUP 2022/2023

Kholle 19 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Soit $B_0 = 1$ et B_{n+1} défini par récurrence via $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$. Montrer que
$$\forall k \in [\![0, n]\!], B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(0) X^k$$
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^d. Montrer que
$$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \int_0^1 f(t)dt + \sum_{k=2}^{d} \frac{B_k(0)}{k!}\left(f^{k-1}(1) - f^{(k-1)}(0)\right) + \frac{(-1)^{d+1}}{d!}\int_0^1 B_d(t) f^{(d)}(t)dt$$
3. En déduire via la fonction inverse que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

⋆⋆⋆