Exercices :

Ils porteront sur les espaces préhilbertiens et les endomorphismes d'un espace euclidien (de préférence le début) mais je laisse le choix libre de poser sur tout ce chapitre car les Kholles sont en fin de semaine (sauf la mienne).

Cours

Ch14 Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est double :

- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre* 2.

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, Caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, $(\star)$ égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$.	
$(\star)$ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
$(\star)$ Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathscr{S}(E)$.
$(\star)$ Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.	

Contenus	Capacités & Commentaires
($\star$) Les symétries orthogonales sont les symétries autoadjointes. ($\star$) Lemme pour le Théorème spectral : Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie admet une droite ou un plan stable. ($\star$) Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.
d) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	($\star$) Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E), \mathscr{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale : ($\star$) parmi les symétries vectorielles, les symétries orthogonales sont les isométries. Définition d'une réflexion. ($\star$) Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.
e) Isométries vectorielles en dimension 2	
($\star$) Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. En particulier ($\star$) la matrice d'une rotation ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe choisie : mesure de l'angle d'une rotation.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
($\star$) Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
f) Réduction des isométries	
($\star$) Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
($\star$) Réduction d'une isométrie en base orthonormée.	Interprétation matricielle.
Cas particulier : ($\star$) réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.