Ipesup 2022/2023

Kholle 28 filière MPSI/MP2I
Jeudi 15 juin 2023

⋆⋆⋆

Planche 1

⋆⋆⋆

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ses cas d'égalité.
2. Soit $n \geqslant 2$. On note $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(0) = P(1) = 0\}$. On admet que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et on définit

$$\forall (P,Q) \in E^2, \varphi(P,Q) = -\int_0^1 (P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x))\, dx$$

   Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
3. On note $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique.
   (a) Montrer que u conserve la norme (i.e $\forall x \in \mathbb{R}^3, \|u(x)\| = \|x\|$).
   (b) Déterminer $\ker(A - I_3)$ et $\ker(A - I_3)^{\perp}$. Déterminer une base orthonormée adaptée à ces supplémentaires orthogonaux et exprimer la matrice de u dans cette nouvelle base.

⋆⋆⋆

Planche 2

⋆⋆⋆

1. Orthonormalisation de Gram-Schmidt : énoncé et preuve.
2. Soit E un espace euclidien. Son produit scalaire est noté $(\,|\,)$. On considère u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$$

   (a) Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$$

   (b) En déduire que $\ker u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.
3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
   (a) Montrer que pour toutes bases orthonormales b, b', le déterminant de la famille b dans la base b' vaut 1 ou -1.
   (b) On fixe une base orthonormale b de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y) \in E$. Montrer qu'il existe un unique vecteur u de E, noté $x \wedge y$ tel que

$$\forall z \in E, (u|z) = \det_b(x,y,z)$$

   Montrer que

$$\forall (x,y,z) \in E^3, x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z$$

★★★

Planche 3

★★★

1. Théorème du supplémentaire orthogonal.
2. On munit $E = \mathbb{R}^3$ de l'application suivante :

$$\forall ((x,y,z),(x',y',z')) \in E^2, \langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + xy' + yx' + 3yy' + zz'$$

   (a) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire
   (b) Déterminer la projection orthogonale de $(1,2,-1)$ sur le plan $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$.
3. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme qui conserve la norme. Pour tout entier naturel n non nul, on note $p_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$, puis p le projecteur orthogonal sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que

$$\forall x \in E, \lim_{n\to+\infty} \|(p_n - p)(x)\| = 0$$

★★★

Bonus

Montrer que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 dx$$

admet un minimum en un point unique. Déterminer ce minimum.

★★★