Séries numériques

Cornou Jean-Louis

13 avril 2023

On reprend l'étude des suites numériques et de leurs convergences.

1 Suites et séries

Définition 1 *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$. On appelle somme partielle d'indice n la quantité $\sum_{k=0}^{n} u_k$, notée S_n. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série numérique de terme général u_n.*

Notation
Cette série est notée $\sum u_n$ avec n un indice muet.

Exemple 1 *Attention, la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(k^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une série évidente. Le terme k^n à l'intérieur de la somme dépend du nombre de termes.*

Définition 2 *Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit qu'elle est convergente lorsque la suite des sommes partielles de u, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, sa limite est appelée somme de la série $\sum u_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.*

Exemple 2 *Les séries à support fini sont convergentes. Les séries constantes non nulles sont divergentes.*

Propriété 1 *L'ensemble C des séries numériques convergentes E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. De plus, l'application $C \to \mathbb{K}, \sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire.*

Démonstration. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, (u,v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Alors, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergente, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

De plus, la série nulle est convergente.

⚠ Attention
Hors de question d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ avant d'avoir établi la convergence de deux d'entre elles.

Propriété 2 *Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. Alors pour tout entier k dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq k+1} u_n$ est convergente. Sa somme est notée $\sum_{n=k+1}^{+\infty} u_n$ et appelée reste d'indice k de la série $\sum u_n$ (souvent noté R_k). De plus, $R_k + S_k = \sum_{n=0}^{+\infty}$ et la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.*

Démonstration. Soit k un entier naturel. Pour tout entier $N \geq k+1$,

$$\sum_{n=k+1}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{k} u_k$$

Comme la série $\sum u_n$ est convergente, la série $\sum_{n\geq k+1} u_n$ est convergente et $R_k = S - S_k$. De plus, comme $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite S, donc $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

⚠ **Attention**
Hors de question de considérer le reste d'une série numérique non convergente.

Propriété 3 *Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.*

Démonstration. La suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite S. Par conséquent, la suite extraite $(\mathrm{S}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de même limite S. Or pour tout entier n, $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$, donc la suite u est convergente de limite $\mathrm{S} - \mathrm{S} = 0$.

Exemple 3 *La réciproque est fausse. Soit H la série harmonique $\sum 1/n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On assemble et on minore*

$$\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si la série converge, alors $(\mathrm{H}_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même limite, ce qui entraîne $0 \geq 1/2$. Cette absurdité assure que la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente, bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n = 0$.

Propriété 4 *Soit u une suite numérique qui n'est pas convergente de limite nulle. Alors la série numérique $\sum u_n$ est divergente. On dit dans ce cas-là qu'elle diverge grossièrement.*

Démonstration. Il s'agit de la contraposée de la précédente proposition.

Exemple 4 *Les séries numériques $\sum n$, $\sum 1$, $\sum(-1)^n$ sont grossièrement divergentes. Il existe ce qu'on appelle des processus de resommation pour donner un sens à ces sommes, mais cela dépasse largement le programme.*

Exemple 5 *Un exemple de télescopage pour un calcul de série. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{N}+1}$$

On en déduit que la série $\sum 1/(n(n+1))$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exemple 6 *Démontrons que la série $\sum \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)})$ converge et déterminer sa somme en essayant de faire apparaître un télescopage. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$\ln(1 + \frac{2}{n(n+3)}) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)+2}{n+1}\right)$$

La somme partielle de cette suite s'exprime alors via

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)}) = \ln\left(\frac{3}{1}\right) - \ln(\left(\frac{\mathrm{N}+1+2}{\mathrm{N}+2}\right)$$

Comme $(\mathrm{N}+3)/(\mathrm{N}+2) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1$, la continuité du logarithme en 1 implique $\ln(\left(\frac{\mathrm{N}+1+2}{\mathrm{N}+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, la série $\sum \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)})$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)}) = \ln(3)$$

Propriété 5 *Soit u une suite numérique. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature. Cela signifie que u est convergente ssi $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente (donc u divergente ssi $\sum(u_{n+1} - u_n)$ divergente).*

Démonstration. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Alors par télescopage classique, $u_{\mathrm{N}} - u_0 = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(u_{k+1} - u_k)$. Ainsi, le comportement asymptotique de u est le même que celui de la série numérique $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 1 *Démontrer la convergence de la série* $\sum \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$ *et déterminer sa somme.*

Théorème 1 *Soit* $q \in \mathbb{C}$. *La série numérique* $\sum q^n$ *(appelée série géométrique) est convergente si et seulement si* $|q| < 1$. *Le cas échéant,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration. Si $|q| \geq 1$, la suite de terme général $u_n = q^n$ ne tend pas vers 0, donc sa série diverge grossièrement. Si $|q| < 1$, alors $q \neq 1$ et la suite des sommes partielles est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{S}_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Comme q^{n+1} tend vers 0 dans ce cas de figure, on en déduit que la suite des sommes partielles converge et a pour limite $\frac{1}{1-q}$.

Exemple 7 *Soit* q *un complexe tel que* $|q| < 1$. *Établir la convergence des séries* $\sum nq^n$, $\sum n^2 q^n$ *et déterminer leurs sommes. Soit* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. *Pour tout réel* t *dans* $[-1,1]$, $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (tq)^n = \frac{1-(tq)^{\mathrm{N}+1}}{1-tq}$. *On remarque qu'alors, la fonction* $f : [-1,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1-(tq)^{\mathrm{N}+1}}{1-tq}$ *est dérivable puisque rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, par linéarité de la dérivation,*

$$\forall t \in [-1,1], f'(t) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} nt^{n-1}q^n = \frac{\left(-(\mathrm{N}+1)t^{\mathrm{N}}q^{\mathrm{N}+1}\right)(1-tq) - (1-(tq)^{\mathrm{N}+1})(-q)}{(1-tq)^2}$$

En particulier, pour $t = 1$, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} nq^n = \frac{\left(-(\mathrm{N}+1)q^{\mathrm{N}+1}\right)(1-q) + q(1-q^{\mathrm{N}+1})}{(1-q)^2}$$

Quand N *tend vers* $+\infty$, *le numérateur tend vers* q *puisque* $|q| < 1$, *donc la série* $\sum nq^n$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

La série $\sum n^2 q^n$ *est laissée à titre d'exercice.*

Théorème 2 *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Alors la série géométrique* $\sum z^n/n!$ *est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Démonstration. Rappelons une des preuves classiques de ce fait via l'inégalité de Taylor. On fixe z un complexe et on considère la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(tz)$$

On sait que cette fonction est de classe C^∞ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], f^{(n)}(t) = z^n \exp(tz)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on souhaite appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, on remarque pour cela que

$$\forall t \in [0,1], |f^{(n+1)}(t)| = \left|z^{n+1}\exp(tz)\right| \leq |z|^{n+1}\exp(\mathfrak{Re}(tz)) \leq |z|^{n+1}\exp(|tz|) \leq |z|^{n+1}\exp(|z|)$$

On en déduit d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à l'ordre n que

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k \right| \leq \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} |z|^{n+1} \exp(|z|)$$

Ceci s'écrit encore

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|z|)$$

Or on sait que $|z|^{n+1} = o((n+1)!)$, donc que le minorant de droite tend vers 0. On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite e^z.

2 Séries à termes positifs ou nuls

Théorème 3 *Soit $\sum u_n$ une série réelle à termes positifs ou nuls. Elle est convergente ssi la suite des sommes partielles est majorée.*

Démonstration. Comme la suite u est à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est croissante. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi elle est majorée.

☞ **Remarque**

Les sommes partielles d'une série à terme positifs divergente tend vers $+\infty$.

Théorème 4 (Comparaison des séries à termes positifs) *Soit u et v deux suites réelles. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ et que la série $\sum_n v_n$ est convergente. Alors la série $\sum u_n$ est convergente et*

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration. Notons $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes partielles des suites u et v. D'après l'hypothèse entre u et v,

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(u) \leq S_n(v)$$

D'autre part, v est à termes positifs ou nuls de série convergente. Donc la suite $(S_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, en particulier par sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Mais alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(u) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Ainsi, la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Comme u est à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente et en passant à la limite on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exemple 8 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs. Alors $\sum \max(u_n, v_n)$ et $\sum u_n v_n/(u_n + v_n)$ sont convergentes. En effet, il suffit de remarquer que pour tout entier n, $\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ et $\frac{u_n v_n}{u_n+v_n} \leq u_n \frac{v_n+u_n}{u_n+v_n} = u_n$.*

Exemple 9 *On définit u via $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1/n$ si n est un carré, $u_n = 1/n^2$ sinon. On cherche à démontrer que $\sum u_n$ converge. Il est délicat d'établir le comportement de ses sommes partielles, mais on peut tout de même les majorer. Soit $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ non carré}}}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ carré}}}^{N} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ non carré}}}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \frac{1}{n^2} \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

On établira plus tard que $\sum 1/n^2$ est convergente. Comme elle à termes positifs, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, la série à termes positifis $\sum u_n$ est majorée donc convergente.

Exercice 2 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. Étudier la réciproque dans le cas général et en rajoutant l'hypothèse u décroissante.*

Théorème 5 *Soit u et v deux suites réelles. On les suppose toutes deux de signe positif ou nul, puis $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Démonstration. Commençons par le cas $\sum u_n$ convergente. Comme $v \sim u$, en particulier, $v = \mathrm{O}(u)$, donc il existe un rang N et un réel positif M tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |v_n| \leq \mathrm{M}|u_n|$$

D'après l'hypothèse du signe de u et v, on en déduit

$$\forall n \geq \mathrm{N}, 0 \leq v_n \leq \mathrm{M}u_n$$

Comme $\sum \mathrm{M}u_n$ est convergente, on en déduit d'après le théorème précédent que $\sum v_n$ est convergente.
Supposons à présent $\sum u_n$ divergente. On exploite cette fois-ci le fait que $u \sim v$, donc $u = \mathrm{O}(v)$. Il existe un rang N et un réel positif M tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \leq \mathrm{M}|v_n|$$

Le réel M ne peut être nul, sinon la série $\sum u_n$ n'est pas divergente. On en déduit via l'hypothèse sur les signe de u et v que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, 0 \leq \frac{1}{\mathrm{M}} u_n \leq v_n$$

Comme $\sum \frac{1}{\mathrm{M}} u_n$ diverge et tend vers $+\infty$, la série $\sum v_n$ diverge et tend vers $+\infty$.

⚠ **Attention**
C'est FAUX sans l'hypothèse de signe. Je proposerai un contre-exemple après le critère spécial des séries alternées.

Exemple 10 *La série $\sum \frac{5^n+n-1}{3^n+2\sqrt{n}+1}$ est-elle convergente ? On détermine l'équivalent $\frac{5^n+n-1}{3^n+2\sqrt{n}+1} \sim (5/3)^n$. Comme $5/3 > 1$ et que les séries sont à termes positifs*

☞ **Remarque**
On peut généraliser le critère précédent, si u et v deux suites numériques qui vérifient à partir d'un certain rang $0 \leq \alpha u \leq v \leq \beta v$ avec α et β deux réels strictement positifs. Alors leurs séries sont de même nature.

Exemple 11 *Soit $\sum u_n$ une suite à termes positifs. Montrons qu'elle converge ssi la série $\sum u_n/(1+u_n)$ converge. Supposons que $\sum u_n$ converge. Alors, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Par conséquent, $1+u_n \sim 1$ et $u_n/(1+u_n) \sim u_n$. Comme ces suites sont positives et $\sum u_n$ converge, $\sum u_n/(1+u_n)$ converge. Réciproquement, supposons $\sum u_n/(1+u_n)$ converge. Notons pour tout entier n, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Comme v_n tend vers 0, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 1$, donc $u_n = v_n/(1-v_n)$ et on conclut comme précédemment, que $u_n \sim v_n$, donc que $\sum u_n$ converge puisque ce sont des séries à termes positifs.*

On peut à présent utiliser tous les outils d'analyse asymptotique pour étudier la convergence et/ou la divergence de séries numériques à termes positifs.

Propriété 6 (Critère de D'Alembert) *Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs. On suppose que u ne s'annule pas à partir d'un certain rang N et que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\geq \mathrm{N}}$ est convergente de limite ℓ.*

- *Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.*

Démonstration.
- Si $\ell > 1$, on a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $+\infty$, La série diverge alors grossièrement.
- Si $\ell < 1$, alors il existe un rang N', $\forall n \geq \mathrm{N}'$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+\ell}{2} = q < 1$. On en déduit que

$$\forall n \geq \mathrm{N}_0 = \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}'), 0 \leq u_n \leq u_{\mathrm{N}_0} q^{n-\mathrm{N}_0}$$

Comme la série $\sum q^n$ est convergente, la série $\sum u_n$ est convergente d'après la comparaison des séries à termes positifs.

— On a vu que la série harmonique diverge alors que $\frac{1/n}{1/(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Si l'on considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1/n^2$, alors $\sum u_n$ converge (nous l'établirons plus tard), tandis que $\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Le deux cas de figure peuvent ainsi de produire.

Exemple 12 *Déterminons la nature de la série $\sum \frac{n^3}{n!}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\frac{n!}{n^3} = (1+1/n)^3\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit d'après le critère de D'Alembert que la suite $\sum n^3/n!$ converge. Pour déterminer sa somme, on décompose X^3 dans la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}_3[X]$, ce qui s'écrit $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$, on en déduit que pour tout entier N

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=0}^{N}\frac{n}{n!} + 3\sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!} + 3\sum_{n=0}^{N-2}\frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-3}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

On en déduit par linéaire des sommes de séries convergentes que$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!} = 5e$.

3 Outils d'intégration

Théorème 6 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante, continue et positive. Alors pour tout entier n non nul,*

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt$$

En particulier, la série $\sum f(n)$ a même nature que la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1, n]\!]$, $t \in [k, k+1]$. La décroissance de f implique $f(k+1) \leq f(t) \leq f(t)$. La croissance de l'intégrale entraîne alors par intégration sur $[k, k+1]$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

ou encore

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_k^{k-1} f(t)dt$$

Par sommation et relation de Chasles, on en déduit

$$\int_1^{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt$$

Si la série $\sum f(n)$ converge, alors la suite $(\int_0^n f(t))_n$ est croissante majorée donc convergente. Si la suite $(\int_0^n f(t)dt)_n$ converge alors la suite des somme partielles de $\sum f(n)$ est majorée donc convergente et la série à termes positifs converge.

On rappelle le théorème des sommes de Riemann dans le cas particulier de la subidivion régulière pointée à gauche.

Théorème 7 *Soit $f \in C_{pm}([a, b], \mathbb{K})$. Alors la suite $\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\int_a^b f(t)dt$*

⚠ **Attention**
Le théorème des sommes des Riemann donne une information sur une suite qui n'est pas une série puisque le terme général de la somme dépend du nombre de termes. Il est quand même fort utile pour tous ces procédés sommatoires discrets.

Exemple 13 *Une série de Riemann. On cherche à déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. On remarque pour cela que l'application $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, t \mapsto 1/t^2$ est décroissante, donc que pour tout entier* N *non nul,*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{dt}{t^2} = 1 + 1 - \frac{1}{n-1} \leq 3$$

Comme cette série est à termes positifs, de sommes partielles majorées, elle est convergente.

Théorème 8 (Séries de Riemann) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Démonstration. Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement. Plaçons nous dans le cas $\alpha > 0$. Introduisons la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$. Celle-ci est alors bien décroissante positive. On peut alors appliquer le théorème précédemment. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$$

Il y a convergence de cette suite si et seulement si $1 - \alpha < 0$, i.e $1 < \alpha$. Si $\alpha = 1$,

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 3 *A l'aide d'une comparaison série intégrale, démontrer que*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n))$$

4 Séries absolument convergentes

Définition 3 *Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que cette série est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème 9 *Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente, alors elle est convergente.*

Démonstration. Commençons par le cas d'une série réelle. On note pour tout entier n, $u_n^+ = \max(0, u_n)$ et $u_n^- = \max(0, -u_n)$. Ces définitions vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^- \quad \text{et} \quad |u_n| = u_n^+ + u_n^-$$

Il suffit pour cela de distinguer les cas $u_n \geq 0$ et $u_n \leq 0$. On remarque qu'alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \quad \text{et} 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

D'après le théorème sur les comparaisons de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes. Par linéarité de la convergence, la série $\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$ est convergente. Pour le cas complexe, on exploite les suites $v = \mathfrak{Re}(u)$ et $w = \mathfrak{Im}(u)$. Ces deux suites réelles vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |v_n| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq |w_n| \leq |u_n|$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, les séries $\sum |v_n|$ et $\sum |w_n|$ sont convergentes. Ainsi, les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes, d'après ce qui précède. On en déduit par linéarité de la limite que $\sum u_n = \sum v_n + \mathrm{i} \sum w_n$ est convergente.

⚠ **Attention**
La réciproque est fausse. La série harmonique alternée $\sum (-1)^n/n$ converge tandis que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge.

Définition 4 *On appelle série semi-convergente une série convergente non absolument convergente*

Exercice 4 *Établir que la série* $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ *est semi-convergente.*

Propriété 7 *L'ensemble des suites de série absolument convergente, noté* $\ell^1(\mathbb{K})$*, est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*. De plus, l'application* $\mathrm{N} : \ell^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}, u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ *vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall u \in \ell^1(\mathbb{K}), \mathrm{N}(u) \geq 0$. *(positivité)*
- $\forall u \in \ell^1(\mathbb{K}), \mathrm{N}(u) = 0 \iff u = 0$. *(définie)*
- $\forall u \in \ell^1(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{N}(\lambda u) = |\lambda| \mathrm{N}(u)$. *(homogénéité positive)*
- $\forall (u, v) \in (\ell^1(\mathbb{K}))^2, \mathrm{N}(u + v) \leq \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v)$. *(inégalité triangulaire)*

Démonstration.

- Soit u, v deux suites telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, λ, μ deux scalaires. Pour tout entier n,

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n|$$

  D'après la comparaison des séries à termes positifs, $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge absolument. De plus, la série nulle converge absolument.
- Positivité évidente
- Soit $u \in \ell^1(\mathbb{K})$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$, alors pour tout entier N, $0 \leq \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$ est une somme nulle de termes positifs. Ils sont donc tous nuls, i.e $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, u_{\mathrm{N}} = 0$
- Pour tout entier n, $|\lambda u_n| = |\lambda||u_n|$. Pour tout entier N, $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n|$, ce qui donne le résultat en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$.
- Soit u, v des suites ℓ^1, alors pour tout entier n, $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$. Pour tout entier N, $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n| + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |v_n| \leq \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v)$. On en déduit quand N tend vers $+\infty$, $\mathrm{N}(u + v) \leq \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v)$.

☞ **Remarque**
On dit que l'application N *est une norme sur l'espace* $\ell^1(\mathbb{K})$*.*

Propriété 8 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique, et* $\sum v_n$ *une série à termes réels positifs ou nuls. On suppose que* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et que la série* $\sum v_n$ *est convergente. Alors la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente (donc convergente).*

Démonstration. Notons N un entier naturel et M un réel positif tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, |u_n| \leq \mathrm{M}|v_n|$$

Comme la suite v est à termes positifs ou nuls, on en déduit que

$$\forall n \geq \mathrm{N}, 0 \leq |u_n| \leq \mathrm{M} v_n$$

Comme la série $\sum v_n$ est convergente, la série $\sum \mathrm{M} v_n$ est convergente. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ est convergente, i.e absolument convergente.

✎ **Méthode**
Pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$*, on commence par étudier*

- *si elle diverge grossièrement*
- *si elle converge absolument. On dispose alors de tous les outils sur les séries à termes positifs pour étudier* $\sum |u_n|$ *(majorations, équivalents, o, O).*
- *si elle converge, sans être absolument convergente en revenant à la suite des sommes partielles.*

Exemple 14 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. La somme* $\sum(\sin(1/n^\alpha)$ *est-elle convergente ? Si* $\alpha \leq 0$*, cette série diverge grossièrement. Si* $\alpha > 0$*,* $1/n^\alpha \xrightarrow{} 0$ *et on a l'équivalent* $\sin(1/n^\alpha) \sim 1/n^\alpha$*. On en déduit que* $\sum \sin(1/n^\alpha)$ *converge absolument ssi* $\alpha > 1$*.*

Exemple 15 *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*. Étudions la nature de la série de terme général*

$$u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= a\sqrt{n} + b\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + c\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (a+b+c)\sqrt{n} + \left(\frac{b}{2} + c\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{b}{8} - \frac{c}{2}\right)\frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Si $a+b+c \neq 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. Sinon,

- *si $b/2+c \neq 0$, $u_n \sim (b/2+c)/\sqrt{n}$. Comme la série de Riemann $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge, la série $\sum u_n$ diverge.*
- *sinon, $u_n = \mathrm{O}(1/n^{3/2}$. Comme la série de Riemann $\sum n^{-3/2}$ converge, la série $\sum u_n$ converge.*

Théorème 10 (Formule de Stirling) *Au voisinage de $+\infty$, $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.*

Démonstration. Considérons la suite numérique u à termes strictement positifs définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$$

Démontrons que la suite u est convergente en démontrant que la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ est convergente. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+3/2}} \frac{n^{n+1/2}}{n! e^n}\right) \\ &= \ln\left(e(\frac{n}{n+1})^{n+1/2}\right) \\ &= 1 - (n+1/2)\ln(1+1/n) \\ &= 1 - (n+1/2)(1/n - 1/(2n) + \mathrm{O}(1/n^2)) \\ &= \mathrm{O}(1/n^2) \end{aligned}$$

On sait déjà que la série $\sum 1/n^2$ converge. Par conséquent, les théorèmes de comparaison assurent que la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, donc que la suite $\ln(u)$ converge. Par continuité de l'exponentielle, la suite u converge. Nous ne démontrons pas que sa limite vaut $\sqrt{2\pi}$, on peut l'établir via les intégrales de Wallis.

5 Séries alternées

Théorème 11 (Critère spécial des séries alternées) *Soit u une suite réelle à termes positifs ou nuls. On suppose que u est décroissante et convergente de limite nulle. Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. De plus, sa limite est du signe de u_0 et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{R}_n| \leq u_{n+1}$$

Démonstration. La clé de ce résultat est le théorème des suites adjacentes. On note $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum(-1)^n u_n$ et on montre que les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_{2n+2} - \mathrm{S}_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ car u est décroissante. $\mathrm{S}_{2n+3} - \mathrm{S}_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$ car u est décroissante. $\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque u est de limite nulle. D'après le théorème des suites ajdacentes, les suites $(\mathrm{S}_{2n})_n$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_n$ sont convergentes de même limite. on en déduit que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. Notons S sa somme.
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{S}_{2n+1} \leq \mathrm{S} \leq \mathrm{S}_{2n}$ d'après ce qui précède. On en déduit par disjonction de cas

$$|\mathrm{S} - \mathrm{S}_n| \leq |\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n| \leq u_{n+1}$$

i.e $|\mathrm{R}_n| \leq u_{n+1}$

Exemple 16 *On sait que la série harmonique diverge. Cependant, comme $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \mapsto 1/n$ est positive décroissante de limite nulle. La série $\sum(-1)^n/n$ converge d'après le théorème précédent. D'autre part, sa somme est négative et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\mathrm{S} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

ce qui est cohérent avec ce que l'on a démontré à l'aide de la formule de Taylor -intégral via $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exemple 17 *La suite* $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est positive, décroissante, de limite nulle. Donc la série* $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ *est convergente. D'autre part,* $\sum \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est divergente car somme d'une série divergente* $\sum 1/n$ *et d'une série convergente* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$*. Toutefois, comme* $\sqrt{n} = o(n)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$*, ce qui entraîne l'équivalent*

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Exemple 18 *Étudions la série* $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*.*

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de terme général $(-1)^n\pi/(2n)$ *est convergente d'après le CSSA, la seconde convergente d'après les comparaisons avec les séries de Riemann. Ainsi, la série étudiée est convergente.*