Exercices : Révisions d'algèbre linéaire vues en première année .

Cours

Les points marqués d'une astérisque peuvent faire l'objet d'une question de cours

Révisions d'algèbre linéaire vues en première année .

En particulier :
La formule de Grassman, le théorème du rang, les endomorphismes remarquables : projecteurs, symétrie, la caractérisation de l'équivalence de deux matrices avec le rang, les déterminants, la comatrice.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments d'algèbre linéaire	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. ($\star$) Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $u_{\mid E_i} = u_i$ pour tout i.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Matrices définies par blocs. Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	($\star$) Interprétation géométrique des blocs. La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible. Transvections par blocs. Invariance du déterminant.

Contenus	Capacités & Commentaires
(★) Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	(★) En dimension finie, traduction matricielle.
Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes ;	
(★) L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	
Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	Traduction matricielle.
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, (★) morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$.	
Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	