Fonctions de Bessel

1. (a) Pour tout réel x, la fonction $[0,\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos(nt - x\sin t)$ est continue comme composée de fonctions continues, donc intégrable car $[0,\pi]$ est borné. Ainsi, $J_n(x)$ est définie pour tout réel x. En particulier,

$$J_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt)dt$$

Dans le cas $n = 0$, on a $J_0(0) = 1$. Sinon, pour tout entier naturel non nul n,

$$\int_0^{\pi} \cos(nt)dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0.$$

Ainsi, $J_n(0) = 0$ pour tout entier naturel non nul n.

(b) L'application f_t est de classe C^2 comme composée de fonctions de classe C^2 et vérifie pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\pi]$

$$f_t'(x) = \sin t \sin(nt - x\sin t)$$

$$f_t''(x) = -\sin^2 t \cos(nt - x\sin t)$$

(c) Fixons un réel x et effectuons une intégration par parties comme indiqué dans l'expression intégrale de $J_n'(x)$. Posons $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \sin(nt - x\sin t)$ pour tout réel t de $[0,\pi]$. Alors

$$\begin{aligned}
\pi J_n'(x) &= [-\cos t \sin(nt - x\sin t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos t)(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)dt \\
&= (\sin(n\pi - x\sin\pi) + \sin(n0 - x\sin 0)) + \int_0^{\pi}(n\cos t - x\cos^2 t)\cos(nt - x\sin t)dt \\
&= \int_0^{\pi}(n\cos t - x\cos^2 t)\cos(nt - x\sin t)dt
\end{aligned}$$

C'est bien l'expression de l'énoncé.

(d) Soit un réel x. Alors

$$\begin{aligned}
&x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)\left(-x^2\sin^2 t + xn\cos t - x^2\cos^2 t + x^2 - n^2\right)dt \\
&= \frac{-n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)(n - x\cos t)\,dt
\end{aligned}$$

C'est bien l'expression recherchée.

(e) Pour tout réel x, on note que l'application $H_x : [0,\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(nt - x\sin t)$ est dérivable et vérifie $H_x'(t) = (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)$ pour tout $t \in [0,\pi]$. On peut alors calculer l'intégrale précédente via

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)dt &= [H_x(t)]_0^\pi \\ &= \sin(n\pi - x\sin\pi) - \sin(n0 - x\sin 0) \\ &= \sin(n\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$

On a alors d'après ce qui précède, $x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$ pour tout réel x. Donc J_n satisfait à l'équation différentielle (E_n).

2. (a) Soit x un réel. Pour tout réel t, on a $\cos(nt - x\sin t) = \frac{1}{2}\left(e^{i(nt-x\sin t)} + e^{-i(nt-x\sin t)}\right)$. Alors,

$$\begin{aligned}J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(e^{i(nt-x\sin t)} + e^{-i(nt-x\sin t)}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{i(nt-x\sin t)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-i(nt-x\sin t)}dt\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale figurant dans cette dernière égalité. Ainsi, grâce à l'imparité du sinus, on a

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 e^{-i(nu-x\sin u)}du + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-i(nt-x\sin t)}dt$$

La relation de Chasles sur les intégrales donne alors

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi e^{-i(nt-x\sin t)}dt$$

(b) D'après ce qui précède, on a

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi (i\sin t)^n e^{-int}dt$$

On écrit alors pour tout réel t de $[-\pi,\pi]$, $i\sin t = \frac{1}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$. La formule du binôme donne alors

$$\begin{aligned}(i\sin t)^n &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikt}(-1)^{n-k}e^{-i(n-k)t} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{-i(n-2k)t}\end{aligned}$$

Ainsi, la linéairité de l'intégrale permet d'écrire

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\int_{-\pi}^\pi e^{-i(2n-2k)t}dt$$

Ces dernières intégrales sont toutes nulles sauf pour $k = n$. Dans ce dernier cas, l'intégrale vaut 2π. On aboutit alors à $J_n^{(n)}(0) = \dfrac{1}{2^n}$.

(c) L'expression intégrale des dérivées des J_n permet d'écrire pour tout réel x et tout entier j, par croissance de l'intégrale,

$$\begin{array}{rcl} |J_n^{(j)}(x)| & \leq & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |i\sin t|^j |e^{i(nt-x\sin t)}| dt \\ & \leq & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dt \\ & \leq & 1 \end{array}$$

3. (a) Nous avons vu précédemment que $J_0(0) = 1$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} J_0(x)\ln x = -\infty$. De plus, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue en 0, donc tend vers $\varphi(0)$ en 0. Conclusion, la limite à droite de Y_0 en 0 vaut $-\infty$.

(b) Le logarithme népérien est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ de même que J_0 et φ, donc Y_0 est de classe C^2 comme somme et produit de fonctions de classe C^2. Soit alors $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Une première dérivation donne

$$Y_0'(x) = J_0'(x)\ln(x) + \frac{J_0(x)}{x} + \varphi'(x)$$

La seconde dérivée vaut alors

$$Y_0''(x) = J_0''(x)\ln(x) + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \varphi''(x)$$

On assemble alors la quantité suivante :

$$\begin{aligned} &x^2 Y_0''(x) + xY_0'(x) + x^2 Y_0(x) \\ &\qquad = x^2\left(J_0''(x)\ln(x) + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \varphi''(x)\right) \\ &\qquad + x\left(J_0'(x)\ln(x) + \frac{J_0(x)}{x} + \varphi'(x)\right) + x^2(J_0\ln(x) + \varphi(x)) \\ &\qquad = \left(x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x)\right)\ln(x) \\ &\qquad + 2xJ_0'(x) + x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) + x^2\varphi(x) \end{aligned}$$

Cette dernier membre est nul car J_0 est solution de (E_0) et d'après la définition de φ.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} x^2 W'(x) & = & x^2 J_0''(x)Y_0(x) + x^2 J_0'(x)Y_0'(x) - x^2 Y_0'(x)J_0'(x) - x^2 J_0(x)Y_0''(x) \\ & = & Y_0(x)\left(-xJ_0'(x) - x^2 J_0(x)\right) - J_0(x)\left(-xY_0'(x) - x^2 Y_0(x)\right) \\ & = & -x\left(Y_0(x)J_0'(x) - J_0(x)Y_0'(x)\right) \\ & = & -xW(x) \end{array}$$

En particulier, pour tout $x > 0$, $xW'(x) + W(x) = 0$.

(d) Notons $Z : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto xW(x)$. Elle est dérivable et vérifie pour tout $x > 0$, $Z'(x) = xW'(x) + W(x) = 0$. Comme $\mathbb{R}^{+*}$ est un intervalle, Z est constante sur cet intervalle.

(e) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} xW(x) &= xJ_0'(x)\left(J_0(x)\ln x + \varphi(x)\right) - x\left(J_0'(x)\ln(x) + \frac{J_0(x)}{x} + \varphi'(x)\right)J_0(x) \\ &= xJ_0'(x)\varphi(x) - J_0^2(x) - x\varphi'(x)J_0(x) \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, $\lim\limits_{x\to 0^+} xJ_0'(x)\varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\varphi'(x)J_0(x) = 0$ car J_0 et φ sont bornées au voisinage de 0 (car continues en ce point). Ainsi, on a bien $\lim\limits_{x\to O^+} xW(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-J_0^2(x))$. D'autre part, J_0 est continue en 0, donc cette dernière limite vaut $-J_0^2(0) = -1$.
Nous avons vu précédemment que la fonction Z était constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa limite en 0^+ est donc égale à cette constante. D'après ce qui précède, $\forall x > 0, Z(x) = -1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $W(x) = -1/x$.

Un peu d'analyse de Fourier

1. Fonction $d_{\mathbb{Z}}$.

(a) La borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ est le plus grand de ses minorants.

(b) Soit x un réel. Alors $|x| \in \{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$. De plus, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $0 \leq |x-n|$, donc 0 minore cet ensemble, ce qui en fait une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$.

(c) i. Soit $x \in [0, 1/2]$. Soit n un entier relatif non nul. Comme $|n| \geq 1$, on a

$$1 \leq |n| \leq |x-n| + |x|$$

Donc, comme x est dans $[0, 1/2]$

$$x \leq 1 - x = 1 - |x| \leq |x-n|$$

Cette inégalité est encore valable pour $n = 0$, puisqu'on a alors égalité. Donc x est minorant de $\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et c'en est même un minimum puisque, $|x-0| = x$. Donc x est la borne inférieure de cet ensemble, soit $d(x, \mathbb{Z}) = x$.

ii. Soit $x \in [1/2, 1]$, alors $1-x$ est dans $[0, 1/2]$. D'après ce qui précède, $d(1-x, \mathbb{Z}) = 1-x$. Or pout tout entier relatif n, $|1-x-n| = |x-(-n+1)|$. Comme $n \mapsto -n+1$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, les parties de $\mathbb{R}$, $\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{|x-(-n+1)| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sont égales donc de même borne inférieure. Ainsi,

$$d(x, \mathbb{Z}) = d(1-x, \mathbb{Z}) = 1-x$$

(d) Soit x un réel. Alors pour tout entier relatif n, $|-x-n| = |x-(-n)| \geq d(x, \mathbb{Z})$ puisque $-n$ appartient à $\mathbb{Z}$. Comme ceci est vrai pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on passe à l'inf, ce qui donne $d(-x, \mathbb{Z}) \geq d(x, \mathbb{Z})$. On applique cette dernière inégalité au réel $-x$, ce qui implique $d(x, \mathbb{Z}) \geq d(-x, \mathbb{Z})$, et donc l'égalité $d(x, \mathbb{Z}) = d(-x, \mathbb{Z})$. Ainsi, l'application $d_{\mathbb{Z}}$ est paire.

(e) Soit x un réel. L'application $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n-1$ est bijective (de réciproque $n \mapsto n+1$). Donc on a l'égalité d'ensembles

$$\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{|x-(n-1)| \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{|x+1-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Par conséquent, $\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{|x+1-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ont la même borne inférieure, soit $d(x, \mathbb{Z}) = d(x+1, \mathbb{Z})$. Ainsi, l'application $d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique.

(f) D'après la périodicité précédemment établie, il suffit d'examiner la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$ sur $[0,1]$. Comme $d_{\mathbb{Z}}$ est paire et d'après 1.c), le taux d'accroissement en 0 tend vers -1 par valeurs inférieures et 1 par valeurs supérieures, ce qui infirme sa dérivabilité en 0. D'après 1.c), en 1/2, le taux d'accroissement tend vers 1 par valeurs inférieures, et -1 par valeurs supérieures. Ainsi $d_{\mathbb{Z}}$ est non dérivable en 1/2. Sur $]0,1/2[$ et $]1/2,1[$ est dérivable d'après les expressions de 1.c).

D'après la périodicité, on en conclut que $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

(g) On traite le cas $n=0$ à part. Alors, par simples considérations géométriques, $\int_0^1 d_{\mathbb{Z}}(t)dt$ vaut l'aire de deux triangles de base 1/2, de hauteur 1/2. Alors $c_0 = 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Soit n un entier relatif non nul. Alors, on mène des intégrations par parties,

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^{1/2} te^{-2i\pi nt}dt + \int_{1/2}^1 (1-t)e^{-2i\pi nt}dt \\
&= \left[t\frac{e^{-2i\pi nt}}{-2i\pi n}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} 1\frac{e^{-2i\pi nt}}{-2i\pi n}dt + \left[(1-t)\frac{e^{-2i\pi nt}}{-2i\pi n}\right]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 (-1)\frac{e^{-2i\pi nt}}{-2i\pi n}dt \\
&= \frac{1}{-2i\pi n}\left(\frac{1}{2}e^{-i\pi n} - 0\right) - \left[\frac{e^{-2i\pi n}}{(-2i\pi n)^2}\right]_0^{1/2} + \frac{1}{-2i\pi n}\left(0 - \frac{1}{2}e^{-i\pi n}\right) + \left[\frac{e^{-2i\pi n}}{(-2i\pi n)^2}\right]_{1/2}^1 \\
&= -\frac{1}{4\pi^2 n^2}\left(1 - e^{-i\pi n} + 1 - e^{-i\pi n}\right) \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}
\end{aligned}$$

2. (a) $\forall t \in [n, n+1], 0 < n \leq t \leq n+1$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$. On exploite ensuite la croissance de l'intégrale sur le segment $[n, n+1]$, ce qui entraîne

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2}dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2}dt$$

Comme les intégrandes de droite et gauche sont constantes et que le segment $[n, n+1]$ est de longueur 1, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}dt \leq \frac{1}{n^2}$$

(b) Soit N un entier naturel non nul. On somme les inégalités précédentes pour n allant de 1 à N, ce qui entraîne par relation de Chasles,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

On calcule l'intégrale et on reconnaît alors

$$S_{N+1} - 1 \leq \left[\frac{-1}{t}\right]_1^{N+1} \leq S_N$$

Soit encore $S_{N+1} - 1 \leq 1 - \frac{1}{N+1} \leq S_N$. La minoration de S est alors acquise. Pour la majoration, on remarque que $S_N \leq 1 + 1 - \frac{1}{N} \leq 2 - \frac{2}{N+1}$.

(c) D'après l'inégalité précédente, pour tout entier N, $S_N \leq 2 - \dfrac{2}{N+1} \leq 2$. Donc S est une suite majorée. De plus, pour tout entier N non nul, $S_{N+1} - S_N = 1/(N+1)^2 > 0$. Ainsi S est croissante. On en déduit que S est convergente d'après le théorème de convergence monotone.

(d) D'après 1.c), $d_{\mathbb{Z}}(0) = 0$. Soit N un entier naturel non nul, on remarque la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est paire d'après 1.g) et que pour tout entier pair n, $c_n = 0$. Par conséquent

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{N}((-1)^n - 1)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\lfloor (N-1)/2\rfloor} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Cette suite alors de limite nulle, donc

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{8}$$

Pour tout entier naturel non nul N, on coupe la somme suivante selon la parité de n

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\lfloor N/2\rfloor} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\lfloor (N-1)/2\rfloor} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\lfloor N/2\rfloor} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{\lfloor (N-1)/2\rfloor} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Ainsi, d'après la convergence de la suite S,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

3. (a) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{ikx} = 1$, donc $D_n(x) = n - (-n) + 1 = 2n+1$. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors la raison $e^{ix} \neq 1$. Alors on peut exploiter une somme de suite géométrique, soit

$$D_n(x) = \frac{e^{i(-n)x} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}}\frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

(b) Soit $x \in [\pi, \pi]\backslash\{0\}$, alors $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc

$$D_n(x) = \frac{\sin(nx + x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{\sin(nx)\cos(x/2) + \cos(nx)\sin(x/2)}{\sin(x/2)} = \sin(nx)\left(\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x}\right) + \cos(nx)$$

On trouve alors

$$D_n(x) = 2\frac{\sin(nx)}{x} + \left(\sin(nx)\left(\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} - \frac{2}{x}\right) + \cos(nx)\right)$$

(c) L'intégrande est paire, d'après les valeurs absolues, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(nx)|}{|x|}dx = 2\int_0^{\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x}dx$$

Le changement de variables $u = nx$ amène alors $du = ndx$, donc $dx/x = du/u$ soit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(nx)|}{|x|}dx = 2\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}du$$

(d) On commence par remarquer que $x \mapsto \cos(x/2)/\sin(x/2) - 2/x$ possède une limite finie quand x tend vers 0, puisque $\tan(x/2)/(x/2)$ tend vers $\tan'(0) = 1$. Ainsi, cette application est bornée sur $[-\pi, \pi]$ par une borne B (On peut faire l'étude complète des varations si besoin). Alors pour tout entier n non nul,

$$\left|\sin(nx)\left(\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} - \frac{2}{x}\right) + \cos(nx)\right| \leq 1 + B \times 1 \leq 1 + B$$

Par inégalité triangulaire, l'intégrale de ce morceau est bornée indépendamment de n. Examinons l'autre morceau. D'après, ce qui précède, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|2\frac{\sin(nx)}{x}\right| dx = 4\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du = 4\int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du + 4\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

Comme $|\sin(u)|$ est positive pour tout réel u, et comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout entier naturel k non nul, pour tout u dans $[k\pi, (k+1)\pi]$, $\frac{1}{(k+1)\pi} \leq \frac{1}{u} \leq \frac{1}{k\pi}$, donc $\frac{|\sin(u)|}{(k+1)\pi} \leq \frac{|\sin(u)|}{u} \leq \frac{|\sin(u)|}{k\pi}$. Après intégration, on obtient,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{(k+1)\pi} du \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{k\pi} du$$

donc

$$\frac{2}{(k+1)\pi} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du \leq \frac{2}{k\pi}$$

Par conséquent, en notant $\alpha = 4\int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du$, on a pour tout entier n non nul,

$$\alpha + \frac{8}{\pi}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|2\frac{\sin(nx)}{x}\right| dx \leq \alpha + \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On note alors pour tout entier n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Par les mêmes méthodes que précédemment, on montre que $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée en utilisant la décroissance de la fonction inverse et en sommant sur les bons intervalles puisque la fonction inverse admet le logarithme pour primitive. Ainsi, en regroupant toutes les parties bornées ou tendant vers 0, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{2\pi}\frac{8}{\pi}H_n + a_n = \frac{4}{\pi^2}\ln(n) + u_n$$

avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites bornées.