La résolution algébrique d'une équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

est possible si l'on peut exprimer dans le cas général les éventuelles solutions de l'équation à l'aide des coefficients $a_0, \dots, a_n$. Si l'on ne trouve pas de méthode de résolution algébrique, on peut utiliser des méthodes de résolution numérique qui permettent d'obtenir des valeurs approchées des solutions. La résolution algébrique des équations du deuxième degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

amène aux formules

$$\frac{-b + \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On dit qu'on a résolu l'équation par radicaux en raison des racines qui apparaissent dans les formules. Si l'on connaît une solution exacte d'une équation du troisième degré, on peut se ramener à l'étude d'une équation du deuxième degré. Le cas général fait l'objet de ce problème. Sachez que la résolution algébrique des équations du quatrième degré peut se faire par l'intermédiaire d'une équation auxiliaire du troisième degré. Les mathématiciens du XVII[e] et XVIII[e] siècle ont tenté en vain de résoudre les équations de degré 5 par radicaux. En 1826, le mathématicien norvégien Abel démontre que l'équation générale de degré 5 ne peut être résolue par radicaux.

1 Introduction.

Simplifier l'écriture de

$$\sqrt[3]{\frac{13 + 5\sqrt{17}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-13 + 5\sqrt{17}}{2}}$$

en recherchant une équation de degré 3 vérifiée par ce réel.

2 Résolution de l'équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$.

On considère l'équation d'iconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

1. Montrer que l'équation (1) se ramène à une équation réduite d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ de la forme

   $$x^3 = px + q \tag{2}$$

   où p et q sont deux nombres complexes que l'on exprimera en fonction de a, b et c.
2. Déterminer deux nombres complexes r et t que l'on exprimera en fonction de p et q tels que si $u^3 + v^3 = r$ et $uv = r$, alors $u + v$ est solution de (2).
3. On appelle équation résolvante de (2) l'équation

   $$y^2 - ry + t^3 = 0 \tag{3}$$

   d'inconnue $y \in \mathbb{C}$, et on note α et β les deux racines complexes, éventuellement confondues de (3).

(a) Construire deux nombres complexes u_1 et v_1 tels que

$$u_1^3 = \alpha, \quad v_1^3 = \beta, \quad \text{et} \quad u_1 v_1 = t$$

(b) On note $j = \exp(2i\pi/3)$. Développer et simplifier le polynôme

$$P(X) = (X - (u_1 + v_1))(X - (ju_1 + j^2 v_1))(X - (j^2 u_1 + j v_1))$$

(c) En déduire une expression des solutions de (2) en fonction de u_1 et v_1.

4. En appliquant la méthode précédente, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - 3iz^2 + 3z - 9i = 0$$

3 Résolution de l'équation du troisième degré dans $\mathbb{R}$.

On considère deux nombres réels p et q, et on étudie dans cette partie les racines réelles du polynôme

$$R(X) = X^3 - pX - q$$

Comme le cas $p = 0$ est facile à traiter, on suppose désormais que p est non nul. D'autre part, on pose

$$\delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

On donne pour un polynôme P à coefficients réels et pour a un réel les définitions suivantes :

— On dit que a est une racine simple de P s'il existe un polynôme Q à coefficients réels tels que

$$Q(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(X) = (X - a)Q(X)$$

— On dit que a est une racine double de P s'il existe un polynôme Q à coefficients réels tels que

$$Q(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(X) = (X - a)^2 Q(X)$$

— On dit que a est une racine triple de P s'il existe un polynôme Q à coefficients réels tels que

$$Q(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(X) = (X - a)^3 Q(X)$$

1. On suppose $\delta \geq 0$. Déduire des résultats de la partie précédente que

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\delta}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\delta}}$$

est racine de R. Il s'agit de la formule de Cardan.

2. On cherche maintenant à determiner le nombre de racines de R et à savoir s'il s'agit de racines simples, doubles ou triples.

(a) Montrer que R n'admet pas de racine réelle triple.

(b) Déduire des résultats de la partie précédente les équivalences suivantes :

$$\delta < 0 \iff R \text{ possède trois racines réelles simples distinctes}$$

$$\delta = 0 \iff R \text{ possède deux racines réelles distinctes, une simple et une double}$$

$$\delta > 0 \iff R \text{ possède une seule racine réelle, et elle est simple}$$

3. Redémontrer ces équivalences en étudiant la fonction

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - px - q.$$

4 Une résolution trigonométrique

Le but de cette partie est de résoudre par une autre méthode l'équation (2)

$$x^3 = px + q$$

avec p et q réels dans le cas $\delta < 0$.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer un réel non nul λ pour que, à l'aide du changement de variable $x = \lambda m$ l'équation (2) se ramène à une équation de la forme

$$4m^3 - 3m = \mu \tag{4}$$

   d'inconnue $m \in \mathbb{R}$ et où μ est un élément de $]-1,1[$ à déterminer.
3. On admet qu'il existe un unique réel α dans $]0,\pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \mu$. Montrer que l'équation (4) possède trois racines réelles simples que l'on exprimera en fonction de α.