Exercice 1 - Une étude de fonction

1. Soit x un réel non nul, alors comme le sinus hyperbolique est impair, on a

$$f(-x) = (-x)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = (-x)\operatorname{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = (-x)(-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)) = x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

   Par conséquent, f est paire.

2. Quand x tend vers $+\infty$, $1/x$ tend vers 0. Mais alors, comme le sinus hyperbolique est dérivable en 0, $\lim_{y\to 0} \operatorname{sh}(y)/y = \operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$. D'après les composées de limites, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Comme f est paire, on a également $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$. D'autre part, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $1/x$ tend vers $+\infty$. Or, d'après les croissances comparées, on a $\lim_{y\to+\infty} \operatorname{sh}(y)/y = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Toujours par parité, on en déduit que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. En conclusion, $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = +\infty$.

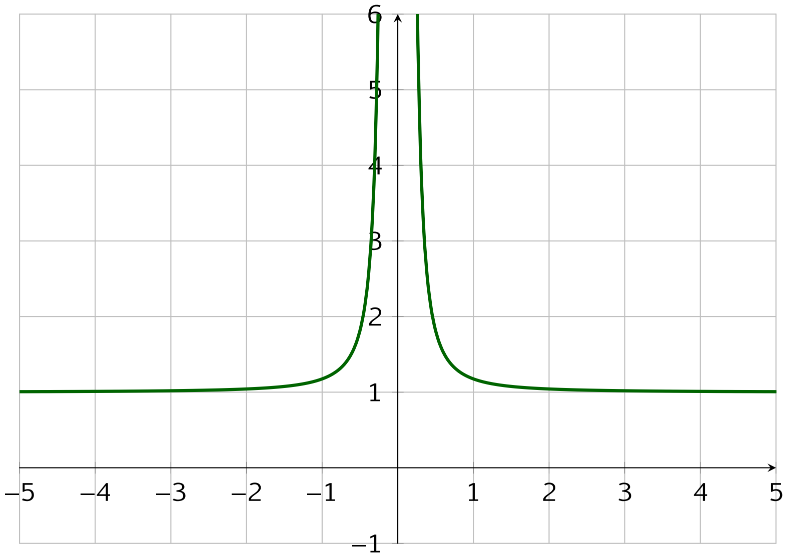
3. La fonction inverse, le sinus hyperbolique et l'identité sont dérivables sur leur ensemble de définition. On en déduit par produit et composées de fonctions dérivables que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Comme le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{\operatorname{sh}(1/x)}{\operatorname{ch}(1/x)} - \frac{1}{x}\right] = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]$$

4. Étudions rapidement le signe de $y \mapsto \operatorname{th}(y) - y$. Il s'agit d'une fonction dérivable de dérivée $y \mapsto 1 - \operatorname{th}^2(y) - 1 = -\operatorname{th}^2(y)$. Ainsi, la dérivée est de signe constant négatif, donc cette fonction est décroissante. De plus, elle s'annule en 0, puisque $\operatorname{th}(0) = 0$. Ainsi, elle est de signe négatif sur $\mathbb{R}^+$ et de signe positif sur $\mathbb{R}^-$. Comme le cosinus hyperbolique est de signe constant positif, on en déduit que f' est de signe positif sur $\mathbb{R}^{-*}$ et de signe négatif sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc que f est croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.



Exercice 2 - Fonctions hölderiennes

1. Si f est constante, alors pour tous réels x, y dans I, $|f(x)-f(y)|=0$, tandis que $1|x-y|^\alpha \geq 0$. Donc f est α-hölderienne. Réciproquement, supposons que f est α-hölderienne. Soit x, y deux réels distincts dans I, alors comme $\alpha > 1$, on a

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \mathrm{L}_f |x-y|^{\alpha-1}$$

   Ainsi, quand y tend vers x, $|x-y|^{\alpha-1}$ tend vers 0 puisque $\alpha-1>0$. Par conséquent, le taux d'accroissement de f en x tend vers 0. Donc f est dérivable en x et $f'(x)=0$. Ainsi, f est dérivable, de dérivée nulle sur un intervalle, donc constante.

2. Soit x et y deux réels positifs. On suppose dans un premier temps que $x \geq y$. Alors comme la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Comme $\sqrt{y} \geq 0$, on en déduit que $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq y$ puisque y est positif. Mais alors

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - y$$

   On en déduit par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ que

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|}$$

   Cette dernière inégalité est symétrique en x et y. On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq 1|x-y|^{1/2}.$$

   Ainsi, le réel strictement positif 1 assure que la fonction S est 1/2-hölderienne.

3. Supposons par l'absurde que la fonction S est Lipschitzienne. Notons k un réel strictement positif tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq k|x-y|$$

   En particulier, soit x un réel strictement positif et $y=0$, on obtient alors

$$\forall x > 0, 0 \leq \sqrt{x} \leq kx$$

   soit encore

$$\forall x > 0, 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$$

   La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est alors bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$. Toutefois, on a la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, ce qui invalide ce caractère borné. Cette absurdité montre que la fonction S n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

4. Soit y un élément de $]0,1]$ fixé et $\mathrm{F}_y : [y,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_\nu(x) - f_\nu(y) - f_\nu(x-y)$. Comme f_ν est dérivable sur $]0,1]$, on en déduit que F_y est dérivable sur $]y,1]$ et

$$\forall x \in]y,1], \quad \mathrm{F}_y'(x) = \nu x^{\nu-1} - \nu(x-y)^{\nu-1}$$

   Mais alors, $\nu - 1 < 0$, donc $u \mapsto u^{\nu-1}$ est décroissante sur $]0,1]$. Ainsi,

$$\forall x \in]y,1], x-y \leq x, \quad \text{donc} \quad (x-y)^{\nu-1} \geq x^{\nu-1}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{F}_y'(x) \leq 0$$

   puisque ν est un réel positif. La fonction F_y est alors décroissante, nulle en y, donc négative sur $[y,1]$. On ainsi démontré

$$\forall y \in]0,1], \quad \forall x \in [y,1], \quad |x^\nu - y^\nu| = x^\nu - y^\nu \leq (x-y)^\nu = |x-y|^\nu$$

   Cette dernière inégalité est encore vraie pour $y=0$ et symétrique en x et y. On en déduit

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x^\nu - y^\nu| \leq |x-y|^\nu$$

   La fonction f_ν est donc bien ν-hölderienne.
   De même que précédemment, supposons par l'absurde que f_ν est Lipschzienne. Cela implique que $x \mapsto x^{\nu-1}$ est bornée. Or comme $\nu - 1 < 0$, on dispose de la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\nu-1} = +\infty$ ce qui contredit ce caractère borné. Ainsi, f_ν n'est pas Lipschitzienne.

5. Soit t un élément de $]0,1]$. On introduit la fonction $\Psi_t :]0,1] \to \mathbb{R}, \gamma \mapsto t^\gamma$. Alors Ψ_t est dérivable et

$$\forall \gamma \in]0,1], \Psi_t'(\gamma) = \ln(t) t^\gamma \leq 0$$

Ainsi Ψ_t est décroissante. Soit à présent x, y deux éléments de $[0,1]$, alors $|x-y|$ appartient à $[0,1]$. Si $x = y$, l'inégalité $|x-y|^\beta \leq |x-y|^\alpha$ est trivialement vérifiée. Sinon, on a par décroissance de $\Psi_{|x-y|}$,

$$|x-y|^\beta \leq |x-y|^\alpha$$

Soit $f \in \mathrm{H}_\beta([0,1],\mathbb{R})$. On dispose d'un réel strictement positif L tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x)-(y)| \leq \mathrm{L}|x-y|^\beta$$

D'après les inégalités précédemment démontrées, cela entraîne

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x)-(y)| \leq \mathrm{L}|x-y|^\alpha$$

L'inclusion est ainsi démontrée.

6. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. Alors f' est continue sur un segment, donc bornée. D'après l'inégalité des accroissements finis, cela implique que f est Lipschitzienne donc 1-hölderienne. D'après la question précédente, cela implique que f est α-hölderienne. Soit à présent f une fonction α-hölderienne et x un élément de $[0,1]$, on dispose d'un réel positif L tel que

$$\forall y \in [0,1], |f(x)-f(y)| \leq \mathrm{L}|x-y|^\alpha$$

Quand y tend vers x, comme $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{y\to x} |x-y|^\alpha = 0$. On en déduit par théorème d'encadrement, que $f(y) \xrightarrow[y\to x]{} f(x)$, donc que f est continue en x, et ce, pour tout réel x dans $[0,1]$. Ainsi, f est continue. Les deux inclusions sont alors démontrées.

7. Pour tout réel x dans $]0,1]$, $g(x) = \exp(x\ln(x))$. Par croissances comparées, $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. On en déduit par continuité de l'exponentielle que $g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 = g(0)$. Ainsi, g est continue en 0. De plus, elle est continue sur $]0,1]$ comme composée et produit de fonctions usuelles. En outre, g est dérivable sur $]0,1]$ par le même argument et

$$\forall x \in]0,1], g'(x) = (1+\ln(x))\exp(x\ln(x)) = (1+\ln(x))g(x)$$

On a déjà vu que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$. D'autre part, $1+\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, donc $g'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. D'après un corollaire du théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que g n'est pas dérivable en 0.

8. Soit $\alpha \in]0,1]$. On introduit la fonction $h :]0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{x-\alpha} = \exp((x-\alpha)\ln(x))$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $(x-\alpha)\ln(x)$ tend vers $+\infty$ car $\alpha > 0$. D'après les limites de l'exponentielle, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$. Si g appartient à $\mathrm{H}_\alpha([0,1],\mathbb{R})$, alors h est bornée au voisinage de 0, ce que la limite précédente infirme. Par conséquent, g n'appartient pas à H_α.

Problème - Une équation fonctionnelle

I - Questions préliminaires.

1. On établit la propriété (H_n) par récurrence. Initialisation en $n = 1$. Soit u une application de classe C^1 sur A, v une application de classe C^1 sur B telle que $v(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}$ et $u'(v(c)) = 0$. Alors, $w = u \circ v$ est continue et dérivable. De plus, $w' = v'(u' \circ v)$. Mais alors, comme v' et $u' \circ v$ sont continues, w' est continue, donc w est de classe C^1. De plus, $w'(c) = v'(c)u'(v(c)) = v'(c) \times 0 = 0$.

   Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel ue (H_n) est vérifiée. Démontrons que (H_{n+1}) est valide. Soit y une application de classe C^{n+1} sur A, v une application de classe C^{n+1} sur B telle que $v(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}$ et $\forall k \in [\![1, n+1]\!], u^{(k)}(v(c)) = 0$. Alors w est dérivable et $w' = v'(u' \circ v)$. Mais alors u' est une application de classe C^n sur A. D'après l'hypothèse de récurrence (H_n), cela entraîne que $u' \circ v$ est une application de classe C^n sur B. Comme v' est de classe C^n, la fonction w' est alors de classe C^n comme produit de fonctions de classe C^n d'après la formule de Leibniz. On en déduit que w est de classe C^{n+1}. En outre, en notant $s = u' \circ v$, la formule de Leibniz entraîne

$$w^{(n+1)}(c) = (w')^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (v')^{(n+1-k)}(c) s^{(k)}(c)$$

Or on a $\forall k \in [\![1, n]\!], (u')^{(k)}(v(c)) = 0$. Donc, d'après (H_n) appliqué à u' et v, on $\forall k \in [\![1, n]\!], s^{(k)}(c) = 0$. De plus, $s(c) = u'(v(c)) = 0$. Par conséquent, la somme précédente est nulle et $w^{(n+1)}(c) = 0$. Toutes les dérivées précédentes sont nulles en c d'après l'hypothèse de récurrence.

2. Notons $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, c'est une fonction de classe C^∞. Soit $f \in \mathrm{E}_\mathrm{J}$. Montrons que f est de classe C^∞ par récurrence. Initialisation en $n = 1$. D'après l'équation fonctionnelle, f est dérivable (donc continue) et $f' = f \circ c$. Ainsi, f' est continue comme composée de fonctions continues, donc f est de classe C^1. Hérédité : soit n un entier naturel non nul tel que f est de classe C^n. Alors $f' = f \circ c$ d'après l'équation fonctionnelle, donc f' est une composée de fonctions de classe C^n. D'après la question précédente, cela entraîne que f' est de classe C^n, donc que f est de classe C^{n+1}. On conclut par récurrence que f est de classe C^∞.
3. Notons M un majorant de g'. On introduit alors la fonction $h :]a, b[\to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) - \mathrm{M}x$. Celle-ci est dérivable et $\forall x \in]a, b[, h'(x) = g'(x) - \mathrm{M} \leq 0$. Par conséquent, h est décroissante. Par conséquent, elle admet une limite éventuellement infinie en a. Toutefois, g est majorée et l'intervalle $]a, b[$ est borné, donc h est majorée. Par conséquent, h admet une limite finie en a et par opération sur les limites, g admet une limite finie en a.

II - L'espace $\mathrm{E}_{[-1,1]}$, étude partielle.

1. La fonction $\mathrm{T} : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{S}(x) + \mathrm{S}(-x)$ est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in [-1, 1], \mathrm{T}'(x) = \mathrm{S}'(x) - \mathrm{S}'(-x) = \mathrm{S}(x^2) - \mathrm{S}((-x)^2) = \mathrm{S}(x^2) - \mathrm{S}(x^2) = 0$$

Ainsi, comme $[-1, 1]$ est un intervalle, T est constante égale à $\mathrm{T}(0) = 2\mathrm{S}(0) = 2$. En conclusion,

$$\forall x \in [-1, 1], \mathrm{S}(x) + \mathrm{S}(-x) = 2.$$

2. La fonction S est dérivable et vérifie $\mathrm{S}'(1) = \mathrm{S}(1^2) = \mathrm{S}(1)$ d'après l'équation fonctionnelle. Par conséquent, la tangente au graphe de S en $(1, \mathrm{S}(1))$ a pour équation

$$y = \mathrm{S}(1) + \mathrm{S}'(1)(x - 1) = \mathrm{S}(1) + \mathrm{S}'(1)x - \mathrm{S}'(1) = \mathrm{S}(1)x$$

Cette droite contient clairement le point $(0, 0)$.

3. Comme l'application S est de classe C^1, on peut effectuer une intégration par parties

$$\int_0^1 \mathrm{S}(x)dx = [x\mathrm{S}(x)]_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{S}'(x)dx = \mathrm{S}(1) - \int_0^1 x\mathrm{S}\left(x^2\right)dx$$

On effectue alors le changement de variable $u = x^2$ dans la dernière intégrale qui donne $du = 2xdx$, soit

$$\int_0^1 \mathrm{S}(x)dx = \mathrm{S}(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{S}(u)du$$

On en déduit que $\frac{3}{2}\int_0^1 \mathrm{S}(u)du = \mathrm{S}(1)$ donc que $\int_0^1 \mathrm{S}(u)dt = \frac{2}{3}\mathrm{S}(1)$.

4. On reconnaît une suite arithmético-géométrique de paramètres $(2, 1)$. La suite q vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, (q_{k+1} + 1) = 2(q_k + 1)$ et $q_0 + 1 = 1$, donc la suite $q + 1$ est géométrique de raison 2, de premier terme 1. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, q_k + 1 = 2^k$. En conclusion,

$$\forall k \in \mathbb{N}, q_k = 2^k - 1$$

5. Soit h un élément de $]0, 1]$ et $\mathrm{J} = [0, h]$ et f une fonction de J dans $\mathbb{R}$.

(a) L'intervalle J est un segment et f est continue sur ce segment. D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée, donc $|f|$ est majorée, donc sa borne supérieure est un réel bien défini.

(b) Démontrons ce résultat par récurrence. Initialisation en $n = 1$. Soit x un réel dans J. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $f(0) = 0$, on a

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| = \left|\int_0^x f(t^2)dt\right|$$

De plus, $\forall t \in \mathrm{J}, t^2 \in \mathrm{J}, |f(t^2)| \leq \mathrm{M}$. Comme x est positif, on en déduit par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale que

$$|f(x)| \leq \int_0^x \mathrm{M}dt = \mathrm{M}x$$

L'initialisation est acquise. Hérédité : soit n un entier naturel non nul tel que $\forall x \in \mathrm{J}, \quad |f(x)| \leq \mathrm{M}x^{q_n}$. En reprenant le mêmes manipulations d'intégrales, on obtient pour tout réel x dan J,

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| = \left|\int_0^x f(t^2)dt\right| \leq \int_0^x \mathrm{M}(t^2)^{q_n}dt = \mathrm{M}\frac{x^{2q_n+1}}{2q_n+1} \leq \mathrm{M}x^{2q_n+1} = \mathrm{M}x^{q_{n+1}}$$

Le résultat s'ensuit par récurrence.

Soit x un réel fixé dans J différent de 1. Alors, comme $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, la suite x^{q_n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après l'inégalité précédente, cela prouve par passage à la limite que $f(x) = 0$, et ce pour tout réel x. Ainsi, f est nulle sur $[0,1[\cap\mathrm{J}$. Si $\mathrm{J} = [0,1]$, on en déduit par continuité en 1 de f, que f est égaleement nulle en 1. En conclusion, f est nulle sur J.

(c) On introduit la fonction $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(0)\mathrm{S}(x)$. Alors $g(0) = f(0) - f(0) \times 1 = 0$. De plus, g est dérivable et

$$\forall x \in \mathrm{J}, g'(x) = f'(x) - f(0)\mathrm{S}'(x) = f(x^2) - f(0)\mathrm{S}(x^2) = g(x^2)$$

Par conséquent, la fonction g appartient à E_J. D'après ce qui précédente, on en conclut que g est la fonction nulle sur J, donc que

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad f(x) = f(0)\mathrm{S}(x)$$

6. L'intervalle J est stable par c. Soit $f \in \mathrm{E}_\mathrm{J}$, alors la restriction de f à $[0,b]$ vérifie ce qui précède, donc est la restriction de $f(0)\mathrm{S}$ à $[0,b]$. Pour l'autre morceau, on introduit la fonction $\psi : [a,0] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + f(0)\mathrm{S}(-x)$. Celle-ci est dérivable et

$$\forall x \in [a,0], \psi'(x) = f'(x) - f(0)\mathrm{S}'(-x) = f(x^2) - f(0)\mathrm{S}(x^2)$$

On remarque alors que $\forall x \in [a,0], x^2 \in [0,b]$. En exploitant ce qui précède, on a alors

$$\forall x \in [a,0], \psi'(x) = f(0)\mathrm{S}(x^2) - f(0)\mathrm{S}(x^2) = 0$$

Comme $[a,0]$ est un intervalle, ψ est constante égale à $\psi(0) = 2f(0)$. On en déduit que

$$\forall x \in [a,0], f(x) = 2f(0) - f(0)\mathrm{S}(-x) = f(0)(2 - \mathrm{S}(-x)) = f(0)\mathrm{S}(x)$$

Ainsi, tout élément de E_J est la restriction à J de $f(0)\mathrm{S}$. Réciproquement, on vérifie que toutes ces fonctions appartiennent à E_J. En conclusion,

$$\mathrm{E}_\mathrm{J} = \left\{ \alpha\mathrm{S}_{|\mathrm{J}} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

III - Étude de $\mathrm{E}_{]0,1[}$.

1. (a) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puisque la racine carrée stabilise J. Comme la racine carrée est strictement croissante, il suffit de comparer p_0 et p_1. Or $p_0 = p$ appartient $]0,1[$, donc $\sqrt{p} > p$, i.e $p_1 > p_0$. On en déduit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Comme est elle est majorée par 1, elle est convergente. Comme la racine carrée est continue, sa limite est nécessairement un point fixe de $\sqrt{\cdot}$, soit 1.

(b) Notons que M_n est bien définie pour tout entier n d'après le théorème des bornes atteintes, puisque f est continue sur le segment $[p_n, p_{n+1}]$. Soit n un entier naturel non nul et x un réel dans $[p_n, p_{n+1}]$. Exploitons le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f(t^2)dt$$

Or, pour tout réel t dans $[p_n, p_{n+1}]$, le réel t^2 appartient à $[p_{n-1}, p_n]$, donc

$$\forall t \in [p_n, p_{n+1}], |f(t^2)| \leq M_{n-1}$$

On en déduit par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale que

$$|f(x)| \leq |f(p_n)| + \int_{p_n}^{x} M_{n-1}\, dt \leq M_{n-1} + M_{n-1}(x - p_n) \leq M_{n-1}(1 + p_{n-1} - p_n)$$

Ainsi, $M_{n-1}(1 + p_{n-1} - p_n)$ est un majorant de $|f|$ sur $[p_n, p_{n+1}]$, on en déduit par passage à la borne sup que

$$M_n \leq M_{n-1}(1 + p_{n-1} - p_n)$$

Si l'un des réels M_n est nul, alors la suite est stationnaire en 0, donc la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Sinon, tous les M_n sont strictement positifs et on peut passer au logarithme. Comme le logarithme est croissant, l'inégalité précédente entraîne

$$\forall n \geq 1, \ln(M_n) \leq \ln(M_{n-1}) + \ln(1 + p_{n+1} - p_n)$$

Mais alors d'après l'inégalité de concavité du logarithme $\ln(1 + x) \leq x$, on a

$$\forall n \geq 1, \ln(M_n) - \ln(M_{n-1}) \leq p_{n+1} - p_n$$

On somme tout ceci, ce qui donne par télescopage,

$$\forall N \geq 1, \ln(M_N) - \ln(M_0) \leq p_{N+1} - p_1 \leq 1 - p_1$$

On en déduit que la suite $(\ln(M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Par conséquent, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(c) On pose $p = \alpha$. D'après la question précédente, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Notons M un majorant de cette suite. Soit $x \in [\alpha, 1[$, alors comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, il existe un entier n tel que $x \in [p_n, p_{n+1}]$. Mais alors, $|f(x)| \leq M_n \leq M$. En conséquence, $|f|$ est majorée par M, donc f est bornée sur $[\alpha, 1[$. En outre, $[\alpha^2, 1[\subset [\alpha, 1[$, on en déduit d'après l'équation fonctionnelle que f' est bornée sur $[\alpha, 1[$.

(d) On peut alors appliquer la question I.3, à $x \mapsto f(1 - x)$, ce qui entraîne que f admet une limite finie λ en 1. Toujours d'après l'équation fonctionnelle, cela entraîne également que f' admet une limite finie en 1, à savoir λ. D'après le théorème de la limite de la dérivée, cela implique que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \lambda$, donc que f satisfait l'équation fonctionnelle sur $]0, 1]$. Ainsi, le prolongement de f appartient à $E_{]0,1]}$.

2. Comme précédemment, $]0, \beta^2] \subset]0, \beta]$. Ainsi, si f est majorée sur $]0, \beta]$, f' l'est également d'après l'équation fonctionelle. D'après la question I.3, on en déduit que f admet une limite finie l en 0. Comme précédemment, f' admet alors une limite finie en 0, à savoir l. D'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de f en 0 par l est dérivable en 0, et $f'(0) = l$. Par conséquent, il appartient à $E_{[0,1[}$. D'après les résultats de la partie II, ce prolongement ne peut être que $lS_{|[0,1[}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. En contraposant, le résultat précédent, f n'est pas majorée sur $]0, \varepsilon]$. De plus, $-f$ n'est pas la restriction de $f(0)S$ à J, donc $-f$ n'est majorée sur $]0, \varepsilon]$. Ainsi, f n'est pas minorée sur $]0, \varepsilon]$. Si f n'est pas la restriction de $f(0)S$ à J et si f n'est ni majorée ni minorée sur $]0, \varepsilon]$,

$$\exists (a, b) \in]0, \varepsilon]^2, f(a) > 0, f(b) < 0.$$

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de x_0 dans $]0, \varepsilon[$ tel que $f(x_0) = 0$. En réitérant ce raisonnement sur $]0, x_0]$, on obtient $x_1 \in]0, x_0[$ tel que $f(x_1) = 0$. Par récurrence, on obtient une suite strictement décroissante de zéros de f dans $]0, \varepsilon]$.