Exercice 1 : Intégration

1. (a) On remarque que f est dérivable comme quotient d'applications dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,
$$\forall x \in [1,+\infty[, f'(x) = \frac{e^t t - e^t}{t^2} = \frac{e^t}{t^2}(t-1)$$
Ainsi, $\forall x > 1, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [n, n+1]$, d'après la croissance précédemment établie, $f(n) \leq f(t) \leq f(n+1)$. Comme l'intégrale est croissante, on en déduit $\int_n^{n+1} f(n)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n+1)dt$, soit encore
$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n+1)$$
ce qui donne le résultat attendu.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme l'intervalle $[n, n+1]$ est de longueur 1, $\int_n^{n+1} f(t)dt$ représente la valeur moyenne de f sur $[n, n+1]$, on sait d'après la continuité de f que cette valeur moyenne appartient à $f([n, n+1])$ (c'est une conséquence du TVI). Ceci prouve l'existence. Or d'après la question 1.a), f est strictement croissante, donc injective. Par conséquent, il y a unicité.

2. (a) D'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq u_n \leq n+1$. Or $n+1 \sim n$ quand n tend vers $+\infty$. Par théorème d'encadrement, $u_n \sim n$ quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Soit $t \in [n, n+1]$, comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$. Comme $e^t/t \geq 0$, on en déduit $\frac{1}{n+1}\frac{e^t}{t} \leq \frac{e^t}{t^2} \leq \frac{1}{n}\frac{e^t}{t}$. Comme l'intégrale est croissante, cela entraîne
$$\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}dt \leq \int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}dt \leq \frac{1}{n}\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}dt$$
Comme $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient bien
$$\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}dt = o\left(\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}dt\right)$$
quand n tend vers $+\infty$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto 1/t$ sont de classe C^1 sur $[n, n+1]$, on peut appliquer une intégration par parties, ce qui entraîne
$$\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}dt = \left[\frac{e^t}{t}\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{-e^t}{t^2}dt = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^n}{n} + \int_n^{n+1}\frac{e^t}{t^2}dt$$
Quand n tend vers $+\infty$, le résultat 2.b) assure que
$$\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}dt = \frac{e^n}{n}\left(e\frac{n}{n+1} - 1\right) + o\left(\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}dt\right)$$
Par conséquent,
$$\int_n^{n+1}\frac{e^t}{t}dt \sim \frac{e^n}{n}\left(e\frac{n}{n+1} - 1\right) \sim \frac{e^n}{n}(e-1)$$
On en déduit d'après la définition de u_n que $\frac{e^{u_n}}{u_n} \sim \frac{e^n}{n}(e-1)$. Or $u_n \sim n$ d'après 2.a), donc $e^{u_n - n} \sim e-1$. Comme $e-1 \neq 1$, on peut passer au logarithme dans l'équivalent, ce qui donne $u_n - n \sim \ln(e-1)$, i.e $u_n - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(e-1)$.

Exercice 2 : Algèbre linéaire

1. Montrons que la famille (a, b) est libre. Soit λ, μ deux réels tels que $\lambda a + \mu b = 0$. Alors la première composante de ce vecteur de $\mathbb{R}^4$ vaut $\lambda \times 0 + \mu \times 3 = 0$, ce qui entraîne $\mu = 0$. La seconde composante implique alors $\lambda \times 6 + 0 \times 3 = 0$, soit $\lambda = 0$. D'autre part, la famille est génératrice de F d'après la définition de F. Conclusion, c'est une base de F, donc $\dim(\mathrm{F}) = 2$.
2. Montrons que la famille (u, v, w) est libre. Soit λ, μ, ν trois réels tels que $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$. On l'écrit sous forme de système linéaire
$$\begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ -\mu + 2\nu & = & 0 \\ \nu & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{cases}$$
La quatrième ligne entraîne $\mu = 0$, donc la première implique $\lambda = 0$. Au final, $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$. D'autre part, (u, v, w) est génératrice de G, donc c'est une base de G et $\dim(\mathrm{G}) = 3$.
3. Il s'agit d'un calcul direct
$$2v + w = (2 \times 1 + 0, 2 \times (-1) + 2, 2 \times 0 + 1, 2 \times 1 + 0) = (2, 0, 1, 2)$$
$$\frac{1}{3}(2b - a) = \frac{1}{3}(2 \times 3 - 0, 2 \times 3 - 6, 2 \times 1 + 1, 2 \times 5 - 4) = \frac{1}{3}(6, 0, 3, 6) = (2, 0, 1, 2)$$
4. On note $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto -y + 2z - t$. C'est une forme linéaire non nulle puisque $\varphi(0, 1, 0, 0) = -1 \neq 0$. Elle vérifie
$$\varphi(u) = 0, \quad , \varphi(v) = 1 + 0 - 1 = 0, \quad \varphi(w) = -2 + 2 - 0 = 0$$
Ainsi, $\mathrm{G} \subset \ker(\varphi)$. Or $\dim(\mathrm{G}) = 3$ d'après 1. et $\dim(\ker(\varphi)) = 3$ puisque φ est une forme linéaire non nulle. Il y a donc égalité $\mathrm{G} = \ker(\varphi)$. Enfin, $\varphi(a) = -12$, donc $a \notin \ker(\varphi)$, d'où $a \notin \mathrm{G}$.
5. Comme $\mathrm{H} \subset \mathrm{F}$, $\dim(\mathrm{H}) \leq \dim(\mathrm{F}) = 2$. Toutefois, $a \notin \mathrm{H}$ d'après ce qui précède, donc $\mathrm{H} \neq \mathrm{F}$ et $\dim(\mathrm{H}) \leq 1$. Enfin, $2v + w = \frac{1}{3}(2b - a) \in \mathrm{H}$, donc H n'est pas réduit à $\{0\}$ et $\dim(\mathrm{H}) = 1$.
6. D'après la formule de Grassmann, $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = 2 + 3 - 1 = 4$.
7. Comme $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathbb{R}^4$ et $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, il y a égalité $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathbb{R}^4$. Toutefois, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \mathrm{H}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc F et G ne sont pas en somme directe.

Problème : Opérateur de moyenne intégrale

1. (a) Soit $x \in [0, 1]$. On distingue deux cas
   - Si $x = 0$, alors $\int_0^1 f(ux)du = \int_0^1 f(0)du = f(0) = [\mathrm{T}(f)](0)$.
   - Si $x \neq 0$, alors on effectue le changement de variable $t = ux$, ce qui donne $dt = xdu$ et
   $$[\mathrm{T}(f)](x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(ux)xdu = \int_0^1 f(ux)du$$

   On a bien l'égalité attendue dans tous les cas.

   (b) Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$. D'après ce qui précède, par linéarité de l'intégrale,
   $$[\mathrm{T}(f)](x) - [\mathrm{T}(f)](y) = \int_0^1 (f(ux) - f(uy))du$$
   On en déduit par inégalité triangulaire,
   $$|[\mathrm{T}(f)](x) - [\mathrm{T}(f)](y)| = \left|\int_0^1 (f(ux) - f(uy))du\right| \leq \int_0^1 |f(ux) - f(uy)|du$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue sur $[0,1]$, elle y est uniformément continue, donc il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2, |s-t| \leq \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $|x-y| \leq \delta$. Alors pour tout réel u dans $[0,1]$, $|ux - uy| = |u||x-y| \leq |x-y| \leq \delta$. On en déduit que

$$\forall u \in [0,1], |f(ux) - f(uy)| \leq \varepsilon$$

D'après ce qui précède, on en déduit, par croissance de l'intégrale,

$$|[\mathrm{T}(f)](x) - [\mathrm{T}(f)](y)| \leq \int_0^1 \varepsilon du = \varepsilon$$

Récapitulons, pour tout $\varepsilon > 0$, on dispose d'un réel $\delta > 0$ tel que pour tous réels x, y, dans $[0,1]$, $|x-y| \leq \delta$ implique $|[\mathrm{T}(f)](x) - [\mathrm{T}(f)](y)| \leq \varepsilon$. On a donc prouvé l'uniforme continuité de $\mathrm{T}(f)$, donc sa continuité.

☞ **Remarque**

On peut faire beaucoup plus simple pour prouver la continuité de $\mathrm{T}(f)$. *Elle est de classe* C^1 *sur* $]0,1]$, *donc continue sur* $]0,1]$. *En utilisant le développement limité* $\mathrm{T}(f)(x) = \frac{0+f(0)x+o(x)}{x} = f(0) + o(1)$, *on a directement sa continuité en* 0.

2. (a) Soit $(f,g) \in \mathcal{C}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in [0,1]$. Alors
   — Si $x = 0$,
   $$\mathrm{T}(\lambda f + \mu g)(0) = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \mathrm{T}(f)(0) + \mu \mathrm{T}(g)(0)$$
   — Si $x \in]0,1]$, par linéairité de l'intégrale,
   $$\mathrm{T}(\lambda f + \mu g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \mu \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt = \lambda \mathrm{T}(f)(x) + \mu \mathrm{T}(g)(x)$$

   On vient de vérifier que pour tout réel x dans $[0,1]$, $\mathrm{T}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \mathrm{T}(f)(x) + \mu \mathrm{T}(g)(x)$, donc l'égalité d'applications $\mathrm{T}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{T}(f) + \mu \mathrm{T}(g)$. Ainsi, l'opérateur T est linéaire.

   (b) Soit $f \in \ker(\mathrm{T})$. Alors $\forall x \in]0,1], \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0$, donc $\forall x \in]0,1], \int_0^x f(t)dt = 0$. Si l'on note F la primitive de f qui s'annule en 0, ce qui précède montre que $\forall x \in]0,1], \mathrm{F}(x) = 0$. On en déduit $\forall x \in [0,1], \mathrm{F}(x) = 0$. Ainsi, F est dérivable et $\forall x \in [0,1], \mathrm{F}'(x) = 0$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, $\mathrm{F}' = f$, donc f est l'application nulle de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Conclusion, $\ker(\mathrm{T}) = \{0\}$. En particulier, T est injective.

   (c) La réponse est négative. Pour cela on remarque que pour tout f dans $\mathcal{C}$, $\mathrm{T}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,1]$. Or il existe des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont pas de classe C^1 sur $]0,1$, par exemple $x \mapsto |x - 1/2|$.

3. (a) L'opérateur de dérivation D est linéaire. Comme $[0,1]$ est un intervalle, $\mathrm{E} = \ker(\mathrm{D})$, donc E est un sev de $\mathcal{C}$. L'opérateur $\mathrm{Z} : f \mapsto f(0)$ d'évaluation en 0 est linéaire, donc $\mathrm{F} = \ker(\mathrm{Z})$ est un sev de $\mathcal{C}$.

   (b) Montrons cela par une méthode d'analyse/synthèse. Soit $f \in \mathcal{C}$. Phase d'analyse : soit $(g,h) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ tel que $f = g + h$. Alors $f(0) = g(0) + h(0)$. Comme $h \in \mathrm{F}$, $f(0) = g(0)$. Comme g est constante, $g = f(0)$ (la fonction constante égale à $f(0)$). On en déduit $h = f - f(0)$. Cette phase d'analyse montre l'unicité sous réserve d'existence. Phase de synthèse : On pose $g = f(0)$ la fonction constante à $f(0)$ et $h = f - g$. Alors g est continue et constante, h est continue et nulle en 0. Enfin, $f = g + h$. Conclusion, toute fonction f dans $\mathcal{C}$ admet une unique décomposition dans $\mathrm{E} + \mathrm{F}$, ces sev sont donc supplémentaires dans $\mathcal{C}$, i.e $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F} = \mathcal{C}$.

   (c) D'après le travail précédent, $p : f \mapsto f(0)$ la fonction constante égale à $f(0)$ et $q = \mathrm{id}_{\mathcal{C}} - p : f \mapsto f - f(0)$.

   (d) Soit $f \in \mathrm{E}$, alors f est constante à $f(0)$. Soit $x \in]0,1]$, alors
   $$\mathrm{T}(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x f(0)dt = \frac{f(0)x}{x} = f(0)$$

   De plus, $\mathrm{T}(f)(0) = f(0)$. Par conséquent, $\mathrm{T}(f)$ est bien constante (égale à $f(0)$), i.e $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$.

   Soit $f \in \mathrm{F}$. Alors $f(0) = 0$. D'après la définition de $\mathrm{T}(f)$, $\mathrm{T}(f)(0) = f(0) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{F}$.

(e) Soit $f \in \mathcal{C}$. Alors $p(f) = f(0)$ est la fonction constante égale à $f(0)$. D'après le travail fait précédemment, $\mathrm{T}f$ est alors encore la fonction constante égale à $f(0)$, i.e $\mathrm{T}(p(f)) = f(0)$. D'autre part, $p(\mathrm{T}(f))$ est la fonction constante à égale à $\mathrm{T}(f)(0)$. D'après la définition de $\mathrm{T}(f)$, $\mathrm{T}(f)(0) = f(0)$, donc $p(\mathrm{T}(f)) = f(0)$ la fonction constante égale à $f(0)$. Ainsi, $\mathrm{T}(p(f)) = p(\mathrm{T}(f))$. Par conséquent, $\mathrm{T}\circ p = p \circ \mathrm{T}$. Comme $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ commute avec T, on en déduit

$$\mathrm{T}\circ q = \mathrm{T}\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{C}} - p) = \mathrm{T} - \mathrm{T}\circ p = \mathrm{T} - p\circ \mathrm{T} = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} - p)\circ \mathrm{T} = q\circ \mathrm{T}$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\lambda = 0$, il s'agit de l'application nulle. Supposons $\lambda \neq 0$. Soit $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable. g vérifie cette équation différentielle si et seulement si

$$\forall x \in]0,1], g'(x) = \frac{\frac{1}{\lambda} - 1}{x} g(x)$$

Or $x \mapsto (\frac{1}{\lambda} - 1)\ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{\frac{1}{\lambda}-1}{x}$. On en déduit que g est solution si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]0,1], g(x) = k\exp\left((\frac{1}{\lambda} - 1)\ln(x)\right) = kx^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

(b) Soit $f \in \ker(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. Si $\lambda = 0$, on a vu que $\ker(\mathrm{T}) = \{0\}$. Supposons $\lambda \neq 0$. Alors en particulier, $\forall x \in]0,1], \lambda f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, f est alors C^1 sur $]0,1]$, donc dérivable sur $]0,1]$ et on obtient en dérivant,

$$\forall x \in]0,1], \lambda f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt = \frac{f(x)}{x} - \lambda\frac{f(x)}{x}$$

On en déduit que f satisfait l'équation différentielle

$$\forall x \in]0,1], \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$$

D'après le travail précédent, il existe alors un réel k tel que $\forall x \in]0,1], f(x) = kx^{\frac{1}{\lambda}-1}$. On sait toutefois que f est continue en 0. Si k est non nul, on en déduit que $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$, i.e $0 < \lambda \leq 1$. Par conséquent, si $\lambda \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, $f = 0$. Enfin, si $\lambda \in]0,1]$, $\forall k \in \mathbb{R}$, la fonction $g_k : x \mapsto kx^{\frac{1}{\lambda}-1}$ est bien continue. En remontant tous les calculs précédents, elle vérifie $\forall x \in]0,1], \mathrm{T}(g_k)(x) = \lambda g_k(x)$. Enfin, $\mathrm{T}(g_k)(0) = g_k(0) = 0 = \lambda g_k(0)$. Ainsi, $\mathrm{T}(g_k) = \lambda g_k$ et $g_k \in \ker(\mathrm{T} - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathcal{C}})$. Récapitulons,

— Si $\lambda \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, $\ker(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0\}$.

— Si $\lambda \in]0,1]$, $\ker(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$. On remarque en particulier qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 1.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$,

$$\mathrm{T}^n(f)(x) - f(0) = (\mathrm{T}^n(f)(x) - \mathrm{T}^n(\mathrm{P})(x)) + (\mathrm{T}^n(\mathrm{P})(x) - \mathrm{P}(0)) + (\mathrm{P}(0) - f(0))$$

On en déduit via l'inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{T}^n(f)(x) - f(0)| \leq |\mathrm{T}^n(f)(x) - \mathrm{T}^n(\mathrm{P})(x)| + |\mathrm{T}^n(\mathrm{P})(x) - \mathrm{P}(0)| + |\mathrm{P}(0) - f(0)|$$

D'après l'inégalité vérifiée par P, $|f(0) - \mathrm{P}(0)| \leq \varepsilon$. D'autre part, d'après la linéarité de T et les propriétés de l'intégrale,

$$|\mathrm{T}(f)(x) - \mathrm{T}(\mathrm{P})(x)| = |\mathrm{T}^n(f - \mathrm{P})(x)| = \left|\int_0^1 (f(ux) - \mathrm{P}(ux))du\right| \leq \int_0^1 |f(ux) - \mathrm{P}(ux)|du \leq \int_0^1 \varepsilon du = \varepsilon$$

On en déduit par récurrence que $|\mathrm{T}^n(f)(x) - \mathrm{T}^n(\mathrm{P})(x)| \leq \varepsilon$. En conclusion,

$$|\mathrm{T}^n(f)(x) - f(0)| \leq |\mathrm{T}^n(\mathrm{P})(x) - \mathrm{P}(0)| + 2\varepsilon$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On identifie abusivement X^k et la fonction polynomiale associée, ce qui donne $T(X^k) = \frac{X^k}{k+1}$. Par récurrence, on en déduit $T^n(X^k) = \frac{X^k}{(k+1)^n}$. On note alors $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$. Par linéarité de T^n, $T^n(P) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{(k+1)^n} X^k$, donc $T^n(P) - P(0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{(k+1)^n} X^k$. On en déduit alors que

$$\forall x \in [0,1], |T^n(P)(x) - P(0)| \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{|a_k|}{(k+1)^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{n=1}^{N} |a_k|$$

Or la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, donc il existe entier N' tel que

$$\forall n \geq N', \frac{1}{2^n} \sum_{n=1}^{N} |a_k| \leq \varepsilon$$

On en déduit que

$$\forall n \geq N', \forall x \in [0,1], |T^n(f)(x) - f(0)| \leq |T^n(P)(x) - P(0)| + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

Autrement dit, la suite $(T^n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(0)$.

☞ **Remarque**

On a même prouvé que cette convergence « ne dépend pas » du réel x dans $[0,1]$. *On dit que la convergence est uniforme. En langage topologique, on prouvé que la suite d'applications linéaires* $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers le projecteur p.*