# Exercice 1 - Vers le théorème de D'Alembert-Gauss

1. (a) On sait que $b_n \neq 0$ d'après le degré de Q, donc l'ensemble $\{i \in [\![1,n]\!] \mid b_i \neq 0\}$ contient $n$, puisque $n \neq 0$ (Q est non constant). Ainsi, il est non vide. Comme c'est une partie de $\mathbb{N}$, il admet un minimum.

   (b) D'après ce qui précède, pour tout entier $i \in [\![1,k-1]\!]$, $b_i = 0$. Ainsi, comme $b_k \neq 0$, on a
$$\mathrm{Q} = b_0 + \sum_{i=k}^{n} b_i \mathrm{X}^i = 1 + b_k \mathrm{X}^k \left( \sum_{i=k}^{n} \frac{b_i}{b_k} \mathrm{X}^{i-k} \right) = 1 + b_k \mathrm{X}^k \left( 1 + \sum_{j=1}^{n-k} \frac{b_{k+j}}{b_k} \mathrm{X}^j \right)$$
   Le polynôme $\mathrm{R} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{b_{k+j}}{b_k} \mathrm{X}^j$ satisfait la relation attendue et $\mathrm{R}(0) = 0$ puisqu'il n'a pas de terme constant.

   (c) Soit $t \in \mathbb{R}^+$, alors
$$(t\omega)^k = t^k \omega^k = t^k \exp(-\mathrm{i}(\theta+\pi)) = t^k e^{-i\theta}(-1)$$
   Mais alors
$$b_k (t\omega)^k = |b_k| e^{i\theta} t^k e^{-i\theta}(-1) = -|b_k|$$
   On en déduit que
$$f(t) = 1 - |b_k| t^k (1 + \mathrm{R}(t\omega))$$

   (d) On sait que $t \mapsto |\mathrm{R}(t\omega)|$ est continue en 0 comme module d'une composée de fonctions polynomiales. En posant $\varepsilon = 1/2 > 0$, on dispose d'un réel strictement positif $\delta$ tel que $\forall t \in [0,\delta], |\mathrm{R}(t\omega) - \mathrm{R}(0\omega)| \leq 1/2$. Comme $\mathrm{R}(0) = 0$, on en déduit que $\forall t \in [0,\delta], |\mathrm{R}(t\omega)| \leq 1/2$. De même, $t \mapsto |b_k| t^k$ est continue en 0 de valeur 0 en 0, donc on dispose d'un réel $\delta'$ tel que $\forall t \in [0,\delta'], |b_k| t^k \leq 1/2 < 1$. Le réel $a = \min(\delta, \delta')$ convient alors.

   (e) Soit $t \in ]0,\alpha]$. D'après ce qui précède, l'inégalité triangulaire entraîne
$$|f(t)| = |1 - |b_k| t^k (1 + \mathrm{R}(t\omega))| = |(1 - |b_k| t^k) - |b_k| t^k \mathrm{R}(t\omega) \leq |1 - |b_k| t^k| + |b_k| t^k |\mathrm{R}(t\omega)|$$
   Mais alors, comme $|b_k| t^k < 1, |1 - |b_k| t^k| = 1 - |b_k| t^k$. D'autre part, $|b_k| t^k |\mathrm{R}(t\omega)| \leq |b_k| t^k \frac{1}{2}$. On en déduit que
$$|f(t)| \leq 1 - |b_k| t^k + \frac{1}{2} |b_k| t^k = 1 - \frac{1}{2} |b_k| t^k < 1$$

2. (a) P est non constant donc son degré $n$ est non nul. De plus, $\mathrm{P}(z_0 + 0)/\mathrm{P}(z_0) = 1$ est le coefficient constant de ce polynôme, donc il est bien de la même forme que Q.

   (b) Avec les notations de première partie, on a trouvé que le complexe $z = \frac{a}{2}\omega$ vérifie $|\mathrm{Q}(z)| < 1$, donc $|\mathrm{P}(z_0 + z)| < |\mathrm{P}(z_0)|$. Ceci contredit le fait que $z \mapsto |\mathrm{P}(z)|$ atteint son minimum en $z_0$. Ainsi, $\mathrm{P}(z_0) = 0$, donc $z_0$ est une racine de P.
   Dans le cas général, soit R un polynôme non constant à coefficients complexes, alors en notant $r$ son coefficient dominant, ce qui précède démontre que le polynôme unitaire non constant $\frac{1}{r}\mathrm{R}$ possède une racine. Donc R possède une racine et le théorème de D'Alembert-Gauss est prouvé.

# Exercice 2 - Développements limités et asymptotiques.

1. (a) Comme $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$, on en déduit
$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right)$$

D'autre part,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)$$

On en déduit

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

(b) $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ à l'ordre 5. On connaît $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, on en déduit

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

Comme $\int_0^0 \frac{\sin(t)}{t} dt = 0$, on en déduit d'après le théorème de primitivation des développements limités,

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + o(x^5)$$

2. (a) Il s'agit d'une étude classique de fonction. La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ car le sinus et les fonctions polynomiales le sont. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 + \cos(x) > 2 - 1 = 1 > 0$. Par conséquent, $f$ est strictement croissante. De plus, au voisinage de $\pm\infty$, $\sin(x) = o(x)$, donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. On en déduit que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque est également de classe $C^\infty$.

   (b) D'après ce qui précède, $f^{-1}$ est infiniment dérivable en 0. D'après la formule de Taylor-Young, $f^{-1}$ admet un développement limité à tout ordre en 0.

   (c) On commence par remarquer que $f$ est impaire, donc que $f^{-1}$ est impaire. Alors le $DL_3(0)$ de $f^{-1}$ est de la forme $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + o(x^3)$. Or on peut composer à droite les DL, donc

$$f^{-1}(f(x)) = af(x) + bf(x)^3 + o(f(x)^3)$$

On exploite le développement limité l'ordre de $f$ en 0, $f(x) = 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. On en déduit que

$$x = a(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + b\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = 3ax + \left(-\frac{a}{6} + 27b\right)x^3 + o(x^3)$$

Par unicité du développement limité, on en déduit $a = 1/3$, puis $b = 1/486$. Conclusion,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{486}x^3 + o(x^3)$$

3. (a) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x + e^x$. Elle est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = 1 + e^x > 0$. Ainsi, $g$ est strictement croissante. Comme $g(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, on en déduit que $g$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$. Par conséquent, pour tout entier naturel non nul $n$, $n \in g(\mathbb{R}_+)$ et possède un unique antécédent par $g$, notée $x_n$.

   (b) Comme $n \mapsto n$ est croissante, ainsi que $f^{-1}$, la suite $(x_n)_n = (f^{-1}(n))_n$ est croissante. Sa limite ne peut être finie, puisque $n \to +\infty$, donc $x_n \to +\infty$. Mais alors, d'après les croissances comparées, $x_n = o(e^{x_n})$, donc $n \sim e^{x_n}$. Comme la limite est différente de 1, on peut passer au logarithme dans l'équivalent, ce qui entraîne $x_n \sim \ln(n)$ ou plus précisément, $x_n = \ln(e^{x_n}) = \ln(n) + o(1)$. On pose à présent pour tout $n$ dans $\mathbb{N}*$, $y_n = x_n - \ln(n)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la définition de la suite $(x_n)_n$, on a $e^{y_n + \ln(n)} + y_n + \ln(n) = n$, soit encore $ne^{y_n} + y_n + \ln(n) = n$. Précédemment, on a même établi $y_n = o(1)$, ce qui pemet d'écrire

$$n + ny_n + no(y_n) + y_n + \ln(n) = n$$

soit encore

$$y_n + o(y_n) = -\frac{\ln(n)}{n}$$

i.e $y_n \sim -\frac{\ln(n)}{n}$. En conclusion, $x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

# Problème -Transcendance de $e$.

1. En notant $n$ le degré de P, on sait que $\mathrm{P}^{(n+1)}=0$, et donc que $\forall k \geq n+1, \mathrm{P}^{(k)}=0$. La somme indiquée est donc à support fini et a bien un sens.
2. La fonction $f$ de l'indication est bien dérivable comme produit de fonctions et
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=-\alpha e^{-\alpha x} \mathrm{Q}(\alpha x)+e^{-\alpha x} \alpha \mathrm{Q}'(\alpha x)$$
On remarque alors que $\mathrm{Q}'=\sum_{k \geq 0} \mathrm{P}^{(k+1)}=\sum_{k \geq 1} \mathrm{P}^{(k)}=\mathrm{Q}-\mathrm{P}$. Ainsi,
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=\alpha e^{-\alpha x}(\mathrm{Q}'(\alpha x)-\mathrm{Q}(\alpha x))=-\alpha e^{-\alpha x} \mathrm{P}(\alpha x)$$
On en déduit donc que
$$\mathrm{R}(\alpha)=e^{\alpha}[-f(x)]_0^1=e^{\alpha}(f(0)-f(1))=e^{\alpha} \mathrm{Q}(0)-e^{\alpha} e^{-\alpha} \mathrm{Q}(\alpha)=e^{\alpha} \mathrm{Q}(0)-\mathrm{Q}(\alpha)$$
Ainsi, $e^{\alpha} \mathrm{Q}(0)=\mathrm{Q}(\alpha)+\mathrm{R}(\alpha)$.
3. (a) On note $\mathrm{B}=(\mathrm{X}-1)^p(\mathrm{X}-2)^p \ldots(\mathrm{X}-n)^p$, de sorte que $\mathrm{P}=\frac{\mathrm{X}^{p-1}}{(p-1)!} \mathrm{B}=\frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} b_m \mathrm{X}^m$ avec $\forall m \in [\![p-1, np+p-1]\!], b_m \in \mathbb{Z}$. Par linéarité de la dérivation $p$-ième on en déduit que
$$\mathrm{P}^{(p)}=\frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=p-1}^{np+p-1} b_m\left(\mathrm{X}^m\right)^{(p)}=\frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=p}^{np+p-1} b_m \frac{m!}{(m-p)!} \mathrm{X}^{m-p}=p \sum_{m=p}^{np+p-1} b_m\binom{m}{p} \mathrm{X}^{m-p}$$
On en déduit que les coefficients de $\mathrm{P}^{(p)}$ sont de la forme $p b_m\binom{m}{p}$ donc des entiers divisibles par $p$. Par conséquent, pour tout entier $r \geq p$, les coefficients de $\mathrm{P}^{(r)}$ sont des entiers divisibles par $p$.

   (b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. D'après la forme de P, $j$ est une racine de P de multiplicité $p$, puisque $(\mathrm{X}-j)^p$ divise P et $(\mathrm{X}-j)^{p+1}$ ne divise pas P. On en déduit que pour tout entier $r \leq p-1$, $\mathrm{P}^{(r)}(j)=0$.

   (c) De même que précédemment, on remarque que 0 est une racine de P de multiplicité $p-1$. Par conséquent pour tout entier $r \leq p-2$, $\mathrm{P}^{(r)}(0)=0$.

   (d) On sait que $\mathrm{P}^{(p-1)}(0)$ vaut $(p-1)!$ fois le coefficient d'indice $p-1$ de P d'après la formule de Taylor polynomiale. Or, le coefficient d'indice $p-1$ de P est le coefficient constant de B divisé par $(p-1)!$. Comme le coefficient constant de B vaut $\mathrm{B}(0)=(-1)^p(-2)^p \ldots(-n)^p$, on en déduit que
$$\mathrm{P}^{(p-1)}(0)=(-1)^{np}(n!)^p$$
4. D'après la question 2, on sait que $\mathrm{Q}(j)=e^j \mathrm{Q}(0)-\mathrm{R}(j)$. On en déduit que
$$\mathrm{J}=\sum_{j=0}^n a_j \mathrm{Q}(j)=\mathrm{Q}(0) \sum_{j=0}^n a_j e^j-\sum_{j=0}^n a_j \mathrm{R}(j)=\mathrm{Q}(0) \mathrm{A}(e)-\sum_{j=0}^n a_j \mathrm{R}(j)$$
D'après l'hypothèse faite sur A, on obtient
$$\mathrm{J}=-\sum_{j=0}^n a_j \mathrm{R}(j)$$
D'autre part, $\mathrm{R}(0)=0$, donc
$$\mathrm{J}=-\sum_{j=1}^n a_j \mathrm{R}(j)$$
5. (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. D'après la définition de Q et le résultat de la question 3.b,
$$\mathrm{Q}(j)=\sum_{r \geq 0} \mathrm{P}^{(r)}(j)=\sum_{r \geq p} \mathrm{P}^{(r)}(j)$$
D'autre part, pour tout entier $r \geq p$, la question 3.a) indique que les coefficients de $\mathrm{P}^{(r)}$ sont des entiers divisibles par $p$, donc que $\mathrm{P}^{(r)}(j)$ est un entier divisible par $p$. Ainsi, $\mathrm{Q}(j)$ est somme d'entiers divisibiles par $p$, donc un entier divisible par $p$. Comme les $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont des entiers, on en déduit que $p$ divise $\sum_{j=1}^n a_j \mathrm{Q}(j)$.

(b) On sait d'après 3.d que $a_0\mathrm{P}^{(p-1)}(0) = a_0(-1)^{np}(n!)^p$. Si l'on prend $p > \max(n, |a_0|)$, alors $p$ est premier avec $n!$ et avec $a_0$ puisque $p$ est premier. Alors $p$ ne divise pas $a_0(-1)^{np}(n!)^p = a_0\mathrm{P}^{(p-1)}(0)$. Dans ce cadre, d'après la question 3.c,

$$a_0\mathrm{Q}(0) = \sum_{m=0}^{p-2} a_0\mathrm{P}^{(m)}(0) + a_0\mathrm{P}^{(p-1)}(0) + a_0\sum_{m\geq p}\mathrm{P}^{(r)}(0) = a_0\mathrm{P}^{(p-1)}(0) + a_0\sum_{m\geq p}\mathrm{P}^{(r)}(0)$$

Or on sait d'après 3.a) que $p$ divise $a_0\sum_{m\geq p}\mathrm{P}^{(r)}(0)$. Par conséquent, $p$ ne divise pas $a_0\mathrm{Q}(0)$ puisque $a_0 \neq 0$. Mais alors $\mathrm{J} = a_0\mathrm{Q}(0) + \sum_{j=1}^{n} a_j\mathrm{Q}(j)$ est somme d'un entier non divisible par $p$ et d'un entier divisible par $p$, donc non divisibile par $p$. Par conséquent, J est un entier non nul, donc $|\mathrm{J}| \geq 1$.

6. (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{R}(j)| = je^j\left|\int_0^1 e^{-jx}\mathrm{P}(jx)dx\right| \leq ne^n\int_0^1 |\mathrm{P}(jx)|dx$$

Soit $x \in [0,1]$, alors en notant $k = \lfloor jx \rfloor$, on note $t = jx$ dans $[k, k+1]$. On note $\mathrm{L} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\dots(\mathrm{X}-n)$ de sorte que $|\mathrm{P}(jx)| = \frac{(t\mathrm{L}(t))^{p-1}\mathrm{L}(t)}{(p-1)!}$. Or

$$\begin{aligned}|t\mathrm{L}(t)| &\leq [(k+1)k(k-1)\dots 2\cdot 1][1\cdot 2\cdots(n-k-1)(n-k)]\\ &\leq (k+1)!(n-k)!\\ &\leq \frac{(n+1)!}{\binom{n+1}{k+1}}\\ &\leq n!\end{aligned}$$

De même $|\mathrm{L}(t)| \leq n!$. Finalement, $|\mathrm{P}(jx)| \leq \frac{(n)!^p}{(p-1)!}$. On en déduit que

$$|\mathrm{R}(j)| \leq ne^n\frac{(n!)^p}{(p-1)!}$$

(b) L'inégalité précédente assure que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathrm{R}(j)\right| \leq ne^n\frac{(n)!^p}{(p-1)!}\sum_{j=1}^{n}|a_j|$$

Or on sait quand $p$ tend vers $+\infty$, $\alpha^p = o(p!)$, donc il existe un rang à partir duquel ce majorant est inférieur strictement à 1, i.e

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathcal{P}, p \geq \mathrm{N} \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathrm{R}(j)\right| < 1$$

7. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}(e) = 0$. On suppose par l'absurde que A est non nul. Comme $e$ est non nul, on peut considérer $\mathrm{A}/\mathrm{X}^m$ avec $m$ la multiplicité de 0 dans P (éventuellement nulle si 0 n'est pas racine de P). Ce polynôme possède alors un coefficient constant non nul, est à coefficients entiers, et annule $e$. D'après tout le travail effectué précédemment, on obtient l'existence d'un entier premier $p$ tel que

$$1 \leq \left|\sum_{j=0}^{n} a_j\mathrm{Q}(j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathrm{R}(j)\right| < 1$$

Cette absurdité entraîne que $\mathrm{A} = 0$, donc que $e$ est transcendant.