Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$). Les opérations sur les limites sont effectuées sans démonstation à ce stade de l'année. Ce chapitre est un bon prétexte pour poser des études de fonctions composées et/ou réciproques en exercice. Les questions de cours porteront sur le chapitre 5 et/ou le chapitre 6. Les exercices se concentreront sur le chapitre 5.

Chapitre 5 : fonctions usuelles, équations fonctionnelles

- **Fonction valeur absolue.** Parité, variations, continuité, non dérivabilité en 0. Inégalités triangulaires. Pour tous réels x, y, $\min(x,y) = (x+y-|x-y|)/2, \max(x,y) = (x+y+|x-y|)/2$.
- **Fonctions polynomiales et rationnelles.** Degré, coefficient dominant, limites en $\pm\infty$. Dérivée $d+1$-ième d'une fonction polynomiale de degré d. Racines. Fonction rationnelle, limites en $\pm\infty$.
- **Fonctions circulaires.** Démonstrations géométriques de leur ($\star$) continuité et de la ($\star$) dérivabilité du sinus en 0, ($\star$) $\cos' = -\sin, \sin' = \cos$. Variations, dérivées n-ièmes. Tangente, dérivabilité, $\tan' = 1+\tan^2$, variations, limites. Inégalités $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|, \forall x \in [0, \pi/2], \sin(x) \geq 2x/\pi$.
- **Logarithmes.** ($\star$) Toute fonction f dérivable de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, f(xy) = f(x)+f(y)$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = a\displaystyle\int_1^x dt/t$. Logarithme népérien. $\forall x > 0, \forall q \in \mathbb{Q}, \ln(x^q) = q\ln(x)$. Limites du logarithme admises. Croissances comparées avec les fonctions polynomiales en 0 et $+\infty$ via l'étude de la fonction $x \mapsto x - \ln(x)$. Variations, bijectivité du logarithme dans $\mathbb{R}$. Inégalité $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ avec égalité ssi $x = 0$. Logarithme en base a avec a réel strictement positif différent de 1.
- **Exponentielle.** L'exponentielle est défine par : Il existe une unique fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$, elle est notée exp. Valeurs strictement positives et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}, \exp(qx) = \exp(x)^q$. ($\star$) L'exponentielle est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y, y(0) = 1$. ($\star$) $\exp^{|\mathbb{R}^{+*}}$ est la réciproque du logarithme népérien (preuve par dérivation). Inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1+x$ avec égalité ssi $x = 0$. Limites et croissances comparées entre exponentielle et fonctions polynomiales en $\pm\infty$.
- **Fonctions puissances.** Pour tout réel α, pour tout réel x strictement positif, $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$. Prolongement en 0 via lorsque $\alpha \geq 0$. ($\star$) Propriétés $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x), (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Dérivabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Variations, limites, représentations graphiques. ($\star$) Croissances comparées du logarithme et des fonctions puissances en 0 et $+\infty$, de l'exponentielle et des fonctions puissances en $\pm\infty$.
- **Fonctions hyperboliques.** ($\star$) Toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle centré en 0 admet un unique décomposition en partie paire et impaire. Cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique. Signes, dérivées, variations, limites, représentations graphiques. Bijections induites. $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, formules d'addition. Tangente hyperbolique, imparité, dérivabilité, $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$, limites, représentation graphique. Formule d'addition.
- **Fonctions circulaires réciproques.** Dérivabilité sur $]-1,1[$, ($\star$) $\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}, \arccos'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$. Représentations graphiques. Arctangente, ($\star$) dérivabilité et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = 1/(1+x^2)$, limites, représentation graphique.
- **Fonctions hyperboliques réciproques.** Définition par les réciproques. Propriétés : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Dérivabilité et $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$. Limites, variations, représentation graphique. $\forall x \geq 1, \mathrm{argch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$. Dérivabilité sur $]1,+\infty[$ et $\forall x > 1, \mathrm{argch}'(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$. Limite en $+\infty$, représentation graphique. $\forall x \in]-1,1[, \mathrm{argth}(x) = \ln((1+x)/(1-x))/2$. Dérivabilité et $\forall x \in]-1,1[, \mathrm{argth}'(x) = 1/(1-x^2)$.

Chapitre 6 : calcul intégral

Notion d'intégrale, primitives

« Définition » en termes d'aires sous la courbe. Linéarité, relation de Chasles, croissance, inégalité triangulaire. Primitive, théorème fondamental de l'analyse ($\star$) preuve dans le cas d'une fonction à valeurs réelles monotone. Intégration par parties, changement de variables. Notation $\displaystyle\int^x f(t)dt$ pour désigner une primitive de f continue. Catalogue de primitives classiques via le chapitre précédent et les dérivées de fonctions usuelles. ($\star$) Primitive de $x \mapsto \exp(ax)\cos(bx)$ et de $x \mapsto \exp(ax)\sin(bx)$ avec a et b réels. Primitive de $x \mapsto 1/(ax^2+bx+c)$ avec a, b, c réels et a non nul. Les étudiants doivent savoir retrouver les changements de variables affines nécessaires pour se ramener à des primitives de $u \mapsto 1/u^2$, $u \mapsto 1/(u-\lambda)$, $u \mapsto 1/(1+u^2)$. De même pour primitiver $x \mapsto 1/\sqrt{ax^2+bx+c}$. La validité des intervalles d'intégration peut être menée a posteriori. Exemples de changement de variables dans les fonctions trigonométriques $t = \tan(u/2)$, exponentielles $u = e^{ax}$ pour se ramener à des fractions rationnelles. *Les règles de Bioche et le traitement des éléments de seconde espèce de la forme* $1/(ax^2+bx+c)^k$ *avec* $k \geq 2$ *n'ont pas été abordés en cours.*

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Equation différentielle $(E) y' + ay = b$ avec a et b continues de I dans $\mathbb{C}$. Equation homogène (E_h) associée. Structure des solutions. (★) Ensemble des solutions de (E_h). Ensemble des solutions de (E). Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy. Recherche de solutions particulières : en notant A une primitive de a, $x \mapsto e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)\exp(A(t))dt$ est une solution particulière, Variation de la constante, Superposition. Formes particulières : b polynomiale, exponentielle, circulaire. Exemples de raccordement de solutions d'une équation différerentielle non résolue. *Le théorème de la limite de la dérivée n'a pas été vu en cours.*

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Equation différentielle $(E) y'' + ay' + by = f$ avec a et b dans $\mathbb{C}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Equation homogène (E_h) associée. Structure des solutions. Polynôme caractéristique de (E). (★) Ensemble des solutions de (E_h). Description des solutions réelles de (E_h) dans le cas a, b réels. Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy (admis dans le cas non homogène). Recherche de solutions particulières lorsque f est polynomiale ou exponentielle. Variation de la constante dans le cas complexe en se ramenant à une équation différentielle linéaire du premier ordre (on ne fait varier qu'une constante). Superposition.

★ ★ ★ ★ ★