Ipesup 2022/2023

Kholle 3 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Soit a et b deux complexes, n un entier naturel non nul. Donner et démontrer une expression de $a^n - b^n$.
2. Soit n un entier naturel. Calculer les sommes suivantes
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$
   (b) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$
3. Montrer que $\forall x \geqslant 0, x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

⋆⋆⋆

Kholle 3 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition de la partie entière d'un réel x. Donner et démontrer sa caractérisation par encadrement.
2. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3. Étudier la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$: domaine de définition, dérivabilité, variations, extrema.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 3 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme.
2. Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$A_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{pair}}} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{impair}}} \binom{n}{k}$$

   Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire une expression de A_n et de B_n.
3. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a \leqslant b$. En étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+ax)/\ln(1+bx)$, démontrer que

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2$$

⋆⋆⋆

Kholle 3 filière MPSI
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Soit $f = 1/(2\mathrm{ch})$. En faire l'étude complète. Montrer qu'elle est injective sur $[0, +\infty[$. Faire l'étude de la réciproque qu'elle induit.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$?
3. $f : x \mapsto \sin(\ln(1 + 2/x))$

⋆⋆⋆