Exercice 1

Soit θ un nombre réel donné. On se propose d'étudier les polynômes P_n définis par :

$$P_n = X^{2n} - (2\cos n\theta)X^n + 1$$

où n est un entier strictement positif.

1. (a) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $IR[X]$, le polynôme P_n.
   (b) Montrer que si $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$
   alors :
   $$\prod_{k=0}^{n-1}\left(z_k^2 - 2z_k\cos\theta + 1\right) = 2(1-\cos n\theta).$$
2. Etablir les propriétés suivantes :
   (a) Tout polynôme P_n est divisible par $X^2 - (2\cos\theta)X + 1$ et, si n èst pair, par $X^2 + (2\cos\theta)X + 1$
   (b) Si m et n sont deux entiers naturels non nuls tels que m divise n alors P_m divise $P_{\mathbf{n}}$.
3. En utilisant la factorisation de P_n dans le cas particulier où $\theta = 0$, démontrer le théorème qui suit : Soit un polygone régulier convexe $A_1A_2\ldots A_n$ ayant n côtés. On désigne par O et R le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au polygone. Alors, pour tout point M situé sur une demi-droite OA_k d'origine O et passant par l'un des sommets A_k du polygone, on a
   $$\left|(OM)^n - R^n\right| = MA_1 \times MA_2 \times \ldots \times MA_n$$

Exercice 2

Soit n un entier naturel et P_n le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$$

1. Déterminer le P.G.C.D. de P_n et P_{n+1}.
2. Démontrer que P_n n'a pas dans $\mathbb{C}$ de racine multiple.
3. Déterminer suivant la valeur de $n\,(n \in \mathbb{N}^*)$ le nombre de racines réelles de P_n.

(On pourra faire intervenir la fonction polynomiale :

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \longmapsto \sum_{\mathbf{k}=0}^{n}\frac{x^{\mathbf{k}}}{k!}\Bigg).$$

Exercice 3.

On désigne par $\mathbb{R}_{\mathbf{n}}$ [X] l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n (y compris le polynôme nul dont le degré - ∞ est par convention inférieur à n).
Soit p et q deux entiers naturels distincts, et Φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{\mathbf{n}}[x]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = X^2P'' - (p+q-1)XP' + pqP$$

1. Montrer que Φ est linéaire, i.e $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \forall (a,b) \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(aP+bQ) = a\Phi(P) + b\Phi(Q)$, puis que Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\Phi\left(X^k\right)$ pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$.
3. Déterminer le noyau ($\Phi^{-1}(\{0\})$) et l'image $\Phi(\mathbb{R}_n[X])$ de l'application linéaire Φ.
4. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que $X^2P'' - 2XP' + 2P = X^3 + \lambda X + 1$. où λ est un réel donné. (On discutera suivant la valeur de λ).

Exercice 4.

L'étude est faite dans l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficient réels, et les divisions envisagées sont des divisions euclidiennes.

1. Soit B un polynôme non nul, et deux éléments quelconques P_1 et P_2 de $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que les restes des divisions de P_1 et P_2 par B sont égaux si et seulement si le polynôme $P_1 - P_2$ est un multiple de B.
   (b) - On suppose que les restes des divisions de P_1 et P_2 par B sont respectivement les polynômes R_1 et R_2. Comparer les restes des divisions par B de $P_1 + P_2$ d'une part, et de $R_1 + R_2$ d'autre part. Même question pour les divisions par B de $P_1 P_2$ et de $R_1 R_2$.
2. Montrer que, si le reste de la division de l'entier naturel n par 3 est r, alors le reste de la division de X^n par le polynôme $X^3 - 1$ est égal à X^T. En déduire le reste de la division par $X^3 - 1$ du polynôme $X^{19} + X^6 - X^2 + 5$.
3. L'hypothèse étant la même qu'à la question précedente, montrer que les divisions par $X^2 + X + 1$ de $X^{2n} + X^n + 1$ d'une part, et de $X^{2r} + X^r + 1$ d'autre part, ont même reste. Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit un multiple du polynôme $x^2 + x + 1$?

Exercice 5.

1. Démontrer que, pour tout polynôme à coefficients réels de degré $n \,(n \in \mathbb{N}^*)$, on a :

$$P(X-1) - P(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} P^{(k)}(X)$$

2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ satisfaisant à la condition :

$$P(X) - P(X-1) = X^4$$

3. Donner, en fonction de n, l'expression de la somme

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^4$$

Exercice 6.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les deux fractions :

1.

$$F = \frac{X}{(X^2-1)(X^2+X+1)}$$

2.

$$G = \frac{X^4 + X^2 + 2}{X^3 + 5X^2 + 8X + 4}$$