# IPESUP 2022/2023

Kholle 3 filière MP*

Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Énoncer le théorème de convergence dominée. Le prouver lorsqu'on rajoute l'hypothèse de convergence uniforme.
2. On se donne deux réels $a, b$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t) dt = 0$$
Démontrer que $f$ est nulle.
3. Soit $\alpha$ un réel. Pour tout entier $n$ non nul, on note $g_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos^n(t)\sin(t)/n^\alpha$.
   (a) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
   (b) Montrer qu'il y a convergence uniforme si et seulement si $\alpha > -1/2$.

⋆⋆⋆

★★★

1. Énoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. En déduire que l'application

$$\Gamma : ]0, +\infty[, x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} x^{t-1} \, dt$$

est dérivable et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale à paramètre.

2. On considère une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Que dire de sa limite ?

3. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in N}$ deux suites d'applications bornées de $I$ dans $R$. On suppose qu'elles convergent uniformément respectivement vers $f$ et $g$. Démontrer qu'alors la suite produit $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $fg$. Enfin, rechercher un contre-exemple sans l'hypothèse « bornée ».

★★★

★★★

1. Énoncer un théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions de signe quelconque, puis montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

2. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

   Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers l'application $x \mapsto e^{-x}$.

3. Justifier qu'on définit une fonction continue sur $[0,1]$ en posant

$$\forall x \in [0,1], \psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$$

   Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \psi(x) dx$.

★★★

⋆⋆⋆

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Soit $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x/(n^2 + x^2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a convergence simple de la série $\sum u_n$, que sa somme est continue, mais qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Quid de la série $\sum (-1)^n u_n$ ?
2. (a) Pour tout entier $n$ non nul, on définit
$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)(1-x^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt}$$
Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} p_n = 1$, et $\forall a > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|\geqslant a} p_n(t)dt = 0$.

   (b) Soit alors $f$ une fonction continue nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. Montrer que la suite
$$f_n : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)p_n(t)dt$$
converge uniformément vers $f$ et montrer que chaque $f_n$ est une fonction polynomiale.

⋆⋆⋆