Les calculatrices ne sont pas autorisées

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il est rappelé qu'il sera tenu compte dans l'évaluation, de la présentation et la rédaction des copies. Les résultats devront être encadrés.

Pour tout complexe z, sa partie réelle est notée $\mathfrak{Re}(z)$ et sa partie imaginaire $\mathfrak{Im}(z)$.

Exercice 1. Logique

Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f vérifie la propriété (C) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$$

1. Démontrer que l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ vérifie l'assertion (C).
2. Donner la négation logique de la propriété (C).
3. On note h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie $\forall x \geq 0, h(x) = 1$, et $\forall x < 0, h(x) = -1$. Montrer que l'application h ne vérifie pas la propriété (C).

Exercice 2. Résolution d'égalités dans l'ensemble des complexes.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $z + |z|^2 = 1 + i$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $\mathfrak{Im}(z^3 + z) = 0$.
4. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $\exp(z) = -2 + i$.

Exercice 3. Trigonométrie : résolution d'égalité et d'inégalités comportant des fonctions trigonométriques.

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|\cos(2x) - i\sin(x) + 1| \leq 1$.

Exercice 4. Soit x un réel fixé. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence via :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(2^n x) u_n$$

1. À quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $2^n u_n \sin(x) = \sin(2^n x)$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5. Théorie des ensembles. On considère E un ensemble, puis A et B deux parties de E. On rappelle que la différence symétrique de A et B est l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Elle est notée $A \Delta B$.

1. Rappeler sans démonstration un expression de $A\Delta B$ à l'aide de $A \cup B$ et $A \cap B$.
2. Démontrer que pour toutes parties A, B, C de E, on a l'égalité d'ensembles

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

3. A-t-on l'égalité d'ensembles

$$(A\Delta B)\Delta C = (A\cup B\cup C)\backslash(A\cap B\cap C)\,?$$

Exercice 6. Modules

1. Énoncer et redémontrer l'inégalité triangulaire pour deux complexes z_1 et z_2.
2. Démontrer que pour tous complexes non nuls z_1, z_2, en notant θ_1 un argument de z_1 et θ_2 un argument de z_2, on a
$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$$
3. On considère 12 complexes notés $(z_1, \dots, z_{12})$ tous de module 1. Montrer que
$$\exists (i,j) \in [\![1,12]\!], i \neq j, |z_i - z_j| \leq 1$$
où $[\![1,12]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et 12.

Problème : Géométrie complexe

On se place dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct. On évite d'alourdir le texte en parlant du point d'affixe z et on dira le point z. Lorsqu'on parle de point $z \in \mathbb{C}$, c'est le point d'affixe z. On désigne par j le complexe $\exp(2i\pi/3)$. On rappelle qu'une application $f : E \to E$ est une bijection lorsque pour tout $\forall y \in E, \exists! x \in E, f(x) = y$. L'application $g : E \to E, y \to x$ alors construite est la réciproque de f. On dit qu'une application $h : E \to E$ est involutive lorsque $\forall x \in E, h(h(x)) = x$. Pour toute partie A de $\mathbb{C}$, toute application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on appelle image de A par f, l'ensemble $\{f(z) | z \in A\}$. On appelle point fixe d'une application $k : E \to E$ tout élément x de E tel que $k(x) = x$.

1. Parties de $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $(1, j, j^2)$ est un triangle équilatéral.
   (b) On considère a, b, c des nombres réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et la droite $D_{a,b,c}$ d'équation $ax + by = c$. Donner une équation complexe de $D_{a,b,c}$.
   (c) On considère a, b, c des nombres réels vérifiant $a^2 + b^2 - c > 0$, ainsi que le cercle $\mathcal{C}_{a,b,c}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Montrer qu'il existe un complexe α tel que pour tout couple de réels (x,y)
   $$(x,y) \in \mathcal{C}_{a,b,c} \iff z = x + iy \text{ vérifie } z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + c = 0$$
2. Similitudes directes
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$. On définit l'application $s_{\lambda,\mu} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C}, s_{\lambda,\mu}(z) = \lambda z + \mu$. Montrer que $s_{\lambda,\mu}$ est une bijection et donner sa réciproque. Une telle application est appelée similitude directe.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une similitude directe soit involutive.
   (c) Montrer que l'image d'un triangle équilatéral par une similitude directe est un triangle équilatéral.
   (d) Caractériser l'image d'une droite par une similitude directe.
   (e) Caractériser l'image d'un cercle par une similitude directe.
3. Homographies non dégénérées
   (a) On se donne a, b, c, d quatre complexes tels que $ad - bd \neq 0$ et $c \neq 0$. On définit l'application $h_{a,b,c,d} : \mathbb{C}\backslash\{-d/c\} \to \mathbb{C}\backslash\{a/c\}$ via $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-d/c\}, h_{a,b,c,d}(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Montrer que $h_{a,b,c,d}$ est une bijection et donner sa réciproque. Une telle application est appelée une homographie non dégénérée.

(b) Montrer qu'une homographie non dégénérée possède un ou deux points fixes.

(c) On considère une homographie non dégénérée h qui possède deux points fixes. On note ces points ω_1 et ω_2, ainsi que l'homographie $\varphi : \mathbb{C}\backslash\{\omega_1\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}, z \mapsto \dfrac{z-\omega_2}{z-\omega_1}$. Sa réciproque est notée φ^{-1}. Donner une expression de

$$\varphi(h(\varphi^{-1}(z)))$$

pour tout z dans une partie de $\mathbb{C}$ que l'on précisera.

(d) Caractériser l'image d'une droite par une homographie non dégénérée.

(e) Caractériser l'image d'un cercle par une homographie non dégénérée.

★ ★ ★ ★ ★