Avec $f(x^2) = (f(x))^2 \geq 0$, on déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et pour $x \geq y$ dans $\mathbb{R}$, on a $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0$, ce qui signifie que f est croissante.

On déduit alors du théorème précédent que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\lambda = f(1) = 1$). ■

Ce résultat sera utilisé dans l'étude de l'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.1 *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) - f(x-y) = f(x) f(y) \tag{7.3}$$

Solution 7.1 *Prenant $(x,y) = (0,0)$ dans (7.3), on obtient $f(0) = 0$.*
En prenant $(x,y) = (x,x)$, où x est un réel quelconque, on obtient $f(2x) = f(x)^2$ et en conséquence f est à valeurs positives ou nulles.
Par récurrence, on obtient $f(2^n x) = (f(x))^{2^n}$ pour tout entier naturel n et tout réel x, ce qui peut aussi s'écrire $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n}$, ou encore $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = (f(x))^{\frac{1}{2^n}}$.
S'il existe un réel x tel que $f(x) > 0$, on a alors avec la continuité de f en 0 :

$$0 = f(0) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{2^n}} = 1$$

ce qui est impossible.
En conclusion f est la fonction nulle.

Exercice 7.2 *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.*

Solution 7.2 *Avec $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on déduit que f est impaire (donc $f(0) = 0$) et avec $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.*
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{1}{f(x(1-x))} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(1-x)} = \frac{f(x) + f(1-x)}{f(x) f(1-x)} = \frac{1}{f(x) f(1-x)}$$

ou encore :

$$f(x) - f\left(x^2\right) = f\left(x - x^2\right) = f(x) f(1-x) = f(x)(1 - f(x))$$

soit $f(x^2) = (f(x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
Ce résultat étant encore vrai pour $x = 0$ et $x = 1$, on en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et pour $x \geq y$ on a alors $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0$, ce qui signifie que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $f(x) = f(1)x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.3 *Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

(équation fonctionnelle de Jensen), elle est alors affine.

Solution 7.3 *La relation* $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ *appliquée au couple* $(2x,0)$ *pour* $x\in\mathbb{R}$ *donne :*

$$f(x)=\frac{f(2x)+f(0)}{2}$$

ou encore $f(2x)=2f(x)-f(0)$.
On note g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x)=f(x)-f(0)$.
Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *on a :*

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f\left(\frac{2x+2y}{2}\right)-f(0)=\frac{f(2x)+f(2y)}{2}-f(0) \\ &= \frac{g(2x)+g(2y)}{2} \end{aligned}$$

et pour $x\in\mathbb{R}$ *on a :*

$$g(2x)=f(2x)-f(0)=2(f(x)-f(0))=2g(x)$$

On a donc $g(x+y)=g(x)+g(y)$.
Si f *est monotone, il en est alors de même de* g*, donc* $g(x)=ax$ *et* $f(x)=ax+b$ *avec* $b=f(0)$.

Exercice 7.4 *On dit qu'une suite de réels* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens de Cesàro vers* ℓ *si la suite* $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente vers* ℓ.
On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *conserve la convergence au sens de Cesàro si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge au sens de Cesàro vers* ℓ*, la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens de Cesàro vers* $f(\ell)$.
On se donne une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *qui conserve la convergence au sens de Cesàro.*

1. *Montrer que* f *vérifie l'équation fonctionnelle de Jensen.*
2. *Montrer que pour tout couple de réels* (x,y) *et tout couple d'entiers* (n,k) *tels* $n\in\mathbb{N}$ *et* $0\leq k\leq 2^n$*, on a :*

$$f\left(x+\frac{k}{2^n}(y-x)\right)=f(x)+\frac{k}{2^n}(f(y)-f(x))$$

3. *Montrer que* f *est une fonction affine.*

Solution 7.4

1. *Pour* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *on définit la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par :*

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \begin{cases} x_{2k}=x \\ x_{2k+1}=y \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}x_k=\dfrac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}x_{2k+1}\right)=\dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}x_k=\dfrac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{2k}+\sum_{k=0}^{n}x_{2k+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}(x+y)+\dfrac{y}{2n+1} \end{cases}$$

on déduit que cette suite converge au sens de Cesàro vers $\dfrac{x+y}{2}$ *et donc la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens de Cesàro vers* $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

On a donc :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

c'est-à-dire que f *vérifie l'équation fonctionnelle de Jensen.*

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \{0, 2^n\}$, *le résultat est trivial.*
Pour $n = 1$ *et* $k = 1$, *c'est l'équation fonctionnelle de Jensen.*
La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$ *et* $n = 1$.
Supposons la vraie pour $n \geq 1$ *et tout couple de réels* (x, y).
Pour tout entier k *compris entre* 1 *et* $2^{n+1} - 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{k}{2^{n+1}}(y-x)\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{2^n}(y-x)\right) + \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} f\left(x + \frac{k}{2^n}(y-x)\right) + \frac{f(x)}{2} \end{aligned}$$

Si k *est inférieur à* 2^n, *on peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence et on obtient :*

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{k}{2^{n+1}}(y-x)\right) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{k}{2^n}(f(y) - f(x))\right) + \frac{f(x)}{2} \\ &= f(x) + \frac{k}{2^{n+1}}(f(y) - f(x)) \end{aligned}$$

Si k *est compris entre* $2^n + 1$ *et* $2^{n+1} - 1$, *en effectuant la division euclidienne de* k *par* 2^n, *on a* $k = 2^n + r$ *avec* r *compris entre* 1 *et* $2^n - 1$ *et :*

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{k}{2^{n+1}}(y-x)\right) &= f\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2^n}(y-x) + x\right)\right) \\ &= \frac{f(y)}{2} + \frac{1}{2} f\left(x + \frac{r}{2^n}(y-x)\right) \\ &= \frac{f(y)}{2} + \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{r}{2^n}(f(y) - f(x))\right) \\ &= f(x) + \frac{k}{2^{n+1}}(f(y) - f(x)) \end{aligned}$$

3. *Si* λ *est un réel compris entre* 0 *et* 1, *en notant* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite d'entiers définie par* $k_n = [2^n \lambda]$, *on a* $0 \leq k_n \leq 2^n$ *et* $\lim\limits_{n\to+} \dfrac{k_n}{2^n} = \lambda$.
Pour tout couple de réels (x, y) *la suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_n = x + \dfrac{k_n}{2^n}(y-x)$ *converge vers* $z = x + \lambda(y-x)$, *elle converge donc vers* z *au sens de Cesàro et la suite* $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *va converger au sens de Cesàro vers* $f(z)$.
En écrivant que :

$$f(z_n) = f(x) + \frac{k_n}{2^n}(f(y) - f(x))$$

on constate que cette suite converge au sens usuel et donc au sens de Cesàro vers $f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$.
Avec l'unicité de la limite, on peut donc conclure que :

$$f(x + \lambda(y-x)) = f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

On a donc ainsi montré que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ et en conséquence elle est continue.
En définitive f est continue et vérifie l'équation de Jensen, c'est donc une fonction affine.

Lemme 7.2 *Si f vérifiant* (7.1) *est continue à droite [resp. à gauche] en un point x_0, elle est alors continue à droite [resp. à gauche] en tout point de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposant que f soit continue à droite en x_0.
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a $f(x+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x)$ et avec la continuité à droite en x_0 de f, on déduit que $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x+h) = f(x)$, ce qui signifie que f est continue à droite en x. ■

Théorème 7.2 *Si f vérifiant* (7.1) *est continue à droite [resp. à gauche] en un point x_0, c'est alors une homothétie.*

Démonstration. Supposant que f soit continue à droite en x_0. Dans ce cas, elle l'est sur tout $\mathbb{R}$.
En notant $\lambda = f(1)$ et en désignant, pour $x \in \mathbb{R}$, par $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'approximations décimales par excès de x, on a :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(s_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda s_n = \lambda x$$

■

Théorème 7.3 *Si f vérifiant* (7.1) *est bornée sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$, c'est alors une homothétie.*

Démonstration. On suppose qu'il existe deux réels $m \leq M$ tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$.

1. On vérifie que f est bornée sur $[0, b-a]$.
   Pour tout $x \in [0, b-a]$, on a $x + a \in [a,b]$, donc :
   $$m \leq f(x+a) = f(x) + f(a) \leq M$$
   soit :
   $$m - f(a) \leq f(x) \leq M - f(a)$$
   pour tout $x \in [0, b-a]$.
2. On en déduit f est continue à droite en 0, donc sur tout $\mathbb{R}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{n}\right]$, on a $nx \in [0, b-a]$, de sorte que :
   $$m' = m - f(a) \leq f(nx) = nf(x) \leq M' = M - f(a)$$
   et $\dfrac{m'}{n} \leq f(x) \leq \dfrac{M'}{n}$.
   Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\left[\dfrac{m'}{n}, \dfrac{M'}{n}\right]$ soit contenu dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$, donc pour tout $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{n}\right]$, on a $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$. La fonction f est donc continue à droite en 0.