IPESUP 2022/2023

Kholle 12 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Caractériser une fonction convexe via son épigraphe. En déduire l'inégalité de Jensen discrète.
2. Soit p un réel dans $]0,1[$. Montrer que $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^p$ est concave. En déduire que

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ rangés dans l'ordre décroissant, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. En s'aidant de la fonction $x \mapsto 1/x$, montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{1}{\lambda_i}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2$$

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 12 filière MPSI/MP2I
Planche 2

★★★

1. Caractérisation d'une fonction convexe via ses taux d'accroissements : Énoncé et preuve.
2. Soit a et b des réels positifs tels que $a+b=1$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, 1+x^a y^b \leqslant (1+x)^a (1+y)^b$$

3. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $y'' - qy = 0$. On suppose que y est bornée, montrer qu'alors y est la fonction nulle.
   Indication : On pourra s'intéresser à la fonction y^2.

★★★

Kholle 12 filière MPSI/MP2I
Planche 3

★★★

1. Caractériser les fonctions convexes dérivables.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. On suppose que $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n}(2+x_i) \geqslant 3^n$$
Quand a-t-on égalité ?
3. On note $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) | f(0) = 0 \wedge f(1) = 1\}$. En s'aidant de la fonction $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$, montrer que
$$\inf_{f \in E} \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$
est atteint en la fonction $g : [0,1] \to [0,1], x \mapsto x$.

★★★

Kholle 12 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Déterminer les ellipses de périmètre minimal à aire fixée grâce à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. On note $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive. On suppose que $\forall s \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^b e^{sx} f(x)dx \neq 0$. Démontrer que l'application

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \mapsto \ln\left(\int_a^b e^{sx} f(x)dx\right)$$

est convexe.

⋆⋆⋆