Continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

Cornou Jean-Louis

4 décembre 2022

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point. Cela revient à dire que son intérieur est non vide, donc qu'il existe $(b, c) \in I^2$ tels que $b < c$ et $]b, c[\subset I$. a désigne un élément adhérent à I, il peut prendre la valeur $+\infty$ (resp. $-\infty$) si I est non majoré (resp. non minoré). f désigne une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On distinguera les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ quand ce sera nécessaire.

1 Limite d'une fonction en un point

1.1 Notion de limite

La notion de limite d'une fonction en un point comporte beaucoup de cas. Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, il y a 9 cas possibles. Nous utilisons la notion de voisinage vue en fin de chapitre précédent pour unifier tout ceci. Toutefois, il faut savoir à la fois réunir les différents cas et spécifier chacun d'entre eux.

Définition 1 *Soit l un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On dit que f admet l pour limite en a lorsque pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage W de a tel que*

$$\forall x \in W, f(x) \in V$$

— *Cas : $l \in \mathbb{K}$*
  — *Cas : $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$.*
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$
  — *Cas : $a = +\infty$.*
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]A, +\infty[, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$
  — *Cas : $a = -\infty$.*
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, A[, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— *Cas : $l = +\infty$ (fonctions à valeurs réelles).*
  — *Cas : $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$.*
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[, f(x) \geq A$$
  — *Cas : $a = +\infty$.*
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]B, +\infty[, f(x) \geq A$$
  — *Cas : $a = -\infty$.*
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, B[, f(x) \geq A$$

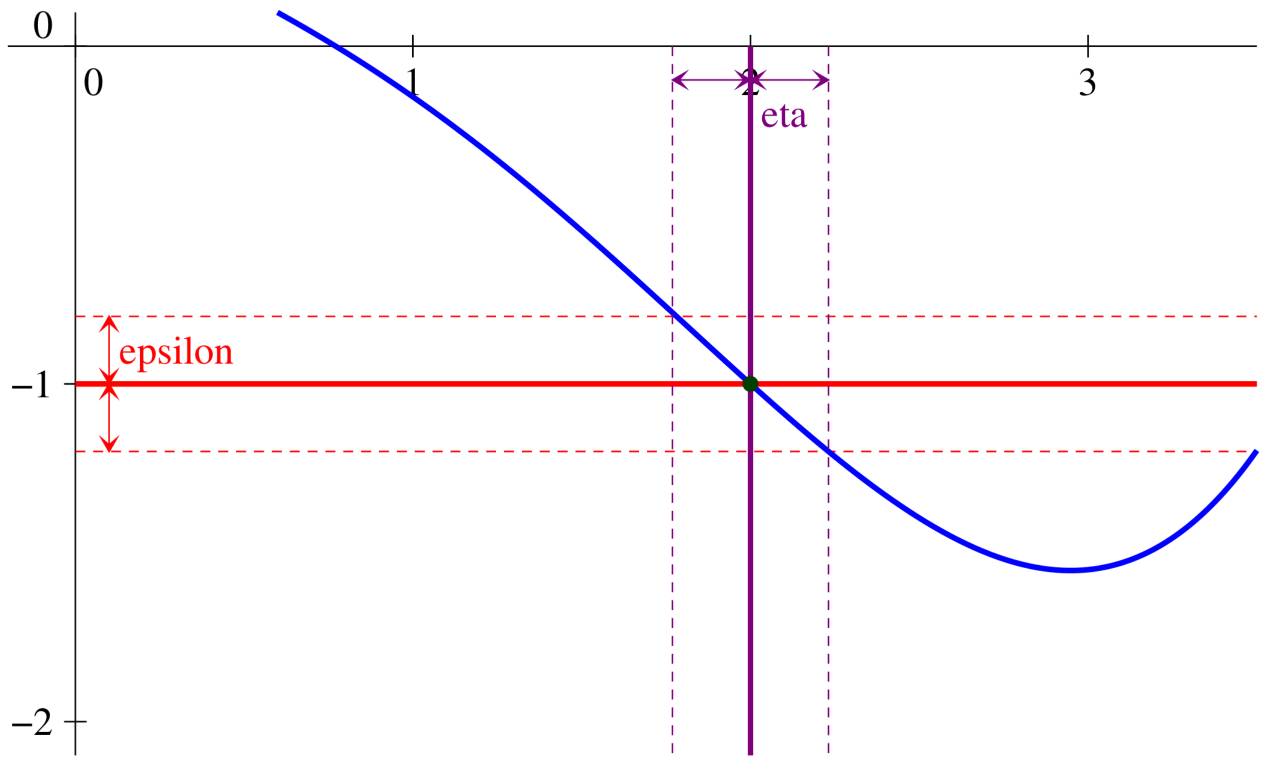
— *Cas : $l = -\infty$ (fonctions à valeurs réelles).*
  — *Cas : $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$.*
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[, f(x) \leq A$$
  — *Cas : $a = +\infty$.*
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]B, +\infty[, f(x) \leq A$$
  — *Cas : $a = -\infty$.*
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, B[, f(x) \leq A$$

- *Cas : $l = \infty$ (fonctions à valeurs complexes).*
  - *Cas : $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$.*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[, |f(x)| \geq A$$
  - *Cas : $a = +\infty$.*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]B, +\infty[, |f(x)| \geq A$$
  - *Cas : $a = -\infty$.*
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap]-\infty, B[, |f(x)| \geq A$$

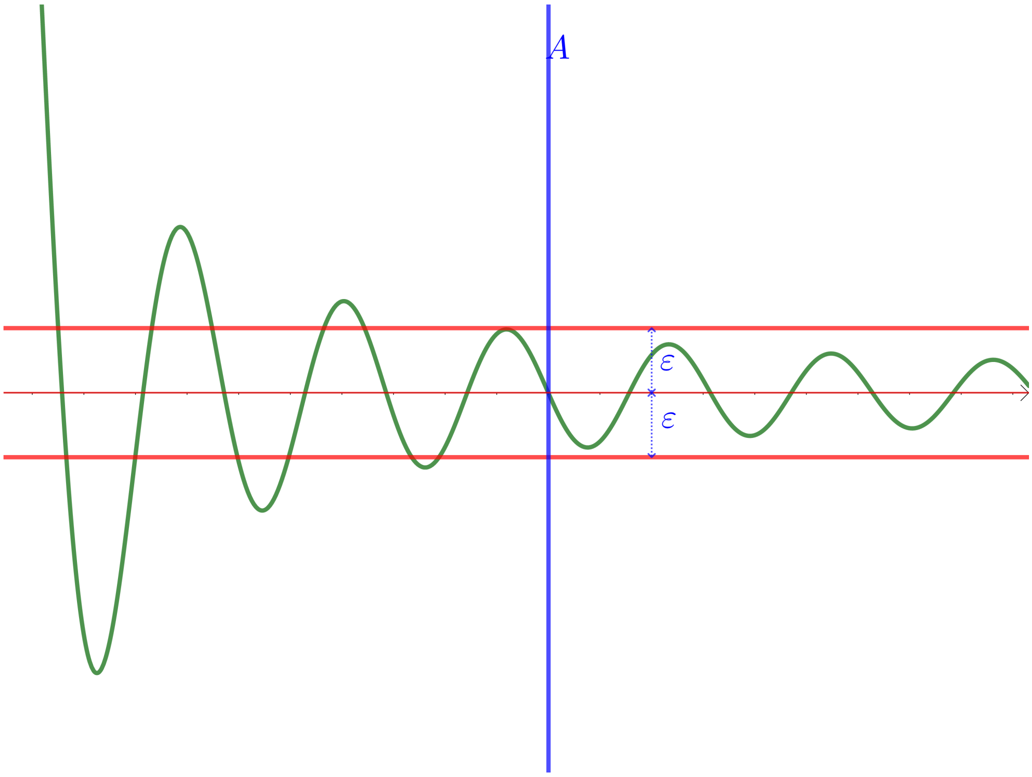
☞ Remarque

Comme dans le cas des suites, on peut penser à la variable muette ε comme une précision positive arbitrairement petite, mais non nulle. Dans le cas des limites en un point réel a, on peut penser au réel $\delta > 0$ que l'on cherche à construire comme un rayon autour de a. Dans la littérature, on trouve fréquemment la notation η. De toute façon, c'est une variable muette, on peut choisir n'importe quel symbole.

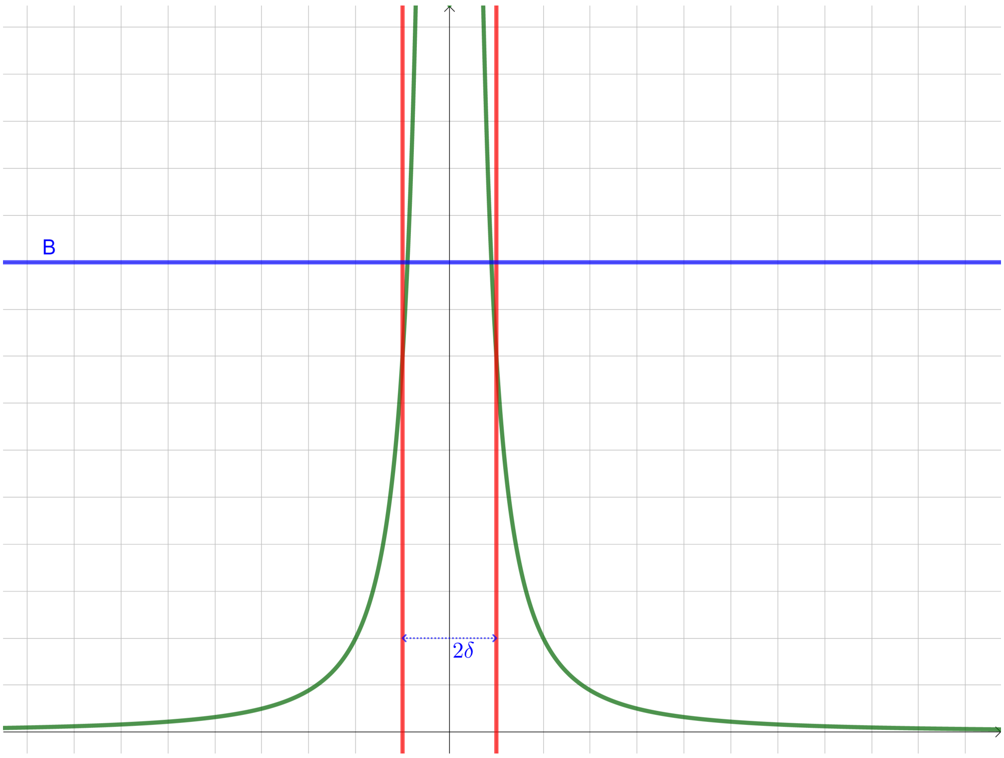
Représentation graphique dans le cas $a = 2, l = -1$.



Représentation graphique dans le cas $a = +\infty, l = 0$.



Représentation graphique dans le cas $a = 0, l = +\infty$.



⚠ **Attention**

Les inégalités strictes portant sur $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ sont strictes et ne peuvent pas être modifiées. En revanche, les inégalités portant sur $f(x)$ peuvent être strictes, cela donne une définition équivalente. Vous pouvez à titre d'exercice examiner le cas d'une fonction vérifiant ces propriétés en commençant par $\forall \varepsilon \geq 0$ et/ou $\exists \delta \geq 0$. Dans le premier cas, il s'agit d'une fonction localement constante. Dans le second cas, cela n'indique rien.

Exemple 1 *Montrons que $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ avec la définition. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]1-\delta, 1+\delta[, |x^2-1| \leq \varepsilon$. Comme dans le cas des suites, on cherche une condition suffisante pour réaliser cette dernière inégalité. Or on sait que $|x^2-1| = |x-1||x+1|$. Donc il nous suffirait que $|x-1| \leq \varepsilon/2$ et $|x+1| \leq< 2$ dans un domaine convenable. On pose alors $\delta = \min(1/2, 2\varepsilon/3)$. Soit $x \in]1-\delta, 1+\delta[$, alors $|x-1| < \delta \leq 2\varepsilon/3$ et $1/2 \leq |x+1| \leq 3/2$, de sorte que $|x^2-1| \leq \varepsilon$. La limite annoncée est prouvée.*

Exemple 2 *Montrons que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Soit A un réel. On cherche un réel B dans le domaine du définition du logarithme népérien tel que $\forall x > \mathrm{B}, \ln(x) \geq \mathrm{A}$. Comme le logarithme et l'exponentielle sont strictement croissants, on constate qu'il suffit de poser $\mathrm{B} = \exp(\mathrm{A})$ pour justifier cette limite.*

Exemple 3 *Montrons que le sinus n'admet pas de limite en $+\infty$. Comme le sinus est bornée, cette limite ne peut valoir $\pm\infty$. Supposons qu'il existe un réel l tel que $\sin(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \forall x > \mathrm{A}, |\sin(x) - l| \leq \varepsilon$. Cela prouve au passage en posant $\mathrm{A} = \mathrm{B} - \pi$ que $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \forall x > \mathrm{B}, |\sin(x+\pi) - l| \leq \varepsilon$, donc que $\sin(x+\pi) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, soit $\sin(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -l$. En anticipant sur l'unicité de la limite prouvée plus loin, cela prouve que $l = -l$, donc que $l = 0$. Mais alors on prouve la négation de la convergence du sinus vers 0 en $+\infty$. Il est relativement intuitif de comprendre que le sinus ne va pas être « coincé » autour de 0. On pose $\varepsilon = 1/2$. Alors pour tout réel A, on pose $x = 2\pi\lfloor \mathrm{A}/(2\pi)\rfloor + 2\pi + \pi/2$. D'après l'encadrement de la partie entière, ce réel x vérifie $x > \mathrm{A}$ et est de la forme $2\pi n + \pi/2$ avec $n \in \mathbb{Z}$, donc $\sin(x) = 1$, soit encore $|sin(x) - 0| > 1/2$. On a ainsi prouvé*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists x > \mathrm{A}, |\sin(x) - 0| > \varepsilon$$

C'est exactement la négation de la convergence du sinus vers 0 en $+\infty$. Ainsi, le sinus d'admet pas de limite en $+\infty$.

Propriété 1 *Si f admet une limite au point a, cette limite est unique. On la note alors $\lim_a f$ ou $\lim_{x\to a} f(x)$.*

Démonstration. Si cette limite vaut $\pm\infty$ ou ∞, la fonction ne peut être bornée au voisinage de a, donc posséder une limite finie en a. Il est bien sûr impossible pour une fonction d'avoir simultanément pour limite $+\infty$ et $-\infty$ pour des raisons de signe. Supposons à présent que f tend vers l et l' deux scalaires et démontrons que ces deux scalaires sont égaux. Supposons par l'absurde que $l \neq l'$. Alors on peut introduire $\varepsilon = |l-l'|/3$ qui est bien un réel strictement positif. Alors il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{V}, |f(x) - l| \leq \varepsilon$ et il existe un voisinage W de a tel que $\forall x \in \mathrm{W} \cap \mathrm{I}, |f(x) - l'| \leq \varepsilon$. Alors $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ est un voisinage de a.

- Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\exists \delta > 0,]a-\delta, a+\delta[\subset \mathrm{V}$, $\exists \eta > 0,]a-\eta, a+\eta[\subset \mathrm{W}$. En posant $\alpha = \min(\delta, \eta)$ qui est bien un réel strictement positif, on a $]a-\alpha, a+\alpha[\subset \mathrm{V} \cap \mathrm{W}$.
- Si $a = +\infty$, alors $\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},]\mathrm{A}, +\infty[\subset \mathrm{V}$, $\exists \mathrm{B} \in \mathbb{R},]\mathrm{B}, +\infty[\subset \mathrm{W}$. En posant, $\mathrm{C} = \max(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, on a $]\mathrm{C}, +\infty[\subset \mathrm{V} \cap \mathrm{W}$.
- Si $a = -\infty$, $\min(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ fait l'affaire.

En particulier dans tous les cas, $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} \cap \mathrm{I}$ est non vide. Soit x un élément de voisinage de a. Alors

$$|l - l'| \leq |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|l - l'|$$

Comme $|l - l'| > 0$, on en déduit que $1 \leq 2/3$, ce qui est aburde. En conclusion, la limite est bien unique.

⚠ **Attention**
La notation $\lim_{x\to a} f(x)$ n'est autorisée qu'après avoir démontré que cette limite est bien définie.

Propriété 2 *On suppose que $a \in \mathrm{I}$ et que f admet une limite finie en a. Alors $\lim_a f = f(a)$.*

Démonstration. Notons l la limite de f en a. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[, |f(x) - l| \leq \varepsilon$. Or $\forall \eta > 0$, $a \in]a-\eta, a+\eta[$, donc

$$\forall \varepsilon > 0, |f(a) - l| \leq \varepsilon$$

On en conclut que $f(a) = l$ (sinon on choisit $\varepsilon = |f(a) - l|/2$ ce qui entraîne $2 \leq 1$)).

Définition 2 *Soit $a \in \bar{\mathrm{I}} \cap \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite à gauche en a lorsque $f_{|\mathrm{I}\cap]-\infty, a[}$ admet une limite en a. On dit que f admet une limite à droite en a lorsque $f_{|\mathrm{I}\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en a. Cela équivaut à pour les limites à gauche*

- *Limite finie l.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{I} \cap]a-\delta, a[, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— *Limite $+\infty$ (fonctions à valeurs réelles)*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a-\delta, a[, f(x) \geq A$$

— *Limite $-\infty$ (fonctions à valeurs réelles)*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a-\delta, a[, f(x) \leq A$$

— *Limite ∞ (fonctions à valeurs complexes)*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a-\delta, a[, |f(x)| \geq A$$

Pour les limites à droite, on a

— *Limite finie l.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a, a+\delta[, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

— *Limite $+\infty$ (fonctions à valeurs réelles)*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a, a+\delta[, f(x) \geq A$$

— *Limite $-\infty$ (fonctions à valeurs réelles)*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a, a+\delta[, f(x) \leq A$$

— *Limite ∞ (fonctions à valeurs complexes)*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a, a+\delta[, |f(x)| \geq A$$

Exemple 4 *On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Soit n un entier relatif. Alors f admet une limite à droite à gauche en n, alors $f(x)$ tend vers n quand x tend vers n à droite. D'autre part, $f(x)$ tend vers $n-1$ quand x tend vers n à gauche. En particulier, f a beau être défini en n, posséder une limite à gauche en n, à droite en n, f n'admet pas de limite en n. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta = 1$, alors*

$$\forall x \in [n-1, n[, f(x) = n-1 \quad \text{et} \quad \forall x \in [n, n+1[, f(x) = n$$

donc

$$\forall x \in]n-1, n[, |f(x) - n - 1| = 0 \leq \varepsilon$$
$$\forall x \in]n, n+1[, |f(x) - n| = 0 \leq \varepsilon$$

Si f admettait une limite en n, ce serait nécessairement $f(n) = n$ d'après la propriété précédente. Par conséquent, en choisissant $\varepsilon = 1/2$, pour tout $\delta > 0$, on peut choisir $x = \max(n-1/2, n-\delta/2)$ pour infirmer cette limite.

Propriété 3 *Si f admet une limite à gauche (resp. à droite) en $a \in I \cap \mathbb{R}$, alors cette limite est unique. On la note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^-} f$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^+} f$).*

Démonstration. Laissée à titre d'exercice.

Définition 3 *On généralise la notion de limite d'une fonction définie sur une partie de la forme $I \setminus \{a\}$ avec I un intervalle et a un élément de I. On dit que f admet une limite en a lorsque f admet une limite à gauche en a et une limite à droite en a et elles sont égales.*

Exemple 5 *On pense typiquement aux taux d'accroissement. L'application $\tau : I \setminus \{a\}, x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ permet d'étudier la dérivabilité de f en a en étudiant les limites à gauche et à droite de τ en a. Attention, τ n'est pas définie en a.*

Exemple 6 *Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/x)$. Alors, en admettant temporairement la composition des limites, on a $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/x^2)$ alors $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.*

Théorème 1 (Caractérisation séquentielle de la limite en un point) *Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $l \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. f tend vers l en a si et seulement si*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a, (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Démonstration. On choisit une démonstration théorique pour faire traiter tous les cas en une seule fois. Supposons que f admette une limite en a et démontrons la seconde propriété. Soit $(a_n) \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers a, montrons que $f(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Soit V un voisinage de l, alors il existe un voisinage W de a tel que $\forall x \in \mathrm{W}\cap\mathrm{I}, f(x) \in \mathrm{V}$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, il existe un rang N tel que $\forall n \geq \mathrm{N}, a_n \in \mathrm{W}\cap\mathrm{I}$. D'après ce qui précède, on a alors $\forall n \geq \mathrm{N} f(a_n) \in \mathrm{V}$. Ainsi, pour tout voisinage V de l, on a trouvé un rang au delà duquel tous les termes de la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à V. C'est bien vérifier que $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
Démontrons l'autre sens par sa contraposée. Supposons que f ne tend pas vers l et construisons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a, mais telle que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l. Pour commencer, écrivons la négation du fait que f tende vers l. Il existe un voisinage V de l, tel que pour tout voisinage W de a, il existe un élément x de W tel que $f(x) \notin \mathrm{V}$. Soit n un entier naturel. Si a est un scalaire, on pose $\mathrm{W}_n = \mathrm{B}(a, 2^{-n})$. Si $a = +\infty$, on pose $\mathrm{W}_n =]n, +\infty[$. Si $a = -\infty$, on pose $\mathrm{W}_n =]-\infty, -n[$. Si $a = \infty$, on pose $\mathrm{W}_n = \{z \in \mathbb{C} | |z| > n\}$. Dans tous les cas, il existe un élément a_n de W_n tel que $f(a_n) \notin \mathrm{V}$. Ainsi construite, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a par théorème d'encadrement. Cependant, V un voisinage de l, donc si l est un scalaire, il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall y \in \mathrm{V}, |f(y) - l| \leq r$. On en déduit dans ce cas, $|f(a_n) - l| > r$, ce qui obstrue le fait que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Sinon $0 \geq r$ par passage à la limite dans les inégalités. De même, si $l = +\infty$, V contient un intervalle de la forme $]\mathrm{A}, +\infty[$, donc la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par A, ce qui l'empêche de tendre vers $+\infty$. Idem pour $l = -\infty$, on obtient une suite minorée, donc ne pouvant tendre vers $-\infty$. Si $l = \infty$, alors le même argument que précédemment indique que $(|f(a_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, ce qui l'empêche de tendre vers $+\infty$

⚠ **Attention**
*Il faut bien considérer **toutes** les suites qui tendent vers a pour établir la limite de f en a. N'en considérer qu'une seule ne suffit pas en toute généralité.*

Exemple 7 *La fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$. Si c'était le cas, cette limite serait la limite commune de suites $(\cos(2\pi n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(2\pi n + \pi))_{n\in\mathbb{N}}$ puisque $2\pi n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $2\pi n + \pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Or ces deux suites sont constantes respectivement égales à 1 et -1, ce qui contredit l'unicité de la limite.*

Exercice 1 *Soit $a \in \mathrm{I}$ et $l \in \mathbb{K}$. Montrer que f tend vers l en a^+ (i.e une limite à droite) si et seulement si*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}, [\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a] \wedge [a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a] \Rightarrow (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

1.2 Opérations sur les limites

Toutes les opérations sur les limites finies et/ou infinies des suites se transposent au cas des fonctions. Toutes les propriétés ci-après se démontrent via la caractérisation séquentielle de la limite. On tranposera aisément tous ces résultats aux cas d'une limite à gauche ou d'une limite à droite. Voir la fiche récapitulative en fin de document.

Propriété 4 *Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telles que f et g admettent une limite finie en a. Alors, pour tous scalaires α, β, $\alpha f + \beta g$ admet une limite en a et*

$$\lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$$

De plus, fg admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

Démonstration. Démontrons ce cas particulier des propriétés par la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $(a_n) \in \mathrm{I}^{\mathrm{N}}$ qui tend vers a. Alors $f(a_n)$ tend vers $\lim_a f$ d'après le premier sens de la caractérisation séquentielle de la limite. De même, $g(a_n)$ tend vers $\lim_a g$. Alors d'après les opérations sur les limites finies de suite, on a la convergence $\alpha f(a_n) + \beta g(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$, et ce pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I de limite a. D'après le sens réciproque de la caractérisation séquentielle de la limite, cela montre que $\alpha f + \beta g$ admet une limite finie en a et

$$\lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$$

De même, toujours d'après les opérations sur les limites finies de suites, $f(a_n)g(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$ et ce pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I de limite a. Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que fg admet une limite en a et que

$$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

On détaille tout de même la composition, dont le traitement nécessite plus de soin.

Propriété 5 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{K}$. On suppose que f admet une limite en a et que cette limite $b = \lim_a f$ est adhérente à J. On suppose de plus que g admet une limite en $\lim_b$. Alors $g \circ f$ admet une limite en a et*

$$\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = \lim_{y\to b} g(y)$$

Démonstration. On montre ceci via la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléménts de I de limite a. Alors, comme f admet une limite en a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $\lim_{x\to a} f(x) = b$ est à valeurs dans J à partir d'un certain rang.. Mais alors toujours d'après le premier sens de la caractérisation séquentielle de la limite, la suite $(g(f(a_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\lim_b g$ puisque g admet une limite en b. Ainsi, on a montré que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I qui tend vers a, $(g\circ f)(a_n)$ tend vers $\lim_b g$. D'après le sens réciproque de la caractérisation séquentielle de la limite, cela démontre que $g \circ f$ admet une limite an a et que celle-ci vaut $\lim_b g$.

Exemple 8 *Quelle est la limite de $x^{x^{x^{-x}+1}}$ quand x tend vers $+\infty$? Pour tout réel x suffisamment grand, $x^{-x} = \exp(-x\ln(x))$ donc tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Alors $x^{x^{-x}+1}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, $x^{x^{x^{-x}+1}}$ tend vers $+\infty$.*

Rappelons également l'importance du passage à la limite dans les inégalités réelles.

Propriété 6 (Passage à la limite dans les inégalités) *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On suppose que f et g admettent une limite finie en a adhérent à I et qu'il existe un voisinage V de a tel que*

$$\forall x \in \mathrm{V}, f(x) \leq g(x)$$

Alors $\lim_a f \leq \lim_a g$

Démonstration. Encore une fois, on procède par caractérisation séquentielle. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I de limite a. Alors à partir d'un certain rang N, a_n rentre dans le voisinage V. Donc $\forall n \geq \mathrm{N}, f(a_n) \leq g(a_n)$. D'après la compatibilité du passage à la limite des suites convergentes par rapport aux inégalités, on a $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq \lim_{n\to+\infty} g(a_n)$, puisque ces suites convergentes d'après la caractérisation séquentielle de la limite. Ainsi, $\lim_a f \leq \lim_a g$.

⚠ **Attention**
Le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes.

Exercice 2 *Examiner ce qui se passe dans les inégalités lorsque l'une des limites vaut $\pm\infty$.*

1.3 Conditions nécessaires et/ou suffisantes de limites en un point

Définition 4 *On dit que f vérifie une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|\mathrm{V}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.*

Exemple 9 *La fonction tangente est bornée au voisinage de 0, mais n'est pas une fonction bornée sur $\mathrm{D}_{\tan}$ (son ensemble de définition).*

Propriété 7 *Si f admet une limite finie en a, il existe un voisinage de V de a tel que $f_{|\mathrm{V}}$ est bornée.*

Démonstration. Comme la limite en a est finie (notons-la l), on choisit $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite finie. Cela entraîne qu'il existe un voisinage W de a tel que $\forall x \in \mathrm{W}, |f(x) - l| \leq 1$. En particulier, $\forall x \in \mathrm{W}, |f(x)| \leq |l| + |f(x) - l| \leq |l| + 1$. Ainsi, $|f|_{|\mathrm{W}}$ est majorée, donc $f_{|\mathrm{W}}$ est bornée.

⚠ **Attention**
La réciproque est bien entendu fausse. La fonction partie entière est bornée au voisinage de 0*, mais n'admet pas de limite en* 0*.*

Propriété 8 *Dans le cas réel, si f admet une limite non nulle l en a. Alors f est du signe de l au voisinage de a.*

Démonstration. C'est la même technique que pour les suites. On sépare l de 0. Si $l = \pm\infty$, on choisit $A = \pm 1$ ce qui assure que $f \leq -1 < 0$ ou $f \geq 1 > 0$ au voisinage de a. Si l est fini, on choisit $\varepsilon = |l|/2$, alors $f \geq l/2 > 0$ ou $f \leq -l/2 < 0$ au voisinage de a.

Théorème 2 (Encadrement, gendarmes) *Soit $l \in \mathrm{K}$. Alors f tend vers l en a si et seulement s'il existe une fonction g définie au voisinage de a qui tend vers 0 en a et telle que $|f - l| \leq g$ au voisinage de a. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est également équivalent à : il existe α, β des fonctions définies au voisinage de a qui tendent toutes deux vers a et $\alpha \leq f \leq \beta$ au voisinage de a.*

Exemple 10 *Pour $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \sin(1/x)$. Alors pour tout réel non nul x, $|f(x)| \leq x^2$. Comme $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.*

Théorème 3 (Majoration, minoration) *Dans le cas $l = +\infty$, alors f tend vers $+\infty$ en a si et seulement s'il existe une fonction g définie au voisinage de a qui tend vers $+\infty$ en a et telle que $f \geq g$ au voisinage de a. Dans le cas $l = -\infty$, alors f tend vers $-\infty$ en a si et seulement s'il existe une fonction g définie au voisinage de a qui tend vers $-\infty$ en a et telle que $f \leq g$ au voisinage de a.*

Démonstration. C'est la caractérisation séquentielle de la limite qui fait tout fonctionner.

Exemple 11 *Soit $f : \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it^2}/\sin(t)$. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, |f(t)| = 1/|\sin(t)| \xrightarrow[t\to n\pi]{} +\infty$.*

Théorème 4 (Limite monotone) *On se place dans le cas réel. On suppose que f est monotone au voisinage de a. Alors f admet une limite à gauche de a et une limite à droite de a. Si f est définie en a, on a de plus, dans le cas f croissante, $\lim\limits_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f$. Dans le cas f décroissante, on a $\lim\limits_{a^-} f \geq f(a) \geq \lim\limits_{a^+} f$.*

⚠ **Attention**
Ces limites ne sont pas nécessairement égales et/ou finies.

Démonstration. On peut passer par la caractérisation séquentielle des limites à gauche/à droite. Dans ce cas, il faut être capable d'extraire des suites tendant vers a par valeurs inférieures une suite croissante, des suites tendant vers a par valeurs supérieures une suite décroissante. On raisonne ici directement à l'aide de la caractérisation des bornes supérieures/inférieures. Commençons par le cas $a \in \mathbb{R}$ et f croissante au voisinage de a. On note V un tel voisinage et $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cap]-\infty, a[$, puis on note $f = g_{|\mathrm{W}}$ pour alléger les écritures, montrons alors que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \sup g$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un élément x de W te que $\sup g - \varepsilon < f(x) \leq \sup g$. Mais alors, par croissance de f, $\forall y \in [x, a[\sup g - \varepsilon < f(x) \leq f(y) \leq \sup g$. Ainsi, $\delta = |a - x|$ permet de vérifier $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \sup g$. Du côté droit, on pose $\mathrm{U} = \mathrm{V} \cap]a, +\infty[$, puis $h = f_{|\mathrm{U}}$. Montrons alors que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf h$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un élément x de U tel que $\inf h \leq f(x) < \inf h + \varepsilon$. On en déduit par croissance de f que $\forall y \in]a, x], \inf h \leq f(y) \leq f(x) < \inf h + \varepsilon$. Ainsi, $\delta = |a - x|$ permet de vérifier la limite à droite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf h$.
Si f est définie en a, on a par croissance de f, $f(a - 1/n) \leq f(a) \leq f(a + 1/n)$, ce qui donne l'encadrement souhaité par passage à la limite dans cette inégalité.
Si $a = +\infty$, les voisinages construits sont différents mais permettent de vérifier les mêmes types d'inégalités. Idem pour $a = -\infty$. Le cas f décroissante est laissé à titre d'exercice.

Notation
On trouve parfois la notation $f(a^+)$ ou $f(a^-)$ pour désigner ces notations. Attention, à n'utiliser que lorsque ces limites sont définies.

☞ **Remarque**
On peut montrer que le nombre de points de discontinuité d'une fonction mononotone est au plus dénombrable via la théorie des famillles sommables que l'on verra en fin d'année.

Corollaire
Dans le cas f croissante, si l'intervalle I est ouvert, de la forme $]\alpha, \beta[$ avec $\alpha < \beta$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors pour tout $c \in]\alpha, \beta[$, f admet des limites finies à gauche en c et à droite en c, et $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$. f admet une limite en α

— *Si f est minorée au voisinage de α, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ est finie.*

— *Si f est n'est pas minorée au voisinage de α, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.*

f admet un limite en β.

— *Si f est majorée au voisinage de β, $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$ est finie.*

— *Si f est n'est pas majorée au voisinage de β, $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = +\infty$.*

Exemple 12 *Soit X un variable aléatoire qui représente le gain lors d'un jeu ou d'une expérience aléatoire. Pour tout réel x, on peut estimer la probabilité que le gain soit inférieur ou égal à x, i.e $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x)$. Alors la fonction $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x)$ est croissante. En effet, pour tous réels x, y tels que $x \leq y$, si le gain est inférieur ou égal à x, il est a fortiori inférieur ou égal à y, donc $p(\mathrm{X} \leq x) \leq p(\mathrm{X} \leq y)$, soit $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{F}(y)$. Le théorème de la limite monotone alors que F admet des limites à gauche et à droite en tout réel x, et $\mathrm{F}(x^-) \leq \mathrm{F}(x) \leq \mathrm{F}(x^+)$.*

2 Continuité en un point, prolongement

A partir de maintenant, on considère que a est fini. La plupart du temps, il appartient à I.

Définition 5 *Soit $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue à droite en a lorsque f admet une limite à droite en a et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue à gauche en a lorsque f admet une limite à gauche en a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.*

Exemple 13 *Les fonctions polynômiales, exponentielles, logarithme sont continues en chaque point de leur ensemble de définition. La fonction partie entière est continue en tout réel x non entier. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle est continue à droite en n, mais non continue à gauche en n. Plus précisément, $\lfloor n^- \rfloor = n - 1 < \lfloor n \rfloor = \lfloor n^+ \rfloor$. La fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{1\}, x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ n'est pas définie en 1. Toutefois, elle admet une limite à gauche en 1, à savoir $\pi/2$ et une limite à droite en 1, à savoir $-\pi/2$.*

Exemple 14 *La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point.*

Propriété 9 *Il suffit que f admette une limite en a pour que f soit continue en a.*

Démonstration. Rappelons que si f admet une limite en a un point de l'ensemble de définition de f, alors cette limite vaut nécessairement $f(a)$.

Propriété 10 *Si f admet une limite à gauche en a et une limite à droite en a, et si ces deux limites valent $f(a)$. Alors f est continue en a.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\eta, a[, |f(x) - f(a)| \varepsilon$ d'après la limite de f à gauche de a. D'autre part, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+\delta[, |f(x) - f(l)| \leq \varepsilon$. On pose alors $\alpha = \min(\delta, \eta)$, ce qui implique

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\backslash\{a\}, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Cette inégalité est bien entendu vérifiée pour $x = a$, ainsi

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

En conclusion, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et f est continue en a.

Théorème 5 (Caractérisation séquentielle de la continuité en a) *Ici, a appartient à I l'intervalle de définition de f. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.*

Démonstration. La première partie découle de la caractérisation séquentielle de la limite et la définition de la continuité en a. Démontrons la seule implication délicate : supposons que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et montrons que pour toute telle suite, cette limite vaut $f(a)$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de I qui tendent vers a. On introduit alors la suite d définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{2n} = b_n \text{ et } d_{2n+1} = c_n$$

alors $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite a, donc $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite. Notons

$$\beta = \lim_{n\to+\infty} f(b_n), \gamma = \lim_{n\to+\infty} f(c_n), \delta = \lim_{n\to+\infty} f(d_n)$$

Comme b est une sous-suite de d, $f(b)$ est une sous-suite de $f(d)$, donc $\beta = \delta$. De même, $f(c)$ est une sous-suite de $f(d)$, donc $\gamma = \delta$. Par conséquent, toutes ces suites ont la même limite, donc la même limite que la suite constante $f(a)$ puisque la suite constante égale à a converge vers a, i.e $f(a)$.

Définition 6 *On considère le cas où a est réel et n'appartient pas à* I. *Par exemple,* $a \in \bar{\mathrm{I}}\backslash \mathrm{I}$ *et a réel, ou alors* $\mathrm{I} = (b, a[\cup]a, c)$. *On suppose que f admet une limite finie en a. On appelle alors prolongement de f en a la fonction*

$$g : \mathrm{I} \cup \{a\} \to \mathrm{K}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Notation
Le prolongement g est parfois noté f bien qu'il s'agit d'un abus de notation.

Propriété 11 *Avec les notations précédentes, le prolongement g est continu en a.*

Démonstration. L'application g est définie en a et admet une limite en a puisque $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathrm{I}, |g(a) - \lim\limits_{x\to a} f(x)| = 0 \leq \varepsilon$, donc g est continue en a.

Exemple 15 *On note* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. *Alors* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. *Ainsi, la fonction*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue.

Exemple 16 *On note* $h :]-\pi, \pi[\backslash\{0\}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$. *h est impaire,* $\forall x \in]0, \pi[, 0 < x - x^3/6 < \sin(x) < x$, $\forall x \in]0, \pi/4[, 1-x^2/2+x^4/4! < \cos(x) < 1-x^2/2,$. *Alors, toutes quantités strictement positives* $\forall x \in]0, \pi/2[$,

$$\frac{1 - x^2/2 + x^4/4!}{x} < \frac{\cos(x)}{\sin(x)} < \frac{1 - x^2/2}{x - x^3/6}$$

On en déduit que

$$\frac{1 - x^2/2 + x^4/4!}{x} - \frac{1}{x} < h(x) < \frac{1 - x^2/2}{x - x^3/6} - \frac{1}{x}$$

soit

$$-\frac{x}{2}(1 + x^3/4!) < h(x) < -\frac{1}{3}\frac{x}{1 - x^2/6}$$

Comme les fonctions minorantes et majorantes tendent vers 0 *quand x tend vers* 0 *par valeurs supérieures, h(x) tend vers* 0 *quand x tend vers* 0 *par valeurs supérieures. Comme h est impaire, il en est de même quand x tend vers* 0 *par valeurs inférieures. On en déduit qu'on peut prolonger h par continuité en* 0 *en posant* $h(0) = 0$.

Exemple 17 *La fonction* $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\ln(x)$ *peut se prolonger par continuité en* 0 *par* 0. *La fonction* $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/x^2)$ *se prolonge en* 0 *via* 0. *Pour* $\alpha > 0$, *la fonction puissance* $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ *se prolonge par continuité en* 0 *par* 0.

Toutes les opérations sur les limites finies s'appliquent à la continuité des fonctions continues en a : combinaisons linéaires, produits, quotients (avec les bonnes hypothèses), compositions, passages à la limite. On peut appliquer tous les critères précédemment mentionnés en vérifiant que les limites obtenues sont égales à $f(a)$.

3 Continuité sur un intervalle

3.1 Espace $C(I, K)$

Définition 7 *On dit que f est continue lorsque f est continue en tout point a de I. Soit A une partie de I, on dit que f est contine sur A lorsque f est continue en tout point a de A.*

☞ **Remarque**
Cette définition paraît de peu d'intérêt au vu de sa simplicité. Pourtant, les conséquences du passage du local (un point de I) au global (tout l'ensemble I) sont multiples et très importantes. Il faudra faire toutefois attention à l'ensemble de définition.

Exemple 18 *La fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ est continue. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ est continue. La fonction $\tan : D_{\tan} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$ est continue. Toutefois, il n'existe aucun prolongement continu de la fonction tangente et de la fonction inverse sur $\mathbb{R}$.*

Définition 8 *Soit $f : I \to K$, et k un réel positif. On dit que f est k-Lipschitzienne lorsque*

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

On dit que f est Lipschitzienne lorsqu'il existe un réel positif k tel que f est k-Lipschitzienne.

Représentation graphique Graphe inclus dans un cône.

Propriété 12 *Toute fonction Lipchitzienne est continue.*

Démonstration. Notons k un réel positif tel que f est k-Lipschitzienne. Soit $a \in I$. Montrons que f est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche un réel δ strictement positif tel que $\forall x \in]a - \delta, a + \delta[\cap I, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. Or $\forall x \in]a - \delta, a + \delta[\cap I, |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \leq k\delta$. Si $k = 0$, tout réel strictement positif δ convient, sinon on pose $\delta = \varepsilon/k$, ce qui assure la continuité de f en a.

Notation
L'ensemble des fonctions continues de I dans K est noté $C(I, K)$.

Propriété 13 *L'ensemble $C(I, K)$ est stable par combinaison linéaire et produit.*

Propriété 14 *Soit $(f, g) \in C(I, K)^2$. On suppose que $f(I) \subset I$. Alors $g \circ f \in C(I, K)$.*

3.2 Convexité

Théorème 6 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tous réels a, b de I tels que $a \leq b$, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que $y = f(c)$.*

Démonstration. On propose une démonstration par dichotomie. Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Construisons deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[a, b]$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ y est compris entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$. Le principe doit mainenant être acquis. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Alors, par hypothèse sur y, y est compris entre $f(a_0)$ et$f(b_0)$. On pose alors $d = (a + b)/2$ et on compare y et $f(c)$. y est nécessairement compris entre $f(a)$ et $f(d)$ ou compris entre $f(d)$ et $f(b)$ par transitivité de la relation d'ordre. Si y est compris entre $f(a)$ et $f(d)$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = d$. Sinon, on pose $a_1 = d$ et $b_1 = c$. Ce choix assure que $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ dans tous les cas et $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ et y est compris entre $f(a_1)$ et $f(b_1)$. On répète le processus pour construire les suites indiquées. Comme ces suites sont adjancetes, elles convergent vers une limite commune que nous notons c. Montrons alors que $f(c) = y$. D'après la construction effectuée, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min(f(a_n), f(b_n)) \leq y \leq \max(f(a_n), f(b_n))$$

Comme f est continue, d'après la caractérisation séquentielle de la limite $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Alors par opérations sur les limites, $\min(f(a_n), f(b_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \min(f(c), f(c)) = f(c)$ et $\max(f(a_n), f(b_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max(f(c), f(c)) = f(c)$. On déduit alors du passage à la limite dans les inégalités que $f(c) \leq y \leq f(c)$, donc que $f(c) = y$.

⚠ **Attention**
Ce théorème ne garantit uniquement l'unicité d'un tel réel.

Corollaire
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe a et b des éléments de I tels que $f(a)f(b) \leq 0$ (i.e $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe). Alors, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Exemple 19 *Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Alors P admet une racine réelle.*

Exemple 20 *Soit $\mathrm{I} = [a, b]$ un segment et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue qui stabilise ce segment. Alors $f(a) \geq a$, donc $f(a) - a \geq 0$. D'autre part, $f(b) \leq b$, donc $f(b) - b \leq 0$. Par conséquent, la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$ est continue et vérifie $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.D'après le corollaire du TVI, il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$, i.e f admet un point fixe.*

Théorème 7 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors son image directe $f(\mathrm{I})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $f(\mathrm{I})$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$ pour montrer qu'il s'agit d'un intervalle. Soit donc $\alpha \leq \beta$ des éléments de $f(\mathrm{I})$. On note a et b des éléments de I tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Soit $\gamma \in [\alpha, \beta]$, alors γ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le TVI, $\exists c \in [a, b], f(c) = \gamma$. Cela prouve en particulier que $\gamma \in f(\mathrm{I})$ et ce, pour tout γ de $[\alpha, \beta]$. On a ainsi prouvé l'inclusion $[\alpha, \beta] \subset f(\mathrm{I})$, et ce pour tout couple $\alpha \leq \beta$ de $f(\mathrm{I})$. Ainsi, $f(\mathrm{I})$ est convexe, donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Corollaire
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Alors
- *Si f est strictement croissante, $f(\mathrm{I}) = (f(\inf(\mathrm{I})^+), f(\sup(\mathrm{I})^-))$. Les parenthèses représentent des crochets ouvrants ou fermants selon que $f(\mathrm{I})$ contient ses bornes inférieure/supérieure ou non.*
- *Si f est strictement décroissante, $f(\mathrm{I}) = (f(\sup(\mathrm{I})^-), f(\inf(\mathrm{I})^+))$. Les parenthèses représentent des crochets ouvrants ou fermants selon que $f(\mathrm{I})$ contient ses bornes inférieure/supérieure ou non.*

☞ **Remarque**
La nature de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Pour $f : x \mapsto x^2$, on a $f([-2, 1[) = [0, 4]$. Si f est la fonction inverse, $f([1, +\infty[) =]0, 1]$.

3.3 Segments

Théorème 8 (Théorème des bornes atteintes) *Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e*

$$\exists (c, d) \in [a, b]^2, \forall x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

Démonstration. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite d'éléments $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $f([a, b])$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup f$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], y_n = f(x_n)$. Mais alors, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Notons l sa limite. Mais alors, par continuité de f, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(l)$. Or $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même convergente de limite $\sup(f)$. Par conséquent, $\sup(f) = f(l)$, ce qui prouve que la borne supérieure de f est finie et que c'est un maximum : il est atteint. On procède de même pour le minimum en utilisant une suite qui tend vers $\inf f$ et en extrayant une sous-suite convergente d'antécédents.

Corollaire
Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ alors $f(\mathrm{I}) = [\min f, \max f]$.

Démonstration. D'après le corollaire du TVI, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle. D'après le théorème des bornes atteintes, cet intervalle est borné et contient ses extrémités, c'est donc le segment d'extrémités $[\min(f), \max(f)]$.

Exemple 21 *On considère une application $f : [a, b] \to [a, b]$ dite « quasi-contractante » sur un segment, ie.*

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, x \neq y, |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrons qu'elle admet un unique point fixe. La fonction f est continue tout comme $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x - f(x)|$. Alors g atteint ses bornes. Notons α un élément de $[a, b]$ tel que $g(\alpha) = \min(g)$. Supposons par l'absurde que $g(\alpha) \neq 0$. Alors $\alpha \neq f(\alpha)$, donc $|f(\alpha) - f(f(\alpha))| < |\alpha - f(\alpha)|$, soit $g(f(\alpha)) < g(\alpha)$ ce qui contredit le minimum de g atteint en α. Donc $g(\alpha) = 0$, donc $\alpha = f(\alpha)$ est un point fixe de f. Soit β un autre point fixe de f. Supposons par l'absurde que $\beta \neq \alpha$, alors $|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta|$, soit $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$, ce qui absurde. En conclusion, f possède un unique point fixe.

3.4 Bijections

Propriété 15 *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction injective et continue. Alors f est strictement monotone.*

Démonstration. I possède au moins deux points que l'on notera a, b de sorte que $a < b$. Puisque f est injective $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$ et montrons que f est strictement croissante. Soient $x, y \in \mathrm{I}$ tels que $x < y$. Posons $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0,1], \varphi(t) = f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$$

Par construction $\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0$ et $\varphi(1) = f(y) - f(x)$ et par opérations sur les fonctions continues φ est continue. Supposons par l'absurde $f(y) \leq f(x)$. On a alors $\varphi(1) \leq 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et 1, on obtient l'existence de $t \in]0,1]$ tel que $\varphi(t) = 0$ puisque $\varphi(0) > 0$. Posons alors $u = (1-t)a + tx$ et $v = (1-t)b + ty$. $\varphi(t) = 0$ donne $f(u) = f(v)$ puis $u = v$ car f est supposée injective. Or, $a \leq b$ et $(1-t) \geq 0$ donc $(1-t)a \leq (1-t)b$, de plus $x < y$ et $t > 0$ donc $tx < ty$ et par suite $u < v$. C'est absurde. Par suite $f(x) < f(y)$ et ce pour tous réels x, y de I tels que $x < y$. Ainsi f est strictement croissante.

☞ **Remarque**

Cette preuve cache des notions de connexité que vous aborderez en seconde année.

Théorème 9 (Théorème de la bijection) *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement monotone. Alors f induit une bijection de I dans $f(\mathrm{I})$ et sa réciproque $g : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ est définie sur un intervalle, continue et même monotonie que f sur cet intervalle.*

Démonstration. Comme f est strictement monotone, elle est injective. Elle induit donc une bijection de I dans $f(\mathrm{I})$. Sa réciproque g est monotone de même monotonie comme vu en chapitre 3 sur les relations d'ordre, puisque $\mathbb{R}$ est totalement ordonné. Comme $f(\mathrm{I})$ est un intervalle, on peut examiner si g est continue sur $f(\mathrm{I})$. Cela passe par le lemme suivant :

Lemme 1 *Toute surjection g monotone d'une partie de $\mathbb{R}$ sur un intervalle est continue.*

Prenons le cas où g est strictement croissante. Soit $y \in f(\mathrm{I})$ et montrons que g est continue en y. Soit x un élément de I tel que $y = f(x)$. Si x est distinct des extrémités de I, il existe un réel r strictement positif tel que $[x-r, x+r] \subset \mathrm{I}$. Soit $\varepsilon > 0$, on pose alors $\delta = \min(\varepsilon, r)$, $y^- = f(x-\delta)$, $y^+ = f(x+\delta)$, comme $\delta > 0$ et f strictement croissante, on a $y^- < y < y^+$ et $g([y^-, y^+] \cap f(\mathrm{I})) \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Si $x = \sup \mathrm{I}$, on trouve de même, pour tout $\varepsilon > 0$, un $y^- < y$ tel que $g([y^-, +\infty[\cap f(\mathrm{I})) \subset [x - \varepsilon x]$. Si $x = \inf \mathrm{I}$, on trouve de même, pour tout $\varepsilon > 0$, un $y^+ > y$ tel que $g(]-\infty, y^+] \cap f(\mathrm{I})) \subset [x, x+\varepsilon]$. Dans tous les cas, on a prouvé que g est continue en y, pour tout y dans $f(\mathrm{I})$.

Exemple 22 *Pour tout entier n non nul, on définit $f_n \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - nx$. Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est dérivable et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = e^x - n$$

donc f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(n)]$, strictement croissante sur $[\ln(n), +\infty[$. De plus, $\mathrm{lm}_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Par conséquent, f_n induit une bijection croissante de $[\ln(n), +\infty[$ sur $[n(1-\ln(n)), +\infty[$ et une bijection décroissante de $]-\infty, ln(n)]$ sur $[n(1-\ln(n)), +\infty[$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Par conséquent, $n(1-\ln(n)) < 0$. D'après les variations précédentes, il existe un unique couple (u_n, v_n) dans $]-\infty, \ln(n)] \times [\ln(n), +\infty[$ tels que $f_n(u_n) = f_n(v_n) = 0$. Comme $f_n(0) = 1$, on en déduit que $f_n(0) > f_n(u_n)$ donc que $0 < u_n$ d'après la stricte décroissance de f_n sur cet intervalle. D'autre part,

$$f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = -u_n < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$$

D'après la stricte décroissance de f_{n+1}, on a alors $u_n > u_{n+1}$. La suite u est alors décroissante minorée par 0 donc convergente. Notons l sa limite. Si celle-ci est non nulle l est strictement positif, alors nu_n tend vers $+\infty$. Comme $e^{u_n} = nu_n$, alors $u_n = \ln(nu_n)$ tend également vers $+\infty$ ce qui absurde d'après sa convergente. Donc $l = 0$. Alors e^{u_n} tend vers 1, donc nu_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

✎ **Méthode**

Méthode pour l'étude d'une suite implicite définies via une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u_n = f_n^{-1}(0)$.

- *Exploiter le théorème de la bijection pour justifier l'existence et l'unicité des réels u_n.*
- *Pour majorer ou minorer u, il suffit de calculer $f_n(\mathrm{M})$ et d'utiliser la monotonie des fonctions f_n.*
- *Étudier l'expression $f_{n+1}(u_n)$ ou $f_n(u_{n+1})$ et la comparer à $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, puis utiliser les variations de f_n pour conclure sur la monotonie de u_n.*
- *Passer à la limite dans l'égalité $f_n(u_n) = 0$ permet en général d'obtenir des résultats sur la limite éventuelle de u.*