Kholle 14 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Montrer que le neutre de l'addition d'un anneau est absorbant pour la multiplication.
2. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. On dit qu'un élément a de A est nilpotent lorsque

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0$$

   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}$ des nilpotents de A est un sous-groupe de $(A, +)$. Est-ce un sous-anneau de A?

   (b) Montrer que pour tout élément nilpotent a de A, $1 - a$ est inversible dans A.

3. On considère le groupe $G = \mathfrak{S}_3$ des permutations de $[\![1, 3]\!]$. Déterminer tous les sous-groupes de G.

★★★

Kholle 14 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Démontrer que l'ensemble des inversibles d'un anneau est un groupe multiplicatif.
2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega | (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\omega]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ si et seulement si
$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2, \omega^2 = \alpha\omega + \beta$$
3. Soit G un groupe. On appelle centre de G l'ensemble $Z(G) = \{g \in G | \forall h \in G, hg = gh\}$.
   (a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
   (b) Déterminer le centre du groupe $\mathfrak{S}_4$ (les permutations de $[\![1, 4]\!]$).

⋆⋆⋆

Kholle 14 filière MPSI/MP2I
Planche 3

★★★

1. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Caractériser son injectivité.
2. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{Z} \to A, n \mapsto \underbrace{1_A + \cdots + 1_A}_{n \text{ termes}}$$

   (a) Montrer que l'application φ est un morphisme d'anneaux.

   (b) On suppose que $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$. Montrer que l'application

$$\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A, \overline{k} \mapsto \underbrace{1_A + \cdots + 1_A}_{k \text{ termes}}$$

   est bien définie et un morphisme d'anneaux injectif.
3. Montrer que $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes non isomorphes. Démontrer que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$ sont des groupes non isomorphes.

★★★

Kholle 14 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant A. Déterminer ce sous-corps lorsque $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$.
2. Soit G un groupe fini et f un morphisme de groupe de G dans $\mathbb{C}^*$. Déterminer

$$\sum_{g \in G} f(g).$$

⋆⋆⋆