Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (⋆). On termine ici le chapitre 8 sur les suites numériques. On vérifiera en particulier que la manipulation quantifiée des limites est acquise. La continuité des fonctions fera l'objet du prochain chapitre, mais on peut déjà utiliser le sens direct de la caractérisation séquentielle de la continuité.

Chapitre 8 : Suites numériques.

Limite d'une suite numérique

Limite finie

$$\forall u \in K^{\mathbb{N}}, \forall l \in K, u \to l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

u tend vers l ssi tout invervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite u à partir d'un certain rang. Suite convergente. (⋆) Unicité de la limite. Suite divergente. (⋆) Opérations sur les limites finies, combinaison linéaire, produit, quotient. Si u est convergente, elle est bornée. Si u est bornée et v de limite nulle, uv est de limite nulle. (⋆) Passage à la limite dans les inégalités.

Limite infinie

Dans le cas réel,

$$u \to +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

$$u \to -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$$

u tend vers $+\infty$ ssi $-u$ tend vers $-\infty$. Dans le cas complexe,

$$u \to \infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \geq A$$

u tend vers ∞ ssi $|u|$ tend vers $+\infty$. (⋆)Opérations sur les limites infinies. Applications aux limites de suites polynomiales ou rationnelles.

Critères de convergence/divergence

u tend vers $l \iff u - l$ tend vers $0 \iff |u - l|$ tend vers 0. Convergente implique bornée. Limite infinie implique non bornée. En cas de limite non nulle, u est de signe constant àpcr. (⋆) Théorème d'encadrement (gendarmes). Si u tend vers l, $|u|$ tend vers $|l|$ et $\overline{u}$ tend vers $\overline{l}$. u à valeurs complexes est convergente ssi $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ sont convergentes. u tend vers $+\infty$ ssi elle est minorée àpcr par une suite v de limite $+\infty$. u tend vers $-\infty$ ssi elle est majorée àpcr par une suite v de limite $-\infty$.

Exemples fondamentaux de suites convergentes/divergentes

Limites des suites arithmétiques, (⋆) géométriques, arithmético-géométriques. (⋆) Théorème de convergence monotone : les quatre cas doivent être sus. Suites adjacentes. (⋆) Théorème de convergence des suites adjacentes. Extractrice, sous-suite. Si u est convergente, toutes ses suites sont convergentes de même limite. Il suffit que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes de même limite pour que u converge. (⋆) Théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans le cas réel, si u est non majorée (resp. non minorée), il existe une sous-suite de u de limite $+\infty$ (resp. $-\infty$).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆