8/10

Question cours :

Ppté

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivable.

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$

ssi

$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x > 0\ f(x) = a \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Démo

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

On fixe $x > 0$ et on pose $g_x : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(xy)$

Alors g_x est dérivable par composition puisque f est dérivable et $y \mapsto xy$ est dérivable.

$\forall y > 0,\ g_x'(y) = x f'(xy)$

D'autre part

$\forall y > 0,\ g_x'(y) = 0 + f'(y)$

En particulier pour $y = 1$

$x f'(x) = f'(1)$

Donc $\forall y > 0,\ f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$

Je pose $a = f'(1)$

D'autre part l'équation fonctionnelle évaluée en $x = y = 1$ entraîne : $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$.

ie $f(1) = 0$.

Donc f est la primitive de $x \mapsto \frac{a}{x}$ qui s'annule

Nickel

Donc : $\forall x > 0,\ f(x) = \int_1^x \frac{a}{t}\,dt = a \int_1^x \frac{dt}{t}$

Réciproquement :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a \int_1^x \frac{dt}{t}$

On montre que $\forall x, y > 0,\ h(xy) = h(x) + h(y)$

On fixe $y > 0$ et on pose $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(xy)$

Alors g est dérivable par composition puisque h l'est, h est une primitive de fonction continues donc dérivable.

$\forall x > 0\ g'(x) = y h'(xy)$ et $h'(x) = \frac{a}{x}$

Donc $\forall x > 0,\ g'(x) = y \cdot \frac{a}{xy} = \frac{a}{x}$

$\forall x > 0,\ g'(x) - h'(x) = \frac{a}{x} - \frac{a}{x} = 0$

$g' - h'$ est nul sur $\mathbb{R}^{+*}$

Puisque R+* est un intervalle

Donc $g - h$ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\forall x > 0,\ g(x) - h(x) = g(1) - h(1) = h(1 \cdot y) - 0$

Nickel

$h(xy) - h(x) = h(y)$

D'où $h(xy) = h(x) + h(y)$

Donc h vérifie l'équation fonctionnelle.

Exercice 1. $f_1(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$

La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ est définie sur $[0, \pi[$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$

Donc $x \mapsto \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ est définie sur $[0, \pi[$

Arctan définie sur $\mathbb{R}$

Donc $f_1(x)$ définie sur $[0, \pi[$

$\tan(f_1(x)) = \tan\left(\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)\right)$

On pose $f_1(x) = \theta$. θ définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$\tan(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

d'où $\tan^2(\theta) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

ie $\cos x = \frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$

$= \cos^2(\theta)(1 - \tan^2(\theta))$

$= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

$\cos x = \cos(2\theta)$

Donc $2\theta \equiv \pm x \; [2\pi]$

$\theta \equiv \pm \frac{x}{2} \; [\pi]$ $\quad \theta = \frac{x}{2}$ car $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

Donc $\forall x \in [0, \pi[$, $\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \frac{x}{2}$

Très bien, mais il faut poursuivre l'étude sur]-pi,0], puis par périodicité

Exercice 2 : $\text{Arcsin}(2x) - \text{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \text{Arcsin}\, x$

Analyse : On compose par sin.

$\sin(\text{Arcsin}(2x) - \text{Arcsin}(x\sqrt{3})) = x$

ie $2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = x$

Une solution évidente $x = 0$.

~~$\forall x$~~ $x \neq 0$: $\sqrt{4-12x^2} = 1 + \sqrt{3-12x^2}$

ie $4 - 12x^2 = 1 + 2\sqrt{3-12x^2} + 3 - 12x^2$

donc $0 = 3 - 12x^2$

Si x non nul

ie $x = \pm \frac{1}{2}$

On a determiner 3 solutions:

déterminé

$x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$

On vérifie si elle vérifie l'équation:

Synthèse:

- $x = 0$: $\text{Arcsin}(0) - \text{Arcsin}(0) = \text{Arcsin}(0)$

  ie $0 - 0 = 0$.

  Donc $x = 0$ solution.

Ok

Commenter rapidement que ces réels sont dans le bon ensemble de définition

- $x = -\frac{1}{2}$: $\text{Arcsin}(-1) - \text{Arcsin}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \text{Arcsin}(-\frac{1}{2})$

  ie: $-\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{6}$.

  Donc $x = -\frac{1}{2}$ solution

- $x = \frac{1}{2}$ $\text{Arcsin}(1) - \text{Arcsin}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \text{Arcsin}(\frac{1}{2})$

  ie: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Donc l'équation admet trois solutions: $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$

Très bien