Ceci n'est **pas** un problème de géométrie. On se donne deux réels strictement positifs a et b tels que $a > b$. On considère alors la partie

$$\mathcal{E} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{\mathfrak{Re}(z)^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{Im}(z)^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

On pose de plus $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. On admet le résultat suivant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, [z \in \mathcal{E} \iff |z - c| + |z + c| = 2a]$$

1. Soit z un complexe. Expliquer via un théorème du cours pourquoi il existe un complexe z' qui vérifie $z'^2 + z^2 = c^2$.

   On fixe un complexe z dans $\mathcal{E}$ et un tel complexe z' dans ce qui suit jusqu'à la question 6 incluse.
2. Montrer que $|z'|^2 = |z - c||z + c|$.
3. Montrer que :

$$\begin{aligned}
|z-c|^2 + |z+c|^2 &= 2\left(|z|^2 + |c|^2\right) \\
(|z-c| + |z+c|)^2 &= 2\left(|z|^2 + |z'|^2 + |c|^2\right) \\
|z-c| + |z+c| &= |z'-c| + |z'+c|.
\end{aligned}$$

   En déduire que z' appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
4. On définit deux complexes n et n' via $n = z + iz'$ et $n' = z - iz'$. Montrer que $nn' = c^2$ et $|z-c| + |z+c| = |n| + |n'|$.
5. On note $x = \mathfrak{Re}(z), y = \mathfrak{Im}(z), x' = \mathfrak{Re}(z'), y' = \mathfrak{Im}(z')$. Démontrer les relations :

$$\begin{aligned}
xy + x'y' &= 0 \\
x^2 + x'^2 &= a^2 \\
y^2 + y'^2 &= b^2.
\end{aligned}$$

6. Montrer qu'alors, quitte à intervertir n et n', on a $|n| = a + b$ et $|n'| = a - b$.
7. On admet que $f : \mathcal{E} \to \mathbb{C}, z \mapsto n$ et $g : \mathcal{E} \to \mathbb{C}, z \mapsto n'$ sont des applications. Démontrer que

$$f(\mathcal{E}) \cup g(\mathcal{E}) = \{s \in \mathbb{C} \,|\, |s| = a + b\} \cup \{s \in \mathbb{C} \,|\, |s| = a - b\}$$

   On prêtera attention à démontrer l'inclusion réciproque.