Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le reste du chapitre 19 : Intégration. Les exercices porteront sur le chapitre 19 : Intégration.

Chapitre 19 : Intégration.

Intégrale de Riemann

Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, indépendance de la subdivision adaptée considérée. Linéarité, relation de Chasles, croissance dans le cas réel, inégalité triangulaire dans le cas complexe. Pour toute fonction $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, on définit

$$\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \wedge \varphi \leq f\right\}$$

Alors (★) $\displaystyle\int_a^b f = \inf\left\{\int_a^b \psi \mid \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \wedge \psi \geq f\right\}$. (★) $\displaystyle\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$. (★) Linéarité. (★) Croissance. (★) Relation de Chasles. Inégalité triangulaire. Notion de valeur moyenne. (★) Pour f continue, sa valeur moyenne appartient à $f([a,b])$. (★) Toute f continue positive d'intégrale nulle est la fonction nulle. Extension aux fonctions à valeurs complexes, linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique sur des segments pertinents.

Subdivision pointée. Somme de Riemann associée (★) Théorème des sommes de Riemann : soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{K})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$, pour toute subdivision pointée (σ,ξ) de pas au plus δ, $\displaystyle|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f| \leq \varepsilon$ (la démonstration dans le cas d'une fonction continue est suffisante). (★) Soit f L-Lipschitzienne, pour tout entier n non nul, $\displaystyle|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) - \int_a^b f| \leq L(b-a)^2/(2n)$.

Les grands théorèmes d'intégration

(★) Théorème fondamental du calcul intégral. Intégration par parties, changement de variables, calcul de primitives. (★) Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.

★ ★ ★ ★ ★