• *Les calculatrices ne sont pas autorisées.*
• *Je vous conseille de bien lire chaque énoncé entièrement avant de vous lancer, de souligner ou de surligner les points ou notations importants.*
• *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction des copies font l'objet d'une appréciation spécifique. En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle.*
• *Si vous repérez une erreur d'énoncé, vous l'indiquez sur votre copie et expliquez les raisons des initiatives que vous prenez.*

Exercice 1 - Vers le théorème de D'Alembert-Gauss

1. On considère n un entier naturel non nul et un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré n de la forme

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=0}^{n} b_i \mathrm{X}^i$$

avec $b_0 = 1$.

(a) Justifier que l'ensemble

$$\{i \in [\![1, n]\!] \mid b_i \neq 0\}$$

admet un minimum. On note ce minimum k dans tout ce qui suit.

(b) Construire un polynôme R dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{R}(0) = 0$ et

$$\mathrm{Q} = 1 + b_k \mathrm{X}^k (1 + \mathrm{R})$$

(c) On note θ un argument de b_k, puis $\omega = \exp(-i(\theta + \pi)/k)$, et f la fonction

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, t \mapsto \mathrm{Q}(t\omega)$$

Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = 1 - |b_k| t^k (1 + \mathrm{R}(t\omega))$$

(d) Démontrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que

$$\forall t \in [0, a],\ |\mathrm{R}(t\omega)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |b_k| t^k < 1$$

Indication : on pourra utiliser la continuité des fonctions polynomiales

(e) En déduire que

$$\forall t \in]0, a],\ |f(t)| \leq 1 - \frac{1}{2} |b_k| t^k < 1$$

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ unitaire non constant. On **admet** que la fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^+, z \mapsto |\mathrm{P}(z)|$ admet un minimum atteint en un complexe z_0. On suppose par l'absurde que $\mathrm{P}(z_0) \neq 0$.

(a) Démontrer que le polynôme $\mathrm{P}(z_0 + \mathrm{X})/\mathrm{P}(z_0)$ a la même forme que le polynôme Q précédemment considéré.

(b) En déduire une absurdité, puis le théorème de D'Alembert-Gauss.

Exercice 2 - Développements limités et asymptotiques.

1. Déterminer le développement limité en 0 de
   (a) $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3.
   (b) $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$ à l'ordre 5.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + \sin(x)$.
   (a) Montrer que f est une bijection de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Pourquoi f^{-1}, la réciproque de f, admet-elle un développement limité à tout ordre en 0 ?
   (c) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f^{-1}.
3. (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x \in \mathbb{R}^+, e^x = n - x$$
   Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n cet unique réel positif.
   (b) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Problème -Transcendance de e.

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $Q = \sum_{k\geq 0} P^{(k)}$ Établir que cette définition a bien un sens.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On note
   $$R(\alpha) = e^\alpha \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x) dx.$$
   Montrer que
   $$e^\alpha Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$$
   Indication : dériver la fonction $f : x \mapsto -e^{-\alpha x} Q(\alpha x)$.
3. Soit p un entier premier supérieur ou égal à 2. On note
   $$P = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}(X-1)^p(X-2)^p \dots (X-n)^p$$
   (a) Montrer que pour tout entier $r \geq p$, les coefficients de $P^{(r)}$ sont des entiers divisibles par p. *Indication : commencer par le cas $r = p$.*
   (b) Montrer que
   $$\forall j \in [\![1, n]\!], \forall r \in [\![0, p-1]\!], P^{(r)}(j) = 0$$
   (c) Montrer que
   $$\forall r \in [\![0, p-2]\!], P^{(r)}(0) = 0$$
   (d) Calculer $P^{(p-1)}(0)$.
4. On suppose l'existence de $A = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $A(e) = 0$ et $a_0 \neq 0$. On note alors $J = \sum_{j=0}^n a_j Q(j)$. Exprimer J en fonction des quantités a_j et $R(j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$.
5. (a) Montrer que p divise $\sum_{j=1}^n a_j Q(j)$.
   (b) Montrer que pour p assez grand, $a_0 P^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p. En déduire qu'alors, $|J| \geq 1$.
6. (a) Montrer que
   $$\forall j \in [\![1, n]\!], |R(j)| \leq n e^n \frac{(n!)^p}{(p-1)!}$$
   (b) Montrer qu'il existe un entier p_0 tel que pour tout entier premier $p \geq p_0$, on a
   $$\left|\sum_{j=1}^n a_j R(j)\right| < 1$$
7. En déduire que
   $$\forall A \in \mathbb{Z}[X], A(e) = 0 \Rightarrow A = 0$$
   On dit que e est transcendant.