Kholle 15 filière MP*
Planche 1

★★★

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les variables aléatoires réelles de variance finie.
2. Soit X une variable aléatoire de variance finie.
   (a) Montrer que $\inf_{x\in\mathbb{R}} E[(X-x)^2]$ est atteint en un unique point que l'on déterminera.
   (b) Soit λ un réel. On dit que λ est une médiane lorsque $P(X \geqslant \lambda) \geqslant 1/2$ et $P(X \leqslant \lambda) \leqslant 1/2$. Montrer que X admet une médiane.
   (c) Déterminer les médianes d'une variable de Bernoulli de paramètre p dans $[0,1]$.
3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier naturel non nul k, on définit la variable aléatoire $Y_k = \mathbb{1}_{X_k \neq X_{k+1}}$, et pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de S_n pour tout entier naturel non nul n.
   (b) Montrer que
   $$E\left[\left(\frac{S_n}{n} - 2p(1-p)\right)^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

★★★

Kholle 15 filière MP*
Planche 2

★★★

1. Énoncer et démontrer la loi faible des grands nombres.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi.
   (a) Montrer que $P(|X-Y| \leqslant 2) \leqslant 5P(|X-Y| \leqslant 1)$
   (b) On note C la plus petite constante telle que tout couple (X, Y) de variables indépendantes de même loi vérifie
   $$P(|X-Y| \leqslant 2) \leqslant CP(|X-Y| \leqslant 1)$$
   Montrer que $3 \leqslant C \leqslant 5$.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépedantes telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = \sqrt{n}) = P(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$$
   Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Montrer que
   $$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n^{3/2}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   (b) Montrer que, presque sûrement,
   $$\frac{S_{n^2}}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

★★★

Kholle 15 filière MP*
Planche 3

★★★

1. Définir la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. Que dire de l'espérance d'une telle variable aléatoire si sa fonction génératrice est dérivable en 1 ?

2. (a) Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ diverge. On note A l'événement « une infinité de A_n se réalise ». Montrer que $P(A) = 1$.

   (b) On effectue une infinité de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité de l'événement « on obtient une infinité de fois deux "face" consécutifs » ?

3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_n. On pose $Y_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(X_n \neq 1) \geqslant 1 - 1/e$. En déduire que $P(X_n \neq 1$ pour une infinité de n $) = 1$.

   (b) On pose $p = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - e^{-\lambda_n})$. Montrer que, presque sûrement, Y_n tend vers 0 avec probabilité $1 - p$ et $+\infty$ avec probabilité p.

   (c) Déterminer cette probabilité lorsque $\lambda_n = o(\ln(n))$.

★★★

Kholle 15 filière MP*
Planche 4

★★★

1. Déterminer la variance d'une variable aléatoire géométrique, puis d'une variable aléatoire de Poisson.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépédantes de même loi à valeur dans $\mathbb{N}$, puis T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des précédentes. On définit pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, la variable

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \text{puis} \quad \forall \omega \in \Omega, S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$$

   (a) Avec les notations G des fonctions génératrices, montrer que $G_S = G_T \circ G_{X_1}$.
   (b) On suppose que X_1 et T admettent des espérances finies m et t. Montrer qu'alors $E[S] = mt$.
3. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{R}$ lorsque $X(\Omega) = \{-1, 1\}, P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2$. Soit n un entier naturel non nul. On considère une famille $(m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$de n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$, puis M_n la matrice carrée aléatoire formée de ces n^2 coefficients.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\tau_n = \mathrm{tr}(M_n)$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\delta_n = \det(M_n)$.

★★★