Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque (★) sur le chapitre 11 : convexité. Les exercices porteront sur le chapitre 11 : convexité.

Chapitre 11 : Convexité

Parties convexes, barycentres

On se limite à l'espace $\mathbb{R}^2$ pour les notions de géométrie. On confond sa structure affine et vectorielle en le pointant en $(0,0)$. Notion de barycentre d'un système fini de points massiques (ou pondérés) dans $\mathbb{R}^2$. Homogénéité du barycentre. Segment d'extrémités A et B dans $\mathbb{R}^2$, $[A,B] = \{tA+(1-t)B | t \in [0,1]\}$. Partie convexe. Combinaison linéaire convexe (★) Caractérisation des convexes par les barycentres : toute partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est convexe ssi stable par combinaison linéaire convexe ssi stable par barycentrage à masses positives.

Fonctions convexes

I désigne un intervalle réel non réduit à un point. Notion de fonction convexe f de I dans $\mathbb{R}$. (★) Une fonction est convexe ssi son épigraphe est convexe. Inégalité de Jensen discrète. (★) Position des cordes d'une fonction convexe : f est convexe ssi sa courbe est en dessous de chacune de ses cordes. (★) Croissance des taux d'accroissement : f est convexe ssi $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \tau_{x_0} : I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ est croissante. Inégalités des pentes. (★) Caractérisation dans le cas dérivable : f dérivable est convexe ssi f' est croissante. Position des tangentes. f deux-fois dérivable est convexe ssi $f'' \geq 0$. Exemples fondamentaux : exponentielle, logarithme, sinus sur $[0,\pi/2]$, racine carrée, fonctions puissances.

Compléments

Cette section est à réserver à des étudiants chevronnés ou pour des extensions d'exercices. Si f est convexe, alors, f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I et pour tous $a < b$,

$$f_g'(a) \leq f_d'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_g'(b) \leq f_d'(b)$$

f_d' et f_g' sont croissantes, et f est continue sur l'intérieur de I. f est dérivable sauf sur une partie au plus dénombrable.

★ ★ ★ ★ ★