**IPESUP 2022/2023**

Kholle 5 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

⋆⋆⋆

1. Donner la définition d'un générateur d'un groupe. Décrire les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.
2. Soit $n$ un entier naturel.
   (a) Montrer que 5 divise $2^{3n+5}+3^{n+1}$
   (b) Montrer que 30 divise $n^5-n$.
3. Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Montrer que $PGCD(X^a-1,X^b-1)=X^{PGCD(a,b)}-1$.

⋆⋆⋆

Kholle 5 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition d'un élément inversible d'un anneau. A quelle condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel $n$ l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un corps ?
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à $-1$ modulo 6.
3. Soit $G$ un groupe de neutre $e$, noté multiplicativement. On suppose que $\forall x \in G, x^2 = e$
   (a) Montrer que $G$ est commutatif.
   (b) On suppose que $G$ est fini et non réduit à $\{e\}$. Montrer qu'il existe un entier $n$ tel que $G$ est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

★★★

Kholle 5 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Donner la définition de l'indicatrice d'Euler $\varphi$. Décrire les idéaux de $K[X]$ avec $K$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.
2. Soit $A$ un anneau commutatif et $I$ un idéal de $A$. On note

$$\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$$

   (a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de $A$.
   (b) On se place dans l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$. Décrire $\sqrt{n\mathbb{Z}}$.
3. Soit $G$ un groupe. On note $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, xy = yx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe commutatif de $G$. En déduire que tout groupe fini d'ordre $p^2$ avec $p$ un entier premier est commutatif.

★★★

Kholle 5 filière MP*
Jean-Louis CORNOU

★★★

1. Décrire l'ensemble des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
2. On appelle anneau euclidien un anneau $A$ muni d'une application $\varphi : A^* \to \mathbb{N}$ appelée stathme qui vérifie les choses suivantes :

$$\forall (a,b) \in A \times A^*, \exists (q,r) \in A^2, a = bq + r \wedge (r = 0 \vee \varphi(r) < \varphi(b))$$

$$\forall (x,y) \in (A^*)^2, \varphi(xy) \geqslant \varphi(y)$$

   Montrer que pour tout idéal $I$ d'un anneau euclidien $A$, $\exists a \in A, I = aA$.
3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

★★★