Ipesup 2022/2023

Kholle 10 filière MPSI/MP2I
Planche 1

★★★

1. Énoncer et démontrer une condition nécessaire sur les extrema locaux d'une fonction dérivable.
2. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

   Montrer que f est continue en 0, et non continue en tout réel non nul.
3. Soit g une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = g(1)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$$

   En déduire que sur un trajet de 100km en une heure, il existe un intervalle de temps d'une demi-heure durant lequel on a parcouru 50km.

★★★

Kholle 10 filière MPSI/MP2I
Planche 2

⋆⋆⋆

1. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle sur un segment.
2. Soit n un entier naturel non nul. On note f_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie via : pour tout réel x dans $[0,1[$, $f_n(x)$ est la n-ième décimale de x, et $f_n(1) = 9$. Étudier la continuité de f_n.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Montrer que g n'est pas continue, mais qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

⋆⋆⋆

Kholle 10 filière MPSI/MP2I
Planche 3

★★★

1. Énoncer et démontrer la formule de Leibniz.
2. On note $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} x = 0 \\ 1/\lfloor 1/x \rfloor & \text{si} x \neq 0 \end{cases}$.

   Étudier la continuité de f.
3. On admet que $\cos(2) < 0$. Uniquement en utilisant la continuité du cosinus, démontrer que l'ensemble
$$E = \{t \in \ [0,2] \quad | \quad \cos(t) = 0\}$$
   admet une borne inférieure α et que celle-ci appartient à $]0,2[\cap E$.

★★★

Ipesup 2022/2023

Kholle 10 filière MPSI/MP2I
Bonus

⋆⋆⋆

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(1) = 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

2. Soit l un réel, on dit qu'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers l si la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
   On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conserve la convergence au sens Cesàro lorsque pour tout réel l, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente au sens de Cesàro vers l, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $f(l)$.
   Démontrer que seules les fonctions affines conservent la convergence au sens de Cesàro.

⋆⋆⋆