IPESUP 2022/2023

Kholle 6 filière MPSI
Planche 1

★★★

1. **Énoncer** et démontrer la caractérisation séquentielle de la densité.
2. On note $X = \left\{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \mid (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de X.
3. On se donne une partie G de $\mathbb{R}$ qui contient 0 mais n'est pas réduite à 0. On suppose de plus que, $\forall (x,y) \in G^2, x - y \in G$ et que $\inf(G \cap \mathbb{R}^{+*}) = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

★★★

IPESUP 2022/2023

Kholle 6 filière MPSI
Planche 2

★★★

1. **Énoncer** et démontrer la première caractérisation de la borne supérieure d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.
2. Soit n un entier naturel. On note $E_n = \left\{k + \frac{n}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $\inf(E_n) \geqslant 2\sqrt{n}$. A-t-on $\min(E_n) = 2\sqrt{n}$?
3. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide bornée de réels. Montrer que

$$\inf_{i\in I}(\sup_{j\in J} a_{i,j}) \geqslant \sup_{j\in J}(\inf_{i\in I} a_{i,j})$$

   A-t-on égalité en toute généralité ?

★★★

Kholle 6 filière MPSI
Planche 3

⋆⋆⋆

1. Prouver que toute partie non vide minorée X de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et montrer que $\inf(X) = -\sup(-X)$.
2. On se donne une partie A non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et on note $B = \left\{|x-y| \mid (x,y) \in A^2\right\}$. Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.
3. On se donne deux parties X et Y denses dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus qu'elles vérifient toutes deux la propriété suivante :

$$\forall x \in X(\text{ resp. } Y), \exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset X(\text{ resp. } Y).$$

   Montrer que $X \cap Y$ est dense dans $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆

Kholle 6 filière MPSI
Bonus

★★★

Exercices supplémentaires et plus corsés pour les gourmands :

1. Soit u une suite réelle bornée. Pour tout entier p, on note $A_p = \sup\limits_{n\geqslant p} u_n$ et $B_p = \inf\limits_{n\geqslant p} u_n$. Montrer que les suites A et B sont convergentes et que $\lim A \leqslant \lim B$. Calculer ces limites pour la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n+2}{n+1}\cos(n\pi/3)$.
2. Pour toutes parties A et B non vides bornées de $\mathbb{R}$, on note $\lambda(A,B) = \sup\limits_{x\in A} d(x,B)$ et $\Delta(A,B) = \max\{\lambda(A,B), \lambda(B,A)\}$. Montrer que pour toutes parties non vides bornées A, B, C telles que λ est un maximum, $\Delta(A,C) \leqslant \Delta(A,B) + \Delta(B,C)$.

★★★