Chaque colle comporte une question de cours ainsi qu'un ou plusieurs exercices. Les questions de cours portent sur les éléments précédés d'un astérisque ($\star$). On prendre attention à bien faire manipuler des inégalités. Les limites de suites n'ont pas encore été introduites en toute rigueur.

Chapitre 7 : Topologie réelle.

— Ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Droite réelle achevée $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$. Approximations décimales à l'ordre n par excès (resp. par défaut) d'un réel x donné. ($\star$) Encadrement et convergence. Intervalle ouvert. Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. ($\star$) Caractérisation séquentielle de la densité. ($\star$) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Application aux fonctions additives. Tout intervalle ouvert non vide contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

— Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. ($\star$) Caractérisation pour X non vide majorée et a réel : $a = \sup(X) \iff (\forall x \in X, x \leq a) \wedge (\forall y < a, \exists x \in X, y < x)$. Convention $\sup\emptyset = -\infty$ et $\sup(X) = +\infty$ si X non vide et non majorée. Si X admet un maximum, $\sup(X) = \max(X)$. Croissance de la borne supérieure par rapport à l'inclusion sur les parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. ($\star$) Caractérisation séquentielle de la borne supérieure pour X non vide majorée et a réel : $a = \sup(X) \iff (\forall x \in X, x \leq a) \wedge (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \longrightarrow a)$. Les étudiants peuvent « passer au sup » dans les inégalités $\forall x \in X, x \leq a \Rightarrow \sup(X) \leq a$ mais doivent savoir l'expliquer à l'oral. Exemple $\sup(A+B), \sup(\lambda A)$ pour $\lambda \geq 0$.

— Borne inférieure d'une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. ($\star$) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et $\inf(A) = -\sup(-A)$. Traductions de toutes les propriétés précédentes. $\inf(\emptyset) = +\infty$, $\inf(X) = -\infty$ pour X non vide et non minorée. Caractérisations, cas de la borne inf atteinte, décroissance pour l'inclusion. Exemple $d(y, X) = \inf\{|y-x| | x \in X\}$. Même remarque pour les « passages à l'inf ».

— On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ ont été définis par une liste de dix cas. Partie convexe de $\mathbb{R}$. Tout intervalle est convexe ($\star$) Toute partie convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Démonstration de la bonne définition de la partie entière d'un réel x. Croissance de la partie entière. $\mathbb{R}$ est archimédien.

— Bornes supérieure et inférieure d'une application à valeurs réelles.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star$