Exercice : Une étude de suite implicite.

1. (a) On désigne par f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

Commençons par le cas $n = 1$. pour tout réel x positif, $f_1(x) = x - 1$ et admet 1 pour seul zéro. Cette solution appartient à $[0,1]$. Dans le cas $n \geq 2$, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - 1 > 0$. De plus, pour tout réel x strictement positif,

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 1 > 0$$

La fonction f_n est alors continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle prend une valeur strictement négative en 0 et une valeur strictement positive en 1, donc elle s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}^+$ et cette annulation a lieu dans l'intervalle $]0,1[$.

(b) Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle est négative sur $[0, u_n]$ et positive sur $[u_n, 1]$. On détermine la position de u_{n+1} par rapport à u_n en déterminant le signe de $f_n(u_{n+1})$. Par défiinition, u_{n+1} vérifie :

$$u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1}^n + \cdots + u_{n+1} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1}^{n+1} + f_n(u_{n+1}) = 0.$$

Il en résulte que $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}^{n+1}$ est strictement négatif puisque u_{n+1} est strictement positif. Par conséquent, u_{n+1} appartient à $[0, u_n[$, donc la suite est strictement décroissante.

(c) Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$, ce qui vérifie la relation attendue. Pour $n \geq 2$, on peut exploiter l'expression de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison u_n différente de 1. Ainsi,

$$(u_n)^n + (u_n)^{n-1} + \cdots + u_n + 1 = \frac{u_n^{n+1} - 1}{u_n - 1}$$

Le membre de gauche est égal à 2 d'après la relation définissant u_n, donc $u_n^{n+1} - 1 = 2(u_n - 1)$ ce qui équivaut à

$$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$$

(d) u_2 vérifie $u_2^2 + u_2 - 1 = 0$. Cette équation polynomiale du second degré a pour discriminant 5, et pour solutions $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$. Comme u_2 est positif, on obtient $u_2 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$.

(e) Comme la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle est convergente. De plus, pour tout entier $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq u_2 < 1$ car $\sqrt{5} < 3$. Par croissance de la puissance $n+1$-ième sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $0 \leq u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $0 \leq u_2 < 1$, u_2^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit par théorème d'encadrement que u_n^{n+1} tend vers 0. Par passage à la limite dans l'égalité démontrée en (1.c), on en déduit que la limite l de la suite vérifie $-2l + 1 = 0$, soit $l = 1/2$. En conclusion, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 1/2.

(f) D'après l'égalité démontrée (1.c) on a pour tout entier $n \geq 2$,

$$0 \leq \delta_n = n\frac{1}{2}u_n^{n+1} \leq \frac{n}{2}u_2^{n+1}$$

avec $u_2 < 1$. Par croissances comparées, le majorant de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème d'encadrement $(\delta_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

2. (a) La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout réel x strictement positif,

$$\psi'(x) = \ln(x+1) + 1 - \ln(x) - 1 - \ln(2) = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right).$$

L'étude du signe de ψ' se mène via, pour tout réel x strictement positif

$$\psi'(x) \geq 0 \iff \frac{x+1}{2x} \geq 1 \iff x+1 > 2x \iff 1 \geq x$$

Ainsi ψ est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. En outre, par croissances comparées, $x\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, donc $\psi(x)$ tend vers $-\ln(2)$ en 0. De plus, pour x tendant vers $+\infty$, $x\ln(1+1/x)$ tend vers 1 puisque $\ln(1+y)/y$ tend vers 1 quand y tend vers 0. Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $\psi(x) - x\ln(1+1/x) = \ln(x+1) - (x+1)\ln(2)$. Par croissances comparées, $\ln(x+1) - (x+1)\ln(2)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ puisque $\ln(2) < 0$. On en déduit que $\psi(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Enfin, $\psi(1) = 0$ est le maximum de ψ sur $\mathbb{R}^+$, ce qui prouve que $\psi \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Ainsi, pour tout entier n non nul, on a $\psi(n) \leq 0$, ce qui implique

$$-(n+1)\ln(2) \leq n\ln(n) - (n+1)\ln(n+1)$$

soit encore

$$\ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \ln\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right).$$

Comme l'exponentielle est croissante, on en déduit que

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}},$$

ce qui est l'inégalité attendue.

(c) D'après les sommes de séries géométriques, pour tout réel x strictement positif, $g_n(x) = (x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k - 2(x-1) = -1 + x^{n+1} - 2(x-1) = x^{n+1} - 2x + 1$. Mais alors pour tout entier naturel non nul n,

$$g_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = 1 - 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^{n+1} - \frac{1}{n}$$

Or l'inégalité précédemment prouvée implique, puisque $((n+1)/n)^{n+1}$ est positif

$$\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi, $g_n(1/2 + 1/(2n))$ est bien négatif ou nul.

(d) Soit n un entier naturel non nul. Les fonctions g_n et f_n ont des signes contraires sur $[0,1]$ d'après la définition de g_n. D'après ce qui précède, on a alors $f_n(1/2 + 1/(2n)) \geq 0$. D'après les variations de f_n, on en déduit que $1/2 + 1/(2n)$ appartient à $[u_n, 1]$, donc que

$$u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Problème : Vers un théorème de Polya.

1. (a) Soit x un réel. Pour $n=1$, on a $H_1(x+1)-H_1(x)=x+1-x=1=H_0(x)$. Pour $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}
H_n(x+1)-H_n(x) &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x+1-k)-\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)\right)\\
&= \frac{1}{n!}(x+1-(x-n+1))\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)=H_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

(b) Pour $n=0$, on a $H_0(j)=1$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$H_n(j)=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(j-k)=\begin{cases} 0=\dbinom{j}{n} \text{ pour } 0\leq j\leq n-1\\ \dfrac{j!}{n!(j-n)!}=\dbinom{j}{n} \text{ pour } j\geq n\end{cases}$$

et pour $j=-p\in\mathbb{Z}^{-,*}$:

$$H_n(j)=\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(p+k)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!}=(-1)^n\binom{p+n-1}{n}$$

(c) Soit n un entier naturel, soit j un entier relatif. D'après ce qui précède, $H_n(j)$ est un entier relatif car les coefficients binomiaux sont entiers. On a donc $H_n(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(d) Pour tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$P(j)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kH_k(j)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{j}{k}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}=(1-1)^j=0$$

d'après la formule du binôme.

(e) D'après ce qui précède, la fonction polynômiale $x\mapsto xP(x)$ a pour racines tous les entiers entre 0 et n. Donc il existe une fonction polynomiale Q telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}, xP(x)=Q(x)\prod_{j=0}^{n}(x-j)$$

Mais alors, pour des raisons de degré, la fonction polynomiale $x\mapsto xP(x)$ est de degré $n+1$, tout comme le produit $x\mapsto\prod_{j=0}^{n}(x-j)$. Donc, il ne reste qu'à étudier leurs coefficients dominants (ceux du terme x^{n+1}). Le premier vaut $(-1)^n/n!$ et le second 1, donc

$$\forall x\in\mathbb{R}, xP(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n}(x-j)=\frac{(-1)^n}{n!}(n+1)!H_{n+1}(x)=(-1)^n(n+1)H_{n+1}(x)$$

2. La formule du binôme donne

$$\begin{aligned}
(1-1)^{j-i} &= \sum_{k=0}^{j-i}\binom{j-i}{k}(-1)^k\\
&= \sum_{l=i}^{j}\binom{j-i}{l-i}(-1)^{l-i}
\end{aligned}$$

après changement de variable $l = k + i$. Or pour tout l dans $[\![i, j]\!]$,

$$\binom{l}{i}\binom{j}{l} = \frac{l!}{i!(l-i)!}\frac{j!}{l!(j-l)!} = \frac{j!}{i!(j-i)!}\frac{(j-i)!}{(l-i)!(j-l)!} = \binom{j}{i}\binom{j-i}{l-i}$$

Ainsi,

$$(1-1)^{j-i} = \frac{1}{\binom{j}{i}}\sum_{l=i}^{j}(-1)^{l-i}\binom{l}{i}\binom{j}{l}$$

Pour $j = i$, $(1-1)^{j-i} = 0^0 = 1$ et $\binom{j}{i} = 1$. Pour $j > i$, $(1-1)^{j-i} = 0$. Ainsi,

$$\sum_{k=i}^{j}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\binom{j}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

Il y avait une erreur dans l'énoncé.

3. (a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Alors d'après 1.b), pour tout k dans $[\![0, j]\!]$, $Q(k) = \sum_{l=0}^{n}\alpha_l H_l(k) = \sum_{l=0}^{n}\alpha_l\binom{k}{l}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}Q(k) &= \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\sum_{l=0}^{n}\alpha_l\binom{k}{l}\\ &= \sum_{l=0}^{n}\alpha_l\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\\ &= \sum_{l=0}^{n}\alpha_l\sum_{k=l}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\end{aligned}$$

Or la somme $\sum_{k=l}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{k}{l}$ est nulle sauf pour $l = j$ d'après la question 2. Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}Q(k) = \alpha_j$$

(b) On reprend les mêmes calculs que précédemment. Soit $j \geq n+1$ alors la somme qui s'annulait précédemment sauf en $l = j$ sera toujours nulle, car $l \leq n$ et $j \geq n+1$. Par conséquent, la somme entière sera nulle., i.e

$$\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}Q(k) = 0.$$

4. Si (a) est vraie, alors en particulier Q prend des valeurs entières sur tous les entiers de $[\![0, n]\!]$, donc il existe bien $n+1$ entiers relatifs consécutifs en lesquels Q prend des valeurs entières. Ainsi, $(a) \Rightarrow (b)$. Montrons l'implication $(b) \Rightarrow (c)$ par récurrence sur n. Pour $n = 0$, si (b) est vérifié, il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \alpha_0 = P(a) \in \mathbb{Z}$, soit $P = \alpha_0 H_0$ avec $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$. Pour $n = 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ et si (b) est vérifié, il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a \in \mathbb{Z}$ et $P(a+1) = \alpha_0 + \alpha_1(a+1) \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha_1 = P(a+1) - P(a) \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_0 = P(a) - \alpha_1 a \in \mathbb{Z}$, soit $P = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1$ avec $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons l'implication vérifiée jusqu'au rang $n-1 \geq 1$ et soit P de

degré n pour lequel il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a+k) \in \mathbb{Z}$ pour tout k compris entre 0 et n. En utilisant l'écriture $P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j H_j$ et la fonction polynomiale Q définie par :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x+1) - P(x) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(H_j(x+1) - H_j(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_{j-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} H_j(x)\end{aligned}$$

est de degré $n-1$ et telle que $Q(a+k) = P(a+k+1) - P(a+k) \in \mathbb{Z}$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$, ce qui implique que les α_{j+1} pour $0 \le j \le n-1$ sont entiers et $\alpha_0 = P(a) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_j(a)$ est aussi entier.

Si (c) est vraie, alors pour tout entier relatif j, $Q(j) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k(j)$. D'après 1.c), pour tout entier k, $H_k(j) \in \mathbb{Z}$. Comme pour tout entier k, α_k est dans $\mathbb{Z}$, on en déduit que $Q(j)$ appartient à $\mathbb{Z}$ comme somme de produits d'entiers relatifs. Ainsi, $(c) \Rightarrow (a)$. Cette chaîne d'implications assure l'équivalence entre les trois assertions.

5. Comme H_0 est constant, on a $\Delta(H_0) = 0$. Pour $k \ge 1$, on a $\Delta(H_k) = H_{k-1}$ (question 1.a). Par récurrence, on vérifie que $\Delta^j(H_k) = H_{k-j}$ pour $0 \le j \le k$ et en conséquence, on a $\Delta^j(H_k) = 0$ pour $j \ge k+1$.

6. D'après la linéarité admise des itérées de Δ, pour tout entier $j \le n$,

$$\Delta^j(Q) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta^j(H_k)$$

D'après ce qui précède, on a alors

$$\Delta^j(Q) = \sum_{k=j}^{n} \alpha_k H_{k-j}$$

On évalue ces fonctions en 0. Or pour tout entier naturel n non nul, $H_n(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$, donc

$$\Delta^j(Q)(0) = \alpha_j \times 1$$

On en déduit que

$$Q = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k(Q))(0) H_k$$

7. Soit x un réel,

$$\begin{aligned}H_1(x) + 6H_2(x) + 6H_3(x) &= x + \frac{6}{2!} x(x-1) + \frac{6}{3!} x(x-1)(x-2) \\ &= x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) \\ &= x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x^3 \\ &= R(x)\end{aligned}$$

On propose alors $S = H_2 + 6H_3 + 6H_4$. Cette fonction polynomiale vérifie par linéarité de Δ,

$$\Delta(S) = \Delta(H_2) + 6\Delta(H_3) + 6\Delta(H_4) = H_1 + 6H_2 + 6H_3 = R$$

d'après ce qui précède et la question 5. Mais alors, soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} R(k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \Delta(S)(k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (S(k+1) - S(k))\\ &= S(n+1) - S(0)\end{aligned}$$

par télescopage. On évalue alors

$$\begin{aligned}S(n+1) &= H_2(n+1) + 6H_3(n+1) + 6H_4(n+1)\\ &= \frac{1}{2!}(n+1)(n+1-1) + \frac{6}{3!}(n+1)(n+1-1)(n+1-2) + \frac{6}{4!}(n+1)(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)n + (n+1)n(n-1) + \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}[2 + 4(n-1) + (n-1)(n-2)]\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left[n^2 + n\right]\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Comme $S(0) = 0$, on retrouve la formule classique

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

8. Supposons qu'il existe P de degré n tel que $u_j = P(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a vu en question 3) que :

$$\forall j \geq n+1,\ \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} u_k = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} P(k) = 0$$

Réciproquement supposons cette condition vérifiée. Cherchant la fonction polynomiale P de degré n sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k$, le résultat de la question 3) nous incite à définir la suite $\left(\alpha_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ par $\forall j \leq n, \alpha_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} u_k$ et pour $j \geq n+1,, \alpha_j = 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(j) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k(j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k H_k(j) = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k \binom{j}{k}$$

(on a $H_k(j) = \binom{j}{k}$ pour $0 \leq k \leq j$ et $H_k(j) = 0$ pour $k \geq j+1$), soit :

$$\begin{aligned} P(j) &= \sum_{k=0}^{j} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} u_i \right) \binom{j}{k} = \sum_{0 \leq i \leq k \leq j} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} u_i \binom{j}{k} \\ &= \sum_{i=0}^{j} \left(\sum_{k=i}^{j} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{j}{k} \right) u_i \end{aligned}$$

avec $\displaystyle\sum_{k=i}^{j} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0$ si i différent de j et 1 sinon. (question 2), ce qui nous donne $P(j) = u_j$.

★ ★ ★ ★ ★