IPESUP 2022/2023

Kholle 27 filière MPSI/MP2I
Jeudi 08 juin 2023

★★★

Planche 1

★★★

1. Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega})$ une distribution de probabilités sur l'univers Ω. Peut-on construire une probabilité à l'aide de cette famille ? Le démontrer.
2. Dans $N+1$ urnes, numérotées de 0 à N, on dépose des boules blanches et des boules noires de sorte que l'urne numéro k contient k boules noires et $N-k$ boules blanches. On sélectionne une urne au hasard, sans regarder son numéro. On en tire $n+1$ fois de suite une boule, que l'on remet dans l'urne après chaque tirage.
   (a) Quelle est la probabilité que le $n+1$-ième tirage donne une boule noire sachant que tous les tirages précédents n'ont donné que des boules noires.
   (b) Trouver la limite de cette probabilité quand le nombre d'urnes devient très grand.
3. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{R}$ lorsque $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2$. Soit n un entier naturel non nul. On considère une famille $(m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$de n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$, puis M_n la matrice carrée aléatoire formée de ces n^2 coefficients.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\tau_n = \mathrm{tr}(M_n)$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\delta_n = \det(M_n)$.

★★★

Planche 2

★★★

1. Quelle est la loi de la somme de n variables indépendantes toutes de Bernoulli de paramètre p fixé ?
2. Un fumeur tente d'arrêter de fumer. S'il ne fume pas le jour J_n, il a une probabilité $p = 3/10$ de ne toujours pas fumer le jour J_{n+1}. S'il craque et fume le jour J_n, il a une probabilité $p' = 19/20$ de ne pas fumer le jour J_{n+1}.
   Pour n très grand, quelle est la probabilité qu'il fume le jour J_n ?
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de fonctions de répartitions respectives F_X et F_Y . On pose $Z = \max(X, Y)$.
   (a) Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $F_Z = F_X F_Y$.
   (b) Sous la même hypothèse, en déduire la fonction de répartition de $\min(X, Y)$

⋆⋆⋆

Planche 3

⋆⋆⋆

1. Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes.
2. Dans la savane, les lionnes chassent des gazelles et des zèbres pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la population de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes ramènent une gazelle est de 2/3, celle pour qu'elles rapportent un zèbre est de 1/3. Les repas du lion ne sont composés que d'une gazelle ou que d'un zèbre, à chaque repas. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents.
   (a) Quelle est la probabilité pour que, lors des deux premiers repas observés, le lion ait mangé deux gazelles (et donc pas de zèbre) ?
   (b) Quelle est la probabilité pour que, lors des trois premiers repas, il ait mangé dans cet ordre un zèbre puis deux gazelles ?
   (c) On observe le lion sur une assez grande période. Pour $n \geqslant 2$, on note E_n l'événement « le lion a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $n-1$-ième et n-ième repas », et on note $u_n = P(E_n)$. Pour $n \geqslant 1$, on appelle G_n l'événement « le lion a mangé une gazelle au n-ième repas », et Z_n l'événement « le lion a mangé un zèbre au n-ième repas ».
      i. Exprimer E_3 et E_4 à l'aide des événements G_i et Z_i et calculer leurs probabilités.
      ii. Montrer Z_1 et E_4 sont indépendants.
      iii. Soit $n \geqslant 4$. Expliquer pourquoi $P_{Z_1}(E_n) = u_{n-1}$. Exprimer de même $P_{G_1 \cap Z_2}(E_n)$ et $P_{G_1 \cap G_2}(E_n)$.
      iv. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n = \dfrac{1}{3} u_{n-1} + \dfrac{2}{9} u_{n-2}$.
      v. Donner, pour tout $n \geqslant 4$, l'expression explicite de u_n en fonction de n.
      vi. En déduire la probabilité qu'a le lion de manger deux fois de suite une gazelle.

⋆⋆⋆

Bonus

⋆⋆⋆

`https://agreg.org/data/uploads/textes/public2015-A8.pdf`