

# Implémentation du GARCH sur une action donnée et quantification par rapport à certaines métriques

## LSM Investment Club - Team Quant

Jonathan Kojovi - Adrien Portier

12 novembre 2024

### Résumé

Ce rapport présente les résultats d'une analyse financière quantitative utilisant des modèles GARCH pour le calcul de la Value at Risk (VaR) et de l'Expected Shortfall (ES). Nous discutons des méthodologies, des résultats obtenus, et des implications de ces mesures de risque.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du stock</b>	<b>2</b>
1.1	Évolution du cours . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Value at Risk et Expected Shortfall</b>	<b>3</b>
2.1	Définitions mathématiques des mesures de risque . . . . .	3
2.2	Implémentation et analyse des résultats . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Modèle GARCH</b>	<b>5</b>
3.1	Hypothèses du modèle GARCH . . . . .	5
3.2	Approche mathématique . . . . .	5
3.3	Autocorrélation et autocorrélation partielle . . . . .	5
3.4	Différentes métriques d'ajustement . . . . .	7
3.4.1	Précision directionnelle en fonction du pourcentage de données . . .	7
3.4.2	Vraisemblance en fonction du pourcentage de données . . . . .	7
3.5	Prédiction . . . . .	9
3.5.1	Prédiction à 95% pour différentes distributions . . . . .	9
3.5.2	Prédiction en fonction du pourcentage de données . . . . .	9
3.5.3	MSE en fonction du pourcentage de données d'entraînement . . . .	10
3.5.4	MSE en fonction de l'horizon temporel . . . . .	10
3.6	Analyse et critique des résultats . . . . .	11
3.6.1	Pourcentage d'erreur de prévision . . . . .	11
3.6.2	QQ-Plot . . . . .	12
<b>4</b>	<b>E-GARCH</b>	<b>13</b>
4.1	Approche mathématique . . . . .	13
4.2	Prédiction . . . . .	13
4.3	Analyse et critique des résultats . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>14</b>

# 1 Présentation du stock

Pour le choix de l'action étudiée, nous avons choisi TotalEnergies, en effet, c'est une action qui n'a pas des volatilités inattendues ou exceptionnelles, et donc semble être adaptée à notre modélisation, si nous voulions étudier des actions plus complexes, ou qui sont sujettes à des tendances, actualités, nous aurions besoin de plus d'informations que le cours de l'action sur une période donnée. TotalEnergies est souvent prisée par des personnes souhaitant des dividendes sur le long terme, notamment des personnes retraitées, donc à moins qu'il y ait un gros choc dans le monde lié à l'énergie, au pétrole, il semble peu probable que les investisseurs se rétractent subitement.

## 1.1 Évolution du cours

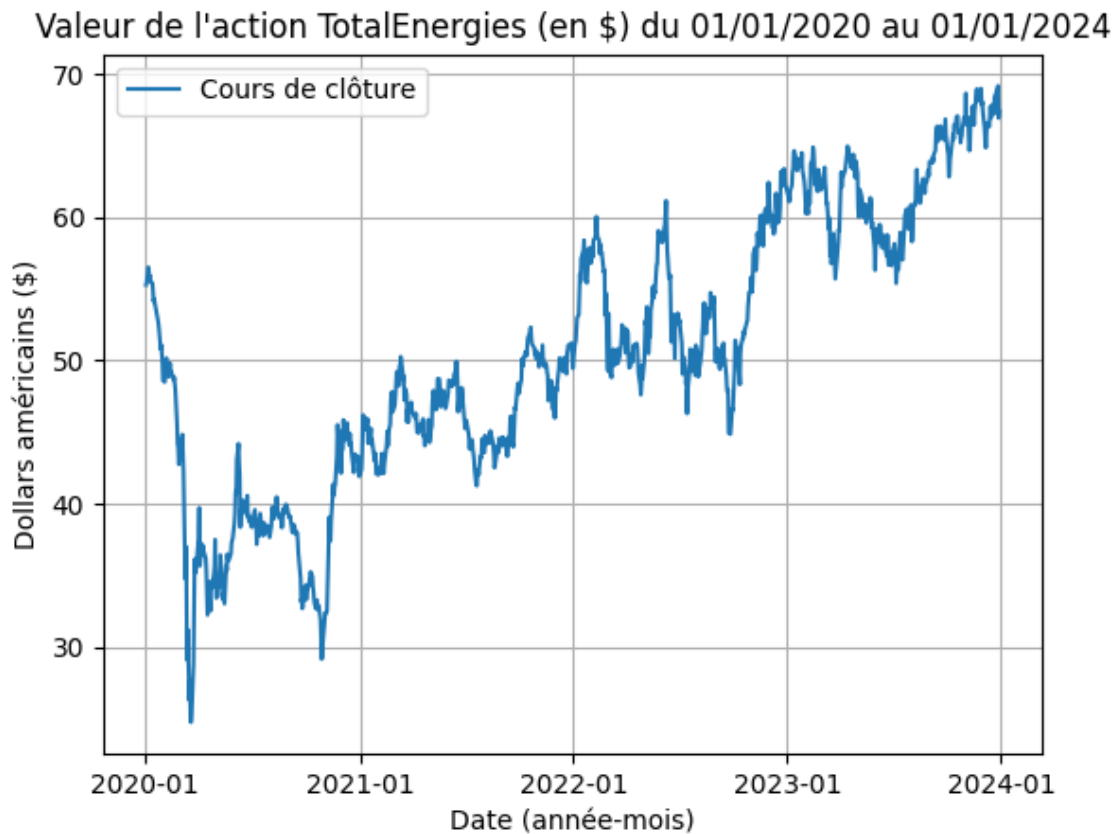


FIGURE 1 – Évolution du cours de clôture de l'action analysée

Nous avons choisi d'utiliser les données remontant à 4 ans. Il n'y a pas de consensus sur la durée nécessaire pour l'analyse, mais il faut être conscient que celle-ci va influencer nos résultats, notamment si nous captions des événements mondiaux dans nos données comme la crise sanitaire liée au COVID et la guerre en Ukraine qui sont inhabituels.

## 2 Value at Risk et Expected Shortfall

### 2.1 Définitions mathématiques des mesures de risque

La Value at Risk (**VaR**) est la perte minimale associée à un niveau de risque  $\alpha \in ]0, 1[$  d'une distribution de perte/gain  $X$ . Plus formellement, nous définissons la VaR par

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha\}.$$

notons que nous avons bien un signe négatif, donc la *VaR* est en général une valeur positive, car le signe est absorbé dans la définition par la perte associée. En général  $\alpha$  est de 5% ou 1%. La limitation de la *VaR* réside dans le fait qu'elle ne décrit pas les formes des queues des distributions de perte dans les pires cas, donc ne décrit pas la distribution des pertes dans les  $\alpha\%$  pires cas, c'est pour cela qu'on introduit le prochain concept.

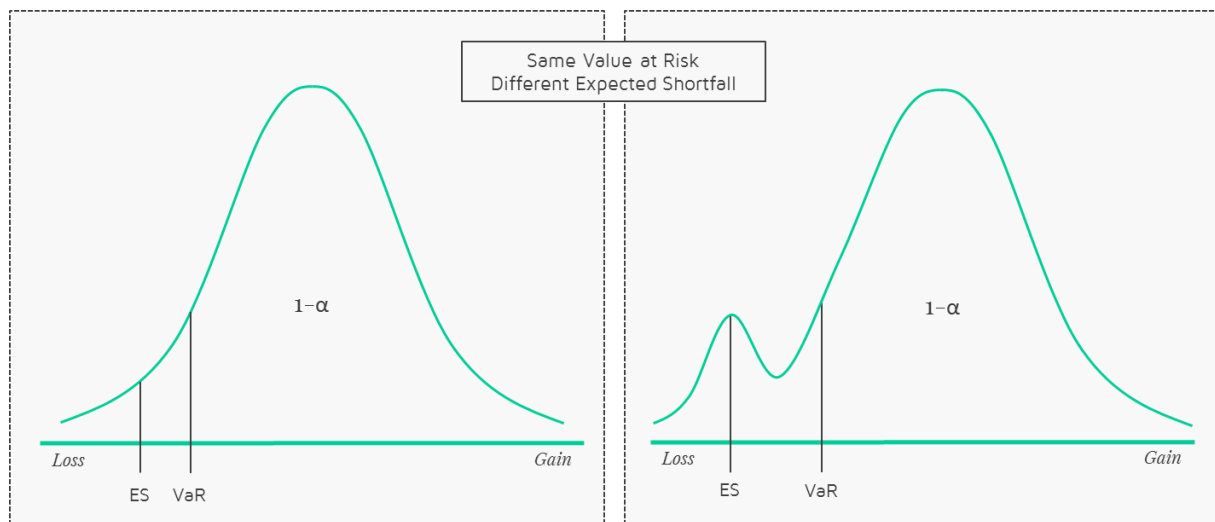


FIGURE 2 – Exemple de deux distributions avec des VaR égales mais des ES différentes.

L'Expected Shortfall (**ES**) est la *VaR* moyenne attendue sur les  $\alpha\%$  pires cas ou autrement dit

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\gamma(X) d\gamma.$$

ce qui nous permet de mieux cerner les différences entre plusieurs distributions, combiner les deux métriques est souvent utile.

## 2.2 Implémentation et analyse des résultats

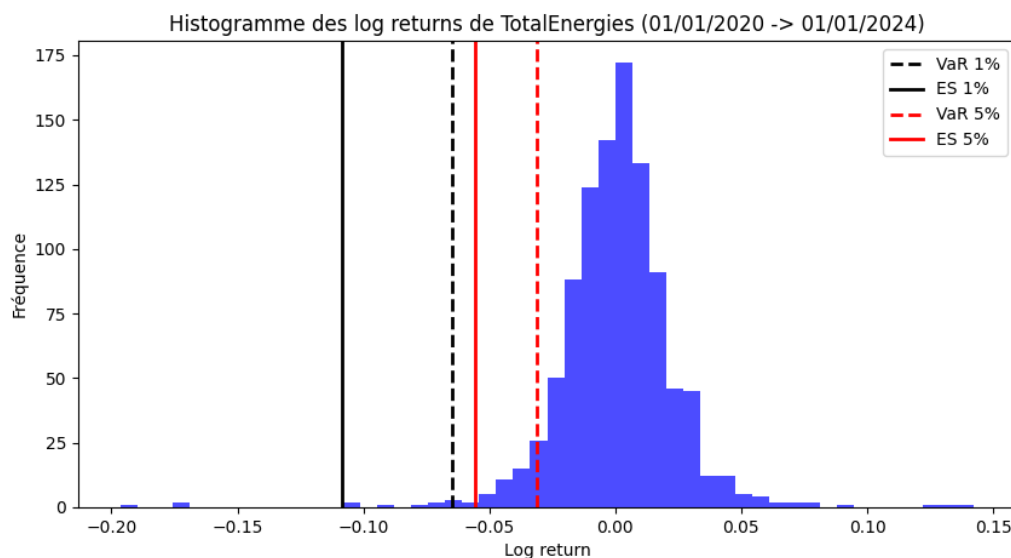


FIGURE 3 – Histogramme de la VaR et de l'ES

Nous avons calculé les deux métriques par rapport aux log returns sur le cours de TotalEnergies à deux niveaux de risque différents ( $\alpha = 0.01/0.05$ ). Nous pouvons observer que l'ES est toujours plus basse que la VaR (sur le graphique), ce qui est assez cohérent avec notre intuition de la moyenne sur les pires cas. La VaR 1% se trouve à gauche (même si ce sont toutes deux des valeurs positives selon la définition) car les 1% pires cas engendreront au moins plus de pertes que les 5% pires cas.

### 3 Modèle GARCH

Le modèle GARCH(p,q) est un modèle de volatilité qui essaie de décrire des observations par une moyenne, et un terme de volatilité, qui lui-même dépend des volatilités passées et des erreurs passées, autrement dit pour des observations  $r_t$  aux temps  $t$ ,

$$r_t = \mu + \epsilon_t$$

où le terme d'erreur est décrit par

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t \quad z_t \sim N(0, 1)$$

où  $z_t$  suit souvent une loi normale centrée réduite, mais peut être une distribution de Student/ Skewed Student. Et le terme que nous pouvons construire,

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=0}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=0}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2$$

donc notre estimation de  $\sigma_t$ , notre volatilité conditionnelle, dépend de nos  $p$  précédentes variances conditionnelles  $\sigma_{t-i}$ , et de nos  $q$  précédents termes d'erreurs  $\epsilon_{t-i}$ .

#### 3.1 Hypothèses du modèle GARCH

Le modèle GARCH est construit sur certaines hypothèses. Leurs non-validations dans la vie réelle pourrait remettre en cause la validité de ce modèle et justifier des modèles plus complexes permettant de prendre en compte ces hypothèses non remplies. Voici ci-dessous les différentes hypothèses du modèle GARCH :

- Stationnarité des rendements : Cela suppose que les différents moments des rendements sont constants.
- Indépendance conditionnelle des résidus : Cela exige que les résidus, sachant l'information passée, soient indépendants
- Distribution des erreurs : Chaque modèle GARCH fait une hypothèse sur la distribution suivie des erreurs passées.
- Absence de biais structurels : Nous faisons tout simplement l'hypothèse qu'aucun événement plus qu'extrême venant impacter l'économie d'un point de vue structurel ne survient. Un exemple typique serait la crise de COVID, la crise de 2008 ou la crise de 1987 qui changent structurellement le comportement de la volatilité.
- Hypothèse de rationalité des marchés : Nous supposons que les rendements reflètent toute l'information disponible.

#### 3.2 Approche mathématique

Pour la modélisation du modèle GARCH, nous avons à chaque fois modélisé les 3 types de distributions envisagées pour le terme  $z_t$ .

#### 3.3 Autocorrélation et autocorrélation partielle

Bien que la justification théorique semble élégante, le choix des paramètres  $(p, q)$  semble moins évident, pour ce faire, considérons les graphiques d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle, ils nous indiquent quels  $p = q$  sont des mauvais choix, un point

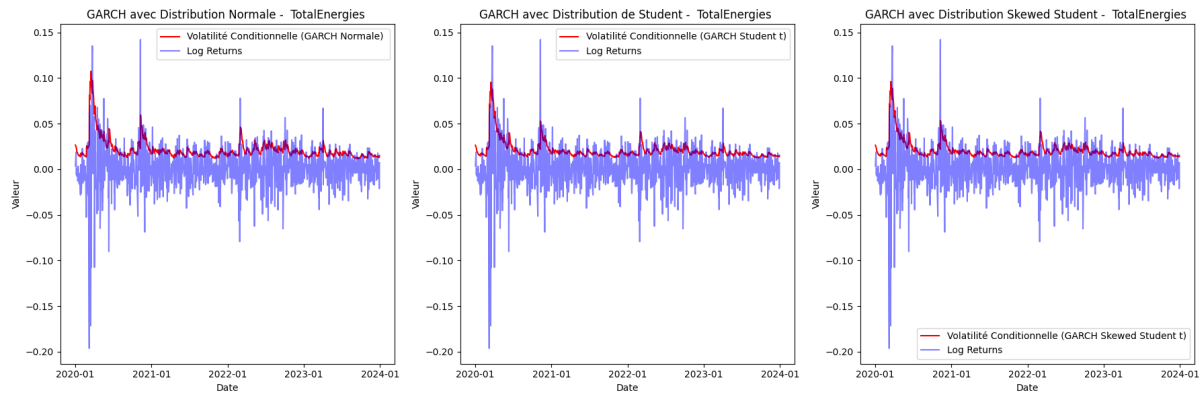


FIGURE 4 – Distribution de la volatilité avec le modèle GARCH

en dehors de l'intervalle de confiance bleu nous indique qu'il est susceptible qu'un modèle avec un plus grand nombre de termes différés (un plus grand lag) pourrait être adapté. La convention est de choisir des paramètres  $(p, q)$  juste avant un bond vers le bas dans notre graphique. Ici un choix adapté pourrait être 2 jusqu'à 4, au-delà, il est peu probable que notre modèle convienne. En pratique, le choix se fait par une minimisation de l'AIC (équilibre entre qualité de l'ajustement et nombre de paramètres pour éviter un overfit). En pratique l'AIC a été minimisée à chaque stade, et nos modèles tournaient autour vers des paramètres  $p, q$  de 1 ou 2.

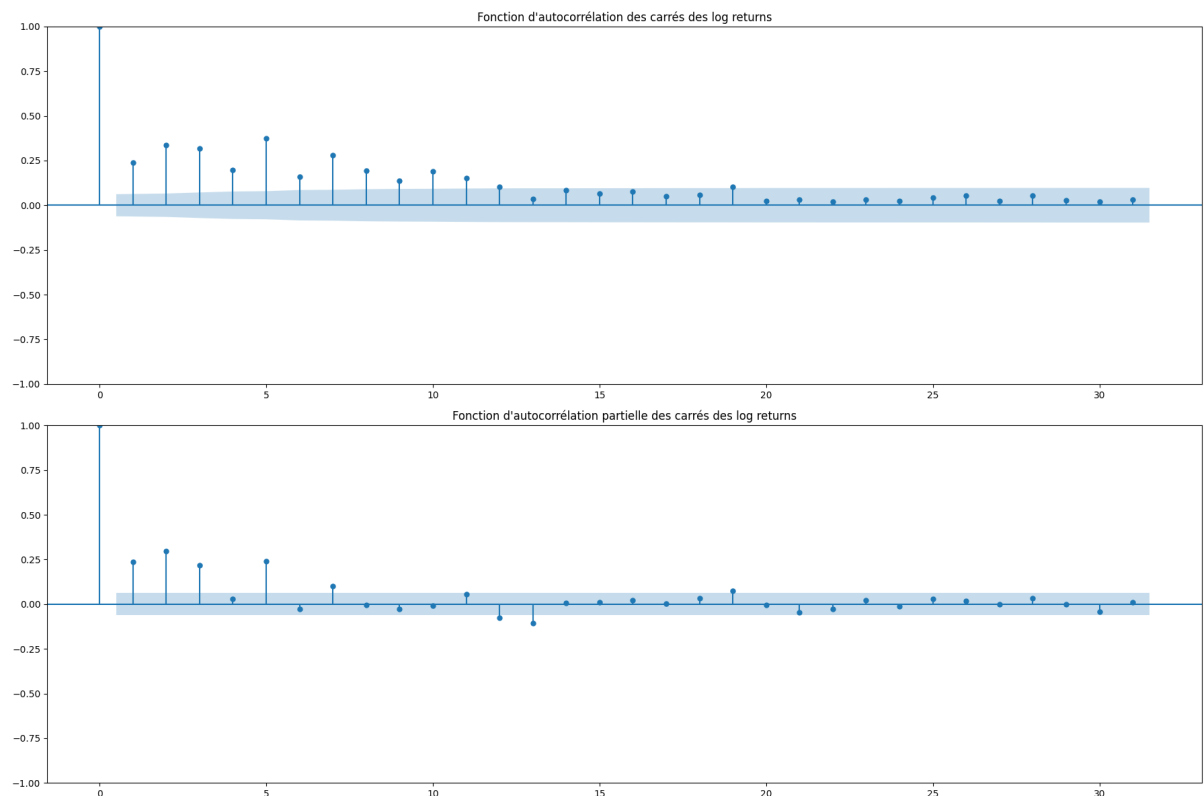


FIGURE 5 – Autocorrélation des carrés des rendements

### 3.4 Différentes métriques d'ajustement

Dans cette section, nous avons envisagé différentes métriques pour quantifier la qualité de notre ajustement, nous sommes habitués à la MSE pour les modèles de régression par exemple, mais étant donné que nous traitons un modèle de volatilité relatif aux séries temporelles, il serait bon d'élargir notre horizon.

#### 3.4.1 Précision directionnelle en fonction du pourcentage de données

La précision directionnelle est une mesure simple, elle nous indique si notre modèle a modélisé la volatilité dans le même sens que nos données, c'est-à-dire que lorsque la variation est de même signe dans le modèle et dans les données, alors nous considérons que notre modèle a une bonne précision directionnelle. Cependant nous avons un problème car l'appliquer directement n'est pas un bon choix étant donné que le modèle GARCH est un modèle présentant du lag, c'est pour cela que nous pouvons observer une précision qui tend vers 0 pour un petit pourcentage de données en test.

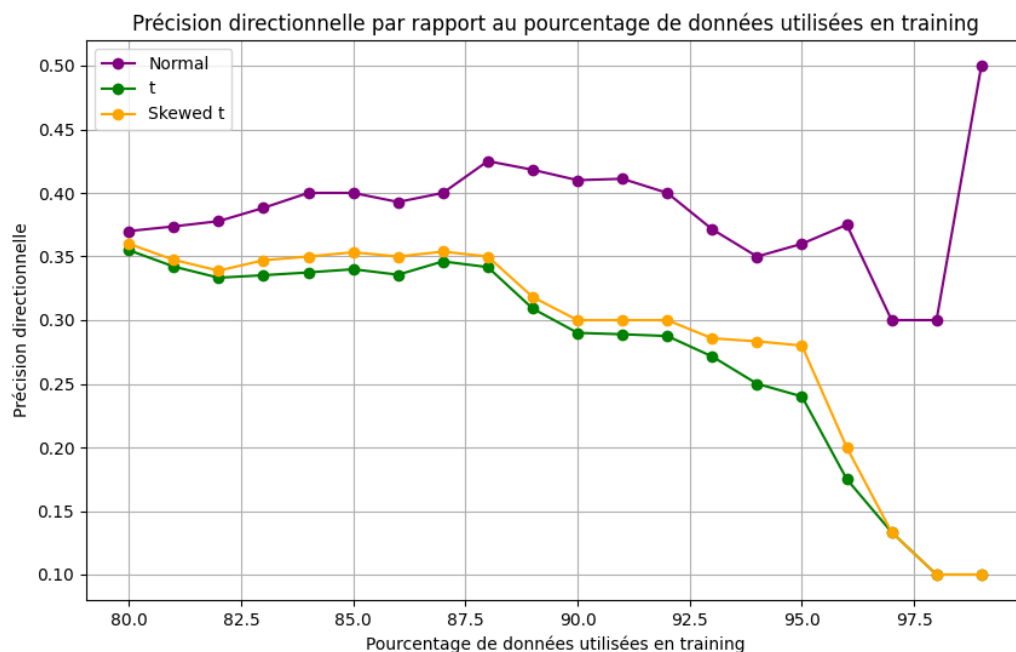


FIGURE 6 – Précision directionnelle du modèle GARCH en fonction des données

#### 3.4.2 Vraisemblance en fonction du pourcentage de données

La vraisemblance décrit la plausibilité du choix de paramètres selon nos données. Notre but est alors de maximiser celle-ci, la loi normale semble le mieux y parvenir.

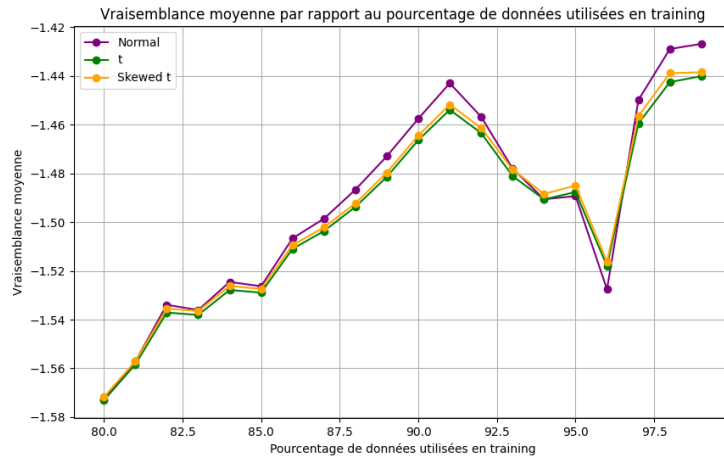


FIGURE 7 – Vraisemblance du modèle GARCH en fonction des données



## 3.5 Prédiction

En général ce modèle peut être adapté à des prévisions sur quelques jours, mais après sa pertinence semble s'estomper. Notez dans la suite que nous utiliserons des données de test allant jusqu'à 20% alors que nos données totales reprennent 4 années jour après jour.

### 3.5.1 Prédiction à 95% pour différentes distributions

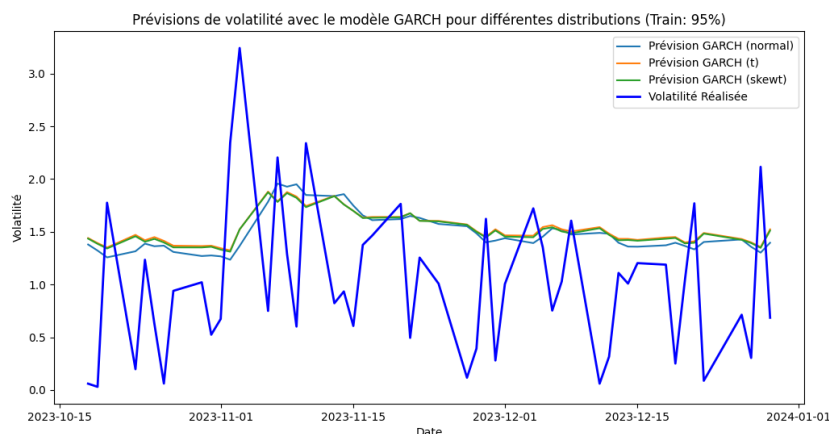


FIGURE 8 – Prédiction à 95% pour différentes distributions dans le modèle GARCH

Ce graphique pourrait être choquant, nous nous attendons à une meilleure prédiction lorsque nous employons ce terme, mais c'est tout à fait classique pour un modèle GARCH, nous ne traçons que les tendances de volatilité, ce qui est exhibé.

### 3.5.2 Prédiction en fonction du pourcentage de données

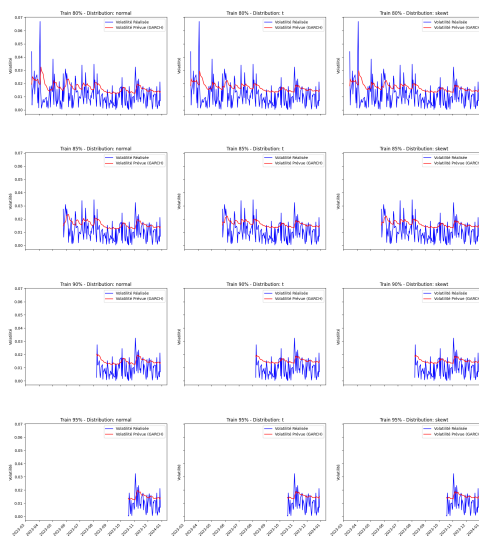


FIGURE 9 – Prédiction du modèle GARCH en fonction du pourcentage de données et en fonction de la distribution

### 3.5.3 MSE en fonction du pourcentage de données d'entraînement

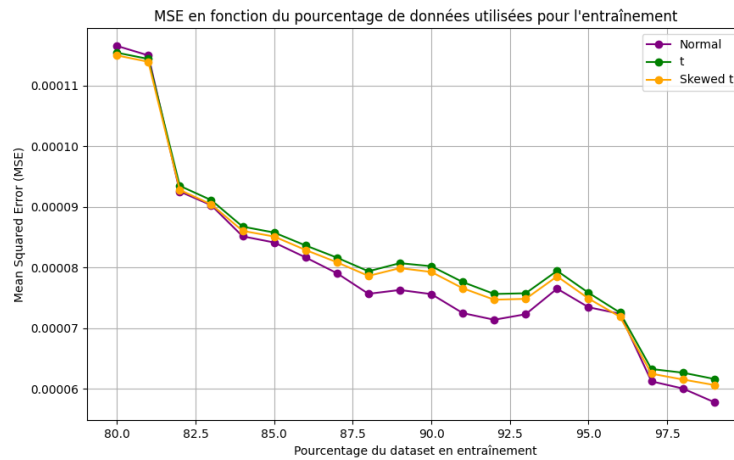


FIGURE 10 – Erreur quadratique moyenne en fonction des données d'entraînement

Globalement, la loi normale semble minimiser la MSE (erreur quadratique moyenne), ce qui semble être un bon point.

### 3.5.4 MSE en fonction de l'horizon temporel

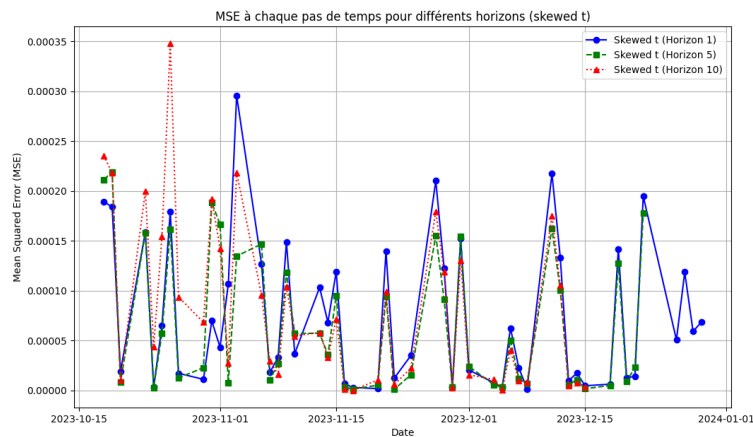


FIGURE 11 – Erreur quadratique moyenne en fonction de l'horizon temporel

Ici, nous avons tracé la MSE à chaque horizon de temps de prévision pour la skewed t, nous constatons que globalement, nous sommes pratiquement à 0, ce qui est assez bon signe. A priori, nous ne constatons pas de "bon horizon" de prédiction.

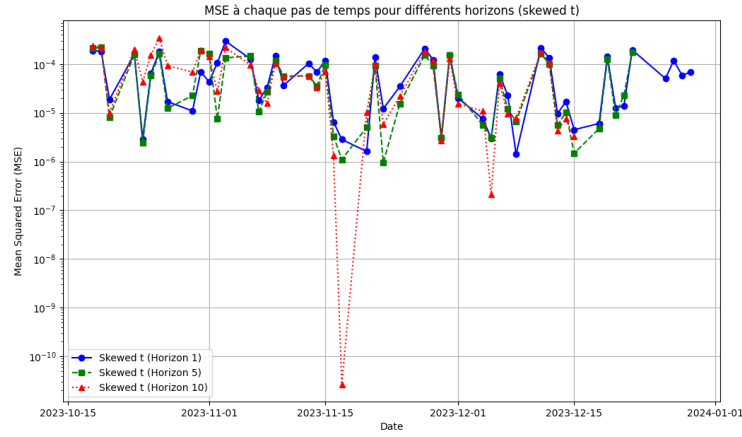


FIGURE 12 – Erreur quadratique moyenne (échelle log) en fonction de l’horizon temporel

## 3.6 Analyse et critique des résultats

### 3.6.1 Pourcentage d’erreur de prévision

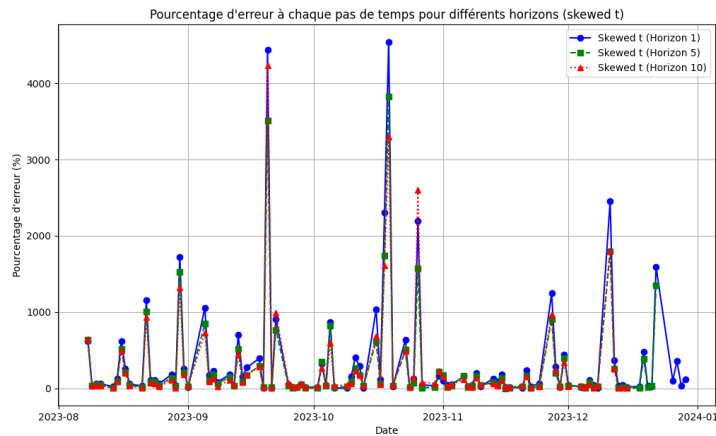


FIGURE 13 – Pourcentage d’erreur de prévision en fonction de l’horizon temporel

Le pourcentage d’erreur nous apporte un peu plus d’informations sur l’échelle de ces erreurs, la MSE, bien que nous cherchons à la minimiser, ne nous indique pas directement l’ampleur de ces erreurs par rapport aux observations. Malgré quelques pics, l’erreur semble être contenue en dessous des 100% (mieux visible avec l’échelle logarithmique), ce qui semble ne pas être une mauvaise prédiction pour la volatilité.

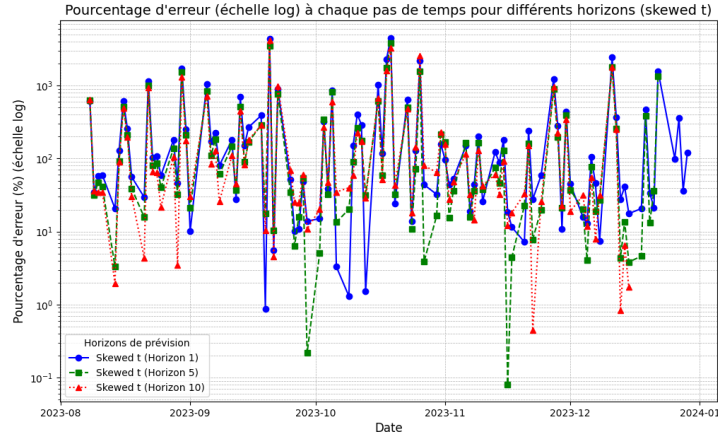


FIGURE 14 – Pourcentage d’erreur de prévision (échelle log) en fonction de l’horizon temporel

### 3.6.2 QQ-Plot

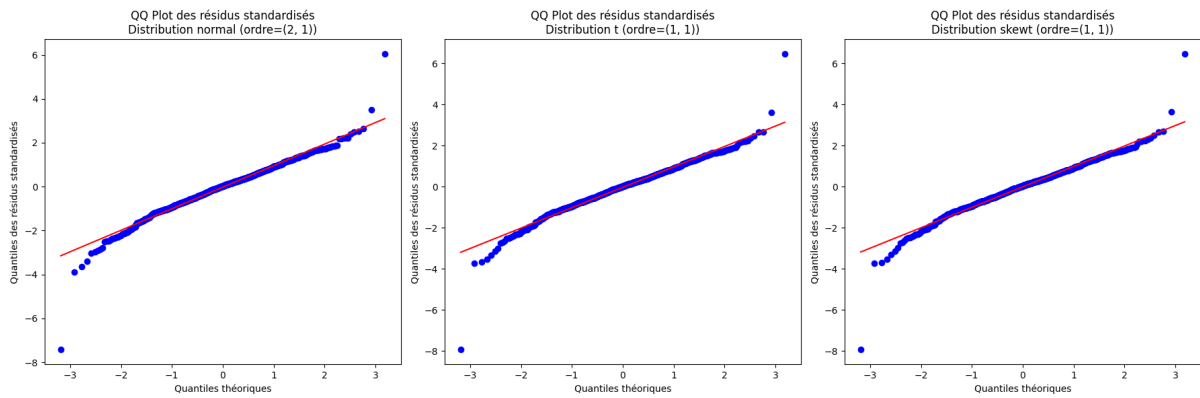


FIGURE 15 – QQ-Plot pour le modèle GARCH

Ici, nous pouvons voir avec le QQ-Plot des résidus standardisés, en fonction des distributions, que nos résidus semblent être distribués normalement, et si nous faisons abstraction des valeurs extrêmes, les Student/skewed Student semblent mieux lisser nos données vers cette direction. Notons qu’au vu du nombre de données que nous utilisons, la loi normale est suffisamment bien approximée par une loi Student, mais avec des queues légèrement plus lourdes que la loi normale.

## 4 E-GARCH

### 4.1 Approche mathématique

Le modèle E-GARCH est une variante du modèle GARCH permettant de saisir les effets asymétriques sur la volatilité des rendements. Typiquement sur le marché des actions, dû aux hauts leviers parfois utilisés, un choc de -20% aura plus d'impact sur la volatilité qu'une hausse soudaine de +20%.

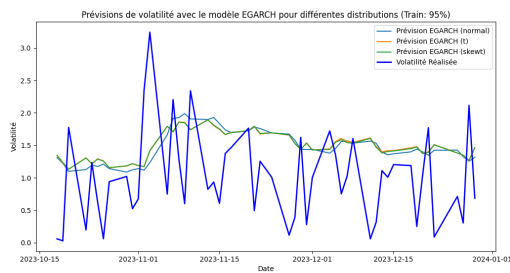
Le modèle mathématique du modèle E-GARCH est repris ci dessous :

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q \beta_i \log(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \alpha_j \left( \frac{|z_{t-j}| - E|z_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right) + \sum_{j=1}^p \gamma_j z_{t-j}$$

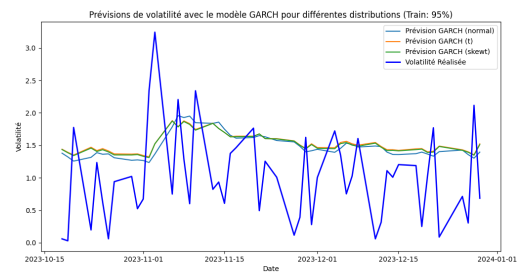
où :

- $\sigma_t^2$  est la variance conditionnelle de la série à l'instant  $t$ ,
- $z_t = \frac{\epsilon_t}{\sigma_t}$  est le résidu standardisé, avec  $\epsilon_t$  représentant le terme d'erreur,
- $\omega$  est une constante modélisant la moyenne attendue de la volatilité,
- $\beta_i$  représente les effets autorégressifs de la volatilité passée,
- $\alpha_j$  capte l'impact de la magnitude des chocs passés sur la volatilité, ce qui permet de modéliser l'effet de "leverage" (ou asymétrie),
- $\gamma_j$  est le paramètre d'asymétrie, qui permet de différencier l'impact des chocs positifs et négatifs sur la volatilité future.

### 4.2 Prédiction



(a) Prédiction à 95% pour différentes distributions dans le modèle E-GARCH



(b) Prédiction à 95% pour différentes distributions dans le modèle GARCH

FIGURE 16 – Comparaison des prédictions à 95% pour différentes distributions dans les modèles E-GARCH et GARCH

Nous observons sur le graphique ci dessus que la variante E-GARCH du modèle GARCH présente des prédictions pour une journée extrêmement similaires. Néanmoins, nous pouvons observer des résultats légèrement à la hausse ou à la baisse pour certains temps. Temps que nous pouvons présager être des impacts à la hausse ou à la baisse.

## 4.3 Analyse et critique des résultats

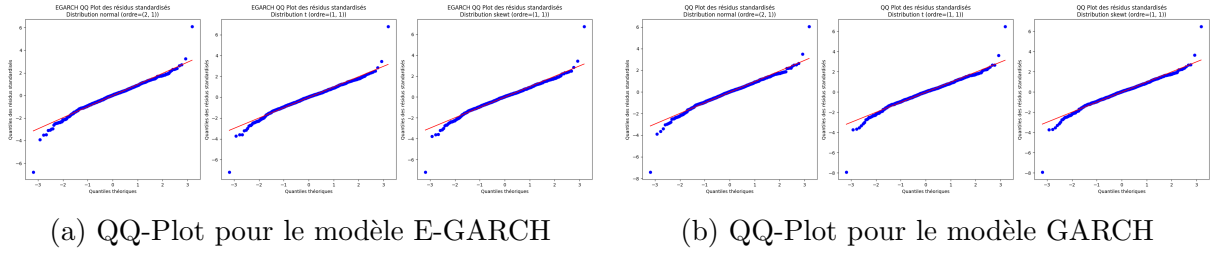


FIGURE 17 – Comparaison des QQ-Plots pour les modèles E-GARCH et GARCH

Nous constatons des QQ-plots extrêmement similaires. Le QQ-plot ne s'améliore pas avec ce modèle. Cela est cohérent en considérant le fait que l'E-GARCH est un modèle qui permet de saisir l'asymétrie sur la volatilité des chocs sur le rendement, et qui ne permet pas d'expliquer ni de mieux cerner les événements extrêmes.

## 5 Conclusion

D'un point de vue global concernant la VaR, nous remarquons qu'elle est très vite limitée étant donné qu'elle ne nous donne aucune information sur la distribution lors des événements extrêmes laissant l'investisseur avec une VaR modérée, tout en étant exposé à des pertes bien plus grandes qu'espérées. La solution est d'utiliser l'Expected Shortfall couplée à la VaR pour avoir une vue complète sur la distribution des pertes. Concernant les modèles de volatilité, le GARCH et sa variante asymétrique E-GARCH, nous observons des prévisions intéressantes, mais limitées dans leurs précisions. Cependant, ces modèles permettent de saisir la fluctuation de la volatilité et ainsi d'adapter au mieux sa gestion des risques face à la volatilité espérée.