



ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
D'ELECTRICITÉ ET DE MÉCANIQUE

STAGE - ENSEM 3A

---

# Estimation de modèles tensoriels de grande dimension et leurs applications en apprentissage automatique

---

Encadrant :  
H. Goulart  
IRIT - N7

Auteur  
A. Poujon  
ENSEM - GTL

12 mars 2023

# 1 Remerciements

Je tenais à remercier en premier lieu Henrique Goulart, mon tuteur de stage, qui a su me guider tout au long du stage pour traverser les paysages parfois escarpés de l'analyse tensorielle. Nos nombreux échanges en présentiel comme à distance et ses remarques toujours constructives ont été une aide précieuse pour la réalisation de ce stage. Je le remercie encore pour la relecture attentive de ce rapport de stage.

Je voulais aussi remercier plus généralement toute l'équipe de recherche "signaux et communications" de l'IRIT qui m'a accueilli dans les meilleures conditions. En particulier, je voudrais spécialement mentionner Elsa Cazelles dont l'implication pour l'organisation des conférences et des séminaires est remarquable et importante pour la vie du laboratoire.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
2.1	Version Française . . . . .	4
2.2	English Version . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Présentation de l'unité de recherche</b>	<b>6</b>
3.1	Présentation de l'UMR . . . . .	6
3.2	Equipe SC . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Contexte scientifique sur les matrices aléatoires et les tenseurs</b>	<b>8</b>
4.1	La théorie des Matrices Aléatoires . . . . .	8
4.2	Introduction de quelques modèles tensoriels . . . . .	15
4.2.1	Le Modèle tensoriel symétrique . . . . .	15
4.2.2	Méthodes classiques pour l'estimation . . . . .	15
4.2.3	Etudes asymptotiques récentes . . . . .	17
4.2.4	Les modèles tensoriels non-symétriques . . . . .	18
4.2.5	Algorithmes pour l'estimation . . . . .	19
4.2.6	Etudes asymptotiques manquantes . . . . .	19
4.2.7	Applications possibles . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Objectifs du travail de recherche</b>	<b>20</b>
5.1	Extension des résultats du modèle symétrique au cas non-symétrique	20
5.1.1	Développement des expressions analytiques . . . . .	20
5.1.2	Etude qualitative via les simulations numériques . . . . .	21
5.2	Application du modèle symétrique à la détection de communautés dans un hypergraphe . . . . .	21
5.2.1	Modélisation et mise en œuvre . . . . .	21
5.2.2	Etude de la transition de phase pour la détection . . . . .	22
5.2.3	Comparaison au cas matriciel de la détection de communautés dans un graphe . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Etude qualitative empirique</b>	<b>23</b>
6.1	Outils Algorithmiques . . . . .	23
6.2	Description de la simulation . . . . .	25
6.2.1	Principe général . . . . .	25
6.2.2	Post-traitement : hauteur de saut et position de transition de phase . . . . .	26
6.3	Présentation des résultats . . . . .	30

6.3.1	Position de la transition de phase . . . . .	30
6.3.2	Effet de la dimension : déplacement de la transition . . . . .	33
6.3.3	Hauteur de saut de la transition de phase . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Premières expressions analytiques en prolongement des simulations</b>	<b>40</b>
7.1	Contraction et couples propres tensoriels . . . . .	40
7.2	Mesure spectrale pour un tenseur gaussien non symétrique . . . . .	40
7.3	Validation des calculs par simulation . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Application à la détection de communauté</b>	<b>51</b>
8.1	Modélisation informelle du problème . . . . .	51
8.2	Modélisation et définition formelle du problème . . . . .	53
8.3	Discussions sur les simulations et présentation des résultats . . . . .	54
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>70</b>
9.1	Synthèse du travail . . . . .	70
9.2	Prolongements dans la lignée de ce travail . . . . .	70

## 2 Introduction

### 2.1 Version Française

Ce rapport a pour objet la présentation de l'ensemble des activités de recherche que j'ai pu mener au cours de mon stage de six mois à l'IRIT à Toulouse. Il s'agissait d'appliquer les outils de la théorie des matrices aléatoires pour l'analyse de modèles tensoriels et de leurs applications.

Pour ce faire, je commence par une présentation d'un état de l'art sur les matrices aléatoires et les modèles tensoriels qui montre les outils essentiels de la théorie des matrices aléatoires et présente un aperçu de l'état des connaissances et de la recherche sur les tenseurs. Cette présentation est suivie par le détail des objectifs du stage.

Le travail concret du stage est présenté en parties 5, 6 et 7. La partie 5 concerne une étude qualitative empirique du modèle tensoriel considéré. Elle vise à illustrer les limites et les conditions de l'estimation tensorielle en fonction des paramètres du modèle, et met en exergue la présence d'un seuil de transition entre un domaine où l'estimation tensorielle est envisageable et un domaine où elle ne l'est absolument pas. La partie 6 propose un début d'une approche plus rigoureuse pour l'analyse spectrale du modèle via les outils mathématiques introduits dans l'état de l'art. On se restreint cependant à une analyse partielle du modèle complet. Finalement, la partie 7 constitue une proposition originale pour une méthode de détection de communautés dans un hypergraphe. Elle s'appuie sur les outils développés au long du stage et permet d'en montrer l'intérêt.

### 2.2 English Version

The purpose of this report is to present the research activities that I was able to carry out during my six-month internship at IRIT in Toulouse. The main aim was to apply the tools of the theory of random matrices to the analysis of tensor models and show their applications.

To do this, I start with a state-of-the-art presentation on random matrices and tensor models which shows the essential tools of random matrix theory and presents an overview of the state of knowledge and research on tensors. This presentation is followed by the detailed objectives and summary of this report.

The actual material developed during the internship is presented in parts 5, 6 and 7. Part 5 concerns an empirical qualitative study of the tensor model considered. It aims to illustrate the limits and conditions of tensor estimation as a function of the model parameters, and highlights the presence of a transition threshold between a

domain where tensor estimation is feasible and a domain where it is absolutely not. Part 6 proposes the beginning of a more rigorous approach for the spectral analysis of the model via the mathematical tools introduced in the section dedicated to the state of the art. However, note that this analysis merely involve studying one term of the full model. Finally, part 7 constitutes an original proposal for a method of community detection in a hypergraph. It is based on the tools developed and studied throughout this report and shows their interest.

## 3 Présentation de l'unité de recherche

### 3.1 Présentation de l'UMR

L'Artificial and Natural Intelligence Toulouse Institute (ANITI) est l'un des quatre Instituts Interdisciplinaires d'Intelligence Artificielle (3IA) créés dans le cadre de la stratégie nationale pour l'intelligence artificielle en 2019. A Toulouse, les domaines d'applicabilité privilégiés regroupent le transport, l'environnement et la santé. L'ANITI est par ailleurs porté par l'Université fédérale Toulouse Midi-Pyrénées (UFTMP) qui tutelle l'ensemble de l'institution et qui englobe les services de ressources humaines pour les chercheurs de l'institut. Les financements proviennent quant à eux majoritairement de l'Agence nationale de la Recherche.

Dans cet environnement général, mon stage se déroule précisément dans les locaux de l'Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (IRIT). L'IRIT consiste en une unité mixte de recherche (UMR) comportant environ 600 membres et étant regroupant les universités Toulousaines, ainsi que par le CNRS. En particulier, certains chercheurs de l'IRIT s'inscrivent dans le cadre de recherche défini par l'ANITI. Très concrètement, les recherches menées à l'IRIT portent sur la conception et la construction des systèmes, la modélisation numérique du monde réel, les concepts pour la cognition et l'interaction, l'étude des systèmes autonomes et leur adaptabilité à leur environnement, le passage de la donnée brute à l'information intelligible. C'est sur ce dernier point que portera plus spécifiquement mon stage. Les portées applicatives affichées par l'IRIT sont larges mais recouvrent notamment la santé, l'autonomie et le bien-être ainsi que l'aéronautique, l'espace et les transports. Ces domaines d'application stratégiques se superposent ainsi bien avec ceux qui forment le cœur d'activité de l'ANITI, justifiant ainsi la collaboration entre les deux instituts.

L'IRIT se décline en outre en sept départements de recherche parmi lesquels est compté le département SI, pour Signaux et Images. Ce dernier comporte cinq équipes : MINDS qui porte sur le traitement d'images et la vision par ordinateur, SAMoVA qui s'intéresse à l'analyse et l'exploitation de document vidéo et audio, SC qui s'intéresse aux signaux et communications, STORM dont les recherches portent sur les modèles et les outils pour les graphismes en informatique et finalement TCI qui réalise du traitement et de la compréhension d'images. Dans le cadre de ce stage, je m'inscris au sein de l'équipe Signal et Communication (SC).

Dans ce cadre, le stage financé par l'ANITI se déroule alors dans les locaux de l'IRIT sur le campus de l'ENSHEEIT, une école d'ingénieurs faisant partie de l'ensemble INP de Toulouse. Il est à noter que l'IRIT possède en effet un second bâtiment situé sur le campus de l'université Paul-Sabatier qui se trouve plus à l'Est.

## 3.2 Equipe SC

Dans l'équipe SC on retrouve encore deux sous activités de recherche : d'une part le traitement statistique du signal et des images qui regroupent des activités variées allant des problèmes inverses à l'apprentissage automatique en passant par la représentation et l'analyse, et d'autre part l'étude du signal pour les communications, qui représente un pendant plus pratique de cette activité de recherche en étudiant les récepteurs numériques et les performances des canaux de communication réels. Dans ce stage, je figure plus particulièrement dans la première branche.



## 4 Contexte scientifique sur les matrices aléatoires et les tenseurs

### 4.1 La théorie des Matrices Aléatoires

**Contexte** On peut faire débiter l'histoire des Matrices Aléatoires [Spe20] dans la fin du XIXe siècle avec l'article de Hurwitz intitulé *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration* de 1897. L'étude de ces objets mathématiques continue alors pour des matrices carrées de taille  $N$  fixée dans la première moitié du XXe siècle notamment avec les travaux de Wishart où ces matrices servent à décrire des corrélations en statistiques.

Mais c'est surtout à partir de la seconde moitié du XXe que le champ prend son plein essor. D'abord avec les travaux de Wigner, en 1955, pour la description des noyaux atomiques au travers desquels il comprend que leur étude est facilitée lorsque l'on se place dans la limite à l'infini pour  $N$ . Par la suite, les deux terrains mathématiques et physiques vont continuer à fertiliser la théorie des matrices aléatoires. D'une part, les travaux de Wishart sont repris Marchenko et Pastur et étendus au cas où  $N \rightarrow \infty$  en 1967, puis dans les années 70 Montgomery, Dyson ou encore Odlyzko prolongent encore l'analyse des matrices aléatoires du point de vue mathématique ; d'autre part, les travaux de physique par Wigner sont prolongés par Madan Lal Mehta et d'autres physiciens spécialistes de la physique statistique et des particules.

Finalement, tous ces travaux issus de la recherche en physique ou en mathématiques s'alimentent réciproquement. Cependant, dans les plus récentes décennies, il semble bien qu'il y ait un regain d'intérêt pour les analyses purement mathématiques de ces objets afin de mieux les comprendre indépendamment de leur signification en physique quantique. Notons au passage que Wigner est l'auteur d'un célèbre papier de philosophie des sciences intitulé *De la déraisonnable efficacité des mathématiques en sciences naturelles* [Wig60], pour lequel on peut penser que son travail à la frontière entre les mathématiques et la physique dans le cadre de la théorie des matrices aléatoires constitua l'une des origines de sa réflexion.

**Formalisme** Soit une matrice  $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , symétrique et dont les entrées sont les  $w_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, 1/N)$  pour  $i \neq j$  et  $w_{i,i} \sim \mathcal{N}(0, 2/N)$ , qui sont indépendantes pour  $i \leq j$ . On appelle ce type de matrices des matrices de Wigner, ici en particulier il s'agit d'une matrice de Wigner Gaussienne. Par ailleurs, on définit l'Ensemble Orthogonal Gaussien (ou GOE pour *Gaussian Orthogonal Ensemble*) comme l'ensemble des matrices aléatoires symétriques de dimension  $N$  dont les éléments sont *i.i.d* d'espérance 0 et de variance 2 sur la diagonale, et de variance 1 ailleurs [GWAea09]. Par conséquent, on est ici très proche du cas *GOE*, à un coefficient de normalisation

$\sqrt{N}$  près. En outre, la densité associée est définie par :

$$f(W) = \frac{1}{Z(N)} \exp\left(-\frac{1}{4} \text{tr}(W^2)\right) = \frac{1}{Z(N)} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i,j} w_{i,j}^2\right). \quad (1)$$

Et on peut séparer la somme selon que les entrées sont sur la diagonale de la matrice ou non :

$$f(W) = \frac{1}{Z(N)} \exp\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{N} \sum_i w_{i,i}^2 + \frac{2}{N} \sum_{i < j} w_{i,j}^2\right)\right) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{Z(N)} \prod_i e^{-\frac{N}{4} w_{i,i}^2} \prod_{i < j} e^{-\frac{N}{2} w_{i,j}^2}. \quad (3)$$

Dans l'expression obtenue, on voit bien apparaître une variance sur la diagonale deux fois supérieure à celle sur les parties triangulaires strictes de la matrice. On remarque aussi que le produit obtenu n'est autre qu'un produit de densités pourvu que l'on factorise  $Z(N)$  adéquatement. En effet, pour  $Z(N)$ , on a

$$Z(N) = (2\sqrt{\pi})^{-N} (\sqrt{2\pi})^{-\frac{N^2-N}{2}}, \quad (4)$$

dont le premier facteur correspond à la normalisation pour la Gaussienne sur la diagonale, et le second à celle pour l'une des deux sous-matrices triangulaires strictes (soit pour  $i < j$  soit pour  $i > j$ ). Notons de fait que la variance pour la diagonale vaut  $\frac{2}{N}$ , tandis qu'elle vaut  $\frac{1}{N}$  pour le reste des entrées de la matrice.

Les valeurs propres de  $W$  sont donc aléatoires et on définit la distribution empirique de valeurs propres (ESD) qui est une mesure de probabilité :

$$\rho_{W_N} = \frac{1}{N} \sum_i \delta_{\lambda_i(W_N)} \text{ en notant } W_N = \sum_{i=1}^N \lambda_i(W_N) u_i u_i^T, \quad (5)$$

où  $\delta_x$  dénote la mesure de Dirac supportée en  $x \in \mathbb{R}$ . Au passage, cette ESD est elle-même aléatoire. Dans la suite, il faudra par conséquent utiliser des définitions de convergences en probabilités pour parvenir à des résultats exploitables.

**Etude classique de la loi du demi-cercle de Wigner** Dans la brève revue historique au début de cette section était fait mention de Wigner. Ses travaux ont été et sont toujours d'une importance capitale pour le développement de la recherche sur les matrices aléatoires. On retient notamment la distribution du demi-cercle de Wigner dont on trouve les prémisses dans plusieurs de ses articles et en particulier dans un article de 1958 sur la distribution des valeurs caractéristiques de certaines

matrices [Wig58]. Dans la suite il s'agira donc de calculer la loi spectrale limite de  $W_N$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ , dans la lignée de ce que proposait Wigner dans les années 1950.

On souhaite montrer que  $\rho_{W_N} \rightarrow \rho$  où la convergence est comprise au sens faible et presque sûr compte tenu de la nature probabiliste de  $\rho_{W_N}$ . Cela signifie qu'il existe un ensemble de l'univers de probabilité tel que la convergence soit classiquement vraie pour les éléments de cet ensemble et que la probabilité de l'ensemble soit presque sûre (i.e. qu'elle soit égale à 1) [MIT18].

Dans ce cadre,  $\rho$  est la distribution de Wigner associée à la loi du demi-cercle de Wigner qui s'écrit  $S_\rho(z) = \frac{1}{2}(\sqrt{z^2 - 4} - z)$  [RC21]. Pour ce faire, nous allons utiliser une approche analytique (notons que l'on peut aussi utiliser une approche combinatoire [Spe20]).

**Outils Mathématiques et Stratégie de démonstration** Avant de se plonger dans le calcul, j'introduis quelques outils mathématiques importants et fondamentaux pour la poursuite de l'étude.

Commençons par définir la résolvante d'une matrice :

$$R_W(z) = (W - zI)^{-1} \text{ où } z \notin \text{Sp}(W), \text{ Sp}(W) \text{ étant le spectre de } W. \quad (6)$$

Notons que l'on peut alors tirer, par un calcul presque immédiat, une équation utile de l'expression de la résolvante :

$$\text{tr}\left(\frac{1}{N}R_{W_N}(z)\right) = -\frac{\text{tr}(I)}{Nz} + \frac{I}{Nz} \text{tr}(W_N R_{W_N}(z)). \quad (7)$$

Nous aurons besoin en outre de l'outil de la transformée de Stieltjes d'une mesure  $\rho$  :

$$S_\rho(z) = \int \frac{1}{t - z} \rho(dt). \quad (8)$$

En effet, la convergence faible des distributions est équivalente à la convergence des transformées de Stieltjes pour des  $z$  pris dans le demi-plan complexe à partie imaginaire positive. Et il est possible de lier la transformée de Stieltjes avec la résolvante telle que :

$$S_{\rho_{W_N}}(z) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{\mu_i(W_N) - z} = \frac{1}{N} \text{tr}(R_{W_N}(z)). \quad (9)$$

Donc on cherchera finalement à montrer que :

$$\frac{1}{N} \text{tr}(R_{W_N}(z)) \rightarrow S_\rho(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^+ \text{ presque sûrement.} \quad (10)$$

Où la loi du demi-cercle de Wigner n'est autre que la transformée de Stieltjes de la distribution de Wigner  $\rho$ .

Maintenant que nous disposons des outils concrets pour le calcul de la loi du demi-cercle de Wigner, nous pouvons nous lancer dans la démonstration. Il s'agira de montrer :

1. Que l'espérance de la transformée de Stieltjes converge bien vers celle la loi du demi-cercle de Stieltjes (ce qui est nécessaire pour la convergence presque sûre, mais pas suffisant) ;
2. Que la distribution de la transformée de Stieltjes aléatoire concernée se concentre assez rapidement autour de son espérance lorsque  $N \rightarrow \infty$  ;

La combinaison de ces deux points permettra alors de conclure qu'une convergence presque sûre a lieu.

**Réécriture via le Lemme de Stein** En appliquant l'espérance sur l'expression spéciale de la résolvante, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \operatorname{tr}(R_{W_N}(z)) \right] = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \operatorname{tr}(W_N R_{W_N}(z)) \right]. \quad (11)$$

On peut alors s'intéresser au terme de droite de cette dernière équation. En notant  $R_{W_N}(z) = (r_{ij}(z))_{i,j=1}^N$  et  $W_N = (w_{ij})_{i,j=1}^N$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \operatorname{tr}(W_N R_{W_N}(z)) \right] = \frac{1}{N} \sum_{i,k=1}^N \mathbb{E} [w_{ik} r_{ki}(z)]. \quad (12)$$

Par le lemme de Stein ([RC21], Lemma 2.13), on a que si les  $w_{ij}$  sont des variables aléatoires Gaussiennes avec une espérance nulle et une variance  $\sigma_{ij}^2$  ; et soit  $f$  une fonction de sorte que  $f : \mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}} \rightarrow \mathbb{C}$  est continûment différentiable et de croissance au plus polynomiale, alors :

$$\mathbb{E} [w_{i,j} f(w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{N-1,N}, w_{NN})] = \sigma_{i,j}^2 \mathbb{E} \left[ \frac{\partial f}{\partial w_{ij}}(w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{N,N}) \right]. \quad (13)$$

On peut utiliser cette identité dans le cas où  $f$  est un élément de la résolvante. Pour utiliser ce lemme, il nous faudra par conséquent disposer des dérivées partielles de la résolvante  $R$ . Pour ce faire on distingue le cas diagonal du cas triangulaire strict, et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial w_{ij}} [R_{W_N}(z)]_{kl} = -[R_{W_N}(z)]_{ki} [R_{W_N}(z)]_{il}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_{ij}}[R_{W_N}(z)]_{kl} = -[R_{W_N}(z)]_{ki}[R_{W_N}(z)]_{jl} - [R_{W_N}(z)]_{kj}[R_{W_N}(z)]_{il}. \quad (15)$$

Par conséquent, en rappelant que selon que les entrées se trouvent sur la diagonale ou dans les sous-matrices triangulaires la variance diffère comme suit,

$$\sigma^2 = \begin{cases} \frac{2}{N} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{N} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (16)$$

On obtient les formules suivantes après application du Lemme de Stein :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{tr}(W_N R_{W_N}(z)) \right] = \frac{1}{N} \sum_{i,k=1}^N \mathbb{E} [w_{ik} r_{ki}(z)] = \begin{cases} \frac{2}{N} \mathbb{E} \left[ \frac{\partial}{\partial w_{ik}} [R_{W_N}(z)]_{ii} \right] & \text{si } i = k \\ \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \frac{\partial}{\partial w_{ik}} [R_{W_N}(z)]_{ki} \right] & i \neq k. \end{cases} \quad (17)$$

En exprimant l'espérance sous forme de somme, et en combinant ces sommes correctement, on peut écrire

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{tr}(W_N R_{W_N}(z)) \right] = -\frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left[ \sum_{i,k=1}^N [R_{W_N}(z)]_{ki} [R_{W_N}(z)]_{ik} + [R_{W_N}(z)]_{kk} [R_{W_N}(z)]_{ii} \right], \quad (18)$$

où l'on peut voir apparaître des formules de traces de produits matriciels :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{tr}[W_N R_{W_N}(z)] \right] = -\frac{1}{N^2} \mathbb{E} [\text{tr}[R_{W_N}^2(z)] + \text{tr}^2[R_{W_N}(z)]] . \quad (19)$$

**Etude asymptotique** Puisque l'on dispose maintenant d'une expression uniquement dépendante de  $R_{W_N}$  pour le terme de droite, nous pouvons passer à l'étude asymptotique pour  $N \rightarrow \infty$ .

Pour le premier terme, on peut majorer la norme spectrale de la résolvante par l'inverse de la partie imaginaire de  $z$ , ce qui se démontre facilement à partir de la définition de la résolvante et d'une projection pour tout  $z$  qui n'est pas dans  $\mathbb{R}$ . C'est à dire :

$$\|R_{W_N}^p(z)\| \leq \frac{1}{|\text{Im}(z)|^p} \text{ pour } z \in \mathbb{C}^+. \quad (20)$$

Par conséquent, en bornant la trace comme la somme des valeurs propres, donc par  $N$  fois la norme spectrale on a la majoration

$$\frac{1}{N^2} \mathbb{E} [\text{tr}[R_{W_N}^2(z)]] \leq \frac{1}{N^2} \frac{N}{|\text{Im}(z)|^2} \leq \frac{1}{N} \frac{1}{|\text{Im}(z)|^2}, \quad (21)$$

qui tend vers 0 comme un  $O(\frac{1}{N})$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Et ce premier terme est donc négligeable.

Pour le second terme de l'équation, remarquons tout d'abord que l'on peut le lier avec la variance

$$\frac{1}{N^2} \mathbb{E} [\text{tr}^2(R_{W_N}(z))] = \frac{1}{N^2} \text{Var} [\text{tr}(R_{W_N}(z))] + \frac{1}{N^2} \mathbb{E}^2 [\text{tr}(R_{W_N}(z))]. \quad (22)$$

Cette reformulation va permettre de conclure que la distribution de cette trace aléatoire se concentre pour  $N$  grand si l'on parvient à montrer que la variance tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

**Etude de la variance par l'inégalité de Nash-Poincaré** Pour mener à bien cette étude de la décroissance vers 0 de la variance, je recours à l'inégalité de Nash-Poincaré.

**Inégalité de Nash-Poincaré (Pastur, 2005)**

Soit  $x \sim \mathcal{N}(0, C)$ , avec  $C \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable et dont les dérivées ont au plus une croissance polynomiale. Alors on a :

$$\text{Var} [f(x)] \leq 2 \sum_{i,j=2}^d [c]_{ij} \mathbb{E} \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right]. \quad (23)$$

Par conséquent, après calculs, l'inégalité suivante vaut pour notre variance,

$$\text{Var} \left[ \frac{1}{N} \text{tr}(R_{W_N}(z)) \right] \leq \frac{1}{N^2} \frac{2}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \left| \frac{\partial \text{tr}(R_{W_N}(z))}{\partial w_{ij}} \right|^2 \right] \leq \frac{8}{N^3} \mathbb{E} [\text{tr} [R_{W_N}^2(z)^* R_{W_N}^2(z)]] . \quad (24)$$

Puis par majoration classique de la résolvante

$$\frac{1}{N^2} \text{Var} [\text{tr}(R_{W_N}(z))] \leq \frac{8}{N^2} \frac{1}{|Im(z)|^4}. \quad (25)$$

Par conséquent dans l'équation le terme majorant tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$  et il reste donc finalement :

$$\frac{1}{N^2} \mathbb{E} [\text{tr}^2(R_{W_N}(z))] = \frac{1}{N^2} \text{Var} [\text{tr}(R_{W_N}(z))] + S_{\rho_{W_N}}^2(z) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} S_{\rho_{W_N}}^2(z). \quad (26)$$

**Convergence presque sûre** Reste à montrer que cette convergence est presque sûre. L'inégalité de Nash-Poincaré nous permet déjà d'assurer une décroissance rapide pour la variance. Si l'on se sert de ce résultat dans l'inégalité de Markov on peut alors borner la probabilité de s'éloigner de l'espérance. Notons

$$A_N(z) = \frac{1}{N} \text{tr}(R_{W_N}(z)), \quad (27)$$

l'inégalité de Markov est alors la suivante,

$$P[|A_N(z) - S_{\rho_{W_N}}(z)| \geq \epsilon] \leq \frac{\text{Var}[A_N(z)]}{\epsilon^2} \leq \frac{8}{N^2} \frac{1}{|Im(z)|^4 \epsilon^2}. \quad (28)$$

Par conséquent, la probabilité de s'éloigner de l'espérance est bornée par une expression en  $O(1/N^2)$ . Cela signifie donc que la suite de probabilités est sommable et, par le lemme de Borel-Cantelli, la probabilité que cet évènement se produise un nombre infini de fois est zéro, et ce pour tout  $\epsilon$ . Puisque la probabilité de s'éloigner de l'espérance est quasi-nulle, la probabilité contraire -c'est à dire celle de converger sur l'espérance- est presque sûre. Et par conséquent la convergence obtenue précédemment est presque sûre. Autrement dit, on a

$$\frac{1}{N^2} \mathbb{E} [\text{tr}^2(R_{W_N}(z))] \rightarrow_{N \rightarrow \infty} S_{\rho_{W_N}}^2(z). \quad (29)$$

presque sûrement.

**Retour au problème général** J'ai étudié la convergence de chaque termes de l'expression. Il apparaît à la suite de cette analyse que l'on puisse réécrire l'équation sous la forme suivante

$$S_{\rho_{W_N}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} S_{\rho_{W_N}}^2 + \epsilon_N \text{ où } \epsilon_N = O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (30)$$

Et dans la limite où  $N \rightarrow \infty$  cela s'écrit,

$$m(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} m^2(z) \quad (31)$$

en notant  $m(z)$  la limite de l'espérance de la trace normalisée autour de laquelle j'ai montré que la distribution se concentre. Puisqu'il s'agit d'un polynôme en  $m(z)$ , on peut facilement calculer les solutions,

$$m_{1,2}(z) = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}. \quad (32)$$

La solution que l'on souhaite retenir est celle qui correspond à la transformée de Stieltjes, et qui doit donc être dans  $\mathbb{C}^+$ . Par conséquent on choisit le facteur positif devant la racine,

$$m_1(z) = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}. \quad (33)$$

Et  $m_1(z)$  n'est autre que  $S_p$ , autrement dit il s'agit de la transformée de Stieltjes de la loi du demi-cercle de Wigner par définition. Ainsi, par le théorème de continuité de Stieltjes, la mesure spectrale empirique de  $W_N$  converge vers cette loi pour  $N \rightarrow \infty$ .

## 4.2 Introduction de quelques modèles tensoriels

### 4.2.1 Le Modèle tensoriel symétrique

Parmi les modèles d'étude pour l'estimation de tenseur à grande-dimension, les modèles symétriques de rang 1 ont été étudiés depuis une dizaine d'années [AM14] dans le cadre des théories de la physique statistique. Bien que non exclusifs au domaine de la physique statistiques, c'est dans ces domaines que leur étude a été la plus fructueuse jusqu'à présent. Plus récemment, de nouvelles approches inspirées de la théories des matrices aléatoires se développent pour fournir des résultats équivalents.

Le modèle tensoriel symétrique de rang 1 a la forme suivante :

$$\mathcal{Y} = \lambda x^{\otimes d} + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{W}. \quad (34)$$

Avec  $x$  un vecteur choisi sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{N-1}$  et  $\mathcal{W}$  un tenseur de bruit symétrique dont les entrées suivent une loi normale. Le paramètre  $\lambda$  permet de jauger l'importance du tenseur  $x^{\otimes d}$ , qui correspond à la partie signal ou information, relativement au bruit. Il constitue ainsi concrètement un paramètre de réglage du ratio de signal sur bruit.

C'est en particulier l'étude des conditions sur  $\lambda$  qui nous intéresse dans la suite, puisque la valeur prise par ce paramètre permet ou non la bonne estimation du modèle. En effet, plus  $\lambda$  est pris petit, plus le bruit prend de l'importance, et moins il est aisé de reconstituer le modèle non-bruité. On appellera alors valeur critique de  $\lambda$  la borne inférieure de  $\lambda$  à partir de laquelle l'estimation devient possible.

### 4.2.2 Méthodes classiques pour l'estimation

Dans le cadre des modèles symétriques, estimer le tenseur associé au signal d'intérêt revient à estimer le couple  $(\lambda, x)$ . Dans ce cadre, on peut écrire le problème d'estimation sous la forme de la minimisation suivante :

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{S}^{N_1}} \|\mathcal{Y} - \mu u^{\otimes d}\|_F^2. \quad (35)$$

Cette expression correspond alors à chercher la meilleure approximation de rang 1 du tenseur  $\mathcal{Y}$ . On utilise ici la norme de Frobenius pour les tenseurs qui correspond simplement à la racine carrée de la somme des carrés de chaque entrée du tenseur.

Ce problème de minimisation trouve son équivalent dans un problème d'estimation du maximum de vraisemblance. En effet, si l'on écrit la densité du tenseur  $\mathcal{Y}$ , on obtient la formule suivante,

$$f(\mathcal{Y}) = \frac{1}{Z_d(N)} \exp \left( -\frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \lambda x^{\otimes d}\|_F^2 \right). \quad (36)$$



Maximiser la densité revient donc à minimiser la norme dans l'exposant. C'est pourquoi les deux problèmes d'estimation sont équivalents et se réduisent à une approche par maximum de vraisemblance.

En notant que,

$$\|\mathcal{Y} - \mu u^{\otimes d}\|_F^2 = \|\mathcal{Y}\|_F^2 - 2\mu \langle \mathcal{Y}, u^{\otimes d} \rangle + \mu^2, \quad (37)$$

minimiser l'expression ci-dessus revient à minimiser les termes qui contiennent  $x$  et  $\lambda$ . Dans le cas où  $d = 3$ , qui est celui que nous choisissons dans la suite, on peut utiliser les propriétés de la contraction pour obtenir :

$$\langle \mathcal{Y}, u^{\otimes 3} \rangle = \mathcal{Y}(u, u, u) =_{\text{def}} \sum_{n_1}^N \sum_{n_2}^N \sum_{n_3}^N y_{n_1 n_2 n_3} u_{n_1} u_{n_2} u_{n_3} \quad (38)$$

Ce qui est vrai car  $u$  est de norme unité.

Et par conséquent, si l'on cherche à minimiser sur  $\mu$ , on peut d'ores et déjà dire que la condition de stationnarité donne,

$$\mu = \mathcal{Y}(u, u, u) \quad (39)$$

En remplaçant  $\lambda$  dans l'expression on a donc

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{S}^2} \|\mathcal{Y} - \mu u^{\otimes d}\|_F^2 = \min_{u \in \mathbb{S}^2} \mathcal{Y}(u, u, u) (\mathcal{Y}(u, u, u) - 2\mathcal{Y}(u, u, u)) \quad (40)$$

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{S}^2} \|\mathcal{Y} - \mu u^{\otimes d}\|_F^2 = \min_{u \in \mathbb{S}^2} -\mathcal{Y}^2(u, u, u) \quad (41)$$

Cela revient à maximiser  $\mathcal{Y}$ .

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{S}^2} \|\mathcal{Y} - \mu u^{\otimes d}\|_F^2 = \max_{u \in \mathbb{S}^2} \mathcal{Y}(u, u, u) \quad (42)$$

Le Lagrangien s'écrit alors  $\mathcal{L}(u, \mu) = \mathcal{Y}(u, u, u) - \frac{\lambda}{2}(\langle u, u \rangle - 1)$ , et doit respecter les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\partial_x \mathcal{L}(u, \mu) = 0 \text{ et } \langle u, u \rangle = 1 \quad (43)$$

$$3\mathcal{Y}(u, u) - \mu x = 0 \quad (44)$$

Ce qui donne comme solution la paire  $(3\mu, u)$ , que l'on peut noter  $(\mu, u)$  en procédant à une normalisation de  $\mathcal{Y}$  par  $\frac{1}{3}$ . Cette paire est nommée couple-propre associé au tenseur  $\mathcal{Y}$  et constitue un équivalent tensoriel des couples propres du cadre de la théorie matricielle.

### 4.2.3 Etudes asymptotiques récentes

Dans les études les plus récentes, on cherche à étudier l'estimation de tels modèles lorsque les dimensions du modèle tensoriel tendent vers l'infini. Cela vient du fait que dans de nombreux cas pratiques, les dimensions sont très grandes. Ces approches sont en particulier développées depuis une dizaine d'années à partir des travaux de Richard Montanari [AM14].

Comme j'ai déjà pu le souligner, l'analyse de tels modèles a été faite par le moyen des outils de la physique théorique provenant en particulier de la théorie des verres de spin et plus largement de la physique statistique. C'est le cas par exemple des récents travaux de Jagannath Lopatto et Miolane [AJ19].

En parallèle, de nouvelles approches s'appuyant sur la théorie des matrices aléatoires proposent l'analyse des mêmes scénarios mais selon des méthodes différentes. C'est le cas par exemple d'une récente publication de Goulart, Couillet et Comon [JHdMG21].

Dans tous les cas, ces travaux mettent en évidence et quantifient l'effet de seuil pour l'analyse en composante principale des tenseurs, comme illustré Figure 1 tirée de [JHdMG21]. En particulier, ils s'attachent à étudier la forme de la courbe d'alignement asymptotique en fonction de la valeur du paramètre de bruit  $\lambda$ . Cette alignement asymptotique se calcule alors comme l'alignement entre le vecteur  $x$  constitutif du modèle théorique du tenseur de rang 1 et un vecteur  $u^*$  estimé à partir du modèle bruité selon la formule suivante :

$$\text{alignement} = |\langle x, u^*(\lambda) \rangle|. \quad (45)$$

L'effet de seuil, ou de transition de phase, est aussi visible dans ces études au travers de la norme spectrale asymptotique du tenseur bruité. Autrement dit, on observe un changement de phase sur la valeur de la plus grande valeur propre du tenseur.

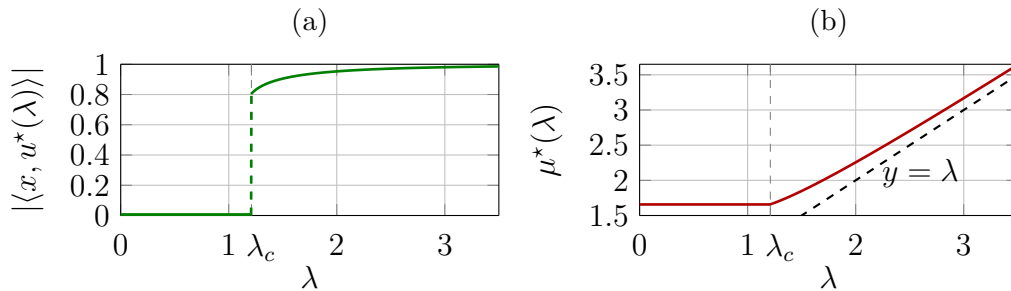


FIGURE 1 – Alignement et plus grande valeur propre estimée pour le cas symétrique.

Dans ce cadre,  $u^*$  correspond à la solution du problème d'optimisation présenté

dans la partie précédente. C'est à dire qu'il s'agit de l'estimation de maximum de vraisemblance -ou de façon équivalente- la meilleure approximation de rang 1 du vecteur  $x$  constructeur de  $Y$ .

Dans ces études, les dimensions du tenseur sont alors non nécessairement égales. On impose cependant une convergence des ratios entre les dimensions lorsque l'on procède au passage à la limite. Typiquement on requiert donc que les ratios  $\frac{N_i}{N_j}$  tendent vers des  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  lors du passage à la limite.

#### 4.2.4 Les modèles tensoriels non-symétriques

Les modèles tensoriels ne se limitent évidemment pas au cas des tenseurs symétriques. Si ces derniers sont intéressants en ce qu'ils permettent de modéliser et de considérer une large variété de problème concrets tout en exploitant certaines propriétés spécifiquement dues à la présence de symétries, ils limitent fondamentalement le caractère de généralité des résultats obtenus. Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons donc aux modèles tensoriels non-symétriques. Nous étudions en particulier le modèle suivant, de rang un, construit par analogie avec le modèle symétrique précédemment exposé.

$$\mathcal{Y} = \lambda a \otimes b \otimes c + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{W}. \quad (46)$$

Dans ce modèle, on reconnaît le paramètre  $\lambda$  qui introduit le rapport signal sur bruit. On retrouve aussi un tenseur  $\mathcal{W}$  modélisant le bruit par des entrées suivant une loi normale. A la différence du modèle symétrique notons cependant que le tenseur  $\mathcal{W}$  est cette fois non symétrique.

L'information pertinente est quant à elle contenue dans les vecteurs  $a, b, c$  générateurs du tenseur de rang 1. Dans le cadre de l'estimation, nous ne chercherons donc plus seulement à estimer un unique vecteur  $x$ , mais bien le triplet des vecteurs  $a, b, c$ .

Comme dans le cas symétrique, il est ici possible de montrer que l'estimation par maximum de vraisemblance équivaut à la meilleure approximation de rang 1. En outre, la notion de couple propre se généralise alors à celle des valeurs et des vecteurs singuliers tensoriels, de telle sorte qu'une valeur propre  $\mu$  est associée à un triplet de vecteurs  $u, v, w$  tels que,

$$\mathcal{Y}(u, v, \cdot) = \mu w, \quad \mathcal{Y}(u, \cdot, w) = \mu v, \quad \mathcal{Y}(\cdot, v, w) = \mu u.$$

Et les solutions caractérisent alors l'ensemble des points stationnaires du problème de maximum de vraisemblance parmi lesquels on trouve la solution particulière recherchée.

#### 4.2.5 Algorithmes pour l'estimation

Afin de réaliser ces estimations, on utilise notamment l'algorithme d'HOPM. D'autres méthodes pour l'estimation auraient pu être utilisées, mais l'algorithme de HOPM est l'une des plus populaires. Parmi les autres méthodes, qui ne sont pas traitées dans le stage, on trouve des approches par les idéaux [PC96], ou des décompositions en tenseurs de rang-1 [AM14].

#### 4.2.6 Etudes asymptotiques manquantes

Compte tenu des résultats obtenues dans les études précédemment présentés concernant le cas des modèles tensoriels symétriques, on s'attend à pouvoir observer une transition de phase pour l'alignement comme pour la valeur propre dominante dans le cas des modèles tensoriels non-symétriques.

Cependant, nous ne disposons au début de cette d'étude d'aucune étude ou document de référence nous permettant d'anticiper précisément les résultats. Et d'autre part, les expressions analytiques de transition ne sont pas connues.

#### 4.2.7 Applications possibles

De nombreuses applications peuvent être envisagées pour l'utilisation des modèles tensoriels. Ils sont effet utiles dès lors que dimensions du tenseur de données ne sont pas égales entre-elles. Plus concrètement, on peut penser à des problèmes d'estimation de modèles à variables latentes pour les cas de décomposition symétrique ou de problèmes de séparation de sources qui mettent en œuvre des modèles dissymétriques. Les travaux de N.D.Siriopoulos montrent dans quelle mesure ces approches peuvent être utiles pour le co-clustering qui correspond à créer des groupes sur la base de ressemblances partielles entre les éléments d'un même groupe [EEP13]. On peut retrouver de nombreux autres exemples d'applications dans l'introduction de [NDS17], qui constitue en outre une ressource précieuse référencant de nombreuses méthodes de décomposition de tenseurs.

Par ailleurs, dans le cas symétrique, on peut penser que l'estimation tensorielle permet de faire de la détection de communautés dans des hypergraphes. Nous discuterons plus avant des hypergraphes dans le développement de ce rapport, mais l'on peut d'ores et déjà avancer que ceux-ci permettent d'inclure plus de complexité dans les rapports entretenus entre les agents que les graphes classiques. Dans le même esprit, l'étude des modèles tensoriels peut aussi ouvrir les portes du matching de points dans des images distinctes d'un objet identique et donc servir à faire de l'identification [XL12][HK19].

## 5 Objectifs du travail de recherche

### 5.1 Extension des résultats du modèle symétrique au cas non-symétrique

Dans ce travail, nous commencerons par chercher à obtenir des résultats préliminaires pour le cas des modèles tensoriels non-symétriques. En prenant appui sur les études existantes dans le cadre des modèles symétriques, nous construiront notre démarche d'étude en parallèle à celle menée au travers des recherches existantes sur les modèles de tenseurs symétriques.

#### 5.1.1 Développement des expressions analytiques

Dans un premier temps, nous menons une étude analytique pour une partie seulement du modèle tensoriel non-symétrique. On se concentre en effet sur l'expression de la loi spectrale limite dans le cas asymptotique des contractions du modèle pour le cas  $\lambda = 0$ . Cela permet d'étudier seulement la partie bruitée du calcul et devra être complété par une étude de la partie significative du tenseur pour produire un résultat complet.

L'objectif est donc d'étudier la mesure spectrale des matrices  $W(u, \cdot, \cdot)$ ,  $W(\cdot, v, \cdot)$  et  $W(\cdot, \cdot, w)$ , pour des vecteurs de norme unité  $u, v, w$ , lorsque toutes les dimensions de  $W$  tendent à l'infini selon certains ratios.

Nous avons restreint ainsi l'étude pour des raisons de complexité des calculs à réaliser et du temps disponible dans ce stage. Ceux-ci sont déjà longs et prompts à de nombreuses difficultés dans le cadre du seul tenseur de bruit où toutes les entrées sont pourtant indépendantes entre-elles. Dans le cadre de la partie significative  $\lambda a \otimes b \otimes c$ , on verrait apparaître des dépendances entre les termes qui ajoutent des considérations supplémentaires pour lesquelles les seuls six mois du stage n'auraient pas suffi à apporter une conclusion définitive. En effet, il aurait fallu étudier le spectre des contractions  $Y(u, \cdot, \cdot)$ ,  $Y(\cdot, v, \cdot)$  et  $Y(\cdot, \cdot, w)$ . Or les vecteurs  $u, v, w$  sont des vecteurs singuliers de  $Y$ , par conséquent ces vecteurs auraient eu une dépendance à  $W$  ce qui aurait conduit à l'apparition d'une foule de termes dans l'application de certaines parties du développement.

Néanmoins, le calcul de la loi limite des contractions de  $W$  seule demeure très utile puisqu'il constituera de toute façon un ingrédient requis pour mener l'analyse complète.

### 5.1.2 Etude qualitative via les simulations numériques

Nous complétons cette étude analytique partielle du modèle tensoriel non-symétrique pour une étude plus qualitative. Celle-ci s'appuie sur un ensemble de simulations numériques. Dans ce rapport, cette étude qualitative apparaît en tant que complément et prolongement des résultats théoriques. Elle fut néanmoins, en pratique, réalisée en préalable et en parallèle au développement des expressions analytiques.

Dans cette étude, on cherche donc à mettre en lumière certaines propriétés du modèle tensoriel non-symétrique. Ce faisant, nous comparons ces propriétés avec celle du modèle symétrique en particulier en ce qui concerne la position et la hauteur de saut pour la transition de phase qui gouverne l'alignement asymptotique entre les vecteurs du tenseur signal et leurs respectives estimées obtenues par maximum de vraisemblance. Nous verrons en effet que ces quantités importantes évoluent en fonction des ratios entre les valeurs des dimensions.

## 5.2 Application du modèle symétrique à la détection de communautés dans un hypergraphe

Afin d'apporter à ce travail une dimension plus concrète et pratique, nous avons aussi décider d'appliquer le modèle symétrique à la détection de communautés dans un hypergraphe. Cette partie applicative permettra de mettre en lumière l'importance du phénomène de transition de phase dont il a été fait mention plus haut, et ce au sein d'un problème concret où le formalisme tensoriel est requis.

### 5.2.1 Modélisation et mise en œuvre

Pour ce faire, nous concevons d'abord une méthode spectrale tensorielle pour la détection de communauté en modélisant le tenseur d'adjacence par un modèle aléatoire symétrique. On s'appuie alors sur le *Stochastic Block Model* du cas matriciel généralisé au cas tensoriel pour construire notre méthode d'estimation des communautés. On montre notamment qu'en enlevant un terme indésirable à ce modèle tensoriel il ne reste qu'un modèle de rang 2 couplé à du bruit additif. Ce processus de retrait du terme indésirable demande la mise en œuvre d'une estimation d'un paramètre du modèle pour laquelle nous proposons une stratégie originale.

Les termes générateurs de ce modèle de rang 2 sont deux vecteurs de rang 1 orthogonaux et portant l'information quant à l'appartenance de chaque individus aux communautés. Nous montrerons alors comment exploiter cette orthogonalité afin de relier l'estimation de la structure des communautés à la recherche des couples propres dominants du tenseur d'adjacence.

### **5.2.2 Etude de la transition de phase pour la détection**

Pour ce travail, nous avons commencé par faire une étude de la transition de phase permettant la détection de communautés. Pour ce faire, nous procédons par simulations de détections sur des données synthétiques générées selon le modèle SBM. Dans ce rapport, je détaillerai la stratégie proposée de détection des communautés ainsi que les difficultés d'estimation auxquelles nous avons pu faire face.

### **5.2.3 Comparaison au cas matriciel de la détection de communautés dans un graphe**

Pour compléter l'étude détaillée ci-dessus, nous comparons alors les résultats de simulation pour la détection de communautés dans un hypergraphe avec ceux obtenus pour le cas de l'utilisation de graphes simples. Nous montrons ainsi que l'ajout d'informations induit par l'utilisation de la structure d'hypergraphe permet bel et bien d'obtenir un gain d'efficacité pour la capacité de détection.

## 6 Etude qualitative empirique

### 6.1 Outils Algorithmiques

Dans cette première partie, on se concentre sur l'étude des tenseurs et de leur décomposition via la Higher Order Power Method (HOPM) dont on a trouvé une explication détaillée dans l'article de S.Hu et G.Li [G.L18]. Les tenseurs sont considérés sous l'hypothèse du rang-1, et sont ainsi résultants du produit tensoriel de  $N$  vecteurs ( $N$  étant le nombre de modes du tenseur). Dans notre cas d'étude, où  $N = 3$ , le but assigné est de reconstruire ces trois vecteurs à partir de la connaissance seule du tenseur. Pour ce faire, c'est l'algorithme HOPM qui est ici employé (à noter que d'autres algorithmes de décomposition existent basés par exemple sur des méthodes d'optimisation classique comme la méthode de Gauss-Newton). Cet algorithme cherche à aboutir à un alignement maximal entre les vecteurs d'estimation et les vecteurs du modèle réel, et résout ainsi un problème d'optimisation.

En effet, si l'on considère notre tenseur comme un tenseur de rang-1 perturbé par du bruit additif gaussien, on peut alors l'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{A} = \lambda \mathcal{X} + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{W} \quad (47)$$

avec  $\mathcal{X} = a \otimes b \otimes c$  où  $a, b, c$  sont dans  $\mathbb{S}^{N_1-1}, \mathbb{S}^{N_2-1}, \mathbb{S}^{N_3-1}$  tel que  $N_1 \leq N_2 \leq N_3$ , et  $\mathcal{W}$  est un tenseur dont les entrées sont  $w_{i,j,k} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

On cherche dès lors à estimer  $a, b, c$  et  $\lambda$  par  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  et  $\hat{\lambda}$  de sorte que l'on ait  $\|\mathcal{A} - \hat{\lambda} \hat{a} \otimes \hat{b} \otimes \hat{c}\|_F$  aussi petit que possible, ce qui s'écrit encore :

$$\arg \min_{\hat{\lambda} \in \mathbb{R}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{S}^{N-1}} \|\mathcal{A} - \hat{\lambda} \hat{a} \otimes \hat{b} \otimes \hat{c}\|_F^2. \quad (48)$$

Cette méthode se déroule comme présenté dans l'Algorithme 1. On commence par initialiser les variables du problème d'optimisation. Ces vecteurs sont pris de telle sorte qu'ils ne soient pas orthogonaux au vecteur auquel ils correspondent dans  $\mathcal{X}$ . Une telle configuration d'orthogonalité est en réalité de probabilité presque nulle puisque l'hyperplan défini par l'orthogonalité au vecteur est de dimension zéro au sein de l'espace.

L'algorithme de recherche d'un point optimal dans l'espace des paramètres est ensuite itéré. Je précise deux condition d'arrêt possibles : un nombre maximum d'itérations, ainsi qu'un critère de convergence sur l'alignement. En particulier, on observe l'évolution de l'alignement entre deux estimateurs successifs et on cesse la



recherche dès lors que cet alignement atteint une valeur supérieur à un seuil donné défini par  $1-\epsilon$ , où  $\epsilon > 0$  est pris aussi petit que souhaité.

Le procédé d'estimation repose sur le recours à la contraction de notre tenseur avec une variable  $\tau$  construite comme le produit tensoriel de nos estimées, exception faite de celle que nous voulons mettre à jour. Le résultat de cette contraction produit une nouvelle estimée que l'on normalise ensuite. Cette opération de mise à jour est effectuée pour chacun des trois modes du tenseur, avant de passer à l'itération suivante si les critères de convergence ne sont pas vérifiés.

$$\begin{aligned}\tau(x) &= x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \\ \tau_i(x) &= x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n \\ &\text{où } n \text{ est le nombre de directions du tenseur}\end{aligned}$$

---

**Algorithm 1** HOPM : Estimation de tenseur de rang-1, pour 3 directions

---

```

1: Entrée  $\mathcal{A}$  ▷ Un tenseur non-nul
2: Entrée  $MaxIter, \epsilon$  ▷ Les critères d'arrêt
3: Initialisations :
4:  $x_1, x_2, x_3$  ▷ Nos estimateurs, tels que  $\langle A, \tau(x) \rangle \neq 0$ 
5:  $i = 0$ 
6:  $\delta = 0$  ▷ Valeur courante de l'alignement entre estimées successives
7: while  $i < MaxIter$  &&  $\delta < 1 - \epsilon$  do
8:    $i = i + 1$ 
9:    $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 \leftarrow x_1, x_2, x_3$  ▷ Stockage des estimées de l'itération précédente
10:  for  $k = 1, k < 4, k++$  do
11:     $t \leftarrow \tau_k(x_1, x_2, x_3)$ 
12:     $\lambda = At$  ▷ Une contraction
13:     $x_k \leftarrow \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$ 
14:  end for
15:   $alignements \leftarrow [|x_1^T * \hat{x}_1|, |x_2^T * \hat{x}_2|, |x_3^T * \hat{x}_3|]$ 
16:   $\delta \leftarrow \min(alignements)$ 
17: end while

```

---

Le bon fonctionnement de cet algorithme peut être vérifié sur un cas simple pour l'estimation d'un tenseur de rang-1 sans présence de bruit.

**Exemple.** Soit  $A = a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$

Prenons  $x = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$  tels que  $\langle A, \tau(x) \rangle \neq 0$  Alors  $\tau_1 = \hat{x}_2 \otimes \hat{x}_3$

Donc  $\lambda = A\tau_1 = a_1 \langle \hat{x}_2, a_2 \rangle \langle \hat{x}_3, a_3 \rangle$

Comme les  $a_i$  sont normalisés, on a  $\|a_1\| = 1$

Par conséquent  $\hat{x}_1 \leftarrow \frac{\lambda}{\|\lambda\|} = a_1$

Et il en va de même pour les itérations sur  $x_2$  et  $x_3$ . Dans ce cadre, la convergence

*est immédiate. Et  $a, b, c$  sont exactement estimé en une unique itération.*

## 6.2 Description de la simulation

### 6.2.1 Principe général

La simulation vise à calculer les alignement obtenus via l'algorithme de HOPM en fonction des différents ratio signal sur bruit, pour un tenseur de données  $\mathcal{A}$  qui suit le modèle de rang 1 avec bruit additif gaussien. C'est à dire en fonction de différents  $\lambda$ . On calcule en outre la valeur singulière associée aux trois vecteurs estimés à chaque itération.

On a déjà vu dans les parties précédentes que de telles simulations étudiées dans la littérature pour le cas symétrique montrent une transition de phase, selon laquelle les alignements sont nuls avant un seuil de  $\lambda$  et non-nuls après. Pour notre cas non-symétrique, il est apparu que les résultats obtenus varient en fonction des dimensions du tenseur. Le changement des ratios entre les dimensions influe en effet sur la position de la transition de phase ainsi que sur la hauteur de saut qui caractérise cette transition de phase.

Dans cette partie, je décris les étapes précises de la simulation jusqu'à obtention des figures d'alignement et de valeurs singulières. L'analyse de ces courbes pour l'étude de la position de transition de phase et de hauteur de saut est faite par la suite après l'obtention des courbes d'alignement. Elle constitue une étape de post-traitement qui fera l'objet de la section suivante.

Pour la simulation des courbes d'alignement, on commence par générer un tenseur de taille  $N_1, N_2, N_3$ . Ces tailles sont choisies dans l'ordre croissant. Le tenseur est ensuite généré à partir de trois vecteurs générés aléatoirement selon la fonction *randn*. Chacun de ces vecteurs est alors normalisé. On combine les trois vecteurs obtenus en un tenseur par une opération de produit externe. Ce tenseur de base constitue le cœur de notre modèle, ou l'information utile.

On lance ensuite les calculs d'alignement pour différents  $\lambda$ . Après quelques simulations, nous savons empiriquement que la transition a usuellement lieu autour de  $\lambda = 1$  et qu'elle peut se décaler jusqu'à  $\lambda = 2$  dans nos simulations. Par conséquent, pour bien visualiser les courbes, nous choisissons une plage de  $\lambda$  s'étendant de 0.01 à 4. Pour chaque  $\lambda$  ainsi choisi comme facteur de bruit, on réalisera un ensemble de 30 mesures d'alignement.

Afin de compléter le cœur de modèle déjà constitué à partir du produit externe de trois vecteurs normalisés fixés, on doit encore ajouter le tenseur de bruit. Pour éviter tout biais dans notre simulation, ce tenseur de bruit est régénéré à chaque nouvelle

itération de calcul. C'est à dire que pour un  $\lambda$  donné, on réalise 30 échantillons de mesure d'alignement dont chacun possèdera un tenseur de bruit différent.

Avant de finalement pouvoir lancer la procédure HOPM, il nous faut encore disposer d'un vecteur initial. On distingue deux procédés d'initialisation de ce vecteur en fonction de la valeur de  $\lambda$ . En effet, on sait empiriquement que pour tout valeur de  $\lambda$  inférieure à la position de la transition de phase, il n'y a pas de convergence de l'algorithme vers la bonne solution tandis que pour les valeurs supérieures, cette convergence a bien lieu vers une solution proche des vecteurs recherchés mais néanmoins perturbée par la présence de bruit.

Par conséquent, afin de gagner du temps de calcul et de s'assurer une initialisation dans le bassin d'attraction de la solution, on initialise le vecteur de début de HOMP aux valeurs des vecteurs constitutifs du cœur de modèle dans le cas où l'on peut penser que  $\lambda$  est proche ou supérieur à la valeur de la position de transition. En pratique cela vaut à partir de  $\lambda > 1$ . Au contraire, pour les  $\lambda < 1$ , on initialise les vecteurs de départ avec des valeurs aléatoires. Dans ce cas, le but est de supprimer un biais sur les résultats si on initialise sur les vrais vecteurs, car on finirait par tomber sur un maximum local produisant uniquement des alignements positifs.

### **6.2.2 Post-traitement : hauteur de saut et position de transition de phase**

Une fois les courbes d'alignements obtenues par l'algorithme précédemment décrit, il nous reste encore à les exploiter. La première chose que l'on remarque est que le changement de la taille relative des dimensions du modèles tensoriel entraîne une modification de la hauteur de saut des transitions de phases. C'est ce qu'illustre la Figure 2 ci-dessous.

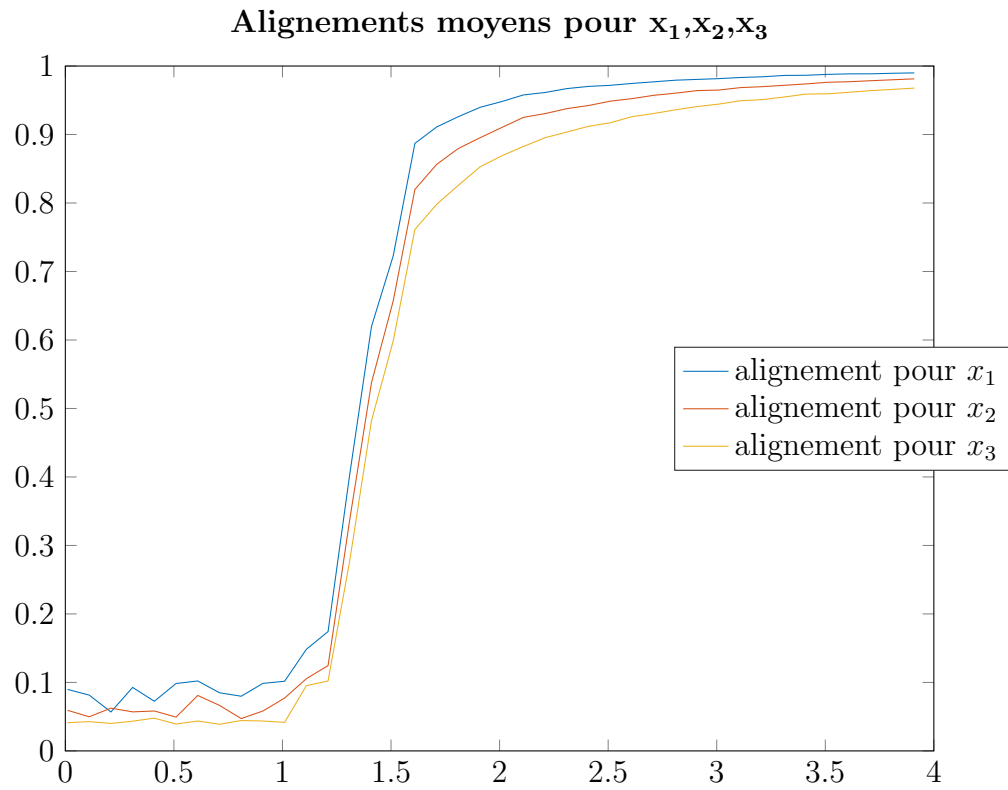
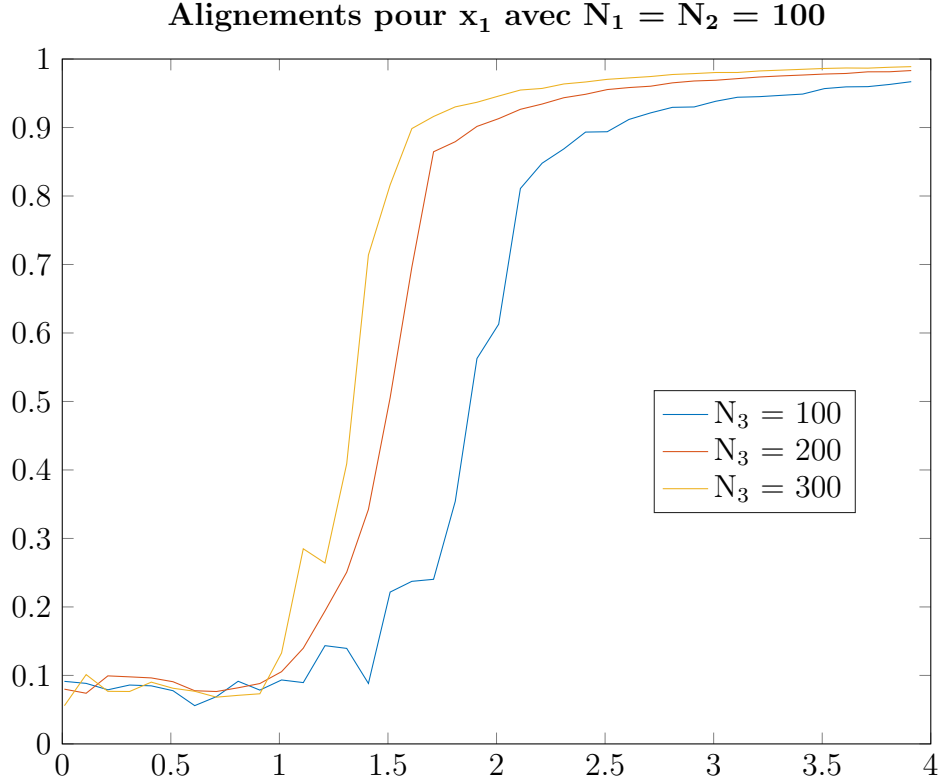


FIGURE 2 – Effet des dimensions sur la hauteur de saut  $N_1 = 100, N_2 = 200, N_3 = 350$ .

En outre, il apparait que la position même de la transition est modifiée lorsque les ratios des tailles des dimensions évoluent. J'illustre une ce phénomène par la Figure 3.

FIGURE 3 – Décalage de la transition de phase selon  $N_3$ 

Pour analyser ces deux propriétés dépendantes des tailles de dimensions, je propose de calculer un ensemble de transitions de phase pour différents ratios des dimensions. De cette façon, il sera possible de tracer les valeurs de ces propriétés en fonction des tailles des dimensions du tenseur.

Pour ce faire, il nous faut trouver une méthode de repérage de la transition de phase. Trois approches ont été suivies. La première approche est une approche par dichotomie. On sait en effet que la transition de phase est très localisée, et qu'elle permet à la courbe de passer d'ordonnées proches de 0 à des ordonnées proches de 1. Par conséquent, si l'on parvient à trouver l'abscisse pour laquelle l'ordonnée de la courbe vaut 0.5, on pourra dire qu'il s'agit aussi de l'abscisse de la transition de phase. Pour cela, on prend deux points extrêmes  $p_1, p_2$ , de part et d'autre de la transition de phase, dont on sait qu'elle a lieu dans l'intervalle  $[1, 2]$  en général. On calcule alors l'ordonnée correspondant au point situé au milieu du segment  $[p_1, p_2]$ . Selon que cette ordonnée est plus grande ou plus petite que 0.5, on tronque respectivement la partie droite ou la partie gauche du segment considéré et on réitère l'opération sur le nouveau segment. On arrête lorsque l'on se trouve à une ordonnée

proche de 0.5, ou bien lorsque le segment est devenu très étroit (on réduit la taille du segment par deux à chaque itération, et on arrive donc assez rapidement à de petites valeurs et à une grande précision).

La méthode décrite ci-dessus est notamment utilisée pour la calcul de la position de la transition de phase. L'avantage est qu'elle ne requiert pas de calculer l'ensemble de la courbe d'alignement, mais seulement les points délimitant le segment. C'est donc une approche utile compte tenu que l'on va chercher à calculer la position de phase pour de nombreuses configurations différentes du tenseur.

Au contraire, pour le calcul de la hauteur de saut, il faut disposer d'un segment plus complet de la courbe de transition. Dans ce cas, on peut plus simplement calculer la position de la transition de phase par un simple calcul de la pente de la courbe d'alignement. En effet, la transition de phase a lieu là où cette pente est maximale. La hauteur de saut peut ensuite être calculée en prenant la valeur de l'ordonnée de la courbe pour des abscisses légèrement plus grandes. La dernière méthode, pour le calcul de la hauteur de saut, se base aussi sur un calcul de pente, mais tente de trouver directement la hauteur de saut en s'appuyant sur une valeur de la pente. Le principe est alors le suivant : en partant de la droite de la courbe d'alignement, on calcule la pente de droite à gauche. Plus on progresse vers la gauche, plus la pente augmente à mesure que l'on s'approche alors de la transition de phase. Dès que la pente calculée dépasse un seuil fixé empiriquement, on cesse la progression et on prend l'ordonnée correspondante comme valeur de la hauteur de saut.

Dans le cas des deux dernières méthodes, elles permettent de calculer la hauteur de saut avec des résultats similaires. Elles requièrent toutes deux de fixer un paramètre de façon empirique : pour la première, c'est le décalage que l'on choisit de prendre par rapport à la position de transition de phase pour le calcul de l'ordonnée ; et pour la seconde c'est le seuil de pente pour lequel on arrête l'algorithme. Dans tous les cas, il n'existe pas vraiment de critère rigoureux pour le calcul de cette hauteur de saut étant donné que nous sommes obligés de réaliser la simulation avec des dimensions finies, alors que la transition de phase n'a lieu que dans un sens asymptotique.

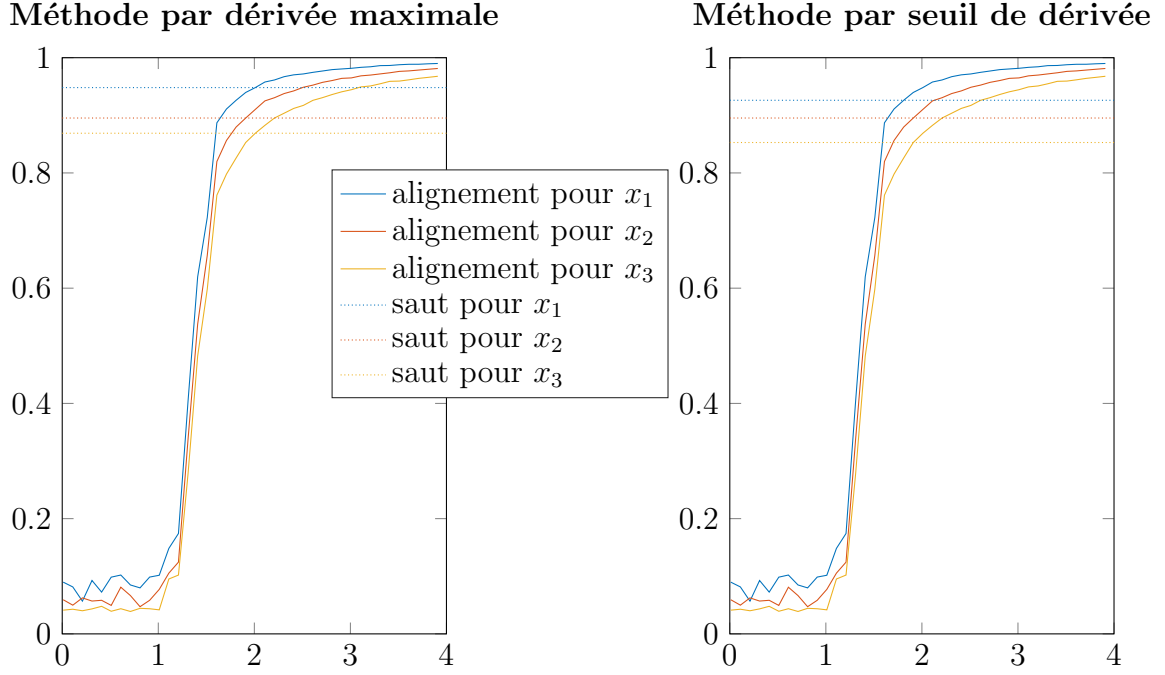


FIGURE 4 – Comparaison des calculs de hauteur de saut : par dérivée maximale (a), par seuil de pente (b)

## 6.3 Présentation des résultats

### 6.3.1 Position de la transition de phase

Notons que la procédure HOPM ne donne pas nécessairement la solution optimale du problème mais ne permet qu'uniquement d'obtenir une solution sous-optimale dans certains cas. En particulier, puisque nous ajoutons un bruit blanc à notre modèle il est possible que l'algorithme converge dans une partie de l'espace des solutions dans une direction inadéquate et reste bloqué sur cette solution sous-optimale. Si l'on réalise quelques simulations, on se rend compte que les tracés montrent que dès lors que le bruit gagne en importance, on assiste à une dégradation soudaine de la qualité de la solution.

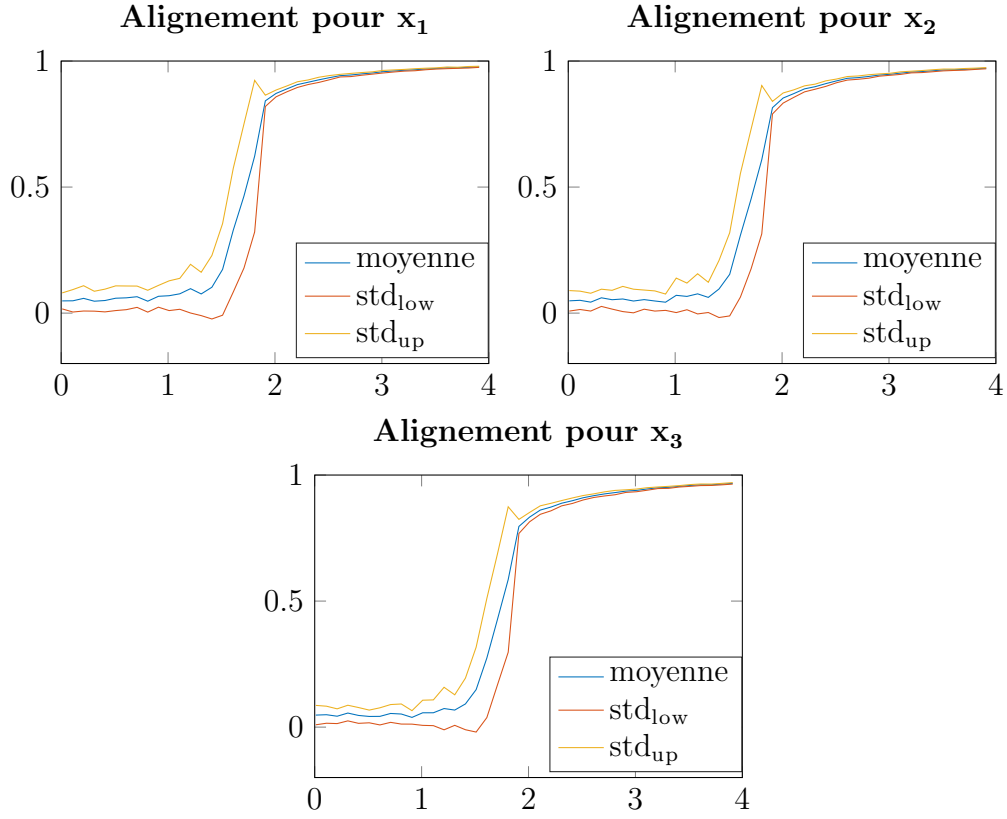
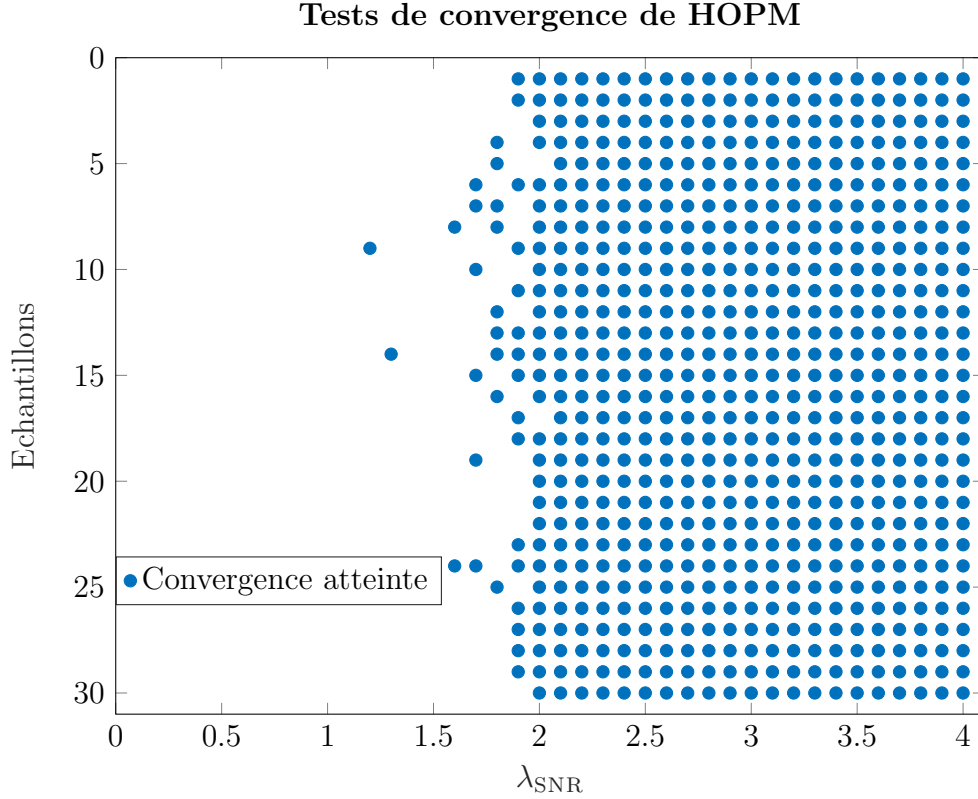


FIGURE 5 – Alignements pour les trois vecteurs.

Sur la Figure 5, nous illustrons bien cette transition pour les trois vecteurs constitutifs du tenseur. Elle rappelle ce que l'on observait déjà dans le cas symétrique. Une analyse des résultats de convergence de l'algorithme de HOPM est présentée graphiquement par la Figure 6. Cette figure montre par les points bleus les appels à l'algorithme HOPM qui ont donnés lieu à une convergence avant d'atteindre le seuil limite d'itérations (fixé à 1000). Les espaces en blanc représentent le cas où le seuil d'itération maximal a été atteint et où l'algorithme d'HOPM n'a donc pas convergé.



FIGURE 6 – Convergence de la procédure HOPM selon  $\lambda$ 

On peut y ignorer la partie à l'extrême gauche du graphe où le nombre d'itérations de HOPM est limitée à un petit nombre pour réduire le temps de calcul et puisque nous savons, par des expériences sur un faible nombre de  $\lambda$  que cette partie ne concerne pas le phénomène de transition. Cependant à partir de la colonne 10 et pour toutes celles qui suivent, c'est-à-dire celles qui correspondent à des valeurs de  $\lambda$  supérieures à 1, le nombre d'itérations est fixée à 1000. On y découvre cependant, que même dans ce cadre la convergence de la méthode n'a lieu que pour des valeurs encore plus élevées de  $\lambda$ , et il faut attendre  $\lambda \approx 2$  pour avoir la convergence à coup sûr.

Comme dans le cas matriciel, il est aussi possible de tracer l'évolution des facteurs de normalisation en fin de procédure HOPM. Ces facteurs de normalisation correspondent en fait à des contractions du tenseur de données synthétiques par les trois vecteurs estimés et représente donc une estimation de la plus grande valeur propre tensorielle associée à notre modèle (pour plus d'informations sur l'opération de contraction, le lecteur peut se référer à la partie 7.1). Ce tracé est fait sur la Figure 7.

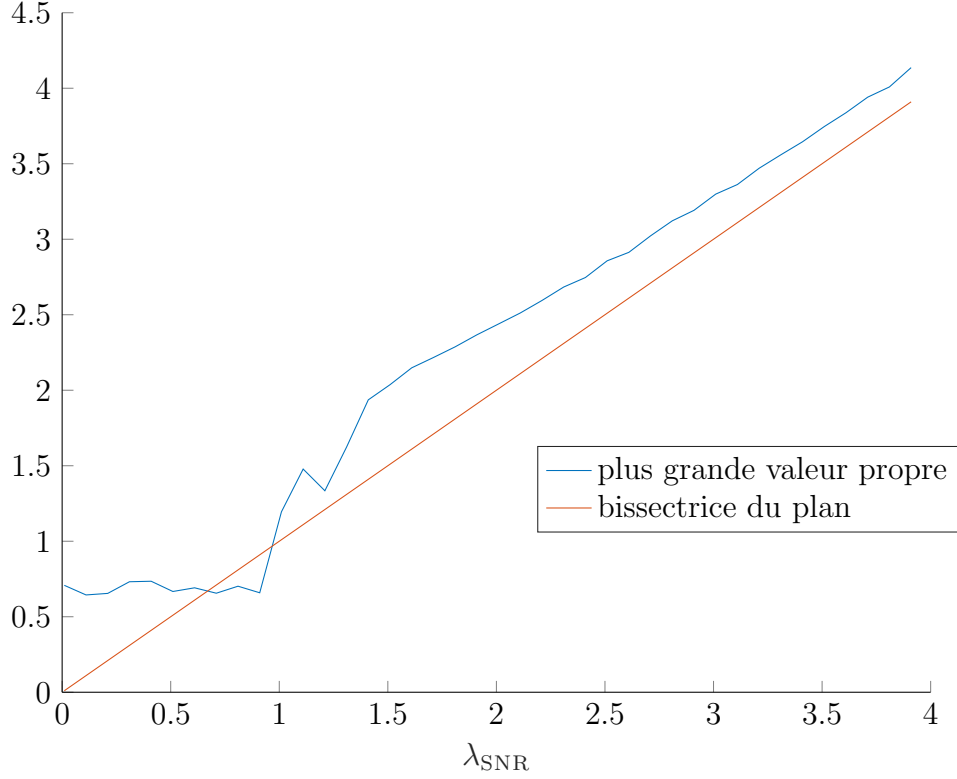


FIGURE 7 – Tracés de la plus grande valeur singulière tensorielle  $\lambda_{HOMP}$  en fonction des  $\lambda_{SNR}$  (en bleu) et de la bissectrice du plan (en orange)

Ce tracé montre alors la convergence de la valeur singulière dominante vers la bissectrice du quadrant positif du plan. Et montre aussi le changement de comportement autour de 1, dû à la transition de phase.

### 6.3.2 Effet de la dimension : déplacement de la transition

Afin d'affiner notre compréhension des phénomènes en jeu, nous décidons de développer une analyse de la position de la transition dont on a déjà exposé qu'elle est modifiée selon les dimensions du tenseur.

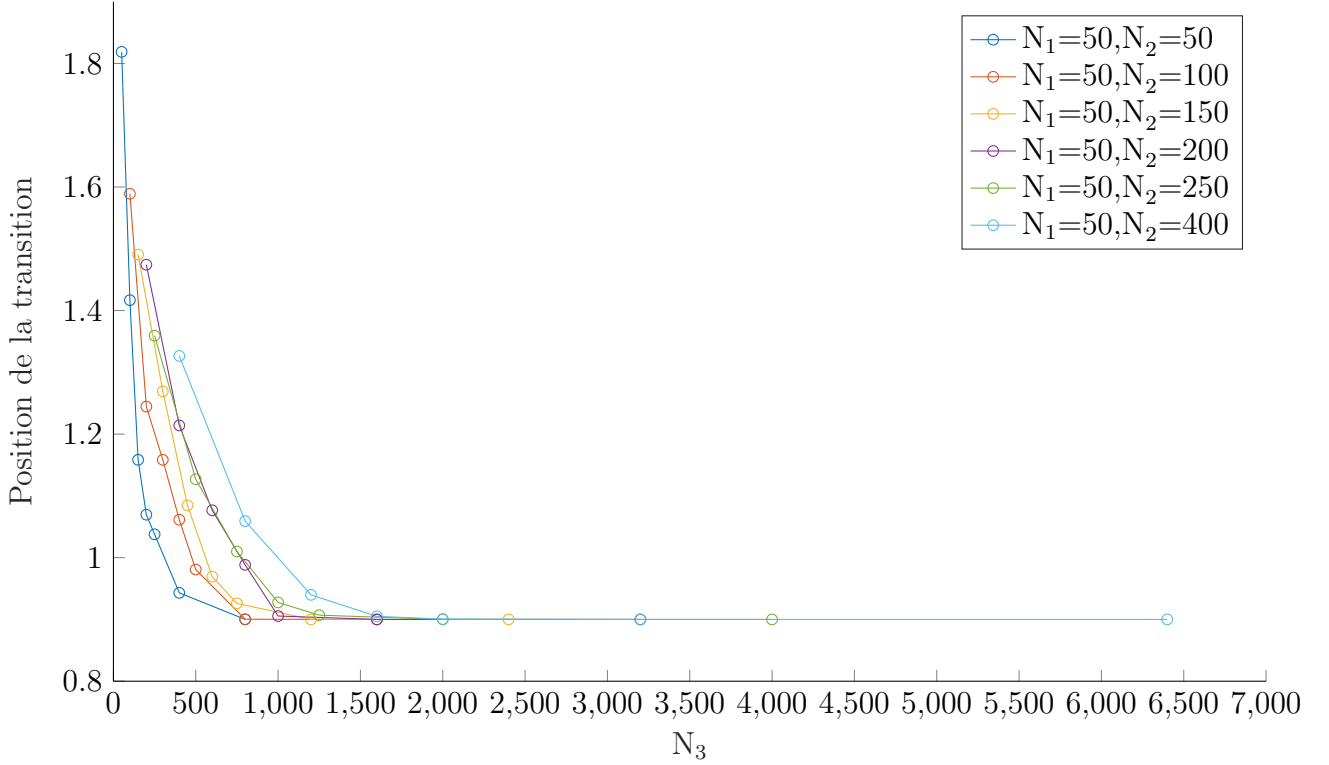
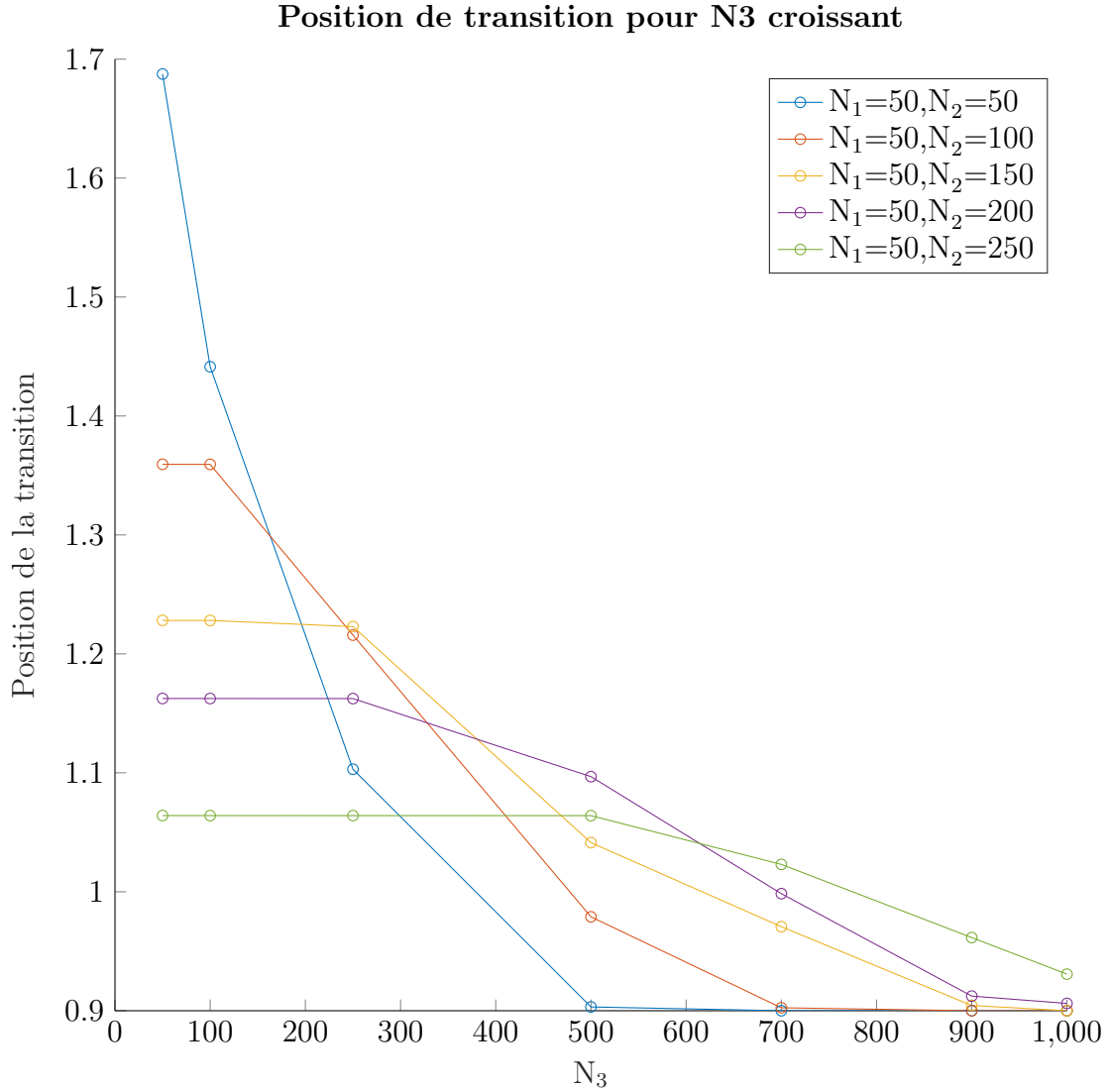
Position de transition pour  $N_3$  croissant

FIGURE 8 – Effet des dimensions sur la position de la transition

Dans la Figure 8, on trace la position de la transition observée dans la partie précédente en fonction de l'évolution des dimensions du tenseur dans différentes directions. La dimension de  $N_1$  reste toujours inchangée et est égale à 50. Les autres dimensions évoluent selon des multiples de  $N_1$ . Précisément, une valeur pour  $N_2$  est choisie dans l'ensemble  $\{50, 100, 150, 200, 250, 400\}$  et est fixée. On calcule alors pour  $N_1, N_2$  ainsi fixées les positions de la transition en fonction de la valeur de  $N_3$  prise comme multiple de  $N_2$  selon les facteurs  $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 16\}$ .

Notons qu'en choisissant cette méthode de tracé, les courbes débutent à des abscisses différentes. Une autre expérience nous permet cependant de constater que les courbes ont une valeur globalement constante pour les abscisses plus petites comme le montre la Figure 9. Par conséquent, le mode de tracé choisi nous permet de dresser quelques hypothèses sur le comportement général de l'estimation en fonction des dimensions du tenseur considéré.

FIGURE 9 – Position de transition constante pour  $N_3 \leq 2N_2$ 

Il apparait que l'accroissement de la taille de l'une des dimensions du vecteur induit un décalage vers la gauche important de la transition. Notons que l'accroissement d'une seule dimension suffit à réduire la position de la transition. On voit que plus la taille de  $N_2$  augmente, plus la position de la transition de départ est décalée vers la gauche. Selon la taille initiale de  $N_2$  l'accroissement de la taille de  $N_3$  a un effet de plus en plus mitigé à mesure que  $N_2$  est plus grande. L'ensemble des courbes semblent être minorées par une valeur seuil légèrement inférieure à 0.9. Par conséquent, si l'une (ou deux) des dimensions est (sont) bien plus grande(s) que les

deux autres (l'autre), alors la transition de phase survient pour un SNR plus faible. Du point de vue de l'estimation de  $a$ , avoir  $N_3$  et  $N_2$  beaucoup plus grandes que  $N_1$  fournit un nombre de données important, puis étant capable de bien estimer  $a$ , HOPM arrive ensuite à trouver  $b$  et  $c$  aussi.

Il est à noter que ce sont bien l'ensemble des transitions sur tous les vecteurs qui voient leur position se décaler vers la gauche, et non pas seulement la position de la transition associée à celui d'entre eux pour lequel la dimension croît. Leurs transitions, si l'on ignore les différences en termes de saut de la transition, sont d'ailleurs largement superposées. Soit les trois vecteurs sont estimés correctement simultanément, soit aucun d'entre-eux ne l'est.

**Construction d'un modèle pour la position de transition** Dans le stage, une évaluation des paramètres régissant le déplacement de la position de la transition de phase a aussi été réalisée. On y cherche à expliciter dans un premier temps une fonction  $f(N_1 = 50, N_2, N_3)$  décrivant les courbes présentées.

Pour ce faire, on considère les points obtenus dans les courbes précédentes comme un plan d'expériences constitué des paramètres d'entrée  $N_1, N_2, N_3$ , où  $N_1$  est fixé à 50.

La fonction approximée ne dépendra alors qu'uniquement de  $N_2$  et  $N_3$ , mais  $N_1$  est néanmoins pris en compte dans les calculs d'estimation.

Au vu des courbes précédentes, on peut essayer de deviner les relations entre les paramètres de la courbe. En particulier, on a vu que le ratio entre les tailles des différentes directions semble jouer un rôle important. D'autre part, les points s'organisent selon une hyperbole, invitant à considérer des termes d'ordre 2. Par conséquent, j'inclue dans mon modèle l'ensemble de ces relations et des termes d'ordre supérieur. A première vue, j'esquisse donc le squelette de ma fonction d'estimation comme suit :

$f(N_1 = 50, N_2, N_3) = b_0 + b_1 N_1 + b_2 N_2 + b_3 N_3 + b_4 \frac{N_1}{N_2} + b_5 \frac{N_1}{N_3} + b_6 \frac{N_2}{N_3} + b_7 N_1^2 + b_8 N_2^2 + b_9 N_3^2$   
où les  $b_i$  sont les coefficients à estimer. Le résultat de cette estimation retient la fonction suivante :

$$f(N_1 = 50, N_2, N_3) = b_0 + b_2 N_2 + b_5 \frac{N_1}{N_3} + b_6 \frac{N_2}{N_3} + b_9 N_3^2, \quad (49)$$

Les  $b_i$  retenus sont le résultat d'une estimation puis d'une optimisation du modèle. Un test de Student montre des p-values toutes largement inférieures à 5%, et le  $R^2 = 0.97$ . Pour information :

$$b_1 = 0.87; \quad (50)$$

$$b_2 = -2.7 \times 10^{-4}; \quad (51)$$

$$b_5 = 0.46; \quad (52)$$

$$b_6 = 0.53; \quad (53)$$

$$b_9 = 2.8 \times 10^{-9}. \quad (54)$$

On remarque notamment l'importance des ratios entre dimensions dans le modèle de la position de la transition de phase. On verra que ces ratios jouent un rôle prévalant dans l'étude analytique du terme de bruit du modèle tensoriel asymétrique. Afin d'illustrer la précision du modèle la Figure 10 présente une superposition de deux échantillons avec le modèle.

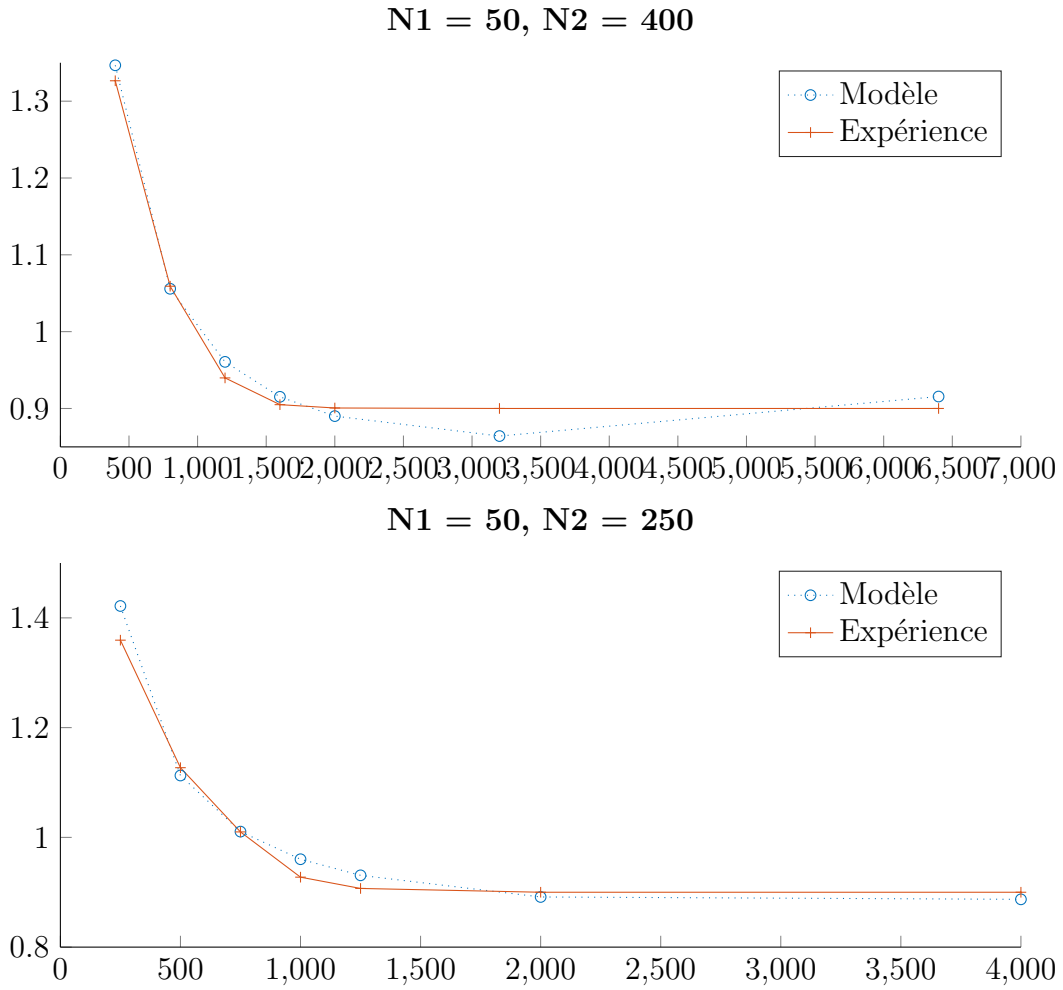


FIGURE 10 – Superposition expérience et modèle.

### 6.3.3 Hauteur de saut de la transition de phase

On a aussi vu que différentes dimensions induisent différentes hauteurs de saut pour la transition de phase. Ces résultats sont déjà illustrés par l'exemple de la Figure 2. Pour mieux percevoir la dynamique de cet effet des dimensions sur la hauteur de saut, nous réalisons ici aussi une compilation de mesure de hauteur de saut en fonction de différentes configurations du tenseur. Les résultats de cette étude sont présentés en Figure 11.

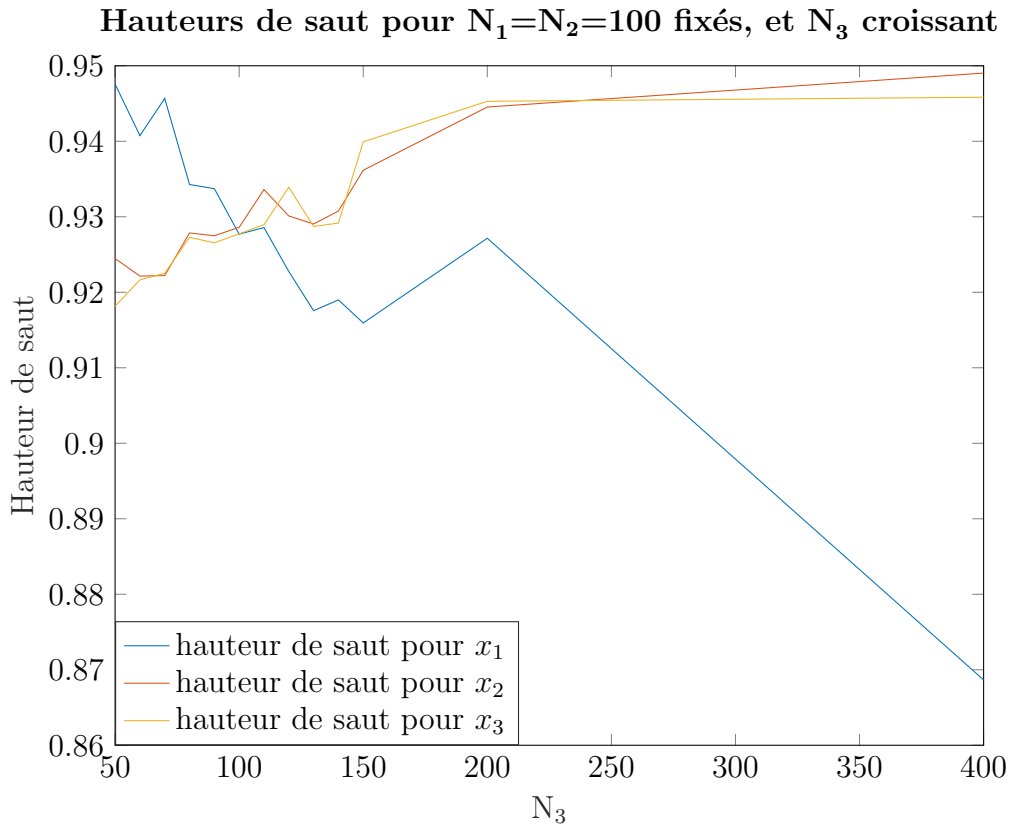


FIGURE 11 – Variations des hauteurs de saut à  $N_1, N_2$  fixés égaux à 100, et  $N_3$  croissant.

Ce que l'on remarque ici, c'est que dans un premier temps la hauteur de saut associée à la dimension  $N_3$  décroît à mesure que  $N_3$  croît et que les hauteurs de saut associées à  $N_1$  et  $N_2$  croissent au contraire avec l'accroissement de  $N_3$ . Cette dynamique a lieu tant que  $N_3 \leq N_1$ . Lorsque toutes les dimensions sont égales, toutes les hauteurs de saut le sont aussi. Après cela, dès que  $N_3$  devient plus grande que  $N_1$  et  $N_2$ , la hauteur de saut lui étant associée chute tandis que pour les deux autres dimensions,

elle continue de croître avant de se stabiliser.

Cela illustre donc que l'alignement obtenu est meilleur pour les dimensions du tenseur qui sont de petites tailles vis à vis de celles de grande taille. Si l'on parle par exemple d'un tenseur qui traduirait un ensemble de mesure dans le temps, associé au mode 3, on dirait alors simplement que plus la durée de mesure, donc plus  $N_3$ , est grande plus l'estimation des vecteurs pour les autres dimensions que celle du temps sera bonne. A tout le moins, il faudrait que la durée de mesure dépasse la taille des deux autres dimensions sur lesquelles on chercherait des informations. Ce comportement est logique, car on dispose de plus de relativement plus données pour estimer  $a$  et  $b$  que pour estimer  $c$ , celui-ci étant de dimension plus grande.



## 7 Premières expressions analytiques en prolongement des simulations

### 7.1 Contraction et couples propres tensoriels

On appelle tenseur d'ordre  $n$ , un tableau résultant du produit tensoriel de  $n$  vecteurs de l'espace. Il est alors possible de définir quelques outils et concepts important pour la suite du rapport.

On appelle contraction  $\mathcal{Y}(\cdot, \cdot, \nu)$  d'un tenseur d'ordre 3,  $\mathcal{Y}$  que l'on prend ici symétrique, selon un vecteur  $\nu \in \mathbb{R}^N$  et le mode 3 l'opération qui réduit l'ordre d'un tenseur en réalisant la somme terme à terme des couches du tenseur selon la direction  $i$  et pondérées par les éléments du vecteurs  $\nu$ ,

$$\mathcal{Y}(\cdot, \cdot, \nu) = \sum_{i=1}^N \nu_i \mathcal{Y}_{:i\cdot} \quad (55)$$

En réduisant ainsi l'ordre du tenseur de 1, on obtiendra une matrice. Une contraction sur plusieurs modes est aussi possible, elle réduira d'autant la dimension du tenseur. Pour un tenseur d'ordre 3, une contraction sur deux modes donne lieu à un vecteur, et une contraction sur trois modes donne lieu à un scalaire.

On définit  $(\mu, \nu)$  comme un couple d'une valeur propre et d'un vecteur propre associé au tenseur  $\mathcal{Y}$  tel que le couple qui vérifie,

$$\mathcal{Y}(\cdot, \nu, \nu) = \mu \nu. \quad (56)$$

cela traduit directement que  $(\mu, \nu)$  est un couple propre de la matrice résultant de la contraction  $\mathcal{Y}(\nu)$ . Puisque,

$$\mathcal{Y}(\cdot, \nu, \nu) = \mathcal{Y}(\nu) \nu = \mu \nu. \quad (57)$$

Dans ce cadre, la contraction  $\mathcal{Y}(\nu, \nu, \nu) = \mu$ . La contraction peut se généraliser au cas non-symétrique. On parle alors de tuples-propres, puisqu'il faut alors un vecteur spécifique pour chaque dimension du tenseur.

### 7.2 Mesure spectrale pour un tenseur gaussien non symétrique

Dans cette partie nous reprenons l'analyse mathématique pour la convergence de la distribution empirique de valeurs propres vers la loi du demi-cercle faite dans le cadre matriciel symétrique et l'adaptions au cas tensoriel non-symétrique. Le modèle tensoriel général que nous proposons d'étudier se compose d'un tenseur de rang 1 construit sur les vecteurs  $a, b, c$  associé à un tenseur de bruit  $\mathcal{W}$  dont les entrées  $w_{ijk}$

sont indépendantes et identiquement distribuées et suivent une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On note  $N_1, N_2, N_3$  les dimensions du tenseur, toujours indicées dans l'ordre croissant. Le rapport signal sur bruit est toujours réglé par l'utilisation d'une constante  $\lambda$  réelle. On a donc,

$$Y = \lambda a \otimes b \otimes c + \frac{1}{\sqrt{N_3}} \mathcal{W}. \quad (58)$$

De façon à pouvoir appliquer des méthodes semblables à celles utilisées dans le cas matriciel, on développe trois modèles distincts par contraction .

$$M_1(u) = Y(u, \cdot, \cdot) = \lambda \langle a, u \rangle b c^T + \frac{1}{\sqrt{N_3}} \mathcal{W}(u, \cdot, \cdot), \quad (59)$$

$$M_2(v) = Y(\cdot, v, \cdot) = \lambda \langle b, v \rangle a c^T + \frac{1}{\sqrt{N_3}} \mathcal{W}(\cdot, v, \cdot), \quad (60)$$

$$M_3(\nu) = Y(\cdot, \cdot, \nu) = \lambda \langle c, \nu \rangle a b^T + \frac{1}{\sqrt{N_3}} \mathcal{W}(\cdot, \cdot, \nu). \quad (61)$$

Avec  $u, v, \nu$  des vecteurs de norme unitaire dans  $\mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}, \mathbb{R}^{N_3}$  respectivement. Dans ce travail, on se limite à l'étude du cas où  $\lambda = 0$ . Le modèle devient alors :

$$M_3(\nu) = Y(\cdot, \cdot, \nu) = \frac{1}{\sqrt{N_3}} \mathcal{W}(\cdot, \cdot, \nu). \quad (62)$$

On commence par définir la résolvante de  $\frac{1}{N_3} WW^T$  en notant  $W = \mathcal{W}(\cdot, \cdot, \nu)$  telle que  $W_{ij} = \sum_k^{N_3} w_{ijk} \nu_k$ .

$$R(z) = \left( \frac{1}{N_3} WW^T - zI \right)^{-1}. \quad (63)$$

Remarquons que, par construction, la résolvante est symétrique. Dans la suite, on notera  $R_{ij}$  les entrées de cette résolvante. Rappelons que ce qui nous intéresse à la fin de ce calcul est de pouvoir disposer des valeurs singulières de  $W$  qui ne sont autres que les racines carrées des valeurs propres de  $WW^T$ .

On a toujours l'équation sur la résolvante comme dans le cas matriciel symétrique, que l'on adapte à notre cas non symétrique, ce qui donne :

$$\left( \frac{1}{N_3} WW^T - zI \right) R(z) = I, \quad (64)$$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_1} \text{tr}(R(z)) \right] = -\frac{1}{z} + \frac{1}{zN_1} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right]. \quad (65)$$

Il nous faut donc étudier le comportement de  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right]$ . Par analogie avec le cas matriciel symétrique, on peut comprendre en effet que cette trace est

importante dans la mesure où elle correspond à la transformée de Stieltjes de la mesure spectrale empirique de  $WW^t$ . Par conséquent, c'est au travers de cette trace que nous pourrions obtenir les termes utiles au calcul de la loi limite, comme on l'avait fait dans le cas matriciel symétrique.

Là où le cas matriciel symétrique permettait d'exploiter directement le Lemme de Stein, il nous faut ici le généraliser au cas bivarié.

**Lemme 1** (Stein Bivarié). *Soit  $A, B$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Et  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et de croissance au plus polynomiale. On a alors,*

$$\mathbb{E}_{AB} [ABf(A, B)] = \mathbb{E}_{AB} [\partial_A \partial_B f(A, B)]. \quad (66)$$

Dans le cas où  $A = B$ , on a en outre,

$$\mathbb{E}[A^2 f(A)] = \mathbb{E}[f(A)] + \mathbb{E}[f''(A)] \quad (67)$$

Comme dans la formulation du Lemme, on distingue deux cas  $A \neq B$  et  $A = B$ . Dans le premier cas, on passe par l'expression des espérances sous forme intégrale puis on utilise le Lemme de Stein monovarié pour terminer la démonstration. Dans le second cas, on applique deux fois le Lemme de Stein monovarié pour arriver au résultat.

On peut exprimer la trace qui nous intéresse comme suit :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right] = \frac{1}{N_3} \sum_i^{N_1} \sum_m^{N_2} \sum_\ell^{N_1} \sum_p^{N_3} \sum_q^{N_3} \nu_q \nu_p \mathbb{E} [w_{imp} w_{lmq} R_{\ell i}], \quad (68)$$

où les  $\nu_p, \nu_q$  sont les composantes des vecteurs selon lesquels la contraction de  $\mathcal{W}$  est réalisée et où l'on omet la dépendance de  $R$  vis-à-vis à  $z$ . La résolvante  $R(z)$  est bien deux fois dérivable et de croissance au plus polynomiale selon les composantes  $w_{ijk}$ . En outre, il y a bien indépendance par définition entre les entrées  $w_{imp}$  et  $w_{lmq}$  du tenseur de bruit. Par conséquent, en utilisant le Lemme de Stein bivariée dans le cas  $A \neq B$ , c'est-à-dire  $i \neq \ell$  ou  $p \neq q$ , on a,

$$\mathbb{E} [w_{imp} w_{lmq} R_{\ell i}] = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial}{\partial w_{imp}} \frac{\partial}{\partial w_{lmq}} R_{\ell i} \right]. \quad (69)$$

Il nous faut dès lors calculer ces deux dérivées partielles. Il s'agit là de l'une des étapes du calcul qui présentent une certaine difficulté. Si les dérivées qui sont à calculer ne sont pas très difficiles puisqu'il s'agit simplement de dériver des polynômes en  $w_{ijk}$ , la complexité provient du fait du grand nombre de dérivées qui sont à calculer et de

l'ensemble des divers indices qui apparaissent dans le calcul. Une erreur sur un seul indice ou sur une seule dérivée est alors non seulement fatale quant à l'obtention d'un résultat juste, mais encore très chronophage car nécessitant de revoir chaque étape du calcul, parfois à plusieurs reprises, pour déceler l'origine de l'erreur.

Après quelques efforts, on parvient néanmoins à l'expression suivante :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\partial}{\partial w_{imp}} \frac{\partial}{\partial w_{\ell mq}} R_{\ell i} \right] = \frac{1}{N_3} \mathbb{E} \left[ \frac{\partial}{\partial w_{imp}} - \sum_{j_1}^{N_1} \sum_{j_2}^{N_1} R_{\ell j_1} \left( \sum_{k_3}^{N_3} w_{j_2 m k_3} \nu_q \nu_{k_3} \delta_{j_1, \ell} \right. \right. \quad (70)$$

$$\left. \left. + \sum_{k_2}^{N_3} w_{j_1 m k_2} \nu_q \nu_{k_2} \delta_{j_2, \ell} \right) R_{j_2 i} \right]. \quad (71)$$

Rappelons que cette expression ne vaut que pour  $i \neq \ell$  ou  $p \neq q$ . Pour continuer le calcul le plus simplement possible, on négligera dans un premier temps cette condition. Pour contrebalancer cette simplification du calcul, et pour conserver l'égalité on est donc contraint d'ajouter un terme que l'on note  $\mathcal{T}$  et qui correspond à la prise en charge du cas spécifique  $i = \ell$  ou  $p = q$  et sur lequel je m'attarderai plus loin dans le calcul. On a donc :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right] = \frac{-1}{N_3^2} \sum_i^{N_1} \sum_\ell^{N_1} \sum_m^{N_2} \sum_p^{N_3} \sum_q^{N_3} \nu_p \nu_q^2 \mathbb{E} \left[ \partial_{w_{imp}} \left( \sum_{j_2}^{N_1} R_{\ell \ell} \sum_{k_3}^{N_3} w_{j_2 m k_3} \nu_{k_3} R_{j_2 i} \right. \right. \quad (72)$$

$$\left. \left. + \sum_{j_1}^{N_1} R_{\ell j_1} \sum_{k_2}^{N_3} w_{j_1 m k_2} \nu_{k_2} R_{\ell i} \right) \right] + \mathcal{T}. \quad (73)$$

Dans cette dernière expression, je peux alors continuer le calcul en développant la dérivée partielle qui demeure. Là encore, les mêmes difficultés concernant le nombre de dérivées à calculer et le nombre d'indices à prendre en compte apparaissent. Néanmoins, de nouveaux efforts prolongés permettent de conduire les calculs et d'aboutir à l'expression suivante :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right] = \frac{+1}{N_3^2} \sum_i^{N_1} \sum_\ell^{N_1} \sum_m^{N_2} \sum_p^{N_3} \sum_q^{N_3} \nu_p^2 \nu_q^2 \mathbb{E} \left[ -R_{\ell \ell} R_{ii} - R_{\ell i}^2 \right. \quad (74)$$

$$\left. + \frac{1}{N_3} \left( \sum_{j_4}^{N_1} R_{\ell i} W_{j_4 m} R_{j_4 \ell} + \sum_{j_3}^{N_1} R_{\ell j_3} W_{j_3 m} R_{i \ell} \right) \sum_{j_2}^{N_1} W_{j_2 m} R_{j_2 i} \right] \quad (75)$$

$$+ \frac{1}{N_3} R_{\ell\ell} \sum_{j_2}^{N_1} W_{j_2 m} \left( \sum_{j_4}^{N_1} R_{j_2 i} W_{j_4 m} R_{j_4 i} + \sum_{j_3}^{N_1} R_{j_2 j_3} W_{j_3 m} R_{ii} \right) \quad (76)$$

$$+ \frac{1}{N_3} \sum_{j_1}^{N_1} \left( \left( \sum_{j_4}^{N_1} R_{\ell i} W_{j_4 m} R_{j_4 j_1} + \sum_{j_3}^{N_1} R_{\ell j_3} W_{j_3 m} R_{i j_1} \right) W_{j_1 m} \right) R_{li} \quad (77)$$

$$+ \frac{1}{N_3} \sum_{j_1}^{N_1} R_{\ell j_1} W_{j_1 m} \left( \sum_{j_4}^{N_1} R_{\ell i} W_{j_4 m} R_{j_4 i} + \sum_{j_3}^{N_1} R_{\ell j_3} W_{j_3 m} R_{ii} \right) \Big] + \mathcal{T}. \quad (78)$$

De là, on peut réduire certaines sommes sous la forme de produits matriciels. En outre, après une telle réécriture, il devient plus simple de repérer la présence de formules correspondant à des traces de matrices. Rappelons aussi que les vecteurs  $u$  et  $\nu$  sont unitaires, de telles sortes que les sommes des carrés de leurs composantes que l'on voit apparaître dans l'équation ci-dessus valent 1 et disparaissent. Par le jeu de ces simplifications successives, l'expression devient progressivement plus claire jusqu'à permettre un résultat particulièrement condensé :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right] = \frac{+1}{N_3^3} \mathbb{E} \left[ 4 \text{tr}(WW^T R^3) \right] \quad (79)$$

$$+ 2 \text{tr}(WW^T R^2) \text{tr}(R) \quad (80)$$

$$+ (\text{tr}(WW^T R) - N_2 N_3) [\text{tr}(R)]^2 \quad (81)$$

$$+ (\text{tr}[WW^T R] - N_2 N_3) \text{tr}(R^2) \Big] + \mathcal{T}, \quad (82)$$

Dans ce calcul, j'avais commencé en négligeant de prendre en compte la condition  $\ell \neq i$  et  $p \neq q$  nécessaire pour l'application du Lemme de Stein bivarié dans le cas  $A \neq B$ . Afin de réintroduire cette condition, il faut désormais supprimer les termes ayant été calculés lorsque effectivement les deux égalités étaient valables. En outre, il faut aussi ajouter le résultat du Lemme de Stein bivarié pour  $A = B$  correspondant au véritable apport de ces termes. Ces considérations permettent donc de d'écrire l'expression suivante pour le terme  $\mathcal{T}$  de régulation :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{N_3} \sum_i^{N_1} \sum_m^{N_2} \sum_p^{N_3} \nu_p^2 \left( - \mathbb{E} \left[ \partial_{w_{imp}}^2 R_{ii} \right] + \mathbb{E} [R_{ii}] + \mathbb{E} \left[ \partial_{w_{imp}}^2 R_{ii} \right] \right), \quad (83)$$

$$\mathcal{T} = \mathbb{E} \left[ \frac{N_2}{N_3} \text{tr}(R) \right]. \quad (84)$$

Par conséquent, en injectant l'expression de  $\mathcal{T}$  dans l'équation pour  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right]$ .

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R) \right] = \frac{+1}{N_3^3} \mathbb{E} \left[ 4 \text{tr}(WW^T R^3) \right] \quad (85)$$

$$+ 2 \text{tr}(WW^T R^2) \text{tr}(R) \quad (86)$$

$$+ (\text{tr}(WW^T R) - N_2 N_3) [\text{tr}(R)]^2 \quad (87)$$

$$+ (\text{tr}[WW^T R] - N_2 N_3) \text{tr}(R^2) \quad (88)$$

$$+ \frac{N_3}{N_2} \text{tr}(R) \Big], \quad (89)$$

Nous allons désormais devoir réaliser l'étude asymptotique. Afin de la mener à bien, je commence par rappeler que la résolvante a la propriété suivante :

$$\|R^n\| \leq \frac{1}{|\Im(z)^n|}. \quad (90)$$

Cela permet alors de majorer certaines traces dans l'expression de à  $N_1$  fixé.

$$\text{tr}\left(\frac{1}{N_3} WW^T R^n\right) = \left\langle \frac{1}{N_3} WW^T, R^n \right\rangle \leq \left\| \frac{1}{N_3} WW^T \right\|_F \|R^n\|_F \quad (91)$$

$$(92)$$

Puisque l'on a en outre  $\|A\|_F \leq N_1 \|A\|$  pour toute matrice  $A$  de taille  $N_1 \times N_1$ , ce donne,

$$\text{tr}\left(\frac{1}{N_3} WW^T R^n\right) \leq N_1 \left\| \frac{1}{N_3} WW^T \right\| \|R^n\| \leq N_1 \frac{N_1}{N_3} \frac{1}{|\Im(z)|^2}. \quad (93)$$

Et comme par définition  $\frac{N_1}{N_3}$  est en  $O(1)$  il reste finalement que,

$$\text{tr}\left(\frac{1}{N_3} WW^T R^n\right) = O(N_1). \quad (94)$$

L'analyse asymptotique est donc la suivante :

$$\frac{1}{N_1} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{+1}{N_1 N_3^3} 4 \text{tr}(WW^T R^3) \right] \rightarrow O(1/N_3^2) \quad (95)$$

$$+ \mathbb{E} \left[ \frac{+1}{N_1 N_3^3} 2 \text{tr}(WW^T R^2) \text{tr}(R) \right] \rightarrow O\left(\frac{1}{N_3}\right) \quad (96)$$

$$+ \mathbb{E} \left[ \frac{+1}{N_1 N_3^3} \text{tr}(WW^T R) [\text{tr}(R)]^2 \right] \rightarrow O(1) \quad (97)$$

$$- \mathbb{E} \left[ \frac{+1}{N_1 N_3^3} N_2 N_3 [\text{tr}(R)]^2 \right] \rightarrow O(1) \quad (98)$$

$$+ \mathbb{E} \left[ \frac{+1}{N_1 N_3^3} \text{tr}[WW^T R] \text{tr}(R^2) \right] \rightarrow O\left(\frac{1}{N_3}\right) \quad (99)$$

$$- \mathbb{E} \left[ \frac{+1}{N_1 N_3^3} N_2 N_3 \text{tr}(R^2) \right] \rightarrow O\left(\frac{1}{N_3}\right) \quad (100)$$

$$+ \mathbb{E} \left[ \frac{+1}{N_1 N_3^3} N_3^2 N_2 \text{tr}(R) \right] \rightarrow O(1). \quad (101)$$

Et par conséquent, lorsque les dimensions  $N_1, N_2$  et  $N_3$  tendent vers l'infini, l'expression se réduit à,

$$\frac{1}{N_1} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right] \approx \mathbb{E} \left[ -\frac{N_2}{N_3^2 N_1} [\text{tr}(R)]^2 + \frac{N_2}{N_1 N_3} \text{tr}(R) + \frac{1}{N_1 N_3} \text{tr}(WW^T R) \frac{1}{N_3^2} [\text{tr}(R)]^2 \right]. \quad (102)$$

En passant à la limite lorsque  $N_1, N_2, N_3 \rightarrow \infty$ , avec  $(N_2/N_1) \rightarrow b \in \mathbb{R}$  et  $(N_3/N_1) \rightarrow c \in \mathbb{R}$ , on note

$$m(z) \xleftarrow{N_1, N_2, N_3 \rightarrow \infty} \frac{1}{N_1} \mathbb{E}[\text{tr}(R)], \quad (103)$$

$$d(z) \xleftarrow{N_1, N_2, N_3 \rightarrow \infty} \frac{1}{N_1 N_3} \mathbb{E}[\text{tr}(WW^T R)], \quad (104)$$

et il devient alors possible de réécrire les équations, en supposant que les espérances de produits soient bien séparables, ce qu'il faudra justifier dans un deuxième temps par une démonstration de convergence presque sûre comme dans le cas matriciel symétrique. Après simplification,  $d$  s'écrit :

$$d(z) = \frac{bm(z)}{c + m(z)}. \quad (105)$$

Si l'on reprend l'équation de départ de notre problème, on peut alors injecter les expressions de  $m(z)$  et de  $d(z)$ , ce qui aboutit à une équation du point fixe en  $m(z)$  :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_1} \text{tr}(R(z)) \right] = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z N_1} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N_3} \text{tr}(WW^T R(z)) \right], \quad (106)$$

devient

$$m(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z} \frac{bm(z)}{c + m(z)}, \quad (107)$$

$$(108)$$

que l'on met sous la forme d'un polynôme de degré 2 :

$$zm^2(z) + (cz + 1 - b)m(z) + c = 0. \quad (109)$$

On peut dès lors résoudre cette équation du second degré, ce qui nous permet d'exprimer  $m(z)$ ,

$$m(z) = \frac{-cz - 1 + b + \sqrt{(zc - 1 - b)^2 - 4b}}{2z}, \quad (110)$$

$$(111)$$

Remarquons que pour assurer la compatibilité de la solution le fait qu'elle doive correspondre à une transformée de Stieltjes, je ne conserve qu'uniquement la solution avec facteur positif devant la racine. En effet, comme toute transformée de Stieltjes satisfait  $m(z) \rightarrow 0$  pour  $z \rightarrow \pm\infty$  lorsque la mesure associée est à support compact, on doit choisir la solution avec signe positif.

Dans ce qui précède, il a été possible de trouver une expression pour  $m(z)$ . De l'expression obtenue pour  $m(z)$ , il est alors possible sous condition d'existence, de trouver la distribution associée à partir de la formule d'inversion de Stieltjes-Perron :

$$d\mu(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2i\pi)^{-1} [m(x + i\epsilon) - m(x - i\epsilon)]. \quad (112)$$

Après une mise au même dénominateur des deux fractions et un développement puis une réduction des expressions, on obtient la forme suivante :

$$(2i\pi)^{-1} [m(x + i\epsilon) - m(x - i\epsilon)] = \frac{1}{4i\pi(x^2 + \epsilon^2)} \quad (113)$$

$$\left[ -2i\epsilon(b - 1) \right. \quad (114)$$

$$+ (x - i\epsilon)\sqrt{(cx + ci\epsilon - 1 - b)^2 - 4b} \quad (115)$$

$$\left. - (x + i\epsilon)\sqrt{(cx - ci\epsilon - 1 - b)^2 - 4b} \right]. \quad (116)$$

$$(117)$$

On remarque ici que les racines portent sur des nombres complexes qui sont en outre conjugués. On peut exprimer ces deux nombres en tant que partie réelle et partie imaginaire de sorte qu'en notant  $u = c^2x^2 - c^2\epsilon^2 - 2(1 + b)cx + (b - 1)^2$  et  $v = 2\epsilon c(cx - 1 + b)$ , on ait :

$$(2i\pi)^{-1} [m(x + i\epsilon) - m(x - i\epsilon)] = \frac{1}{4i\pi(x^2 + \epsilon^2)} \quad (118)$$



$$\left[ -2i\epsilon(b-1) \right. \quad (119)$$

$$+ (x - i\epsilon)\sqrt{u + iv} \quad (120)$$

$$\left. - (x + i\epsilon)\sqrt{u - iv} \right], \quad (121)$$

$$(122)$$

ce que l'on peut encore refactoriser sous la forme,

$$(2i\pi)^{-1} [m(x + i\epsilon) - m(x - i\epsilon)] = \frac{1}{4i\pi(x^2 + \epsilon^2)} \quad (123)$$

$$\left[ -2i\epsilon(b-1) \right. \quad (124)$$

$$+ x(\sqrt{u + iv} - \sqrt{u - iv}) \quad (125)$$

$$\left. - i\epsilon(\sqrt{u + iv} + \sqrt{u - iv}) \right]. \quad (126)$$

$$(127)$$

Pour obtenir une expression explicite pour la racine, on les réécrit les expressions en nombres complexes sous leur forme exponentielle utilisant la formule,  $\sqrt{u + iv} = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{i}{2} \arg(u + iv)\right)$ . L'expression précédente devient alors,

$$(2i\pi)^{-1} [m(x + i\epsilon) - m(x - i\epsilon)] = \frac{1}{2\pi(x^2 + \epsilon^2)} \quad (128)$$

$$\left[ -\epsilon(b-1) \right. \quad (129)$$

$$+ x(u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{1}{2} \arg\left(\frac{v}{u}\right)\right) \quad (130)$$

$$\left. - \epsilon(u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} \arg\left(\frac{v}{u}\right)\right) \right], \quad (131)$$

$$(132)$$

Avec le passage à la limite, on aura toujours  $v \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . On peut donc distinguer deux cas,  $u > 0$  et  $u < 0$ . Or, par une simple analyse du terme  $u$  qui est un polynôme de degré 2, on sait que :

$$u_{\epsilon \rightarrow 0} = c^2 x^2 - 2(1+b)cx + (b-1)^2 = 0 \quad (133)$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{c}(1 \pm \sqrt{b})^2. \quad (134)$$

On distingue donc deux cas d'analyse.

**Cas1** :  $u > 0$  et  $v = 0$

Dans ce cas,

$$\arg(u + iv) = 0. \quad (135)$$

Et le résultat final est 0. Cela est vrai à chaque fois que  $u$  est en dehors du segment défini par  $S = \left[ \frac{1}{c}(1 - \sqrt{b})^2; \frac{1}{c}(1 + \sqrt{b})^2 \right]$ .

**Cas2** :  $u < 0$  et  $v = 0$

Dans ce cas,

$$\arg(u + iv) = \pi. \quad (136)$$

Et par conséquent,

$$(2i\pi)^{-1} [m(x + i\epsilon) - m(x - i\epsilon)] = \frac{x(u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}}}{2\pi(x^2 + \epsilon^2)} \mathbb{1}_S. \quad (137)$$

$$(138)$$

Et il reste donc après passage à la limite, et puisque  $u < 0$  sur  $S$ ,

$$d = \frac{-u_{lim}}{2\pi x} \mathbb{1}_S dx = \frac{-c^2 x^2 + 2(1+b)cx - (b-1)^2}{2\pi x} \mathbb{1}_S dx \quad (139)$$

On reconnait là une distribution classique de Marchenko-Pastur dont les bornes sont définies par  $S = \left[ \frac{1}{c}(1 - \sqrt{b})^2; \frac{1}{c}(1 + \sqrt{b})^2 \right]$ .

### 7.3 Validation des calculs par simulation

On peut faire un calcul de ces valeurs propres pour un tenseur  $\mathcal{Y}$  de tailles  $N_1 \times N_2 \times N_3$  sur MATLAB, c'est à dire calculer les valeurs singulières d'une matrice  $A$  correspondant à la contraction du tenseur  $\mathcal{Y}$  selon un vecteur aléatoire  $\mathbf{u}$ . Cela correspond alors bien à l'étude des valeurs propres de  $WW^T$  de notre calcul, et on peut tracer un histogramme de la distribution de ces valeurs propres.

En parallèle, on peut aussi tracer la courbe théorique de la distribution obtenue à la fin du paragraphe précédent. Ce faisant, on observe la bonne correspondance entre la distribution empiriquement obtenue et celle théoriquement prévue comme illustré par la Figure 12 ci-dessous.

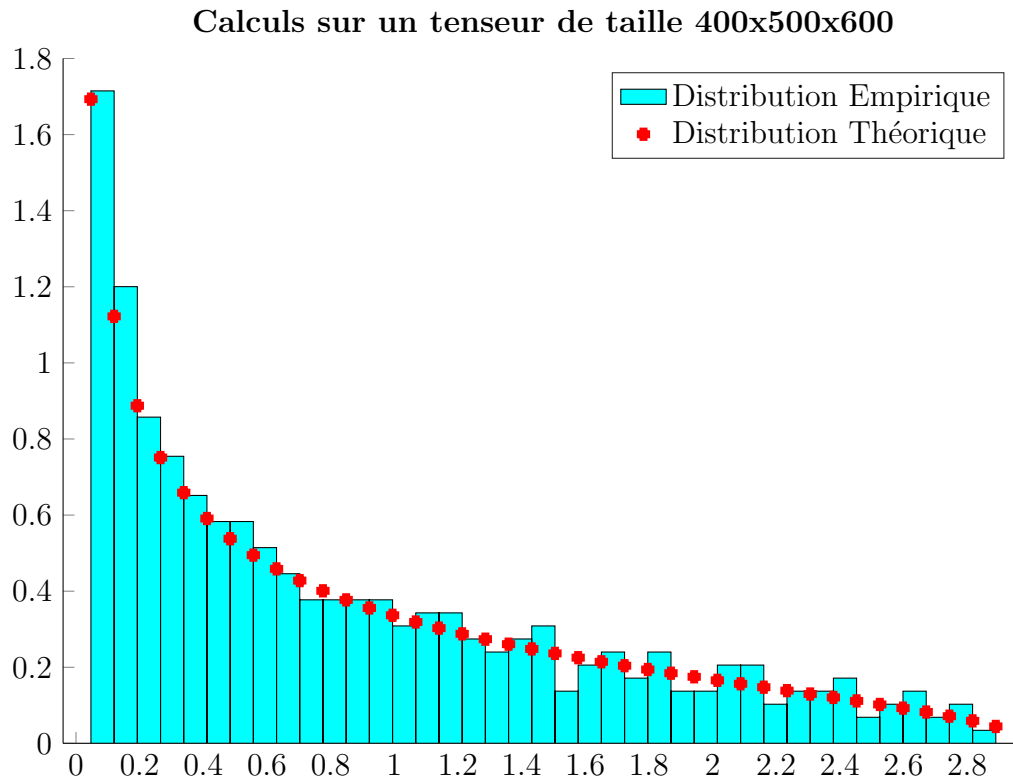


FIGURE 12 –

## 8 Application à la détection de communauté

### 8.1 Modélisation informelle du problème

La détection de communauté est un problème récurrent. Dans le cadre de la théorie des graphes, il s'agit de retrouver une certaine structure de communautés dans un graphe. Tout ce dont on dispose en termes d'information est alors représenté par les connections liant les sommets du graphes entre eux.

Ce problème de la détection de communautés possède de nombreuses applications pratiques. Il est possible de détecter des communautés de diverses nature dans des réseaux : par exemple des réseaux sociaux, mais aussi des réseaux de communication, ou des réseaux biologiques comme les réseaux d'interaction protéine-protéine, ... Mais la détection de communautés est aussi applicable afin de faire du clustering d'images selon certains critères, ou du tri de pages web, etc...

Pour aborder ce problème nous nous appuyons sur le *Stochastic Block Model* (SBM). Cette approche est d'abord tirée de la théorie des graphes, il faudra donc l'adapter à notre cas tensoriel, ce qui sera l'objet de la seconde section de cette partie. Le SBM est caractérisé par une matrice de communauté  $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$  où  $n$  est le nombre de personnes et  $k$  le nombre de groupes, et les entrées  $g_{ij}$  représentent l'appartenance binaire des individus aux communautés. Il est complété par une matrice symétrique de connectivité  $Q \in [0, 1]^{k \times k}$  dont les entrées  $q_{ij}$  définissent les paramètres d'une loi de Bernoulli portant sur la probabilité de présence d'un lien au sein du graphe entre un individu appartenant au groupe communautaire  $i$  et un autre appartenant au groupe communautaire  $j$  [PWH83]. Ainsi, la présence d'un lien entre deux nœuds est-elle indépendante de la configuration prise par les autres liens.

La question que nous nous posons ici est de savoir comment et dans quelles conditions peut-on extraire les communautés d'un graphe. Pour ce faire, nous nous concentrons uniquement sur un problème à deux communautés. C'est à dire que,

$$Q = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \quad (140)$$

où  $p$  est le paramètre de Bernoulli pour les connections entre individus d'une même communauté, et  $q$  celui pour les connections entre individus appartenant à des communautés distinctes. Et par ailleurs,

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} \end{bmatrix} \quad (141)$$

Dans le cadre où le nombre de communauté  $k$  est supérieur à 2, poser le problème avec la matrice  $G$  est intéressant. Pour nous,  $k = 2$ , on remarque alors que toute l'information d'appartenance aux communautés peut être contenue dans la combinaison linéaire des deux colonnes de  $G$  et on note :

$$\mathbf{u} = g_{:1} - g_{:2} = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1) \quad (142)$$

pourvu que les individus soient ordonnés de manière adéquate.

On peut en outre définir une matrice d'adjacence  $A$  de taille  $n \times n$ . Cette matrice, aux entrées binaires prises dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ , est telle que si les nœuds  $i$  et  $j$  possèdent un lien, alors les entrées  $a_{ij}$  et  $a_{ji}$  valent 1, sinon elles valent 0. Comme ici la présence de lien entre deux nœuds est régie par une loi de Bernoulli, la matrice d'adjacence en elle-même est aléatoire. Elle est constituée d'une matrice idéale, qui correspond son espérance et d'une déviation par rapport à cette espérance [RRN12]. Cette espérance de la matrice d'adjacence  $\mathbb{E}(A)$ , se définit telle que :

$$\mathbb{E}(A) = \frac{1}{2}(p + q)\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{2}(p - q)\mathbf{u}\mathbf{u}^T, \quad (143)$$

où les  $\mathbf{1}$  est le vecteur de taille  $n$  uniquement rempli de valeurs 1. Ce que l'on voit, c'est donc que le terme en  $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$  ne comporte pas d'informations utiles sur les communautés tandis que le terme en  $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$  est bien porteur de ces informations. Par conséquent, on peut considérer le terme  $p - q$  comme l'équivalent de notre facteur de bruit  $\lambda$  qui intervenait dans les analyses des parties précédentes. En d'autres termes, plus  $p - q$  est grand, plus il sera simple de retrouver l'information sur les communautés.

Avec une telle matrice  $\mathbb{E}(A)$ , on peut retrouver l'information sur  $\mathbf{u}$  qui sera contenue dans le vecteur propre associé à la seconde plus grande valeur propre. En effet, les vecteurs  $\mathbf{1}$  et  $\mathbf{u}$  sont orthogonaux et  $\mathbb{E}(A)$  est symétrique, par conséquent la décomposition spectrale de cette matrice est bien caractérisée par l'expression (134) ci-dessus. Pour toutes les autres valeurs propres, il y en aura  $N - 2$ , elles vaudront alors 0 dans ce cas.

Dans le cas moyenne plus fluctuation, on ajoute du bruit à cette espérance de la matrice d'adjacence sous la forme d'une matrice de bruit symétrique  $W$ . Comme les entrées de  $A$  sont binaires, la matrice de bruit  $W$  sera constituée de valeurs dans  $-1, 0, +1$ . Notons en outre que les entrées ne sont pas identiquement distribuées : pour deux nœuds dans une même communauté, la variance est de  $p(1-p)$  ou de  $q(1-q)$  selon le type d'hyperlien. Pour  $N$  suffisamment grand, la loi spectrale empirique de  $W$  s'approchera néanmoins d'une loi du demi-cercle. On se place donc dans l'approximation gaussienne, de moyenne nulle.

$$A = \mathbb{E}(A) + W. \quad (144)$$

L'ajout de cette matrice de bruit  $W$  vient modifier les  $N - 2$  valeurs propres nulles dans le cas théorique. Elles fluctuent donc et, si le ratio signal sur bruit devient trop faible, c'est à dire si  $p - q$  devient trop petit, elles peuvent atteindre des valeurs proches, voire supérieures, à la valeur propre associée à l'information sur  $\mathbf{u}$ . Dans ce cas, retrouver l'information sur les communautés à partir d'une analyse des vecteurs propres n'est plus possible. Nous comparerons dans la suite le seuil à partir duquel l'approche matricielle et l'approche tensorielle deviennent respectivement inefficaces.

## 8.2 Modélisation et définition formelle du problème

Mais avant de nous lancer dans les simulations, il nous faut adapter le modèle stochastique par blocks du cas matriciel vers le cas tensoriel [CK18]. Autrement dit, nous voulons passer de la modélisation en termes de graphe à celle en termes d'hypergraphe. Pour ce faire, nous prenons un vecteur  $u \in \{\pm 1\}^n$  qui contient les informations d'appartenance des individus à une communauté. On appelle hypergraphe une généralisation des graphes non-orientés où les arêtes ne se limitent pas à relier un seul ou deux nœuds entre eux, mais peuvent en relier un nombre entier quelconque dans la limite de la dimension de l'hypergraphe, c'est à dire pour nous dans la limite de 3 nœuds.

On définit  $n$ -hypergraphe uniforme l'hypergraphe dans lequel toutes les arêtes relient un même nombre  $n$  de sommets. Dans notre cas, nous verrons qu'il sera permis de relier trois sommets entre eux, mais aussi seulement deux. Par conséquent, nous disposerons quant à nous d'un 3-hypergraphe non-homogène.

La probabilité d'apparition des hyperliens entre les nœuds de l'hypergraphe est encore régie par  $p, q$  pris dans  $[0, 1]$ , où  $p$  est toujours la probabilité d'apparition d'un lien entre individus d'une même communauté et  $q$  celle pour des individus de communautés distinctes :

$$\begin{cases} p & \text{si } y_i = y_j = y_k, \\ q & \text{sinon.} \end{cases} \quad (145)$$

Notons que l'on peut ici avoir égalité entre deux ou tous les indices dans la première condition. Dans ce cadre, le tenseur définit alors des relations ternaires ou binaires entre les individus, ce qui fait son caractère non-homogène. On peut essayer de redéfinir l'espérance du tenseur d'adjacence par analogie avec le cas matriciel. Dans ce cas on aurait alors :

$$\mathcal{Y}_{analogie} = \frac{1}{2}(p + q)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{2}(p - q)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \quad (146)$$

Cette fois, une telle définition ne peut pas fonctionner correctement. En effet, la succession des trois produit vient annuler l'avantage d'une séparation des communautés en  $\{\pm 1\}$  dans  $\mathbf{u}$ .

Pour répondre à ce problème de parité, sont introduits  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{z}$  deux vecteurs tels que,

$$v_i = \frac{1 - u_i}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } u_i = 1, \\ 1 & \text{si } u_i = -1, \end{cases} \quad (147)$$

$$z_i = \frac{u_i + 1}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i = 1, \\ 0 & \text{si } u_i = -1. \end{cases} \quad (148)$$

Ce faisant, on a désormais,

$$\mathcal{Y}_{modele} = q\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (p - q)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (p - q)\mathbf{z} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}. \quad (149)$$

Un seul problème demeure alors : si l'on a bien orthogonalité entre  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{z}$ , ce n'est pas le cas entre ces deux vecteurs et  $\mathbf{1}$ . Cela signifie que pour estimer correctement l'information sur les communautés contenue dans  $\mathbf{u}$ , il nous faut estimer ou bien  $\mathbf{v}$  ou bien  $\mathbf{z}$  qui contiennent tous deux cette information. L'avantage est que ces deux vecteurs sont orthogonaux, ce qui assure que l'algorithme HOPM convergera vers l'un ou l'autre d'entre-eux. Cependant, la présence du terme  $q\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  contrevient à cette possibilité. Les vecteurs  $\mathbf{1}$  ne sont effet pas orthogonaux avec  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{z}$ , ce qui rend caduque l'approche par HOPM.

Une solution à ce problème est de faire disparaître ce terme gênant. Pour ce faire, il suffit de le soustraire à l'équation. En pratique, cela demandera donc de connaître ou d'estimer le paramètre  $q$  de la loi de Bernoulli régissant la présence d'hyperlien entre des individus de communautés différentes. Dans la section suivante qui discute de l'implémentation, je détaillerai la méthode utilisée pour l'estimation de ce paramètre  $q$ .

Dans la suite, on note  $\mathcal{Y}$  le tenseur d'adjacence, c'est à dire,

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{modele} + \mathcal{W}. \quad (150)$$

### 8.3 Discussions sur les simulations et présentation des résultats

Le principe de la détection de communautés est décrit dans l'algorithme 2.

Après avoir construit ou s'être muni d'un tenseur de communautés  $\mathcal{Y}$ , on le déplie selon l'un de ses mode pour réaliser la procédure d'estimation du paramètre  $q$ . Cela fait, on retire à  $\mathcal{Y}$  la valeur gênant l'exploitation du modèle.  $\mathcal{Y}$  est dès lors caractérisé seulement par deux vecteurs orthogonaux et du bruit. On peut le déplier sur tous ses modes pour pouvoir les utiliser dans l'algorithme de SS-HOPM qui convergera sur l'un ou l'autre des deux vecteurs orthogonaux, perturbés à cause du bruit. Par conséquent, le vecteur d'estimation en sortie d'SS-HOPM correspondra ou bien à  $\mathbf{v}$  ou bien à  $\mathbf{z}$  et contiendra, au même titre qu'eux, toutes l'information concernant l'appartenance des individus aux communautés.

**Algorithm 2** Détection de Communautés

- 
- 1: Dépliage de  $\mathcal{Y}$  sur un mode au choix
  - 2: Estimation de  $q$
  - 3: Calcul de  $\mathcal{Y}_l = \mathcal{Y} - q_{estim} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$
  - 4: Dépliage de  $\mathcal{Y}_l$  sur les trois modes
  - 5: Algorithme SSHOPM sur les dépliements de  $\mathcal{Y}_l$
  - 6: Le vecteur estimateur trouvé par SS-HOPM contient l'information de  $\mathbf{u}$
- 

**Cas théorique, construction du tenseur de communautés** Pour mener à bien les simulations, il nous faut disposer d'un tenseur de communautés. On construit celui-ci selon une procédure simple. Après avoir fixé  $p$  et  $q$ , ainsi que défini le vecteur  $\mathbf{u}$  définissant l'appartenance de chaque individu à une communauté, on peut construire le tenseur d'adjacence  $\mathcal{Y}$ .

Pour ce faire, on va parcourir les différentes entrées du tenseur. Chaque entrée est caractérisée par un triplet d'entiers qui correspondent non seulement à sa position dans le tenseur mais aussi à l'hyperlien que ces trois individus entretiennent entre-eux. Par exemple, l'entrée  $y_{ijk}$  correspond à l'élément en ligne  $i$ , colonne  $j$  et profondeur  $k$  dans le modèle tensoriel  $\mathcal{Y}$ , mais représente aussi l'hyperlien entre les individus  $i$ ,  $j$  et  $k$  qui appartiennent respectivement aux communautés  $u_i$ ,  $u_j$  et  $u_k$ .

Selon que les trois individus appartiennent tous à la même communauté ou non, la stratégie de création d'un hyperlien entre-eux change. En effet, s'ils appartiennent tous à la même communauté, un tirage de Bernoulli de paramètre  $p$  est réalisé. La valeur du tirage est affectée à l'entrée concernée, constituant ainsi la présence d'un hyperlien entre les trois individus qui modélise des interactions de diverses nature en pratique. Si, au contraire, il y a parmi les trois individus une différence d'appartenance communautaire, alors le lien est cette fois établi sur la base d'un tirage de Bernoulli de paramètre  $q$ .

Remarquons qu'il est possible de retrouver dans le cas où deux indices sont égaux. Le problème est alors traité de manière identique. Il se crée ainsi des hyperliens entre deux individus seulement. On appelle cela un 3-hypergraphe non-homogène. En outre, dans le cas où tous les indices sont égaux entre-eux, on laisse la valeur à 0 dans le modèle tensoriel. Il aurait aussi été possible d'utiliser une autre convention où la diagonale du tenseur vaut toujours 1. Les simulations montrent que ce choix n'influe de toute façon pas sur les résultats obtenus. Finalement, comme ce modèle tensoriel est symétrique, nous nous limitons à parcourir les indices  $i \leq j \leq k$  et puis propager les valeurs tirées par symétrie.



**Méthode d'estimation de  $q$**  J'ai expliqué plus haut qu'il était nécessaire dans notre approche de connaître le paramètre  $q$  afin de pouvoir réexprimer le tenseur de sorte qu'il ait une structure ne comportant qu'uniquement des vecteurs orthogonaux en plus du tenseur de fluctuations  $W$ . Cette orthogonalité est en effet essentielle pour la réussite de la stratégie de résolution que nous employons.

En pratique, nous ne disposerons jamais — ou très rarement — de ce paramètre  $q$ . Il est donc essentiel avant d'aller plus loin de s'assurer que l'on pourra estimer  $q$ . Pour ce faire, nous calculons une série de différences entre les deux plus grandes valeurs propres d'une matrice  $Y$  telle que :

$$Y = M_1 - t\mathbf{1}(\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1})^T + W, \quad (151)$$

$$Y = q\mathbf{1}(\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1})^T + (p - q)\mathbf{v}(\mathbf{v} \boxtimes \mathbf{v})^T + (p - q)\mathbf{z}(\mathbf{z} \boxtimes \mathbf{z})^T - t\mathbf{1}(\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1})^T + W, \quad (152)$$

où  $\boxtimes$  est le produit de Kronecker,  $M_1$  le dépliement de  $\mathcal{Y}$  sur le mode 1 (mais on aurait très bien pu choisir un autre mode aussi) et  $t$  est le paramètre d'estimation pour  $q$ , que l'on fait évoluer entre 0 et 1. En outre  $W$  représente le bruit dans le modèle dû à la création des hyper-arrêtes via un processus de Bernoulli. Lorsque  $t = q$ , il ne reste plus que,

$$Y(t = q) = (p - q)\mathbf{v}(\mathbf{v} \boxtimes \mathbf{v})^T + (p - q)\mathbf{z}(\mathbf{z} \boxtimes \mathbf{z})^T + W. \quad (153)$$

Par conséquent  $Y(q = t)$ , n'est plus composé que de deux termes orthogonaux de même norme, et d'un terme de perturbations. En considérant la perturbation négligeable, on peut dire que dans ce cas il y aura deux valeurs propres identiques, ce qui ouvre la voie à une estimation de  $q$  par le calcul de la différence entre les valeurs propres. En traçant cette différence, on obtient la Figure 13.

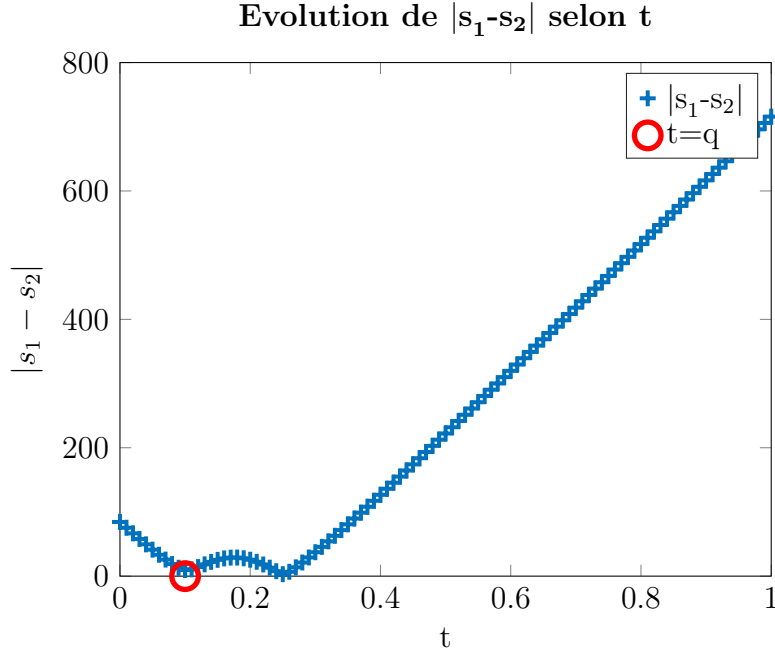
On remarque que la courbe de la différence entre les deux plus grande valeurs propres de  $Y$  présente deux minima locaux, dont le premier correspond ici à  $q$ . Si l'on parvient à montrer que cette courbe a toujours cette forme et que le premier minimum a toujours lieu à l'abscisse  $q$ , alors il sera possible d'estimer  $q$  de façon relativement précise à partir d'une recherche de minimum.

Une étude des valeurs propres de  $Y$ , considéré sans le bruit  $W$ , est donc menée. On a,

$$Y = \mathbf{v}((q - t)\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1} + (p - q)\mathbf{v} \boxtimes \mathbf{v})^T + \mathbf{z}((q - t)\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1} + (p - q)\mathbf{z} \boxtimes \mathbf{z})^T. \quad (154)$$

En utilisant  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{Z}$ , de taille  $1 \times N^2$ , pour les termes entre parenthèses on a donc,

$$Y = \mathbf{v}\mathcal{V} + \mathbf{z}\mathcal{Z} \quad (155)$$

FIGURE 13 – Différence des valeurs propres de  $Y$  selon les valeurs de  $t$ 

$$Y = \begin{bmatrix} \mathcal{V} \\ \vdots \\ \mathcal{V} \\ \mathcal{Z} \\ \vdots \\ \mathcal{Z} \end{bmatrix}. \quad (156)$$

Pour accéder aux valeurs propres, on calcule  $YY^T$ ,

$$YY^T = \begin{bmatrix} \sum_i \mathcal{V}_i^2 & \cdots & \sum_i \mathcal{V}_i^2 & \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i & \cdots & \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_i \mathcal{V}_i^2 & \cdots & \sum_i \mathcal{V}_i^2 & \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i & \cdots & \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i \\ \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i & \cdots & \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i & \sum_i \mathcal{Z}_i^2 & \cdots & \sum_i \mathcal{Z}_i^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i & \cdots & \sum_i \mathcal{V}_i \mathcal{Z}_i & \sum_i \mathcal{Z}_i^2 & \cdots & \sum_i \mathcal{Z}_i^2 \end{bmatrix}. \quad (157)$$

Or il s'avère que dans notre cas  $\sum_i \mathcal{V}_i^2 = \sum_i \mathcal{Z}_i^2$ . On se retrouve donc avec une matrice par blocs de la forme,

$$YY^T = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}, \quad (158)$$

et deux vecteurs propres apparaissent aussitôt  $\mathbf{v}_1 = [1 \cdots 1 \ 1 \cdots 1]$  et  $\mathbf{v}_2 = [1 \cdots 1 \ -1 \cdots -1]$ . On peut calculer les valeurs propres associées puis prendre leur racine pour retomber sur les valeurs singulières de  $Y$ . Après cela, on doit encore trouver la différence entre les deux valeurs singulières ainsi obtenues et on obtient après calculs :

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{n^3}{2}(q - t)(q + p - 2t). \quad (159)$$

Cette équation définit un polynôme du second degré dont les valeurs sont négatives dans l'intervalle des racines  $q$  et  $\frac{q+p}{2}$ . On remarque que l'on a toujours  $q \leq \frac{q+p}{2}$  dans l'hypothèse où  $p > q$ , c'est à dire l'hypothèse assortative, ce qui assure bien que le premier minimum correspondra toujours à  $q$ . En outre, puisque dans notre tracé de courbe, on observe toujours la valeur absolue de la différence, cela explique le rebond observé entre les deux minima. En théorie, ceux-ci valent toujours 0, mais en pratique la présence du bruit  $W$  dans le modèle induit une déformation de la courbe qui n'est plus nulle aux abscisses correspondant aux racines du cas non-bruité, c'est ce que montre la Figure 14.

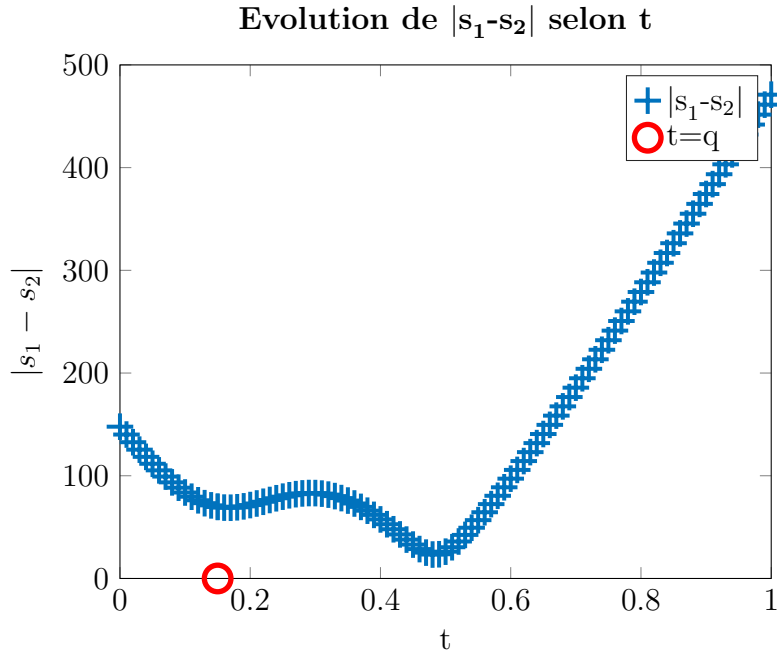


FIGURE 14 – Effet de la perturbation sur les racines

Notons que selon les valeurs de  $p$  et de  $q$  l'écartement entre les abscisses des minima ainsi que la hauteur du rebond sont modifiés. Cette dernière considération prise en combinaison avec la présence du bruit  $W$  peut mener à des situations où l'estimation

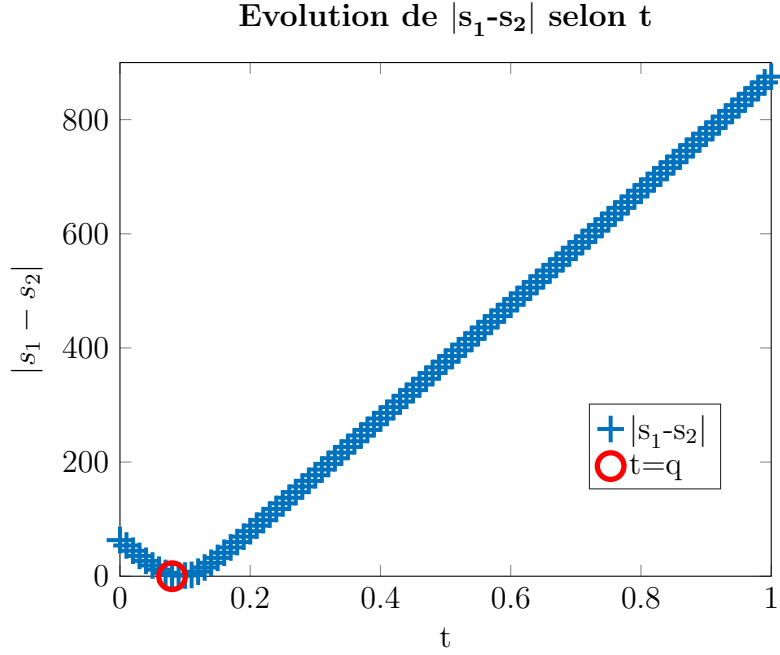


FIGURE 15 – Illustration d'un absence de rebond prononcé entre les racines ( $p = 0.12$ ,  $q = 0.8$ )

du bruit devient difficile. C'est par exemple le cas sur la Figure 15 ci-dessous où je prends l'exemple de  $p = 0.12$  et  $q = 0.8$ .

On remarque alors que le rebond est quasiment absent entre les deux minima. Par conséquent l'estimation n'est pas toujours aussi triviale qu'il pouvait apparaître en première instance.

Pour la recherche de minimum, plusieurs méthodes ont alors été envisagées. Des recherches de minimum inspirées de la méthode de Newton auraient pu être implémentées. Le calcul des dérivées aurait dû s'effectuer numériquement, mais on risque alors toujours de tomber sur un morceau de courbe un peu horizontal et de mettre beaucoup de temps avant de converger. D'autant plus qu'une fois un minimum trouvé, il faudrait encore vérifier qu'il s'agit bien de celui le plus à gauche, qui correspond à  $q$ . Par conséquent, il se serait agi de lancer deux fois la recherche.

Pour moins de complications, j'ai décidé de faire une simple recherche par balayage. En partant de la partie la plus à gauche de la courbe, l'algorithme de recherche de minimum calcule la dérivée numérique à chaque point et détecte un changement de signe de la dérivée. Cela signifie dans notre configuration que l'on vient de passer un minimum. Si le pas est choisi suffisamment fin, alors on est sûr que ce minimum

est bien le premier des deux et qu'il correspond par conséquent à une estimation de  $q$ . Dans ce cadre on ne fait le calcul de dérivé qu'une fois plutôt que d'avoir à le réaliser deux fois comme suggéré dans le paragraphe précédent.

Pour plus d'efficacité on pourrait faire un algorithme à pas variables en fonction de la valeur de la pente. Mais dans les cas comme celui présenté ci-dessus où  $p$  et  $q$  ne sont pas très différents et où le rebond entre les deux minima n'est pas très prononcé, cela conduit en général à des erreurs d'estimation. Je suis donc resté sur une solution simple qui pourrait sûrement être améliorée en termes de nombre d'itérations, mais qui s'exécute néanmoins en un temps raisonnable pour l'utilisation que nous en faisons dans ce travail.

**Algorithme SS-HOPM** L'algorithme de SS-HOPM est une variante de l'algorithme HOPM déjà présenté. Comme l'algorithme de HOPM, le SS-HOPM (SS valant pour *ShiftedSymmetric*) va permettre de trouver les paires de valeur propre et vecteur propres pour le tenseur considéré. Cette méthode a été développée par Kolda et Mayo en 2011 [TGK11] en prolongation de travaux précédents par De Lathauwer, De Moor et Vandewalle ainsi que Regalia et Kofidis [EK02] qui avaient permis de considérer une étape intermédiaire, l'algorithme S-HOPM (S pour *Symmetric*), qui ne convergeait cependant pas à coup sûr. L'avantage de SS-HOPM est qu'il permet une convergence plus rapide que l'algorithme de HOPM et prenant en compte la symétrie du problème, pourvu que les paramètres soient bien choisis.

Pour l'algorithme SS-HOPM, en plus de supposer la version symétrique de HOPM, on introduit un décalage du vecteur estimé à chaque itération de l'algorithme. De sorte que, plutôt que de se contenter de calculer  $\lambda$  comme la contraction de l'entrée tensorielle  $\mathcal{A}$  avec le vecteur  $t$ , on ajoute désormais à cette contraction un décalage de  $\alpha x$  où  $x$  est la valeur du vecteur estimé à la fin de l'itération précédente. Pour assurer une convergence rapide, il faut ajuster la valeur du paramètre alpha. Ce paramètre peut prendre des valeurs dans  $\mathbb{R}$ , mais nous restons ici sur des valeurs positives. En pratique le compromis est fait entre les petites valeurs de  $\alpha$  pour un algorithme plus rapide et les grandes valeurs pour assurer la convergence. Par tâtonnements, nous choisissons  $\alpha = 5$ .

**Résultats de simulations cas synthétique** Nous allons commencer visualiser les résultats obtenus dans le cas de l'utilisation d'un tenseur de communautés synthétique construit tel que précédemment décrit. Pour réaliser les simulations, on choisit une taille pour le tenseur puis on choisit une constante pour la somme  $p + q$ . Cette somme est liée au degré moyen de chaque nœud dans une relation qui n'est cependant pas directement proportionnelle : le nombre possibles de liens entre trois nœuds n'appartenant pas tous à la même communauté est plus grand que le nombre

de possibles liens entre trois nœuds d'une même communauté. Une fois cette somme fixée, on fait alors varier la différence  $p - q$  en préservant la constance de la somme. Et pour chaque configuration ainsi obtenue on lance l'identification de communauté. La qualité du résultat est rendue en termes d'alignement entre le vecteur  $\mathbf{u}$  qui contient l'information sur l'appartenance de chaque individu à une communauté et le vecteur  $\mathbf{x}$  estimé via l'algorithme de SS-HOPM.

Par conséquent, pour chaque somme  $p + q$  donnée, on obtient un ensemble de valeurs d'alignements correspondant à diverses valeurs de la différence  $p - q$ . Pour que les résultats soient intéressants, on réalise les simulations dans la plage d'intérêt de notre procédure.

Pour savoir quelle est cette plage, on peut reprendre la formule décrivant le modèle considéré avec le tenseur de bruit :

$$\mathcal{Y} = q\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (p - q)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (p - q)\mathbf{z} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \mathcal{W}. \quad (160)$$

Lorsque que l'on calcule la solution sans le terme généré par les vecteurs  $\mathbf{1}$  et que l'on veut normaliser le tout, on obtient :

$$\bar{\mathcal{Y}} = \frac{(p - q)}{\sqrt{N}}\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \frac{(p - q)}{\sqrt{N}}\mathbf{z} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{W}. \quad (161)$$

Or puisque les vecteurs  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{v}$  sont remplis à moitié de valeurs 1 et de valeurs 0, par conséquent  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{z}\| = \sqrt{\frac{N}{2}}$ . Ainsi, en notant  $\bar{\mathbf{v}}$  et  $\bar{\mathbf{z}}$  les normalisations de ces vecteurs, on a,

$$\bar{\mathcal{Y}} = \frac{(p - q)N}{2\sqrt{2}} [\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{z}} \otimes \bar{\mathbf{z}} \otimes \bar{\mathbf{z}}] + \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{W}. \quad (162)$$

Par conséquent, la plage d'intérêt pour notre procédure est celle pour laquelle le bruit et l'information utile sont de magnitudes comparables. Ici, le terme de bruit  $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{W}$  est de norme spectrale  $O(1)$ , par conséquent pour que l'information utile soit comparable il faut imposer  $p - q = O(\frac{1}{N})$ . Dans ce cadre, on verra bien l'apparition d'une transition de phase.

On adopte dans la suite une renormalisation pour l'axe des abscisses tel que :

$$c_{in} - c_{out} = N(p - q), \quad (163)$$

cela se révélera utile notamment pour la comparaison avec le cas matriciel. Les résultats alors obtenus sont présentés sur la Figure 16. On y montre une réalisation du modèle, pour une initialisation  $u$  aléatoire dans la sphère unité et une application de SS-HOPM jusqu'à terminaison dont on espère qu'elle permettra d'estimer un

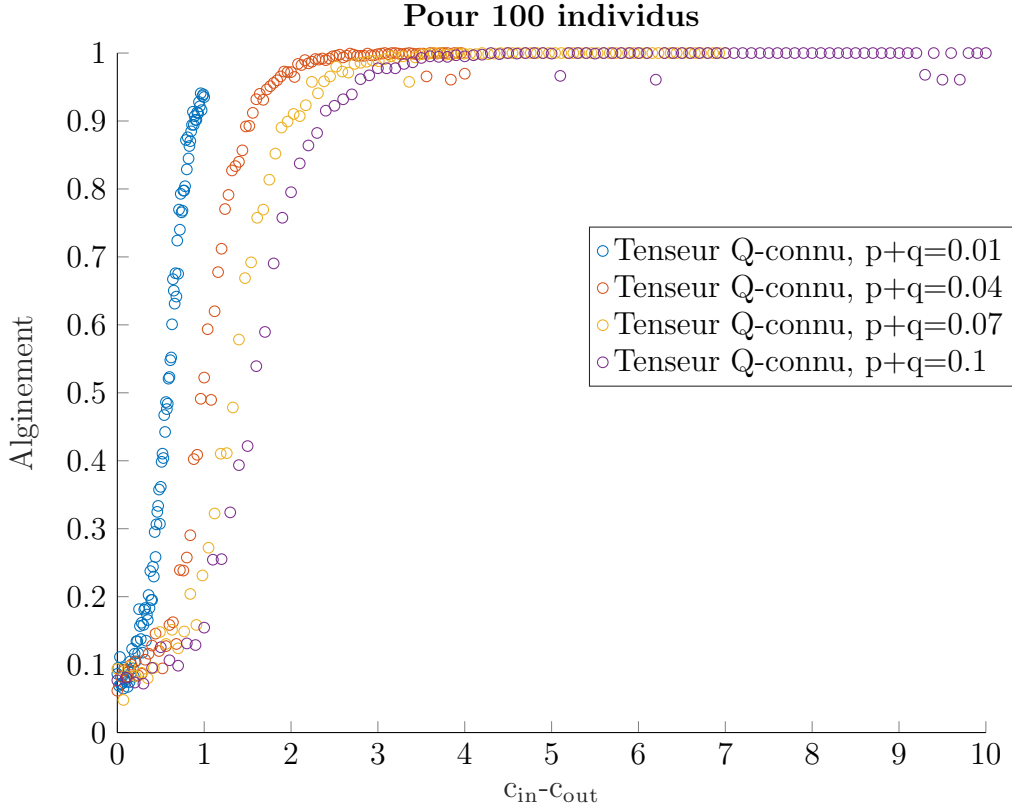


FIGURE 16 – Transition de phase pour différentes valeurs de  $p + q$ , cas tensoriel avec  $q$  connu et  $N = 100$ .

vecteur aligné avec  $v$  ou avec  $z$ . On seuille alors les entrées du vecteur ainsi estimé, en les projetant soit à 1 soit à -1. Il devient alors possible de calculer l'alignement du vecteur ainsi obtenu avec  $u$ .

On remarque que les quatre courbes proposées voient leur alignement croître d'autant plus tôt que la somme  $p + q$  est petite. En outre, pour toutes les courbes, l'alignement augmente à mesure que la différence  $c_{in} - c_{out}$  devient plus significative. Commençons par analyser cette dernière remarque. Elle signifie que plus  $q$  et  $p$  sont différents, c'est à dire que plus les liens entre les individus d'une même communauté sont forts par rapport aux liens entre les individus de communautés différentes, plus il est facile de distinguer les communautés. Si l'on ajoute à cette analyse la première remarque, alors on peut dire en outre, que s'il y a bien une différence significative entre  $p$  et  $q$ , alors la détection de communautés sera rendue d'autant plus aisée que les valeurs de ces paramètres seront faibles.

Cet effet d'accroissement de la capacité de détection lié à la diminution de la valeur des paramètres  $p$  et  $q$  peut sembler contre intuitive en première analyse. Mais on peut penser qu'elle s'explique par le fait qu'à mesure que les valeurs des paramètres décroissent et que la présence d'hyperliens dans le graphe diminue, la significativité de ces hyperliens augmente.

Notons que les courbes présentées sur la Figure 16 précédente ont été obtenues en considérant le paramètre  $q$  connu. On peut aussi les obtenir en réalisant l'estimation de ce paramètre à partir du tenseur de communauté comme décrit plus haut. Je trace ci-dessous la Figure 18 superposant les courbes obtenues pour  $q$  connu et pour  $q$  estimé. On trace aussi l'erreur relative de  $q_{estim}$  par rapport à  $q$  en fonction de la valeur de la somme  $p + q$  en Figure 17.

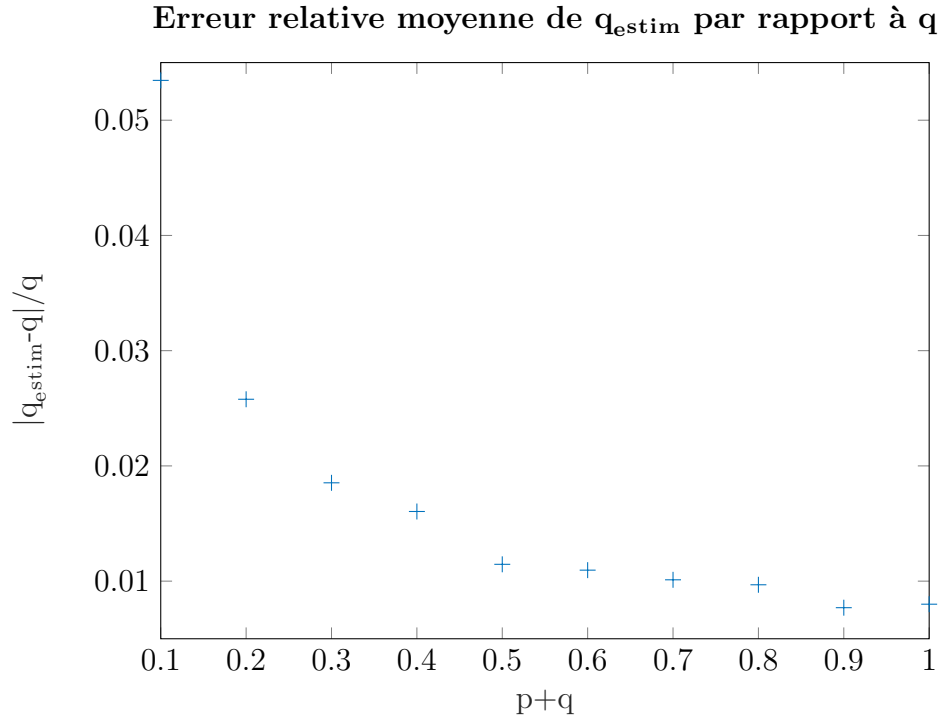


FIGURE 17 – Erreur relative de  $q_{estim}$  par rapport à  $q$ . Chaque estimation de  $q$  est réalisée 25 et on retient une moyenne. Pour chaque valeur de  $p + q$  on réalise 150 configurations possibles. C'est la moyenne de ces 150 estimations qui est ici affichée.



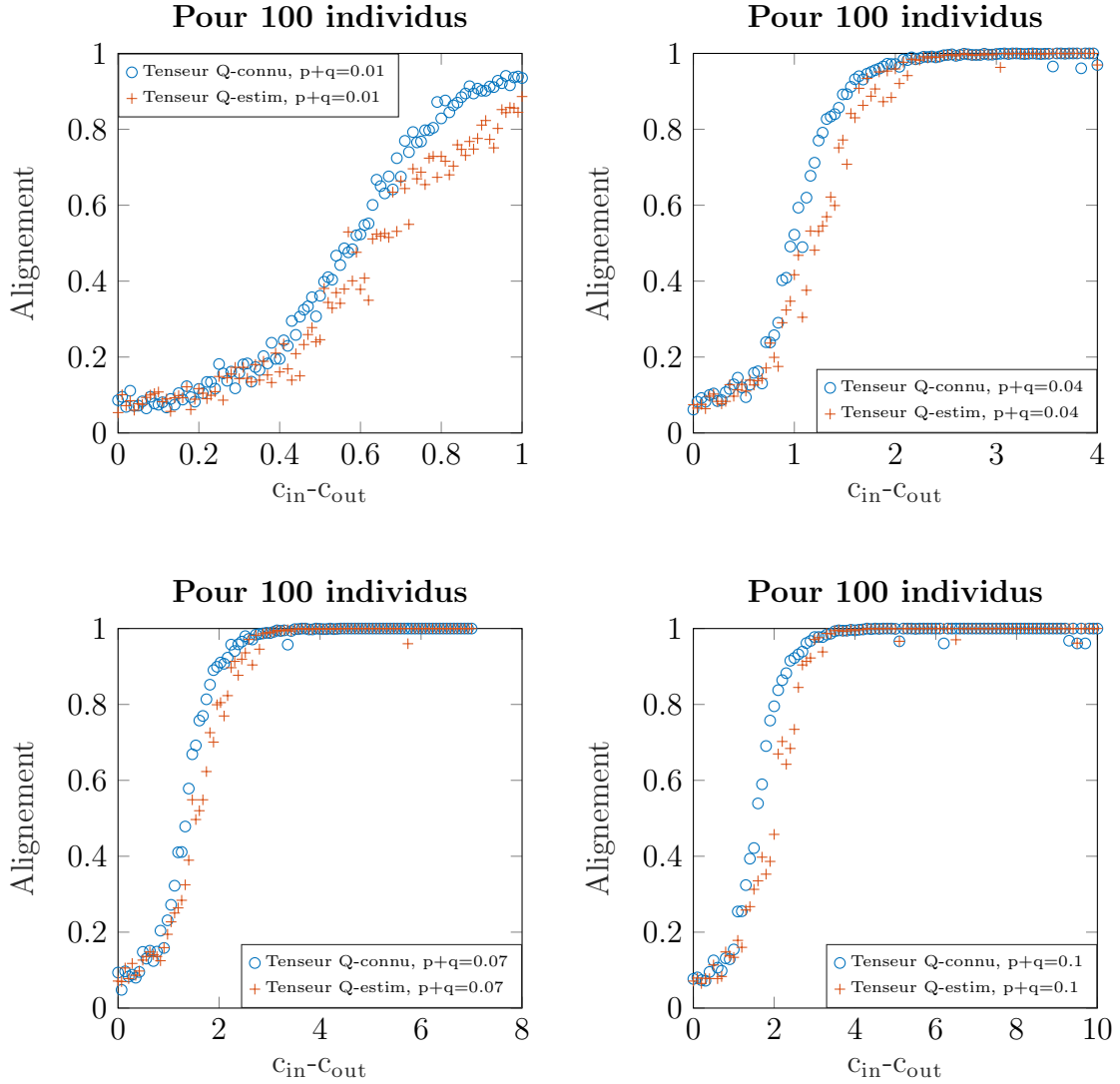


FIGURE 18 – Comparaison des transitions de phases pour  $q$  connu et pour  $q$  estimé.

Les courbes obtenues via estimation de  $q$  sont alors très proches de celles obtenues en connaissant  $q$ . Cela nous permet bien de pouvoir envisager des applications dans le cas réel.

**Comparaison au cas matriciel** Afin d'avoir une meilleure idée de ce qu'apporte la recherche de communauté en termes d'hypergraphes plutôt qu'en terme de graphes, nous proposons dans cette partie une comparaison entre les courbes d'alignements obtenues par un modèle matriciel et par un modèle tensoriel.

Pour cela, comme nous l'avions précisé plus haut, il est important de connaître le domaine d'intérêt pour l'étude du modèle matriciel. En faisant la même analyse que dans le cas tensoriel, on a pour le modèle matriciel,

$$\bar{Y}_{mat} = \frac{(p+q)\sqrt{(N)}}{2} \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}} + \frac{(p-q)\sqrt{(N)}}{2} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\sqrt{N}} W. \quad (164)$$

Et par conséquent, on doit cette fois avoir,

$$p - q = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (165)$$

On adopte dans la suite une renormalisation pour l'axe des abscisses tel que :

$$c_{in} - c_{out} = \sqrt{N}(p - q), \quad (166)$$

dans le cadre du modèle matriciel. Dans la lecture des figures, il faudra donc bien prendre en compte qu'il y a deux renormalisations distinctes pour l'axe des abscisses : l'une pour les valeurs issues de la détection de communautés via le modèle matriciel, l'autre pour les valeurs issues de la détection de communautés via le modèle tensoriel. Les résultats sont présentés sur la Figure 19.

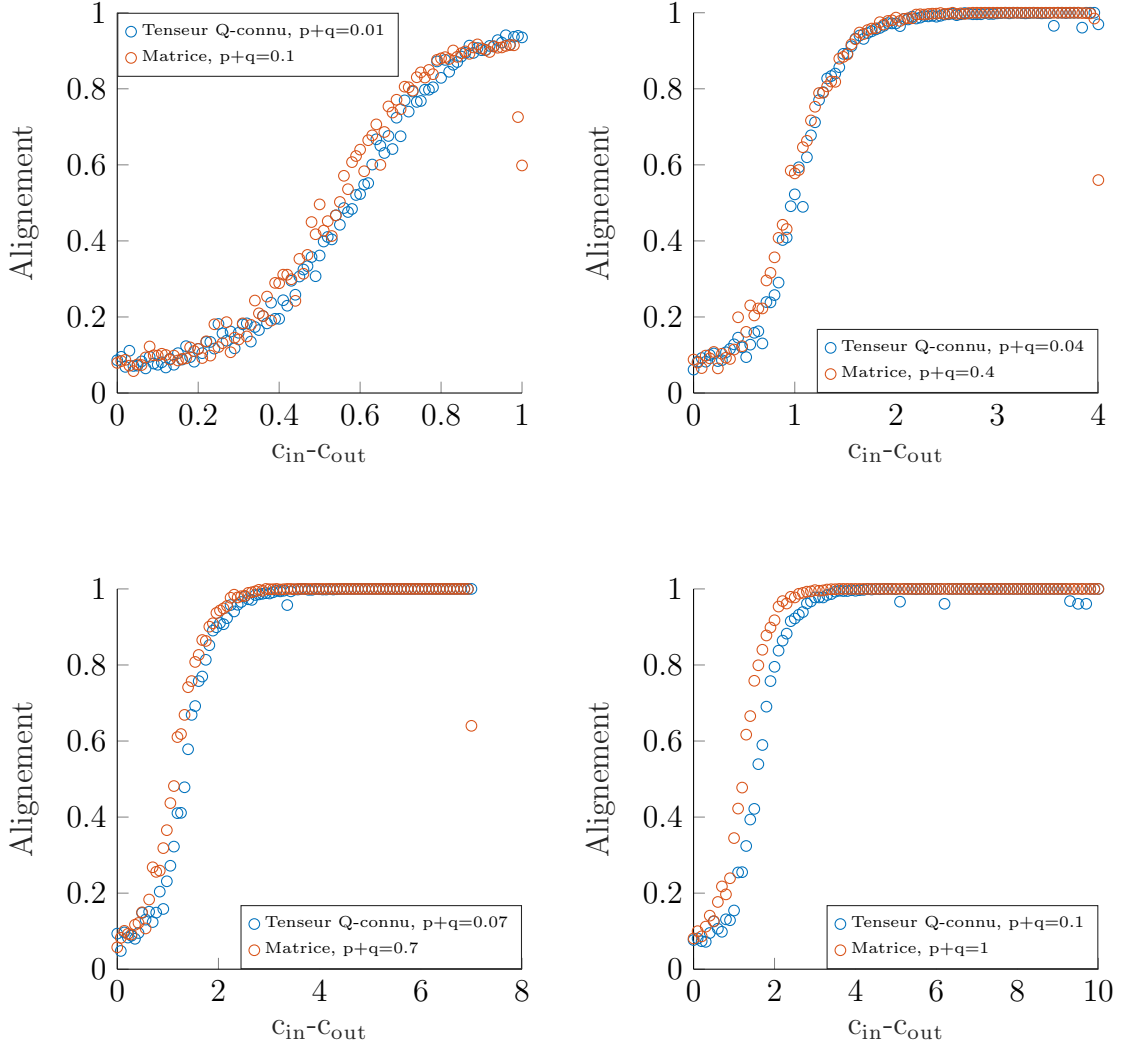


FIGURE 19 – Comparaison de la transition de phase des cas tensoriel et matriciels en régime équivalents mais non égaux.

Il apparaît que les modèles matriciels et tensoriels se superposent bien. Mais, c'est sans remarquer que les valeurs des sommes  $p + q$  sont distinctes entre les communautés étudiées par les tenseurs et celles étudiées par les matrices. Précisément, cela signifie que pour que les deux modèles produisent des résultats superposables, le cas matriciel doit avoir une valeur de  $p + q$  dix fois (ou plutôt  $\sqrt{N}$  fois) supérieure au cas tensoriel. La Figure 20 permet de bien se rendre compte que le cas tensoriel permet d'obtenir la transition pour des  $p - q$  bien plus faibles que dans le cas matriciel.

Cela traduit en fait la structure même des objets étudiés : graphes et hypergraphes.

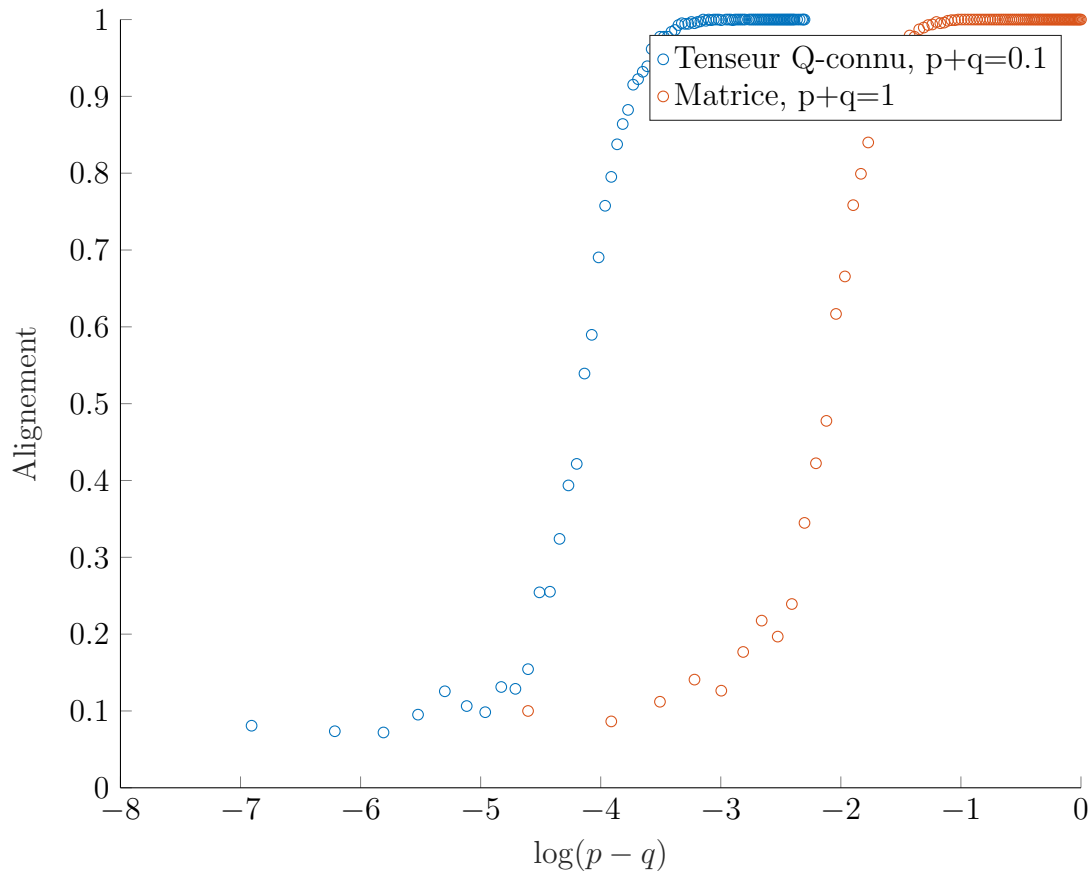


FIGURE 20 – Comparaison du cas matriciel et du cas tensoriel sans renormalisation de  $p - q$ .

En effet dans le cas matriciel, où l'on utilise un graphe, la valeur de  $p + q$  traduit directement le degré moyen de connectivité du graphe. Dans le cas tensoriel au contraire, le degré moyen dépend de facteurs supplémentaires à  $p + q$ , dus à la présence de connections ternaires qui ajoutent des connections entre les nœuds.

Pour approfondir la comparaison, on peut s'intéresser à ce que l'on aurait tracé pour  $p + q$  égaux dans le cas matriciels et le cas tensoriel. Les courbes obtenues sont répertoriées sur la Figure 21.

On remarque que les courbe associées aux matrices possèdent une transition de phase qui précède celle pour le cas tensoriel. Mais on voit aussi que ces courbes n'atteignent que rarement un alignement proche de 1. On pourrait objecter qu'il faudrait alors prolonger les courbes obtenues pour de plus grandes valeurs de  $c_{in} - c_{out}$  pour pouvoir visualiser la transition complète. Mais ce serait alors ne pas bien comprendre que le tracé de ces courbes est limité en longueur par la condition  $p + q = cste \in [0, 2]$ . Cela implique en effet que  $p - q \leq cste$ , sinon la situation est contradictoire. Par conséquent, on a aussi

$$c_{in} - c_{out} \leq \begin{cases} \sqrt{N}cste & \text{dans le cas matriciel,} \\ Ncste & \text{dans le cas tensoriel.} \end{cases} \quad (167)$$

On ne peut donc pas étendre ces courbes.

Pour pouvoir mieux comparer le cas matriciel avec le cas tensoriel, on peut cependant remodifier l'échelle en abscisses des courbes pour le modèle matriciel. Cela se fait simplement en remultipliant toutes les abscisses par un facteur  $\sqrt{N}$ , de sorte de retomber sur le facteur  $N$  propre au cas tensoriel. Les courbes obtenues sont regroupées sur la Figure 21.

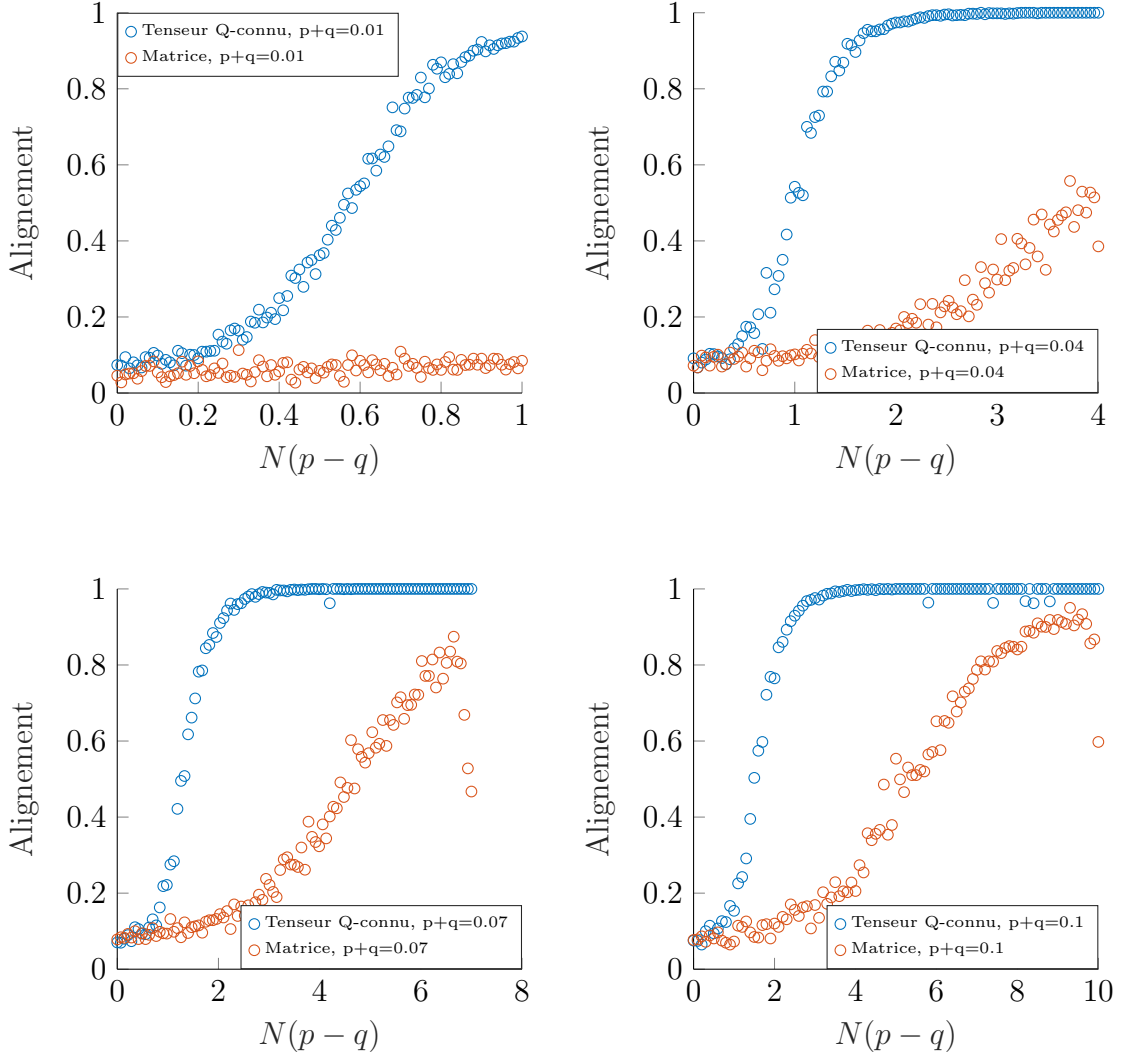


FIGURE 21 – Comparaison de transition de phase avec transformation en abscisses du cas matriciel.

Cette superposition spécifique des courbes permet de bien voir que le modèle matriciel performe moins bien que son homologue tensoriel, car même si un début de transition a lieu pour des écarts entre  $p$  et  $q$  plus petits que dans le cas tensoriel, il n'y a en fait pratiquement jamais de possibilité d'alignements proche de 1 en pratique. Et ceci est en vrai en particulier lorsque la valeur de  $p+q$  est petite, c'est à dire lorsque les communautés possèdent peu de lien entre individus.

## 9 Conclusion

### 9.1 Synthèse du travail

Ce stage m'aura permis de découvrir l'activité de la recherche en traitement des données sous plusieurs angles. D'abord par la découverte d'un champ de recherche que je ne connaissais pas et dont je ne maîtrisais pas tous les outils techniques. Il aura donc fallu se familiariser avec la théorie des matrices aléatoires et l'analyse tensorielle. Cette familiarisation avec de nouveaux outils mathématiques m'aura ensuite permis de produire une analyse mathématique partielle du modèle étudié. Et j'aurais fait discuter l'analyse mathématique avec les simulations numériques à la fois pour me permettre d'avoir plus d'intuition dans la conduite de l'analyse mathématique et pour compléter et prolonger cette analyse.

Il sera apparu que l'activité de recherche est donc protéiforme. D'un jour au suivant et de la matinée à l'après-midi, la variation du travail à produire est importante. Là mener un calcul analytique pur, reporter le calcul au propre, ici écrire une code de simulation, réfléchir à une meilleure implémentation. Et puis, surtout, lire des articles, écouter les autres chercheurs, construire son intuition sur les outils utilisés.

Un point de méthode absolument essentiel appris au cours du stage est celui de la tenue d'un journal de recherches. C'est une habitude que j'ai suivie avec plus ou moins de régularité sur la durée du stage, mais il s'agit d'une activité qui me semble désormais absolument nécessaire. Le journal de recherche est fondamental dans le sens où il permet de conserver une trace écrite des raisonnements et des idées au cours du temps. Après coup, il permet de facilement revenir sur une idée que l'on avait laissée de côté, voire oubliée. Il a aussi permis de grandement faciliter la rédaction du rapport de stage en contenant pratiquement déjà au propre la plupart développements mathématiques. Il est finalement utile pour se souvenir des échecs rencontrés au fil des recherches ou pour mettre en évidence des erreurs de raisonnements que l'on remarque à la relecture.

Finalement, j'aurais pu prendre part à la vie d'un laboratoire de recherches dont je retiendrais la convivialité et la dynamique d'organisation de nombreux séminaires et autres présentations. Ceci permettant de mieux connaître les activités de recherche de chacun des collègues, mais aussi les recherches mené par d'autres laboratoires sur des sujets communs à ceux étudiés à l'IRIT.

### 9.2 Prolongements dans la lignée de ce travail

Pour le prolongement de ce travail, on peut imaginer deux axes en prolongement direct et un axe un peu plus indirect.

Les deux premiers axes concernent directement le contenu du stage et les éléments incomplets qu'il comporte. Je parle ici par exemple de l'analyse mathématique du modèles de données complet. Je parle aussi de la partie concernant la détection de communautés. Il faudrait en effet prolonger cette dernière par une comparaison avec des méthodes existantes, et trouver si possible une base de données réelle pertinente pour son utilisation et démontrer ainsi sa pertinence sur un cas pratique. Dans ce cadre, il est prévu que je prolonge mon travail sur cette partie dans les mois à venir en vue d'une éventuelle publication pour un séminaire.

Le dernier axe concerne l'utilisation de ces modèles tensoriels pour une approche distincte du pur traitement de données. En effet, après avoir étudié l'intérêt de ces outils pour stocker les données en préservant certaines relations structurelles entre leurs caractéristiques, je pense qu'utiliser les tenseurs pour la modélisation et la simulation pourrait être intéressant. Je pense notamment à ce genre d'utilisations dans le cadre de simulations agents pour prolongement d'études sur l'émergence de consensus dans les communautés scientifiques.



## Références

- [AJ19] L Miolane A Jagannath, P Lopatto. Statistical thresholds for tensor pca. arxiv, 2019.
- [AM14] E Richard A Montanari. A statistical model for tensor pca. arxiv, 2014.
- [CK18] M X Goemans C Kim, A S Bandeira. Community detection in hypergraphs, spiked tensor models, and sum-of-squares. arxiv, 2018.
- [EEP13] R Bro E E Papalexakis, N D Sidiropoulos. From -means to higher-way co-clustering : Multilinear decomposition with sparse latent factors. IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 61, NO. 2, 2013.
- [EK02] P A Regalia E Kofidis. On the best rank-1 approximation of higher-order supersymmetric tensors. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2002.
- [G.L18] S.HU G.LI. Convergence rate analysis for the higher order power method in best rank one approximations of tensors. Numerische Mathematik, 2018.
- [GWAea09] A. Guionnet Greg W. Anderson et al. An introduction to random matrices. Cambridge University Press, 2009.
- [HK19] L L H Chan R C C Cheung H Yan H Kuang, L Chen. Feature selection based on tensor decomposition and object proposal for night-time multiclass vehicle detection. IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS : SYSTEMS, VOL. 49, NO. 1, 2019.
- [JHdMG21] P Comon J H de M Goulart, R Couillet. A random matrix perspective on random tensors. arXiv, 2021.
- [MIT18] Convergence of random variables. MIT OpenCourseWare, Fundamentals of Probability, 2018.
- [NDS17] X Fu K Huang E E Papalexakis C Faloutsos N D Sidiropoulos, L De Lathauwer. Tensor decomposition for signal processing and machine learning. IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 65, NO. 13, 2017.
- [PC96] B Mourrain P Comon. Decomposition of quantics in sums of powers of linear forms. Signal Processing, 1996.

- [PWH83] S Leinhardt P W Holland, K B Laskey. Stochastic blockmodels : first steps. Social Networks, 1983.
- [RC21] Z Liao R Couillet. Random matrix methods for machine learning : When theory meets applications. 2021.
- [RRN12] M E J Newman R R Nadakuditi. Graph spectra and the detectability of community structure in networks. Physical Review Letters 108, 2012.
- [Spe20] Roland Speicher. Random matrices, lecture notes. Saarland University, 2020.
- [TGK11] J R Mayo T G Kolda. Shifted power method for computing tensor eigenpairs. SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. c 2011 Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 32, No. 4, 2011.
- [Wig58] E P Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. Annals of Mathematics, 1958.
- [Wig60] E P Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Commun. Pure Appl. Math. XIII, 1960.
- [XL12] P Li X Liu. Tensor decomposition of sift descriptors for person identification. IAPR International Conference on Biometrics, 2012.