Cours GPA 430 : Techniques d'optimisation en production automatisée

Devoir #1, Automne 2015 (en équipe de 3-4 étudiants)

À remettre au plus tard le 28 octobre à 8h30

Rapport électronique transmis via Moodle (incluant les fichiers LINGO)

Les retards seront pénalisés.

Indiquer clairement le nom des membres de l'équipe, leur numéro d'étudiant.

20 % de la note finale

PROBLÈME 1 : Résolution graphique (30 points)

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

Minimiser $Z = -28x + 6y$

sous les contraintes:

$$
\begin{array}{rcrcrl}
5x & - & 2y & \geq & 9 & (1) \\
3x & - & y & \leq & 34 & (2) \\
4x & + & y & \geq & 12 & (3) \\
6x & + & y & \leq & 32 & (4) \\
x & + & y & \geq & -7 & (5)
\end{array}
$$

Pour chacune des questions suivantes, vous devez répondre en fournissant le détail des calculs.

a) Représenter graphiquement la région admissible de ce programme linéaire. Tracer la courbe de niveau de la fonction objectif $-28x + 6y = 0$ et indiquer par une flèche son sens d'optimisation.

b) Déterminer à partir de la courbe de niveau tracée en a) un point extrême optimal. Quelles sont les contraintes actives à ce point? Déterminer algébriquement ses coordonnées exactes ainsi que la valeur de la fonction objectif à ce point.

c) Confirmer algébriquement l'optimalité de la solution trouvée à la question b).

Les questions d) à h) doivent être considérées indépendantes l'une de l'autre.

d) Résoudre graphiquement le programme linéaire après avoir ajouté la contrainte (6): $y \geq 0$.

e) Résoudre graphiquement le programme linéaire après avoir enlevé la contraintes (4).

f) De combien le membre de droite de la contrainte (5) peut-il être <u>augmenté</u> sans affecter la liste des contraintes qui sont actives à la solution optimale? En déduire <u>l'augmentation</u> admissible pour cette contrainte.

g) Calculer la valeur marginale pour la contrainte (4).

h) On suppose maintenant que la fonction objectif est $-28x + \beta y$. Dans quel intervalle de valeurs β peut-il varier afin que le point calculé en (b) reste optimal ?

<u>PROBLÈME 2 : Exercice de modélisation (30 points)</u>

Une compagnie vient d'obtenir un contrat pour la livraison de 200 compresseurs à air pour les systèmes de climatisation commerciaux. Cette livraison doit s'effectuer d'ici un mois. L'entreprise sait qu'il sera impossible de fabriquer entièrement les unités à temps. Elle désire tout même planifier sa production de sorte qu'elle maximisera la quantité de compresseurs fabriqués durant le prochain mois.

Les effectifs de la compagnie sont restreints. Ses 10 employées de production ne travaillent que sur un quart de 8 heures par jour. Il serait tout de même possible d'effectuer des heures supplémentaires au coût de 25 $/h pour un maximum de 10 heures par employé par semaine. Pour le prochain mois, 20 journées de travail sont à l'horaire (4 semaines de 5 jours). Les employés sont répartis en deux (2) équipes (4 mécaniciens et 6 électriciens). La compagnie a aussi la possibilité d'engager des journaliers au coût de 100 $ par jours. La compagnie possède une banque de trois (3) journaliers électriciens et de quatre (4) journaliers mécaniciens. Pour des raisons syndicales, cette embauche n'est possible que si le journalier travaille une semaine complète. De plus, les journaliers n'ont pas le droit d'effectuer d'heures supplémentaires.

Pour faire l'assemblage d'un compresseur, il faut 5.5 heures de main d'œuvre de mécanique et 6.5 heures de main d'œuvre d'électrique. Nous considérerons que ces 2 opérations peuvent être faîtes dans n'importe quel ordre.

Les coûts reliés à l'entreposage doivent aussi être considérés. Pour ce faire, nous supposerons que les unités fabriquées lors d'une semaine donnée n'engendrent aucun coût de stockage lors de cette semaine. Par contre, ces compresseurs devront être entreposés durant les semaines restantes jusqu'à la fin du mois et ce, au coût de 15 $ par unité et par semaine. Actuellement, il n'y a aucun compresseur en stock.

Si on exclue le salaire hebdomadaire en temps régulier des 10 employés, l'entreprise ne peut dépenser plus de 4000 $ par semaine.

a) Dans ce contexte, formuler un problème d'optimisation linéaire qui permettra à l'entreprise de maximiser le nombre de compresseurs fabriqués. Identifiez clairement les ensembles, les paramètres et les variables. Aussi, commenter brièvement la façon dont vous avez construit votre fonction-objectif ainsi que les contraintes
b) Résoudre avec LINGO et commenter vos résultats.

PROBLÈME 3 : Modélisation et analyse de sensibilité (40 points)

Une compagnie québécoise exploite trois mines que nous nommerons A, B et C du nord de la province. L'exploitation se fait en deux phases. Le minerai est traité dans un premier temps sur place afin d'éliminer une partie importante d'impuretés. Le minerai semi brut est ensuite transporté vers trois machines que possède la compagnie afin de séparer les métaux qu'il comporte. La performance de ce traitement et son coût varient selon la machine utilisée. La quantité de fer, cuivre et nickel qu'on obtiendra d'une tonne de minerai dépendra donc de la mine d'où il est extrait et de la machine utilisée. Par exemple, une tonne de minerai de la mine A traitée sur la machine 1 produira 150kg de fer, 100kg de cuivre et 250kg de nickel, ce qui engendrera un coût de 10 $. Ces données techniques sont indiquées dans le tableau suivant :

		Mine A	Mine B	Mine C	Coût ($) /tonne de minerai
Machine 1	Fer	0.15	0.15	0.1	10
	Cuivre	0.1	0.1	0.2	
	Nickel	0.25	0.1	0.1	
Machine 2	Fer	0.2	0.25	0.15	15
	Cuivre	0.1	0.15	0.25	
	Nickel	0.3	0.1	0.2	
Machine 3	Fer	0.3	0.3	0.2	20
	Cuivre	0.15	0.2	0.25	
	Nickel	0.3	0.2	0.3	

Par ailleurs, cette semaine, on dispose de 300 tonnes de minerai de la mine A, 200 tonnes de B et 400 tonnes de C. Pour des raisons techniques, chaque machine ne peut traiter plus de 150 tonnes de minerai d'une même mine et la capacité totale de chaque machine est de 200 tonnes. *MQ* a reçu une commande cette semaine. Elle doit produire 100 tonnes de fer, 120 tonnes de cuivre et 125 tonnes de nickel.

a) Modéliser sous la forme compacte le modèle linéaire permettant de répondre à la commande à coût minimum. Implémenter le dans LINGO et décrire la solution optimale obtenue.

<u>Pour chacune des questions suivantes, on demande de répondre aux questions en se basant uniquement sur les rapports de sensibilités donnés par LINGO.</u>

b) Si on produisait 10 tonnes de plus de nickel, quel serait l'impact sur le coût total de production?

c) Si vous pouviez augmenter la capacité totale d'une machine de 8 tonnes, laquelle prendriez-vous ?

d) On se rend compte que la quantité de minerai de la mine B a été mal évaluée. Au lieu de 200 tonnes, c'est de 205 tonnes dont on dispose. Quel serait l'impact sur les coûts totaux de considérer cette correction?

e) Si on devait augmenter la capacité de production d'une machine, laquelle choisirait-on? Que peut-on espérer comme gain par tonne alors?

f) On remarque que la machine 3 est celle qui coûte le plus cher par tonne traitée, mais elle est exploitée à pleine capacité alors que ce n'est pas le cas de la machine 2, pourtant moins chère à l'utilisation. Comment expliquez-vous ce paradoxe?

g) Le transport du minerai de la mine C vers la machine 1 est défectueux et nous devrons envisager un transport par camions. Malheureusement, des coûts supplémentaires sont à prévoir. Quel coût supplémentaire par tonne peut-on envisager sans modification de la solution optimale?

h) Un industriel nous demande du minerai. Indiquer pour chaque minerai quel prix nous demanderions par tonne. À ce prix, combien pourrait-on lui céder de minerai?

GPA430 – Règles générales pour la remise des devoirs

1) Présentation, équipes et date de remise :

- La présentation générale des devoirs est importante et doit être soignée. Ceux-ci doivent être rédigés proprement (l'utilisation d'un traitement de texte est obligatoire). Les différents problèmes doivent être clairement séparés et vos réponses identifiées. Les copies dont la présentation est inadéquate seront pénalisées, voire même refusées.

- <u>Toutes vos réponses doivent être justifiées</u>! Une réponse non justifiée sera considérée comme fausse.

- Les devoirs doivent être faits en équipe de **trois** ou **quatre** étudiants

- Les devoirs doivent impérativement être remis **au plus tard** à la date et à l'heure limite indiquée. Aucun retard ne pourra être toléré (le corrigé du devoir sera rendu disponible sur le site web du cours juste après la remise).

2) Problèmes de modélisation :

- Définir **clairement** vos variables, unités de mesure incluses (heures, kg par semaine, etc.) L'expression « x_A c'est pour le A » ne veut rien dire; « x_A représente le nombre de tonnes du produit A, fabriqué chaque semaine » est une définition claire.

- Écrire le modèle sous sa forme compacte, en spécifiant la fonction objectif, les contraintes, et en les justifiant.

- Résoudre tous les problèmes de modélisation en utilisant LINGO. Présenter clairement le modèle LINGO. Les modèles de votre devoir doivent correspondre aux modèles LINGO que vous soumettrez.

- Donner la solution optimale (si elle existe), de même que la valeur de la fonction objectif à l'optimum.