|  |
| --- |
|  |
| Devoir 1 |
| SYS802 : Systèmes avancés de commande |
|  |
| **Flavien Deschaux – Adrien Vassal** |
|  |

|  |
| --- |
|  |

Contenu

[1. Problème 1 2](#_Toc433488976)

[1.1. Décomposition en éléments simple : 2](#_Toc433488977)

[1.2. Calcul des transformées inverses 5](#_Toc433488978)

[1.3. Calcul des transformée en Z et extraction des équations aux différences 6](#_Toc433488979)

[1.4. Transformée en Z 10](#_Toc433488980)

[1.5. Extraction des équations aux différences 10](#_Toc433488981)

[1.6. Réponse à un échelon 11](#_Toc433488982)

[1.6.1. G1(s) 11](#_Toc433488983)

[1.6.2. G2(s) 12](#_Toc433488984)

[1.6.3. G3(s) 13](#_Toc433488985)

[1.6.4. G4(s) 14](#_Toc433488986)

[1.6.5. G5(s) 15](#_Toc433488987)

[1.7. Conclusion générale sur les méthodes de discrétisation 16](#_Toc433488988)

[2. Problème 2 16](#_Toc433488989)

[2.1. Fréquence d’échantillonnage 16](#_Toc433488990)

[2.2. Calcul de la transformée en Z 16](#_Toc433488991)

[2.2.1. Méthode Backward 17](#_Toc433488992)

[2.2.2. Méthode Forward 17](#_Toc433488993)

[2.2.3. Méthode de Tustin 18](#_Toc433488994)

[2.2.4. Méthode mathématique 18](#_Toc433488995)

[2.3. Réponse temporelle 18](#_Toc433488996)

[2.4. Réponse fréquentielle 20](#_Toc433488997)

[3. Problème 3 21](#_Toc433488998)

[4. Problème 6 24](#_Toc433488999)

[4.1. Stabilité 24](#_Toc433489000)

[4.2. Tracés des diagrammes de Bode et de Nyquist 24](#_Toc433489001)

[4.3. Calcul de la pulsation propre 25](#_Toc433489002)

[4.4. Choix des pôles et zéros stabilisant le système 25](#_Toc433489003)

[4.5. Tracés des diagrammes de Bode et Nyquist 25](#_Toc433489004)

[4.6. Optimisation des performances temporelles et fréquentielles 26](#_Toc433489005)

[4.7. Tracés du Bode de S, du nyquist de T et des performances du système 27](#_Toc433489006)

[4.8. Implantation du contrôleur sur machine 28](#_Toc433489007)

Introduction

# Problème 1

## Décomposition en éléments simple :

* **G1(s)**

Avec :

Ainsi

* **G2(s)**

Après mise en forme nous obtenons :

Avec :

Ainsi :

* **G3(s)**

Car

Avec :

Nous n’avons pas a calculer car celui-ci est par définition le conjugué de .

Ainsi :

* **G4(s)**

Avec :

Pour trouver il suffit d’évaluer en 1 par exemple.

Ainsi

Donc

* **G5(s)**

Avec

Donc

* **G6(s)**

Avec

Ainsi

L’ensemble des vérifications est disponible dans le script Matlab *probleme1.*

## Calcul des transformées inverses

On sait que donc en reprenant l’ensemble des décompositions faites précédemment nous obtenons :

* **G1(s)**
* **G2(s)**
* **G3(s)**

Or

* **G4(s)**
* **G5(s)**
* **G6(s)**

L’ensemble des vérifications est disponible dans le script Matlab *probleme1.*

## Calcul des transformée en Z et extraction des équations aux différences

Il suffit de repartir de la décomposition des fonctions de transfert en élément simple et d’appliquer la formule :

Pour en déduire les équations aux différences, il faut mettre la fonction de transfert en Z sous la forme :

Les équations aux différences s’écriront donc :

* **G1(s)**

Et, pour l’équation aux différences :

* **G2(s)**

Et, pour l’équation aux différences :

* **G3(s)**

Et, pour l’équation aux différences :

* **G4(s)**

Et, pour l’équation aux différences :

* **G5(s)**

Et, pour l’équation aux différences :

* **G6(s)**

En posant

Et, pour l’équation aux différences :

## Transformée en Z

L’ensemble des transformées en z ont été réalisées à la main sur la version papier du compte rendu.  
L’ensemble des vérifications est disponible dans le script Matlab *probleme1.*

## Extraction des équations aux différences

L’ensemble des équations aux différences ont été réalisées à la main sur la version papier du compte rendu.

## Réponse à un échelon

La réponse à un échelon des systèmes nous permettra de juger la performance temporelle des différents types de discrétisation et l’impact du temps d’échantillonnage sur le système discret.  
(Il va sans dire que le système G6 ne sera pas testé car il faudrait visualiser les données dans un espace à 6 dimensions : temps, amplitude, a, b, c et alpha)

### G1(s)

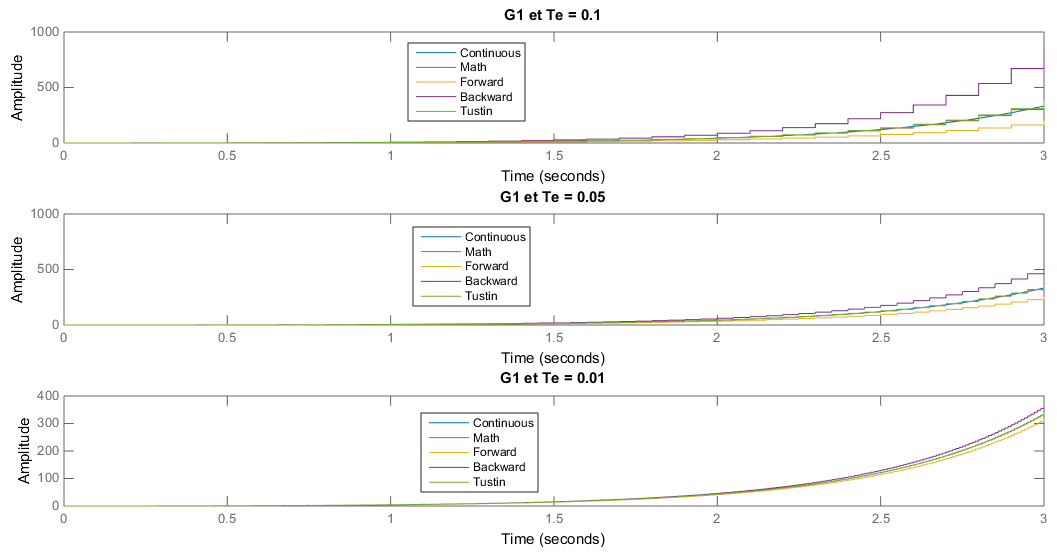
Le système G1 est instable (un pôle négatif), ainsi le tracée de la réponse temporelle va rapidement exploser, il est donc inutile de regarder sur un trop grand laps de temps.  
Le système continu est instable et les systèmes discrets le sont également.  
Cela ne sera pas toujours le cas, il se peut qu’une discrétisation nous fasse croire que notre système est stable (valeur finale < ∞ ) alors que ce n’est pas le cas.

Figure : Comparaison des méthodes de discrétisation pour G1

### G2(s)

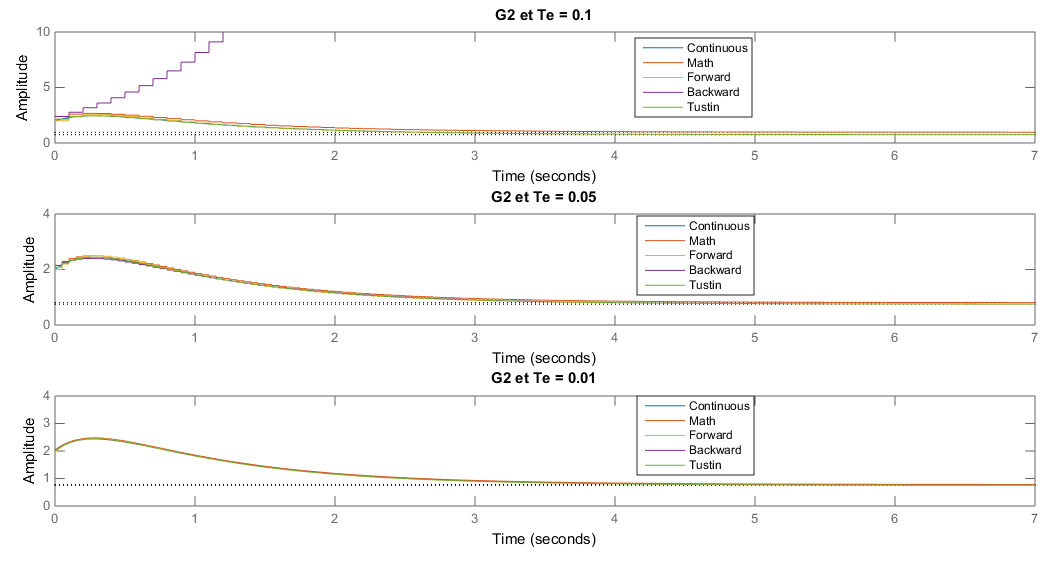
Cette fois-ci le système est stable et présente un gain statique d’une valeur de ¾.

Figure : Comparaison des méthodes de discrétisation pour G2

Sur le premier graphique il apparait que pour un temps de discrétisation trop petit sur la méthode Backward, nous perdons la propriété de stabilité présente sur le système continu.

Quand nous regardons de plus près la fonction de transfert considéré nous avons :

Nous avons un pôle en dehors du cercle unité ce qui explique l’instabilité.

Les autres méthodes donnent des résultats similaires dans le régime temporel.

### G3(s)

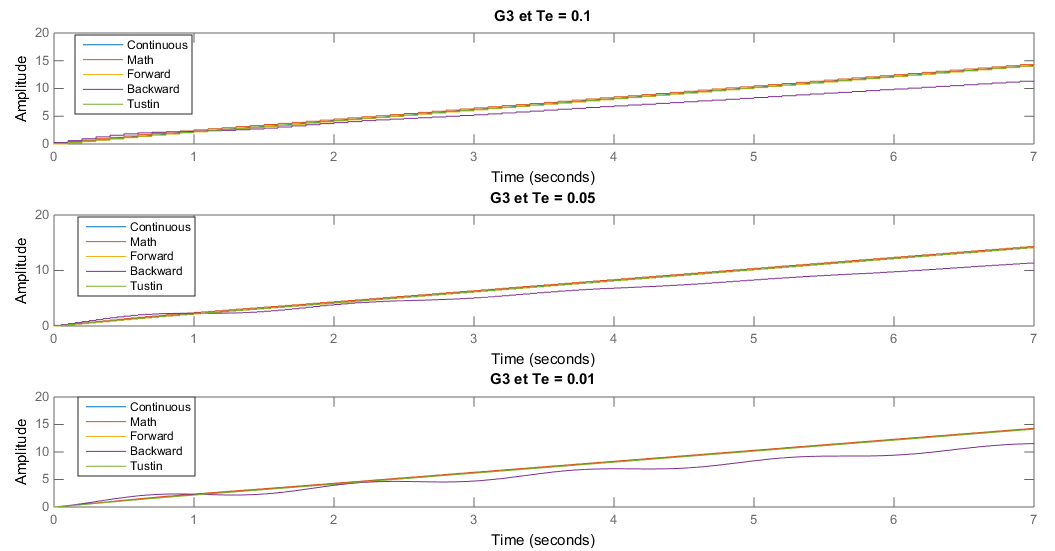
Ce système est stable et présente un intégrateur simple, ainsi la réponse à un échelon sera une rampe.

Figure : Comparaison des méthodes de discrétisation pour G3

Encore une fois la méthode Backward est la moins satisfaisante, on peut remarquer l’apparition d’une oscillation pour un Te de plus en plus petit.  
Les autres méthodes présentent des résultats similaires.

### G4(s)

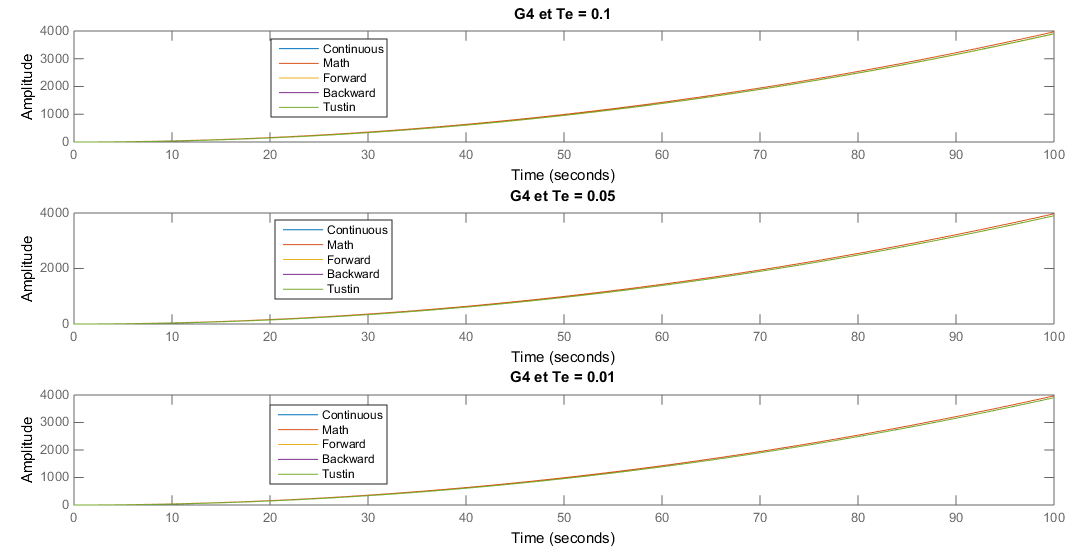
Ce système présente un double intégrateur, ainsi la réponse à un échelon aura la forme d’une exponentielle.

Figure : Comparaison des méthodes de discrétisation pour G4

Ici tous les types de discrétisation semblent fonctionner correctement.

### G5(s)

Cette fonction est instable et présente un gain statique non unitaire.

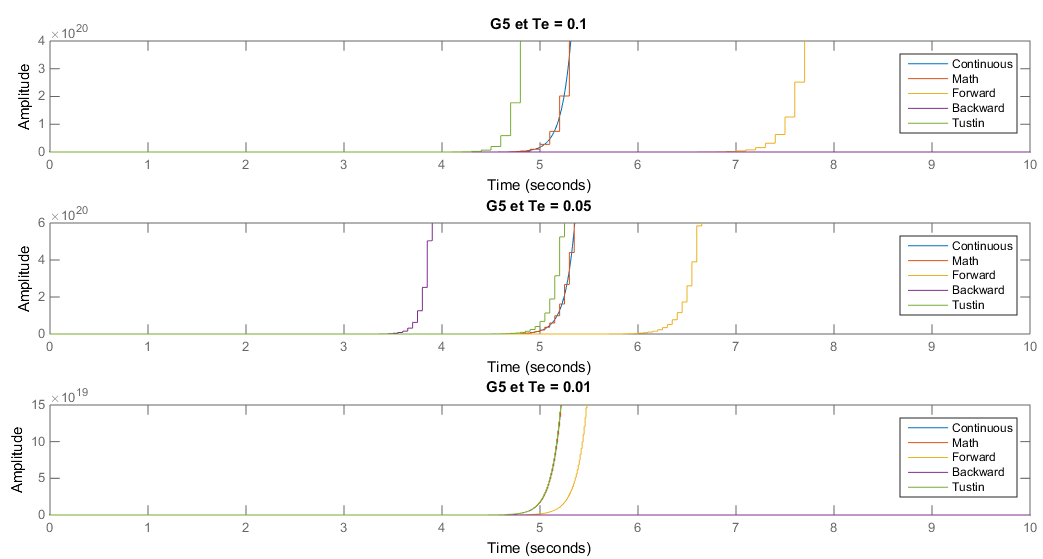


Figure : Comparaison des méthodes de discrétisation pour G5

Plusieurs points sont intéressants à relever sur ces courbes :

* En fonction de la valeur d’échantillonnage, les méthodes de Tustin et Forward présente des courbes ayant la bonne forme mais ayant un déphasage temporel par rapport au système original.  
  Plus le temps de discrétisation diminue, plus le déphasage diminue également.
* Pour Te = 0.1 et Te = 0.01, la méthode backward donne l’impression que le système est stable (i.e. pas d’explosion de l’amplitude dans le temps)

En effet nous avons

Ainsi les cas Te = 0.1 et 0.01 présente bien des racines à l’intérieur du cercle unité (l’une d’elle est sur le cercle), tandis que dans le cas Te=0.05 l’une des racines est en dehors du cercle.

Ainsi dans ce cas précis l’utilisation de la méthode backward avec une certaine fréquence d’échantillonnage pourrait nous faire croire que notre système est stable alors que ce n’est pas le cas.

## Conclusion générale sur les méthodes de discrétisation

La conclusion générale a été faire à la main et est disponible sur le rapport papier.

# Problème 2

Soit la fonction de transfert définie par l’équation suivante :

## Fréquence d’échantillonnage

Le théorème de Shannon stipule que la fréquence d’échantillonnage doit être strictement supérieure à deux fois la plus haute fréquence de notre système.  
Ici il n’y a qu’une seule fréquence :

Ainsi on pose la fréquence d’échantillonnage :

## Calcul de la transformée en Z

### Méthode Backward

On pose : , ainsi l’équation du système devient :

L’application numérique nous donne :

La vérification sous Matlab se fait en utilisant créant des variables *s* et *z* et en définissant l’équation liant ces deux variables. Nous obtenons bien le même résultat.

## Méthode Forward

On pose : , ainsi l’équation du système devient :

L’application numérique nous donne :

La vérification sous Matlab se fait en utilisant créant des variables *s* et *z* et en définissant l’équation liant ces deux variables. Nous obtenons bien le même résultat.

### Méthode de Tustin

On pose : , ainsi l’équation du système devient :

L’application numérique nous donne :

La vérification sous Matlab se fait en utilisant l’option ‘tustin’ dans la fonction c2d, nous obtenons bien le même résultat.

### Méthode mathématique

En utilisant les tableaux de transformée nous obtenons directement la transformée en z de notre fonction.

## Réponse temporelle

Nous traçons l’ensemble des réponses temporelles sur Matlab. Il faut faire attention au fait que la fonction *impulse* pour des fonctions de transferts discrètes va représenter la réponse à un créneau unitaire d’amplitude 1/Te et de largeur Te. Ainsi pour comparer les résultats continus et discret dans le cas d’une discrétisation avec la méthode mathématique, il faudra multiplier notre fonction de transfert en z par Te pour compenser l’effet de la fonction *impulse*.

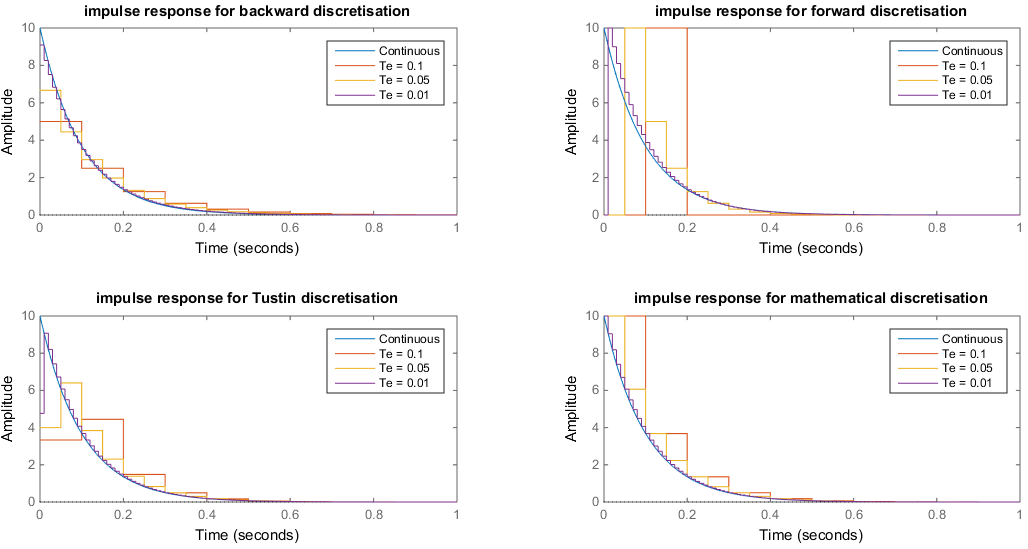
Tout d’abord il apparait clairement que pour avoir une meilleure approximation, il est préférable d’avoir un temps d’échantillonnage plus petit, et quel que soit la méthode utilisée.  
Ainsi les temps d’échantillonnage de 0.1 et 0.05 ne sont pas adaptés à notre problème de discrétisation.  
 L’ensemble des discrétisations tendent bien vers la même valeur finale que le système continu quel que soit la valeur de l’échantillonnage.  
 Les erreurs les plus importantes remarquées sont obtenues à l’origine des temps. En effet, il faut attendre une période d’échantillonnage avant que notre système échantillonné commencer à suivre notre système discret. Ce qui une fois de plus disparait pour un temps d’échantillonnage qui tend vers 0.

Figure : Influence de la discrétisation sur les réponses temporelles

## Réponse fréquentielle

Figure : Impacte de la discrétisation sur la réponse fréquentielle

Tout d’abord on remarque trois asymptotes pour la magnitude. Ces trois asymptotes sont obtenues aux fréquences : 1/Téchantillonnage. Ces asymptotes définissent la limite de validité de notre approximation (discrétisation). Ainsi une fois de plus, plus la période d’échantillonnage est petite, plus l’asymptote est située loin en fréquence ce qui est souhaitable pour que notre discrétisation ressemble au maximum à notre système continu.

Les méthodes de Backward et Forwart semble bien conserver relativement bien les propriétés de magnitude mais pas de phase. Après avoir passé la fréquence du pole p = 10rad/s, la phase du cas backward remonte tandis que la phase du cas forward plonge. Ainsi la plage de fréquence sur laquelle on peut estimer que ces discrétisation sont valide est relativement restreinte, car ces deux discrétisation dégradent fortement l’information de phase de notre système.

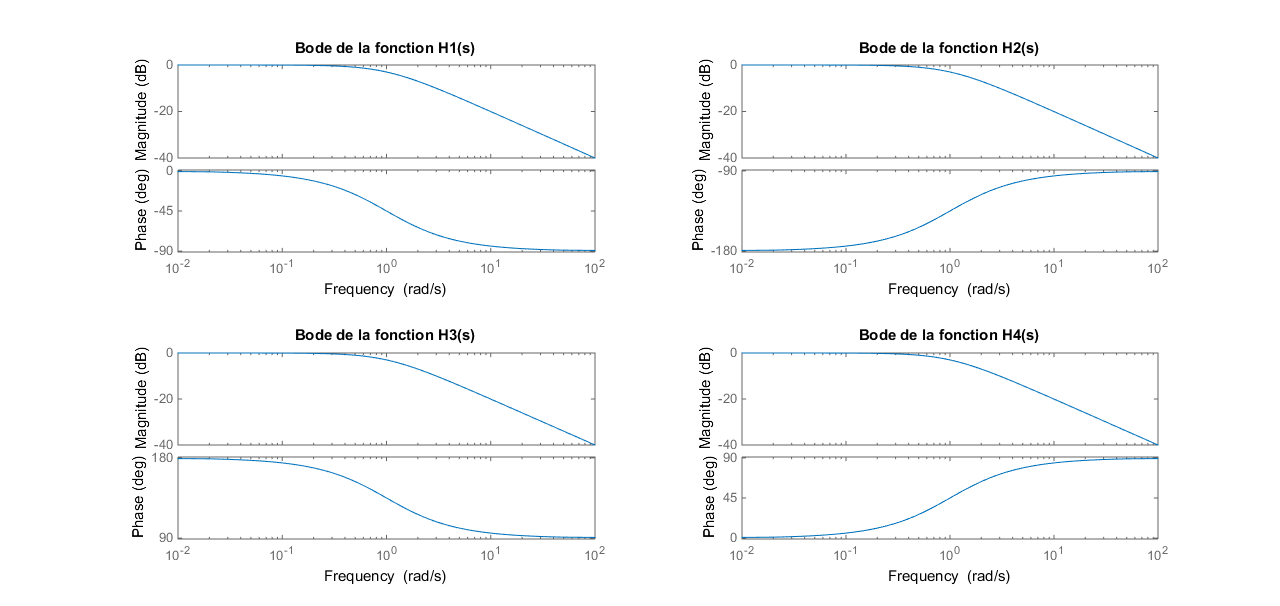
Les méthodes de Tustin et mathématique présentent des résultats similaires en fréquence. Ces résultats ne sont pas parfaits mais ils ont le mérite de respecter le Bode en phase et en magnitude sur une grande plage de fréquence que les cas Backward et Forward.

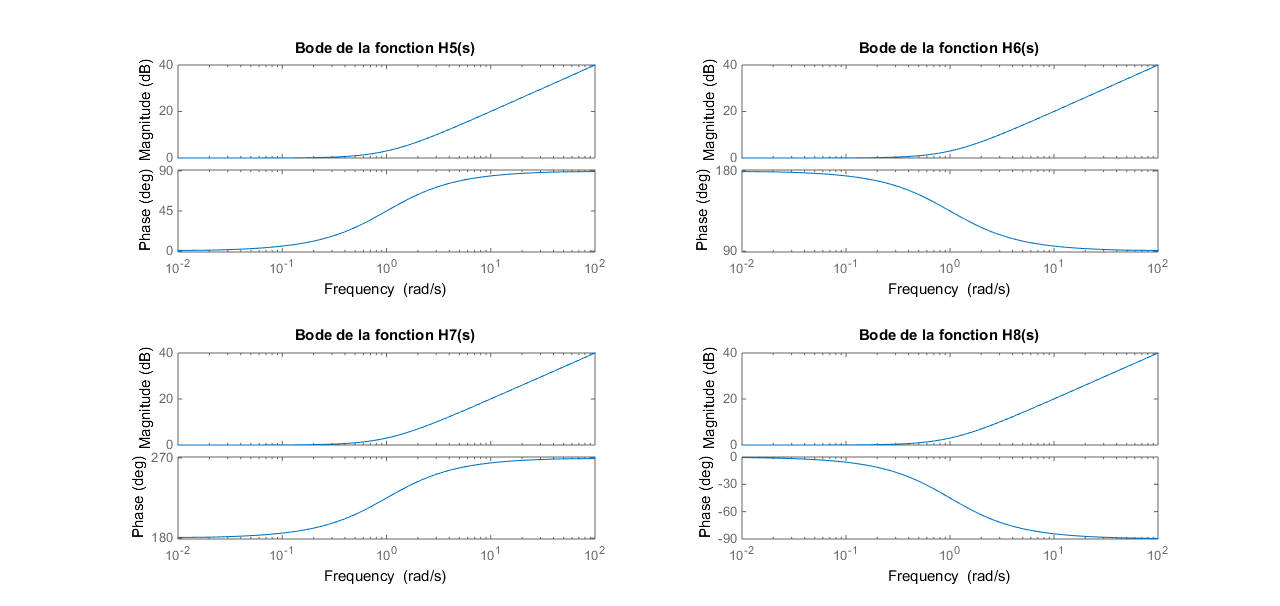
En conclusion, pour choisir la méthode à utiliser (pour un Te fixé par les contraintes numériques de notre calculateur) il faut commencer par définir la plage de fréquence sur laquelle nous souhaitons que notre discrétisation soit valide, et vérifier le comportement des 4 méthodes sur cette plage de fréquence pour sélectionner la meilleure.

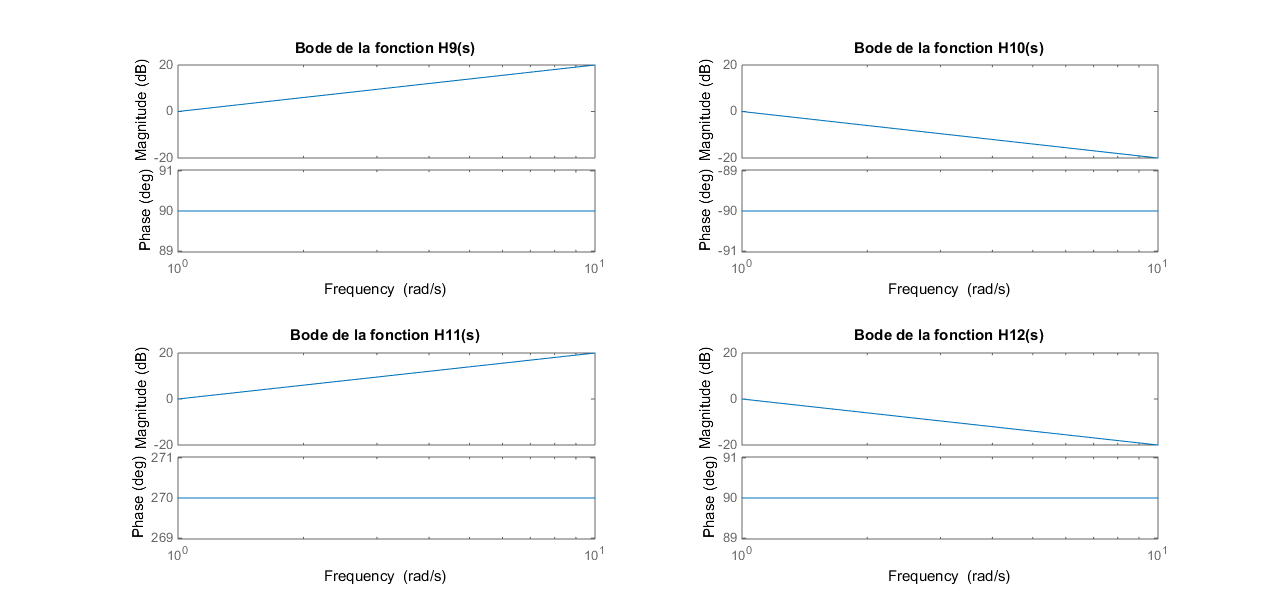
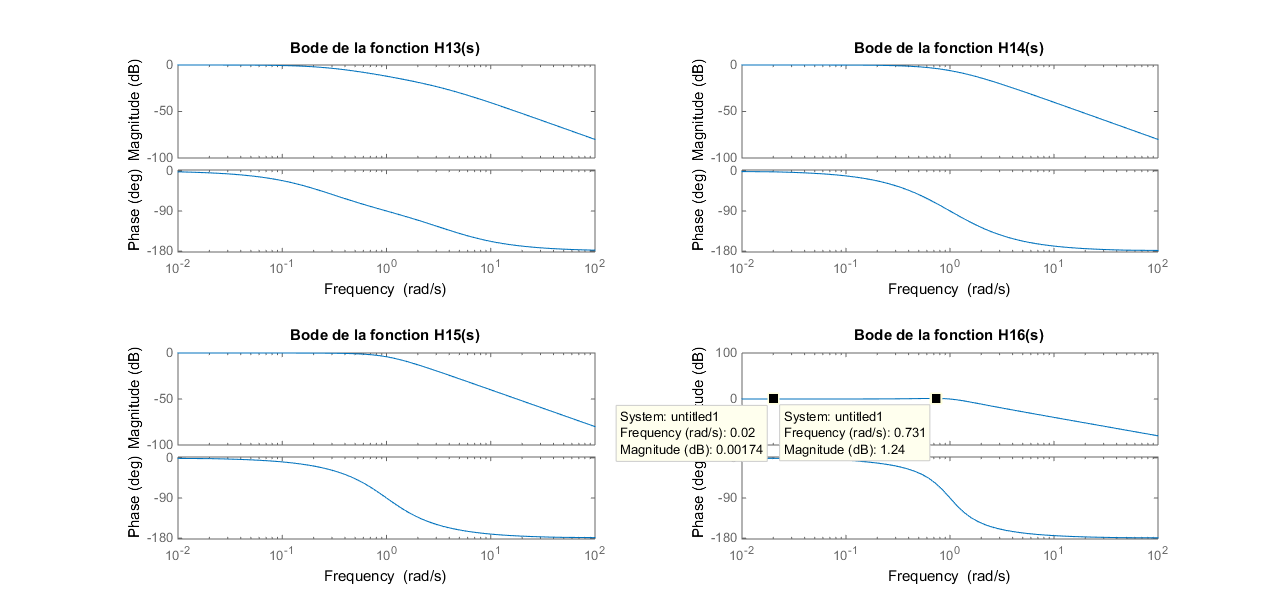
# Problème 3

Il existe plusieurs façons de tracer des diagrammes de Bode sous Matlba (*margin*, *bode*, *semilogx*,…).  
Dans notre cas nous allons utiliser la fonction *bode*.  
Il faut faire attention à la phase obtenue à l’aide de ces fonctions de tracé automatique car il se peut que Matlab ne fasse pas la différence entre 360° et 0°. Pour résoudre ce genre de conflit, il est préconisé d’utiliser la fonction *unwrap* pour le calcul de la phase, ou bien de faire sois même les retouches nécessaire pour résoudre ce genre de problème.

Dans notre cas la fonction *H8(s)* retourne une marge décalée de +360° sur Matlab. Nous apportons donc la correction nécessaire pour éliminer ce problème.

Les tracés obtenus sont les suivants :





Sur le dernier diagramme deux points ont été choisis pour montrer qu’il y a bien une résonnance (le gain statique est plus petit que la magnitude à la fréquence de résonnance) qui correspond aux calculs que nous avons faits.

# Problème 6

## Stabilité

Voir la feuille manuscrite.

## Tracés des diagrammes de Bode et de Nyquist

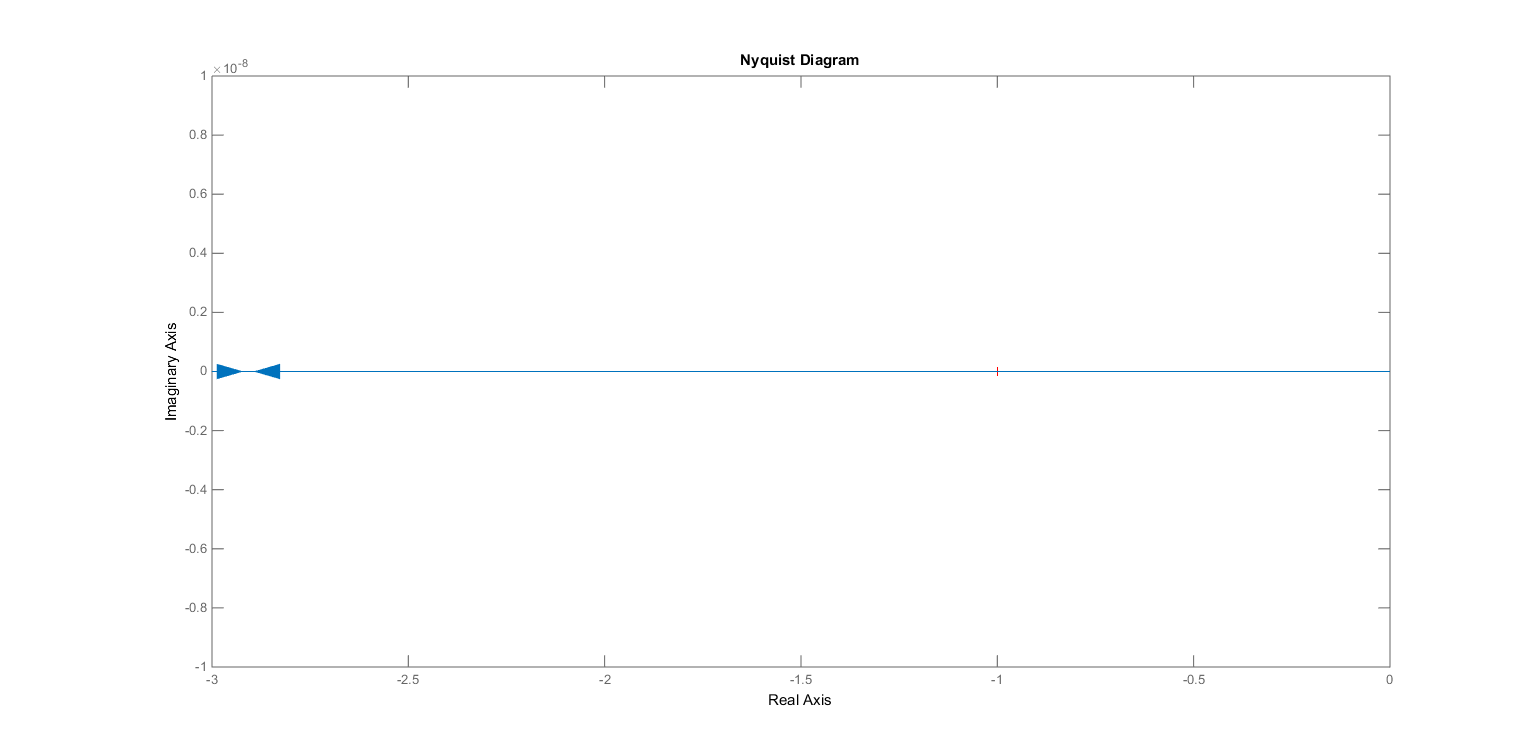


Figure : Diagramme du Nyquist du système

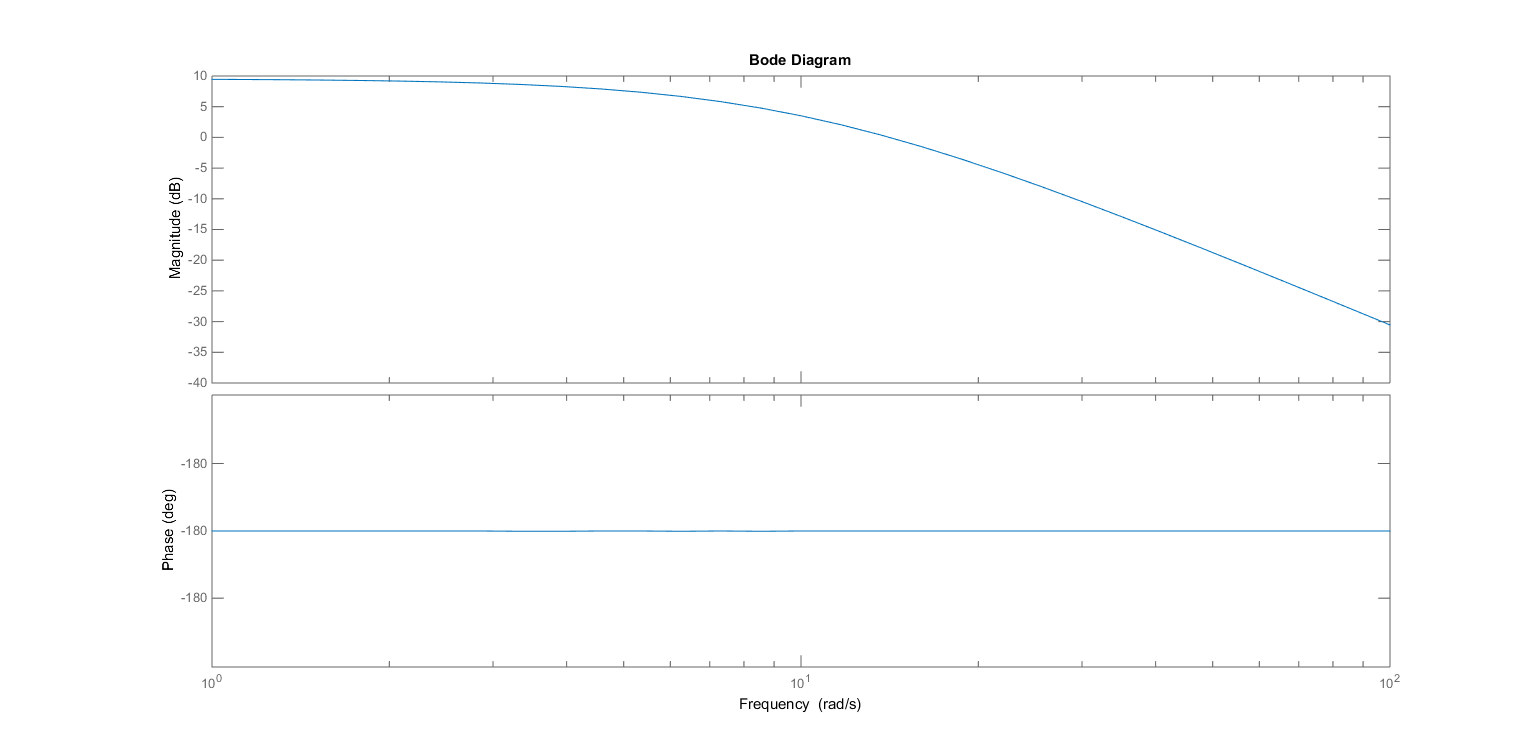


Figure : Diagramme de Bode du système

Cela correspond bien à ce que nous avons tracé dans le rapport papier.

## Calcul de la pulsation propre

Voir la feuille manuscrite.

## Choix des pôles et zéros stabilisant le système

Voir la feuille manuscrite.

## Tracés des diagrammes de Bode et Nyquist

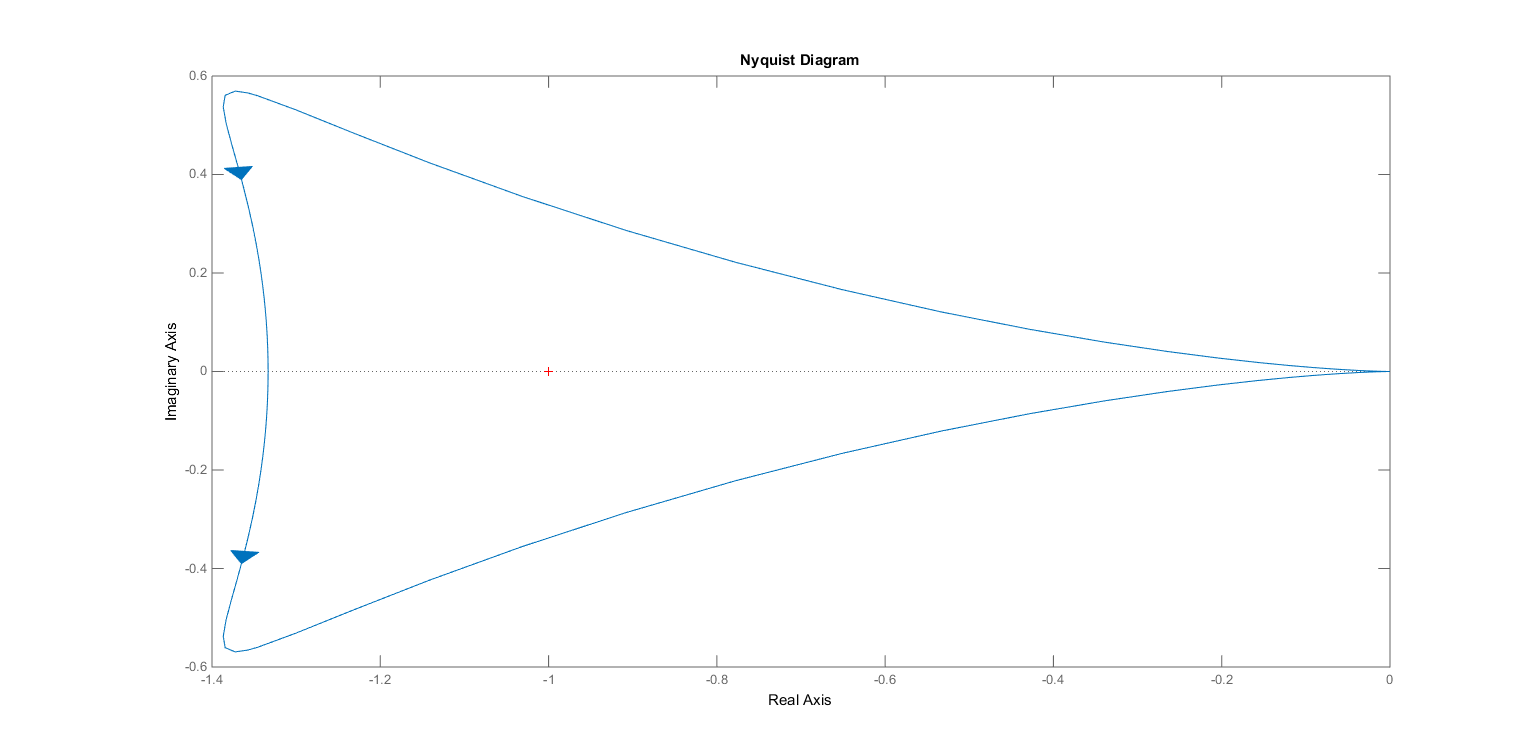


Figure : Nyquist du système stabilisé

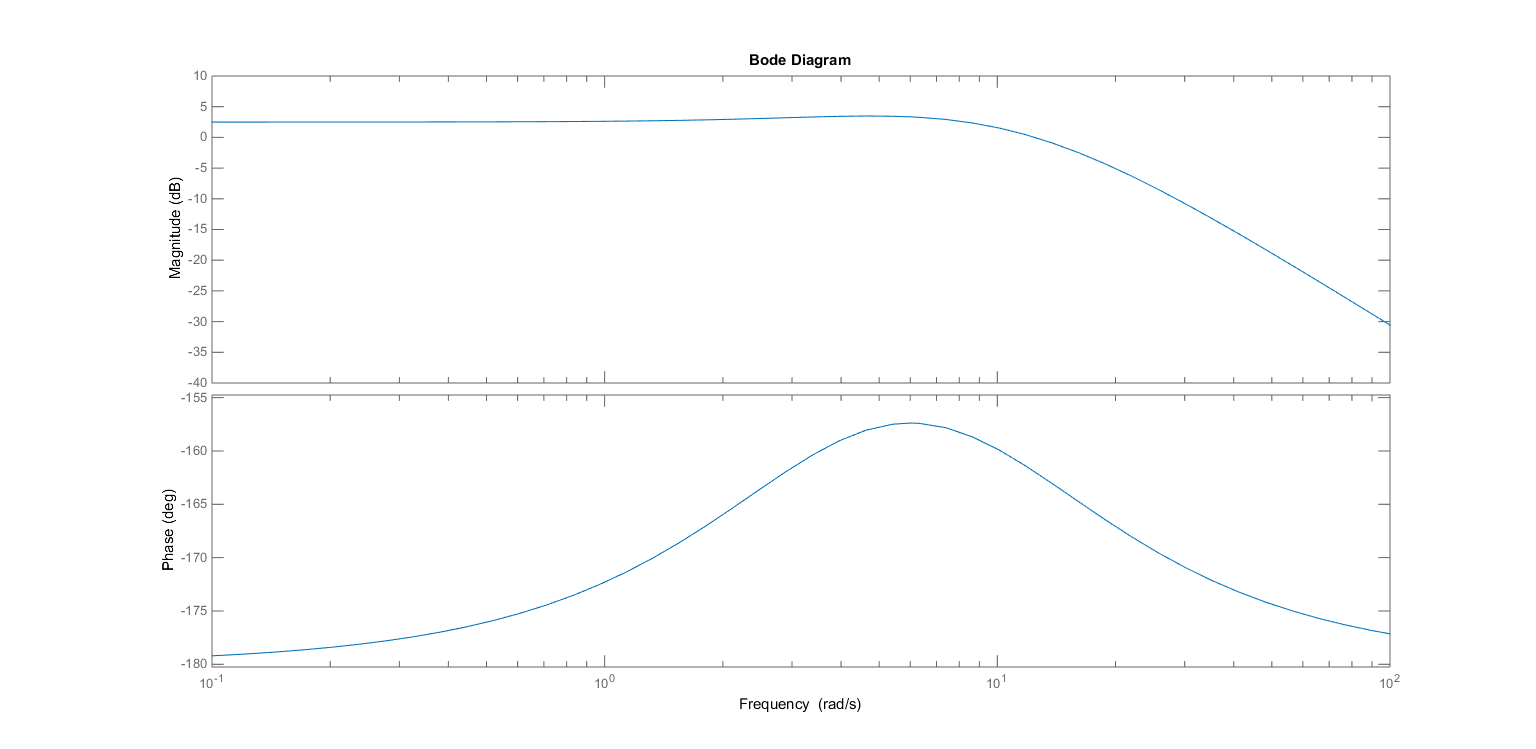


Figure : Bode du système stabilisé

## Optimisation des performances temporelles et fréquentielles

Voir la feuille manuscrite.

## Tracés du Bode de S, du nyquist de T et des performances du système

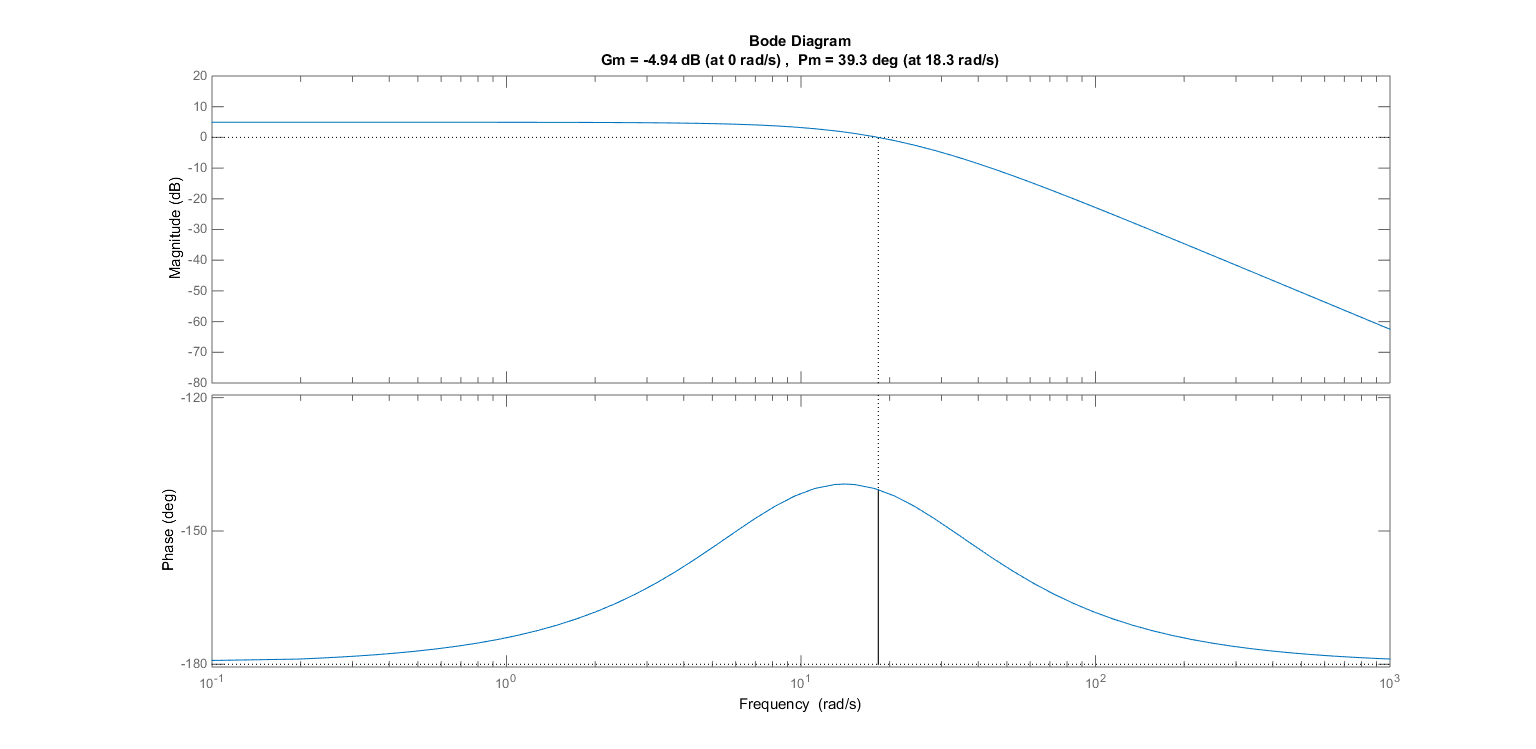


Figure : Diagramme de Bode de la sensibilité

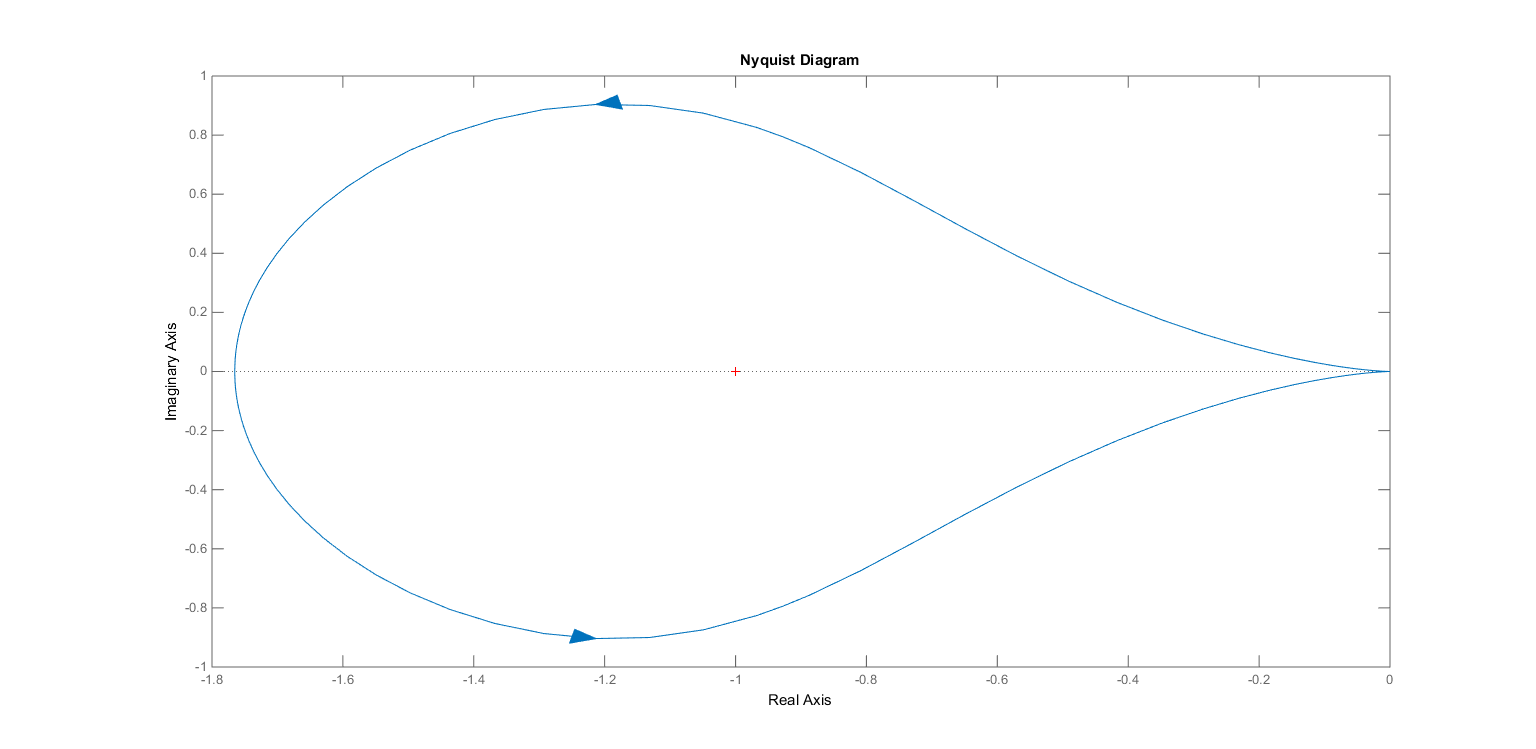


Figure : Diagramme de Nyquist de la transmitansse

TO DO : insérer un diagramme temporelle avec correction de l’erreur statique

## Implantation du contrôleur sur machine

Voir la feuille manuscrite.

Conclusion