Soluciones a la hoja de ejercicios 5

Ejercicio 1

Al ser la distribución gamma, su valor esperado y su varianza son

$$E(X) = \frac{1600}{5} = 320$$
$$Var(X) = \frac{1600}{25} = 64$$

Utilizando la función *pgamma* encontramos la probabilidad del suceso $X > 320$

```
cat(sprintf("P(X>320) = %5.3f", pgamma(320, 1600, 5, lower.tail=F)))
```

```
## P(X>320) = 0.497
```

Gracias al teorema del límite central sabemos que la variable

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$$

sigue una distribución normal estandar. Los valores de la distribución normal tipificada que deja dentro de si el 95 % de la distribución son $Z_1 = -1,96$ y $Z_2 = 1,96$. Cómo ya sabemos que $\mu = 320$ y $\sigma = 8$ podemos convertir estas Z a puntuación directa.

$$\overline{X}_1 = 320 - \frac{8}{\sqrt{25}} 1,96 \approx 316,86$$
$$\overline{X}_2 = 320 + \frac{8}{\sqrt{25}} 1,96 \approx 323,14$$

La probabilidad de que una persona tarde más de 320 segundos la hemos calculado anteriormente. Si tomamos una muestra de 10 personas y la probabilidad de que uno de ellos tarde más de 320 segundos es 0,497, entonces la probabilidad de que cinco personas tardem más de este tiempo es binomial($n = 10$, $\pi = 0,497$). Por tanto la respuesta es

```
cat(sprintf("Pr = %5.3f", dbinom(5, 10, pgamma(320, 1600, 5, lower.tail=F))))
```

```
## Pr = 0.246
```

Ejercicio 2

Despejamos los parámetros de cada distribución a partir de la media y varianza de la muestra utilizando las fórmulas incluidas en los apuntes. En concreto:

- Exponencial

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\overline{X}}$$

- Gamma

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{S^2}$$
$$\hat{\beta} = \frac{\overline{X}}{S^2}$$

- Beta

$$\hat{\alpha} = \overline{X}\left(\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{S^2} - 1\right)$$
$$\hat{\beta} = (1-\overline{X})\left(\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{S^2} - 1\right)$$

El resultado es

```
x <- c(.66, .75, .22, .79, .35, .47, .07, .04, .51, .15)
media <- mean(x)
varianza <- var(x)

omega <- 1/media

alpha_1 <- media^2/varianza
beta_1 <- media/varianza

alpha_2 <- media*(media*(1-media)/varianza - 1)
beta_2 <- (1-media)*(media*(1-media)/varianza - 1)

cat(sprintf("Exponencia, omega = %5.3f
Gamma, a = %5.3f, b = %5.3f
Beta, a = %5.3f, b = %5.3f\n", omega, alpha_1, beta_1, alpha_2, beta_2))
```

```
## Exponencia, omega = 2.494
## Gamma, a = 2.082, b = 5.192
## Beta, a = 0.846, b = 1.264
```

Ejercicio 3

El siguiente código realiza la estimación por mínimos-cuadrados.

```
x <- 1:10
y <- c(0.30, 0.29, 0.37, 0.59, 0.74, 0.69, 0.84, 0.99, 0.92, 0.95)
d <- function(v) sum((y - exp(v[1] + v[2]*x)/(1+exp(v[1] + v[2]*x)))^2)
dMin <- optim(c(0,0), d)
print(dMin)
```

```
## $par
## [1] -1.7140722  0.4902542
##
## $value
## [1] 0.03149902
##
## $counts
## function gradient
##       65       NA
```

```
##
## $convergence
## [1] 0
##
## $message
## NULL
```

Utilizamos los parámetros estimados para calcular los pronósticos, es decir

$$y_i' = \frac{\exp(\alpha + \beta x_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta x_i)}$$

La proporción de varianza explicada la obtenemos con la fórmula

$$Prop. = \frac{S^2_{Y'}}{S^2_Y}$$

Con el siguiente código hacemos estos cálculos

```
pronostico <- exp(dMin$par[1] + dMin$par[2]*x)/(1+exp(dMin$par[1] + dMin$par[2]*x))
cat(sprintf("proporción de varianza explicada = %5.3f", var(pronostico)/var(y)))
```

```
## proporción de varianza explicada = 0.964
```

Finalmente obtenemos el diagrama de dispersión con la linea de los pronósticos

```
plot(x,y,ylim=c(0,1))   # Diagrama de dispersion de (x,y)
xp <-seq(1,10,by=0.001) # Valores de X para calcular el pronostico
yp <- exp(dMin$par[1] + dMin$par[2]*xp)/(1+exp(dMin$par[1] + dMin$par[2]*xp)) # Pronostico
lines(xp, yp, col="firebrick", lwd=1.5) # Añadir la linea de pronósticos al diagrama de dispersión
```

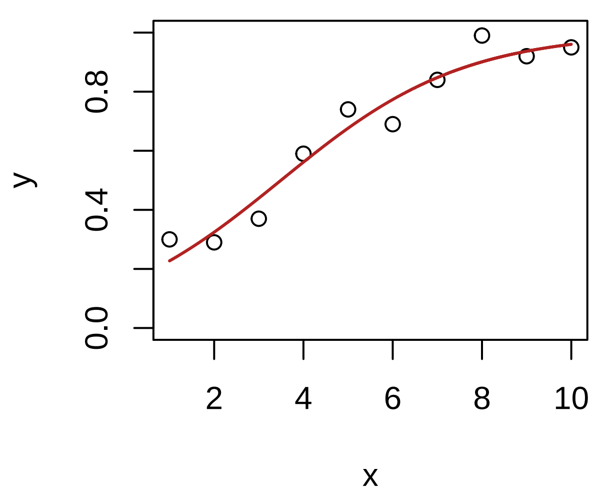

Figura 1: Regresión no lineal