Modelos Psicométricos: Tópicos Selectos

Tema 1: Modelos TRI para Ítems Politómicos

Iwin Leenen y Ramsés Vázquez-Lira

Facultad de Psicología, UNAM

Programa de Licenciatura y Posgrado en Psicología
Semestre 2019–2

Índice

Índice:

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el “comportamiento” de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo I
Respuesta A	A	$\rightsquigarrow$	Prob. (A)
Respuesta B	B	$\rightsquigarrow$	Prob. (B)
Respuesta C	C	$\rightsquigarrow$	Prob. (C)
Respuesta D	D	$\rightsquigarrow$	Prob. (D)
Sin responder	O	$\rightsquigarrow$	Prob. (O)

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo II
Respuesta A	Correcto (1)	$\rightsquigarrow$	Prob. (1)
Respuesta B	Incorrecto (0)	$\rightsquigarrow$	Prob. (0)
Respuesta C			
Respuesta D			
Sin responder			

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona p, al contestar el ítem i, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{pi} = k) \;=\; f(\text{parámetro(s) de la persona } p, \text{parámetro(s) del ítem } i)$$

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona p, al contestar el ítem i, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{pi} = k) \; = \; f(\text{parámetro(s) de la persona } p, \text{parámetro(s) del ítem } i)$$

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: "Correcto" vs. "Incorrecto"
  "De acuerdo" vs. "En desacuerdo"
  "Presente" vs. "Ausente"
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función "libre": Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = *curva característica de la respuesta correcta*.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: “Correcto” vs. “Incorrecto”
  “De acuerdo” vs. “En desacuerdo”
  “Presente” vs. “Ausente”
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función “libre”: Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

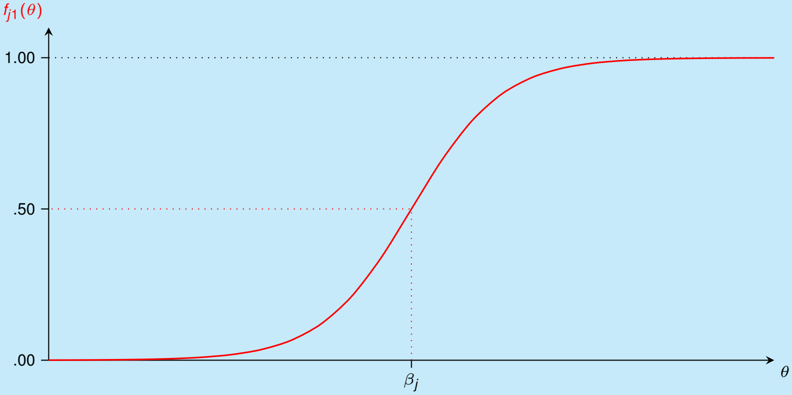
- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = *curva característica de la respuesta correcta*.

Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría "respuesta correcta" (1) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

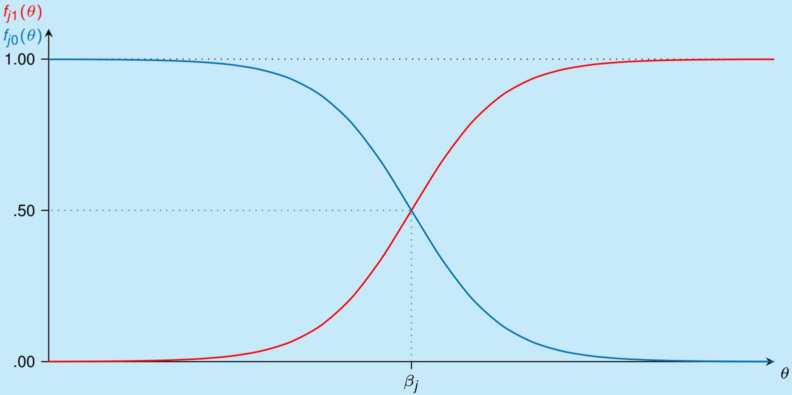
$$f_{j1}(\theta) = \frac{\exp(\theta - \beta_j)}{1 + \exp(\theta - \beta_j)}$$



Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría “respuesta incorrecta” (0) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

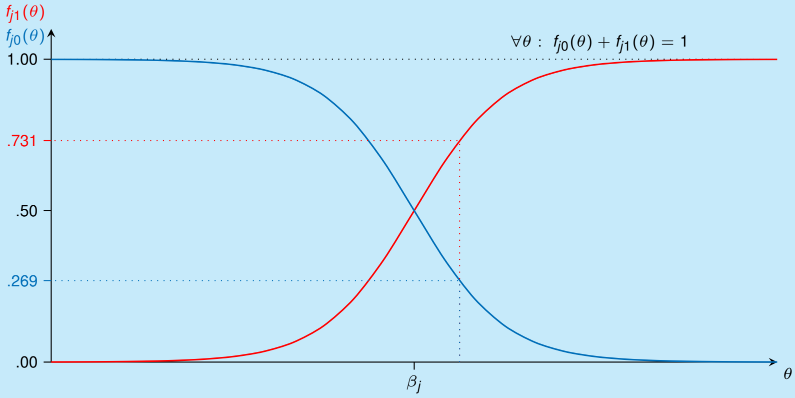
$$f_{j0}(\theta) = \frac{1}{1+\exp(\theta-\beta_j)}$$



Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría "respuesta incorrecta" (0) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

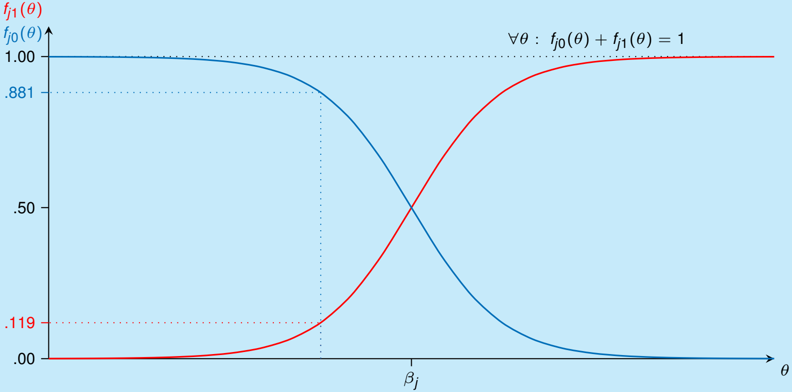
$$f_{j0}(\theta) = \frac{1}{1 + \exp(\theta - \beta_j)}$$



Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría “respuesta incorrecta” (0) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

$$f_{j0}(\theta) \;=\; \frac{1}{1+\exp(\theta-\beta_j)}$$



Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: “Correcto” vs. “Incorrecto”
  “De acuerdo” vs. “En desacuerdo”
  “Presente” vs. “Ausente”
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función “libre”: Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = *curva característica de la respuesta correcta*.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: "Correcto" vs. "Incorrecto"
  "De acuerdo" vs. "En desacuerdo"
  "Presente" vs. "Ausente"
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función "libre": Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = curva característica de la respuesta correcta.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.
- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).
- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.

- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).

- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = “Totalmente en desacuerdo”
B = “En desacuerdo”
C = “Ligeramente en desacuerdo”
D = “Ni de acuerdo, ni en desacuerdo”
E = “Ligeramente de acuerdo”
F = “De acuerdo”
G = “Totalmente de acuerdo”

$m = 7$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = “Brisbane”
B = “Canberra”
C = “Melbourne”
D = “Sidney”
E = “Wellington”

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.

- Esta curva característica se llama “curva característica de la categoría” (CCC).

- Solo hay $m - 1$ funciones “libres”: Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

$m = 7$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.

- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).

- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

$m = 7$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.
- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).
- Solo hay $m-1$ funciones "libres": Si se han especificado $m-1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:
La homosexualidad es natural y debe tolerarse.
A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

$m = 7$

Ejemplo 2:
¿Cuál es la capital de Australia?
A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.
- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).
- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Panorama de los modelos TRI unidimensionales para ítems politómicos

En este curso, se introducirán modelos para:

- cuando las categorías están ordenadas:
  - El Modelo de Crédito Parcial (PCM; Masters, 1982);
  - El Modelo de Respuesta Graduada (GRM; Samejima, 1969);
- cuando las categorías no están ordenadas (categorías nominales):
  - El Modelo de Respuesta Nominal (NRM; Bock, 1972).

Panorama de los modelos TRI unidimensionales para ítems politómicos

En este curso, se introducirán modelos para:

- cuando las categorías están ordenadas:
  - El Modelo de Crédito Parcial (PCM; Masters, 1982);
  - El Modelo de Respuesta Graduada (GRM; Samejima, 1969);
- cuando las categorías no están ordenadas (categorías nominales):
  - El Modelo de Respuesta Nominal (NRM; Bock, 1972).

Índice:

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(-\eta_{i0})\,\exp(\eta_{i0})}{[\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})]\ \exp(\eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})\,\exp(\eta_{i0})}{[\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})]\ \exp(\eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(-\eta_{i0})\,\exp(\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0})\,\exp(\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})\,\exp(\eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})\,\exp(\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0})\,\exp(\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})\,\exp(\eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(-\eta_{i0} + \eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0} + \eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0} + \eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0)}{\exp(0) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}{\exp(0) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{1}{1 + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}{1 + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{1}{1 + \exp\left[\theta_p - (\eta_{i1} - \eta_{i0})\right]}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp\left[\theta_p - (\eta_{i1} - \eta_{i0})\right]}{1 + \exp\left[\theta_p - (\eta_{i1} - \eta_{i0})\right]}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{1}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

si definimos: $\beta_i = \eta_{i1} - \eta_{i0}$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \beta_i)}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{1}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

si definimos: $\beta_i = \eta_{i1} - \eta_{i0}$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \beta_i)}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

¡Obtenemos el modelo de Rasch!

Derivando el modelo de Rasch...

¿Qué aprendimos de la derivación anterior?

- En el modelo de Rasch, se puede interpretar el parámetro del ítem (β_i) como la diferencia entre parámetros para la categoría 1 (η_{i1}) y la categoría 0 (η_{i0}).

  ¡Ojo! Estos parámetros en si mismo no son estimables.

- Para llegar al modelo de Rasch, se deben asignar (en las ecuaciones inicales) coeficientes 0 y 1 a las categorías de respuesta incorrecta y correcta, respectivamente.

  $\longrightarrow$ ¡Categorías ordenadas!

Derivando el modelo de Rasch...

¿Qué aprendimos de la derivación anterior?

- En el modelo de Rasch, se puede interpretar el parámetro del ítem (β_i) como la diferencia entre parámetros para la categoría 1 (η_{i1}) y la categoría 0 (η_{i0}).

  ¡Ojo! Estos parámetros en si mismo no son estimables.

- Para llegar al modelo de Rasch, se deben asignar (en las ecuaciones inicales) coeficientes 0 y 1 a las categorías de respuesta incorrecta y correcta, respectivamente.

  $\longrightarrow$ ¡Categorías ordenadas!

Derivando el modelo de Rasch...

¿Qué aprendimos de la derivación anterior?

- En el modelo de Rasch, se puede interpretar el parámetro del ítem (β_i) como la diferencia entre parámetros para la categoría 1 (η_{i1}) y la categoría 0 (η_{i0}).

  ¡Ojo! Estos parámetros en si mismo no son estimables.

- Para llegar al modelo de Rasch, se deben asignar (en las ecuaciones inicales) coeficientes 0 y 1 a las categorías de respuesta incorrecta y correcta, respectivamente.

  $\longrightarrow$ ¡Categorías ordenadas!

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\
\beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\
&\vdots \\
\beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2}
\end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\ \beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\ &\vdots \\ \beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2} \end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\
\beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\
&\vdots \\
\beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2}
\end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\ \beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\ &\vdots \\ \beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2} \end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

- El modelo que se acaba de derivar se llama el Modelo de Crédito Parcial.

  La propuesta inicial del modelo: Anderson (1977);
  La derivación (y el nombre de *Crédito Parcial*): Masters (1982).

- Entonces, la curva característica de categoría en el Modelo de Crédito Parcial se da por:

$$f_{ij}(\theta) \;=\; \frac{\exp\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]},$$

  donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[j\theta - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right]}{\sum_{k=0}^{2} \exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

$$f_{i0}(\theta) = \frac{\exp\left(0\theta - \sum_{h=1}^{0} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

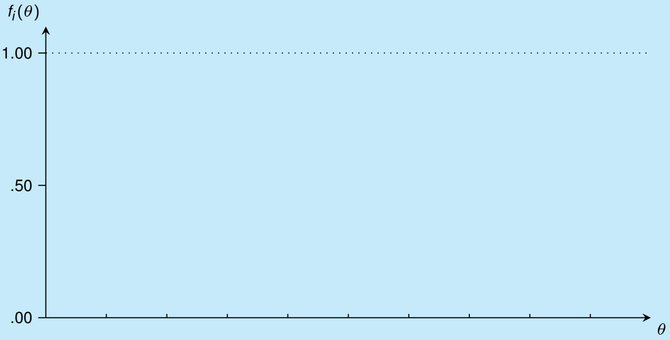
Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría *j* del ítem *i* en el PCM se da por:

$$f_{i0}(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

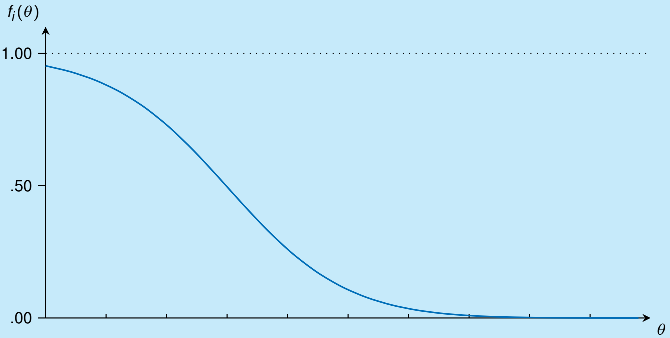
$$f_{i0}(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

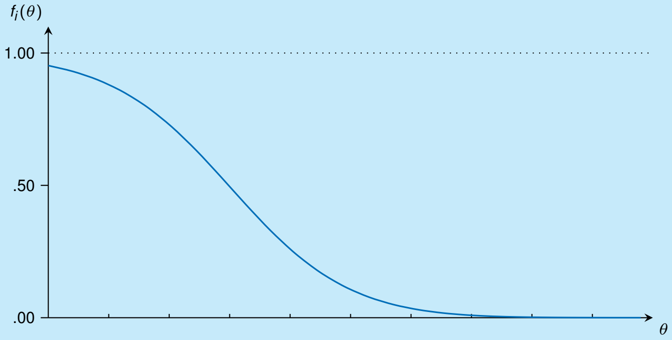
$$f_{i0}(\theta) = \frac{1}{1 + \exp[\theta - \beta_{i1}] + \exp[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

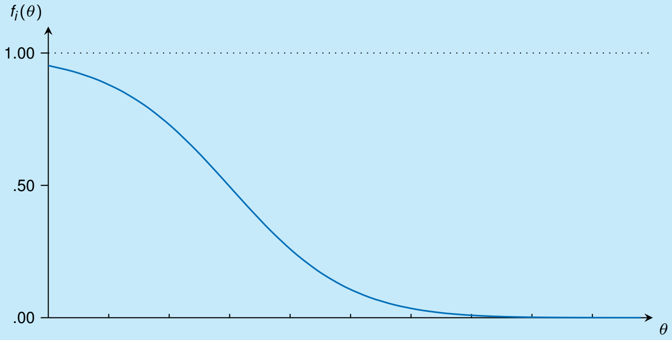
$$f_{i1}(\theta) = \frac{\exp\left(1\theta - \sum_{h=1}^{1} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

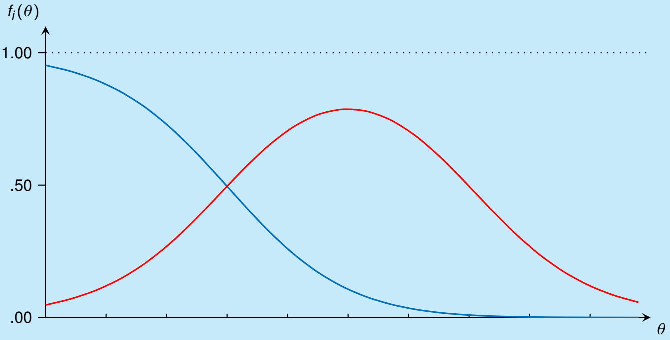
$$f_{i1}(\theta) = \frac{\exp\left(\theta - \beta_{i1}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

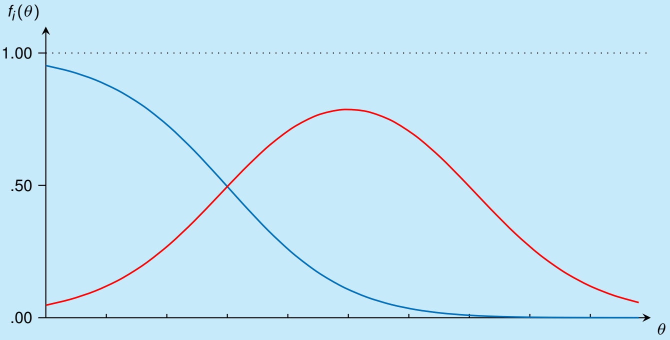
$$f_{i1}(\theta) = \frac{\exp(\theta - \beta_{i1})}{1 + \exp[\theta - \beta_{i1}] + \exp[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

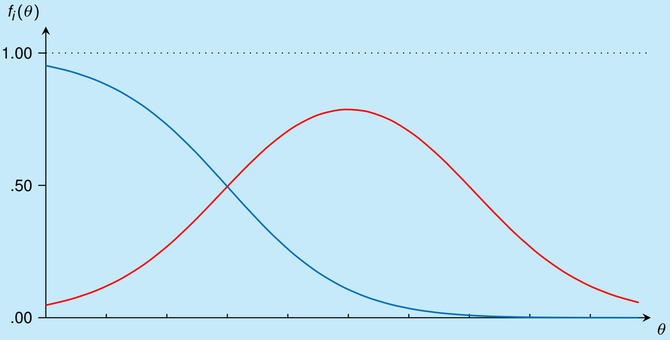
$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - \sum_{h=1}^{2} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

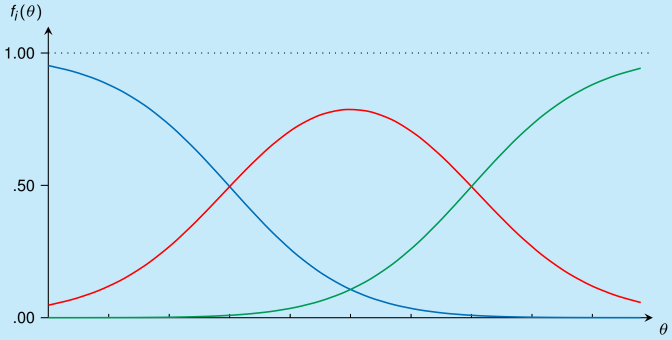
$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría *j* del ítem *i* en el PCM se da por:

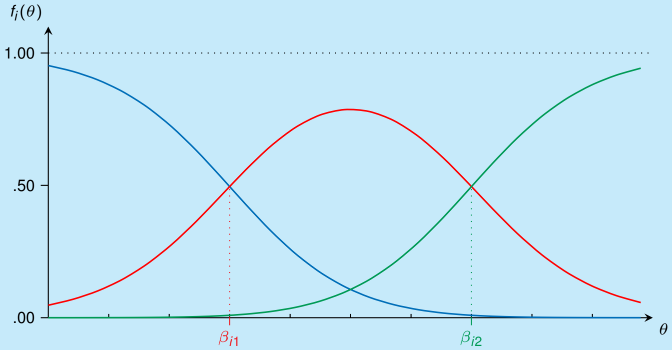
$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

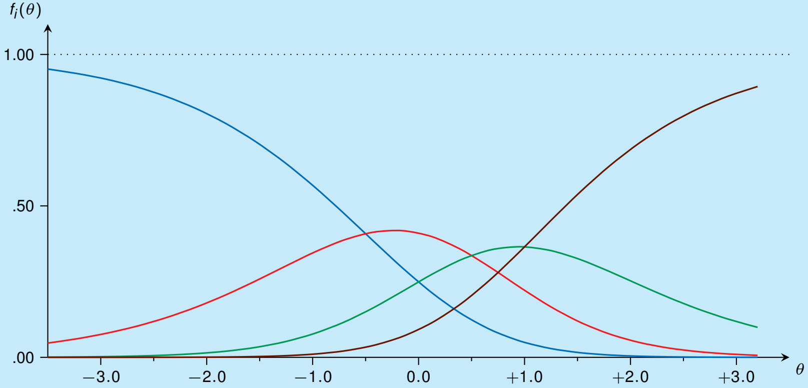
Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



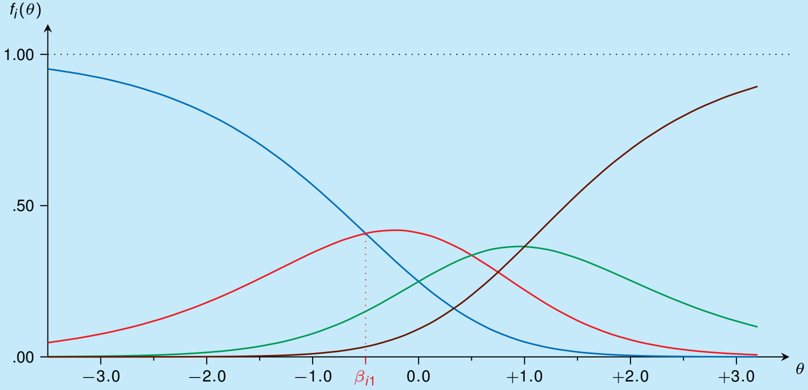
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 2: La siguiente gráfica muestra las curvas características de un ítem con cuatro categorías de respuesta:



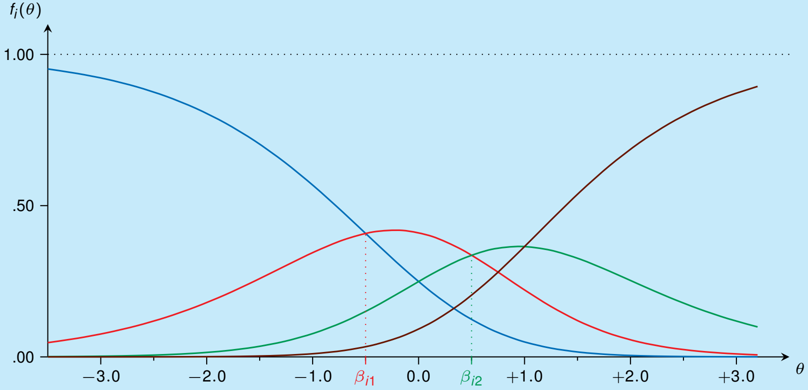
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 2: La siguiente gráfica muestra las curvas características de un ítem con cuatro categorías de respuesta:



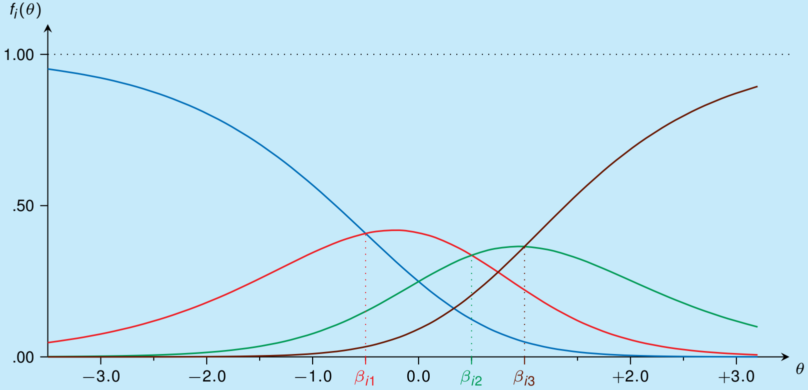
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 2: La siguiente gráfica muestra las curvas características de un ítem con cuatro categorías de respuesta:



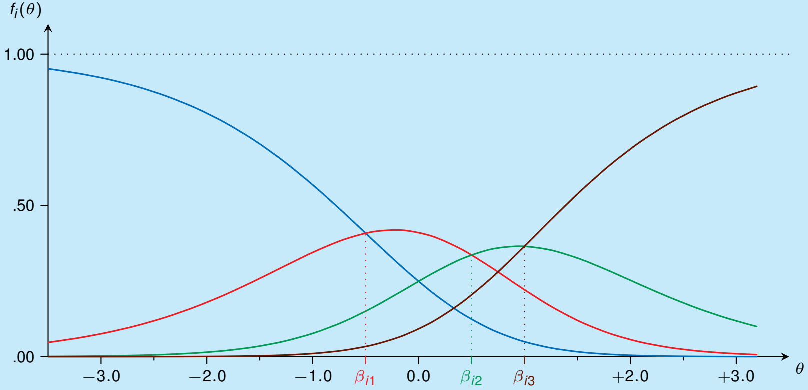
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 2: La siguiente gráfica muestra las curvas características de un ítem con cuatro categorías de respuesta:



Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

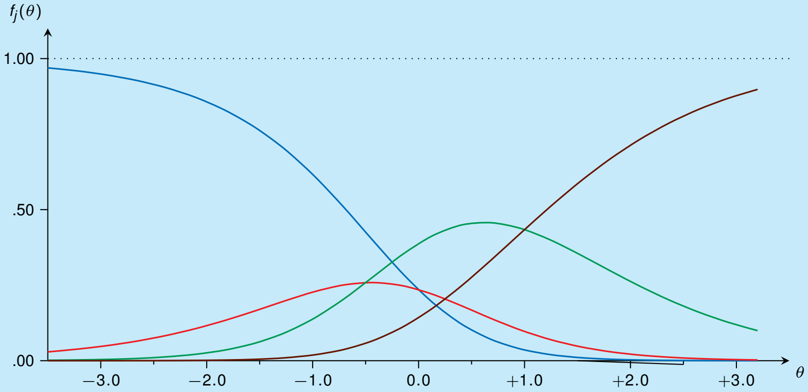
Ejemplo 2: La siguiente gráfica muestra las curvas características de un ítem con cuatro categorías de respuesta:



$$\beta_{i1} < \beta_{i2} < \beta_{i3}$$

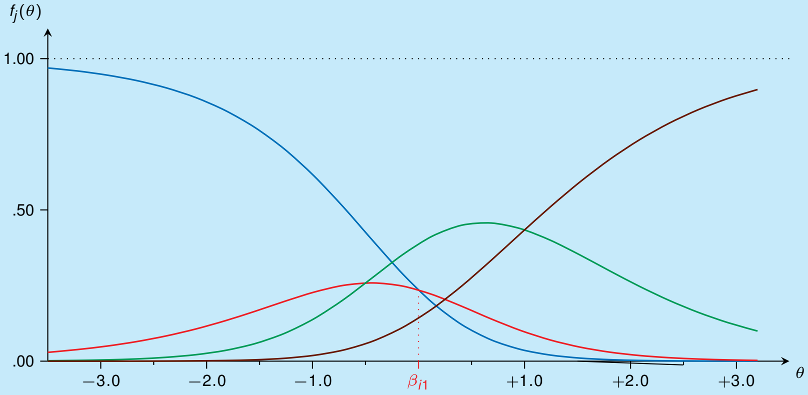
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 3: La siguiente gráfica muestra las curvas características de otro ítem con cuatro categorías de respuesta:



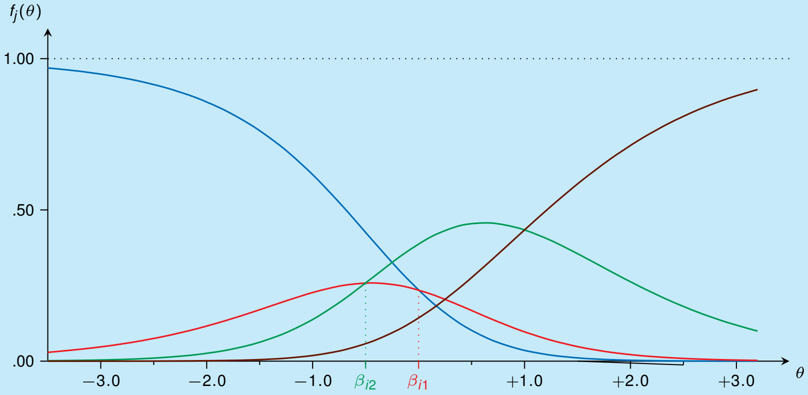
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 3: La siguiente gráfica muestra las curvas características de otro ítem con cuatro categorías de respuesta:



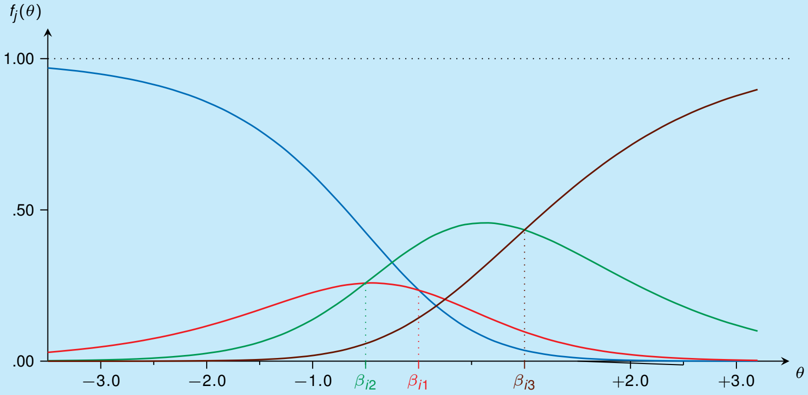
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 3: La siguiente gráfica muestra las curvas características de otro ítem con cuatro categorías de respuesta:



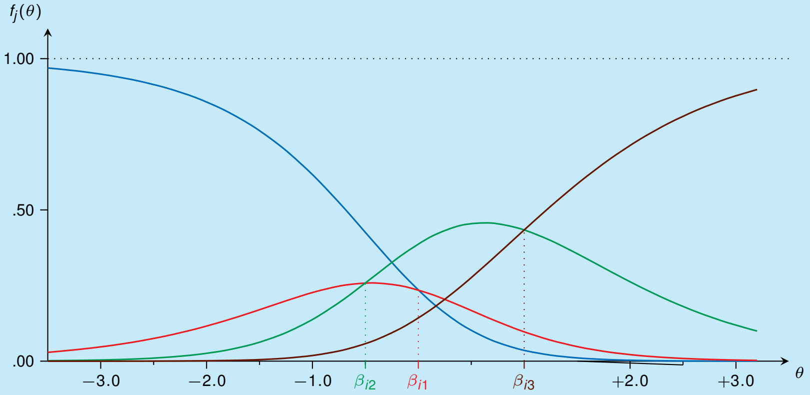
Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 3: La siguiente gráfica muestra las curvas características de otro ítem con cuatro categorías de respuesta:



Los parámetros de dificultad en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo 3: La siguiente gráfica muestra las curvas características de otro ítem con cuatro categorías de respuesta:



$$\beta_{i1} > \beta_{i2} \quad \text{y} \quad \beta_{i2} < \beta_{i3}$$

Interpretación del Modelo de Crédito Parcial (PCM)

- Para entender la psicología que subyace al Modelo de Crédito Parcial, considérese el siguiente ítem de cálculo:

$$\text{Halla:} \quad \sqrt{7.5/0.3 - 16}$$

Resolver este ítem requiere ejecutar correctamente tres pasos en orden (dividir, restar, sacar la raiz cuadrada).

Y se pueden otorgan 0, 1, 2 y 3 puntos para este ítem.

- La idea de Masters fue utilizar para cada paso j ($j = 1, \ldots, m-1$) el modelo de Rasch:

$$\Pr\left(Y_{pi} = j \mid Y_{pi} \in \{j, j-1\}\right) = \frac{\exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}{1 + \exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}$$

- Masters derivó matemáticamente que si el modelo anterior efectivamente se cumple para cada paso, entonces obtenemos el Modelo de Crédito Parcial.

Interpretación del Modelo de Crédito Parcial (PCM)

- Para entender la psicología que subyace al Modelo de Crédito Parcial, considérese el siguiente ítem de cálculo:

  $$\text{Halla:} \quad \sqrt{7.5/0.3 - 16}$$

  Resolver este ítem requiere ejecutar correctamente tres pasos en orden (dividir, restar, sacar la raiz cuadrada).

  Y se pueden otorgan 0, 1, 2 y 3 puntos para este ítem.

- La idea de Masters fue utilizar para cada paso j ($j = 1, \ldots, m-1$) el modelo de Rasch:

  $$\Pr\left(Y_{pi} = j \,|\, Y_{pi} \in \{j, j-1\}\right) = \frac{\exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}{1 + \exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}$$

- Masters derivó matemáticamente que si el modelo anterior efectivamente se cumple para cada paso, entonces obtenemos el Modelo de Crédito Parcial.

Interpretación del Modelo de Crédito Parcial (PCM)

- Para entender la psicología que subyace al Modelo de Crédito Parcial, considérese el siguiente ítem de cálculo:

  $$\text{Halla:} \quad \sqrt{7.5/0.3 - 16}$$

  Resolver este ítem requiere ejecutar correctamente tres pasos en orden (dividir, restar, sacar la raiz cuadrada).

  Y se pueden otorgan 0, 1, 2 y 3 puntos para este ítem.

- La idea de Masters fue utilizar para cada paso j ($j = 1, \ldots, m-1$) el modelo de Rasch:

  $$\Pr\left(Y_{pi} = j \,|\, Y_{pi} \in \{j, j-1\}\right) = \frac{\exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}{1 + \exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}$$

- Masters derivó matemáticamente que si el modelo anterior efectivamente se cumple para cada paso, entonces obtenemos el Modelo de Crédito Parcial.

Interpretación del Modelo de Crédito Parcial (PCM)

- Para entender la psicología que subyace al Modelo de Crédito Parcial, considérese el siguiente ítem de cálculo:

$$\text{Halla:} \quad \sqrt{7.5/0.3 - 16}$$

  Resolver este ítem requiere ejecutar correctamente tres pasos en orden (dividir, restar, sacar la raiz cuadrada).

  Y se pueden otorgan 0, 1, 2 y 3 puntos para este ítem.

- La idea de Masters fue utilizar para cada paso j ($j = 1, \ldots, m - 1$) el modelo de Rasch:

$$\Pr\left(Y_{pi} = j \mid Y_{pi} \in \{j, j-1\}\right) = \frac{\exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}{1 + \exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}$$

- Masters derivó matemáticamente que si el modelo anterior efectivamente se cumple para cada paso, entonces obtenemos el Modelo de Crédito Parcial.

Interpretación del Modelo de Crédito Parcial (PCM)

- Para entender la psicología que subyace al Modelo de Crédito Parcial, considérese el siguiente ítem de cálculo:

  $$\text{Halla:} \quad \sqrt{7.5/0.3 - 16}$$

  Resolver este ítem requiere ejecutar correctamente tres pasos en orden (dividir, restar, sacar la raiz cuadrada).

  Y se pueden otorgan 0, 1, 2 y 3 puntos para este ítem.

- La idea de Masters fue utilizar para cada paso j ($j = 1, \ldots, m - 1$) el modelo de Rasch:

  $$\Pr\left(Y_{pi} = j \mid Y_{pi} \in \{j, j-1\}\right) = \frac{\exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}{1 + \exp\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)}$$

- Masters derivó matemáticamente que si el modelo anterior efectivamente se cumple para cada paso, entonces obtenemos el Modelo de Crédito Parcial.

Interpretación del Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Dos advertencias con la aproximación e interpretación del PCM de Masters:

- Los parámetros β_{ij} no se deben interpretar como la dificultad del paso j.

  Desafortunadamente, la interpretación de los parámetros β_{ij} no es fácil; suele ser ambigua.

- La derivación de Masters no implica que el modelo no se puede utilizar con otro tipo de ítems.

  La derivación de Masters muestra que:
  Si el modelo cognitivo formulado en términos de diferentes pasos se cumple, entonces se obtiene el PCM.

  Logícamente, de este ejercicio no sigue que:
  Si el modelo cognitivo formulado en términos de diferentes pasos no se cumple, entonces no se obtiene el PCM.

Interpretación del Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Dos advertencias con la aproximación e interpretación del PCM de Masters:

- Los parámetros β_{ij} no se deben interpretar como la dificultad del paso j.

  Desafortunadamente, la interpretación de los parámetros β_{ij} no es fácil; suele ser ambigua.

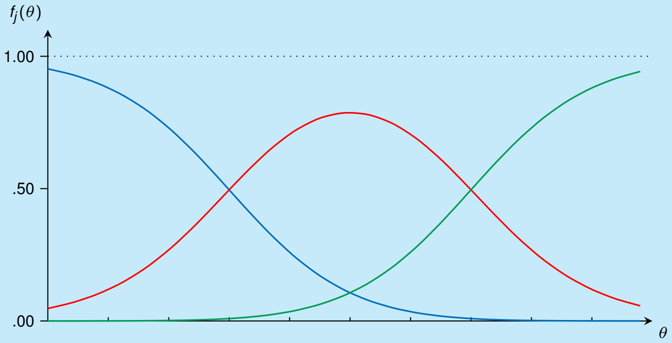
- La derivación de Masters no implica que el modelo no se puede utilizar con otro tipo de ítems.

  La derivación de Masters muestra que:
  Si el modelo cognitivo formulado en términos de diferentes pasos se cumple, entonces se obtiene el PCM.

  Logícamente, de este ejercicio no sigue que:
  Si el modelo cognitivo formulado en términos de diferentes pasos no se cumple, entonces no se obtiene el PCM.

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Volvemos a considerar un ítem polítomico con tres categorías en el PCM:

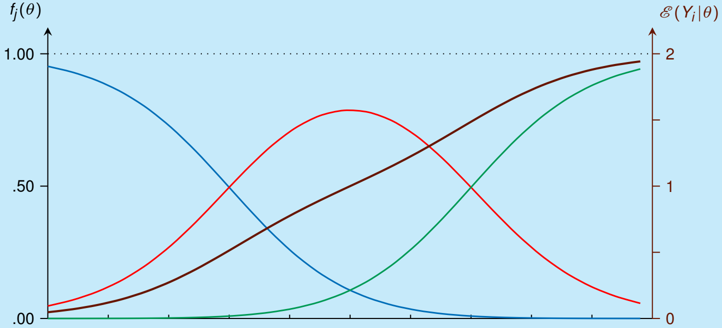


Recuérdese:

$$\mathscr{E}(Y_i|\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} j \cdot f_{ij}(\theta)$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Volvemos a considerar un ítem polítomico con tres categorías en el PCM:

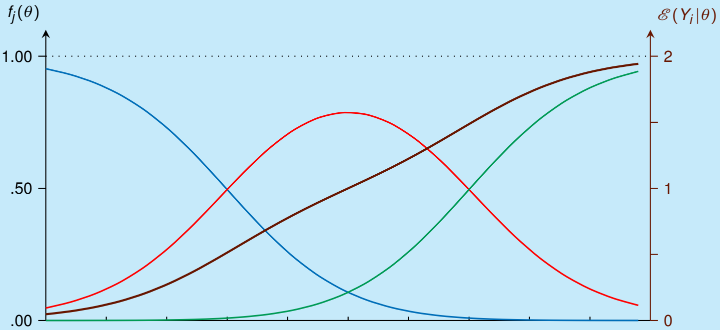


Recuérdese:

$$\mathscr{E}(Y_i|\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} j \cdot f_{ij}(\theta)$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Volvemos a considerar un ítem polítomico con tres categorías en el PCM:



Recuérdese:

$$\mathscr{E}(Y_i|\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} j \cdot f_{ij}(\theta)$$

Estimación de parámetros en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

El PCM pertenece a la familia de modelos “tipo Rasch”.
Por lo tanto, la estimación de parámetros sigue la misma lógica que el modelo de Rasch.
Esto significa:

- Se pueden estimar los parámetros de los ítems con el método de Máxima Verosimilitud Condicional.
  Se debe a que la puntuación obsevada:
  $$Y = \sum_i Y_i$$
  es un estadístico suficiente para estimar las θs.
- También se pueden utilizar:
  - Maxima Verosimilitud Marginal, pero esto requiere el supuesto adicional sobre la distribución de θ.
  - Maxima Verosimilitud Conjunta, pero las estimaciones que se obtienen no son consistentes.
- En un segundo paso, se estiman los parámetros de las personas (utilizando las estimaciones de los parámetros de los ítems obtenidas en el paso previo).

Estimación de parámetros en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

El PCM pertenece a la familia de modelos “tipo Rasch”.
Por lo tanto, la estimación de parámetros sigue la misma lógica que el modelo de Rasch.
Esto significa:

- Se pueden estimar los parámetros de los ítems con el método de Máxima Verosimilitud Condicional.
  Se debe a que la puntuación obsevada:
  $$Y = \sum_i Y_i$$
  es un estadístico suficiente para estimar las θs.
- También se pueden utilizar:
  - Maxima Verosimilitud Marginal, pero esto requiere el supuesto adicional sobre la distribución de θ.
  - Maxima Verosimilitud Conjunta, pero las estimaciones que se obtienen no son consistentes.
- En un segundo paso, se estiman los parámetros de las personas (utilizando las estimaciones de los parámetros de los ítems obtenidas en el paso previo).

Estimación de parámetros en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

El PCM pertenece a la familia de modelos “tipo Rasch”.
Por lo tanto, la estimación de parámetros sigue la misma lógica que el modelo de Rasch.
Esto significa:

- Se pueden estimar los parámetros de los ítems con el método de Máxima Verosimilitud Condicional.
  Se debe a que la puntuación obsevada:
  $$Y = \sum_i Y_i$$
  es un estadístico suficiente para estimar las θs.
- También se pueden utilizar:
  - Maxima Verosimilitud Marginal, pero esto requiere el supuesto adicional sobre la distribución de θ.
  - Maxima Verosimilitud Conjunta, pero las estimaciones que se obtienen no son consistentes.
- En un segundo paso, se estiman los parámetros de las personas (utilizando las estimaciones de los parámetros de los ítems obtenidas en el paso previo).

Estimación de parámetros en el Modelo de Crédito Parcial (PCM)

El PCM pertenece a la familia de modelos “tipo Rasch”.
Por lo tanto, la estimación de parámetros sigue la misma lógica que el modelo de Rasch.
Esto significa:

- Se pueden estimar los parámetros de los ítems con el método de Máxima Verosimilitud Condicional.
  Se debe a que la puntuación obsevada:

  $$Y = \sum_i Y_i$$

  es un estadístico suficiente para estimar las θs.

- También se pueden utilizar:
  - Maxima Verosimilitud Marginal, pero esto requiere el supuesto adicional sobre la distribución de θ.
  - Maxima Verosimilitud Conjunta, pero las estimaciones que se obtienen no son consistentes.

- En un segundo paso, se estiman los parámetros de las personas (utilizando las estimaciones de los parámetros de los ítems obtenidas en el paso previo).

Función de información en el PCM

- La función de información del test es la suma de la función de información de los ítems en el test:

$$\mathcal{I}_{\text{test}}(\theta) = \sum_i \mathcal{I}_i(\theta)$$

- La función de información del ítem i es la suma de la función de información de las categorías del ítem:

$$\mathcal{I}_i(\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{I}_{ij}(\theta)$$

- La función de información de la categoría j del ítem i se da por:

$$\mathcal{I}_{ij}(\theta) = [j - \mathscr{E}(Y_i|\theta)]^2 f_{ij}(\theta).$$

para $j = 0, \ldots, m-1$.

Función de información en el PCM

- La función de información del test es la suma de la función de información de los ítems en el test:

$$\mathcal{I}_{\text{test}}(\theta) = \sum_i \mathcal{I}_i(\theta)$$

- La función de información del ítem i es la suma de la función de información de las categorías del ítem:

$$\mathcal{I}_i(\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{I}_{ij}(\theta)$$

- La función de información de la categoría j del ítem i se da por:

$$\mathcal{I}_{ij}(\theta) = [j - \mathscr{E}(Y_i|\theta)]^2 f_{ij}(\theta).$$

para $j = 0, \ldots, m-1$.

Función de información en el PCM

- La función de información del test es la suma de la función de información de los ítems en el test:

$$\mathcal{I}_{\text{test}}(\theta) = \sum_{i} \mathcal{I}_i(\theta)$$

- La función de información del ítem i es la suma de la función de información de las categorías del ítem:

$$\mathcal{I}_i(\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{I}_{ij}(\theta)$$

- La función de información de la categoría j del ítem i se da por:

$$\mathcal{I}_{ij}(\theta) = [j - \mathscr{E}(Y_i|\theta)]^2 \, f_{ij}(\theta).$$

para $j = 0, \ldots, m-1$.

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

  El modelo de Rasch $\xrightarrow{\text{añadir parámetro de discriminación}}$ El modelo 2PL

  Similarmente:

  El PCM $\xrightarrow{\text{añadir parámetro de discriminación}}$ El PCM generalizado

- La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

  donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

$$\text{El modelo de Rasch} \xrightarrow{\text{añadir parámetro de discriminación}} \text{El modelo 2PL}$$

Similarmente:

$$\text{El PCM} \xrightarrow{\text{añadir parámetro de discriminación}} \text{El PCM generalizado}$$

- La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

$$\text{El modelo de Rasch} \xrightarrow{\text{añadir parámetro de discriminación}} \text{El modelo 2PL}$$

Similarmente:

$$\text{El PCM} \xrightarrow{\text{añadir parámetro de discriminación}} \text{El PCM generalizado}$$

- La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

El Modelo *Rating Scale* (Andrich, 1978)

- Para un conjunto de ítems que utilizan el mismo formato de respuesta (p.ej. tipo Likert), el modelo *Rating Scale* de Andrich separa la dificultad del ítem de la dificultad de la opción de respuesta:

$$\beta_{ij} = \delta_i + \tau_j$$

  Es decir, se supone que:
  - la "dificultad" de la categoría/opción de respuesta es la misma para todos los ítems;
  - estas dificultades de categoría son aditivas con la dificultad de cada ítem;

  de tal forma que:
  - las distancias psicológicas entre las categorías son las mismas.

- Resulta que la ecuación del modelo *Rating Scale* de Andrich es la siguiente:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[j\theta - \sum_{h=1}^{j}(\delta_i + \tau_h)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k}(\delta_i + \tau_h)\right]}.$$

El Modelo *Rating Scale* (Andrich, 1978)

- Para un conjunto de ítems que utilizan el mismo formato de respuesta (p.ej. tipo Likert), el modelo *Rating Scale* de Andrich separa la dificultad del ítem de la dificultad de la opción de respuesta:

$$\beta_{ij} = \delta_i + \tau_j$$

Es decir, se supone que:
  - la "dificultad" de la categoría/opción de respuesta es la misma para todos los ítems;
  - estas dificultades de categoría son aditivas con la dificultad de cada ítem;

de tal forma que:
  - las distancias psicológicas entre las categorías son las mismas.

- Resulta que la ecuación del modelo *Rating Scale* de Andrich es la siguiente:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[j\theta - \sum_{h=1}^{j}(\delta_i + \tau_h)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k}(\delta_i + \tau_h)\right]}.$$

El Modelo *Rating Scale* (Andrich, 1978)

- Para un conjunto de ítems que utilizan el mismo formato de respuesta (p.ej. tipo Likert), el modelo *Rating Scale* de Andrich separa la dificultad del ítem de la dificultad de la opción de respuesta:

$$\beta_{ij} = \delta_i + \tau_j$$

  Es decir, se supone que:
  - la "dificultad" de la categoría/opción de respuesta es la misma para todos los ítems;
  - estas dificultades de categoría son aditivas con la dificultad de cada ítem;

  de tal forma que:
  - las distancias psicológicas entre las categorías son las mismas.

- Resulta que la ecuación del modelo *Rating Scale* de Andrich es la siguiente:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[j\theta - \sum_{h=1}^{j}(\delta_i + \tau_h)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k}(\delta_i + \tau_h)\right]}.$$

El Modelo *Rating Scale* (Andrich, 1978)

- Para un conjunto de ítems que utilizan el mismo formato de respuesta (p.ej. tipo Likert), el modelo *Rating Scale* de Andrich separa la dificultad del ítem de la dificultad de la opción de respuesta:

  $$\beta_{ij} = \delta_i + \tau_j$$

  Es decir, se supone que:
  - la "dificultad" de la categoría/opción de respuesta es la misma para todos los ítems;
  - estas dificultades de categoría son aditivas con la dificultad de cada ítem;

  de tal forma que:
  - las distancias psicológicas entre las categorías son las mismas.

- Resulta que la ecuación del modelo *Rating Scale* de Andrich es la siguiente:

  $$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[j\theta - \sum_{h=1}^{j}(\delta_i + \tau_h)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k}(\delta_i + \tau_h)\right]}.$$

El Modelo *Rating Scale* (Andrich, 1978)

- Para un conjunto de ítems que utilizan el mismo formato de respuesta (p.ej. tipo Likert), el modelo *Rating Scale* de Andrich separa la dificultad del ítem de la dificultad de la opción de respuesta:

$$\beta_{ij} = \delta_i + \tau_j$$

  Es decir, se supone que:
  - la "dificultad" de la categoría/opción de respuesta es la misma para todos los ítems;
  - estas dificultades de categoría son aditivas con la dificultad de cada ítem;

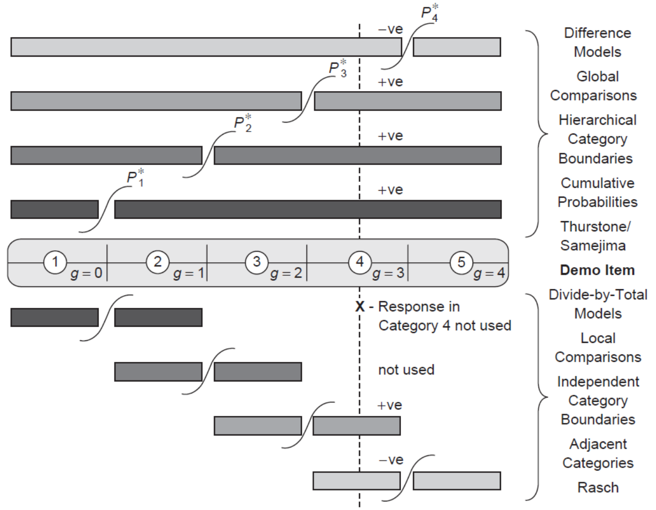
  de tal forma que:
  - las distancias psicológicas entre las categorías son las mismas.

- Resulta que la ecuación del modelo *Rating Scale* de Andrich es la siguiente:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[j\theta - \sum_{h=1}^{j}(\delta_i + \tau_h)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k}(\delta_i + \tau_h)\right]}.$$

Índice:

Dos familias de modelos para ítems politómicos



(Ostini y Nering, 2006, p. 12)

Modelar la probabilidad de responder en cierta categoría...

Considerando un ítem politómico de m categorías de respuesta ordenadas $(0, 1, \ldots, m-1)$, en la familia de modelos de «diferencia» se modela:

- Como punto de partida:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j)$$

es decir, la probabilidad de que la persona responda en la categoría j o mayor.

- Como segundo paso, la probabilidad de responder en la categoría j, considerando que:

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_{pi} = 0) &= 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1) \\
\Pr(Y_{pi} = j) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant j) - \Pr(Y_{pi} \geqslant j+1) \qquad (j = 1, \ldots, m-2) \\
\Pr(Y_{pi} = m-1) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant m-1).
\end{aligned}$$

Modelar la probabilidad de responder en cierta categoría...

Considerando un ítem politómico de m categorías de respuesta ordenadas $(0, 1, \ldots, m-1)$, en la familia de modelos de «diferencia» se modela:

- Como punto de partida:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j)$$

  es decir, la probabilidad de que la persona responda en la categoría j o mayor.

- Como segundo paso, la probabilidad de responder en la categoría j, considerando que:

$$\begin{aligned} \Pr(Y_{pi} = 0) &= 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1) \\ \Pr(Y_{pi} = j) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant j) - \Pr(Y_{pi} \geqslant j+1) \qquad (j = 1, \ldots, m-2) \\ \Pr(Y_{pi} = m-1) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant m-1). \end{aligned}$$

Modelar la probabilidad de responder en cierta categoría...

Considerando un ítem politómico de m categorías de respuesta ordenadas $(0, 1, \ldots, m-1)$, en la familia de modelos de «diferencia» se modela:

- Como punto de partida:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

es decir, la probabilidad de que la persona responda en la categoría j o mayor.

- Como segundo paso, la probabilidad de responder en la categoría j, considerando que:

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_{pi} = 0) &= 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1) \\
\Pr(Y_{pi} = j) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant j) - \Pr(Y_{pi} \geqslant j+1) \qquad (j = 1, \ldots, m-2) \\
\Pr(Y_{pi} = m-1) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant m-1).
\end{aligned}$$

Modelar la probabilidad de responder en cierta categoría...

Considerando un ítem politómico de m categorías de respuesta ordenadas $(0, 1, \ldots, m-1)$, en la familia de modelos de «diferencia» se modela:

- Como punto de partida:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

  es decir, la probabilidad de que la persona responda en la categoría j o mayor.

- Como segundo paso, la probabilidad de responder en la categoría j, considerando que:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1)$$
$$\Pr(Y_{pi} = j) = \Pr(Y_{pi} \geqslant j) - \Pr(Y_{pi} \geqslant j+1) \qquad (j = 1, \ldots, m-2)$$
$$\Pr(Y_{pi} = m-1) = \Pr(Y_{pi} \geqslant m-1).$$

Modelar la probabilidad de responder en cierta categoría...

Considerando un ítem politómico de m categorías de respuesta ordenadas $(0, 1, \ldots, m-1)$, en la familia de modelos de «diferencia» se modela:

- Como punto de partida:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

  es decir, la probabilidad de que la persona responda en la categoría j o mayor.

- Como segundo paso, la probabilidad de responder en la categoría j, considerando que:

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_{pi} = 0) &= 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1) \\
\Pr(Y_{pi} = j) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant j) - \Pr(Y_{pi} \geqslant j+1) \qquad (j = 1, \ldots, m-2) \\
\Pr(Y_{pi} = m-1) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant m-1).
\end{aligned}$$

Modelar la probabilidad de responder en cierta categoría...

Considerando un ítem politómico de m categorías de respuesta ordenadas $(0, 1, \ldots, m-1)$, en la familia de modelos de «diferencia» se modela:

- Como punto de partida:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

  es decir, la probabilidad de que la persona responda en la categoría j o mayor.

- Como segundo paso, la probabilidad de responder en la categoría j, considerando que:

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_{pi} = 0) &= 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1) \\
\Pr(Y_{pi} = j) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant j) - \Pr(Y_{pi} \geqslant j+1) \qquad (j = 1, \ldots, m-2) \\
\Pr(Y_{pi} = m-1) &= \Pr(Y_{pi} \geqslant m-1).
\end{aligned}$$

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

- El modelo de respuesta graduada de Samejima (1969) supone que:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]} \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

donde α_i es el grado de discriminación para el ítem i y β_{ij} la dificultad de la categoría j del ítem i.

Es decir, supone un modelo logístico de dos parámetros (el 2PLM) para modelar la probabilidad de que la persona responda o supere la categoría j.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

- El modelo de respuesta graduada de Samejima (1969) supone que:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]} \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

donde α_i es el grado de discriminación para el ítem i y β_{ij} la dificultad de la categoría j del ítem i.

Es decir, supone un modelo logístico de dos parámetros (el 2PLM) para modelar la probabilidad de que la persona responda o supere la categoría j.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

- El modelo de respuesta graduada de Samejima (1969) supone que:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]} \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

donde α_i es el grado de discriminación para el ítem i y β_{ij} la dificultad de la categoría j del ítem i.

Es decir, supone un modelo logístico de dos parámetros (el 2PLM) para modelar la probabilidad de que la persona responda o supere la categoría j.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{ij}\right)\right]} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

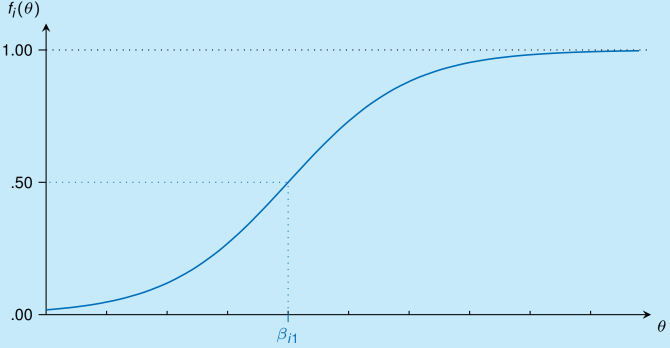
Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant 1) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i1}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i1}\right)\right]}$$

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

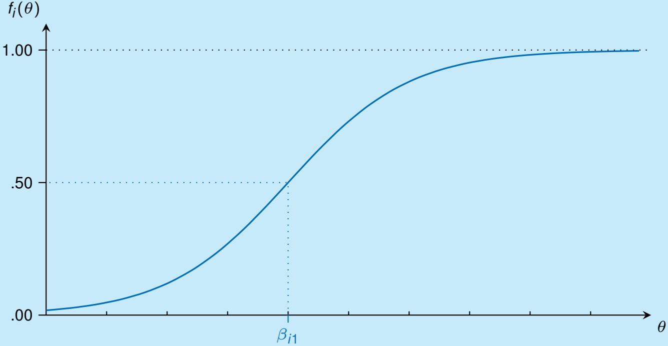
$$\Pr(Y_{pi} \geqslant 1) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i1}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i1}\right)\right]}$$



El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

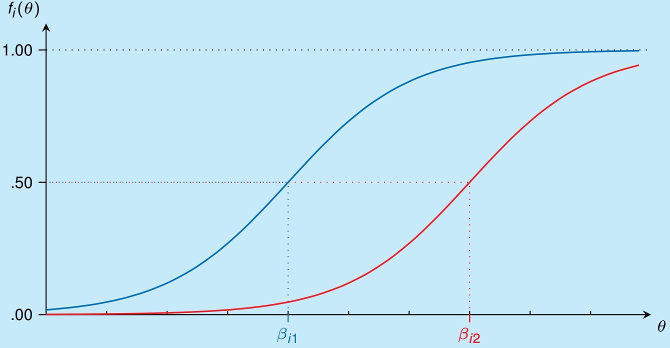
$$\Pr(Y_{pi} \geqslant 2) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i2}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i2}\right)\right]}$$



El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

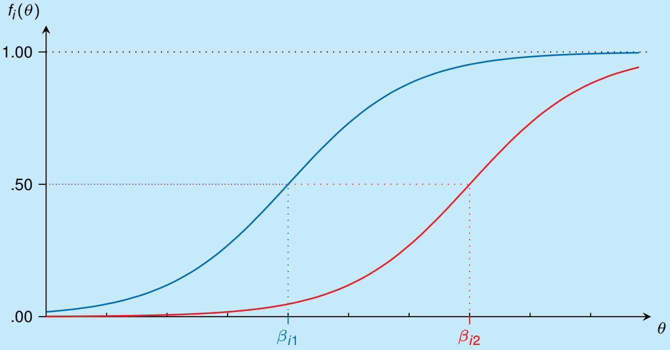
$$\Pr(Y_{pi} \geqslant 2) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i2}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i2}\right)\right]}$$



El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant 2) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i2}\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i\left(\theta_p - \beta_{i2}\right)\right]}$$

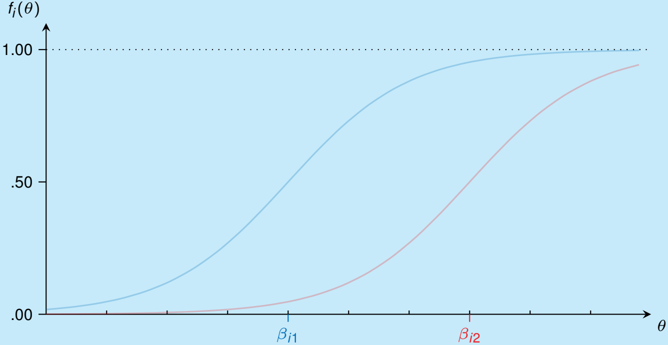


Nota: En el GRM, siempre se cumple: $\beta_{i1} < \beta_{i2} < \ldots < \beta_{i,m-1}$.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1)$$

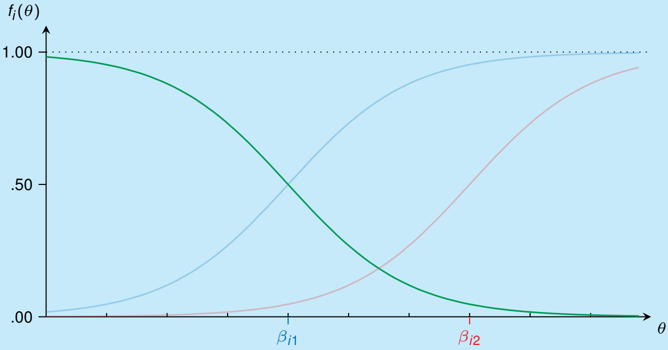


Nota: En el GRM, siempre se cumple: $\beta_{i1} < \beta_{i2} < \ldots < \beta_{i,m-1}$.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = 1 - \Pr(Y_{pi} \geqslant 1)$$

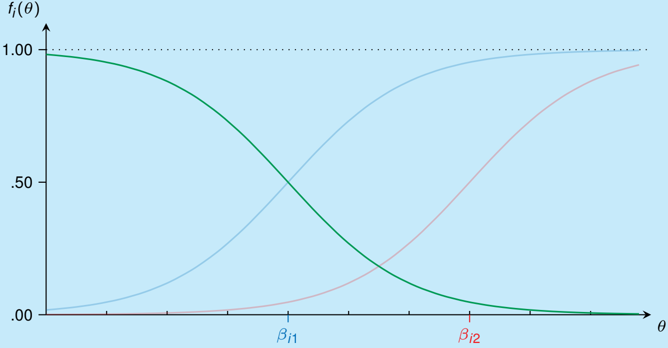


Nota: En el GRM, siempre se cumple: $\beta_{i1} < \beta_{i2} < \ldots < \beta_{i,m-1}$.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \Pr(Y_{pi} \geqslant 1) - \Pr(Y_{pi} \geqslant 2)$$

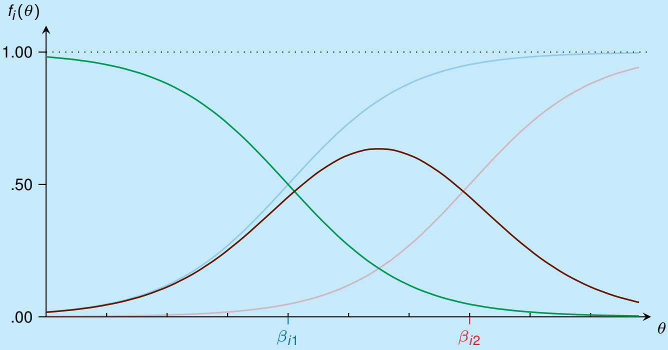


Nota: En el GRM, siempre se cumple: $\beta_{i1} < \beta_{i2} < \ldots < \beta_{i,m-1}$.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \Pr(Y_{pi} \geqslant 1) - \Pr(Y_{pi} \geqslant 2)$$

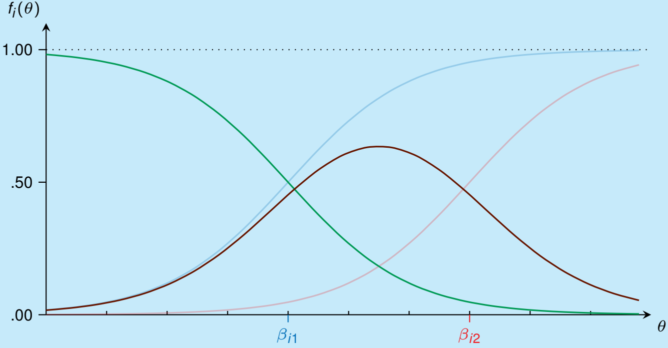


Nota: En el GRM, siempre se cumple: $\beta_{i1} < \beta_{i2} < \ldots < \beta_{i,m-1}$.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} = 2) = \Pr(Y_{pi} \geqslant 2)$$

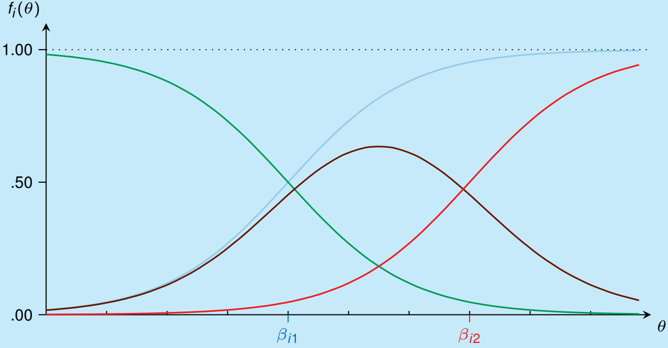


Nota: En el GRM, siempre se cumple: $\beta_{i1} < \beta_{i2} < \ldots < \beta_{i,m-1}$.

El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, el Modelo de Respuesta Graduada (GRM) especifica que:

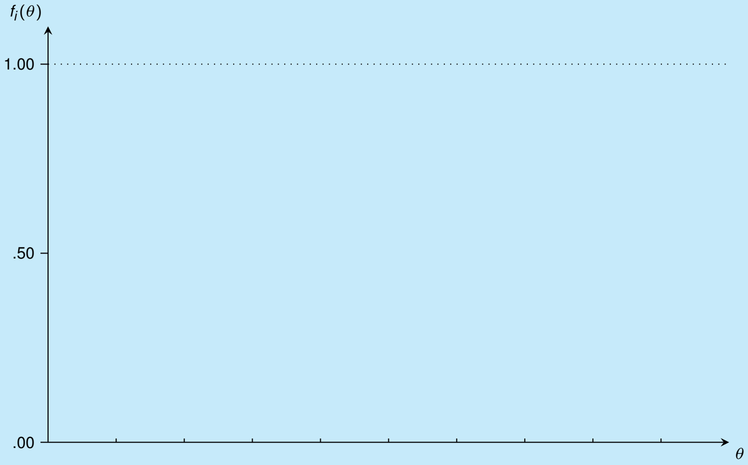
$$\Pr(Y_{pi} = 2) = \Pr(Y_{pi} \geqslant 2)$$



Nota: En el GRM, siempre se cumple: $\beta_{i1} < \beta_{i2} < \ldots < \beta_{i,m-1}$.

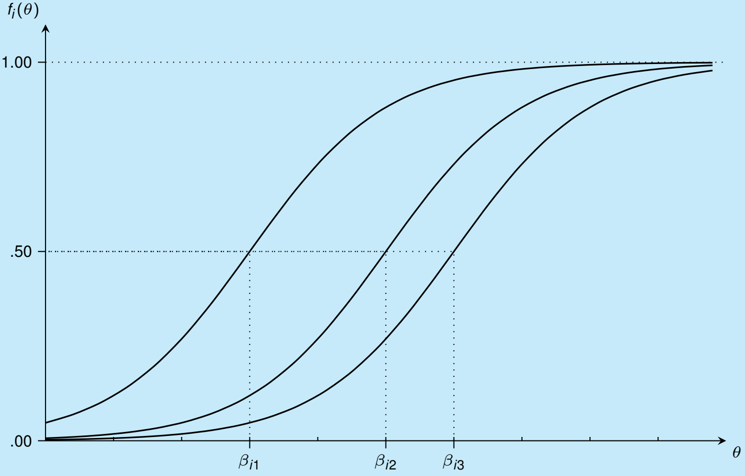
El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



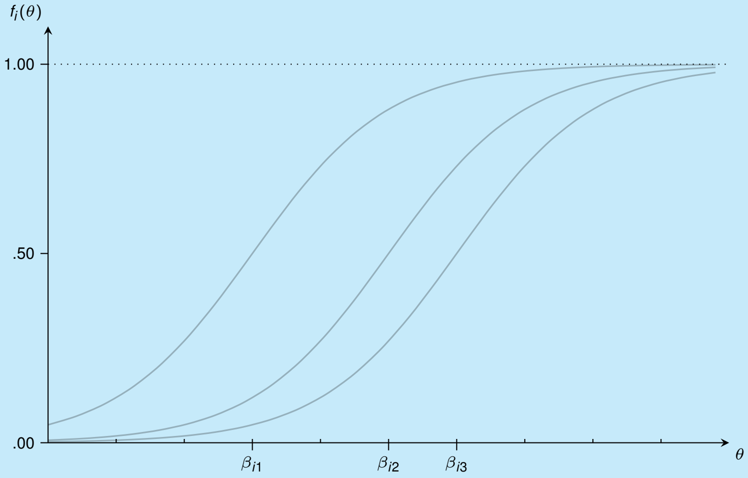
El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



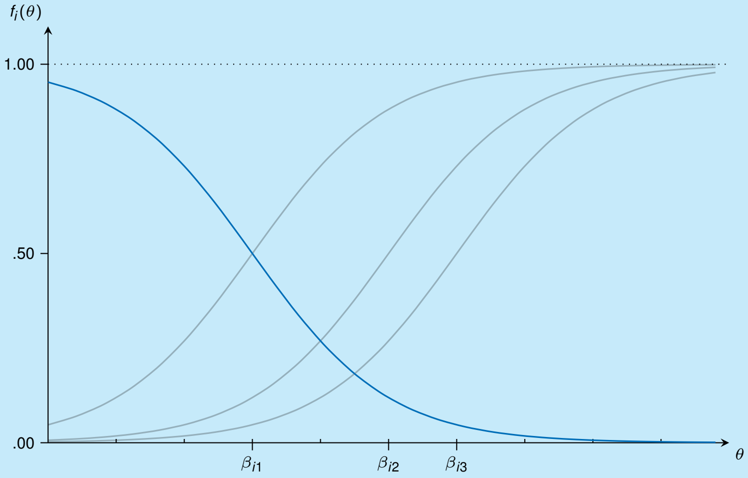
El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



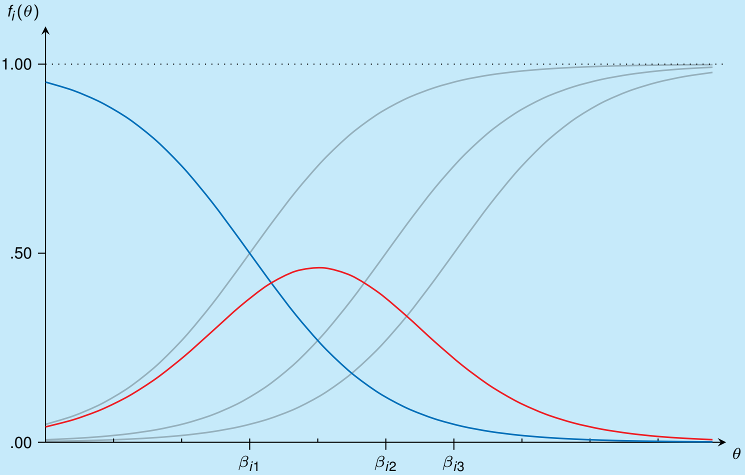
El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



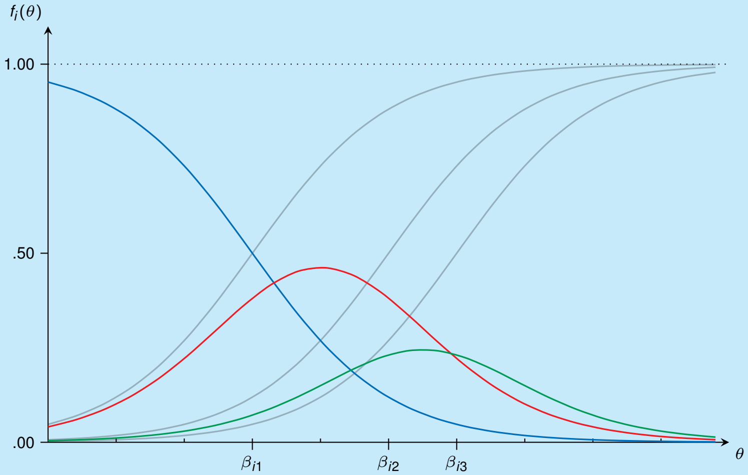
El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



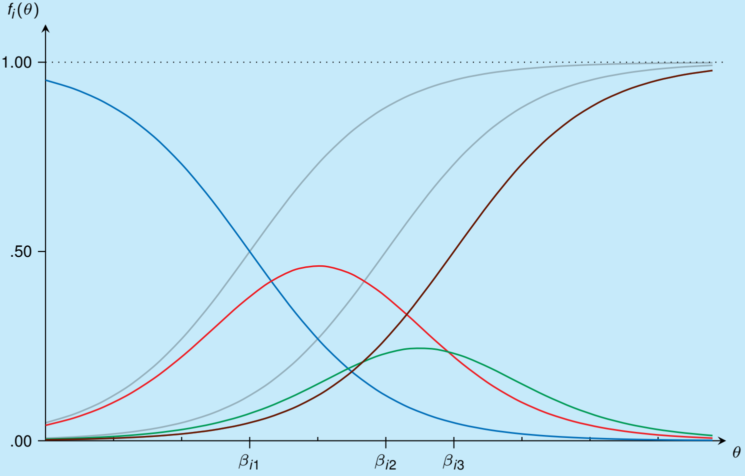
El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



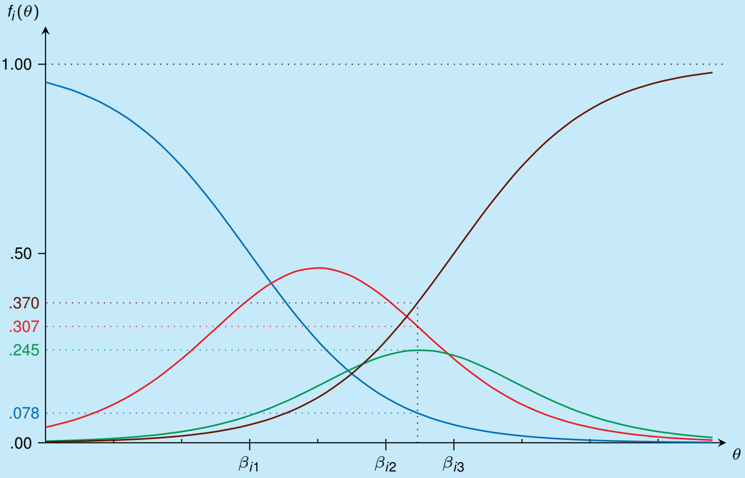
El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



El Modelo de Respuesta Graduada (GRM)

Otro ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta...



Función de información en el GRM

- La función de información del test es la suma de la función de información de los ítems en el test:

$$\mathcal{I}_{\text{test}}(\theta) = \sum_i \mathcal{I}_i(\theta)$$

- La función de información del ítem i es la suma de la función de información de las categorías del ítem:

$$\mathcal{I}_i(\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{I}_{ij}(\theta)$$

- La función de información de la categoría j del ítem i se da por:

$$\mathcal{I}_{ij}(\theta) = \alpha_i^2 \left(f_{ij}^*(\theta)[1 - f_{ij}^*(\theta)] - f_{i,j+1}^*(\theta)[1 - f_{i,j+1}^*(\theta)] \right).$$

para $j = 0, \ldots, m-1$ y donde

$$f_{ij}^*(\theta) = \Pr(Y_i \geqslant j|\theta).$$

Función de información en el GRM

- La función de información del test es la suma de la función de información de los ítems en el test:

$$\mathcal{I}_{\text{test}}(\theta) \;=\; \sum_i \mathcal{I}_i(\theta)$$

- La función de información del ítem i es la suma de la función de información de las categorías del ítem:

$$\mathcal{I}_i(\theta) \;=\; \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{I}_{ij}(\theta)$$

- La función de información de la categoría j del ítem i se da por:

$$\mathcal{I}_{ij}(\theta) \;=\; \alpha_i^2 \left(f_{ij}^*(\theta)[1 - f_{ij}^*(\theta)] \;-\; f_{i,j+1}^*(\theta)[1 - f_{i,j+1}^*(\theta)] \right).$$

para $j = 0, \ldots, m-1$ y donde

$$f_{ij}^*(\theta) \;=\; \Pr(Y_i \geqslant j|\theta).$$

Función de información en el GRM

- La función de información del test es la suma de la función de información de los ítems en el test:

$$\mathcal{I}_{\text{test}}(\theta) = \sum_i \mathcal{I}_i(\theta)$$

- La función de información del ítem i es la suma de la función de información de las categorías del ítem:

$$\mathcal{I}_i(\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{I}_{ij}(\theta)$$

- La función de información de la categoría j del ítem i se da por:

$$\mathcal{I}_{ij}(\theta) = \alpha_i^2 \left(f_{ij}^*(\theta)[1 - f_{ij}^*(\theta)] - f_{i,j+1}^*(\theta)[1 - f_{i,j+1}^*(\theta)] \right).$$

para $j = 0, \ldots, m-1$ y donde

$$f_{ij}^*(\theta) = \Pr(Y_i \geqslant j|\theta).$$

El Modelo *Rating Scale* (Muraki, 1990)

- Similar a la restricción que puso Andrich (1978) al modelo de crédito parcial, Muraki (1990) propuso restringir los parámetros de dificultad de las categorías en el modelo de respuesta graduada:

$$\beta_{ij} = \delta_i + \tau_j$$

- De esta forma, el modelo *Rating Scale* de Muraki especifica que:

$$\Pr(Y_{pi} \geqslant j) = \frac{\exp\left[\alpha_i \left(\theta_p - (\delta_i + \tau_j)\right)\right]}{1 + \exp\left[\alpha_i \left(\theta_p - (\delta_i + \tau_j)\right)\right]} \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

- La idea es idéntica que en el modelo *Rating Scale* de Andrich:
  La dificultad de las categorías y las distancias psicológicas entre ellas son las mismas para todos los ítems.

Índice:

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

  La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

  La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

  donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

- Algebráicamente este modelo es equivalente a:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\, j\,\theta - \alpha_i \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\, k\,\theta - \alpha_i \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

  La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

  donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

- Algebráicamente este modelo es equivalente a:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\, j\,\theta - \sum_{h=1}^{j}\alpha_i\beta_{ih}\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\, k\,\theta - \sum_{h=1}^{k}\alpha_i\beta_{ih}\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

  La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

  donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

- Algebráicamente este modelo es equivalente a:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\, j\,\theta - \sum_{h=1}^{j}\alpha_i\beta_{ih}\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\, k\,\theta - \sum_{h=1}^{k}\alpha_i\beta_{ih}\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial Generalizado (GPCM; Muraki, 1992)

- *Recuérdese:*

  La ecuación básica del modelo de crédito parcial generalizado es:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_i\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j}\beta_{ih}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_i\left(k\theta - \sum_{h=1}^{k}\beta_{ih}\right)\right]},$$

  donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

- Algebráicamente este modelo es equivalente a:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[\alpha_{ij}^{*}\,\theta - \eta_{ij}\right]}{\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\alpha_{ik}^{*}\,\theta - \eta_{ik}\right]},$$

  donde, para cualquier categoría k ($k = 0, \ldots, m-1$):

$$\alpha_{ik}^{*} = \alpha_i\, k \qquad \text{y} \qquad \eta_{ik} = \sum_{h=1}^{k}\alpha_i\beta_{ih}.$$

La familia de modelos "divide-por-total"

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:

La familia de modelos "divide-por-total"

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:

La familia de modelos “divide-por-total”

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch

La familia de modelos "divide-por-total"

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) \;=\; \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta \;-\; \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta \;-\; \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch:

$$\begin{cases} \alpha_{i0} = 0 & \text{(para la categoría de respuesta incorrecta)} \\ \alpha_{i1} = 1 & \text{(para la categoría de respuesta correcta)} \end{cases}$$

La familia de modelos "divide-por-total"

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) \;=\; \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta \;-\; \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta \;-\; \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch
  - El modelo logístico de dos parámetros

La familia de modelos “divide-por-total”

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch
  - El modelo logístico de dos parámetros:

$$\begin{cases} \alpha_{i0} = 0 & \text{(para la categoría de respuesta incorrecta)} \\ \alpha_{i1} = \alpha_i & \text{(para la categoría de respuesta correcta)} \end{cases}$$

La familia de modelos "divide-por-total"

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch
  - El modelo logístico de dos parámetros
  - El modelo de crédito parcial

La familia de modelos “divide-por-total”

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch
  - El modelo logístico de dos parámetros
  - El modelo de crédito parcial:

$$\alpha_{ij} = j \qquad \text{(para cualquier categoría:} j = 0, \ldots, m-1)$$

:

La familia de modelos "divide-por-total"

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch
  - El modelo logístico de dos parámetros
  - El modelo de crédito parcial
  - El modelo de crédito parcial generalizado

La familia de modelos "divide-por-total"

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch
  - El modelo logístico de dos parámetros
  - El modelo de crédito parcial
  - El modelo de crédito parcial generalizado

Véase la diapositiva anterior

La familia de modelos “divide-por-total”

- Retomemos la fórmula general:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta - \eta_{ik}\right)}.$$

- Muchos de los modelos que hemos visto hasta ahora son casos especiales de este modelo general:
  - El modelo de Rasch
  - El modelo logístico de dos parámetros
  - El modelo de crédito parcial
  - El modelo de crédito parcial generalizado
  - Y muchos más modelos que no hemos visto en este curso...

El Modelo de Respuesta Nominal (Bock, 1972)

- El modelo de respuesta nominal, propuesto por Bock (1972), especifica que la probabilidad de que la persona p al contestar el ítem i (con m categorías de respuesta, etiquetadas $j = 1, \ldots, m$) dé una respuesta en la categoría j, se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta_p - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=1}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

- En este modelo, se estiman libremente los parámetros α_{ij} y η_{ij}.

  Por ejemplo, no se fija de antemano un orden en las α_{ij} (o de las categorías).

- Únicamente, para resolver las indeterminaciones en el modelo, se restringe que:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{m} \eta_{ik} = 0$$

  Nota: Estas restricciones son adicionales a la restricción que se requiere para fijar el origen y la unidad de la dimensión subyacente, lo cual generalmente se obtiene al especificar (al utilizar el método de máxima verosimilitud marginal) que, para todas las personas:

$$\theta_p \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

El Modelo de Respuesta Nominal (Bock, 1972)

- El modelo de respuesta nominal, propuesto por Bock (1972), especifica que la probabilidad de que la persona p al contestar el ítem i (con m categorías de respuesta, etiquetadas $j = 1, \ldots, m$) dé una respuesta en la categoría j, se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta_p - \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=1}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

- En este modelo, se estiman libremente los parámetros α_{ij} y η_{ij}.

  Por ejemplo, no se fija de antemano un orden en las α_{ij} (o de las categorías).

- Únicamente, para resolver las indeterminaciones en el modelo, se restringe que:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{m} \eta_{ik} = 0$$

  Nota: Estas restricciones son adicionales a la restricción que se requiere para fijar el origen y la unidad de la dimensión subyacente, lo cual generalmente se obtiene al especificar (al utilizar el método de máxima verosimilitud marginal) que, para todas las personas:

$$\theta_p \sim N(0, 1)$$

El Modelo de Respuesta Nominal (Bock, 1972)

- El modelo de respuesta nominal, propuesto por Bock (1972), especifica que la probabilidad de que la persona p al contestar el ítem i (con m categorías de respuesta, etiquetadas $j = 1, \ldots, m$) dé una respuesta en la categoría j, se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) \;=\; \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\,\theta_p \;-\; \eta_{ij}\right)}{\sum_{k=1}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\,\theta_p \;-\; \eta_{ik}\right)}.$$

- En este modelo, se estiman libremente los parámetros α_{ij} y η_{ij}.

  Por ejemplo, no se fija de antemano un orden en las α_{ij} (o de las categorías).

- Únicamente, para resolver las indeterminaciones en el modelo, se restringe que:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{m} \eta_{ik} = 0$$

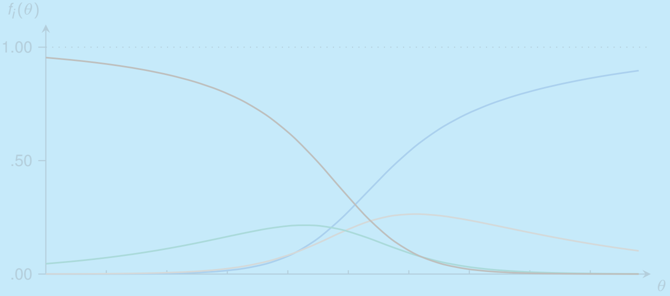
  Nota: Estas restricciones son adicionales a la restricción que se requiere para fijar el origen y la unidad de la dimensión subyacente, lo cual generalmente se obtiene al especificar (al utilizar el método de máxima verosimilitud marginal) que, para todas las personas:

$$\theta_p \;\sim\; \mathrm{N}(0, 1)$$

El Modelo de Respuesta Nominal: Curvas características de categoría

Ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j ($j = 1, \ldots, m$) del ítem i en el modelo de respuesta nominal se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right)}{\exp\left(\alpha_{i1}\theta_p - \eta_{i1}\right) + \exp\left(\alpha_{i2}\theta_p - \eta_{i2}\right) + \exp\left(\alpha_{i3}\theta_p - \eta_{i3}\right) + \exp\left(\alpha_{i4}\theta_p - \eta_{i4}\right)}.$$



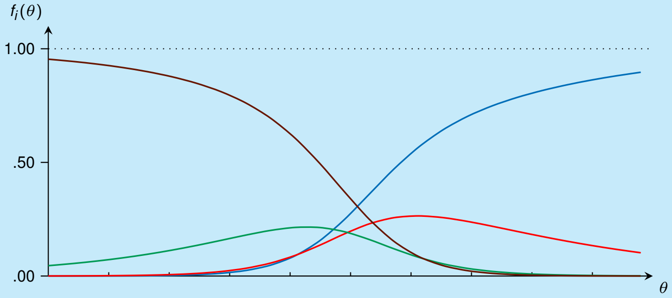
$\alpha_{i1} = 0.905$ $\alpha_{i2} = 0.522$ $\alpha_{i3} = -0.469$ $\alpha_{i4} = -0.959$

$\eta_{i1} = -0.126$ $\eta_{i2} = 0.206$ $\eta_{i3} = 0.257$ $\eta_{i4} = -0.336$

El Modelo de Respuesta Nominal: Curvas características de categoría

Ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j ($j = 1, \ldots, m$) del ítem i en el modelo de respuesta nominal se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right)}{\exp\left(\alpha_{i1}\theta_p - \eta_{i1}\right) + \exp\left(\alpha_{i2}\theta_p - \eta_{i2}\right) + \exp\left(\alpha_{i3}\theta_p - \eta_{i3}\right) + \exp\left(\alpha_{i4}\theta_p - \eta_{i4}\right)}.$$

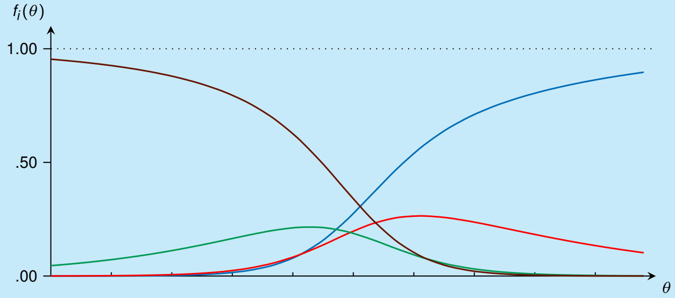


$\alpha_{i1} = 0.905$	$\alpha_{i2} = 0.522$	$\alpha_{i3} = -0.469$	$\alpha_{i4} = -0.959$
$\eta_{i1} = -0.126$	$\eta_{i2} = 0.206$	$\eta_{i3} = 0.257$	$\eta_{i4} = -0.336$

El Modelo de Respuesta Nominal: Curvas características de categoría

Ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j ($j = 1, \ldots, m$) del ítem i en el modelo de respuesta nominal se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right)}{\exp\left(\alpha_{i1}\theta_p - \eta_{i1}\right) + \exp\left(\alpha_{i2}\theta_p - \eta_{i2}\right) + \exp\left(\alpha_{i3}\theta_p - \eta_{i3}\right) + \exp\left(\alpha_{i4}\theta_p - \eta_{i4}\right)}.$$



$\alpha_{i1} = 0.905$ $\alpha_{i2} = 0.522$ $\alpha_{i3} = -0.469$ $\alpha_{i4} = -0.959$

$\eta_{i1} = -0.126$ $\eta_{i2} = 0.206$ $\eta_{i3} = 0.257$ $\eta_{i4} = -0.336$

El Modelo de Samejima (1979)

- Samejima, además de proponer el modelo de respuesta graduada, también desarrolló un modelo para el análisis de ítems de opción múltiple.
- Adaptó el modelo de respuesta nominal de Bock (1972), porque en este modelo, cuando se aplica a ítems de opción múltiple, se considera poco plausible que conforme el nivel en θ baja, la probabilidad de escoger una opción particular se acerca a 1.
- Para resolver este inconveniente, Samejima incluye una categoría de respuesta latente, no observada adicional: la categoría 0 (o "No sé").
- Esta categoría representa a las personas que "son totalmente indiferentes" frente las distintas opciones de respuesta.
  Y en este modelo, Samejima supone que tal persona escogería aleatoriamente entre las m opciones de respuesta.
- La ecuación del modelo de Samejima es una extensión del modelo de Bock, incluyendo dos nuevos parámetros α_{i0} y η_{i0} asociados con esta categoría latente. En particular, se supone que la probabilidad de responder la opción j ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \frac{1}{m}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

El Modelo de Samejima (1979)

- Samejima, además de proponer el modelo de respuesta graduada, también desarrolló un modelo para el análisis de ítems de opción múltiple.
- Adaptó el modelo de respuesta nominal de Bock (1972), porque en este modelo, cuando se aplica a ítems de opción múltiple, se considera poco plausible que conforme el nivel en θ baja, la probabilidad de escoger una opción particular se acerca a 1.
- Para resolver este inconveniente, Samejima incluye una categoría de respuesta latente, no observada adicional: la categoría 0 (o "No sé").
- Esta categoría representa a las personas que "son totalmente indiferentes" frente las distintas opciones de respuesta.
  Y en este modelo, Samejima supone que tal persona escogería aleatoriamente entre las m opciones de respuesta.
- La ecuación del modelo de Samejima es una extensión del modelo de Bock, incluyendo dos nuevos parámetros α_{i0} y η_{i0} asociados con esta categoría latente.
  En particular, se supone que la probabilidad de responder la opción j ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \frac{1}{m}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

El Modelo de Samejima (1979)

- Samejima, además de proponer el modelo de respuesta graduada, también desarrolló un modelo para el análisis de ítems de opción múltiple.
- Adaptó el modelo de respuesta nominal de Bock (1972), porque en este modelo, cuando se aplica a ítems de opción múltiple, se considera poco plausible que conforme el nivel en θ baja, la probabilidad de escoger una opción particular se acerca a 1.
- Para resolver este inconveniente, Samejima incluye una categoría de respuesta latente, no observada adicional: la categoría 0 (o "No sé").
- Esta categoría representa a las personas que "son totalmente indiferentes" frente las distintas opciones de respuesta.
  Y en este modelo, Samejima supone que tal persona escogería aleatoriamente entre las m opciones de respuesta.
- La ecuación del modelo de Samejima es una extensión del modelo de Bock, incluyendo dos nuevos parámetros α_{i0} y η_{i0} asociados con esta categoría latente.
  En particular, se supone que la probabilidad de responder la opción j ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \frac{1}{m}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

El Modelo de Samejima (1979)

- Samejima, además de proponer el modelo de respuesta graduada, también desarrolló un modelo para el análisis de ítems de opción múltiple.
- Adaptó el modelo de respuesta nominal de Bock (1972), porque en este modelo, cuando se aplica a ítems de opción múltiple, se considera poco plausible que conforme el nivel en θ baja, la probabilidad de escoger una opción particular se acerca a 1.
- Para resolver este inconveniente, Samejima incluye una categoría de respuesta latente, no observada adicional: la categoría 0 (o "No sé").
- Esta categoría representa a las personas que "son totalmente indiferentes" frente las distintas opciones de respuesta.
  Y en este modelo, Samejima supone que tal persona escogería aleatoriamente entre las m opciones de respuesta.
- La ecuación del modelo de Samejima es una extensión del modelo de Bock, incluyendo dos nuevos parámetros α_{i0} y η_{i0} asociados con esta categoría latente. En particular, se supone que la probabilidad de responder la opción j ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \frac{1}{m}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

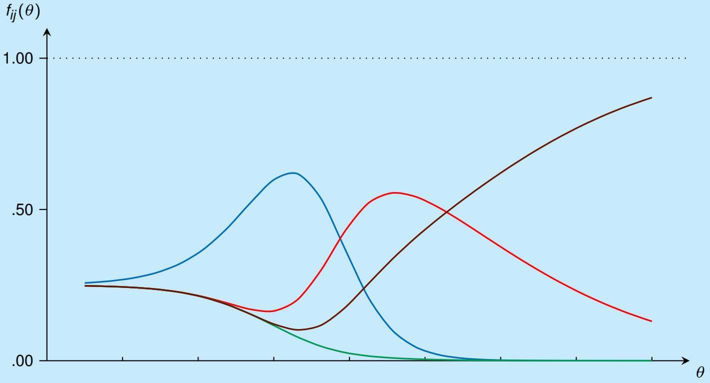
El Modelo de Samejima (1979)

- Samejima, además de proponer el modelo de respuesta graduada, también desarrolló un modelo para el análisis de ítems de opción múltiple.
- Adaptó el modelo de respuesta nominal de Bock (1972), porque en este modelo, cuando se aplica a ítems de opción múltiple, se considera poco plausible que conforme el nivel en θ baja, la probabilidad de escoger una opción particular se acerca a 1.
- Para resolver este inconveniente, Samejima incluye una categoría de respuesta latente, no observada adicional: la categoría 0 (o “No sé”).
- Esta categoría representa a las personas que “son totalmente indiferentes” frente las distintas opciones de respuesta.
  Y en este modelo, Samejima supone que tal persona escogería aleatoriamente entre las m opciones de respuesta.
- La ecuación del modelo de Samejima es una extensión del modelo de Bock, incluyendo dos nuevos parámetros α_{i0} y η_{i0} asociados con esta categoría latente.
  En particular, se supone que la probabilidad de responder la opción j ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \frac{1}{m}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

El Modelo de Samejima (1979): Curvas características de categoría

Ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta, las curvas características de categoría pueden tener la siguiente forma:



$\alpha_{i0} = -2.9$ $\quad$ $\alpha_{i1} = -1.0$ $\quad$ $\alpha_{i2} = 1.5$ $\quad$ $\alpha_{i3} = 0.2$ $\quad$ $\alpha_{i4} = 2.2$

$\eta_{i0} = 3.8$ $\quad$ $\eta_{i1} = -0.1$ $\quad$ $\eta_{i2} = -2.9$ $\quad$ $\eta_{i3} = 1.9$ $\quad$ $\eta_{i4} = -2.7$

El Modelo de Thissen y Steinberg (1984)

- Thissen y Steinberg generalizaron el modelo de Samejima (1979), porque consideran poco plausible que:
  Para una persona con bajo nivel en θ, las *m* opciones de respuesta sean igualmente atractivas.

- Para resolver este inconveniente, añaden parámetros $\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im}$ para cada ítem que indican la "atractividad" de cada opción de respuesta para personas con θ muy bajo.

  El modelo de Samejima es un caso especial, donde se restringe $\delta_{ij} = \frac{1}{m}$.

- En el modelo de Thissen y Steinberg, la probabilidad de responder la opción j ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \delta_{ij}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

El Modelo de Thissen y Steinberg (1984)

- Thissen y Steinberg generalizaron el modelo de Samejima (1979), porque consideran poco plausible que:
  Para una persona con bajo nivel en θ, las *m* opciones de respuesta sean igualmente atractivas.

- Para resolver este inconveniente, añaden parámetros $\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im}$ para cada ítem que indican la "atractividad" de cada opción de respuesta para personas con θ muy bajo.

  El modelo de Samejima es un caso especial, donde se restringe $\delta_{ij} = \frac{1}{m}$.

- En el modelo de Thissen y Steinberg, la probabilidad de responder la opción *j* ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \delta_{ij}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m} \exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

El Modelo de Thissen y Steinberg (1984)

- Thissen y Steinberg generalizaron el modelo de Samejima (1979), porque consideran poco plausible que:
  Para una persona con bajo nivel en θ, las m opciones de respuesta sean igualmente atractivas.

- Para resolver este inconveniente, añaden parámetros $\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im}$ para cada ítem que indican la "atractividad" de cada opción de respuesta para personas con θ muy bajo.

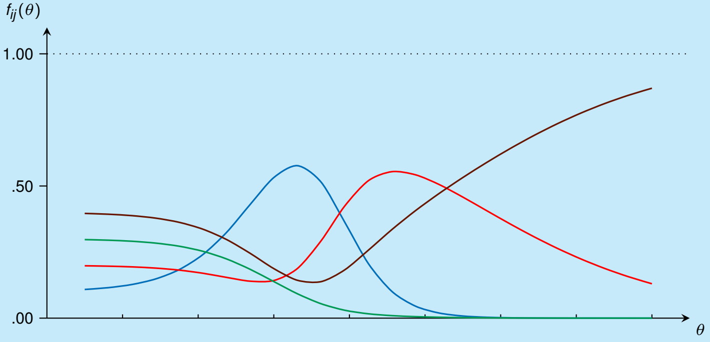
  El modelo de Samejima es un caso especial, donde se restringe $\delta_{ij} = \frac{1}{m}$.

- En el modelo de Thissen y Steinberg, la probabilidad de responder la opción j ($j = 1, \ldots, m$) se da por:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(\alpha_{ij}\theta_p - \eta_{ij}\right) + \delta_{ij}\exp\left(\alpha_{i0}\theta_p - \eta_{i0}\right)}{\sum_{k=0}^{m}\exp\left(\alpha_{ik}\theta_p - \eta_{ik}\right)}.$$

El Modelo de Thissen y Steinberg (1984): Curvas características de categoría

Ejemplo: Para un ítem de cuatro categorías de respuesta, las curvas características de categoría pueden tener la siguiente forma:



$\alpha_{i0} = -2.9$	$\alpha_{i1} = -1.0$	$\alpha_{i2} = 1.5$	$\alpha_{i3} = 0.2$	$\alpha_{i4} = 2.2$
$\eta_{i0} = 3.8$	$\eta_{i1} = -0.1$	$\eta_{i2} = -2.9$	$\eta_{i3} = 1.9$	$\eta_{i4} = -2.7$
	$\delta_{i1} = 0.1$	$\delta_{i2} = 0.2$	$\delta_{i3} = 0.3$	$\delta_{i4} = 0.4$