Nombre: Fecha de entrega: 23 de febrero

1. Sea la siguiente función de densidad definida en el intervalo (0, 1):

$$f(x) = 6x(1-x)$$

Responda a las siguientes cuestiones mediante cálculo matemático:

1. Obtenga el máximo de $f(x)$.
2. Obtenga el valor esperado de *X*.

Solución: Para obtener el máximo de la función necesitamos su derivadas de primer y segundo orden

$$f'(x) = 6-12x$$
$$f''(x) = -12$$

En el máximo de una función su derivada es cero. Por tanto a partir de $6-12x=0$, despejamos $x=0,5$. En este punto la segunda derivada es negativa y por tanto se trata de un máximo.

El valor esperado de *X* es

$$E(x) = \int_0^1 xf(x)dx = 6\int_0^1 x^2(1-x)dx = 6\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}$$

2. Sea la siguiente función de densidad definida en el intervalo (0, 1):

$$f(x) = 30x(1-x)^4$$

Responda a las siguientes cuestiones utilizando R:

1. Represente gráficamente la función.
2. Obtenga el valor esperado y la varianza de X
3. Obtenga la moda de X.
4. Calcule la probabilidad de que X esté entre 0,25 y 0,75.

Solución: El siguiente código R realiza las tareas indicadas:

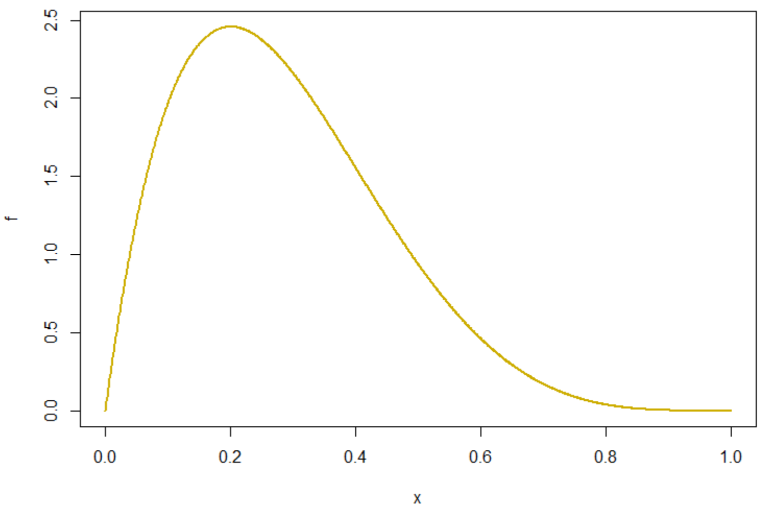
```
fx <- function(x) 30*x*(1-x)^4
fit <- optimize(fx, c(0, 1), maximum=TRUE)


f1 <- function(x){30*x^2*(1-x)^4}
f2 <- function(x){30*x^3*(1-x)^4}
Ex <- integrate(f1, lower = 0, upper = 1)
Ex2 <- integrate(f2, lower = 0, upper = 1)
Varx <- Ex2$value - Ex$value^2
Pr <- integrate(fx, lower = 0.25, upper = 0.75)


x <- seq(0, 1, 0.001)
f <- fx(x)
plot(x, f, type="l", lwd=2, col="gold3")
cat(sprintf("E(X) = %5.3f, Var(X) = %5.3f, Moda(X) = %5.3f, Pr =
%5.3f\n", Ex$value, Varx, fit$maximum, Pr$value))
```

La salida de resultados es:

```
E(X) = 0.286, Var(X) = 0.026, Moda(X) = 0.200, Pr = 0.529
```



3. La probabilidad de que un estudiante termine un examen en x horas es

$$f(x) = \frac{3x^{1/2}}{2}$$

donde $0 \le x \le 1$. Responda a las siguientes cuestiones mediante cálculo matemático y en R.

1. Obtenga el tiempo en minutos que cabe esperar que el estudiante tarde en terminar.
2. Calcule la probabilidad de que un estudiante tarde más de media hora en terminar.

Solución:

El valor esperado de *X* es

$$E(X) = \int_0^1 \frac{3x^{3/2}}{2} dx = \left. \frac{3x^{5/2}}{5} \right|_0^1 = \frac{3}{5}$$

Convertimos a minutos

$$\frac{3}{5}60 = 36$$

La probabilidad de tardar más de media hora es la integral definida

$$P(X \ge 0,5) = \int_{0,5}^{1} \frac{3x^{1/2}}{2} dx = x^{3/2}\Big|_{0,5}^{1} = 1 - 0,5^{3/2} \approx 0,65$$

El siguiente código R implementa estos cálculos:

```
f1 <- function(x){1.5*x^1.5}
f2 <- function(x){1.5*x^0.5}
Ex <- integrate(f1, lower = 0, upper = 1)
Pr <- integrate(f2, lower = 0.5, upper = 1)

cat(sprintf("Tiempo esperado %3.1f minutos, Pr = %5.3f\n",
60*Ex$value, Pr$value))
```

El resultado es

```
Tiempo esperado 36.0 minutos, Pr = 0.646
```