Teoría de errores

Tema 4

Tema 4 Teoría de errores

- 4.1 El error verdadero
- 4.2 Clasificación de errores
  - Según las causas que los provocan
  - Según los efectos que producen
- 4.3 Ley de errores de Gauss
  - Postulados de Gauss y distribución de errores
  - Valor más probable. Error residual
  - Ley de errores de Gauss
- 4.4 Diferentes estimaciones del error aleatorio en medida directa
  - Módulo de precisión,error probable, error promedio, error medio cuadrático

4.1 El error verdadero

- En todas las ciencias experimentales se opera con valores numéricos obtenidos por observación
  - Estos valores vienen siempre afectados por una serie de errores que hacen que en observaciones distintas de una misma magnitud se obtengan resultados distintos
- El fin del estudio es el establecimiento de una teoría que permita decidir:
  - Cuál es el valor final que se va a asignar a cada magnitud
  - Con qué precisión se hace
- Se llama ***error verdadero*** a la diferencia entre el valor verdadero y el valor observado

$$\varepsilon_i = X - X_i$$

4.2 Clasificación de errores

- *Según las causas que los provocan*
  - Errores graves o groseros
    - Son debidos a imperfecciones en los sentidos del observador o a distracciones o tendencias nerviosas en el momento de la observación
  - Errores instrumentales
    - Debidos al equipo utilizado
  - Errores teóricos
    - Debidos a deficiencias en la teoría en que se basan las observaciones
- **Esta clasificación no se presta convenientemente a un estudio matemático de los errores**

- *Según los efectos que producen*
  - Errores constantes
    - Producen el mismo efecto sobre todas las observaciones de una serie de medidas
      - Ej.: error en la orientación de un instrumento
  - Errores sistemáticos
    - Son aquellos que siempre que se realice una observación de una misma magnitud en idénticas condiciones se presentan con el mismo valor y en el mismo sentido
  - Errores aleatorios
    - Influyen de manera irregular y varían en magnitud y signo de una observación a otra

4.2 Clasificación de errores

Errores sistemáticos y aleatorios

- * Errores sistemáticos
  - Son aquellos que siempre que se realice una observación de una misma magnitud, en idénticas condiciones, se presentan con el mismo valor y en el mismo sentido
  - Vienen dados por alguna relación establecida de antemano,en funciór de alguna de las variables que intervienen en la observación
    - Siguen una ley matemática determinada
      - Ej.: Error por temperatura
- **Errores aleatorios
  - Influyen de manera irregular y varían en magnitud y signo de una observación a otra
  - Son fortuitos o aleatorios, a veces totalmente desconocidos e imposibles de evaluar.Los métodos de ajuste tratan de minimiza efectos

LOS ERRORES GRAVES O EQUIVOCACIONES:

- -Tipos:
- -errores de escritura
- -errores de lectura
- -interpretaciones erróneas de las lecturas
- -Etc.
- -Interpretación estadística: Las observaciones con errores graves no pertenecen a la muestra aleatoria(y por tanto no siguen distribuciones de tipo Normal)

- -Detección y eliminación de estos errores antes del procesado, pues los Métodos de Ajuste basado en los Mínimos Cuadrados no son capaces de detectarlos.
- -Algunos métodos:
- -realizar múltiples lecturas
- -comprobar su consistencia
- -utilizar técnicas distintas
- -incrementar el número de observaciones
- -En general se utilizan tests estadísticos sobre los datos para detectarlos(por ejemplo el Test de Baarda, muy utilizado en Topografía y Fotogrametría)
- Veamos un ejemplo de una posible metodología para detectarlos(ejercicio propuesto)

LOS ERRORES SISTEMÁTICOS:

- -Su comportamiento viene determinado por algún sistema "determinístico" cuya expresión funcional es conocida.
- -Métodos a utilizar:
-
- -calibrado de instrumentos
- -procedimientos de observación
- -procesado de los datos
- -Interpretación estadística: Afectan a todas las observaciones del mismo modo.
- Parámetro de localización de la distribución: μ (media)
- -Otra causa de su existencia: Elección incorrecta del modelo funcional ⇨ Inconsistencia con las observaciones

- Valor y signo permanecen constantes: Error sistemático constante
- - Ejemplo: ¿Errores sistemáticos en las Fotocoordenadas en un fotograma aéreo?
- -Origen de los errores s. en Topografía, Fotogrametría, Geodesia:
- -Causas físicas
- -Factores instrumentales
- -Limitaciones de la observación humana
- -Causas físicas: Temperatura, humedad y cambios de presión ⇨ observaciones angulares y de distancia
- -Factores instrumentales: imperfecciones de construcción o desajustes en su utilización

- -Tratamiento de los errores sistemáticos en el modelo funcional:
    - Aplicación de sus efectos(si se conocen) sobre las observaciones a priori del ajuste
    - Se consideran variables desconocidas durante el proceso de ajuste
    - Se consideran como observaciones, con un valor a priori.
- Ejemplos:
- 1)Medida clásica de distancias:
- -diferencia de temperatura entre el momento de la calibración y el de observación
- -tensión aplicada en la cinta
- -extremos a diferentes alturas
- -corrección por catenaria

2)Técnicas electrónicas o electro-ópticas:

- -cambios en la densidad del aire ⇨ variación de la frecuencia
- -centrado imperfecto del instrumento
- -la señal no sigue exactamente una línea recta en su propagación (factores ambientales)

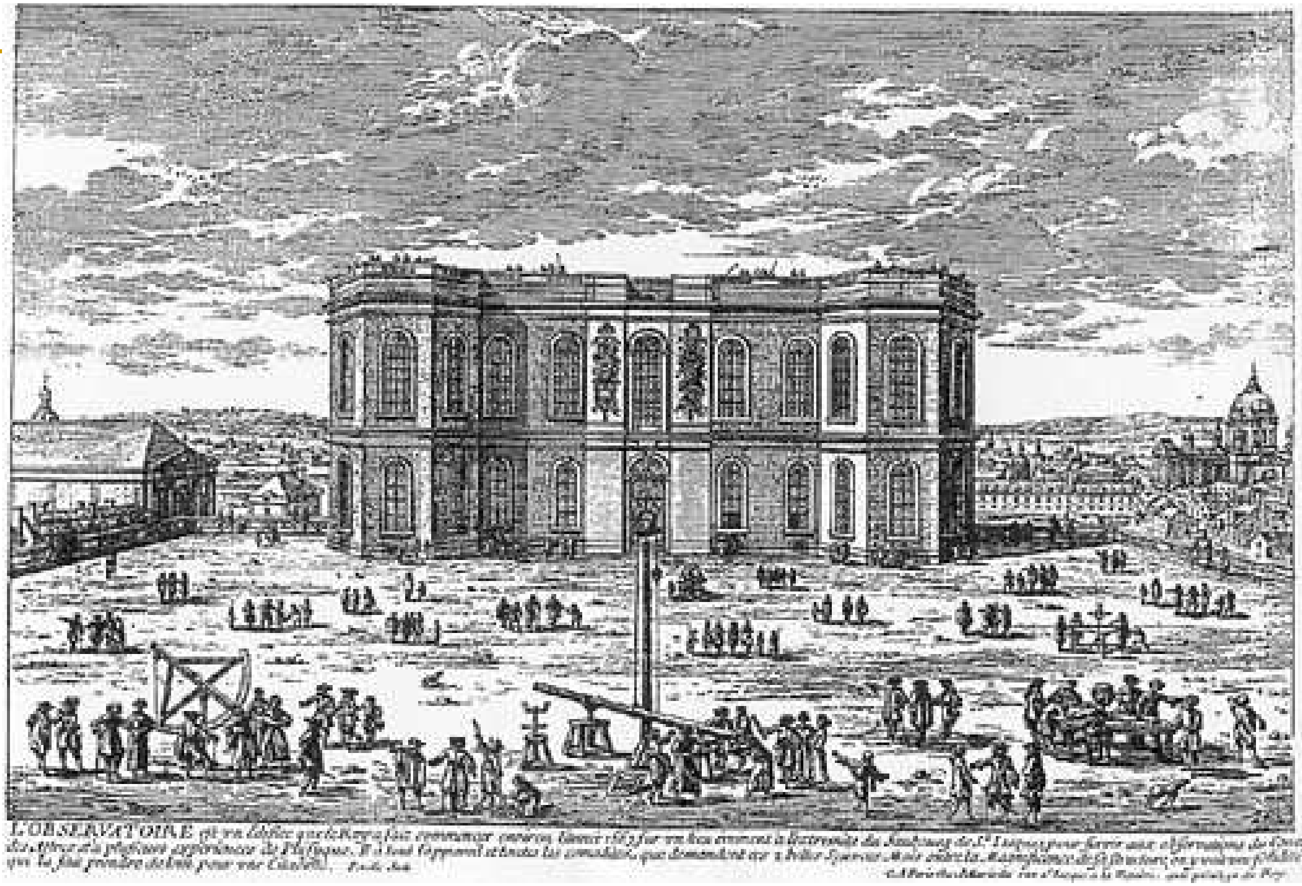
- Precisión = $\sqrt{a + bd^2}$ a, b : Parámetros del distanciómetro
d la distancia medida

- 3)Observación angulares (horizontales y verticales):
- -centrado imperfecto del círculo horizontal
- -graduaciones no uniformes en los círculos
- -eje horizontal del telescopio ⊥ eje vertical del instrumento
- -eje del telescopio || eje del nivel de burbuja

- <u>Métodos de reducción del efecto de los errores sistemáticos sobre las observaciones</u>
- Establecer la **ley de aparición del error** y corregir las observaciones
- Ejemplo:
- Una vez realizada la calibración de un distanciómetro utilizando un patrón de medida de distancias, se obtiene una expresión del tipo:
  - Corrección = F(Longitud, temperatura, presión,etc)
- Establecer un **programa de observaciones** de tal forma que los errores no actúen de forma unilateral
- Ejemplos:
- -En la observación de direcciones acimutales : lecturas diametralmente opuestas para eliminar el efecto de la excentricidad.

- Observaciones geodésicas: Realizadas en horas diurnas y nocturnas durante un periodo de tiempo prolongado , con el objetivo de debilitar la influencia de la refracción.

- Redes de nivelación : Cálculo de los desniveles directos e inversos para minimizar el efecto de los errores sistemáticos producidos por una determinación no demasiado precisa del Coeficiente de Refracción.
- **Metodología especial** en la elaboración o tratamiento de los datos:
- Ejemplo histórico : En el siglo XVII y bajo la dirección del astrónomo Cassini comienza la construcción del Observatorio Astronómico de París. Era necesario determinar el meridiano de París y por ello la latitud : φ_{PARIS}



Observaciones realizadas : Distancias cenitales de un conjunto de estrellas a su paso por el meridiano(z*), y de este modo calcular la latitud utilizando la fórmula:

$$\varphi = \delta^* - z^*$$

donde δ^* = declinación de la estrella(buscadas en el catálogo de estrellas del año)

DATOS

Z	φ
10^0	$48^0\ 50'\ 11''8$
63^0	**13”5**
1^0	**10”9**
74^0	**14”3**
40^0	**13”2**
22^0	11”9
31^0	12”1
53^0	**13”3**

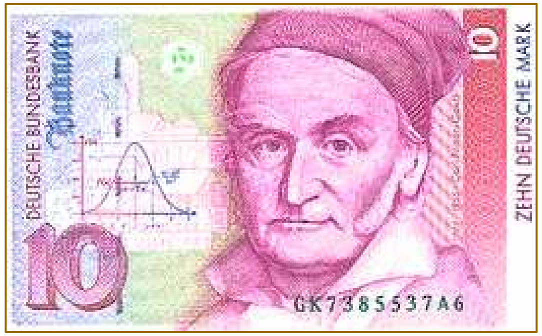
Dispersión : ¡¡¡¡¡¡ (10”9-14”3) !!!!!!!

- ¿Podría ocurrir que existiera un error sistemático en todas las z de forma que:
- error sistemático = f(z) ?
- Efectivamente, se comprobó que:
- **corrección(z) = -(3”) sen z**
- Una vez aplicadas las correcciones a todas las distancias cenitales:
- **(10”6 , 11”4) dispersión < 1”**

4.3 Ley de errores de Gauss

Postulados de Gauss y distribución de errores

- La *teoría de errores clásica* fue desarrollada por Gauss (1777 – 1855)
  - Se refiere única y exclusivamente a los errores accidentales
    - Las observaciones utilizadas se suponen libres de errores constantes y sistemáticos



- Esta teoría parte de la siguiente premisa:
  - Se considera una serie de gran número de observaciones, efectuadas en idénticas condiciones y con el mismo esmero
- Y está basada en los siguientes postulados:
  - **1** Los distintos errores posibles se presentan con tanta mayor frecuencia cuanto menor sea su valor absoluto
  - **2** Los errores del mismo valor absoluto pero de distinto signo se presentan con igual frecuencia

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0, n \to \infty$$

4.3 Ley de errores de Gauss

Postulados de Gauss y distribución de errores

- Sin embargo, en la primera exposición de su teoría (en la obra *"Theoria Motus Corporum Celestium"*) no aparecía el segundo postulado como se ha enunciado
  - Aparecía con el siguiente enunciado:

    2' *Obtenidos por observación n valores distintos de una magnitud, siempre que todos hayan sido obtenidos en las mismas circunstancias y con el mismo esmero, el valor más probable de la magnitud es la media aritmética de los valores observados*
- Este postulado es consecuencia del segundo, puesto que
  - si $x_1, \ldots x_n$ son los valores observados
  - cada observación vendrá afectada de un cierto error ε_i
  - de forma que si llamamos x al verdadero valor resulta:

$$\varepsilon_i = x - x_i , \quad i = 1, \ldots n$$

4.3 Ley de errores de Gauss

- La definición dada para el error verdadero presenta una dificultad insuperable para su cálculo:
  - No se conoce el valor verdadero de la magnitud
- Se introduce, por ello, el ***residuo*** que es la diferencia entre el valor más probable(lo que llamaremos valor ajustado) y el valor observado, es decir

$$v_i = \overline{x} - x_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

En el caso de medidas repetidas de una misma magnitud este valor más probable coincide con la media aritmética.Entonces:

- Y sumando los residuos resulta

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{x} - x_i\right) = n \cdot \overline{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} v_i = 0}$$

$$\cancel{n} \cdot \left(\frac{\sum x}{\cancel{n}}\right) - \sum x_i$$

sea cual sea n

4.3 Ley de errores de Gauss

- Se demuestra que partiendo de una muestra aleatoria simple suficientemente grande

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

- Y considerando los residuos

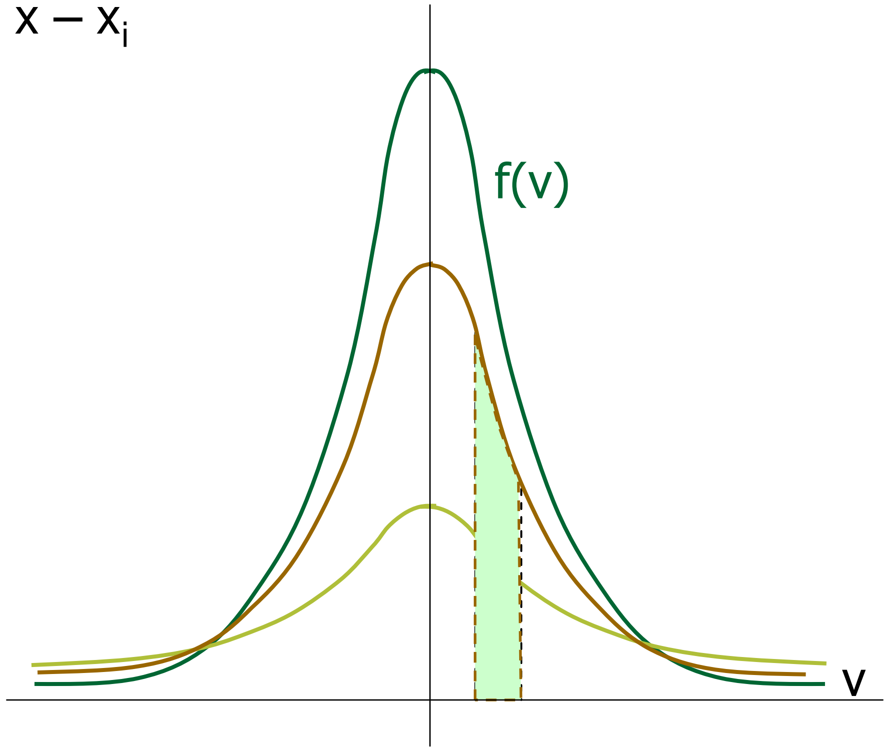
$$v_i = \bar{x} - x_i$$

- La función f toma la forma

$$f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

que corresponde a una distribución Normal(0,σ)

- Su gráfica es de la forma
  - Siendo más puntiaguda o achatada según el valor de σ



4.4 Diferentes estimaciones del error aleatorio en medida directa de una magnitud

- <u>Primer Estudio de los errores aleatorios en medida directa(sin considerar la Distribución Normal)</u>

- Sean $X_1,X_2,...,X_n$ las observaciones y $e_1,e_2,...,e_n$ los errores aleatorios presentes en dichas observaciones
- Veamos diferentes formas de aproximar estos errores:

- <u>**Error probable**</u>: Ordenados los errores de menor a mayor magnitud(sin signo), ocupa la posición central

$$|e1| < |e2| <.....\boxed{}......< |en|$$

$$|v1| < |v2| <.....\boxed{}......< |vn|$$

- -**Error Medio Aritmético:**Media aritmética de todos los errores(sin signo)

$$e.m.a. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |e_i|}{n} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i|}{n}$$

- **Error Máximo:** Establece una tolerancia para el valor de los errores

$$e_i \leq e_{max} \quad \forall\ i=1...n$$

$$e_{max} \approx v_{max}$$

- **Error Medio Cuadrático: e_c**

$$e_c = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} e_i^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$ (Se puede demostrar: Corrección de Bessel)

- **Error Medio Cuadrático de la Media Aritmética:**

  Sean $X_1 \dots X_n$ las observaciones y su media

$$e_c^m = \frac{1}{n}\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2}$$

Pero no conocemos el valor exacto de los errores, pero podemos acotarlos:

$$e_i \leq e_c$$

Entonces:

$$e_c^m = \frac{1}{n}\sqrt{e_c^2 + e_c^2 + \dots + e_c^2} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_1^n e_c^2} = \frac{1}{n}\sqrt{n e_c^2}$$

$$\boxed{e_c^m = \frac{e_c}{\sqrt{n}}}$$

¿cuántas observaciones será recomendable hacer?

- Segundo Estudio de los errores aleatorios en medida directa(considerando la Distribución Normal)

- Ahora estudiaremos estos conceptos desde la perspectiva de la D. Normal
  - $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Se denomina Módulo de precisión a la expresión:
  - $$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$ y por tanto quedará:
  - $$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

- **Error medio aritmético: e_a**

  - $$e_a \approx E[|X|] \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx \approx \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

    $$\Rightarrow \boxed{e_a = 0.797\sigma}$$

Error probable: ep. Es aquél que cumple lo siguiente:

- $P[|X| < e_p] = 0.5$

- Demostremos que:

$$\boxed{e_p \approx 0.68\sigma}$$

- **Error Medio Cuadrático: e_c**

$$e_c^2 \approx E[X^2] = 2\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx \approx 2\frac{1}{4h^2}$$

$$e_c \approx \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e_c \approx \sigma}$$

- **Error Máximo: e_{max}**

$$\mathbf{emax \approx 4e_p} \approx 4(0.68\sigma) \approx 2.5\sigma$$

- $$\boxed{emax \approx 2.5e_c}$$

Las expresiones más utilizadas son finalmente:

$$e_p \approx 0.68\sigma \approx \frac{2}{3} e_c$$

$$e_a \approx 0.797\sigma \approx \frac{4}{5} e_c$$