Nombre: Fecha de entrega: 16 de febrero

1. Una persona responde a cinco ítems de cinco opciones cada una sin saber absolutamente nada.

1. Indique el conjunto de resultados que puede obtener.
2. Indique el conjunto de resultados sabiendo que el total de aciertos en el test es dos.
3. ¿Cuánto vale la probabilidad de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 aciertos?
4. Obtenga la probabilidad de acertar el primer ítem sabiendo que en total tiene dos aciertos.

Solución:

1. El espacio muestral del experimento está formado por las variaciones con repetición de dos elementos tomados de cinco en cinco. En total $2^5 = 32$ resultados. La siguiente tabla muestra los posibles resultados y el número de aciertos de cada uno.

Resultado	Aciertos	Resultado	Aciertos	Resultado	Aciertos	Resultado	Aciertos
00000	0	01000	1	10000	1	**11000**	**2**
00001	1	**01001**	**2**	**10001**	**2**	11001	3
00010	1	**01010**	**2**	**10010**	**2**	11010	3
00011	**2**	01011	3	10011	3	11011	4
00100	1	**01100**	**2**	**10100**	**2**	11100	3
00101	**2**	01101	3	10101	3	11101	4
00110	**2**	01110	3	10110	3	11110	4
00111	3	01111	4	10111	4	11111	5

2. Los resultados en que hay dos aciertos son las combinaciones de cinco elementos entrando dos. Es decir, los diez resultados marcados en negrilla en la tabla.

3. La probabilidad de acertar una pregunta es 0,2 y la de fallarla 0,8. Si se aplican cinco preguntas, la probabilidad de acertar x preguntas y fallar 5-x es

$$0,2^{x} \times 0,8^{n-x}$$

El número de posibles resultados con 0, 1, 2, 3, 4 y 5 aciertos es 1, 5, 10, 10, 5 y 1 respectivamente. Entonces, la probabilidad de cada número de aciertos (X) es

$$P(X=0)=1\times 0,2^0\times 0,8^5\approx 0,33$$
$$P(X=1)=5\times 0,2^1\times 0,8^4\approx 0,41$$
$$P(X=2)=10\times 0,2^2\times 0,8^3\approx 0,20$$
$$P(X=3)=10\times 0,2^3\times 0,8^2\approx 0,05$$
$$P(X=4)=5\times 0,2^4\times 0,8^1\approx 0,01$$
$$P(X=5)=1\times 0,2^5\times 0,8^0\approx 0,00$$

4. Si X_1 es la respuesta al primer ítem, obtenemos la probabilidad condicionada

$$P(X_1 \mid X=2)=\frac{P(X_1, X=2)}{P(X=2)}$$

En el numerador aparece la probabilidad de acertar el primer ítem y tener dos aciertos en el total del test. Como hay cuatro casos en que esto ocurre, dicha probabilidad es

$$P(X_1, X=2)=4\times 0,2^2\times 0,8^3$$

La probabilidad del denominador ya la hemos calculado en el apartado 3. Sustituyendo

$$P(X_1 \mid X=2)=\frac{4\times 0,2^2\times 0,8^3}{10\times 0,2^2\times 0,8^3}=\frac{2}{5}=0,4$$

2. Un sujeto que responde a un ítem puede saber la solución al problema o bien responder por mero azar. Sea π la probabilidad de saber la solución y $1-\pi$ es la probabilidad de no saberla y responder por azar. El ítem tiene m opciones de respuesta y sólo una es correcta.

1. Obtenga la probabilidad de saber la solución en caso de que la respuesta haya sido correcta.
2. Supongamos que 60 personas responden al ítem ¿Cuántos de ellos cabe esperar que sepan la solución si $\pi = 1/2$ y $m = 5$.

Solución:

1. La probabilidad de saber la solución y acertar es $P(saber\ y\ acertar) = \pi$.

La probabilidad marginal de acierto es la probabilidad de saber la solución o la de no saberla y acertar por azar:

$$P(acierto) = \pi + \frac{(1-\pi)}{m}$$

Entonces, la probabilidad de saber la respuesta condicionada a que se ha acertado es

$$\begin{aligned} P(saber \mid acertar) &= \frac{P(saber\ y\ acertar)}{P(acierto)} \\ &= \frac{\pi}{\pi + \frac{(1-\pi)}{m}} = \frac{m\pi}{1+(m-1)\pi} \end{aligned}$$

2. Con los datos del enunciado, la probabilidad de saber la respuesta es

$$P(saber) = \frac{1}{2}$$

Entonces el número esperado de personas que saben la solución es

$$E(X) = 60\frac{1}{2} = 30$$