Modelos Psicométricos: Tópicos Selectos

Clase 2: Modelos TRI para Ítems Politómicos

Iwin Leenen y Ramsés Vázquez-Lira

Facultad de Psicología, UNAM

Programa de Licenciatura y Posgrado en Psicología
Semestre 2019–2

Índice

Índice:

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo I
Respuesta A	A	$\rightsquigarrow$	Prob. (A)
Respuesta B	B	$\rightsquigarrow$	Prob. (B)
Respuesta C	C	$\rightsquigarrow$	Prob. (C)
Respuesta D	D	$\rightsquigarrow$	Prob. (D)
Sin responder	O	$\rightsquigarrow$	Prob. (O)

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo II
Respuesta A	Correcto (1)	$\rightsquigarrow$	Prob. (1)
Respuesta B			
Respuesta C	Incorrecto (0)	$\rightsquigarrow$	Prob. (0)
Respuesta D			
Sin responder			

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona p, al contestar el ítem i, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{pi} = k) \;=\; f(\text{parámetro(s) de la persona } p, \text{parámetro(s) del ítem } i)$$

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona p, al contestar el ítem i, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{pi} = k) \;=\; f(\text{parámetro(s) de la persona } p, \text{parámetro(s) del ítem } i)$$

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: "Correcto" vs. "Incorrecto"
  "De acuerdo" vs. "En desacuerdo"
  "Presente" vs. "Ausente"
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función "libre": Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = curva característica de la respuesta correcta.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: "Correcto" vs. "Incorrecto"
  "De acuerdo" vs. "En desacuerdo"
  "Presente" vs. "Ausente"
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función "libre": Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

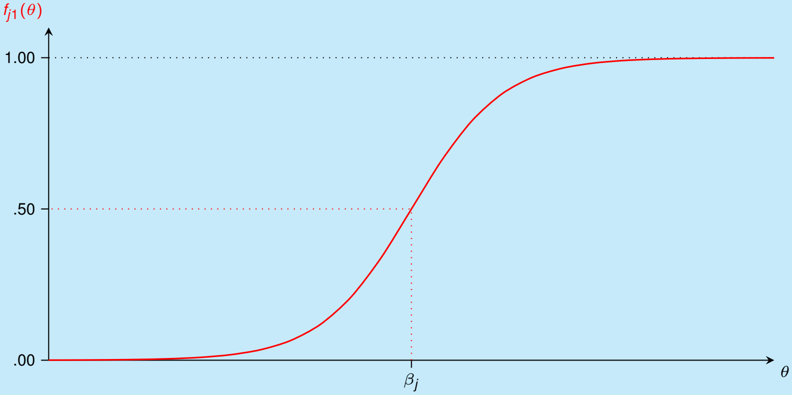
- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = *curva característica de la respuesta correcta*.

Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría “respuesta correcta” (1) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

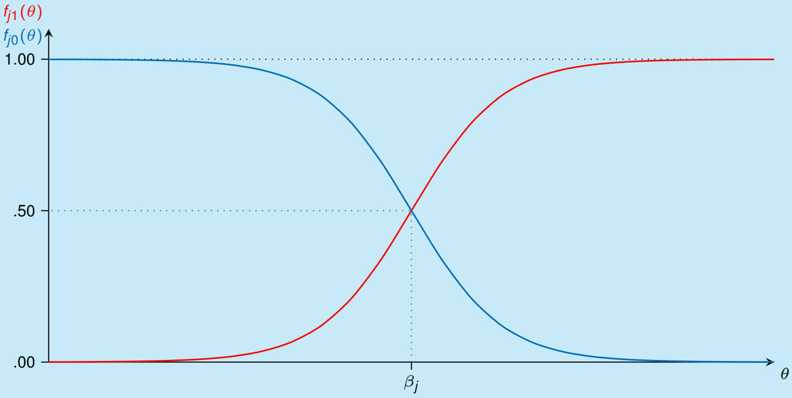
$$f_{j1}(\theta) = \frac{\exp(\theta - \beta_j)}{1 + \exp(\theta - \beta_j)}$$



Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría “respuesta incorrecta” (0) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

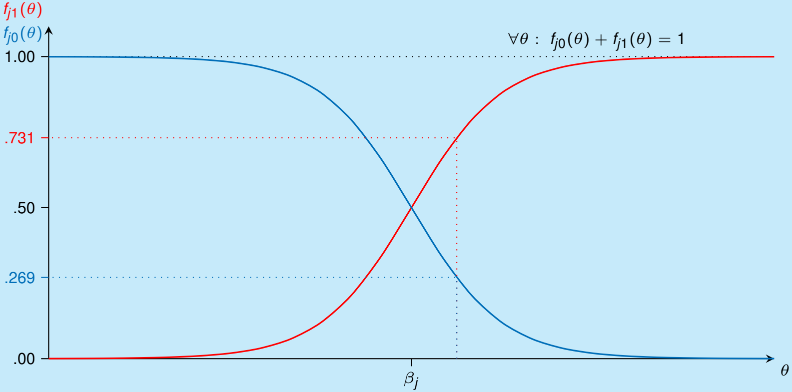
$$f_{j0}(\theta) \;=\; \frac{1}{1+\exp(\theta-\beta_j)}$$



Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría "respuesta incorrecta" (0) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

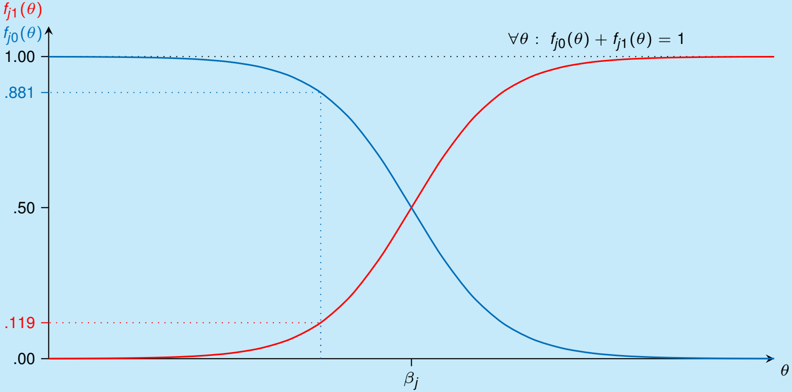
$$f_{j0}(\theta) = \frac{1}{1 + \exp(\theta - \beta_j)}$$



Las curvas características de las categorías en el modelo de Rasch

La curva característica de la categoría “respuesta incorrecta” (0) del ítem j en el modelo de Rasch se da por:

$$f_{j0}(\theta) \;=\; \frac{1}{1+\exp(\theta-\beta_j)}$$



Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: "Correcto" vs. "Incorrecto"
  "De acuerdo" vs. "En desacuerdo"
  "Presente" vs. "Ausente"
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función "libre": Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = *curva característica de la respuesta correcta*.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems dicotómicos

- Por definición, en los ítems dicotómicos se consideran dos categorías de respuesta.

  Por ejemplo: "Correcto" vs. "Incorrecto"
  "De acuerdo" vs. "En desacuerdo"
  "Presente" vs. "Ausente"
  etc.

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems dicotómicos consideran dos curvas características para cada ítem:
  - Una que describa la probabilidad de una respuesta correcta, de acuerdo, presente, etc.
  - Otra que describa la probabilidad de una respuesta incorrecta, en desacuerdo, ausente, etc.

- Sin embargo, solo hay una función "libre": Si se ha especificado la primera función característica, la segunda está completamente determinada.

- Por lo tanto, en los modelos TRI para ítems dicotómicos se suele graficar únicamente la curva característica de la respuesta correcta.
  En este sentido:

  curva característica del ítem = curva característica de la respuesta correcta.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.
- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).
- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran *m* categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, *m* curvas características: Una para cada categoría de respuesta.
- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).
- Solo hay $m-1$ funciones "libres": Si se han especificado $m-1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría *m* está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

$m = 7$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.

- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).

- Solo hay $m-1$ funciones "libres": Si se han especificado $m-1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

$m = 7$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.

- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).

- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

$m = 7$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.
- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).
- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Las categorías de respuesta en los modelos de ítems politómicos

- En general, para los ítems politómicos se consideran m categorías de respuesta.

Ejemplo 1:

La homosexualidad es natural y debe tolerarse.

A = "Totalmente en desacuerdo"
B = "En desacuerdo"
C = "Ligeramente en desacuerdo"
D = "Ni de acuerdo, ni en desacuerdo"
E = "Ligeramente de acuerdo"
F = "De acuerdo"
G = "Totalmente de acuerdo"

$m = 7$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la capital de Australia?

A = "Brisbane"
B = "Canberra"
C = "Melbourne"
D = "Sidney"
E = "Wellington"

$m = 5$

- Por lo tanto, los modelos TRI para ítems politómicos consideran, para cada ítem, m curvas características: Una para cada categoría de respuesta.
- Esta curva característica se llama "curva característica de la categoría" (CCC).
- Solo hay $m - 1$ funciones "libres": Si se han especificado $m - 1$ funciones características de la categoría del ítem, la función característica de la categoría m está completamente determinada.

Panorama de los modelos TRI unidimensionales para ítems politómicos

En este curso, se introducirán modelos para:

- cuando las categorías están ordenadas:
  - El Modelo de Crédito Parcial (PCM; Masters, 1982);
  - El Modelo de Respuesta Graduada (GRM; Samejima, 1969);
- cuando las categorías no están ordenadas (categorías nominales):
  - El Modelo de Respuesta Nominal (NRM; Bock, 1972).

Panorama de los modelos TRI unidimensionales para ítems politómicos

En este curso, se introducirán modelos para:

- cuando las categorías están ordenadas:
  - El Modelo de Crédito Parcial (PCM; Masters, 1982);
  - El Modelo de Respuesta Graduada (GRM; Samejima, 1969);
- cuando las categorías no están ordenadas (categorías nominales):
  - El Modelo de Respuesta Nominal (NRM; Bock, 1972).

Índice:

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(0\theta_p-\eta_{i0})}{\exp(0\theta_p-\eta_{i0})+\exp(1\theta_p-\eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0})+\exp(\theta_p-\eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(1\theta_p-\eta_{i1})}{\exp(0\theta_p-\eta_{i0})+\exp(1\theta_p-\eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p-\eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0})+\exp(\theta_p-\eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0})+\exp(\theta_p-\eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(\theta_p-\eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0})+\exp(\theta_p-\eta_{i1})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(-\eta_{i0}) \exp(\eta_{i0})}{[\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})] \exp(\eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1}) \exp(\eta_{i0})}{[\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})] \exp(\eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(-\eta_{i0})\,\exp(\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0})\,\exp(\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})\,\exp(\eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})\,\exp(\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0})\,\exp(\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})\,\exp(\eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(-\eta_{i0} + \eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0} + \eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0} + \eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0)}{\exp(0) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}{\exp(0) + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{1}{1 + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}{1 + \exp(\theta_p - \eta_{i1} + \eta_{i0})}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{1}{1 + \exp\left[\theta_p - (\eta_{i1} - \eta_{i0})\right]}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp\left[\theta_p - (\eta_{i1} - \eta_{i0})\right]}{1 + \exp\left[\theta_p - (\eta_{i1} - \eta_{i0})\right]}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi}=0) = \frac{1}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

si definimos: $\beta_i = \eta_{i1} - \eta_{i0}$

$$\Pr(Y_{pi}=1) = \frac{\exp(\theta_p - \beta_i)}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

Derivando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo para ítems dicotómicos, que asocia un parámetro con cada categoría de respuesta.

  Es decir, un parámetro η_{i0} (para la categoría 0)
  y otro parámetro η_{i1} (para la categoría 1):

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{\exp(0\theta_p - \eta_{i0})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(-\eta_{i0})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(1\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(0\theta_p - \eta_{i0}) + \exp(1\theta_p - \eta_{i1})} = \frac{\exp(\theta_p - \eta_{i1})}{\exp(-\eta_{i0}) + \exp(\theta_p - \eta_{i1})}$$

- Hagamos algunas manipulaciones algebraícas:

$$\Pr(Y_{pi} = 0) = \frac{1}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

si definimos: $\beta_i = \eta_{i1} - \eta_{i0}$

$$\Pr(Y_{pi} = 1) = \frac{\exp(\theta_p - \beta_i)}{1 + \exp(\theta_p - \beta_i)}$$

¡Obtenemos el modelo de Rasch!

Derivando el modelo de Rasch...

¿Qué aprendimos de la derivación anterior?

- En el modelo de Rasch, se puede interpretar el parámetro del ítem (β_i) como la diferencia entre parámetros para la categoría 1 (η_{i1}) y la categoría 0 (η_{i0}).

  ¡Ojo! Estos parámetros en si mismo no son estimables.

- Para llegar al modelo de Rasch, se deben asignar (en las ecuaciones inicales) coeficientes 0 y 1 a las categorías de respuesta incorrecta y correcta, respectivamente.

  $\longrightarrow$ ¡Categorías ordenadas!

Derivando el modelo de Rasch...

¿Qué aprendimos de la derivación anterior?

- En el modelo de Rasch, se puede interpretar el parámetro del ítem (β_i) como la diferencia entre parámetros para la categoría 1 (η_{i1}) y la categoría 0 (η_{i0}).

  ¡Ojo! Estos parámetros en si mismo no son estimables.

- Para llegar al modelo de Rasch, se deben asignar (en las ecuaciones inicales) coeficientes 0 y 1 a las categorías de respuesta incorrecta y correcta, respectivamente.

  $\longrightarrow$ ¡Categorías ordenadas!

Derivando el modelo de Rasch...

¿Qué aprendimos de la derivación anterior?

- En el modelo de Rasch, se puede interpretar el parámetro del ítem (β_i) como la diferencia entre parámetros para la categoría 1 (η_{i1}) y la categoría 0 (η_{i0}).

  ¡Ojo! Estos parámetros en si mismo no son estimables.

- Para llegar al modelo de Rasch, se deben asignar (en las ecuaciones inicales) coeficientes 0 y 1 a las categorías de respuesta incorrecta y correcta, respectivamente.

  $\longrightarrow$ ¡Categorías ordenadas!

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\ \beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\ &\vdots \\ \beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2} \end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) \;=\; \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\
\beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\
&\vdots \\
\beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2}
\end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) \;=\; \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\ \beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\ &\vdots \\ \beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2} \end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

Generalizando el modelo de Rasch...

- Supongamos el siguiente modelo
  para un ítem polotómico i con m categorías de respuestas ($j = 0, 1, \ldots, m-1$),
  en el cual se asocia un parámetro η_{ij} con cada categoría de respuesta:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp(j\theta_p - \eta_{ij})}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp(k\theta_p - \eta_{ik})}$$

- Definamos parámetros β_{ij} para cada categoría j, excepto la categoría 0, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\beta_{i1} &= \eta_{i1} - \eta_{i0} \\
\beta_{i2} &= \eta_{i2} - \eta_{i1} \\
&\vdots \\
\beta_{i,m-1} &= \eta_{i,m-1} - \eta_{i,m-2}
\end{aligned}$$

- Entonces, se puede derivar que:

$$\Pr(Y_{pi} = j) = \frac{\exp\left(j\theta_p - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta_p - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

- El modelo que se acaba de derivar se llama el Modelo de Crédito Parcial.

  La propuesta inicial del modelo: Anderson (1977);
  La derivación (y el nombre de *Crédito Parcial*): Masters (1982).

- Entonces, la curva característica del ítem en el Modelo de Crédito Parcial se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]},$$

  donde f_{ij} es la probabilidad de responder en la categoría j del ítem i.

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left[j\theta - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right]}{\sum_{k=0}^{2} \exp\left[k\theta - \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\exp\left(j\theta - \sum_{h=1}^{j} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

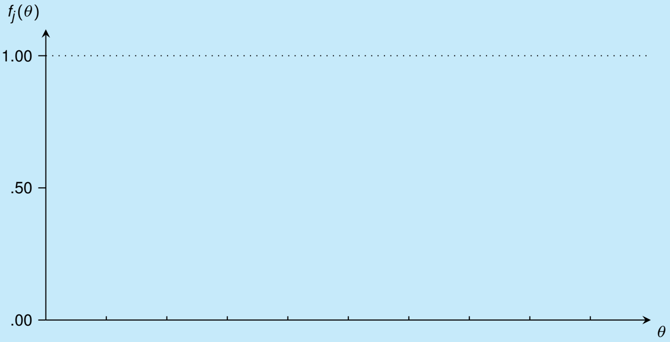
Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría *j* del ítem *i* en el PCM se da por:

$$f_{i0}(\theta) = \frac{\exp\left(0\theta - \sum_{h=1}^{0} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$

El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría *j* del ítem *i* en el PCM se da por:

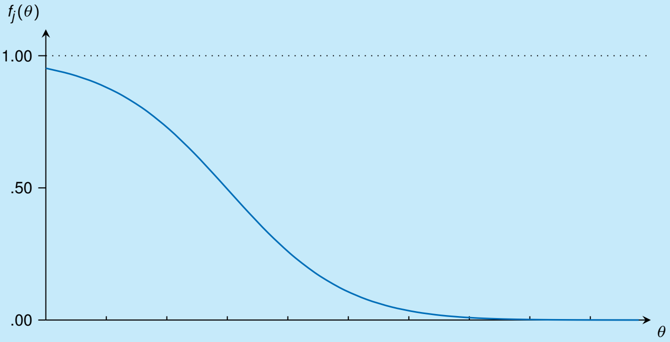
$$f_{i0}(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

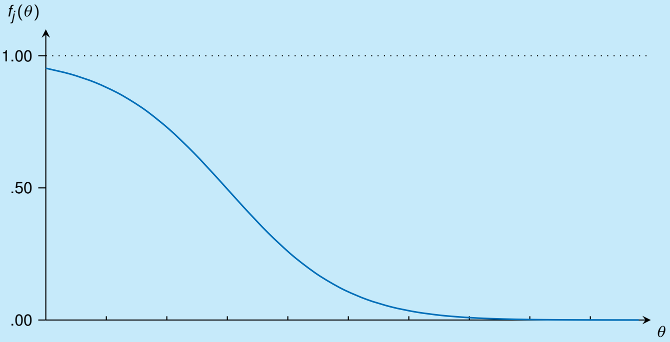
$$f_{i0}(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría *j* del ítem *i* en el PCM se da por:

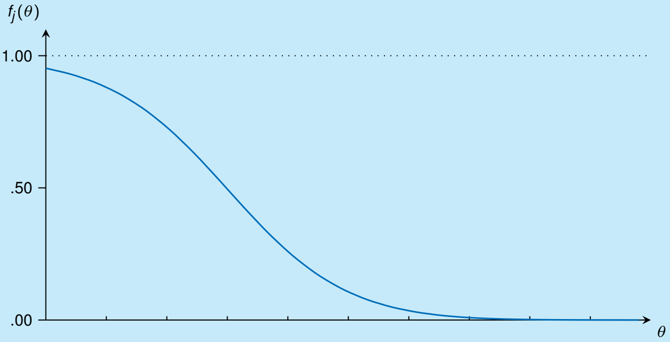
$$f_{i1}(\theta) = \frac{\exp\left(1\theta - \sum_{h=1}^{1} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría *j* del ítem *i* en el PCM se da por:

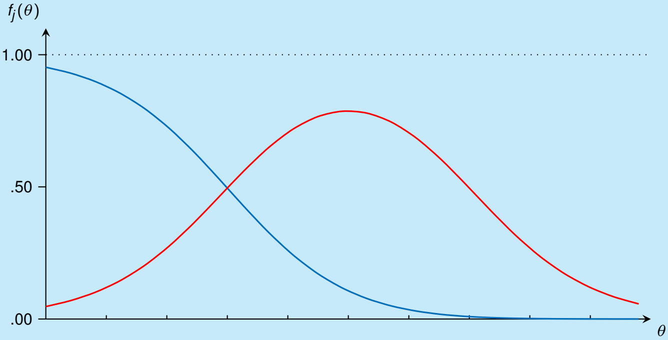
$$f_{i1}(\theta) = \frac{\exp(\theta - \beta_{i1})}{1 + \exp[\theta - \beta_{i1}] + \exp[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

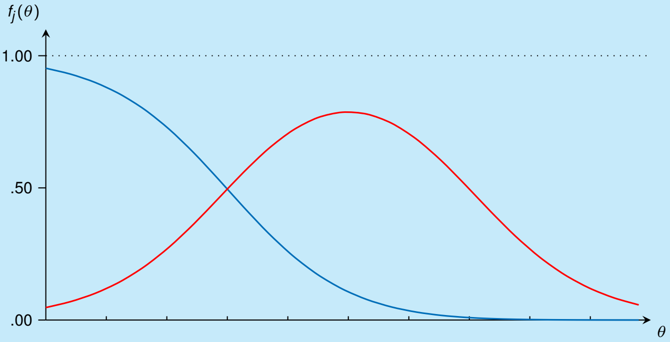
$$f_{i1}(\theta) = \frac{\exp(\theta - \beta_{i1})}{1 + \exp[\theta - \beta_{i1}] + \exp[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

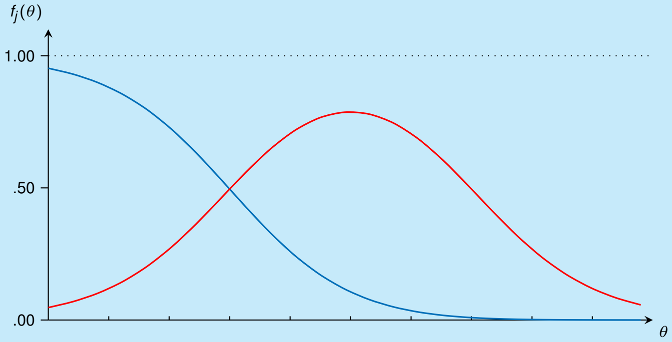
$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - \sum_{h=1}^{2} \beta_{ih}\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

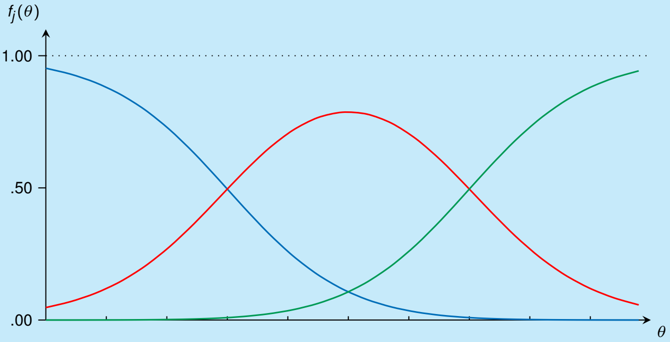
$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría j del ítem i en el PCM se da por:

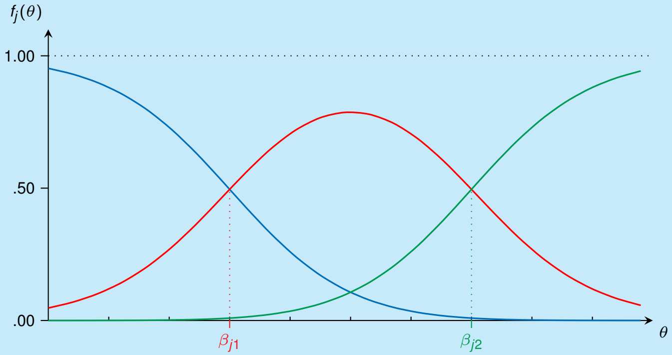
$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



El Modelo de Crédito Parcial (PCM)

Ejemplo: Para un ítem de tres categorías de respuesta, la curva característica de la categoría *j* del ítem *i* en el PCM se da por:

$$f_{i2}(\theta) = \frac{\exp\left(2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right)}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{i1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{i1} + \beta_{i2})\right]}$$



Índice:

Índice: