Soluciones a la hoja de ejercicios 4

Ejercicio 1

La función de densidad puede obtenerse con el siguiente código.

```
f <- function(x,a){a/x^{a+1}}
x <- seq(1, 3, 0.001)
f1 <- f(x,a=1)
f2 <- f(x,a=2)
f3 <- f(x,a=3)
plot(x, f1, col="darkolivegreen4", lwd=1.5, type="l", xlab="X", ylab="f(x)")
lines(x,f2, col="firebrick")
lines(x,f3, col="navyblue")
```

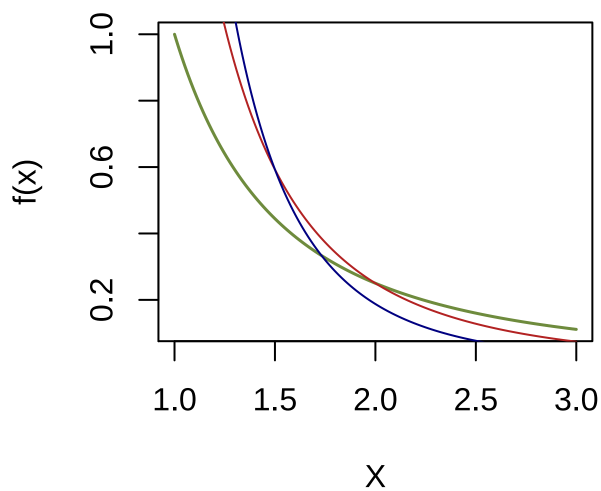

Figura 1: Funciones de densidad Pareto

El valor esperado es el resultado de la integral

$$E(X) = \int_1^{\infty} \frac{x\alpha}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

Resolvemos la integral

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{x\alpha}{x^{\alpha+1}}\,dx &= \int_1^\infty \alpha x^{-\alpha}\,dx \\
&= \left.\frac{\alpha x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^\infty \\
&= 0 - \frac{\alpha}{-\alpha+1} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

La función de distribución es

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,dt \\
&= \left.-t^{-\alpha}\right|_1^x \\
&= 1 - x^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

Si el parámetro α vale 2, la probabilidad del suceso $X > 2$ es

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = 2^{-2} = 0,25$$

Utilizando integración numérica en R, el cálculo es

```r
f <- function(x){2/x^3}
Pr <- integrate(f, 2, Inf)
cat(sprintf("P(X > 2) = %4.2f", Pr$value))
```

```
## P(X > 2) = 0.25
```

Ejercicio 2

Para responder a esta cuestión tenemos que utilizar el teorema del límite central. El valor esperado de la distribución gamma es α/β, y su varianza es α/β^2. Entonces, con los valores indicados en el enunciado el valor esperado es 1 en ambos casos, y la varianza vale 1/2 y 1/3.

Calculamos Z con la fórmula:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$$

En todos los casos se obtiene el mismo resultado porque $\mu = 1$:

$$
\begin{aligned}
&\text{gamma(2,2)},\ n = 25, \quad Z = \frac{5(1-1)}{1/2} = 0,\ P(Z > 0) = 0,5 \\
&\text{gamma(2,2)},\ n = 36, \quad Z = \frac{6(1-1)}{1/2} = 0,\ P(Z > 0) = 0,5 \\
&\text{gamma(3,3)},\ n = 25, \quad Z = \frac{5(1-1)}{1/3} = 0,\ P(Z > 0) = 0,5 \\
&\text{gamma(3,3)},\ n = 36, \quad Z = \frac{6(1-1)}{1/3} = 0,\ P(Z > 0) = 0,5
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

La simulación puede realizarse con el siguiente código

```r
a_True <- 2
b_True <- 2

alpha <- function(m,v) m^2/v
beta <- function(m,v) m/v

n <- 100
muestras <- 200

a_Estimada <- rep(0, muestras)
b_Estimada <- rep(0, muestras)

for(muestra in 1:muestras){
    x <- rgamma(n, a_True, b_True)

    media <- mean(x)
    varianza <- var(x)

    a_Estimada[muestra] <- alpha(media, varianza)
    b_Estimada[muestra] <- beta(media, varianza)
}

media_a <- mean(a_Estimada)
media_b <- mean(b_Estimada)
se_a <- sd(a_Estimada)
se_b <- sd(b_Estimada)
correlacion <- cor(a_Estimada,b_Estimada)

rmse_a <- sqrt(mean((a_Estimada - a_True)^2))
rmse_b <- sqrt(mean((b_Estimada - b_True)^2))

cat(sprintf(
"N = %1.0f, media alpha = %6.4f, Se alpha = %6.4f, RMSE(a) = %6.4f,
media beta = %6.4f, Se beta = %6.4f, RMSE(b) = %6.4f, r = %5.3f",
n, media_a, se_a, rmse_a, media_b, se_b, rmse_b, correlacion))
```

```
## N = 100, media alpha = 2.0679, Se alpha = 0.3653, RMSE(a) = 0.3707,
## media beta = 2.0684, Se beta = 0.3849, RMSE(b) = 0.3899, r = 0.931
```

```r
par(mfrow=c(1,3))
hist(a_Estimada, main="alpha")
hist(b_Estimada, main="beta")
plot(a_Estimada, b_Estimada)
```

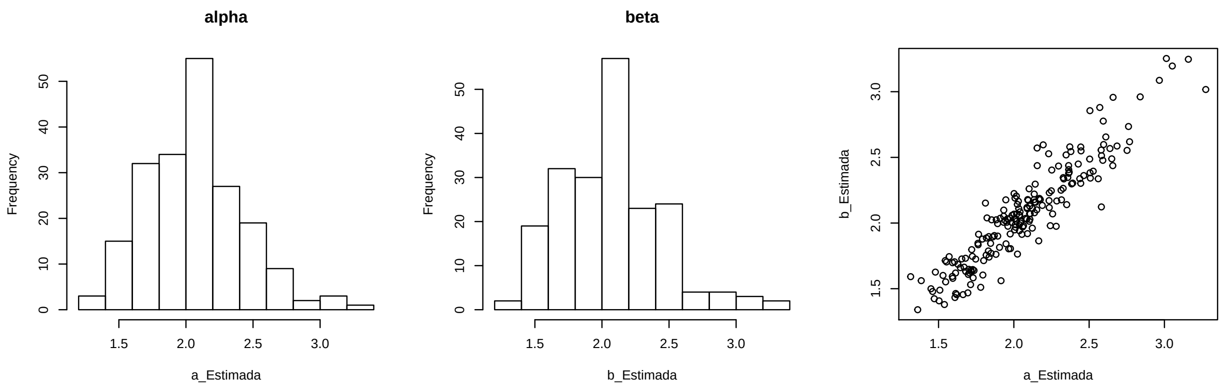

Figura 2: Recuperación de parámetros