Introducción a Modelos Psicométricos

Clase 8

Introducción a la Teoría de Respuesta al Ítem

Iwin Leenen y Ramsés Vázquez-Lira

Facultad de Psicología, UNAM

Programa de Licenciatura y Posgrado en Psicología
Semestre 2019–1

Índice

Índice

Índice

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón **?**
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón **?**
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón **?**
  - Intervalo **?**
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón **?**
  - Intervalo **?**
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón **?**
  - Intervalo **?**
  - Ordinal **?**
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la "puntuación verdadera"?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón **?**
  - Intervalo **?**
  - Ordinal **?**
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la "puntuación verdadera"?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón **?**
  - Intervalo **?**
  - Ordinal **?**
  - Nominal **?**

Índice

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

$\Longrightarrow$ La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

$\Longrightarrow$ La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

$\Longrightarrow$ La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

$\Longrightarrow$ La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

$\Longrightarrow$ La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Se puede considerar el mismo problema al nivel de un grupo o población:

Ejemplo

Un profesor considera las calificaciones en su examen de Psicometría en dos años seguidos: enero de 2017 y enero de 2018.

Observa que el promedio de las calificaciones de los estudiantes en 2018 es más alto que en 2017. En específico:

$$\overline{X}_{2017} = 8.1$$
$$\overline{X}_{2018} = 8.7$$

Desde la TCT no se puede saber cuánto de la diferencia se debe a

1. la diferencia en nivel entre los dos grupos de estudiantes
2. la diferencia en grado de dificultad de las dos variantes del examen

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Se puede considerar el mismo problema al nivel de un grupo o población:

Ejemplo

Un profesor considera las calificaciones en su examen de Psicometría en dos años seguidos: enero de 2017 y enero de 2018.

Observa que el promedio de las calificaciones de los estudiantes en 2018 es más alto que en 2017. En específico:

$$\overline{X}_{2017} = 8.1$$

$$\overline{X}_{2018} = 8.7$$

Desde la TCT no se puede saber cuánto de la diferencia se debe a

1. la diferencia en nivel entre los dos grupos de estudiantes
2. la diferencia en grado de dificultad de las dos variantes del examen

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Consideremos el mismo problema desde otro ángulo:

Ejemplo

Una de las preguntas (digamos, pregunta *i*) en el examen de 2017 se repitió en el examen de 2018. Se obtuvieron los siguientes índices para este ítem:

	Grado de dificultad	Correlación item-test (punto-biserial)
2017	$p_i = .57$	$r_{it} = .28$
2018	$p_i = .66$	$r_{it} = .17$

Aunque se trata de la misma pregunta, los índices son diferentes para ambos grupos.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Consideremos el mismo problema desde otro ángulo:

Ejemplo

Una de las preguntas (digamos, pregunta i) en el examen de 2017 se repitió en el examen de 2018. Se obtuvieron los siguientes índices para este ítem:

	Grado de dificultad	Correlación item-test (punto-biserial)
2017	$p_i = .57$	$r_{it} = .28$
2018	$p_i = .66$	$r_{it} = .17$

Aunque se trata de la misma pregunta, los índices son diferentes para ambos grupos.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Lo mismo aplica a índices globales del examen, como el coeficiente de confiabilidad o el error estándar de medición.

Ejemplo

Los coeficientes α de Cronbach, para ambas variantes del examen fueron:

$$\alpha_{2017} = .94$$
$$\alpha_{2018} = .91$$

En la TCT, el mismo test aplicado a diferentes muestras puede tener una confiabilidad diferente.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Lo mismo aplica a índices globales del examen, como el coeficiente de confiabilidad o el error estándar de medición.

Ejemplo

Los coeficientes α de Cronbach, para ambas variantes del examen fueron:

$$\alpha_{2017} = .94$$
$$\alpha_{2018} = .91$$

En la TCT, el mismo test aplicado a diferentes muestras puede tener una confiabilidad diferente.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Conclusión

- En la TCT:
  - los parámetros del test (e ítems) dependen de la muestra de personas
  - los parámetros de las personas dependen del test concreto (la muestra de ítems que se utiliza en el test).

- Estrictamente hablando, no son correctas afirmaciones del tipo:
  - *La* confiabilidad de este test/examen es 0.90.
  - *El* índice de dificultad de este ítem es 0.60.
  - . . .

  Sino, se debería decir:
  - La confiabilidad de este test/examen **dentro de este grupo de personas** es 0.90.
  - El índice de dificultad de este ítem **dentro de este grupo de personas** es 0.60.
  - . . .

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Conclusión

- En la TCT:
  - los parámetros del test (e ítems) dependen de la muestra de personas
  - los parámetros de las personas dependen del test concreto (la muestra de ítems que se utiliza en el test).

- Estrictamente hablando, no son correctas afirmaciones del tipo:
  - *La* confiabilidad de este test/examen es 0.90.
  - *El* índice de dificultad de este ítem es 0.60.
  - ...

  Sino, se debería decir:
  - La confiabilidad de este test/examen **dentro de este grupo de personas** es 0.90.
  - El índice de dificultad de este ítem **dentro de este grupo de personas** es 0.60.
  - ...

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Conclusión

- En la TCT:
  - los parámetros del test (e ítems) dependen de la muestra de personas
  - los parámetros de las personas dependen del test concreto (la muestra de ítems que se utiliza en el test).

- Estrictamente hablando, no son correctas afirmaciones del tipo:
  - *La* confiabilidad de este test/examen es 0.90.
  - *El* índice de dificultad de este ítem es 0.60.
  - ...

  Sino, se debería decir:
  - La confiabilidad de este test/examen **dentro de este grupo de personas** es 0.90.
  - El índice de dificultad de este ítem **dentro de este grupo de personas** es 0.60.
  - ...

Índice

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

El error estándar de medición en la Teoría Clásica de los Tests

- En teoría, al aplicar el modelo clásico de forma separada a cada persona, se permite:

$$\sigma^2_{E_{\text{Persona 1}}} \neq \sigma^2_{E_{\text{Persona 2}}}$$

En palabras: La varianza del error de medición (entre múltiples aplicaciones del test) puede ser diferente para la persona 1 y la persona 2.

- Sin embargo, al aplicar el modelo clásico a una población de personas, hay solo una aplicación por persona y se considera:

$$\sigma^2_E$$

O bien: la varianza del error de medición entre las diferentes personas de la población.

- Entonces, por definición:

El error estándar de medición ($\sqrt{\sigma^2_E}$) es una característica al nivel del grupo.

Se supone igual para todas las personas del grupo.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

El error estándar de medición en la Teoría Clásica de los Tests

- En teoría, al aplicar el modelo clásico de forma separada a cada persona, se permite:

$$\sigma^2_{E_{\text{Persona 1}}} \neq \sigma^2_{E_{\text{Persona 2}}}$$

  En palabras: La varianza del error de medición (entre múltiples aplicaciones del test) puede ser diferente para la persona 1 y la persona 2.

- Sin embargo, al aplicar el modelo clásico a una población de personas, hay solo una aplicación por persona y se considera:

$$\sigma^2_E$$

  O bien: la varianza del error de medición entre las diferentes personas de la población.

- Entonces, por definición:
  El error estándar de medición ($\sqrt{\sigma^2_E}$) es una característica al nivel del grupo.

  Se supone igual para todas las personas del grupo.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

El error estándar de medición en la Teoría Clásica de los Tests

- En teoría, al aplicar el modelo clásico de forma separada a cada persona, se permite:

$$\sigma^2_{E_{\text{Persona 1}}} \neq \sigma^2_{E_{\text{Persona 2}}}$$

  En palabras: La varianza del error de medición (entre múltiples aplicaciones del test) puede ser diferente para la persona 1 y la persona 2.

- Sin embargo, al aplicar el modelo clásico a una población de personas, hay solo una aplicación por persona y se considera:

$$\sigma^2_E$$

  O bien: la varianza del error de medición entre las diferentes personas de la población.

- Entonces, por definición:

  El error estándar de medición ($\sqrt{\sigma^2_E}$) es una característica al nivel del grupo.

  Se supone igual para todas las personas del grupo.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

Nota: El error estándar de medición no es el mismo para todas las personas

- No obstante:
  En aplicaciones prácticas, el supuesto de un error estándar uniforme generalmente no se cumple.

  En general, la medición es más precisa (es decir, la varianza del error es más pequeña) para personas con puntuaciones promedio.

- En el caso de un examen, donde la decisión principal se sitúa en la aprobación/reprobación del estudiante, es más importante medir con precisión a personas cercanas a la linea divisora.

  La linea divisora no necesariamente está cerca al promedio de los estudiantes.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

Nota: El error estándar de medición no es el mismo para todas las personas

- No obstante:
  En aplicaciones prácticas, el supuesto de un error estándar uniforme generalmente no se cumple.

  En general, la medición es más precisa (es decir, la varianza del error es más pequeña) para personas con puntuaciones promedio.

- En el caso de un examen, donde la decisión principal se sitúa en la aprobación/reprobación del estudiante, es más importante medir con precisión a personas cercanas a la linea divisora.

  La linea divisora no necesariamente está cerca al promedio de los estudiantes.

Índice

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Evaluación de los supuestos del modelo

Bondad de ajuste en la Teoría Clásica de los Tests

Abad y colegas (2011, p. 125):

> *[En la TCT] no se dispone de indicadores de bondad de ajuste que nos informen del grado en que el modelo se ajusta a los datos.*

Sean críticos cuando alguien opina que:

> "los supuestos de la TCT son débiles y fácilmente se ajustan a los datos".

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Evaluación de los supuestos del modelo

Bondad de ajuste en la Teoría Clásica de los Tests

Abad y colegas (2011, p. 125):

> *[En la TCT] no se dispone de indicadores de bondad de ajuste que nos informen del grado en que el modelo se ajusta a los datos.*

Sean críticos cuando alguien opina que:

“los supuestos de la TCT son débiles y fácilmente se ajustan a los datos”.

Índice

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el “comportamiento” de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo I
Respuesta A	A	$\rightsquigarrow$	Prob. (A)
Respuesta B	B	$\rightsquigarrow$	Prob. (B)
Respuesta C	C	$\rightsquigarrow$	Prob. (C)
Respuesta D	D	$\rightsquigarrow$	Prob. (D)
Sin responder	O	$\rightsquigarrow$	Prob. (O)

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo II
Respuesta A	Correcto (1)	$\rightsquigarrow$	Prob. (1)
Respuesta B			
Respuesta C			
Respuesta D	Incorrecto (0)	$\rightsquigarrow$	Prob. (0)
Sin responder			

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona p, al contestar el ítem i, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{pi} = k) \;=\; f(\text{parámetro(s) de la persona } p, \text{parámetro(s) del ítem } i)$$

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona p, al contestar el ítem i, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{pi} = k) \;=\; f(\text{parámetro(s) de la persona } p, \text{parámetro(s) del ítem } i)$$

Índice

Índice

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona *p* se le puede asignar un parámetro θ_p;
- A cada ítem *i* se puede asignar un parámetro β_i;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona *p* y cualquier item *i*, se cumple:

  $$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1 \qquad \text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1	$\theta_6 = 13$
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona p se le puede asignar un parámetro θ_p;
- A cada ítem i se puede asignar un parámetro β_i;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

$$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1 \qquad \text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

$\boxed{\theta_7 < \beta_6 \;\rightarrow\; Y_{76} = 0}$

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona p se le puede asignar un parámetro θ_p;
- A cada ítem i se puede asignar un parámetro β_i;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

$$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1 \qquad \text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1	$\theta_6 = 13$
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

$\boxed{\theta_4 \geqslant \beta_2 \rightarrow Y_{42} = 1}$

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona p se le puede asignar un parámetro θ_p;
- A cada ítem i se puede asignar un parámetro β_i;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

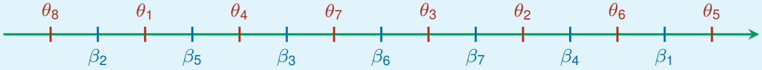
$$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1 \qquad \text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1	$\theta_6 = 13$
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

Cada estudiante y cada pregunta se puede posicionar en un continuo, tal que:

- el estudiante da la respuesta correcta a las preguntas a su lado izquierdo
- el estudiante da la respuesta incorrecta a las preguntas a su lado derecho



Índice

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

$\beta_3 > \theta_4 \geqslant \beta_4$

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

$\beta_3 \leqslant \theta_3 < \beta_4$

$\beta_3 > \theta_4 \geqslant \beta_4$

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

$\boxed{\beta_3 \leqslant \theta_3 < \beta_4}$

$\boxed{\beta_3 > \theta_4 \geqslant \beta_4}$

Para datos reales, el modelo de Guttman nunca se ajusta.

El modelo de Guttman es muy/demasiado exigente para los datos.

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

Para datos reales, el modelo de Guttman nunca se ajusta.

El modelo de Guttman es muy/demasiado exigente para los datos.

Para que el modelo se ajusta a los datos, debe ser posible reordenar filas y columnas de la matriz de datos tal que exhiba un “triangulo” de 1s.

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	2	5	3	6	7	4	1
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0
Estudiante 1	1	0	0	0	0	0	0
Estudiante 4	1	1	0	0	0	0	0
Estudiante 7	1	1	1	0	0	0	0
Estudiante 3	1	1	1	1	0	0	0
Estudiante 2	1	1	1	1	1	0	0
Estudiante 6	1	1	1	1	1	1	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1

Para datos reales, el modelo de Guttman nunca se ajusta.

El modelo de Guttman es muy/demasiado exigente para los datos.

Para que el modelo se ajusta a los datos, debe ser posible reordenar filas y columnas de la matriz de datos tal que exhibe un “triangulo” de 1s.

Índice

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

El modelo determinístico de Guttman

- En el modelo de Guttman:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

  $$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1,$$
  $$\text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0.$$

- El modelo de Guttman es determinístico.
  (A partir de los parámetros del modelo, se sabe con exactitud si la persona acierta o no el ítem.)

- Sin embargo, podemos escribir el modelo de Guttman utilizando el concepto de probabilidad:

  $$\Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_p \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta_p < \beta_i \end{cases}$$

  Nota: Evidentemente, se cumple que

  $$\Pr(Y_{pi} = 0|\theta_p, \beta_i) = 1 - \Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

El modelo determinístico de Guttman

- En el modelo de Guttman:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

$$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1,$$
$$\text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0.$$

- El modelo de Guttman es determinístico.
  (A partir de los parámetros del modelo, se sabe con exactitud si la persona acierta o no el ítem.)

- Sin embargo, podemos escribir el modelo de Guttman utilizando el concepto de probabilidad:

$$\Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_p \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta_p < \beta_i \end{cases}$$

  Nota: Evidentemente, se cumple que

$$\Pr(Y_{pi} = 0|\theta_p, \beta_i) = 1 - \Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

El modelo determinístico de Guttman

- En el modelo de Guttman:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

$$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1,$$
$$\text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0.$$

- El modelo de Guttman es determinístico.
  (A partir de los parámetros del modelo, se sabe con exactitud si la persona acierta o no el ítem.)

- Sin embargo, podemos escribir el modelo de Guttman utilizando el concepto de probabilidad:

$$\Pr(Y_{pi} = 1 | \theta_p, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_p \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta_p < \beta_i \end{cases}$$

  Nota: Evidentemente, se cumple que

$$\Pr(Y_{pi} = 0 | \theta_p, \beta_i) = 1 - \Pr(Y_{pi} = 1 | \theta_p, \beta_i)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

El modelo determinístico de Guttman

- En el modelo de Guttman:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

$$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1,$$
$$\text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0.$$

- El modelo de Guttman es determinístico.
  (A partir de los parámetros del modelo, se sabe con exactitud si la persona acierta o no el ítem.)

- Sin embargo, podemos escribir el modelo de Guttman utilizando el concepto de probabilidad:

$$\Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_p \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta_p < \beta_i \end{cases}$$

  Nota: Evidentemente, se cumple que

$$\Pr(Y_{pi} = 0|\theta_p, \beta_i) = 1 - \Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

El modelo determinístico de Guttman

- En el modelo de Guttman:

  Para cualquier persona p y cualquier item i, se cumple:

$$\text{Si } \theta_p \geqslant \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 1,$$
$$\text{Si } \theta_p < \beta_i \text{ entonces } Y_{pi} = 0.$$

- El modelo de Guttman es determinístico.
  (A partir de los parámetros del modelo, se sabe con exactitud si la persona acierta o no el ítem.)

- Sin embargo, podemos escribir el modelo de Guttman utilizando el concepto de probabilidad:

$$\Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_p \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta_p < \beta_i \end{cases}$$

  Nota: Evidentemente, se cumple que

$$\Pr(Y_{pi} = 0|\theta_p, \beta_i) = 1 - \Pr(Y_{pi} = 1|\theta_p, \beta_i)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

La curva característica de un ítem en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_i(\theta) \equiv \Pr(Y_i = 1|\theta, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_i \end{cases}$$

La curva característica del ítem (CCI)

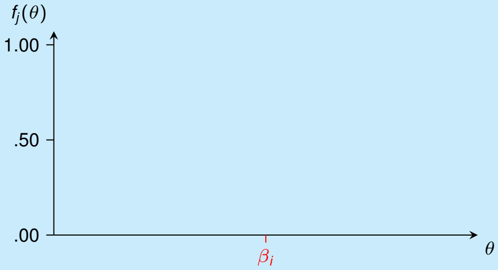
La CCI en el modelo de Guttman

La curva característica de un ítem en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_i(\theta) \equiv \Pr(Y_i = 1|\theta, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_i \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem i en función del parámetro de la persona?



La curva característica del ítem (CCI)

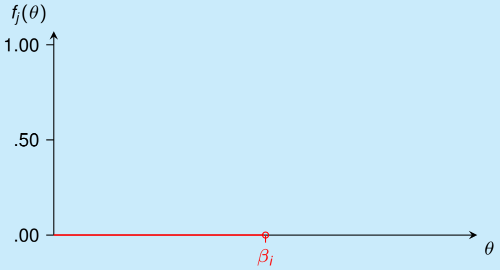
La CCI en el modelo de Guttman

La curva característica de un ítem en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_i(\theta) \equiv \Pr(Y_i = 1|\theta, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_i \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem i en función del parámetro de la persona?



La curva característica del ítem (CCI)

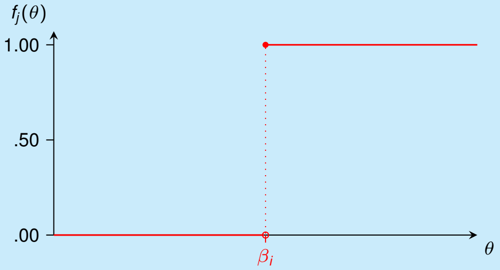
La CCI en el modelo de Guttman

La curva característica de un ítem en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_i(\theta) \equiv \Pr(Y_i = 1|\theta, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_i \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem i en función del parámetro de la persona?



La curva característica del ítem (CCI)

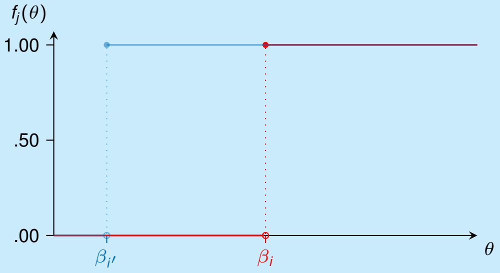
La CCI en el modelo de Guttman

La curva característica de un ítem en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_i(\theta) \equiv \Pr(Y_i = 1|\theta, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_i \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem *i* en función del parámetro de la persona?



La curva característica del ítem (CCI)

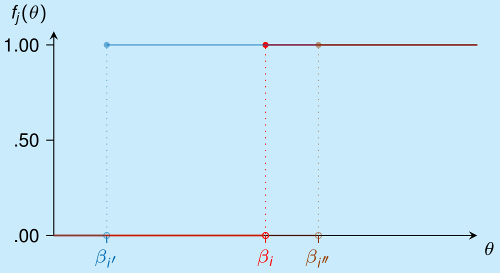
La CCI en el modelo de Guttman

La curva característica de un ítem en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_i(\theta) \equiv \Pr(Y_i = 1|\theta, \beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_i \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem i en función del parámetro de la persona?



Índice

La curva característica del ítem (CCI)

Definición

La curva característica del ítem en un modelo TRI es:

> *La función que describe cómo la probabilidad de dar una respuesta en cierta categoría del ítem varía en función del parámetro de la persona.*

Nota: La curva característica en un modelo para ítems dicotómicos

- Para ítems dicotómicos, generalmente la curva característica del ítem i da la probabilidad de responder en la categoría 1. Se anota como: $f_i(\theta)$.
- Sin embargo, se puede derivar directamente la curva característica que corresponde a la categoría 0.
  (Sería el complemento de la curva que corresponde a la categoría 1.)