Introducción a Modelos Psicométricos

Clase 5-6

La Teoría Clásica de los Tests: Aplicaciones

Iwin Leenen y Ramsés Vázquez-Lira

Facultad de Psicología, UNAM

Programa de Licenciatura y Posgrado en Psicología
Semestre 2019–1

Índice

Índice

Índice

La Teoría Clásica de los Tests para una Persona

$$\boxed{X_{ih} = T_i + E_{ih}}$$

Persona i

h	X_{ih}	=	T_i	+	E_{ih}
1	39		37		$+2$
2	36		37		-1
3	34		37		-3
4	37		37		0
5	38		37		$+1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
∞					
$\mathscr{E}$	37		37		0
σ^2	3		0		3

$$\boxed{X_{i'h} = T_{i'} + E_{i'h}}$$

Persona i'

h	$X_{i'h}$	=	$T_{i'}$	+	$E_{i'h}$
1	19		24		-5
2	23		24		-1
3	31		24		$+7$
4	26		24		$+2$
5	20		24		-4
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
∞					
$\mathscr{E}$	24		24		0
σ^2	10		0		10

Estimar la puntuación verdadera

La puntuación observada como estimador de la puntuación verdadera

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una persona

- De los supuestos de la teoría clasica de los tests, sigue que:

$$\mathscr{E}(X_i) = T_i$$

- A partir de este resultado es natural proponer X_i como estimador de T_i:

$$\widehat{T}_i \longleftarrow X_i$$

- Entonces, se puede derivar que:
  - X_i es un estimador insesgado:

$$\mathscr{E}(X_i - T_i) = 0$$

  - La eficiencia del estimador X_i es

$$\mathscr{E}\left[(X_i - T_i)^2\right]$$

Estimar la puntuación verdadera

La puntuación observada como estimador de la puntuación verdadera

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una persona

- De los supuestos de la teoría clasica de los tests, sigue que:

$$\mathscr{E}(X_i) = T_i$$

- A partir de este resultado es natural proponer X_i como estimador de T_i:

$$\widehat{T}_i \longleftarrow X_i$$

- Entonces, se puede derivar que:
  - X_i es un estimador insesgado:

$$\mathscr{E}(X_i - T_i) = 0$$

  - La eficiencia del estimador X_i es

$$\mathscr{E}\left[(X_i - T_i)^2\right]$$

Estimar la puntuación verdadera

La puntuación observada como estimador de la puntuación verdadera

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una persona

- De los supuestos de la teoría clasica de los tests, sigue que:

$$\mathscr{E}(X_i) = T_i$$

- A partir de este resultado es natural proponer X_i como estimador de T_i:

$$\widehat{T}_i \longleftarrow X_i$$

- Entonces, se puede derivar que:
  - X_i es un estimador insesgado:

$$\mathscr{E}(X_i - T_i) = 0$$

  - La eficiencia del estimador X_i es

$$\mathscr{E}\left[(X_i - T_i)^2\right]$$

Estimar la puntuación verdadera

La puntuación observada como estimador de la puntuación verdadera

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una persona

- De los supuestos de la teoría clasica de los tests, sigue que:

$$\mathscr{E}(X_i) = T_i$$

- A partir de este resultado es natural proponer X_i como estimador de T_i:

$$\widehat{T}_i \longleftarrow X_i$$

- Entonces, se puede derivar que:
  - X_i es un estimador insesgado:

$$\mathscr{E}(X_i - T_i) = 0$$

  - La eficiencia del estimador X_i es

$$\mathscr{E}\left[(X_i - T_i)^2\right]$$

Estimar la puntuación verdadera

La puntuación observada como estimador de la puntuación verdadera

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una persona

- De los supuestos de la teoría clasica de los tests, sigue que:

$$\mathscr{E}(X_i) = T_i$$

- A partir de este resultado es natural proponer X_i como estimador de T_i:

$$\widehat{T}_i \longleftarrow X_i$$

- Entonces, se puede derivar que:
  - X_i es un estimador insesgado:

$$\mathscr{E}(X_i - T_i) = 0$$

  - La eficiencia del estimador X_i es

$$\mathscr{E}\left[(X_i - T_i)^2\right] = \sigma^2_{X_i}$$

Estimar la puntuación verdadera

La puntuación observada como estimador de la puntuación verdadera

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una persona

- De los supuestos de la teoría clasica de los tests, sigue que:

$$\mathscr{E}(X_i) = T_i$$

- A partir de este resultado es natural proponer X_i como estimador de T_i:

$$\widehat{T}_i \longleftarrow X_i$$

- Entonces, se puede derivar que:
  - X_i es un estimador insesgado:

$$\mathscr{E}(X_i - T_i) = 0$$

  - La eficiencia del estimador X_i es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}\left[(X_i - T_i)^2\right] &= \sigma^2_{X_i} \\ &= \sigma^2_{E_i} \end{aligned}$$

Índice

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- En un modelo de regresión lineal simple, se estima una variable criterio (Y) con base en una variable predictora (X), a través de una función lineal:

$$\widehat{Y} = aX + b$$

donde a y b son constantes y se llaman los *coeficientes de regresión*.

- Un objetivo primario de un análisis de regresión es obtener valores "óptimos" para las constantes a y b.

- Utilicemos el criterio de mínimos cuadrados para definir "óptimo":
Esto quiere decir que se busquen los valores para a y b que minimicen:

$$\mathscr{E}\left[(\widehat{Y} - Y)^2\right]$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- En un modelo de regresión lineal simple, se estima una variable criterio (Y) con base en una variable predictora (X), a través de una función lineal:

$$\widehat{Y} = aX + b$$

donde a y b son constantes y se llaman los *coeficientes de regresión*.

- Un objetivo primario de un análisis de regresión es obtener valores "óptimos" para las constantes a y b.

- Utilicemos el criterio de mínimos cuadrados para definir "óptimo":
Esto quiere decir que se busquen los valores para a y b que minimicen:

$$\mathscr{E}\left[(\widehat{Y} - Y)^2\right]$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- En un modelo de regresión lineal simple, se estima una variable criterio (Y) con base en una variable predictora (X), a través de una función lineal:

$$\widehat{Y} = aX + b$$

donde a y b son constantes y se llaman los *coeficientes de regresión*.

- Un objetivo primario de un análisis de regresión es obtener valores "óptimos" para las constantes a y b.

- Utilicemos el criterio de mínimos cuadrados para definir "óptimo":
Esto quiere decir que se busquen los valores para a y b que minimicen:

$$\mathscr{E}\left[(\widehat{Y} - Y)^2\right]$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- En un modelo de regresión lineal simple, se estima una variable criterio (Y) con base en una variable predictora (X), a través de una función lineal:

$$\widehat{Y} = aX + b$$

donde a y b son constantes y se llaman los *coeficientes de regresión*.

- Un objetivo primario de un análisis de regresión es obtener valores "óptimos" para las constantes a y b.

- Utilicemos el criterio de mínimos cuadrados para definir "óptimo":
Esto quiere decir que se busquen los valores para a y b que minimicen:

$$\mathscr{E}\left[(\widehat{Y} - Y)^2\right]$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- En un modelo de regresión lineal simple, se estima una variable criterio (Y) con base en una variable predictora (X), a través de una función lineal:

$$\widehat{Y} = aX + b$$

  donde a y b son constantes y se llaman los *coeficientes de regresión*.

- Un objetivo primario de un análisis de regresión es obtener valores “óptimos” para las constantes a y b.

- Utilicemos el criterio de mínimos cuadrados para definir “óptimo”:
  Esto quiere decir que se busquen los valores para a y b que minimicen:

$$\mathscr{E}\left[(\widehat{Y} - Y)^2\right]$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- En un modelo de regresión lineal simple, se estima una variable criterio (Y) con base en una variable predictora (X), a través de una función lineal:

  $$\widehat{Y} = aX + b$$

  donde a y b son constantes y se llaman los *coeficientes de regresión*.

- Un objetivo primario de un análisis de regresión es obtener valores "óptimos" para las constantes a y b.

- Utilicemos el criterio de mínimos cuadrados para definir "óptimo":
  Esto quiere decir que se busquen los valores para a y b que minimicen:

  $$\mathscr{E}\left[(aX + b - Y)^2\right]$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- Con base en el criterio de mínimos cuadrados, se puede derivar matemáticamente las siguientes fórmulas para los valores "optimos" para a y b:

$$a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(Y) - a\mathscr{E}(X)$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

- Con base en el criterio de mínimos cuadrados, se puede derivar matemáticamente las siguientes fórmulas para los valores "optimos" para *a* y *b*:

$$a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(Y) - a\mathscr{E}(X)$$

Regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple *in a nutshell*

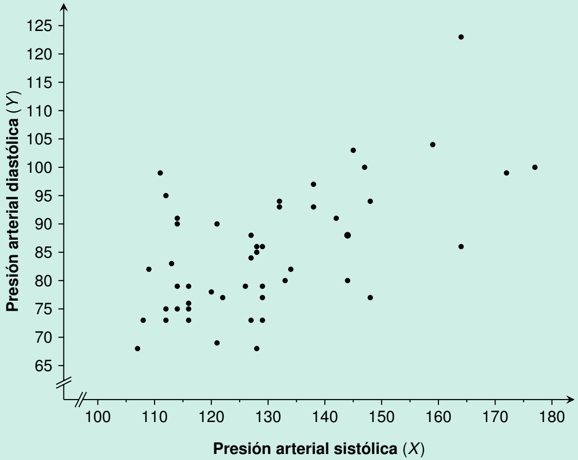
- Con base en el criterio de mínimos cuadrados, se puede derivar matemáticamente las siguientes fórmulas para los valores "optimos" para a y b:

$$a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(Y) - a\mathscr{E}(X)$$

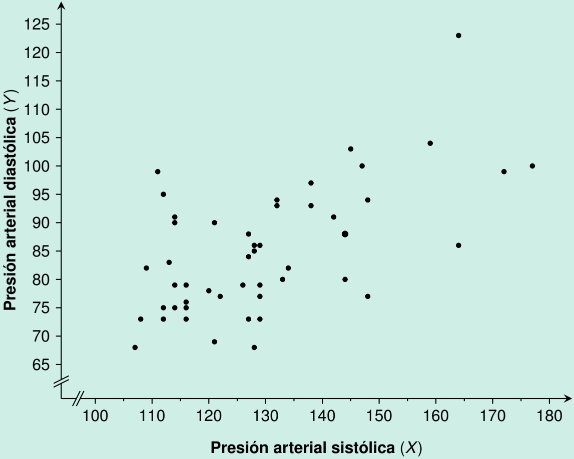
Regresión lineal simple

Regresión lineal simple: Ejemplo (con datos empíricos)



Regresión lineal simple

Regresión lineal simple: Ejemplo (con datos empíricos)



Estadísticos para (X, Y)

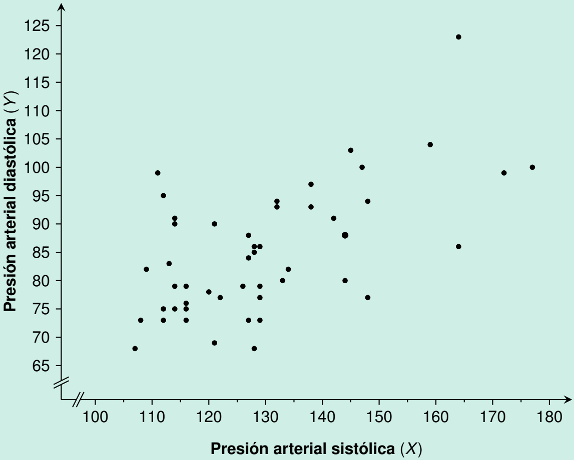
$\overline{x} = 130$ $\qquad \overline{y} = 85$

$s_x = 17$ $\qquad s_y = 11$

$s_{XY} = 112.2$

Regresión lineal simple

Regresión lineal simple: Ejemplo (con datos empíricos)



Estadísticos para (X, Y)

$\bar{x} = 130$ $\bar{y} = 85$

$s_x = 17$ $s_y = 11$

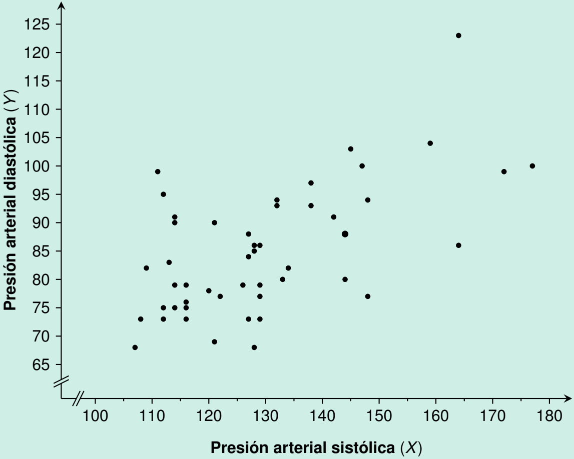
$s_{XY} = 112.2$

Ecuación de regresión

$$a = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{112.2}{17^2} = 0.388$$

Regresión lineal simple

Regresión lineal simple: Ejemplo (con datos empíricos)



Estadísticos para (X, Y)

$\bar{x} = 130$ $\quad \bar{y} = 85$

$s_x = 17$ $\quad s_y = 11$

$s_{XY} = 112.2$

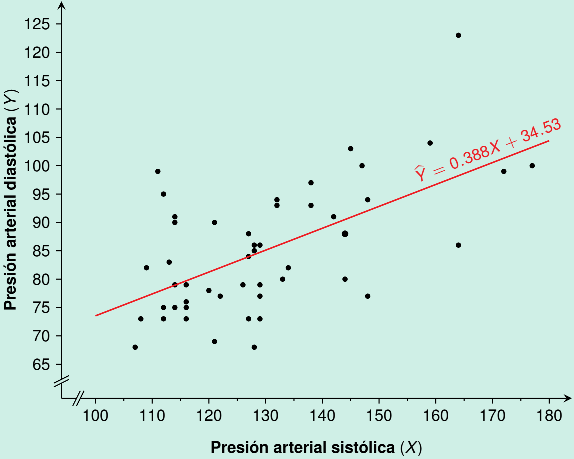
Ecuación de regresión

$$a = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{112.2}{17^2} = 0.388$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 85 - 0.388 \times 130 = 34.53$$

Regresión lineal simple

Regresión lineal simple: Ejemplo (con datos empíricos)



Estadísticos para (X, Y)

$\overline{x} = 130 \qquad \overline{y} = 85$

$s_x = 17 \qquad s_y = 11$

$s_{XY} = 112.2$

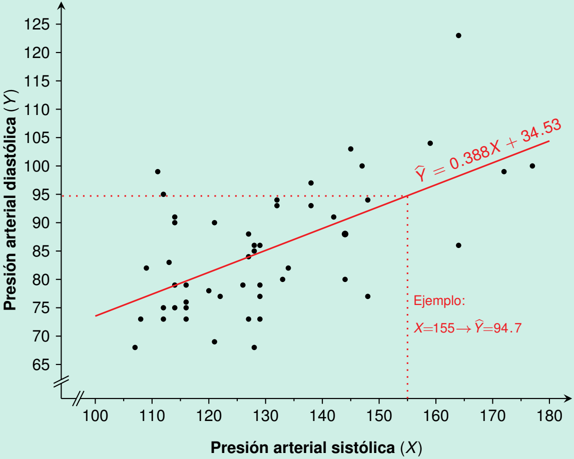
Ecuación de regresión

$$a = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{112.2}{17^2} = 0.388$$

$$b = \overline{y} - a\,\overline{x} = 85 - 0.388 \times 130 = 34.53$$

Regresión lineal simple

Regresión lineal simple: Ejemplo (con datos empíricos)



Estadísticos para (X, Y)

$\overline{x} = 130$ $\quad \overline{y} = 85$

$s_x = 17$ $\quad s_y = 11$

$s_{XY} = 112.2$

Ecuación de regresión

$$a = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{112.2}{17^2} = 0.388$$

$$b = \overline{y} - a\,\overline{x} = 85 - 0.388 \times 130 = 34.53$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_{XT}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.

- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_{XT}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_{XT}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.

- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_{XT}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_{XT}}{\sigma_X^2}$$
$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_{T+E,T}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_{T,T} + \sigma_{E,T}}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.

- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

  $$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \rho_{XX'}$$

$$b = \mathscr{E}(T) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \rho_{XX'}$$

$$b = \mathscr{E}(X) - a\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.
- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

$$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

$$a = \rho_{XX'}$$

$$b = \mathscr{E}(X) - \rho_{XX'}\,\mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Adoptamos el marco del modelo de la teoría clásica de los tests, considerado para una población de personas.

- Aplicamos un modelo de regresión lineal simple, donde
  - la puntuación verdadera T es la variable criterio;
  - la puntuación observada X es la variable predictora.

  Es decir, estimamos la puntuación verdadera T a través de la siguiente función lineal de la puntuación observada X:

  $$\widehat{T} = aX + b.$$

- Los valores óptimos para a y b son:

  $$a = \rho_{XX'}$$

  $$b = \left(1 - \rho_{XX'}\right) \mathscr{E}(X)$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Resumiendo:

$$\widehat{T} = aX + b,$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \rho_{XX'} \\ b &= \left(1 - \rho_{XX'}\right) \mathscr{E}(X) \end{aligned}$$

lo cual resulta en:

$$\widehat{T} = \rho_{XX'} X + (1 - \rho_{XX'}) \mathscr{E}(X)$$

- $\rho_{XX'} < 1 \longrightarrow$ Regresión a la media

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Resumiendo:

$$\widehat{T} = a X + b,$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \rho_{XX'} \\ b &= \left(1 - \rho_{XX'}\right) \mathscr{E}(X) \end{aligned}$$

lo cual resulta en:

$$\widehat{T} = \rho_{XX'} X + (1 - \rho_{XX'}) \mathscr{E}(X)$$

- $\rho_{XX'} < 1 \longrightarrow$ Regresión a la media

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Estimar la puntuación verdadera, considerando la teoría clásica para una población de personas

- Resumiendo:

$$\widehat{T} = aX + b,$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \rho_{XX'} \\ b &= \left(1 - \rho_{XX'}\right) \mathscr{E}(X) \end{aligned}$$

lo cual resulta en:

$$\widehat{T} = \rho_{XX'} X + (1 - \rho_{XX'}) \mathscr{E}(X)$$

- $\rho_{XX'} < 1 \longrightarrow$ Regresión a la media

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Ejemplo

- En el manual de la Escala Wechsler de Inteligencia para Adultos (WAIS) se reporta para el coeficiente intelectual global X:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X) &= 100\\ \sigma_X &= 15\\ \rho_{XX'} &= .87\end{aligned}$$

- Se aplicó la prueba a Juan Pedro y se observó una puntuación de 130. Entonces, ¿cuál sería la estimación de su puntuación verdadera?

- Aplicamos el modelo lineal a la puntuación observada de Juan Pedro (X_i);

$$\begin{aligned}\widehat{T}_i &= \rho_{XX'}\, X_i + (1-\rho_{XX'})\,\mathscr{E}(X)\\ &= .87 \times 130 + (1-.87) \times 100\\ &= 126.1\end{aligned}$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Ejemplo

- En el manual de la Escala Wechsler de Inteligencia para Adultos (WAIS) se reporta para el coeficiente intelectual global X:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X) &= 100\\ \sigma_X &= 15\\ \rho_{XX'} &= .87\end{aligned}$$

- Se aplicó la prueba a Juan Pedro y se observó una puntuación de 130. Entonces, ¿cuál sería la estimación de su puntuación verdadera?

- Aplicamos el modelo lineal a la puntuación observada de Juan Pedro (X_i);

$$\begin{aligned}\widehat{T}_i &= \rho_{XX'}\, X_i + (1 - \rho_{XX'})\,\mathscr{E}(X)\\ &= .87 \times 130 + (1 - .87) \times 100\\ &= 126.1\end{aligned}$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Ejemplo

- En el manual de la Escala Wechsler de Inteligencia para Adultos (WAIS) se reporta para el coeficiente intelectual global X:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(X) &= 100 \\ \sigma_X &= 15 \\ \rho_{XX'} &= .87 \end{aligned}$$

- Se aplicó la prueba a Juan Pedro y se observó una puntuación de 130. Entonces, ¿cuál sería la estimación de su puntuación verdadera?

- Aplicamos el modelo lineal a la puntuación observada de Juan Pedro (X_i);

$$\begin{aligned} \widehat{T}_i &= \rho_{XX'} X_i + (1 - \rho_{XX'})\,\mathscr{E}(X) \\ &= .87 \times 130 + (1 - .87) \times 100 \\ &= 126.1 \end{aligned}$$

Estimar la puntuación verdadera

Utilizando un modelo de regresión lineal

Ejemplo

- En el manual de la Escala Wechsler de Inteligencia para Adultos (WAIS) se reporta para el coeficiente intelectual global X:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(X) &= 100 \\ \sigma_X &= 15 \\ \rho_{XX'} &= .87 \end{aligned}$$

- Se aplicó la prueba a Juan Pedro y se observó una puntuación de 130. Entonces, ¿cuál sería la estimación de su puntuación verdadera?

- Aplicamos el modelo lineal a la puntuación observada de Juan Pedro (X_i);

$$\begin{aligned} \widehat{T}_i &= \rho_{XX'} X_i + (1 - \rho_{XX'}) \mathscr{E}(X) \\ &= .87 \times 130 + (1 - .87) \times 100 \\ &= 126.1 \end{aligned}$$

Índice

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

- En general, es deseable acompañar la estimación puntual con información sobre la precisión de la estimación.
  $\Longrightarrow$ Intervalo de confianza

- Para construir el intervalo de confianza para la puntuación verdadera T_i:
  - consideramos el modelo de la teoría clásica para una persona;
  - se extiende este modelo con un supuesto sobre la distribución exacta de la puntuación error E_i.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

- En general, es deseable acompañar la estimación puntual con información sobre la precisión de la estimación.
  $\Longrightarrow$ Intervalo de confianza

- Para construir el intervalo de confianza para la puntuación verdadera T_i:
  - consideramos el modelo de la teoría clásica para una persona;
  - se extiende este modelo con un supuesto sobre la distribución exacta de la puntuación error E_i.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

- Se aplica un examen de 20 preguntas de opción múltiple sobre psicometría y la puntuación en el examen es el número de preguntas contestadas correctamente.

  $\Rightarrow$ La puntuación observada X_i de la persona i es un número entero entre 0 y 20.

- Supongamos que la puntuación verdadera T_i de la persona i es igual a 15.2.

- ¿Qué implicaciones tiene sobre la puntuación error E_i?

  $\Rightarrow$ Puesto que $X_i = T_i + E_i$, los posibles valores para E_i son:

$$-15.2, -14.2, -13.2, \ldots, -0.2, +0.8, +1.8, \ldots, +4.8.$$

  Un supuesto sobre la distribución de E_i indica cómo se distribuyen estos valores de E_i en el número infinito de "universos paralelos".

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

- Se aplica un examen de 20 preguntas de opción múltiple sobre psicometría y la puntuación en el examen es el número de preguntas contestadas correctamente.

  $\Rightarrow$ La puntuación observada X_i de la persona i es un número entero entre 0 y 20.

- Supongamos que la puntuación verdadera T_i de la persona i es igual a 15.2.

- ¿Qué implicaciones tiene sobre la puntuación error E_i?

  $\Rightarrow$ Puesto que $X_i = T_i + E_i$, los posibles valores para E_i son:

$$-15.2, -14.2, -13.2, \ldots, -0.2, +0.8, +1.8, \ldots, +4.8.$$

  Un supuesto sobre la distribución de E_i indica cómo se distribuyen estos valores de E_i en el número infinito de "universos paralelos".

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

- Se aplica un examen de 20 preguntas de opción múltiple sobre psicometría y la puntuación en el examen es el número de preguntas contestadas correctamente.

  $\Rightarrow$ La puntuación observada X_i de la persona i es un número entero entre 0 y 20.

- Supongamos que la puntuación verdadera T_i de la persona i es igual a 15.2.

- ¿Qué implicaciones tiene sobre la puntuación error E_i?

  $\Rightarrow$ Puesto que $X_i = T_i + E_i$, los posibles valores para E_i son:

  $$-15.2, -14.2, -13.2, \ldots, -0.2, +0.8, +1.8, \ldots, +4.8.$$

  Un supuesto sobre la distribución de E_i indica cómo se distribuyen estos valores de E_i en el número infinito de "universos paralelos".

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

- Se aplica un examen de 20 preguntas de opción múltiple sobre psicometría y la puntuación en el examen es el número de preguntas contestadas correctamente.

  $\Rightarrow$ La puntuación observada X_i de la persona i es un número entero entre 0 y 20.

- Supongamos que la puntuación verdadera T_i de la persona i es igual a 15.2.

- ¿Qué implicaciones tiene sobre la puntuación error E_i?

  $\Rightarrow$ Puesto que $X_i = T_i + E_i$, los posibles valores para E_i son:

$$-15.2, -14.2, -13.2, \ldots, -0.2, +0.8, +1.8, \ldots, +4.8.$$

  Un supuesto sobre la distribución de E_i indica cómo se distribuyen estos valores de E_i en el número infinito de "universos paralelos".

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

- Se aplica un examen de 20 preguntas de opción múltiple sobre psicometría y la puntuación en el examen es el número de preguntas contestadas correctamente.

  $\Rightarrow$ La puntuación observada X_i de la persona i es un número entero entre 0 y 20.

- Supongamos que la puntuación verdadera T_i de la persona i es igual a 15.2.

- ¿Qué implicaciones tiene sobre la puntuación error E_i?

  $\Rightarrow$ Puesto que $X_i = T_i + E_i$, los posibles valores para E_i son:

$$-15.2, -14.2, -13.2, \ldots, -0.2, +0.8, +1.8, \ldots, +4.8.$$

  Un supuesto sobre la distribución de E_i indica cómo se distribuyen estos valores de E_i en el número infinito de "universos paralelos".

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso:

- Se aplica un examen de 20 preguntas de opción múltiple sobre psicometría y la puntuación en el examen es el número de preguntas contestadas correctamente.
  $\Rightarrow$ La puntuación observada X_i de la persona i es un número entero entre 0 y 20.
- Supongamos que la puntuación verdadera T_i de la persona i es igual a 15.2.
- ¿Qué implicaciones tiene sobre la puntuación error E_i?
  $\Rightarrow$ Puesto que $X_i = T_i + E_i$, los posibles valores para E_i son:

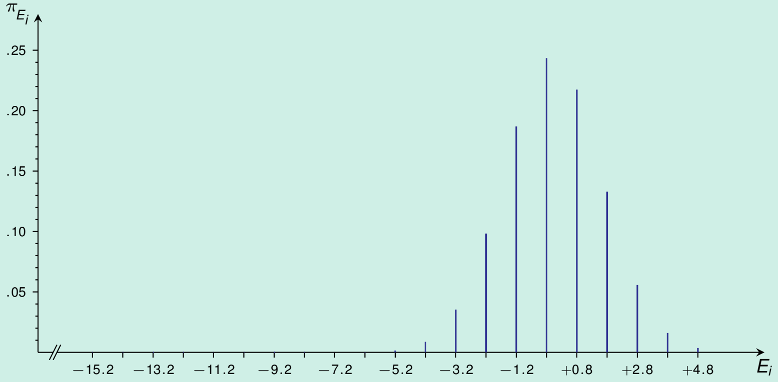
  $$-15.2, -14.2, -13.2, \ldots, -0.2, +0.8, +1.8, \ldots, +4.8.$$

  Un supuesto sobre la distribución de E_i indica cómo se distribuyen estos valores de E_i en el número infinito de "universos paralelos".

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

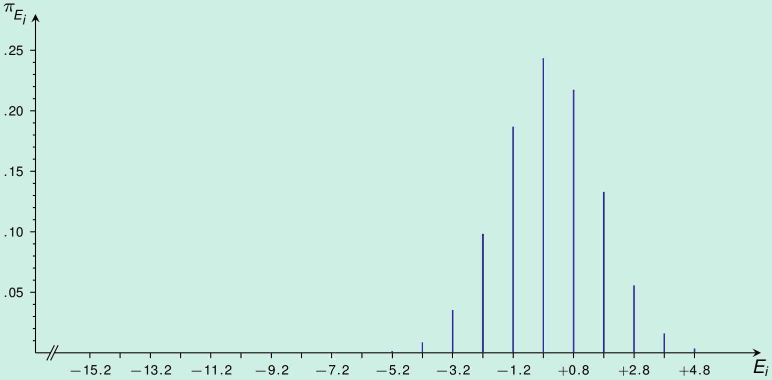
Por ejemplo:



Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Ejemplo

Por ejemplo:



Recuerda que $\mathscr{E}(E_i) = 0$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Sin embargo...

En la práctica, se suele hacer como supuesto adicional sobre E_i, que:

- es una variable continua;
- sigue una distribución normal:

¿Por qué se hace este supuesto (incompatible con la realidad)?

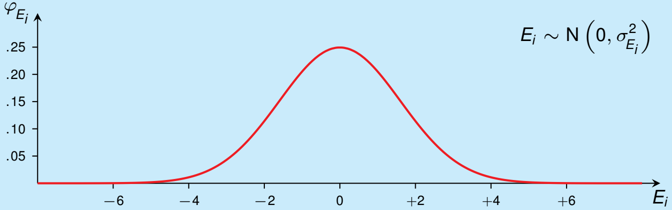
- Es más general;
  Se puede suponer la misma distribución para E_i para cualquier persona i
- Por facilidad;
- Suele resultar en buenas aproximaciones.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Sin embargo...

En la práctica, se suele hacer como supuesto adicional sobre E_i, que:

- es una variable continua;
- sigue una distribución normal:



¿Por qué se hace este supuesto (incompatible con la realidad)?

- Es más general;
  Se puede suponer la misma distribución para E_i para cualquier persona i
- Por facilidad;
- Suele resultar en buenas aproximaciones.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Sin embargo...

En la práctica, se suele hacer como supuesto adicional sobre E_i, que:

- es una variable continua;
- sigue una distribución normal:

¿Por qué se hace este supuesto (incompatible con la realidad)?

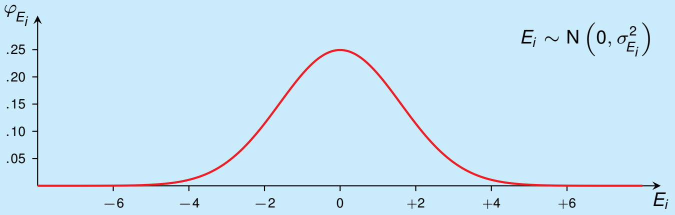
- Es más general;
  Se puede suponer la misma distribución para E_i para cualquier persona i
- Por facilidad;
- Suele resultar en buenas aproximaciones.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Sin embargo...

En la práctica, se suele hacer como supuesto adicional sobre E_i, que:

- es una variable continua;
- sigue una distribución normal:



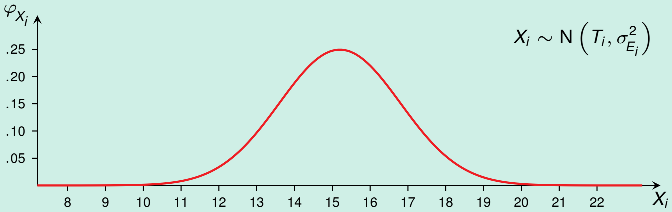
¿Por qué se hace este supuesto (incompatible con la realidad)?

- Es más general;
  Se puede suponer la misma distribución para E_i para cualquier persona i
- Por facilidad;
- Suele resultar en buenas aproximaciones.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:

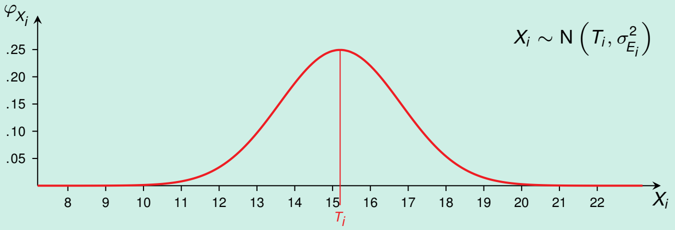


- En general, si $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces:

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:

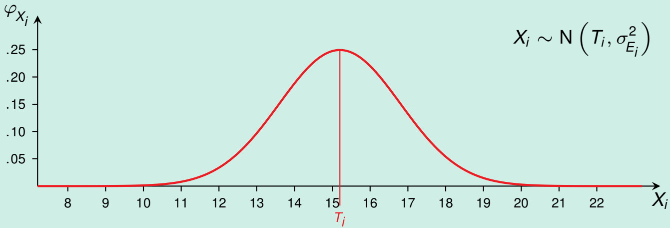


- En general, si $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces:

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



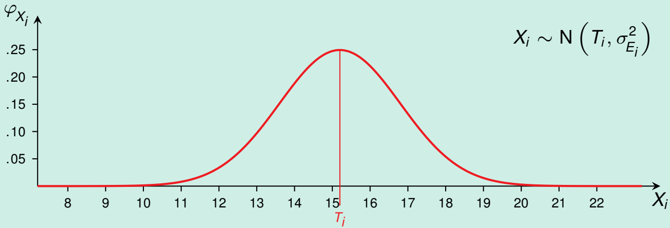
En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

- En general, si $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces:

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

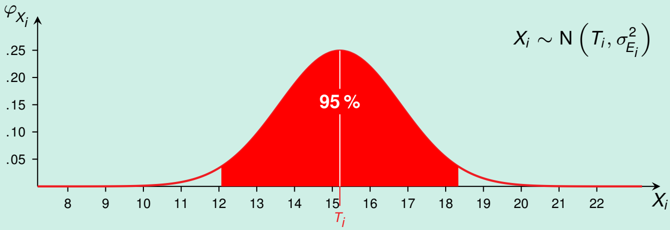
- En general, si $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces:

$$\Pr\left(\mu - 1.96\,\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1.96\,\sigma \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

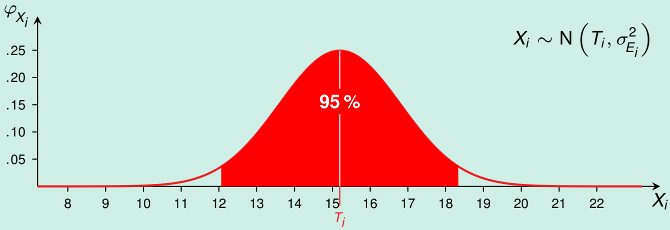
- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

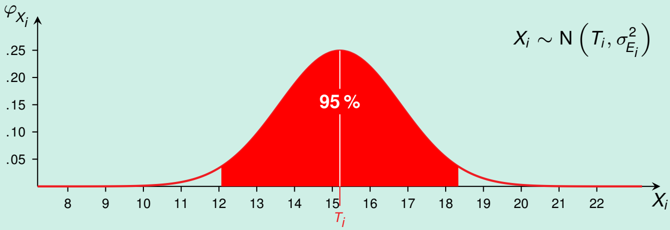
- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

$$\Pr\left(15.2 - 1.96 \times 1.6 \leqslant X_i \leqslant 15.2 + 1.96 \times 1.6 \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

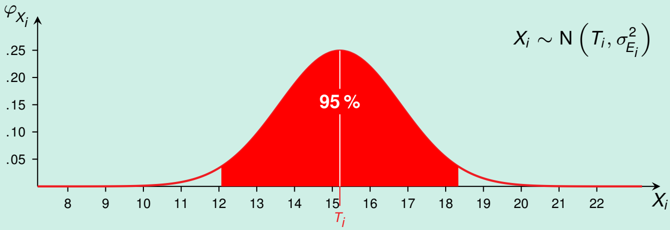
- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

$$\Pr\left(\quad 12.064 \quad \leqslant \quad X_i \quad \leqslant \quad 18.336 \quad \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

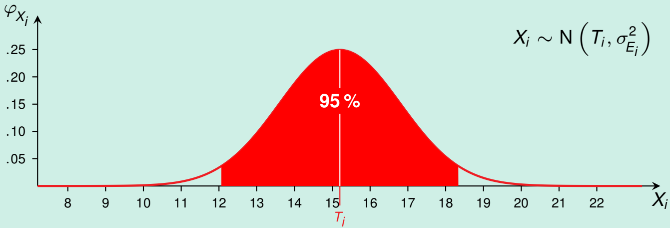
- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

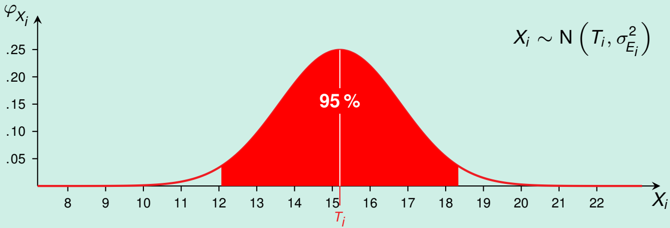
$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} - X_i - T_i \leqslant X_i - X_i - T_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} - X_i - T_i\right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

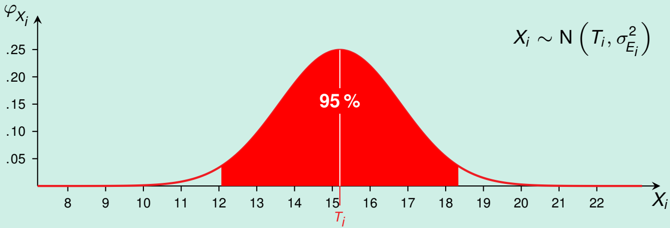
$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow \Pr\left(-1.96\,\sigma_{E_i} - X_i \leqslant T_i \leqslant 1.96\,\sigma_{E_i} - X_i \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

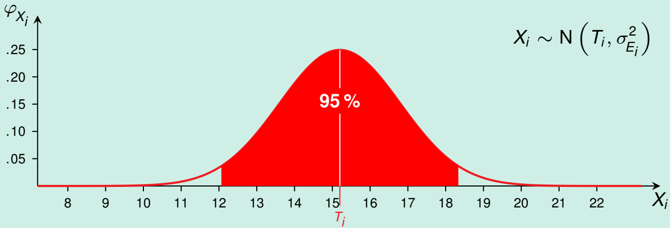
$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

$$\iff \Pr\left(1.96\,\sigma_{E_i} + X_i \geqslant T_i \geqslant -1.96\,\sigma_{E_i} + X_i \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

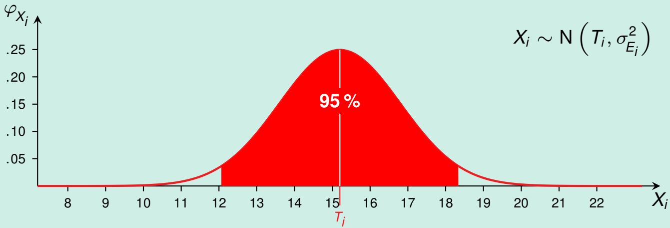
$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow \Pr\left(-1.96\,\sigma_{E_i} + X_i \leqslant T_i \leqslant 1.96\,\sigma_{E_i} + X_i \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

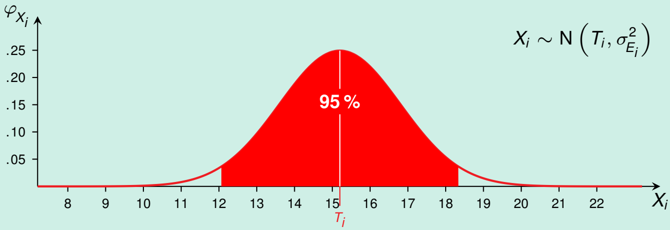
$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow \Pr\left(X_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant T_i \leqslant X_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

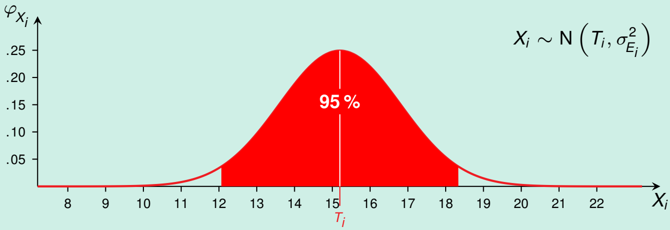
$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

$$\iff \Pr\left(X_i - 1.96 \times 1.6 \leqslant 15.2 \leqslant X_i + 1.96 \times 1.6 \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...

- Si $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces sigue para la distribución de X_i:



En nuestro ejemplo: $T_i = 15.2$ y $\sigma_{E_i} = 1.6$.

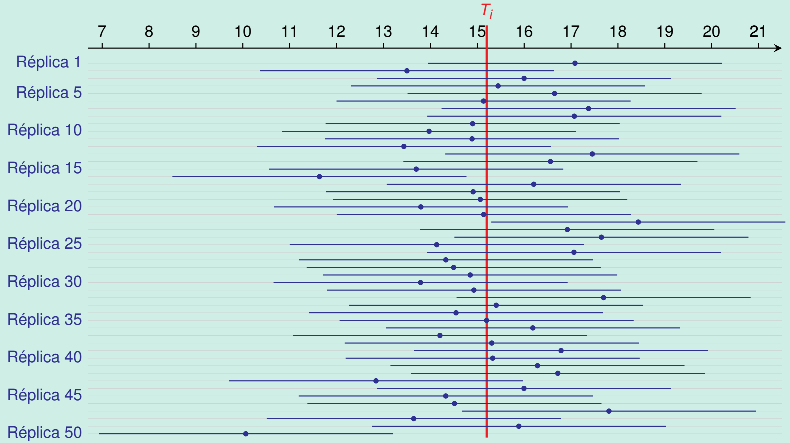
- En general, si $X_i \sim \mathrm{N}\left(T_i, \sigma^2_{E_i}\right)$, entonces:

$$\Pr\left(T_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant X_i \leqslant T_i + 1.96\,\sigma_{E_i} \right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow \Pr\left(X_i - 3.136 \leqslant 15.2 \leqslant X_i + 3.136 \right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Siguiendo con el ejemplo...



Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Derivar el intervalo de confianza para T_i

A partir de:

$$\Pr\left(X_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant T_i \leqslant X_i + 1.96\,\sigma_{E_i}\right) = 0.95,$$

y una puntuación observada en una réplica concreta X_{ih},

se construye un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Ejemplo

- Suponiendo que $\sigma_{E_i} = 1.6$
- y una puntuación observada concreta de $X_{ih} = 16$
- se deriva el intervalo de confianza de 95 %:

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Derivar el intervalo de confianza para T_i

A partir de:

$$\Pr\left(X_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant T_i \leqslant X_i + 1.96\,\sigma_{E_i}\right) = 0.95,$$

y una puntuación observada en una réplica concreta X_{ih},

se construye un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Ejemplo

- Suponiendo que $\sigma_{E_i} = 1.6$
- y una puntuación observada concreta de $X_{ih} = 16$
- se deriva el intervalo de confianza de 95 %:

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Derivar el intervalo de confianza para T_i

A partir de:

$$\Pr\left(X_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant T_i \leqslant X_i + 1.96\,\sigma_{E_i}\right) = 0.95,$$

y una puntuación observada en una réplica concreta X_{ih},
se construye un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Ejemplo

- Suponiendo que $\sigma_{E_i} = 1.6$
- y una puntuación observada concreta de $X_{ih} = 16$
- se deriva el intervalo de confianza de 95 %:

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Derivar el intervalo de confianza para T_i

A partir de:

$$\Pr\left(X_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant T_i \leqslant X_i + 1.96\,\sigma_{E_i}\right) = 0.95,$$

y una puntuación observada en una réplica concreta X_{ih},
se construye un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Ejemplo

- Suponiendo que $\sigma_{E_i} = 1.6$
- y una puntuación observada concreta de $X_{ih} = 16$
- se deriva el intervalo de confianza de 95 %:

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Derivar el intervalo de confianza para T_i

A partir de:

$$\Pr\left(X_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant T_i \leqslant X_i + 1.96\,\sigma_{E_i}\right) = 0.95,$$

y una puntuación observada en una réplica concreta X_{ih},
se construye un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Ejemplo

- Suponiendo que $\sigma_{E_i} = 1.6$
- y una puntuación observada concreta de $X_{ih} = 16$
- se deriva el intervalo de confianza de 95 %:

$$[16 - 1.96 \times 1.6, 16 + 1.96 \times 1.6]$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Derivar el intervalo de confianza para T_i

A partir de:

$$\Pr\left(X_i - 1.96\,\sigma_{E_i} \leqslant T_i \leqslant X_i + 1.96\,\sigma_{E_i}\right) = 0.95,$$

y una puntuación observada en una réplica concreta X_{ih},
se construye un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Ejemplo

- Suponiendo que $\sigma_{E_i} = 1.6$
- y una puntuación observada concreta de $X_{ih} = 16$
- se deriva el intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[12.864, 19.136\right]$$

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Consideraciones finales

- La explicación anterior ejemplificó el caso de construir un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Si se desea un intervalo con otro nivel de confianza, se cambia 1.96 por:

$$\begin{aligned} 90\,\% &\longrightarrow 1.645 \\ 95\,\% &\longrightarrow 1.960 \\ 99\,\% &\longrightarrow 2.576 \end{aligned}$$

O generalmente, para un intervalo de nivel de confianza de $(1-\alpha)$

$$(1-\alpha) \longrightarrow \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

donde ξ_r es el cuantil r de la distribución normal estandarizada.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Consideraciones finales

- La explicación anterior ejemplificó el caso de construir un intervalo de confianza de 95 %:

$$\left[X_{ih} - 1.96\,\sigma_{E_i}, X_{ih} + 1.96\,\sigma_{E_i}\right].$$

Si se desea un intervalo con otro nivel de confianza, se cambia 1.96 por:

$$\begin{aligned} 90\,\% &\longrightarrow 1.645 \\ 95\,\% &\longrightarrow 1.960 \\ 99\,\% &\longrightarrow 2.576 \end{aligned}$$

O generalmente, para un intervalo de nivel de confianza de $(1-\alpha)$

$$(1-\alpha) \longrightarrow \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

donde ξ_r es el cuantil r de la distribución normal estandarizada.

Un intervalo de confianza para la puntuación verdadera

Consideraciones finales (continuación)

- Para derivar el intervalo de confianza, se requiere (una estimación de) σ_{E_i}. Comúnmente, se obtiene σ_{E_i} a través de:

$$\sigma_E = \sigma_X \sqrt{1 - \rho_{XX'}}$$

y se supone que $\sigma_{E_i} = \sigma_E$ para cualquier persona i.

Índice

Índice

Formas paralelas: Definición

Definición

Se dice que las puntuaciones observadas X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas de una medición si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Las puntuaciones verdaderas de todas las personas de la población es la misma en ambas formas.
  Es decir, para cualquier persona i:
  $$T_{1i} = T_{2i}$$
- La varianza de la puntuación error (en la población de personas) es la misma para ambas formas:
  $$\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_2}$$

Formas paralelas: Definición

Definición

Se dice que las puntuaciones observadas X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas de una medición si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Las puntuaciones verdaderas de todas las personas de la población es la misma en ambas formas.
  Es decir, para cualquier persona i:

$$T_{1i} = T_{2i}$$

- La varianza de la puntuación error (en la población de personas) es la misma para ambas formas:

$$\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_2}$$

Formas paralelas: Definición

Definición

Se dice que las puntuaciones observadas X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas de una medición si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Las puntuaciones verdaderas de todas las personas de la población es la misma en ambas formas.
  Es decir, para cualquier persona i:
  $$T_{1i} = T_{2i}$$
- La varianza de la puntuación error (en la población de personas) es la misma para ambas formas:
  $$\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_2}$$

Formas paralelas: Ejemplo

Ejemplo formas paralelas

Forma 1

$$\boxed{X_{1i} = T_{1i} + E_{1i}}$$

i	X_{1i}	=	T_{1i}	+	E_{1i}
1	39		38.2		$+0.8$
2	24		24.5		-0.5
3	37		39.8		-2.8
4	27		27.6		-0.6
5	36		33.0		$+3.0$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
∞					
$\mathscr{E}$	34.1		34.1		0.0
σ^2	15.2		13.1		2.1

Forma 2

$$\boxed{X_{2i} = T_{2i} + E_{2i}}$$

i	X_{2i}	=	T_{2i}	+	E_{2i}
1	36		38.2		-2.2
2	25		24.5		$+0.5$
3	40		39.8		$+0.2$
4	29		27.6		$+1.4$
5	33		33.0		$+0.0$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
∞					
$\mathscr{E}$	34.1		34.1		0.0
σ^2	15.2		13.1		2.1

Formas paralelas: Implicaciones

Propiedades de formas paralelas

Si X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas, entonces:

- ambas formas tienen la misma media

$$\mathscr{E}(X_1) = \mathscr{E}(X_2)$$

- ambas formas tienen la misma varianza

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2}$$

- ambas formas mantienen la misma covarianza con cualquier otra variable Z

$$\sigma_{X_1 Z} = \sigma_{X_2 Z}$$

- ambas formas tienen la misma confiabilidad:

$$\rho_{X_1 X_1'} = \rho_{X_2 X_2'}$$

Formas paralelas: Implicaciones

Propiedades de formas paralelas

Si X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas, entonces:

- ambas formas tienen la misma media

$$\mathscr{E}(X_1) = \mathscr{E}(X_2)$$

- ambas formas tienen la misma varianza

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2}$$

- ambas formas mantienen la misma covarianza con cualquier otra variable Z

$$\sigma_{X_1 Z} = \sigma_{X_2 Z}$$

- ambas formas tienen la misma confiabilidad:

$$\rho_{X_1 X_1'} = \rho_{X_2 X_2'}$$

Formas paralelas: Implicaciones

Propiedades de formas paralelas

Si X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas, entonces:

- ambas formas tienen la misma media

$$\mathscr{E}(X_1) = \mathscr{E}(X_2)$$

- ambas formas tienen la misma varianza

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2}$$

- ambas formas mantienen la misma covarianza con cualquier otra variable Z

$$\sigma_{X_1 Z} = \sigma_{X_2 Z}$$

- ambas formas tienen la misma confiabilidad:

$$\rho_{X_1 X_1'} = \rho_{X_2 X_2'}$$

Formas paralelas: Implicaciones

Propiedades de formas paralelas

Si X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas, entonces:

- ambas formas tienen la misma media

$$\mathscr{E}(X_1) = \mathscr{E}(X_2)$$

- ambas formas tienen la misma varianza

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2}$$

- ambas formas mantienen la misma covarianza con cualquier otra variable Z

$$\sigma_{X_1 Z} = \sigma_{X_2 Z}$$

- ambas formas tienen la misma confiabilidad:

$$\rho_{X_1 X_1'} = \rho_{X_2 X_2'}$$

Formas paralelas: Implicaciones

Propiedades de formas paralelas

Si X_1 y X_2 corresponden con formas paralelas, entonces:

- ambas formas tienen la misma media

$$\mathscr{E}(X_1) = \mathscr{E}(X_2)$$

- ambas formas tienen la misma varianza

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2}$$

- ambas formas mantienen la misma covarianza con cualquier otra variable Z

$$\sigma_{X_1 Z} = \sigma_{X_2 Z}$$

- ambas formas tienen la misma confiabilidad:

$$\rho_{X_1 X_1'} = \rho_{X_2 X_2'}$$

Formas paralelas: Grados de paralelismo

Definición

Grados de paralelismo

Paralelismo	**Propiedades**
Formas (estrictamente) paralelas	$T_1 = T_2$ y $\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_2}$
Formas tau-equivalentes	$T_1 = T_2$
Formas esencialmente tau-equivalentes	$T_1 = T_2 + \kappa$
Formas congenéricas	$T_1 = \lambda T_2 + \kappa$

Nota: κ y λ son contantes que dependen de las formas.

Formas paralelas: Grados de paralelismo

Definición

Grados de paralelismo

Paralelismo	**Propiedades**
Formas (estrictamente) paralelas	$T_1 = T_2$ y $\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_2}$
Formas tau-equivalentes	$T_1 = T_2$
Formas esencialmente tau-equivalentes	$T_1 = T_2 + \kappa$
Formas congenéricas	$T_1 = \lambda T_2 + \kappa$

Nota: κ y λ son contantes que dependen de las formas.

Formas paralelas: Grados de paralelismo

Definición

Grados de paralelismo

Paralelismo	**Propiedades**
Formas (estrictamente) paralelas	$T_1 = T_2$ y $\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_2}$
Formas tau-equivalentes	$T_1 = T_2$
Formas esencialmente tau-equivalentes	$T_1 = T_2 + \kappa$
Formas congenéricas	$T_1 = \lambda T_2 + \kappa$

Nota: κ y λ son contantes que dependen de las formas.

Formas paralelas: Grados de paralelismo

Definición

Grados de paralelismo

Paralelismo	**Propiedades**
Formas (estrictamente) paralelas	$T_1 = T_2$ y $\sigma^2_{E_1} = \sigma^2_{E_2}$
Formas tau-equivalentes	$T_1 = T_2$
Formas esencialmente tau-equivalentes	$T_1 = T_2 + \kappa$
Formas congenéricas	$T_1 = \lambda T_2 + \kappa$

Nota: κ y λ son contantes que dependen de las formas.

Índice

Fórmula de Spearman-Brown

Fórmula de Spearman-Brown

Supongamos que:

- tenemos n formas paralelas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ para la medición de un constructo;
- la confiabilidad de cada forma paralela es igual a $\rho_{XX'}$;
- se construye un nuevo test ("el test alargado") sumando las puntuaciones observadas de las n formas paralelas;

$$X^{\text{alarg}} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Entonces, Spearman y Brown derivaron que la confiabilidad del test alargado se obtiene por:

$$\boxed{\rho^{\text{alarg}}_{XX'} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Fórmula de Spearman-Brown

Supongamos que:

- tenemos n formas paralelas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ para la medición de un constructo;
- la confiabilidad de cada forma paralela es igual a $\rho_{XX'}$;
- se construye un nuevo test ("el test alargado") sumando las puntuaciones observadas de las n formas paralelas;

$$X^{\text{alarg}} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Entonces, Spearman y Brown derivaron que la confiabilidad del test alargado se obtiene por:

$$\boxed{\rho^{\text{alarg}}_{XX'} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Fórmula de Spearman-Brown

Supongamos que:

- tenemos n formas paralelas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ para la medición de un constructo;
- la confiabilidad de cada forma paralela es igual a $\rho_{XX'}$;
- se construye un nuevo test ("el test alargado") sumando las puntuaciones observadas de las n formas paralelas;

$$X^{\text{alarg}} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Entonces, Spearman y Brown derivaron que la confiabilidad del test alargado se obtiene por:

$$\boxed{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Fórmula de Spearman-Brown

Supongamos que:

- tenemos n formas paralelas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ para la medición de un constructo;
- la confiabilidad de cada forma paralela es igual a $\rho_{XX'}$;
- se construye un nuevo test ("el test alargado") sumando las puntuaciones observadas de las n formas paralelas;

$$X^{\text{alarg}} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Entonces, Spearman y Brown derivaron que la confiabilidad del test alargado se obtiene por:

$$\boxed{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Fórmula de Spearman-Brown

Supongamos que:

- tenemos n formas paralelas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ para la medición de un constructo;
- la confiabilidad de cada forma paralela es igual a $\rho_{XX'}$;
- se construye un nuevo test ("el test alargado") sumando las puntuaciones observadas de las n formas paralelas;

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Entonces, Spearman y Brown derivaron que la confiabilidad del test alargado se obtiene por:

$$\boxed{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Fórmula de Spearman-Brown

Supongamos que:

- tenemos n formas paralelas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ para la medición de un constructo;
- la confiabilidad de cada forma paralela es igual a $\rho_{XX'}$;
- se construye un nuevo test ("el test alargado") sumando las puntuaciones observadas de las n formas paralelas;

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Entonces, Spearman y Brown derivaron que la confiabilidad del test alargado se obtiene por:

$$\boxed{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Para cualquiera de las formas paralelas ($k = 1, \ldots, n$), se cumple:

$$X_k = T_k + E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} (T_k + E_k)$$

Para cualquiera de las formas paralelas ($k = 1, \ldots, n$), se cumple:

$$X_k = T_k + E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} (T_k + E_k)$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} (T_k + E_k)$$

Se puede separar la suma.

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} T_k + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Se puede separar la suma.

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} T_k + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} T_k + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Debido a que son formas paralelas, las puntuaciones verdaderas son idénticas:

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_n$$

y podemos escribir, para cualquier k:

$$T_k = T,$$

donde T es la puntuación verdadera en cualquiera de las formas paralelas.

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} T + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Debido a que son formas paralelas, las puntuaciones verdaderas son idénticas:

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_n$$

y podemos escribir, para cualquier k:

$$T_k = T,$$

donde T es la puntuación verdadera en cualquiera de las formas paralelas.

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} T + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} T + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Cada uno de los n términos de la suma

$$\sum_{k=1}^{n} T$$

es el mismo (es decir, no depende de k), por lo cual:

$$\sum_{k=1}^{n} T = n\,T$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = n\,T + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Cada uno de los n términos de la suma

$$\sum_{k=1}^{n} T$$

es el mismo (es decir, no depende de k), por lo cual:

$$\sum_{k=1}^{n} T = n\,T$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = n\,T + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = n\,T + \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Ahora, $n\,T$ corresponde con el efecto de los factores sistemáticos en el test alargado.
Es decir, corresponde con la puntuación verdadera del test alargado:

$$T^{\text{alarg}} = n\,T$$

Asimismo, la puntuación error del test alargado, se da por:

$$E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Ahora, $n\,T$ corresponde con el efecto de los factores sistemáticos en el test alargado.
Es decir, corresponde con la puntuación verdadera del test alargado:

$$T^{\text{alarg}} = n\,T$$

Asimismo, la puntuación error del test alargado, se da por:

$$E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{\text{Var}(T^{\text{alarg}})}{\text{Var}(X^{\text{alarg}})}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{\text{Var}(T^{\text{alarg}})}{\text{Var}(X^{\text{alarg}})}$$

Nota:

Var significa exactamente lo mismo que σ^2.
Por ejemplo, $\text{Var}(T^{\text{alarg}}) = \sigma^2_{T^{\text{alarg}}}$.
(Se prefiere Var cuando la expresión de la varianza es compleja.)

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{\text{Var}(T^{\text{alarg}})}{\text{Var}(X^{\text{alarg}})}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{\text{Var}(T^{\text{alarg}})}{\text{Var}(X^{\text{alarg}})}$$

La varianza de las puntuaciones observadas se puede descomponer en dos partes:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X^{\text{alarg}}) &= \text{Var}(T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}}) \\ &= \text{Var}(T^{\text{alarg}}) + \text{Var}(E^{\text{alarg}}) \end{aligned}$$

debido a que T^{alarg} y E^{alarg} tienen covarianza 0.

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{\text{Var}(T^{\text{alarg}})}{\text{Var}(T^{\text{alarg}}) + \text{Var}(E^{\text{alarg}})}$$

La varianza de las puntuaciones observadas se puede descomponer en dos partes:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X^{\text{alarg}}) &= \text{Var}(T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}}) \\ &= \text{Var}(T^{\text{alarg}}) + \text{Var}(E^{\text{alarg}}) \end{aligned}$$

debido a que T^{alarg} y E^{alarg} tienen covarianza 0.

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{\text{Var}(T^{\text{alarg}})}{\text{Var}(T^{\text{alarg}}) + \text{Var}(E^{\text{alarg}})}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{\text{Var}(T^{\text{alarg}})}{\text{Var}(T^{\text{alarg}}) + \text{Var}(E^{\text{alarg}})}$$

Desarrollar $\text{Var}(T^{\text{alarg}})$ resulta en:

$$\begin{aligned}\text{Var}(T^{\text{alarg}}) &= \text{Var}(n\,T) \\ &= n^2\,\sigma_T^2\end{aligned}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n^2\,\sigma_T^2}{n^2\,\sigma_T^2 + \text{Var}(E^{\text{alarg}})}$$

Desarrollar $\text{Var}(T^{\text{alarg}})$ resulta en:

$$\begin{aligned} \text{Var}(T^{\text{alarg}}) &= \text{Var}(n\,T) \\ &= n^2\,\sigma_T^2 \end{aligned}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n^2\,\sigma_T^2}{n^2\,\sigma_T^2 + \text{Var}(E^{\text{alarg}})}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n^2\,\sigma_T^2}{n^2\,\sigma_T^2 + \text{Var}(E^{\text{alarg}})}$$

Y desarrollar $\text{Var}(E^{\text{alarg}})$ resulta en:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(E^{\text{alarg}}) &= \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} E_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sigma_{E_k}^2 && \text{ya que } \sigma_{E_k E_{k'}} = 0, \text{ para cualquier } k \text{ y } k'. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sigma_E^2 && \text{ya que las } \sigma_{E_k}^2 \text{ de las formas paralelas son iguales.} \\
&= n\,\sigma_E^2
\end{aligned}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n^2\,\sigma_T^2}{n^2\,\sigma_T^2 + n\,\sigma_E^2}$$

Y desarrollar $\text{Var}(E^{\text{alarg}})$ resulta en:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(E^{\text{alarg}}) &= \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} E_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sigma_{E_k}^2 && \text{ya que } \sigma_{E_k E_{k'}} = 0\text{, para cualquier } k \text{ y } k'. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sigma_E^2 && \text{ya que las } \sigma_{E_k}^2 \text{ de las formas paralelas son iguales.} \\
&= n\,\sigma_E^2
\end{aligned}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n^2\,\sigma_T^2}{n^2\,\sigma_T^2 + n\,\sigma_E^2}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n^2\,\sigma_T^2}{n^2\,\sigma_T^2 + n\,\sigma_E^2}$$

Simplificando la expresión (dividiendo numerador y denominador por n)...

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\sigma_T^2}{n\,\sigma_T^2 + \sigma_E^2}$$

Simplificando la expresión (dividiendo numerador y denominador por n)...

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\sigma_T^2}{n\,\sigma_T^2 + \sigma_E^2}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\sigma_T^2 / \sigma_X^2}{n\,\sigma_T^2 / \sigma_X^2 + \sigma_E^2 / \sigma_X^2}$$

Dividiendo numerador y denominador por σ_X^2...

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\sigma_T^2/\sigma_X^2}{n\,\sigma_T^2/\sigma_X^2 + \sigma_E^2/\sigma_X^2}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\sigma_T^2/\sigma_X^2}{n\,\sigma_T^2/\sigma_X^2 + \sigma_E^2/\sigma_X^2}$$

Reconociendo que, por la definición de la confiabilidad de cualquiera de las formas paralelas:

$$\frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} = \rho_{XX'}.$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{n\,\rho_{XX'} + \sigma_E^2/\sigma_X^2}$$

Reconociendo que, por la definición de la confiabilidad de cualquiera de las formas paralelas:

$$\frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} = \rho_{XX'}\,.$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{n\,\rho_{XX'} + \sigma_E^2/\sigma_X^2}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{n\,\rho_{XX'} + \sigma_E^2/\sigma_X^2}$$

La definición de la confiabilidad implica también:

$$\rho_{XX'} = 1 - \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2} = 1 - \rho_{XX'}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{n\,\rho_{XX'} + (1 - \rho_{XX'})}$$

La definición de la confiabilidad implica también:

$$\rho_{XX'} = 1 - \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2} = 1 - \rho_{XX'}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{n\,\rho_{XX'} + (1 - \rho_{XX'})}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{n\,\rho_{XX'} + (1 - \rho_{XX'})}$$

Reordenando algebraicamente el denominador resulta en:

$$\begin{aligned} n\,\rho_{XX'} + (1 - \rho_{XX'}) &= 1 + n\,\rho_{XX'} - \rho_{XX'} \\ &= 1 + (n-1)\,\rho_{XX'} \end{aligned}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

Reordenando algebraicamente el denominador resulta en:

$$\begin{aligned} n\,\rho_{XX'} + (1 - \rho_{XX'}) &= 1 + n\,\rho_{XX'} - \rho_{XX'} \\ &= 1 + (n-1)\,\rho_{XX'} \end{aligned}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

Fórmula de Spearman-Brown

Demostración de la fórmula de Spearman-Brown

1. Primero, desarrollamos la expresión para la puntuación observada del test alargado:

$$X^{\text{alarg}} = T^{\text{alarg}} + E^{\text{alarg}} \qquad \text{donde } T^{\text{alarg}} = nT \quad \text{y} \quad E^{\text{alarg}} = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

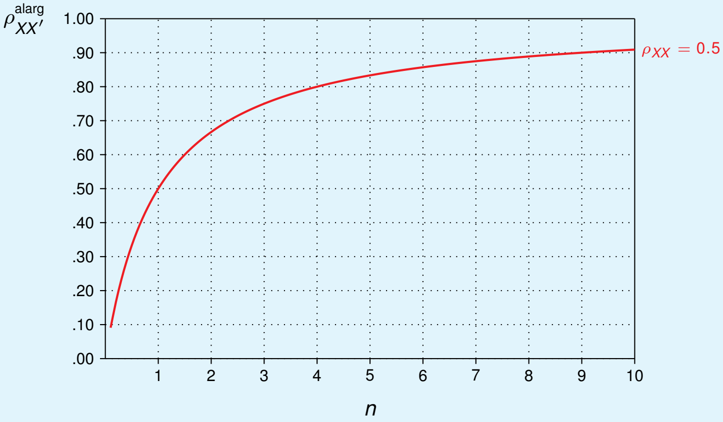
2. Segundo, desarrollamos la definición de la confiabilidad del test alargado:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

¡La fórmula de Spearman-Brown!

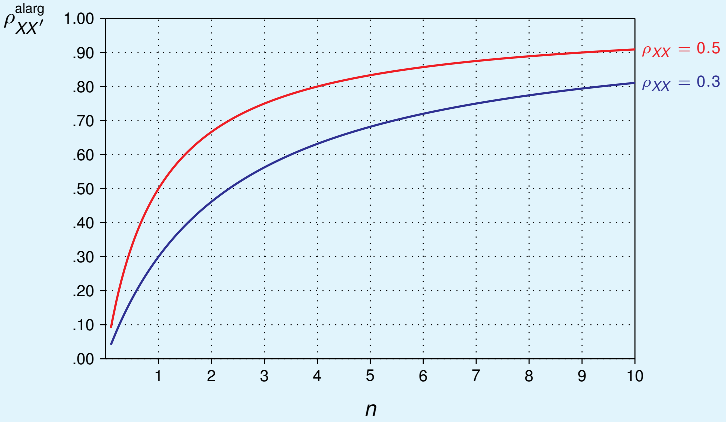
Fórmula de Spearman-Brown

$$\boxed{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$



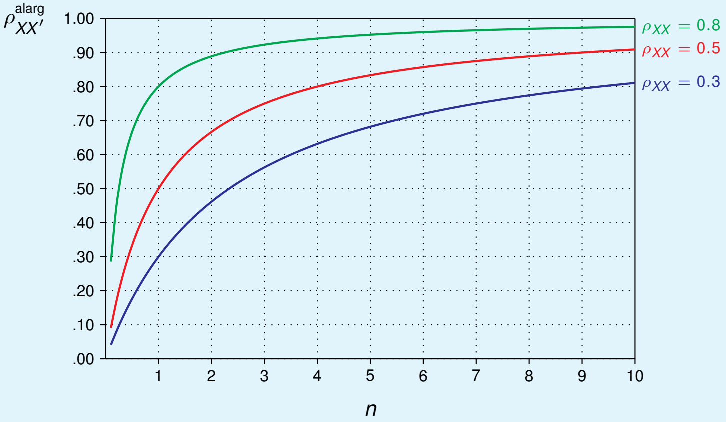
Fórmula de Spearman-Brown

$$\boxed{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$



Fórmula de Spearman-Brown

$$\boxed{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}}$$



Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Usos de la fórmula de Spearman-Brown

Si se cumplen los supuestos que subyacen la fórmula de Spearman-Brown, puede utilizarse para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué confiabilidad obtendríamos si a un test inicial añadieramos cierto número de ítems paralelos?

   Para responder esta pregunta, supongamos que:

   - el número de ítems en el test inicial es m;
   - se añaden q ítems paralelos.

   Entonces, el test alargado tendría $m + q$ ítems y el factor de alargamiento n sería:

   $$n = \frac{m+q}{m}$$

   y se aplica la fórmula de Spearman-Brown con este valor de n:

   $$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Usos de la fórmula de Spearman-Brown

Si se cumplen los supuestos que subyacen la fórmula de Spearman-Brown, puede utilizarse para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué confiabilidad obtendríamos si a un test inicial añadieramos cierto número de ítems paralelos?

   Para responder esta pregunta, supongamos que:

   - el número de ítems en el test inicial es m;
   - se añaden q ítems paralelos.

   Entonces, el test alargado tendría $m + q$ ítems y el factor de alargamiento n sería:

$$n = \frac{m+q}{m}$$

   y se aplica la fórmula de Spearman-Brown con este valor de n:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Usos de la fórmula de Spearman-Brown

Si se cumplen los supuestos que subyacen la fórmula de Spearman-Brown, puede utilizarse para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué confiabilidad obtendríamos si a un test inicial añadieramos cierto número de ítems paralelos?

   Para responder esta pregunta, supongamos que:

   - el número de ítems en el test inicial es m;
   - se añaden q ítems paralelos.

   Entonces, el test alargado tendría $m + q$ ítems y el factor de alargamiento n sería:

   $$n = \frac{m+q}{m}$$

   y se aplica la fórmula de Spearman-Brown con este valor de n:

   $$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Usos de la fórmula de Spearman-Brown

Si se cumplen los supuestos que subyacen la fórmula de Spearman-Brown, puede utilizarse para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué confiabilidad obtendríamos si a un test inicial añadieramos cierto número de ítems paralelos?

   Para responder esta pregunta, supongamos que:

   - el número de ítems en el test inicial es m;
   - se añaden q ítems paralelos.

   Entonces, el test alargado tendría $m+q$ ítems y el factor de alargamiento n sería:

   $$n = \frac{m+q}{m}$$

   y se aplica la fórmula de Spearman-Brown con este valor de n:

   $$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Un test inicial consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .80.
- Se añaden 15 ítems al test inicial.

Entonces, el test alargado tendrá:

- $25 + 15 = 40$ ítems y el factor de alargamiento sería:

$$n = \frac{40}{25} = 1.6$$

- una confiabilidad de:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

$$= \frac{1.6 \times .80}{1 + (1.6-1).80}$$

$$= .865.$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Un test inicial consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .80.
- Se añaden 15 ítems al test inicial.

Entonces, el test alargado tendrá:

- $25 + 15 = 40$ ítems y el factor de alargamiento sería:

$$n = \frac{40}{25} = 1.6$$

- una confiabilidad de:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

$$= \frac{1.6 \times .80}{1 + (1.6-1).80}$$

$$= .865.$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Un test inicial consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .80.
- Se añaden 15 ítems al test inicial.

Entonces, el test alargado tendrá:

- $25 + 15 = 40$ ítems y el factor de alargamiento sería:

$$n = \frac{40}{25} = 1.6$$

- una confiabilidad de:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}} = \frac{1.6 \times .80}{1 + (1.6-1).80} = .865.$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Un test inicial consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .80.
- Se añaden 15 ítems al test inicial.

Entonces, el test alargado tendrá:

- $25 + 15 = 40$ ítems y el factor de alargamiento sería:

$$n = \frac{40}{25} = 1.6$$

- una confiabilidad de:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

$$= \frac{1.6 \times .80}{1 + (1.6-1).80}$$

$$= .865.$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Un test inicial consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .80.
- Se añaden 15 ítems al test inicial.

Entonces, el test alargado tendrá:

- $25 + 15 = 40$ ítems y el factor de alargamiento sería:

$$n = \frac{40}{25} = 1.6$$

- una confiabilidad de:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

$$= \frac{1.6 \times .80}{1 + (1.6-1).80}$$

$$= .865.$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Un test inicial consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .80.
- Se añaden 15 ítems al test inicial.

Entonces, el test alargado tendrá:

- $25 + 15 = 40$ ítems y el factor de alargamiento sería:

$$n = \frac{40}{25} = 1.6$$

- una confiabilidad de:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}} = \frac{1.6 \times .80}{1 + (1.6-1).80} = .865.$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Usos de la fórmula de Spearman-Brown (continuación)

Si se cumplen los supuestos que subyacen la fórmula de Spearman-Brown, puede utilizarse para responder las siguientes preguntas:

2. ¿Cuántos números de ítems paralelos se requieren añadir al test para obtener una confiabilidad deseada de $\rho_{XX'}^{\text{alarg}}$?

   Para esta pregunta, se considera que:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

$$\iff \quad n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\left(1 - \rho_{XX'}\right)}{\rho_{XX'}\left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Usos de la fórmula de Spearman-Brown (continuación)

Si se cumplen los supuestos que subyacen la fórmula de Spearman-Brown, puede utilizarse para responder las siguientes preguntas:

2. ¿Cuántos números de ítems paralelos se requieren añadir al test para obtener una confiabilidad deseada de $\rho_{XX'}^{\text{alarg}}$?

   Para esta pregunta, se considera que:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\left(1-\rho_{XX'}\right)}{\rho_{XX'}\left(1-\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Usos de la fórmula de Spearman-Brown (continuación)

Si se cumplen los supuestos que subyacen la fórmula de Spearman-Brown, puede utilizarse para responder las siguientes preguntas:

2. ¿Cuántos números de ítems paralelos se requieren añadir al test para obtener una confiabilidad deseada de $\rho_{XX'}^{\text{alarg}}$?

   Para esta pregunta, se considera que:

$$\rho_{XX'}^{\text{alarg}} = \frac{n\,\rho_{XX'}}{1 + (n-1)\,\rho_{XX'}}$$

$$\iff \quad n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\,\left(1 - \rho_{XX'}\right)}{\rho_{XX'}\,\left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Tenemos un test inicial, que consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .65.
- Se desea tener una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)$ de .80

Entonces:

- El factor de alargamiento será:

$$n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\ (1 - \rho_{XX'})}{\rho_{XX'}\ \left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

$$= \frac{.80\ (1 - .65)}{.65\ (1 - .80)} = 2.154$$

- El test alargado debe tener $2.154 \times 25 = 53.85$ ítems.
  Es decir, se deben añadir $53.85 - 25 = 28.85 \approx 29$ ítems.

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Tenemos un test inicial, que consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .65.
- Se desea tener una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)$ de .80

Entonces:

- El factor de alargamiento será:

$$n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\ (1 - \rho_{XX'})}{\rho_{XX'}\ \left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

$$= \frac{.80\ (1 - .65)}{.65\ (1 - .80)} = 2.154$$

- El test alargado debe tener $2.154 \times 25 = 53.85$ ítems.
Es decir, se deben añadir $53.85 - 25 = 28.85 \approx 29$ ítems.

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Tenemos un test inicial, que consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}\right)$ de .65.
- Se desea tener una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)$ de .80

Entonces:

- El factor de alargamiento será:

$$n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\ \left(1 - \rho_{XX'}\right)}{\rho_{XX'}\ \left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

$$= \frac{.80\ (1 - .65)}{.65\ (1 - .80)} = 2.154$$

- El test alargado debe tener $2.154 \times 25 = 53.85$ items.
  Es decir, se deben añadir $53.85 - 25 = 28.85 \approx 29$ ítems.

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Tenemos un test inicial, que consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $(\rho_{XX'})$ de .65.
- Se desea tener una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)$ de .80

Entonces:

- El factor de alargamiento será:

$$n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} \; (1 - \rho_{XX'})}{\rho_{XX'} \; \left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

$$= \frac{.80 \; (1 - .65)}{.65 \; (1 - .80)} = 2.154$$

- El test alargado debe tener $2.154 \times 25 = 53.85$ items.
  Es decir, se deben añadir $53.85 - 25 = 28.85 \approx 29$ ítems.

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Tenemos un test inicial, que consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}\right)$ de .65.
- Se desea tener una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)$ de .80

Entonces:

- El factor de alargamiento será:

$$n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\ \left(1 - \rho_{XX'}\right)}{\rho_{XX'}\ \left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

$$= \frac{.80\ (1 - .65)}{.65\ (1 - .80)} = 2.154$$

- El test alargado debe tener $2.154 \times 25 = 53.85$ items.
  Es decir, se deben añadir $53.85 - 25 = 28.85 \approx 29$ ítems.

Fórmula de Spearman-Brown: Aplicaciones

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Tenemos un test inicial, que consiste en 25 ítems y tiene una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}\right)$ de .65.
- Se desea tener una confiabilidad $\left(\rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)$ de .80

Entonces:

- El factor de alargamiento será:

$$n = \frac{\rho_{XX'}^{\text{alarg}} \ \left(1 - \rho_{XX'}\right)}{\rho_{XX'} \ \left(1 - \rho_{XX'}^{\text{alarg}}\right)}$$

$$= \frac{.80 \ (1 - .65)}{.65 \ (1 - .80)} = 2.154$$

- El test alargado debe tener $2.154 \times 25 = 53.85$ items.
  Es decir, se deben añadir $53.85 - 25 = 28.85 \approx 29$ ítems.

Índice

Métodos para estimar la confiabilidad

- En la práctica, las puntuaciones verdaderas T son desconocidas.
  $\Longrightarrow$ No se puede estimar directamente σ_T^2, ni

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

- En esta sección, se presentan cuatro métodos para estimar $\rho_{XX'}$.
  Los cuatro métodos utilizan de una manera u otra el concepto de formas paralelas.
  - Por equivalencia
    1. Correlación entre formas paralelas
  - Por estabilidad temporal
    2. El método *test-retest*
  - Por consistencia interna
    3. El método de las dos mitades
    4. El coeficiente alfa de Cronbach

Métodos para estimar la confiabilidad

- En la práctica, las puntuaciones verdaderas T son desconocidas.
  $\Longrightarrow$ No se puede estimar directamente σ_T^2, ni

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

- En esta sección, se presentan cuatro métodos para estimar $\rho_{XX'}$.
  Los cuatro métodos utilizan de una manera u otra el concepto de formas paralelas.
  - Por equivalencia
    1. Correlación entre formas paralelas
  - Por estabilidad temporal
    2. El método *test-retest*
  - Por consistencia interna
    3. El método de las dos mitades
    4. El coeficiente alfa de Cronbach

Métodos para estimar la confiabilidad

- En la práctica, las puntuaciones verdaderas T son desconocidas.
  $\Longrightarrow$ No se puede estimar directamente σ_T^2, ni

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

- En esta sección, se presentan cuatro métodos para estimar $\rho_{XX'}$.
  Los cuatro métodos utilizan de una manera u otra el concepto de formas paralelas.
  - Por equivalencia
    1. Correlación entre formas paralelas
  - Por estabilidad temporal
    2. El método *test-retest*
  - Por consistencia interna
    3. El método de las dos mitades
    4. El coeficiente alfa de Cronbach

Métodos para estimar la confiabilidad

- En la práctica, las puntuaciones verdaderas T son desconocidas.
  $\Longrightarrow$ No se puede estimar directamente σ_T^2, ni

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

- En esta sección, se presentan cuatro métodos para estimar $\rho_{XX'}$.
  Los cuatro métodos utilizan de una manera u otra el concepto de formas paralelas.
  - Por equivalencia
    1. Correlación entre formas paralelas
  - Por estabilidad temporal
    2. El método *test-retest*
  - Por consistencia interna
    3. El método de las dos mitades
    4. El coeficiente alfa de Cronbach

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_{XX'}}{\sigma_X \, \sigma_{X'}}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_{XX'}}{\sigma_X \, \sigma_{X'}}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_{XX'}}{\sigma_X \, \sigma_{X'}}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_{XX'}}{\sigma_X\, \sigma_{X'}}$$

Por un lado:

$$\begin{aligned}
\sigma_{XX'} &= \sigma_{T+E,T'+E'} && \text{(por la ecuación básica de la TCT)} \\
&= \sigma_{T+E,T+E'} && (T = T' \text{ ya que son formas paralelas}) \\
&= \sigma_{T,T} + \sigma_{T,E'} + \sigma_{E,T} + \sigma_{E,E'} && \text{(por la distributividad de covarianza c.r.a la suma)} \\
&= \sigma_{T,T} && (\sigma_{WE} = \sigma_{WE'} = 0, \text{ para cualquier } W) \\
&= \sigma_T^2
\end{aligned}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X \, \sigma_{X'}}$$

Por un lado:

$$\begin{aligned}
\sigma_{XX'} &= \sigma_{T+E,T'+E'} && \text{(por la ecuación básica de la TCT)} \\
&= \sigma_{T+E,T+E'} && (T = T' \text{ ya que son formas paralelas}) \\
&= \sigma_{T,T} + \sigma_{T,E'} + \sigma_{E,T} + \sigma_{E,E'} && \text{(por la distributividad de covarianza c.r.a la suma)} \\
&= \sigma_{T,T} && (\sigma_{WE} = \sigma_{WE'} = 0, \text{ para cualquier } W) \\
&= \sigma_T^2
\end{aligned}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X \, \sigma_{X'}}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X \, \sigma_{X'}}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \sigma_{X'} && \text{ya que son formas paralelas} \\ \iff \quad \sigma_X \, \sigma_{X'} &= \sigma_X^2 \end{aligned}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \sigma_{X'} && \text{ya que son formas paralelas} \\ \iff \quad \sigma_X \, \sigma_{X'} &= \sigma_X^2 && \end{aligned}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

lo cual es, por definición, la confiabilidad de la forma X
(y también de la forma paralela X').

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

La correlación entre formas paralelas

Si, para una población de personas,

- X y X' son puntuaciones observadas correspondientes a dos formas paralelas y
- también se cumplen los demás supuestos de la teoría clásica de los tests,

entonces la correlación entre X y X' equivale a la confiabilidad de cualquiera de estas formas paralelas.

Demostración

Por definición, la correlación entre X y X' es:

$$\rho_{XX'} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}$$

lo cual es, por definición, la confiabilidad de la forma X
(y también de la forma paralela X').

$\Longrightarrow$ Se puede estimar la confiabilidad a través de la correlación empírica en una muestra de personas a las que se han aplicado ambas formas paralelas:

$$\hat{\rho}_{XX'} \leftarrow r_{XX'}$$

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

$r_{XX'} = .82$

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

$r_{XX'} = .82$

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

Considerando las variantes como formas paralelas...

(¿Cómo se podría obtener evidencia para esto?)

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

$r_{XX'} = .82$

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

Considerando las variantes como formas paralelas...

(¿Cómo se podría obtener evidencia para esto?)

...$r_{XX'}$ es una estimación de la confiabilidad del test.

La confiabilidad como correlación entre formas paralelas

Ejemplo

- Para medir el desarrollo del vocabulario en niños de sexto primaria, se han construido dos variantes de un test.
- Se aplican ambas variantes a una muestra de 500 niños, con un intervalo de una semana.
- Se obtienen los siguientes datos:

$r_{XX'} = .82$

	X	X'
1. Ana	25	26
2. Carlos	24	20
3. María	13	12
4. Olivia	18	18
5. Pedro	18	21
⋮	⋮	⋮
500. Nicolás	27	24

Considerando las variantes como formas paralelas...

(¿Cómo se podría obtener evidencia para esto?)

...$r_{XX'}$ es una estimación de la confiabilidad del test.

$$\hat{\rho}_{XX'} \leftarrow .82$$

Métodos para estimar la confiabilidad

- En esta sección, se presentan cuatro métodos para estimar $\rho_{XX'}$.
  Los cuatro métodos utilizan de una manera u otra el concepto de formas paralelas.
  - Por equivalencia
    1. Correlación entre formas paralelas
  - Por estabilidad temporal
    2. El método *test-retest*
  - Por consistencia interna
    3. El método de las dos mitades
    4. El coeficiente alfa de Cronbach

Estimar la confiabilidad por el método *test-retest*

Confiabilidad *test-retest*

Para estimar la confiabilidad por el método *test-retest* :

- Se aplica el mismo test,
  en dos momentos distintos,
  a la misma muestra de personas.

  Define:
  - X_1: Las puntuaciones observadas en la primera aplicación;
  - X_2: Las puntuaciones observadas en la segunda aplicación.
- Entonces, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad $\rho_{XX'}$ del test.

$$\hat{\rho}_{XX'} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

Notas:

Al estimar la confiabilidad por el método *test-retest*,

- Se hace el supuesto que el test es una forma paralela de si mismo.
- El coeficiente de confiabilidad expresa la estabilidad en el tiempo.

Estimar la confiabilidad por el método *test-retest*

Confiabilidad *test-retest*

Para estimar la confiabilidad por el método *test-retest* :

- Se aplica el mismo test,
  en dos momentos distintos,
  a la misma muestra de personas.

  Define:

  - X_1: Las puntuaciones observadas en la primera aplicación;
  - X_2: Las puntuaciones observadas en la segunda aplicación.

- Entonces, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad $\rho_{XX'}$ del test.

$$\hat{\rho}_{XX'} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

Notas:

Al estimar la confiabilidad por el método *test-retest*,

- Se hace el supuesto que el test es una forma paralela de si mismo.
- El coeficiente de confiabilidad expresa la estabilidad en el tiempo.

Estimar la confiabilidad por el método *test-retest*

Confiabilidad *test-retest*

Para estimar la confiabilidad por el método *test-retest* :

- Se aplica el mismo test,
  en dos momentos distintos,
  a la misma muestra de personas.

  Define:
  - X_1: Las puntuaciones observadas en la primera aplicación;
  - X_2: Las puntuaciones observadas en la segunda aplicación.

- Entonces, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad $\rho_{XX'}$ del test.

$$\hat{\rho}_{XX'} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

Notas:

Al estimar la confiabilidad por el método *test-retest*,

- Se hace el supuesto que el test es una forma paralela de si mismo.
- El coeficiente de confiabilidad expresa la estabilidad en el tiempo.

Estimar la confiabilidad por el método *test-retest*

Confiabilidad *test-retest*

Para estimar la confiabilidad por el método *test-retest* :

- Se aplica el mismo test,
  en dos momentos distintos,
  a la misma muestra de personas.

  Define:

  - X_1: Las puntuaciones observadas en la primera aplicación;
  - X_2: Las puntuaciones observadas en la segunda aplicación.

- Entonces, la correlación $r_{X_1X_2}$ es una estimación de la confiabilidad $\rho_{XX'}$ del test.

$$\hat{\rho}_{XX'} \leftarrow r_{X_1X_2}$$

Notas:

Al estimar la confiabilidad por el método *test-retest*,

- Se hace el supuesto que el test es una forma paralela de si mismo.
- El coeficiente de confiabilidad expresa la estabilidad en el tiempo.

Estimar la confiabilidad por el método *test-retest*

Confiabilidad *test-retest*

Para estimar la confiabilidad por el método *test-retest* :

- Se aplica el mismo test,
  en dos momentos distintos,
  a la misma muestra de personas.

  Define:

  - X_1: Las puntuaciones observadas en la primera aplicación;
  - X_2: Las puntuaciones observadas en la segunda aplicación.

- Entonces, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad $\rho_{XX'}$ del test.

$$\hat{\rho}_{XX'} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

Notas:

Al estimar la confiabilidad por el método *test-retest*,

- Se hace el supuesto que el test es una forma paralela de si mismo.
- El coeficiente de confiabilidad expresa la estabilidad en el tiempo.

Métodos para estimar la confiabilidad

- En esta sección, se presentan cuatro métodos para estimar $\rho_{XX'}$.
  Los cuatro métodos utilizan de una manera u otra el concepto de formas paralelas.
  - Por equivalencia
    1. Correlación entre formas paralelas
  - Por estabilidad temporal
    2. El método *test-retest*
  - Por consistencia interna
    3. El método de las dos mitades
    4. El coeficiente alfa de Cronbach

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Confiabilidad *split-half*

Para estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades :

- Se aplica un test, una única vez, a una muestra de personas.
- Se divide el test en dos mitades y se definen las puntuaciones observadas en ambas mitades. Por ejemplo:
  - X_1: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems impares;
  - X_2: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems pares.
- Con respecto a estas mitades, se asume que:
  - los supuestos del modelo clásico se cumplen y
  - son formas paralelas.
- Bajo estos supuestos, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad de cualquiera de las dos mitades:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

- Una estimación de la confiabilidad del test en su totalidad se obtiene por:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} = \frac{2\,\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}}{1 + \hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}} \qquad \text{(Fórmula Spearman-Brown con } n = 2\text{).}$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Confiabilidad *split-half*

Para estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades :

- Se aplica un test, una única vez, a una muestra de personas.
- Se divide el test en dos mitades y se definen las puntuaciones observadas en ambas mitades. Por ejemplo:
  - X_1: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems impares;
  - X_2: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems pares.
- Con respecto a estas mitades, se asume que:
  - los supuestos del modelo clásico se cumplen y
  - son formas paralelas.
- Bajo estos supuestos, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad de cualquiera de las dos mitades:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

- Una estimación de la confiabilidad del test en su totalidad se obtiene por:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} = \frac{2\,\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}}{1 + \hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}} \qquad \text{(Fórmula Spearman-Brown con } n = 2\text{).}$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Confiabilidad *split-half*

Para estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades :

- Se aplica un test, una única vez, a una muestra de personas.
- Se divide el test en dos mitades y se definen las puntuaciones observadas en ambas mitades. Por ejemplo:
  - X_1: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems impares;
  - X_2: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems pares.
- Con respecto a estas mitades, se asume que:
  - los supuestos del modelo clásico se cumplen y
  - son formas paralelas.
- Bajo estos supuestos, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad de cualquiera de las dos mitades:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

- Una estimación de la confiabilidad del test en su totalidad se obtiene por:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} = \frac{2\,\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}}{1 + \hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}} \qquad \text{(Fórmula Spearman-Brown con } n = 2\text{).}$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Confiabilidad *split-half*

Para estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades :

- Se aplica un test, una única vez, a una muestra de personas.
- Se divide el test en dos mitades y se definen las puntuaciones observadas en ambas mitades. Por ejemplo:
  - X_1: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems impares;
  - X_2: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems pares.
- Con respecto a estas mitades, se asume que:
  - los supuestos del modelo clásico se cumplen y
  - son formas paralelas.
- Bajo estos supuestos, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad de cualquiera de las dos mitades:

$$\hat{\rho}^{\text{mitad}}_{XX'} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

- Una estimación de la confiabilidad del test en su totalidad se obtiene por:

$$\hat{\rho}^{\text{total}}_{XX'} = \frac{2\,\hat{\rho}^{\text{mitad}}_{XX'}}{1 + \hat{\rho}^{\text{mitad}}_{XX'}} \qquad \text{(Fórmula Spearman-Brown con } n = 2\text{).}$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Confiabilidad *split-half*

Para estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades :

- Se aplica un test, una única vez, a una muestra de personas.
- Se divide el test en dos mitades y se definen las puntuaciones observadas en ambas mitades. Por ejemplo:
  - X_1: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems impares;
  - X_2: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems pares.
- Con respecto a estas mitades, se asume que:
  - los supuestos del modelo clásico se cumplen y
  - son formas paralelas.
- Bajo estos supuestos, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad de cualquiera de las dos mitades:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

- Una estimación de la confiabilidad del test en su totalidad se obtiene por:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} = \frac{2\,\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}}{1 + \hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}} \qquad \text{(Fórmula Spearman-Brown con } n = 2\text{).}$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Confiabilidad *split-half*

Para estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades :

- Se aplica un test, una única vez, a una muestra de personas.
- Se divide el test en dos mitades y se definen las puntuaciones observadas en ambas mitades. Por ejemplo:
  - X_1: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems impares;
  - X_2: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems pares.
- Con respecto a estas mitades, se asume que:
  - los supuestos del modelo clásico se cumplen y
  - son formas paralelas.
- Bajo estos supuestos, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad de cualquiera de las dos mitades:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

- Una estimación de la confiabilidad del test en su totalidad se obtiene por:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} = \frac{2\,\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}}{1 + \hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}}} \qquad \text{(Fórmula Spearman-Brown con } n = 2\text{).}$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Confiabilidad *split-half*

Para estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades :

- Se aplica un test, una única vez, a una muestra de personas.
- Se divide el test en dos mitades y se definen las puntuaciones observadas en ambas mitades. Por ejemplo:
  - X_1: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems impares;
  - X_2: La puntuación observada en la mitad compuesta por los ítems pares.
- Con respecto a estas mitades, se asume que:
  - los supuestos del modelo clásico se cumplen y
  - son formas paralelas.
- Bajo estos supuestos, la correlación $r_{X_1 X_2}$ es una estimación de la confiabilidad de cualquiera de las dos mitades:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{mitad}} \leftarrow r_{X_1 X_2}$$

- Una estimación de la confiabilidad del test en su totalidad se obtiene por:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} \leftarrow \frac{2\, r_{X_1 X_2}}{1 + r_{X_1 X_2}}.$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- Diez evaluados responden a un test de 6 ítems valorados de forma dicotómica.
- Se obtienen los siguientes datos:

	Puntuaciones en los ítems						Puntuaciones en las mitades		
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{Impar}	X_{Par}	X
1	1	0	1	0	1	0	3	0	3
2	0	1	1	1	0	1	1	3	4
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	2	3
5	0	0	0	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	3	3	6
7	1	1	1	1	1	1	3	3	6
8	0	1	1	1	0	1	1	3	4
9	0	1	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	1	0	0	0	1	1

- La estimación de la confiabilidad por el método de las dos mitades es:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} \leftarrow \frac{2 \times .277}{1 + .277} = .433$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- Diez evaluados responden a un test de 6 ítems valorados de forma dicotómica.
- Se obtienen los siguientes datos:

	Puntuaciones en los ítems						Puntuaciones en las mitades		
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{Impar}	X_{Par}	X
1	1	0	1	0	1	0	3	0	3
2	0	1	1	1	0	1	1	3	4
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	2	3
5	0	0	0	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	3	3	6
7	1	1	1	1	1	1	3	3	6
8	0	1	1	1	0	1	1	3	4
9	0	1	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	1	0	0	0	1	1

- La estimación de la confiabilidad por el método de las dos mitades es:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} \leftarrow \frac{2 \times .277}{1 + .277} = .433$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- Diez evaluados responden a un test de 6 ítems valorados de forma dicotómica.
- Se obtienen los siguientes datos:

	Puntuaciones en los ítems						Puntuaciones en las mitades		
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{Impar}	X_{Par}	X
1	1	0	1	0	1	0	3	0	3
2	0	1	1	1	0	1	1	3	4
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	2	3
5	0	0	0	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	3	3	6
7	1	1	1	1	1	1	3	3	6
8	0	1	1	1	0	1	1	3	4
9	0	1	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	1	0	0	0	1	1

- La estimación de la confiabilidad por el método de las dos mitades es:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} \leftarrow \frac{2 \times .277}{1 + .277} = .433$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- Diez evaluados responden a un test de 6 ítems valorados de forma dicotómica.
- Se obtienen los siguientes datos:

$r_{X_1 X_2} = .277$

	Puntuaciones en los ítems								
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{Impar}	X_{Par}	X
1	1	0	1	0	1	0	3	0	3
2	0	1	1	1	0	1	1	3	4
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	2	3
5	0	0	0	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	3	3	6
7	1	1	1	1	1	1	3	3	6
8	0	1	1	1	0	1	1	3	4
9	0	1	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	1	0	0	0	1	1

- La estimación de la confiabilidad por el método de las dos mitades es:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} \leftarrow \frac{2 \times .277}{1 + .277} = .433$$

Estimar la confiabilidad por el método de las dos mitades (*split-half*)

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- Diez evaluados responden a un test de 6 ítems valorados de forma dicotómica.
- Se obtienen los siguientes datos:

$r_{X_1 X_2} = .277$

	Puntuaciones en los ítems								
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{Impar}	X_{Par}	X
1	1	0	1	0	1	0	3	0	3
2	0	1	1	1	0	1	1	3	4
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	2	3
5	0	0	0	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	3	3	6
7	1	1	1	1	1	1	3	3	6
8	0	1	1	1	0	1	1	3	4
9	0	1	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	1	0	0	0	1	1

- La estimación de la confiabilidad por el método de las dos mitades es:

$$\hat{\rho}_{XX'}^{\text{total}} \leftarrow \frac{2 \times .277}{1 + .277} = .433$$

Métodos para estimar la confiabilidad

- En esta sección, se presentan cuatro métodos para estimar $\rho_{XX'}$.
  Los cuatro métodos utilizan de una manera u otra el concepto de formas paralelas.
  - Por equivalencia
    1. Correlación entre formas paralelas
  - Por estabilidad temporal
    2. El método *test-retest*
  - Por consistencia interna
    3. El método de las dos mitades
    4. El coeficiente alfa de Cronbach

El coeficiente alfa de Cronbach: Definición

Definición

Para un test que consiste en n ítems, donde

- las puntuaciones observadas en los ítems son $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y
- la puntuación total en el test se da por:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

se define el coeficiente alfa de Cronbach como sigue:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_X^2}\right]$$

El coeficiente alfa de Cronbach: Definición

Definición

Para un test que consiste en n ítems, donde

- las puntuaciones observadas en los ítems son $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y
- la puntuación total en el test se da por:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

se define el coeficiente alfa de Cronbach como sigue:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{X_i}}{\sigma^2_X}\right]$$

El coeficiente alfa de Cronbach: La fórmula KR-20

Nota: La fórmula equivalente de Kuder y Richardson para ítems dicotómicos

Cuando los n ítems son dicotómicos (con puntuaciones 0 y 1), una fórmula equivalente para calcular α es la KR-20:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \pi_i(1-\pi_i)}{\sigma_X^2}\right],$$

donde π_i es la probabilidad de tener una puntuación observada de 1 en el ítem i.

Esta fórmula fue desarrollada por Kuder y Richardson, independientemente de Cronbach.

La confiabilidad y el coeficiente alfa de Cronbach

El coeficiente alfa como límite inferior de la confiabilidad del test

- Si se cumplen los supuestos del modelo clásico para la puntuación en cada ítem *i*, entonces se puede comprobar matemáticamente que

$$\boxed{\alpha \leqslant \rho_{XX'}}$$

  Es decir, el coeficiente alfa de Cronbach es un límite inferior para la confiabilidad del test.

- Novick y Lewis (1967) mostraron que
  si adicionalmente se cumple que los n ítems son esencialmente tau-equivalentes, entonces la desigualdad anterior se convierte en una igualdad:

$$\boxed{\alpha = \rho_{XX'}}$$

El coeficiente alfa: Ejemplo

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- A partir de los datos, anteriores de los 10 evaluados con puntuaciones en los 6 ítems:

	Puntuaciones en los ítems						Puntuación total
Evaluados	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X
1	1	0	1	0	1	0	3
2	0	1	1	1	0	1	4
3	0	0	1	0	0	0	1
4	0	1	1	1	0	0	3
5	0	0	0	1	0	0	1
6	1	1	1	1	1	1	6
7	1	1	1	1	1	1	6
8	0	1	1	1	0	1	4
9	0	1	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	0	0	1
s^2	.233	.267	.233	.233	.233	.267	4

- Se estima el coeficiente alfa de Cronbach:

$$\hat{\alpha} = \frac{6}{6-1}\left(1 - \frac{.233 + .267 + .233 + .233 + .233 + .267}{4}\right) = .76$$

El coeficiente alfa: Ejemplo

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- A partir de los datos, anteriores de los 10 evaluados con puntuaciones en los 6 ítems:

	Puntuaciones en los ítems						Puntuación total
Evaluados	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X
1	1	0	1	0	1	0	3
2	0	1	1	1	0	1	4
3	0	0	1	0	0	0	1
4	0	1	1	1	0	0	3
5	0	0	0	1	0	0	1
6	1	1	1	1	1	1	6
7	1	1	1	1	1	1	6
8	0	1	1	1	0	1	4
9	0	1	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	0	0	1
s^2	.233	.267	.233	.233	.233	.267	4

- Se estima el coeficiente alfa de Cronbach:

$$\hat{\alpha} = \frac{6}{6-1}\left(1 - \frac{.233 + .267 + .233 + .233 + .233 + .267}{4}\right) = .76$$

El coeficiente alfa: Ejemplo

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- A partir de los datos, anteriores de los 10 evaluados con puntuaciones en los 6 ítems:

	Puntuaciones en los ítems						Puntuación total
Evaluados	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X
1	1	0	1	0	1	0	3
2	0	1	1	1	0	1	4
3	0	0	1	0	0	0	1
4	0	1	1	1	0	0	3
5	0	0	0	1	0	0	1
6	1	1	1	1	1	1	6
7	1	1	1	1	1	1	6
8	0	1	1	1	0	1	4
9	0	1	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	0	0	1
s^2	.233	.267	.233	.233	.233	.267	4

- Se estima el coeficiente alfa de Cronbach:

$$\hat{\alpha} = \frac{6}{6-1}\left(1 - \frac{.233 + .267 + .233 + .233 + .233 + .267}{4}\right) = .76$$

El coeficiente alfa: Ejemplo

Ejemplo (Abad et al., 2011, p. 98)

- A partir de los datos, anteriores de los 10 evaluados con puntuaciones en los 6 ítems:

	Puntuaciones en los ítems						Puntuación total
Evaluados	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X
1	1	0	1	0	1	0	3
2	0	1	1	1	0	1	4
3	0	0	1	0	0	0	1
4	0	1	1	1	0	0	3
5	0	0	0	1	0	0	1
6	1	1	1	1	1	1	6
7	1	1	1	1	1	1	6
8	0	1	1	1	0	1	4
9	0	1	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	0	0	1
s^2	.233	.267	.233	.233	.233	.267	4

- Se estima el coeficiente alfa de Cronbach:

$$\hat{\alpha} = \frac{6}{6-1}\left(1 - \frac{.233 + .267 + .233 + .233 + .233 + .267}{4}\right) = .76$$

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Consideraciones finales

Los métodos que hemos visto para estimar la confiabilidad requieren para las formas consideradas que

1. los supuestos del modelo se cumplan
   (especialmente, que los errores de diferentes formas tengan correlación nula);
2. las formas sean estrictamente paralelas (excepto para α).

Es importante evaluar la plausibilidad de estos supuestos, ya que tiene implicaciones sobre:

- ¿Qué método es más apropiado para qué tipo de test?
  (tests de velocidad, tests de memoria, tests de atención, tests de conocimientos,...)
- ¿Qué implicaciones prácticas tiene para la aplicación del método?
  (intervalo de tiempo entre dos aplicaciones, cómo dividir el test en dos mitades,...)

Nota: Existen métodos alternativos que requieren grados de paralelismo menos estrictos.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Consideraciones finales

Los métodos que hemos visto para estimar la confiabilidad requieren para las formas consideradas que

1. los supuestos del modelo se cumplan
(especialmente, que los errores de diferentes formas tengan correlación nula);
2. las formas sean estrictamente paralelas (excepto para α).

Es importante evaluar la plausibilidad de estos supuestos, ya que tiene implicaciones sobre:

- ¿Qué método es más apropiado para qué tipo de test?
(tests de velocidad, tests de memoria, tests de atención, tests de conocimientos,...)
- ¿Qué implicaciones prácticas tiene para la aplicación del método?
(intervalo de tiempo entre dos aplicaciones, cómo dividir el test en dos mitades,...)

Nota: Existen métodos alternativos que requieren grados de paralelismo menos estrictos.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Consideraciones finales

Los métodos que hemos visto para estimar la confiabilidad requieren para las formas consideradas que

1. los supuestos del modelo se cumplan
   (especialmente, que los errores de diferentes formas tengan correlación nula);
2. las formas sean estrictamente paralelas (excepto para α).

Es importante evaluar la plausibilidad de estos supuestos, ya que tiene implicaciones sobre:

- ¿Qué método es más apropiado para qué tipo de test?
  (tests de velocidad, tests de memoria, tests de atención, tests de conocimientos,...)
- ¿Qué implicaciones prácticas tiene para la aplicación del método?
  (intervalo de tiempo entre dos aplicaciones, cómo dividir el test en dos mitades,...)

Nota: Existen métodos alternativos que requieren grados de paralelismo menos estrictos.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Consideraciones finales

Los métodos que hemos visto para estimar la confiabilidad requieren para las formas consideradas que

1. los supuestos del modelo se cumplan
   (especialmente, que los errores de diferentes formas tengan correlación nula);
2. las formas sean estrictamente paralelas (excepto para α).

Es importante evaluar la plausibilidad de estos supuestos, ya que tiene implicaciones sobre:

- ¿Qué método es más apropiado para qué tipo de test?
  (tests de velocidad, tests de memoria, tests de atención, tests de conocimientos,...)
- ¿Qué implicaciones prácticas tiene para la aplicación del método?
  (intervalo de tiempo entre dos aplicaciones, cómo dividir el test en dos mitades,...)

Nota: Existen métodos alternativos que requieren grados de paralelismo menos estrictos.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Consideraciones finales

Los métodos que hemos visto para estimar la confiabilidad requieren para las formas consideradas que

1. los supuestos del modelo se cumplan
   (especialmente, que los errores de diferentes formas tengan correlación nula);
2. las formas sean estrictamente paralelas (excepto para α).

Es importante evaluar la plausibilidad de estos supuestos, ya que tiene implicaciones sobre:

- ¿Qué método es más apropiado para qué tipo de test?
  (tests de velocidad, tests de memoria, tests de atención, tests de conocimientos,...)
- ¿Qué implicaciones prácticas tiene para la aplicación del método?
  (intervalo de tiempo entre dos aplicaciones, cómo dividir el test en dos mitades,...)

Nota: Existen métodos alternativos que requieren grados de paralelismo menos estrictos.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Consideraciones finales (continuación)

Específicamente, hay que tomar en cuenta que, para las estimaciones obtenidas por:

- el método *test-retest*,
- el método de las dos mitades,
- el coeficiente alfa de Cronbach

cierto tipo de factores que en principio tienen un efecto no sistemático (transitorios o específicos) entran como efectos sistemáticos.

⇒ Estos métodos generalmente producen una sobreestimación de la confiabilidad.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Consideraciones finales (continuación)

Específicamente, hay que tomar en cuenta que, para las estimaciones obtenidas por:

- el método *test-retest*,
- el método de las dos mitades,
- el coeficiente alfa de Cronbach

cierto tipo de factores que en principio tienen un efecto no sistemático (transitorios o específicos) entran como efectos sistemáticos.

$\Rightarrow$ Estos métodos generalmente producen una sobreestimación de la confiabilidad.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Pregunta crítica

¿Cómo se resuelve la siguiente aparente paradoja?

- Por un lado,
  la confiabilidad, por definición, asume valores entre 0 y 1.
- Por otro lado,
  la correlación de Pearson (entre dos formas) y el coeficiente α de Cronbach pueden asumir valores negativos.

Pista: Piensa en el papel de:

- ✓ los supuestos del modelo
  Si los supuestos se cumplen, entonces la correlación entre dos formas paralelas ($\rho_{XX'}$), no puede ser negativa.
- ✓ el error muestral al estimar la confiabilidad a partir de datos observados en una muestra: $r_{XX'} \neq \rho_{XX'}$.

Estimar la confiabilidad: Consideraciones finales

Pregunta crítica

¿Cómo se resuelve la siguiente aparente paradoja?

- Por un lado,
  la confiabilidad, por definición, asume valores entre 0 y 1.
- Por otro lado,
  la correlación de Pearson (entre dos formas) y el coeficiente α de Cronbach pueden asumir valores negativos.

Pista: Piensa en el papel de:

- ✓ los supuestos del modelo
  Si los supuestos se cumplen, entonces la correlación entre dos formas paralelas ($\rho_{XX'}$), no puede ser negativa.
- ✓ el error muestral al estimar la confiabilidad a partir de datos observados en una muestra: $r_{XX'} \neq \rho_{XX'}$.