

Soluciones a la hoja de ejercicios 6

Ejercicio

Según hemos visto en la hoja 4, el valor esperado de la distribución de Pareto es

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Despejando

$$\alpha = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

Utilizamos la media muestral como estimador de la media poblacional. En nuestros datos $\bar{X} = 1,782$ y el estimador por el método de los momentos es

$$\hat{\alpha} = \frac{1,782}{1,782 - 1} \approx 2,28$$

También vimos en la hoja 4 que la función de densidad es

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

Entonces, asumiendo muestreo aleatorio simple tenemos la siguiente función de verosimilitud y log-verosimilitud

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha+1}}$$
$$l(\alpha) = n \log \alpha - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log x_i$$

Tomamos la primera y segunda derivada de la función de verosimilitud

$$l'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log x_i$$
$$l''(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2}$$

A partir de la primera derivada obtenemos el estimador máximo verosímil

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i}$$

En nuestros datos tenemos el resultado

$$\hat{\alpha} = \frac{10}{4,08} = 2,45$$

Cómo la segunda derivada es negativa cuando se evalúa en el punto $\hat{\alpha}$, concluimos que dicho punto corresponde a un máximo de la función de verosimilitud.

La estimación puede realizarse en R con el siguiente código. Vemos que el estimador proporcionado por R coincide con el que hemos obtenido matemáticamente

```
x <- c(6.13, 1.80, 1.34, 1.39, 1.25, 1.24, 1.15, 1.17, 1.17, 1.18)
datos <- log(x)
suma <- sum(datos)
n <- length(datos)
l <- function(alpha) n*log(alpha) - (alpha+1)*suma
lMax <- optimize(l, c(1, 10), maximum=TRUE)
print(lMax)
```

```
## $maximum
## [1] 2.450687
##
## $objective
## [1] -5.116822
```

Para realizar el gráfico utilizamos el siguiente código. Vemos que el estimador máximo-verosímil coincide con el máximo de ambas funciones.

```
alpha <- seq(1, 6, by=0.001)
Likelihood <- exp(l(alpha))
logLikelihood <- l(alpha)
par(mfrow=c(1,2))
plot(alpha, Likelihood, col="darkolivegreen4", lwd=1.5, type="l")
plot(alpha, logLikelihood, col="darkolivegreen4", lwd=1.5, type="l")
```

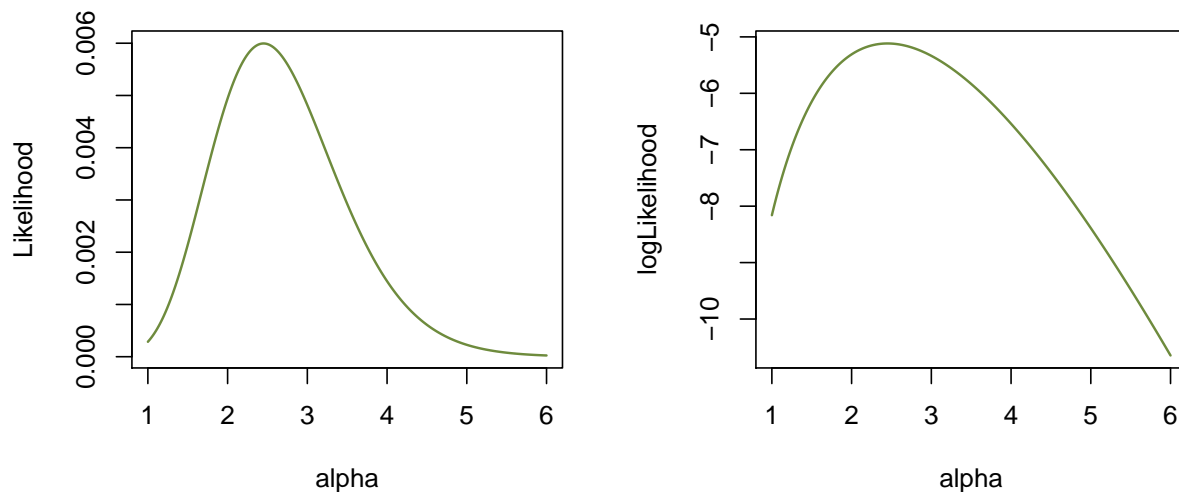


Figura 1: Función de verosimilitud y su logaritmo, distribución de Pareto