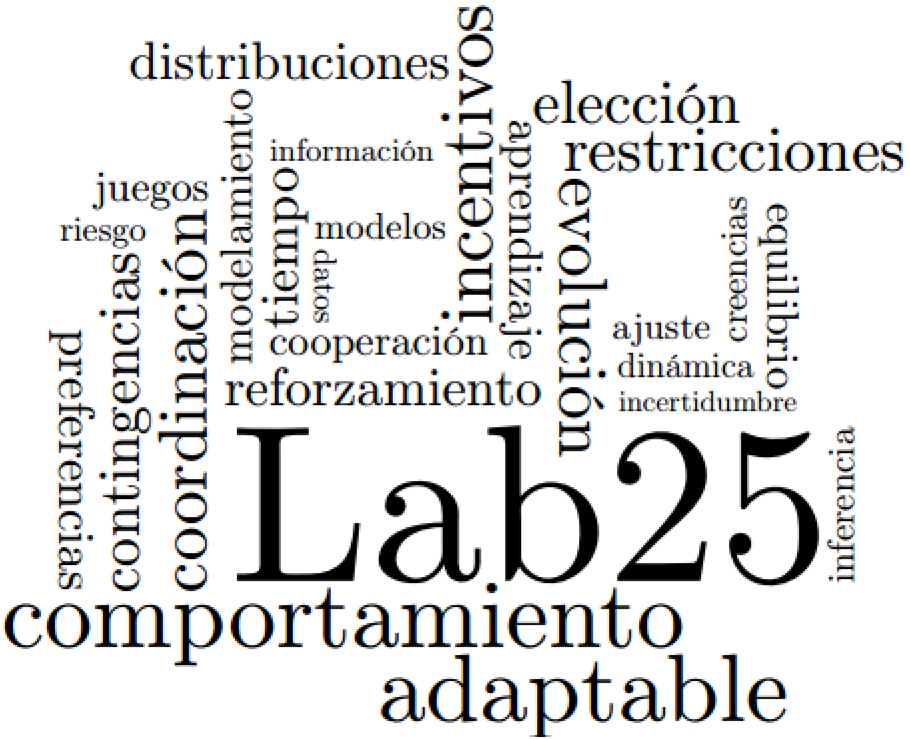
Bayes:
Inferencia Probabilística



Versión con comentarios

Inferencia Probabilística

- Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X *(Definición)*

  - Lidiar contra la incertidumbre

  (Aplicaciones)

  - Resolver el problema de la Asignación de Crédito

Inferencia Probabilística

- **Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X**
  - Lidiar contra la incertidumbre
  - Resolver el problema de la Asignación de Crédito

Empezamos con la definición…

Inferencia Probabilística

- **Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X**
  - Lidiar contra la incertidumbre
  - Resolver el problema de la Asignación de Crédito

Un número REAL

Probabilidad

- Un número del 0 al 1 que representa la certidumbre que se tiene respecto de la ocurrencia de un evento.

  - ‘La probabilidad de que mañana salga el Sol’

    Cercano a 1 porque ‘todos los días que he vivido, he visto el Sol salir’

  - ‘La probabilidad de que el Sol salga por el Oeste ’

    Cercano a 0 porque ‘NUNCA nadie ha vito salir el Sol por el Oeste’

  - ‘La probabilidad de que me salga águila en un volado’

    $$\frac{1}{2} = \frac{Un\ caso}{Dos\ casos\ posibles}$$

  - ‘La probabilidad de que me salga un 2 en un dado’

    $$\frac{1}{6} = \frac{Una\ cara}{Seis\ caras\ del\ dado}$$

Estimando probabilidades

Previo a cualquier observación

- Dado que asumimos que todos los eventos posibles son igualmente probables…

$$\frac{\#Evento\ particular}{\#\ TOTAL\ Eventos\ posibles}$$

Después de observar varios eventos

$$\frac{\#Veces\ que\ apareció\ el\ evento}{\#\ Total\ de\ observaciones}$$

Si el supuesto de equiprobabilidad entre los resultados posibles es cierto, deberíamos observar una proporción similar al replicar el suceso n veces.

Por ejemplo:
Si una moneda efectivamente tiene probabilidad de .5 de caer águila o sol, entonces, si yo tiro la moneda 100 veces, observaré alrededor de 50 águilas-soles…

¿Qué tan probable es…?

Sacar un As	$\frac{4}{52}$ = .076	
Entrar a la UNAM	8% = $\frac{8}{100}$	
Encontrar a Jhonny Depp en Iztapalapa	0.000(…)1	

Podemos preguntarnos por eventos suuuuuper concretos (como los que aparecen en los libros de texto)

Podemos preguntarnos sobre eventos al respecto de los cuales 'las estadísticas' (conteos de observaciones previas) nos proporcionan un buen estimado de probabilidad

Podemos preguntarnos por eventos tan poco probables, que seguramente no encontraremos en ninguna de nuestras observaciones… Sin embargo; nunca podremos estar seguros de 'qué tal que simplemente no he hecho el número suficiente de observaciones'

¿Qué tan probable es...

... que un individuo X sea zurdo?

Nuestros estimados de probabilidad varían conforme obtenemos información.

Recuerda:

Su estimado sobre la probabilidad de que un chico 'que está esperando fuera de la habitación' (y al cual no pueden ver) es diferente de la estimación que harían una vez que pudieran observarlo.

¿Qué tan probable es…?

Probabilidad Condicional

- La probabilidad de un evento A, a la luz de ciertos datos B

P(A|B)

"La probabilidad de A dado B"

p(El chico sea zurdo | Celular en mano izquierda)

p(El chico sea zurdo | Escribe con mano derecha)

Probabilidad Condicional

Eventos independientes

Evento A:

Lluvia

Evento B:

Hoy es miércoles

$$p(A|B) = p(A)$$

"La probabilidad del evento A, dado que estoy observando B se mantiene sin cambios."

Ó

"La probabilidad de que llueva dado que es miércoles, es la misma probabilidad de que lloviera en cualquier otro día"

Eventos no independientes

Evento A:

Lluvia

Evento B:

Está nublado

$$p(A|B) > p(A)$$

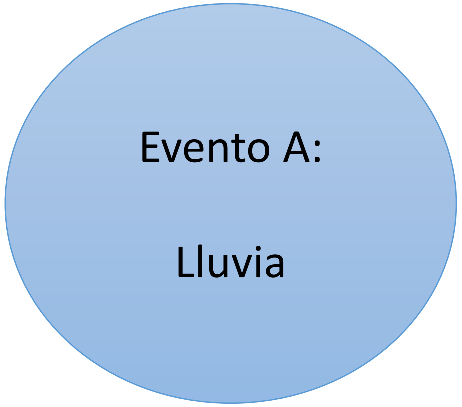
"La probabilidad del evento A, dado que estoy observando B aumentó

Ó

"La probabilidad de que llueva dado que hay nubes en el cielo, es mayor"

Probabilidad Condicional

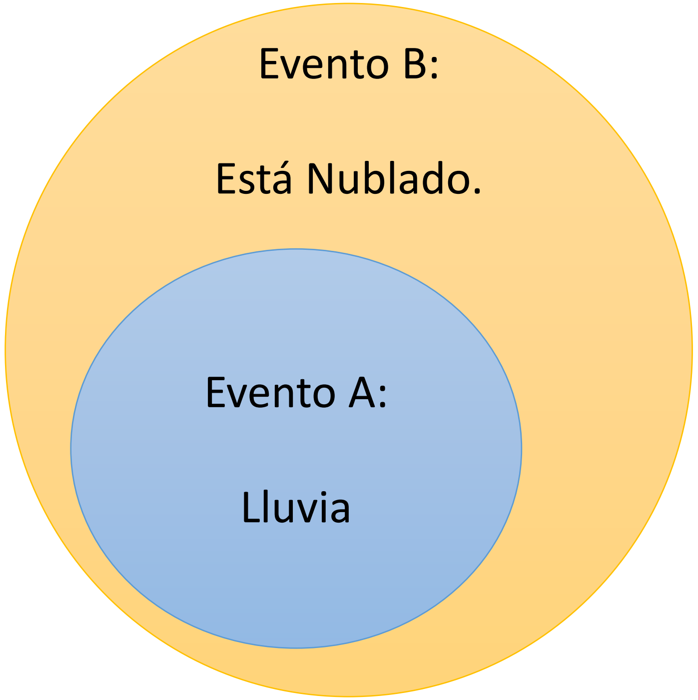
Eventos independientes



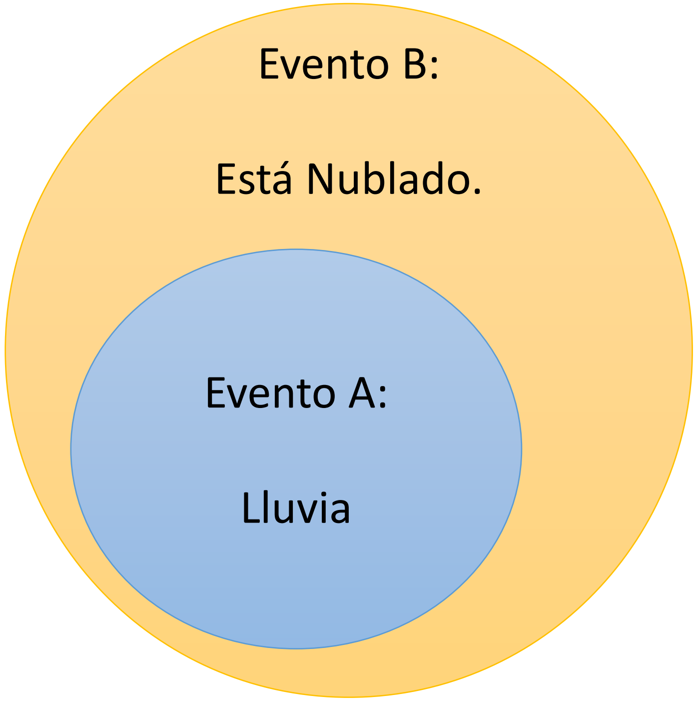
$p(A|B) = p(A)$

Eventos <u>no</u> independientes

$p(A|B) > p(A)$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

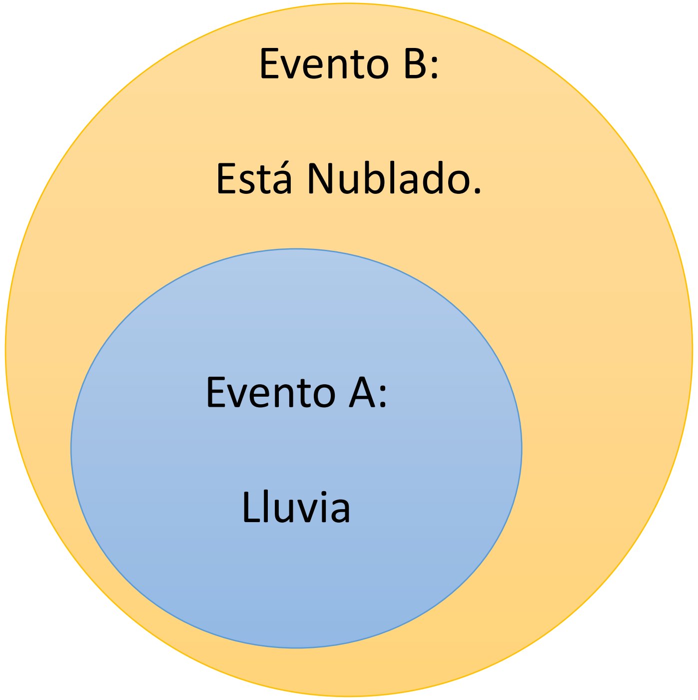


¡Esto tiene sentido!

Si quieres saber p(A|B) (o sea: la probabilidad de que llueva (A) dado que está nublado (B)), tiene sentido preguntarte cuál es el área que ocupa la intersección de ambos eventos (AnB) relativo a las veces en que la evidencia (B) no correlaciona con nuestro evento de interes (A) (p(B)).

Es decir: Interesa conocer la razón entre la intersección de ambos eventos (el círculo azul) y la probabilidad de hallar la evidencia en el mundo (El círculo amarillo)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

"La probabilidad de que llueva Y esté nublado es igual a la probabilidad total de que esté nublado * la probabilidad de que llueva tomando como evidencia el que está nublado"

Esto es sólo un despeje de la fórmula de arriba para saber de dónde sale este término.

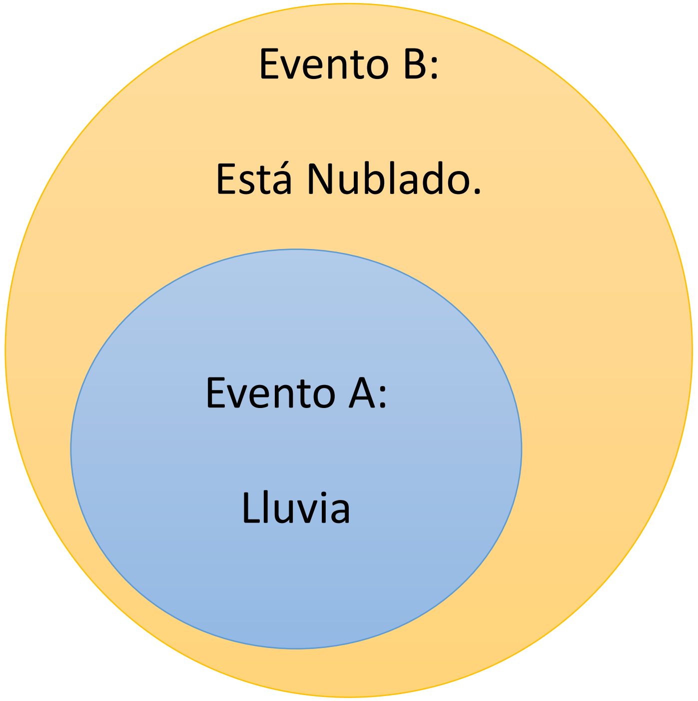
$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

"La probabilidad de que llueva Y esté nublado es igual a la probabilidad total de que llueva * la probabilidad de que esté nublado dado que está lloviendo"

De la ecuación de arriba, se saca esta por default.

¿Por qué? Porque decír A y B, es lo mismo que B y A (p(AnB) = p(BnA)). Luego entonces, las probabilidades marginales del evento que desee tomarse como 'evidencia' del otro (p(B) o p(A)) pueden multiplicarse por la probabilidad condicional resultante (p(A|B) y p(B|A))

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



´Sustituimos el numerador de la ecuación inicial para probabilidades condicionales (arriba), por aquella que incluye la probabilidad condicional que conocemos y….

¡Teorema de Bayes!

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\ P(A)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **La probabilidad de un evento A, dada la evidencia B.**

Lo que interesa estimar a la luz de la evidencia

  - La probabilidad de que llueva dado que está nublado.

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **La probabilidad de un evento A, dada la evidencia B.**

Lo que interesa estimar a la luz de la evidencia

- **La probabilidad del evento A**

Estimado inicial (Sin ver información)

  - La probabilidad de que llueva

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **La probabilidad de un evento A, dada la evidencia B.**

Lo que interesa estimar a la luz de la evidencia

- **La probabilidad del evento A**

Estimado inicial (Sin ver información)

- **La probabilidad de observar la evidencia B, cuando el evento A ocurre.**

¿Qué tantas veces el evento A aparece cuando pasa B?

  - La probabilidad de que el cielo esté nublado, dado que está lloviendo

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **La probabilidad de un evento A, dada la evidencia B.**

Lo que interesa estimar a la luz de la evidencia

- **La probabilidad del evento A**

Estimado inicial (Sin ver información)

- **La probabilidad de observar la evidencia B, cuando el evento A ocurre.**

¿Qué tantas veces el evento A aparece cuando pasa B?

- **La probabilidad de observar la evidencia.**
  - La probabilidad de que esté nublado

¿Qué tan común es B en el mundo?

¿Qué implica decir 'Bayesiano'?

Hay una actualización constante de la información que me permite reducir mi incertidumbre respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento X.

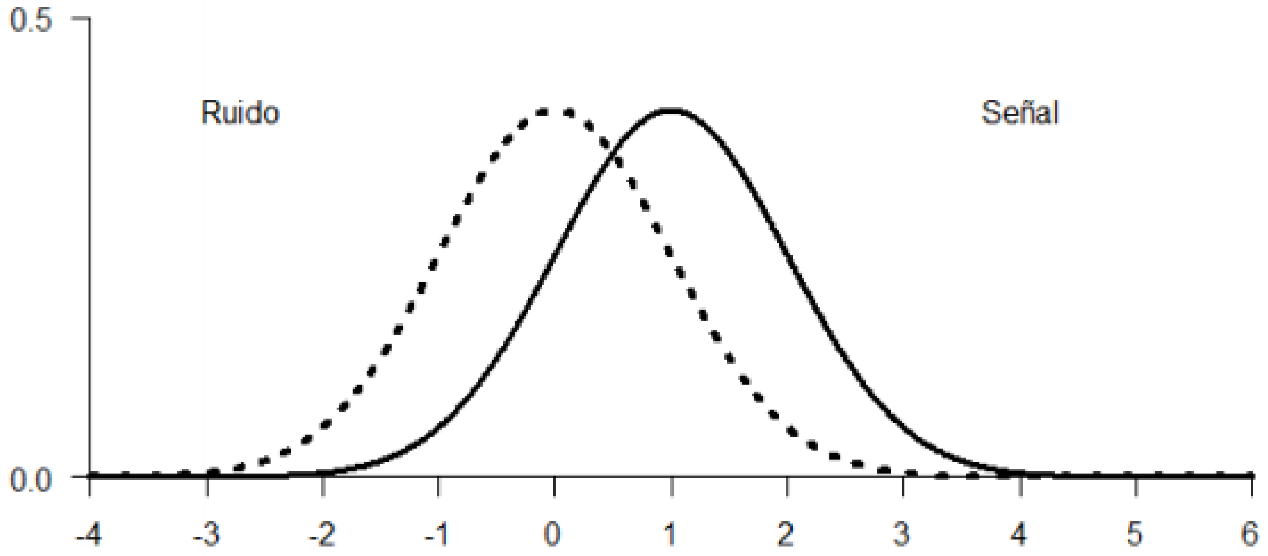
Inferencia Probabilística

- Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X
  - Lidiar contra la incertidumbre
  - Resolver el problema de la Asignación de Crédito

Inferencia Probabilística

- Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X
  - **Lidiar contra la incertidumbre**
  - Resolver el problema de la Asignación de Crédito

¿Es o no es?



- La SEÑAL coexiste con el ruido.
  - Los dos me producen evidencia parecida.
- Criterio
  - Consecuencias
  - Probabilidad

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **La probabilidad de un evento A, dada la evidencia B.**
- **La probabilidad del evento A**
- **La probabilidad de observar la evidencia B, cuando el evento A ocurre.**
- **La probabilidad de observar la evidencia.**

Ejemplo: Reclamo de equipaje

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.
- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

Sale la primer maleta y se ve como tu maleta, pero…

¿Es tu maleta?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

¿Es mi maleta?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **P(A|B) = ?**
  - La probabilidad de que la maleta sea la mía, dado que se ve como la mía.
- **P(A) = $\frac{1}{100}$ = .01**
  - La probabilidad de que la primer maleta de 100 sea la mía
- **P(B|A) = 1**
  - La probabilidad de que se vea como mi maleta dado que es mi maleta
- **P(B) = ?**
  - La probabilidad de que una maleta se vea como la mía, independientemente de si lo es o no…

- **P(B) = ?**
  - **La probabilidad de que una maleta se vea como la mía,** (*independientemente de si lo es o no)*

Opción 1: "La probabilidad de que la maleta se vea como la mía y lo sea"

$$p(Es\ mía\ \cap Se\ ve\ como\ la\ mía) = p(Es\ mía) \cdot p(Se\ ve\ como\ la\ mía\ |Es\ mía)$$
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$
$$p(A \cap B) = \left(\frac{1}{100)}\right) \cdot 1$$
$$= .01$$

Opción 2: "La probabilidad de que la maleta se vea como la mía, pero no lo sea"

$$p(NO\ es\ mía \cap Se\ ve\ como\ la\ mía) = p(NO\ es\ mía) \cdot p(Se\ ve\ como\ la\ mía\ |NO\ es\ mía)$$
$$p(A' \cap B) = p(A') \cdot p(B|A')$$
$$p(A' \cap B) = \left(\frac{99}{100)}\right) \cdot 0.05$$
$$= .0495$$

Probabilidad TOTAL: La suma de los dos escenarios posibles!

$$p(A \cap B) + p(A' \cap B)$$
$$0.01 + 0.0495$$
$$.0595$$

Noten que el dato original sigue siendo verdad hasta cierto punto: "El 5% de la población tiene la misma maleta que yo"; sin embargo, ahora a este dato le añado la información de que yo estoy seguro de que al menos una de esas 100 maletas debe verse como la mía (porque será la mía!)

¿Es mi maleta?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **P(A|B) = ?**
  - La probabilidad de que la maleta sea la mía, dado que se ve como la mía.
- **P(A) = $\frac{1}{100}$ = .01**
  - La probabilidad de que la primer maleta de 100 sea la mía
- **P(B|A) = 1**
  - La probabilidad de que se vea como mi maleta dado que es mi maleta
- **P(B) = .0595**
  - La probabilidad de que una maleta se vea como la mía, independientemente de si lo es o no…

¿Es mi maleta?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$p(A|B) = \frac{(.01)(1)}{.0595}$$

$$p(A|B) = \frac{.01}{.0595}$$

$$p(A|B) = .16$$

La probabilidad de que la primer maleta en salir sea la mía, dado que se ve como tal.

Inferencia Probabilística

- Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X
  - Lidiar contra la incertidumbre
  - Resolver el problema de la Asignación de Crédito

Inferencia Probabilística

- Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X
  - Lidiar contra la incertidumbre
  - **Resolver el problema de la Asignación de Crédito**

Asignación de crédito

- Formación de relaciones Estímulo Importante – Consecuencia Relevante
  - ¿A qué de mi entorno le atribuyo la ocurrencia de cierto evento?

Ejemplos:

Mi novio está enojado ------ > **¿Qué hice?**

Me duele el estómago -------- **> ¿Qué me hizo daño?**

La asignación de crédito como un cómputo de probabilidades condicionales.

- ¿De qué manera observar ciertos elementos en el ambiente alteran la probabilidad de observar ciertos eventos?

Contigüidad vs Contingencia

Contigüidad

- Cercanía en el tiempo

Contingencia

- Qué tanto valor predictivo tiene un estímulo sobre cierto evento.

Imaginemos el caso de un animal que se encuentra en una caja experimental.

El animal está expuesto a un estímulo: Una luz. Y de vez en cuando el animal recibe shocks eléctricos.

El animal realiza el cómputo de si existe alguna correlación entre la ocurrencia de la Luz y el Shock (¿Qué tan bien predice la Luz la ocurrencia del Shock?)

El animal empieza a hacer un conteo. (Esto es hipotético, las ratas no cuentan). Y registra cuántos segundos la Luz está presente o ausente, y en cuántos de estos casos se presentó el Shock eléctrico o no.

Espacio de Contingencia

	No Shock	**Shock**	
No Luz	10 segundos	10 segundos	→ **20 segundos sin luz**
Luz	0 segundos	20 segundos	→ **20 segundos con luz**
	10 segundos SIN shock	**30 segundos de Shock**	**TOTALES**

Probabilidades condicionales

Espacio de Contingencia

	No Shock	Shock	
No Luz	$\frac{10\ segundos\ sin\ Shock\ ni\ luz}{20\ segundos\ sin\ luz}$	$\frac{10\ segundos\ con\ Shock\ sin\ luz}{20\ segundos\ sin\ luz}$	**20 segundos sin luz**
Luz	$\frac{0\ segundos\ \sin\ Shock\ con\ luz}{20\ segundos\ con\ luz}$	$\frac{20\ segundos\ \sin\ Shock\ con\ luz}{20\ segundos\ con\ luz}$	**20 segundos con luz**
	10 segundos SIN shock	**30 segundos de Shock**	**TOTALES**

Probabilidades condicionales

Espacio de Contingencia

	No Shock	Shock	
No Luz	$\frac{\text{10 segundos sin Shock ni luz}}{\text{20 segundos sin luz}}$	$\frac{\text{10 segundos con Shock sin luz}}{\text{20 segundos sin luz}}$	20 segundos sin luz
Luz	$\frac{\text{0 segundos sin Shock con luz}}{\text{20 segundos con luz}}$	$\frac{\text{20 segundos sin Shock con luz}}{\text{20 segundos con luz}}$	20 segundos con luz
	10 segundos SIN shock	30 segundos de Shock	TOTALES

Probabilidades condicionales

Espacio de Contingencia

	No Shock	Shock	
No Luz	P(No shock | No luz) = 0.5	$p(Shock \mid No\ luz) = 0.5$	20 segundos sin luz
Luz	$p(No\ Shock \mid Luz) = 0$	$p(Shock \mid Luz) = 1 \mid$	20 segundos con luz
	10 segundos SIN shock	30 segundos de Shock	TOTALES

La ausencia de Luz no es predictora de nada. La mitad de las veces que no tengo luz me electrocutan y la otra mitad, no.

La Luz es predictora de peligro. Siempre que hay Luz, me electrocutan!

¿Habrá descarga?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- P(A|B) = ?
  - La probabilidad de que Shock dado que veo la Luz
- P(A) = $\frac{30}{40}$ = .75
  - La probabilidad de que haya Shock
  - Sin haberme fijado en la Luz, de los 40 segundos que estuve en la caja, 30 de ellos recibí descargas.
- P(B|A) = $\frac{20}{30}$ = 0.66
  - La probabilidad de que haya Luz cuando me den Shocks
  - De los 30 segundos en que hubieron descargas, 20 de ellos la Luz estuvo encendida.
- P(B) = $\frac{20}{40} = 0.5$
  - La probabilidad de que la luz esté encendida, con independencia de su correspondencia con los Shocks
  - De los 40 segundos que duró el experimento, la mitad hubo luz.

¿Habrá descarga?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$p(A|B) = \frac{(.75)(0.66)}{0.5}$$

$$p(A|B) = \frac{(.495)}{0.5}$$

$$p(A|B) = .9999$$

La probabilidad de que haya un Shock dado que la Luz está encendida.