



Modelos Psicométricos: Tópicos Selectos

Tema 3: Modelos TRI Explicativos

Iwin Leenen y Ramsés Vázquez-Lira

Facultad de Psicología, UNAM

Programa de Licenciatura y Posgrado en Psicología
Semestre 2019–2

Índice

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

Índice:

- 1 **Introducción**
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?

- Nos podemos hacer preguntas adicionales:

- ¿Por qué ciertos ítems son más difíciles que otros?
- ¿Por qué ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?

- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?

- Nos podemos hacer preguntas adicionales:

- ¿**Por qué** ciertos ítems son más difíciles que otros?
- ¿**Por qué** ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?

- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?
- Nos podemos hacer preguntas adicionales:
 - ¿**Por qué** ciertos ítems son más difíciles que otros?
 - ¿**Por qué** ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?
- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?
- Nos podemos hacer preguntas adicionales:
 - ¿**Por qué** ciertos ítems son más difíciles que otros?
 - ¿**Por qué** ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?
- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?
- Nos podemos hacer preguntas adicionales:
 - ¿**Por qué** ciertos ítems son más difíciles que otros?
 - ¿**Por qué** ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?
- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?
- Nos podemos hacer preguntas adicionales:
 - ¿**Por qué** ciertos ítems son más difíciles que otros?
 - ¿**Por qué** ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?
- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?
- Nos podemos hacer preguntas adicionales:
 - ¿**Por qué** ciertos ítems son más difíciles que otros?
 - ¿**Por qué** ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?
- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Introducción a los Modelos TRI Explicativos

- Supongamos que el modelo de Rasch tiene un **ajuste satisfactorio** a los datos.
→ ¿Se puede hacer algo más?
- Nos podemos hacer preguntas adicionales:
 - ¿**Por qué** ciertos ítems son más difíciles que otros?
 - ¿**Por qué** ciertas personas tienen un mayor nivel en el rasgo latente que otras personas?
- En otras palabras, buscamos explicar los valores para los parámetros de ítems y/o personas.

Esto generalmente requiere dos pasos:

1. Explicitar una hipótesis (o construir una teoría);
2. Incluir esta hipótesis/teoría en el modelo.

→ En este tema, presentaremos una extensión del modelo de Rasch para **incorporar y poner a prueba hipótesis explicativas** para los parámetros de ítems y/o personas.

Nota: También para otros modelos TRI se puede aplicar la misma lógica.
En este tema, la ilustramos a partir del modelo de Rasch.

Índice:

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
 - Ejemplo e idea básica del LLTM
 - El LLTM
 - Aplicación del LLTM
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

Índice:

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
 - Ejemplo e idea básica del LLTM
 - El LLTM
 - Aplicación del LLTM
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

Ejemplo introductorio

- Se aplica una prueba de matemáticas que consiste en ítems donde se preguntan calcular la **derivada de una función**.

Supongamos que **el modelo de Rasch se cumple** para las respuestas observadas en esta prueba.

- Para **explicar la dificultad de los ítems**, se considera que:
Para resolver los ítems, se requiere la aplicación de ciertas reglas, por ejemplo:

- $\bullet \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

- $\bullet \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

- Regla del producto

- Regla del cociente

- Regla de la cadena

- ...

- Se elabora una **hipótesis**:
La dificultad de un ítem **depende de la dificultad de las reglas** involucradas en la resolución del ítem.

En particular, se supone que la dificultad β_i de un ítem i es una **función lineal de las dificultades "básicas"** de las reglas.

Ejemplo introductorio

- Se aplica una prueba de matemáticas que consiste en ítems donde se preguntan calcular la **derivada de una función**.

Supongamos que **el modelo de Rasch se cumple** para las respuestas observadas en esta prueba.

- Para **explicar la dificultad de los ítems**, se considera que:
Para resolver los ítems, se requiere la aplicación de ciertas reglas, por ejemplo:

- $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

- Regla del producto

- Regla del cociente

- Regla de la cadena

- ...

- Se elabora una **hipótesis**:
La dificultad de un ítem **depende de la dificultad de las reglas** involucradas en la resolución del ítem.

En particular, se supone que la dificultad β_i de un ítem i es una **función lineal de las dificultades "básicas"** de las reglas.

Ejemplo introductorio

- Se aplica una prueba de matemáticas que consiste en ítems donde se preguntan calcular la **derivada de una función**.

Supongamos que **el modelo de Rasch se cumple** para las respuestas observadas en esta prueba.

- Para **explicar la dificultad de los ítems**, se considera que:
Para resolver los ítems, se requiere la aplicación de ciertas reglas, por ejemplo:

- $$\bullet \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

- $$\bullet \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

- Regla del producto

- Regla del cociente

- Regla de la cadena

- ...

- Se elabora una **hipótesis**:
La dificultad de un ítem **depende de la dificultad de las reglas** involucradas en la resolución del ítem.

En particular, se supone que la dificultad β_i de un ítem i es una **función lineal de las dificultades "básicas" de las reglas**.

Ejemplo introductorio

- Se aplica una prueba de matemáticas que consiste en ítems donde se preguntan calcular la **derivada de una función**.

Supongamos que **el modelo de Rasch se cumple** para las respuestas observadas en esta prueba.

- Para **explicar la dificultad de los ítems**, se considera que:
Para resolver los ítems, se requiere la aplicación de ciertas reglas, por ejemplo:

- $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

- Regla del producto

- Regla del cociente

- Regla de la cadena

- ...

- Se elabora una **hipótesis**:
La dificultad de un ítem **depende de la dificultad de las reglas** involucradas en la resolución del ítem.

En particular, se supone que la dificultad β_i de un ítem i es una **función lineal de las dificultades “básicas”** de las reglas.

Ejemplo introductorio

- Se asocia un **parámetro de dificultad** con cada una de las reglas:

η_j : la dificultad de la regla j .

- La hipótesis anterior implica que:

Por ejemplo, si para el ítem i se debe aplicar una vez la Regla 1, una vez la Regla 2 y dos veces la Regla 5, entonces la dificultad del ítem se da por:

$$\beta_i = 1 \eta_1 + 1 \eta_2 + 2 \eta_5.$$

- Se especifica una ecuación similar a la anterior **para cada ítem**.

Por ejemplo, si hay 20 ítems y 5 reglas, entonces para cualquier ítem i ($i = 1, \dots, 20$) tenemos:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^5 q_{ij} \eta_j,$$

donde los q_{ij} son **constantes** que se especifican *a priori*, con base en un análisis de los distintos ítems.

Ejemplo introductorio

- Se asocia un **parámetro de dificultad** con cada una de las reglas:

η_j : la dificultad de la regla j .

- La hipótesis anterior implica que:

Por ejemplo, si para el ítem i se debe aplicar una vez la Regla 1, una vez la Regla 2 y dos veces la Regla 5, entonces la dificultad del ítem se da por:

$$\beta_i = 1 \eta_1 + 1 \eta_2 + 2 \eta_5.$$

- Se especifica una ecuación similar a la anterior **para cada ítem**.

Por ejemplo, si hay 20 ítems y 5 reglas, entonces para cualquier ítem i ($i = 1, \dots, 20$) tenemos:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^5 q_{ij} \eta_j,$$

donde los q_{ij} son **constantes** que se especifican *a priori*, con base en un análisis de los distintos ítems.

Ejemplo introductorio

- Se asocia un **parámetro de dificultad** con cada una de las reglas:

η_j : la dificultad de la regla j .

- La hipótesis anterior implica que:

Por ejemplo, si para el ítem i se debe aplicar una vez la Regla 1, una vez la Regla 2 y dos veces la Regla 5, entonces la dificultad del ítem se da por:

$$\beta_i = 1 \eta_1 + 1 \eta_2 + 2 \eta_5.$$

- Se especifica una ecuación similar a la anterior **para cada ítem**.

Por ejemplo, si hay 20 ítems y 5 reglas, entonces para cualquier ítem i ($i = 1, \dots, 20$) tenemos:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^5 q_{ij} \eta_j,$$

donde los q_{ij} son **constantes** que se especifican **a priori**, con base en un análisis de los distintos ítems.

Ejemplo introductorio

- De forma elaborada:

$$\beta_1 = 1 \eta_1 + 1 \eta_2 + 0 \eta_3 + 0 \eta_4 + 2 \eta_5$$

$$\beta_2 = 0 \eta_1 + 1 \eta_2 + 1 \eta_3 + 1 \eta_4 + 0 \eta_5$$

$$\beta_3 = 1 \eta_1 + 2 \eta_2 + 0 \eta_3 + 1 \eta_4 + 1 \eta_5$$

$$\vdots$$

$$\beta_{20} = 1 \eta_1 + 2 \eta_2 + 2 \eta_3 + 1 \eta_4 + 2 \eta_5$$

- Lo anterior quiere decir que se especifica la siguiente **matriz Q** (de dimensión 20×5) con las ponderaciones *a priori*:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo introductorio

- De forma elaborada:

$$\beta_1 = 1\eta_1 + 1\eta_2 + 0\eta_3 + 0\eta_4 + 2\eta_5$$

$$\beta_2 = 0\eta_1 + 1\eta_2 + 1\eta_3 + 1\eta_4 + 0\eta_5$$

$$\beta_3 = 1\eta_1 + 2\eta_2 + 0\eta_3 + 1\eta_4 + 1\eta_5$$

$$\vdots$$

$$\beta_{20} = 1\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + 1\eta_4 + 2\eta_5$$

- Lo anterior quiere decir que se especifica la siguiente **matriz Q** (de dimensión 20×5) con las ponderaciones *a priori*:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Índice:

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
 - Ejemplo e idea básica del LLTM
 - El LLTM
 - Aplicación del LLTM
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

El LLTM

El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (*Linear Logistic Test Model* [LLTM]; Fischer, 1973) incluye dos componentes:

1. Las probabilidades de responder correctamente cada ítem se dan por el modelo de Rasch.

Es decir, para cada persona p y cada ítem i :

$$\Pr(Y_{pi} = 1 | \theta_p, \beta_i) = \frac{e^{\theta_p - \beta_i}}{1 + e^{\theta_p - \beta_i}}$$

2. Los parámetros de los ítems ($i = 1, \dots, s$) obedecen la siguiente restricción:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} \eta_j,$$

donde s es el número total de ítems,

d es el número de parámetros básicos en el modelo,

q_{ij} son constantes que se especifican *a priori*

y η_j es el parámetro básico j

El LLTM

El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (*Linear Logistic Test Model* [LLTM]; Fischer, 1973) incluye dos componentes:

1. Las probabilidades de responder correctamente cada ítem se dan por el modelo de Rasch.

Es decir, para cada persona p y cada ítem i :

$$\Pr(Y_{pi} = 1 | \theta_p, \beta_i) = \frac{e^{\theta_p - \beta_i}}{1 + e^{\theta_p - \beta_i}}$$

2. Los parámetros de los ítems ($i = 1, \dots, s$) obedecen la siguiente restricción:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} \eta_j,$$

donde s es el número total de ítems,

d es el número de parámetros básicos en el modelo,

q_{ij} son constantes que se especifican *a priori*

y η_j es el parámetro básico j

Estimación de parámetros en el LLTM

- Como el LLTM implica una restricción del modelo de Rasch, donde los s parámetros β_i se “explican” con base en d parámetros más básicos ($d \leq s$), para la estimación de los parámetros aplican los mismos principios que el modelo de Rasch.
- En particular, existen los siguientes procedimientos en el marco del **método de estimación por máxima verosimilitud**:
 - Máxima verosimilitud conjunta
(para estimar simultáneamente los parámetros de personas y parámetros básicos de los ítems);
 - Máxima verosimilitud condicional
(para estimar los parámetros básicos de los ítems);
 - Máxima verosimilitud marginal
(para estimar los parámetros básicos de los ítems con un supuesto adicional sobre la distribución de los parámetros de las personas).

Estimación de parámetros en el LLTM

- Como el LLTM implica una restricción del modelo de Rasch, donde los s parámetros β_i se “explican” con base en d parámetros más básicos ($d \leq s$), para la estimación de los parámetros aplican los mismos principios que el modelo de Rasch.
- En particular, existen los siguientes procedimientos en el marco del **método de estimación por máxima verosimilitud**:
 - Máxima verosimilitud conjunta
(para estimar simultáneamente los parámetros de personas y parámetros básicos de los ítems);
 - Máxima verosimilitud condicional
(para estimar los parámetros básicos de los ítems);
 - Máxima verosimilitud marginal
(para estimar los parámetros básicos de los ítems con un supuesto adicional sobre la distribución de los parámetros de las personas).

Evaluar la bondad de ajuste del LLTM

- Comúnmente, se aplica el LLTM después de que se ha comprobado que el modelo de Rasch se ajusta bien a los datos.
- Por lo tanto, la evaluación de bondad de ajuste del LLTM se suele centrar en la restricción:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} \eta_j. \quad (1)$$

- El LLTM “está anidado” en el modelo de Rasch.

Un procedimiento general para comparar un modelo anidado con un modelo general es la prueba de razón de verosimilitudes (*likelihood-ratio test*).

Aplicado al LLTM y el modelo de Rasch, este procedimiento implica:

- definir el estadístico de contraste:

$$\chi^2 \equiv 2 \left[\log \ell_{\text{RM}}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s; \mathbf{Y}) - \log \ell_{\text{LLTM}}^*(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d; \mathbf{Y}) \right]$$

donde $\log \ell_{\text{RM}}^*$ y $\log \ell_{\text{LLTM}}^*$ indican el logaritmo natural de la máxima verosimilitud bajo el modelo de Rasch y el LLTM, respectivamente.

- reconocer que, bajo la hipótesis nula de que la restricción (1) se cumple, este estadístico tiene una distribución (asintóticamente) ji-cuadrada con $s - 1 - d$ grados de libertad.

Evaluar la bondad de ajuste del LLTM

- Comúnmente, se aplica el LLTM **después de que se ha comprobado que el modelo de Rasch se ajusta** bien a los datos.
- Por lo tanto, la evaluación de bondad de ajuste del LLTM se suele centrar en la restricción:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} \eta_j. \quad (1)$$

- El LLTM “está anidado” en el modelo de Rasch.

Un procedimiento general para **comparar un modelo anidado con un modelo general** es la **prueba de razón de verosimilitudes** (*likelihood-ratio test*).

Aplicado al LLTM y el modelo de Rasch, este procedimiento implica:

- definir el **estadístico de contraste**:

$$\chi^2 \equiv 2 \left[\log \ell_{\text{RM}}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s; \mathbf{Y}) - \log \ell_{\text{LLTM}}^*(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d; \mathbf{Y}) \right]$$

donde $\log \ell_{\text{RM}}^*$ y $\log \ell_{\text{LLTM}}^*$ indican el logaritmo natural de la máxima verosimilitud bajo el modelo de Rasch y el LLTM, respectivamente.

- reconocer que, **bajo la hipótesis nula de que la restricción (1) se cumple**, este estadístico tiene una distribución (asintóticamente) ji-cuadrada con $s - 1 - d$ grados de libertad.

Evaluar la bondad de ajuste del LLTM

- Comúnmente, se aplica el LLTM **después de que se ha comprobado que el modelo de Rasch se ajusta** bien a los datos.
- Por lo tanto, la evaluación de bondad de ajuste del LLTM se suele centrar en la restricción:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} \eta_j. \quad (1)$$

- El LLTM “está anidado” en el modelo de Rasch.

Un procedimiento general para **comparar un modelo anidado con un modelo general** es la **prueba de razón de verosimilitudes** (*likelihood-ratio test*).

Aplicado al LLTM y el modelo de Rasch, este procedimiento implica:

- definir el **estadístico de contraste**:

$$\chi^2 \equiv 2 \left[\log \ell_{\text{RM}}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s; \mathbf{Y}) - \log \ell_{\text{LLTM}}^*(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d; \mathbf{Y}) \right]$$

donde $\log \ell_{\text{RM}}^*$ y $\log \ell_{\text{LLTM}}^*$ indican el logaritmo natural de la máxima verosimilitud bajo el modelo de Rasch y el LLTM, respectivamente.

- reconocer que, **bajo la hipótesis nula de que la restricción (1) se cumple**, este estadístico tiene una distribución (asintóticamente) ji-cuadrada con $s - 1 - d$ grados de libertad.

Evaluar la bondad de ajuste del LLTM

- Comúnmente, se aplica el LLTM **después de que se ha comprobado que el modelo de Rasch se ajusta** bien a los datos.
- Por lo tanto, la evaluación de bondad de ajuste del LLTM se suele centrar en la restricción:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} \eta_j. \quad (1)$$

- El LLTM “está anidado” en el modelo de Rasch.

Un procedimiento general para **comparar un modelo anidado con un modelo general** es la **prueba de razón de verosimilitudes** (*likelihood-ratio test*).

Aplicado al LLTM y el modelo de Rasch, este procedimiento implica:

- definir el **estadístico de contraste**:

$$\chi^2 \equiv 2 \left[\log \ell_{\text{RM}}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s; \mathbf{Y}) - \log \ell_{\text{LLTM}}^*(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d; \mathbf{Y}) \right]$$

donde $\log \ell_{\text{RM}}^*$ y $\log \ell_{\text{LLTM}}^*$ indican el logaritmo natural de la máxima verosimilitud bajo el modelo de Rasch y el LLTM, respectivamente.

- reconocer que, **bajo la hipótesis nula de que la restricción (1) se cumple**, este estadístico tiene una distribución (asintóticamente) ji-cuadrada con $s - 1 - d$ grados de libertad.

Evaluar la bondad de ajuste del LLTM

- Comúnmente, se aplica el LLTM **después de que se ha comprobado que el modelo de Rasch se ajusta** bien a los datos.
- Por lo tanto, la evaluación de bondad de ajuste del LLTM se suele centrar en la restricción:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^d q_{ij} \eta_j. \quad (1)$$

- El LLTM “está anidado” en el modelo de Rasch.

Un procedimiento general para **comparar un modelo anidado con un modelo general** es la **prueba de razón de verosimilitudes** (*likelihood-ratio test*).

Aplicado al LLTM y el modelo de Rasch, este procedimiento implica:

- definir el **estadístico de contraste**:

$$\chi^2 \equiv 2 \left[\log \ell_{\text{RM}}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s; \mathbf{Y}) - \log \ell_{\text{LLTM}}^*(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d; \mathbf{Y}) \right]$$

donde $\log \ell_{\text{RM}}^*$ y $\log \ell_{\text{LLTM}}^*$ indican el logaritmo natural de la máxima verosimilitud bajo el modelo de Rasch y el LLTM, respectivamente.

- reconocer que, **bajo la hipótesis nula de que la restricción (1) se cumple**, este estadístico tiene una distribución (asintóticamente) ji-cuadrada con $s - 1 - d$ grados de libertad.

Índice:

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
 - Ejemplo e idea básica del LLTM
 - El LLTM
 - Aplicación del LLTM
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

Considérese el siguiente experimento:

- Para evaluar el impacto de un nuevo método didáctico, se consideran los siguientes dos grupos:
 - Grupo experimental: Recibe el nuevo método;
 - Grupo control: Recibe el método estándar.
- A ambos grupos se les aplica:
 - previo al tratamiento una prueba (*pre-test*), que consisten en 20 ítems dicotómicos (ítems 1–20);
 - posterior al tratamiento, una prueba (*post-test*), que consiste en 20 otros ítems dicotómicos (ítems 21–40).
- Supongamos que:
 - los 40 ítems miden el mismo rasgo latente;
 - el modelo de Rasch se cumple para los 40 ítems.

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

Considérese el siguiente experimento:

- Para evaluar el impacto de un nuevo método didáctico, se consideran los siguientes dos grupos:
 - Grupo experimental: Recibe el nuevo método;
 - Grupo control: Recibe el método estándar.
- A ambos grupos se les aplica:
 - previo al tratamiento una prueba (*pre-test*), que consisten en 20 ítems dicotómicos (ítems 1–20);
 - posterior al tratamiento, una prueba (*post-test*), que consiste en 20 otros ítems dicotómicos (ítems 21–40).
- Supongamos que:
 - los 40 ítems miden el mismo rasgo latente;
 - el modelo de Rasch se cumple para los 40 ítems.

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

Considérese el siguiente experimento:

- Para evaluar el impacto de un nuevo método didáctico, se consideran los siguientes dos grupos:
 - Grupo experimental: Recibe el nuevo método;
 - Grupo control: Recibe el método estándar.
- A ambos grupos se les aplica:
 - previo al tratamiento una prueba (*pre-test*), que consisten en 20 ítems dicotómicos (ítems 1–20);
 - posterior al tratamiento, una prueba (*post-test*), que consiste en 20 otros ítems dicotómicos (ítems 21–40).
- Supongamos que:
 - los 40 ítems miden el mismo rasgo latente;
 - el modelo de Rasch se cumple para los 40 ítems.

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

■ ¿Cómo modelar el efecto del tratamiento experimental?

Considérense las siguientes dos alternativas:

- Entre el *pre-test* y el *post-test*, las θ s de las personas del grupo experimental habrán subido más que las θ s de las personas del grupo control.
- Los ítems del *post-test* serán más fáciles para las personas del grupo experimental que para las del grupo control.

Es decir, las β s de los ítems del *post-test* serán más bajos en el grupo experimental que en el grupo control.

- Para modelos este último supuesto, se definen **ítems conceptuales** a partir de los 20 ítems físicos del *post-test*:
 - Ítems del *post-test* en el grupo control: Ítems conceptuales 21-40
 - Ítems del *post-test* en el grupo experimental: Ítems conceptuales 41-60

Gráficamente:

	<i>Pre-test</i> Ítems 1–20	<i>Post-test</i> Ítems 21–40	<i>Post-test</i> Ítems 41–60
Grupo control			
Grupo experimental			

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

¿Cómo modelar el efecto del tratamiento experimental?

Considérense las siguientes dos alternativas:

- Entre el *pre-test* y el *post-test*, las θ s de las personas del grupo experimental habrán subido más que las θ s de las personas del grupo control.
- Los ítems del *post-test* serán más fáciles para las personas del grupo experimental que para las del grupo control.

Es decir, las β s de los ítems del *post-test* serán más bajos en el grupo experimental que en el grupo control.

- Para modelos este último supuesto, se definen ítems conceptuales a partir de los 20 ítems físicos del *post-test*:
 - Ítems del *post-test* en el grupo control: Ítems conceptuales 21-40
 - Ítems del *post-test* en el grupo experimental: Ítems conceptuales 41-60

Gráficamente:

	<i>Pre-test</i> Ítems 1–20	<i>Post-test</i> Ítems 21–40	<i>Post-test</i> Ítems 41–60
Grupo control			
Grupo experimental			

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

¿Cómo modelar el efecto del tratamiento experimental?

Considérense las siguientes dos alternativas:

- Entre el *pre-test* y el *post-test*, las θ s de las personas del grupo experimental habrán subido más que las θ s de las personas del grupo control.
- Los ítems del *post-test* serán más fáciles para las personas del grupo experimental que para las del grupo control.

Es decir, las β s de los ítems del *post-test* serán más bajos en el grupo experimental que en el grupo control.

- Para modelos este último supuesto, se definen **ítems conceptuales** a partir de los 20 ítems físicos del post-test:
 - Ítems del *post-test* en el grupo control:** Ítems conceptuales 21-40
 - Ítems del *post-test* en el grupo experimental:** Ítems conceptuales 41-60

Gráficamente:

	<i>Pre-test</i> Ítems 1–20	<i>Post-test</i> Ítems 21–40	<i>Post-test</i> Ítems 41–60
Grupo control			
Grupo experimental			

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

¿Cómo modelar el efecto del tratamiento experimental?

Considérense las siguientes dos alternativas:

- Entre el *pre-test* y el *post-test*, las θ s de las personas del grupo experimental habrán subido más que las θ s de las personas del grupo control.
- Los ítems del *post-test* serán más fáciles para las personas del grupo experimental que para las del grupo control.

Es decir, las β s de los ítems del *post-test* serán más bajos en el grupo experimental que en el grupo control.

- Para modelos este último supuesto, se definen **ítems conceptuales** a partir de los 20 ítems físicos del post-test:
 - Ítems del *post-test* en el grupo control:** Ítems conceptuales 21-40
 - Ítems del *post-test* en el grupo experimental:** Ítems conceptuales 41-60

Gráficamente:

	<i>Pre-test</i> Ítems 1–20	<i>Post-test</i> Ítems 21–40	<i>Post-test</i> Ítems 41–60
Grupo control			
Grupo experimental			

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

- Para modelar lo anterior a través del LLTM, se supone que:
 - Con cada ítem físico se asocia un parámetro básico η .
Hay 40 ítems físicos; entonces se incluyen 40 parámetros básicos η_1, \dots, η_{40} .
 - El efecto diferencial del tratamiento entre el grupo control y el grupo experimental es igual al valor de un parámetro τ .
 - Y se especifica que, para cualquier j ($j = 1, \dots, 20$):

$$\beta_j = \eta_j$$

$$\beta_{20+j} = \eta_{20+j}$$

$$\beta_{40+j} = \eta_{20+j} + \tau$$

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

- Para modelar lo anterior a través del LLTM, se supone que:
 - Con cada ítem físico se asocia un parámetro básico η .
Hay 40 ítems físicos; entonces se incluyen 40 parámetros básicos η_1, \dots, η_{40} .
 - El efecto diferencial del tratamiento entre el grupo control y el grupo experimental es igual al valor de un parámetro τ .
 - Y se especifica que, para cualquier j ($j = 1, \dots, 20$):

$$\beta_j = \eta_j$$

$$\beta_{20+j} = \eta_{20+j}$$

$$\beta_{40+j} = \eta_{20+j} + \tau$$

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

- Para modelar lo anterior a través del LLTM, se supone que:
 - Con cada ítem físico se asocia un parámetro básico η .
Hay 40 ítems físicos; entonces se incluyen 40 parámetros básicos η_1, \dots, η_{40} .
 - El efecto diferencial del tratamiento entre el grupo control y el grupo experimental es igual al valor de un parámetro τ .
 - Y se especifica que, para cualquier j ($j = 1, \dots, 20$):

$$\beta_j = \eta_j$$

$$\beta_{20+j} = \eta_{20+j}$$

$$\beta_{40+j} = \eta_{20+j} + \tau$$

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

- Lo anterior implica la siguiente matriz Q en el LLTM:

$$Q = \begin{matrix} & \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{40} & \tau \\ \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{40} \\ \beta_{41} \\ \beta_{42} \\ \vdots \\ \beta_{60} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

Preguntas para la reflexión:

- ¿Cómo en el modelo se refleja que el nuevo método didáctico tiene un mayor efecto que el método tradicional?
- ¿Qué implicaciones tendría si el modelo de Rasch se cumpliera y el LLTM no?
- ¿Cómo se podría modelar que el efecto del nuevo método didáctico difiere para distintos (tipos de) ítems?
- En el modelo anterior existen indeterminaciones. ¿Cuáles?

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

Preguntas para la reflexión:

- ¿Cómo en el modelo se refleja que el nuevo método didáctico tiene un mayor efecto que el método tradicional?
- ¿Qué implicaciones tendría si el modelo de Rasch se cumpliera y el LLTM no?
- ¿Cómo se podría modelar que el efecto del nuevo método didáctico difiere para distintos (tipos de) ítems?
- En el modelo anterior existen indeterminaciones. ¿Cuáles?

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

Preguntas para la reflexión:

- ¿Cómo en el modelo se refleja que el nuevo método didáctico tiene un mayor efecto que el método tradicional?
- ¿Qué implicaciones tendría si el modelo de Rasch se cumpliera y el LLTM no?
- ¿Cómo se podría modelar que el efecto del nuevo método didáctico difiere para distintos (tipos de) ítems?
- En el modelo anterior existen indeterminaciones. ¿Cuáles?

Aplicación del LLTM: Comparación pre-post

Preguntas para la reflexión:

- ¿Cómo en el modelo se refleja que el nuevo método didáctico tiene un mayor efecto que el método tradicional?
- ¿Qué implicaciones tendría si el modelo de Rasch se cumpliera y el LLTM no?
- ¿Cómo se podría modelar que el efecto del nuevo método didáctico difiere para distintos (tipos de) ítems?
- En el modelo anterior existen indeterminaciones. ¿Cuáles?

Índice:

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos**
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

Índice:

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona**
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem

Índice:

- 1 Introducción
- 2 El Modelo Logístico Lineal de Rasgo Latente (LLTM; Fischer, 1973)
- 3 El Marco General de los Modelos Lineales Generalizados Mixtos
- 4 Modelos Explicativos para el Parámetro de la Persona
- 5 Modelos Explicativos para el Parámetro de Dificultad del Ítem**