Inferencia Probabilística

por Adriana F. Chávez De la Peña

adrifelcha@gmail.com

Lab 25: www.bouzaslab25.com

Introducción a Teoría de la Probabilidad

Fenómenos deterministas

Fenómenos aleatorios

No se puede predecir el resultado (mecanismos aleatorios).

$$\Omega = \{ \ \}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Inferencia Probabilística

- **Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X**

Inferencia Probabilística

- **Determinar qué tan probable es que ocurra un evento X**

- Definición clásica (Equiprobabilidad)
- Definición frecuentista
- Definición subjetiva
- Definición axiomática

1. **Definición clásica** de probabilidad

- Asume equiprobabilidad

Definición formal:

Sea A un subconjunto dentro del espacio muestral finito (Ω), se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente:

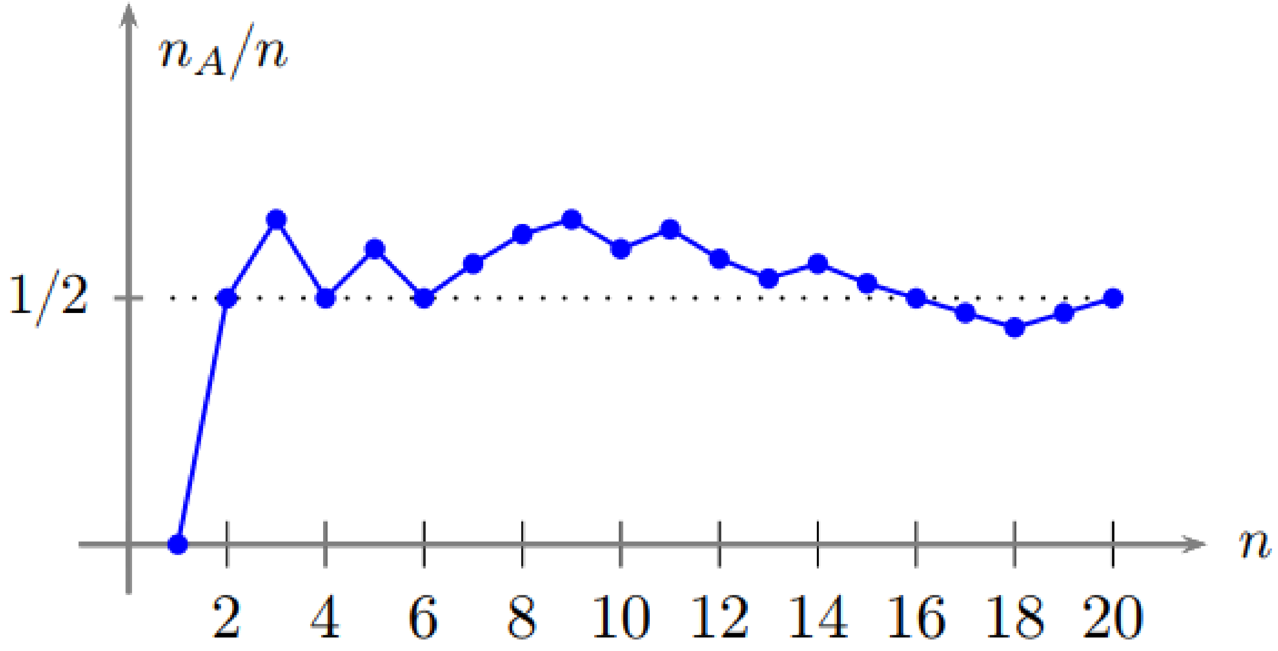
$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

$$P(A) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Definición frecuentista de probabilidad

Núm.	Resultado	n_A/n
1	3	0/1
2	6	1/2
3	2	2/3
4	1	2/4
5	4	3/5
6	6	4/6
7	3	4/7
8	4	5/8
9	2	6/9
10	5	6/10

Núm.	Resultado	n_A/n
11	2	7/11
12	5	7/12
13	1	7/13
14	6	8/14
15	3	8/15
16	1	8/16
17	5	8/17
18	5	8/18
19	2	9/19
20	6	10/20



2. **Definición frecuentista** de probabilidad

Definición formal:

Sea n_A el número de veces que se presenta el evento A dentro de las n repeticiones o realizaciones del experimento, el estimado de probabilidad frecuentista del evento A se define como:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

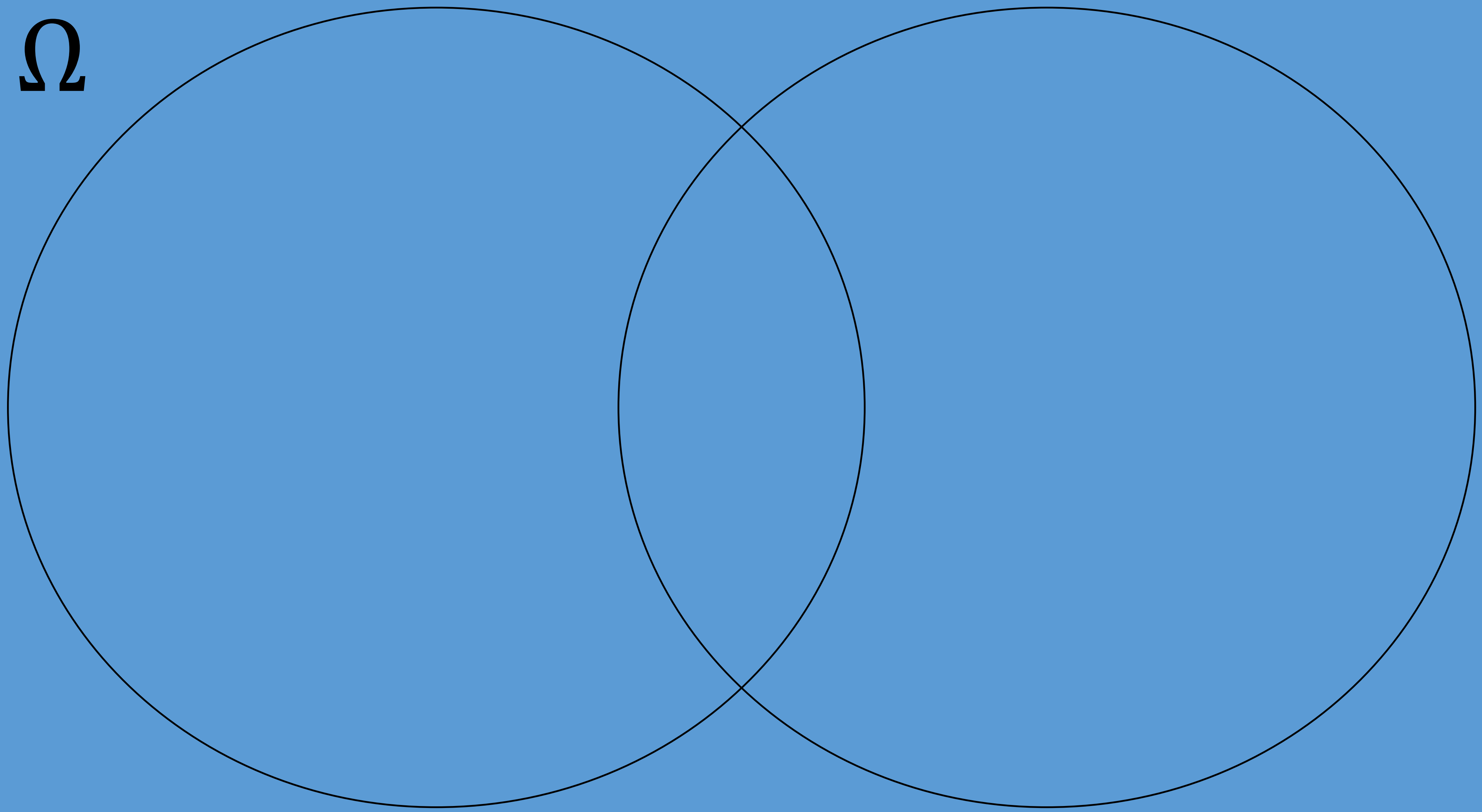
3. Definición subjetiva de probabilidad

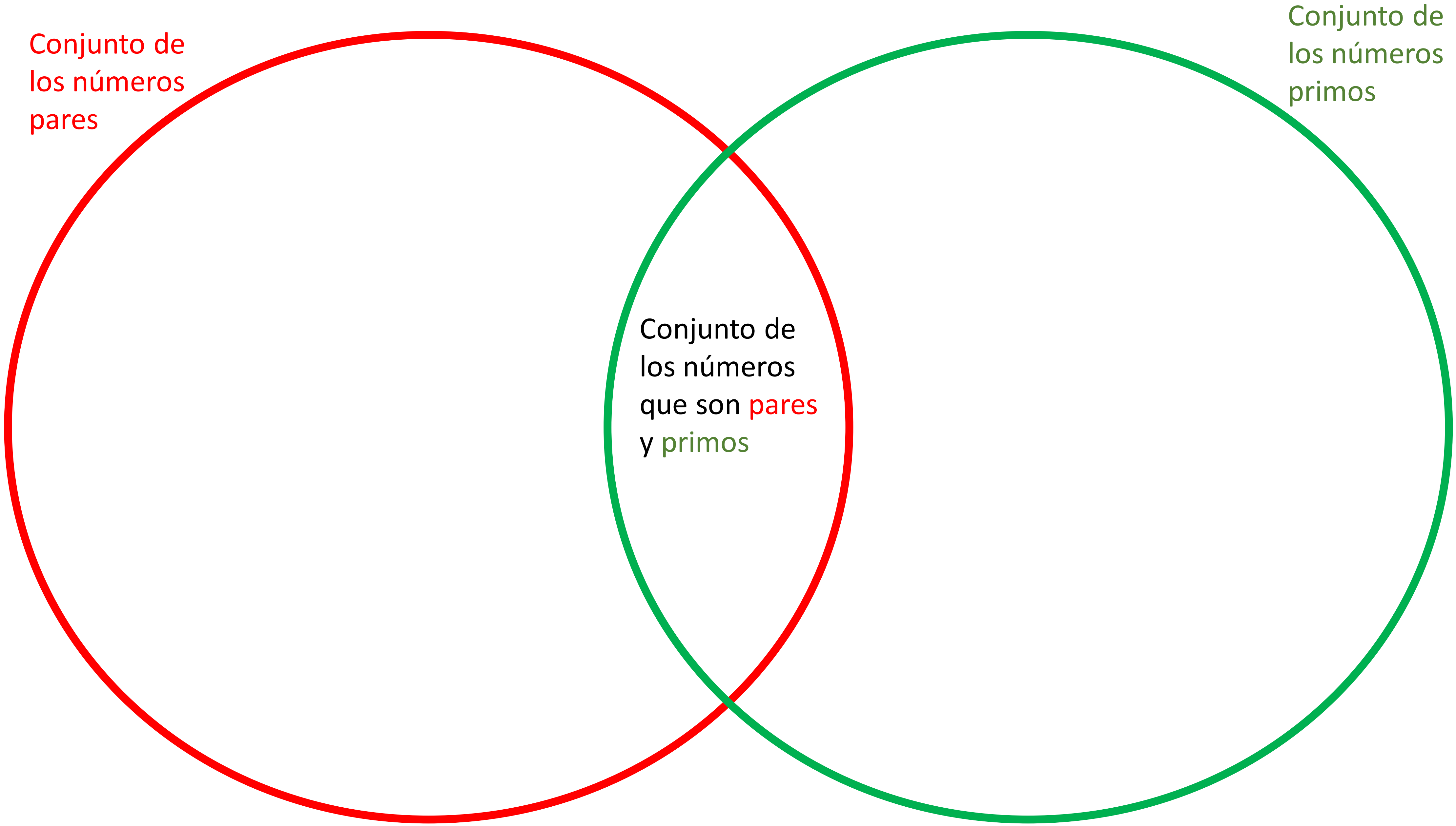
- Un número del 0 al 1 que representa la certidumbre que se tiene respecto de la ocurrencia de un evento.

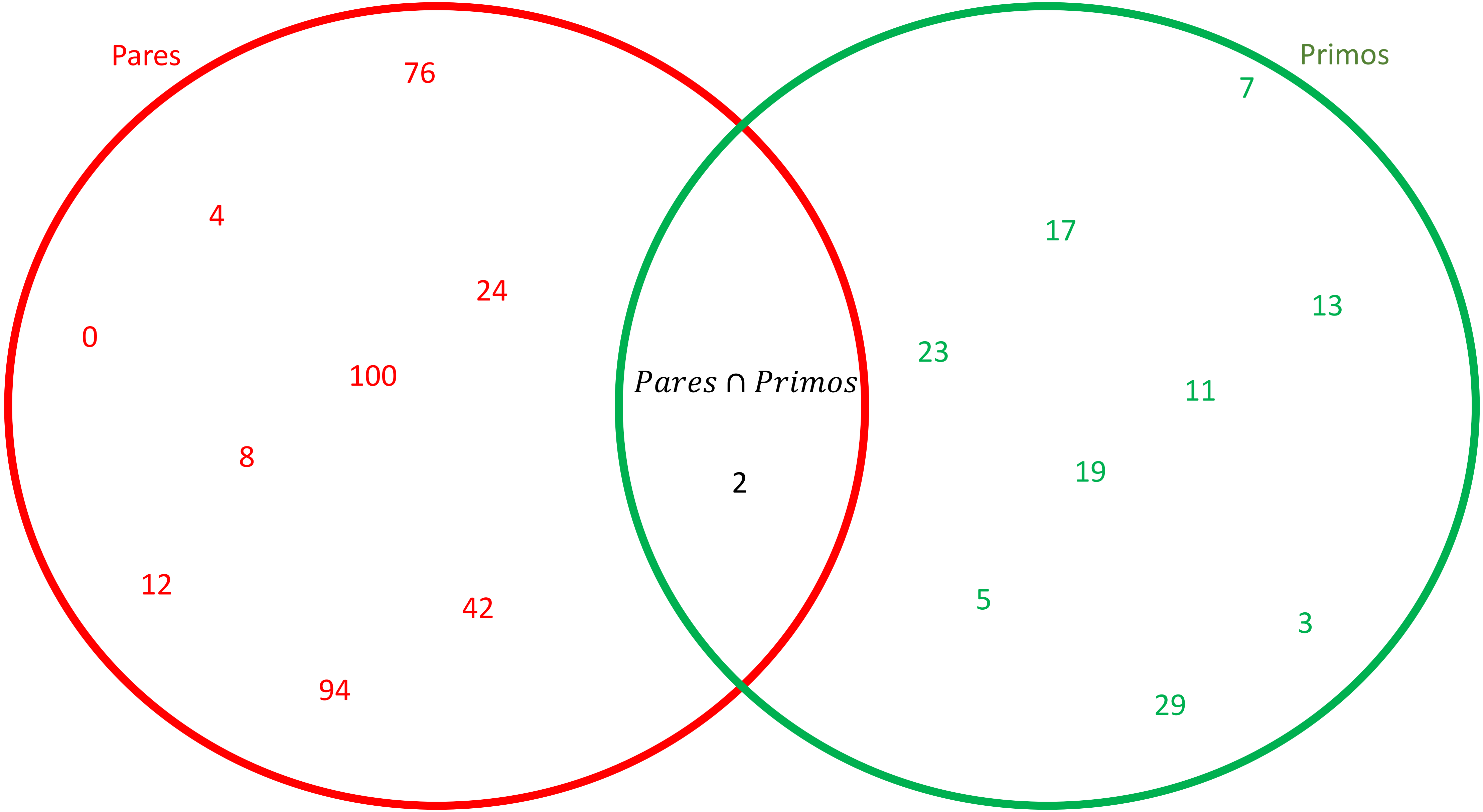
4. Definición axiomática de probabilidad

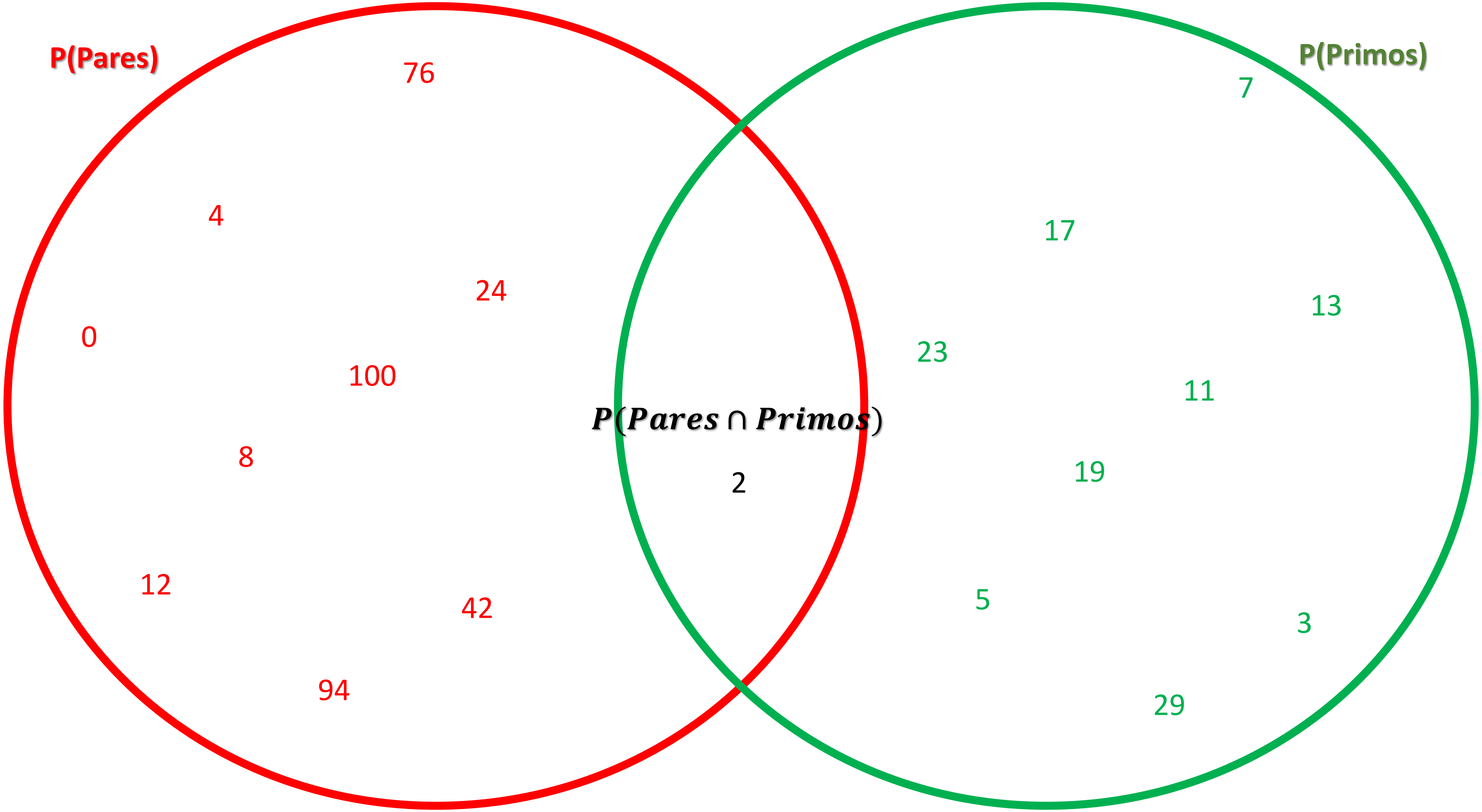
Axiomas de Kolmogorov:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, cuando A_1, A_2 ... son ajenos.


Ω


Conjunto de los números pares
Conjunto de los números primos
Conjunto de los números que son pares y primos


Pares
76
4
24
0
100
8
12
42
94
$Pares \cap Primos$
2
Primos
7
17
13
23
11
19
5
3
29



P(Pares)
P(Primos)
76
4
24
0
100
8
12
42
94
$P(Pares \cap Primos)$
2
7
17
13
23
11
19
5
3
29

Conceptos clave:

- **Probabilidad:** Un número real del 0 al 1 que indica qué tan probable es que un evento X ocurra.

$$p(X)$$

- **Probabilidad conjunta:** Indica la probabilidad de que **dos eventos** ocurran de manera simultánea.

$$p(X \cap Y)$$

Probabilidad condicional

¿Qué tan probable es...

... que un individuo X sea zurdo?

$p(\text{Zurdo}) = .08$

Probabilidad Condicional

- La probabilidad de un evento A, a la luz de ciertos datos B

P(A|B)

p(El chico es zurdo | **Escribe con la mano <u>izquierda</u>**)

$p(A|B) > p(A)$

p(El chico es zurdo | **Escribe con mano <u>derecha</u>**)

$p(A|B) < p(A)$

Probabilidad Condicional

Eventos independientes

Evento A:

La probabilidad de que va a llover

Evento B:

Hoy es miércoles

$$p(A|B) = p(A)$$

Eventos <u>no</u> independientes

Evento A:

La probabilidad de que va a llover

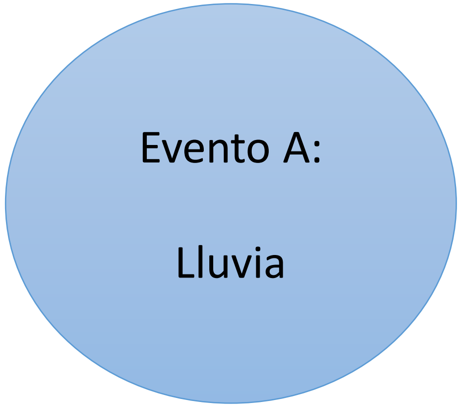
Evento B:

Está nublado

$$p(A|B) > p(B)$$

Probabilidad Condicional

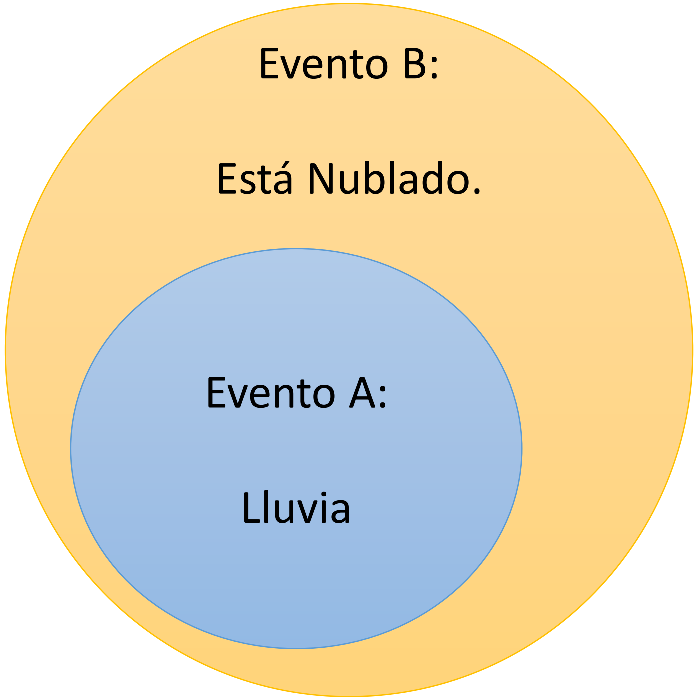
Eventos independientes



$p(A|B) = p(A)$

Eventos no independientes

$p(A|B) > p(A)$



Probabilidad conjunta

De acuerdo con la **Ley de la multiplicación de probabilidades,** la **Probabilidad Conjunta** se computa como:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

De acuerdo con la **Ley de la multiplicación de probabilidades,** la **Probabilidad Conjunta** se computa como:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

- Eventos independientes

Evento A:

La probabilidad de que va a llover

Evento B:

Hoy es miércoles

$p(A|B) = p(A)$

De acuerdo con la **Ley de la multiplicación de probabilidades,** la **Probabilidad Conjunta** se computa como:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

- Eventos independientes

Evento A:

La probabilidad de que va a llover

Evento B:

Hoy es miércoles

p(A|B) = p(A)

De acuerdo con la **Ley de la multiplicación de probabilidades,** la **Probabilidad Conjunta** se computa como:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A) = p(B) \cdot p(A)$$

De acuerdo con la **Ley de la multiplicación de probabilidades,** la **Probabilidad Conjunta** se computa como:

$$\left.\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \cdot p(B) \\[2em] p(A \cap B) &= p(B) \cdot p(A) \end{aligned}\right\} \qquad Pr(A) \geq Pr(A \wedge B) \leq Pr(B)$$

Linda la cajera

Linda tiene 31 años de edad, soltera, inteligente y muy brillante. Se especializó en filosofía. Como estudiante, estaba profundamente preocupada por los problemas de discriminación y justicia social, participando también en manifestaciones anti-nucleares.

¿Que es más probable?

A) Linda es una cajera de banco.
B) Linda es una cajera de banco y es activista de movimientos feministas.

Linda la cajera

Linda tiene 31 años de edad, soltera, inteligente y muy brillante. Se especializó en filosofía. Como estudiante, estaba profundamente preocupada por los problemas de discriminación y justicia social, participando también en manifestaciones anti-nucleares.

¿Que es más probable?

A) Linda es una cajera de banco.

B) Linda es una cajera de banco y es activista de movimientos feministas.

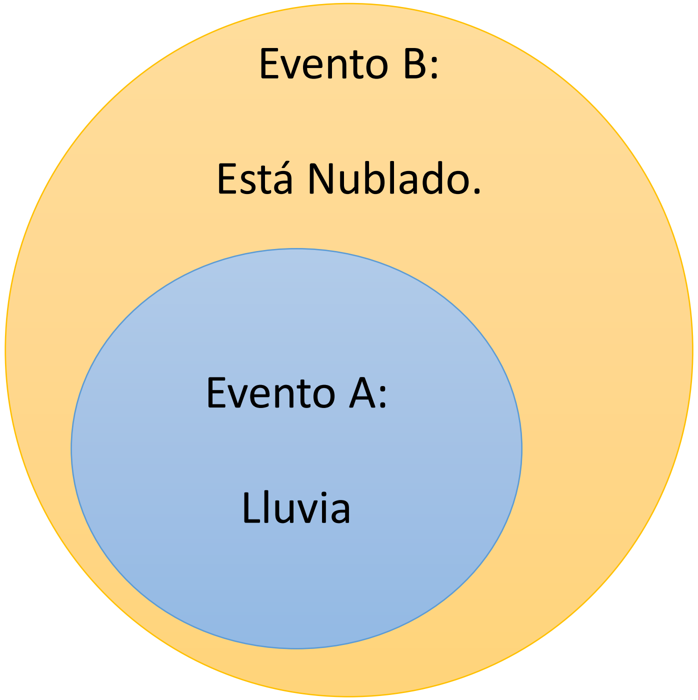
¿Por qué?

Ser feminista y ser cajera de banco son eventos **independientes**

$$p(F \cap B) = p(F) \cdot p(B)$$

$$Pr(A) \geq Pr(A \wedge B) \leq Pr(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

¡Teorema de Bayes!

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\ P(A)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **Probabilidad Posterior:** La probabilidad de un evento A, dada la evidencia B.
- **Probabilidad prior:** La probabilidad del evento A, con independencia de la observación de B
- **Verosimilitud:** La probabilidad de observar la evidencia B, cuando el evento A ocurre.
- **Verosimilitud marginal:** La probabilidad de observar la evidencia, con independencia de su relación con A.

¿Qué implica decir ‘Bayesiano’?

Hay una **actualización constante** de la información que me permite reducir mi incertidumbre respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento X.

Ejemplo: Reclamo de equipaje

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.

- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

Al salir la primer maleta, esta se ve como la tuya. Varias personas comienzan a hacer ademán de recogerla, pero, ¿Cuál es la probabilidad de que de hecho sea **tu maleta**?

Teorema de Bayes en acción:

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.
- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

A -> La maleta es mía

B -> La maleta **se ve** como la mía

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

•Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.

•Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

- **Probabilidad Posterior:**

  P(Mi maleta|Se ve como mi maleta)

- **Probabilidad prior:**

  P(Mi maleta)

$$\frac{1}{100} = 0.01$$

- **Verosimilitud:**

  P(Se vea como mi maleta |es mi maleta)

  1

- **Verosimilitud marginal:**

  P(Se vea como mi maleta) =

  0.05

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

•Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.

•Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

- **Probabilidad Posterior:**

  P(Mi maleta|Se ve como mi maleta)

- **Probabilidad prior:**

  P(Mi maleta) = $\frac{1}{100} = 0.01$

- **Verosimilitud:**

  P(Se vea como mi maleta |es mi maleta) = 1

- **Verosimilitud marginal:**

  P(Se vea como mi maleta) = Probabilidad general + **Probabilidad sabiendo que mi maleta de hecho está ahí**

Verosimilitud marginal

La probabilidad de que la evidencia acompañe a cualquier estado posible del mundo.

Verosimilitud marginal

Hay un 0.05 de probabilidad de que si yo tomo una maleta al azar de este montón, sea el mismo modelo que mi maleta.

Verosimilitud marginal

Verosimilitud marginal

La probabilidad ha incrementado un poco dado que sé por seguro que una de las maletas es mía y tiene que ser del mismo modelo.

Verosimilitud marginal

[redacted]

$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$

$$\sum_i p(A_i \cap B)$$

$$p(A \cap B) + p(A' \cap B)$$

$$(p(B|A) * p(A)) + (p(B|A') * p(A'))$$

$$((1) * (0.01)) + (p(0.05) * p(0.99))$$

$$(0.01) + (0.049)$$

$$= 0.059$$

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.
- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

- **Probabilidad Posterior:**

  P(Mi maleta|Se ve como mi maleta)
- **Probabilidad prior:**

  P(Mi maleta) = $\frac{1}{100} = 0.01$
- **Verosimilitud:**

  P(Se vea como mi maleta |es mi maleta) = 1
- **Verosimilitud marginal:**

  P(Se vea como mi maleta) = 0.05

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

•Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.

•Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

- **Probabilidad Posterior:**

  P(Mi maleta|Se ve como mi maleta)

- **Probabilidad prior:**

  P(Mi maleta) = $\frac{1}{100} = 0.01$

- **Verosimilitud:**

  P(Se vea como mi maleta |es mi maleta) = 1

- **Verosimilitud marginal:**

  P(Se vea como mi maleta) = **0.059**

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)p(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{(1)(0.01)}{(0.059)}$$

$$P(A|B) = \frac{(0.01)}{(0.059)} = .1694$$

$$P(A'|B) = \frac{P(B|A')p(A')}{P(B)}$$

$$P(A'IB) = \frac{(0.05)(0.99)}{(0.059)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(A'|B) = \frac{(0.049)}{(0.059)} = .8389$$

¿Qué implica decir ‘Bayesiano’?

Hay una **actualización constante** de la información que me permite reducir mi incertidumbre respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento X.

Ejemplo: Reclamo de equipaje

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.
- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

Continúas esperando, **ya sólo quedan 15 maletas por salir. ¿Cuál es la probabilidad de que, si la maleta número 86 se ve igual a la tuya, sea la tuya?**

Teorema de Bayes en acción:

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.
- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

A -> La maleta es mía

B -> La maleta **se ve** como la mía

Teorema de Bayes en acción:

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.
- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- **Probabilidad Posterior:**

  P(Mi maleta|Se ve como mi maleta)

- **Probabilidad prior:**

  P(Mi maleta)

  $$\frac{1}{15} = 0.0666$$

- **Verosimilitud:**

  P(Se vea como mi maleta |es mi maleta)

  1

- **Verosimilitud marginal:**

  P(Se vea como mi maleta) =

Verosimilitud marginal

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

$$\sum_i p(A_i \cap B)$$

$$\boxed{p(A \cap B)} + \boxed{p(A' \cap B)}$$

$$\boxed{(p(B|A) * p(A))}\ \boxed{+\ (p(B|A') * p(A'))}$$

$$((1) * (0.0666)) + (p(0.05) * p(0.9333))$$

$$(0.0666) + (0.04665)$$

$$= 0.1132$$

Teorema de Bayes en acción:

- Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.
- Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

- **Probabilidad Posterior:**

  P(Mi maleta|Se ve como mi maleta)
- **Probabilidad prior:**

  P(Mi maleta) = $\frac{1}{100} = 0.01$
- **Verosimilitud:**

  P(Se vea como mi maleta |es mi maleta) = 1
- **Verosimilitud marginal:**

  P(Se vea como mi maleta) = 0.05

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

•Tú y 99 personas más están esperando a recoger su equipaje.

•Tu maleta es muy común: el 5% de los pasajeros tiene una igual.

- **Probabilidad Posterior:**

  P(Mi maleta|Se ve como mi maleta)

- **Probabilidad prior:**

  P(Mi maleta) = $\frac{1}{100} = 0.01$

- **Verosimilitud:**

  P(Se vea como mi maleta |es mi maleta) = 1

- **Verosimilitud marginal:**

  P(Se vea como mi maleta) = **0.1132**

Teorema de Bayes en acción:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)p(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{(1)(0.0666)}{(0.1132)}$$

$$P(A|B) = \frac{(0.0666)}{(0.1132)} = .5883$$

$$P(A'|B) = \frac{P(B|A')p(A')}{P(B)}$$

$$P(A'IB) = \frac{(0.05)(0.9333)}{(0.1132)}$$

$$P(A'|B) = \frac{(0.04665)}{(0.1132)} = .4121$$

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(B|A)\ P(A)}}{\mathrm{P(B)}}$$

Ejemplo: Diagnóstico médico

Después de realizar su revisión médica anual, una doctora encuentra que su **paciente X ha dado positivo (PXPos)** **a la** **Enfermedad X (EnfX)**.

Sin embargo, esta enfermedad es extremadamente inusual en el grupo etario del paciente X (sólo el 0.2% lo presentan) y se sabe que la prueba realizada no es del todo confiable (Tiene una tasa de Falsos positivos del 20% y una tasa de Falsos negativos del 10%)

¿Qué tan probable es que el PacX tenga la EnfX dados los resultados obtenidos por su prueba?

Ejemplo: Diagnóstico médico

Después de realizar su revisión médica anual, una doctora encuentra que su **paciente X ha dado positivo (PXPos) a la Enfermedad X (EnfX)**.

Sin embargo, esta enfermedad es extremadamente inusual en el grupo etario del paciente X (sólo el 0.2% lo presentan) y se sabe que la prueba realizada no es del todo confiable (Tiene una tasa de Falsos positivos del 20% y una tasa de Falsos negativos del 10%)

¿Qué tan probable es que el PacX tenga la EnfX dados los resultados obtenidos por su prueba?

Ejemplo: Diagnóstico médico

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)p(A)}{P(B)}$$

- **Probabilidad Posterior:**

  P(EnfX | PXPos)

?

- **Probabilidad prior:**

  P(Enfx)

- **Verosimilitud:**

- **Verosimilitud marginal:**

Ejemplo: Diagnóstico médico

Después de realizar su revisión médica anual, una doctora encuentra que su **paciente X ha dado positivo (PXPos) a la Enfermedad X (EnfX)**.

Sin embargo, esta enfermedad es extremadamente inusual en el grupo etario del paciente X (sólo el 0.2% lo presentan) y se sabe que la prueba realizada no es del todo confiable (Tiene una tasa de Falsos positivos del 20% y una tasa de Falsos negativos del 10%)

¿Qué tan probable es que el PacX tenga la EnfX dados los resultados obtenidos por su prueba?

Ejemplo: Diagnóstico médico

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)p(A)}{P(B)}$$

- **Probabilidad Posterior:**

  P(EnfX| PXPos)

  ?

- **Probabilidad prior:**

  P(Enfx)

  0.002

- **Verosimilitud:**

  P(PXPos|EnfX)

- **Verosimilitud marginal:**

Ejemplo: Diagnóstico médico

Después de realizar su revisión médica anual, una doctora encuentra que su **paciente X ha dado positivo (PXPos) a la Enfermedad X (EnfX)**.

Sin embargo, esta enfermedad es extremadamente inusual en el grupo etario del paciente X (sólo el 0.2% lo presentan) y se sabe que la prueba realizada no es del todo confiable (Tiene una tasa de Falsos positivos del 20% y una tasa de Falsos negativos del 10%)

P(PXPos|EnfX)

¿Qué tan probable es que el PacX tenga la EnfX dados los resultados obtenidos por su prueba?

Ejemplo: Diagnóstico médico

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,p(A)}{P(B)}$$

- **Probabilidad Posterior:**

  P(EnfX| PXPos)

  ?

- **Probabilidad prior:**

  P(Enfx)

  0.002

- **Verosimilitud:**

  P(PXPos|EnfX)

  0.9

- **Verosimilitud marginal:**

  P(PXPos)

Verosimilitud marginal:

P(PXPos)

$$\boxed{p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)}$$

$$\sum_i p(A_i \cap B)$$

$$\boxed{p(EnfX \cap PXPos)} + \boxed{p(No\ EnfX \cap PXPos)}$$

$$\boxed{(p(\mathrm{PXPos}|EnfX) * p(EnfX))} + \boxed{(p(\mathrm{PXPos}|No\ EnfX) * p(No\ EnfX))}$$

$$((0.9) * (0.002)) + (p(0.20) * p(.998))$$

$$(0.0018) + (0.1996)$$

$$= 0.2014$$

Ejemplo: Diagnóstico médico

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)p(A)}{P(B)}$$

- **Probabilidad Posterior:**
  P(EnfX| PXPos)
  ?
- **Probabilidad prior:**
  P(Enfx)
  0.002
- **Verosimilitud:**
  P(PXPos|EnfX)
  0.9
- **Verosimilitud marginal:**
  P(PXPos)
  0.2014

Ejemplo: Diagnóstico médico

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)p(A)}{P(B)}$$

$$P(\mathrm{EnfX}|PXPos) = \frac{P(\mathrm{PXPos}|EnfX)p(EnfX)}{P(PXPos)}$$

$$P(\mathrm{EnfX}|PXPos) = \frac{(.90)(0.002)}{(0.2014)}$$

$$P(\mathrm{EnfX}|PXPos) = \frac{(0.0018)}{(0.2014)} = 0.008937$$

$$P(\mathrm{No\ EnfX}|PXPos) = 0.99106$$

Comentarios del Dr. Arturo Bouzas ☺

www.bouzaslab25.com

Materiales Recomendados

- **Capítulo 1** del libro **Fundamentos en Estadística** de Vicente Ponzoda y Javier Revuelta, para una introducción a Teoría de la Probabilidad
- **Capítulo 1** del libro **Think Bayes**, por *Allen B. Downey*, sobre cómo funciona la Regla de Bayes.

Artículos y Tutoriales

- Etz, A., & Vandekerckhove, J. (2018). Introduction to Bayesian inference for psychology. *Psychonomic Bulletin & Review*, *25*(1), 5-34.

¡Muchas gracias por su atención!

Adriana F. Chávez De la Peña
adrifelcha@gmail.com