Introducción a la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)

Iwin Leenen, Ramsés Vázquez-Lira y José Luis Baroja-Manzano

Facultad de Psicología, UNAM
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

Curso Intersemestral: Introducción a los modelos psicométricos
15/01/2018 – 19/01/2018

Índice:

Índice:

Índice:

Índice:

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - Razón
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - ~~Razón~~
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la "puntuación verdadera"?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - ~~Razón~~
  - Intervalo
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - ~~Razón~~
  - ~~Intervalo~~
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - ~~Razón~~
  - ~~Intervalo~~
  - Ordinal
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - ~~Razón~~
  - ~~Intervalo~~
  - Ordinal ?
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces

- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.

- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - ~~Razón~~
  - ~~Intervalo~~
  - Ordinal ?
  - Nominal

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?

- Interpretación común de la puntuación verdadera:
  La puntuación media que una persona obtendría si el instrumento se aplicase un gran número de veces
- Pero... ¿La puntuación verdadera nos dice algo sobre alguna entidad más abstracta?
  La TCT (en su formulación original) ni considera esta pregunta.
- Relacionado con esto: ¿Cuál es el nivel de medición de la puntuación verdadera?
  - ~~Razón~~
  - ~~Intervalo~~
  - Ordinal ?
  - Nominal ?

Índice:

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el examen ordinario de Psicometría (de opción múltiple), Yannick contestó correctamente 49 de las 90 preguntas. Con base en este resultado el profesor le asigna una calificación de **5 sobre 10**.

Tres meses después, Yannick se presenta para el examen extraordinario de la misma materia. En este examen los estudiantes también responden a 90 preguntas de opción múltiple, aunque son otras. Esta vez, Yannick da la respuesta correcta en 65 preguntas, lo cual corresponde con una calificación de **7 sobre 10**.

Existen dos interpretaciones para los resultados obtenidos:

1. Yannick domina en mayor grado la materia de Psicometría
2. Las preguntas del examen extraordinario eran más fáciles

La TCT no permite distinguir entre ambas interpretaciones.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Se puede considerar el mismo problema al nivel de un grupo o población:

Un profesor considera las calificaciones en su examen de Psicometría en dos años seguidos: enero de 2017 y enero de 2018.

Observa que el promedio de las calificaciones de los estudiantes en 2018 es más alto que en 2017. En específico:

$$\overline{X}_{2017} = 8.1$$
$$\overline{X}_{2018} = 8.5$$

Desde la TCT no podemos saber cuánto de la diferencia se debe a

1. la diferencia en nivel entre los dos grupos de estudiantes
2. la diferencia en grado de dificultad de las dos variantes del examen

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de la puntuación de la persona de la composición del test

Se puede considerar el mismo problema al nivel de un grupo o población:

Un profesor considera las calificaciones en su examen de Psicometría en dos años seguidos: enero de 2017 y enero de 2018.

Observa que el promedio de las calificaciones de los estudiantes en 2018 es más alto que en 2017. En específico:

$$\overline{X}_{2017} = 8.1$$

$$\overline{X}_{2018} = 8.5$$

Desde la TCT no podemos saber cuánto de la diferencia se debe a

1. la diferencia en nivel entre los dos grupos de estudiantes
2. la diferencia en grado de dificultad de las dos variantes del examen

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Consideremos el mismo problema desde otro ángulo:

Una de las preguntas (digamos, pregunta j) en el examen de 2017 se repitió en el examen de 2018. Se obtuvieron los siguientes índices para este ítem:

	Grado de dificultad	Correlación item-test (biserial puntual)
2017	$p_j = .57$	$r_{jX} = .28$
2018	$p_j = .66$	$r_{jX} = .23$

Aunque se trata de la misma pregunta, los índices son diferentes para ambos grupos.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Consideremos el mismo problema desde otro ángulo:

Una de las preguntas (digamos, pregunta *j*) en el examen de 2017 se repitió en el examen de 2018. Se obtuvieron los siguientes índices para este ítem:

	Grado de dificultad	Correlación item-test (biserial puntual)
2017	$p_j = .57$	$r_{jX} = .28$
2018	$p_j = .66$	$r_{jX} = .23$

Aunque se trata de la misma pregunta, los índices son diferentes para ambos grupos.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Lo mismo aplica a índices globales del examen, como el coeficiente de confiabilidad o el error estándar de medición.

Los coeficientes α de Cronbach, para ambas variantes del examen fueron:

$$\alpha_{2017} = .94$$
$$\alpha_{2018} = .91$$

Nota:
En este caso se trata de diferentes variantes de un examen de Psicometría.
Sin embargo, también si en ambos años se hubiese aplicado el mismo conjunto de preguntas, lo más probable es que se habría encontrado una diferencia entre los α's de ambos grupos.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Lo mismo aplica a índices globales del examen, como el coeficiente de confiabilidad o el error estándar de medición.

Los coeficientes α de Cronbach, para ambas variantes del examen fueron:

$$\alpha_{2017} = .94$$
$$\alpha_{2018} = .91$$

Nota:
En este caso se trata de diferentes variantes de un examen de Psicometría.
Sin embargo, también si en ambos años se hubiese aplicado el mismo conjunto de preguntas, lo más probable es que se habría encontrado una diferencia entre los α's de ambos grupos.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Dependencia de las propiedades del test (e ítems) de la muestra de personas

Conclusión:

Estrictamente hablando, no son correctas afirmaciones del tipo:

- *La* confiabilidad de este test/examen es 0.90
- *El* índice de dificultad de este ítem es 0.60
- . . .

Sino, se debería decir:

- La confiabilidad de este test/examen **dentro de este grupo de personas** es 0.90
- El índice de dificultad de este ítem **dentro de este grupo de personas** es 0.60
- . . .

Índice:

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

- En teoría, al aplicar el modelo clásico a una sola persona, se permite:

$$\mathrm{Var}(E_{\text{Persona 1}}) \neq \mathrm{Var}(E_{\text{Persona 2}})$$

  En palabras: La varianza del error de medición entre las diferentes aplicaciones del test puede ser diferente para la persona 1 y la persona 2.

- Sin embargo, al aplicar el modelo clásico a una población de personas, hay solo una aplicación por persona y se considera:

$$\mathrm{Var}(E)$$

  En palabras: La varianza del error de medición entre las diferentes personas de la población.

- Entonces, por definición:
  El error estándar de medición ($\sqrt{\mathrm{Var}(E)}$) es una característica al nivel del grupo; se supone igual para todas las personas del grupo.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

- En teoría, al aplicar el modelo clásico a una sola persona, se permite:

$$\text{Var}(E_{\text{Persona 1}}) \neq \text{Var}(E_{\text{Persona 2}})$$

  En palabras: La varianza del error de medición entre las diferentes aplicaciones del test puede ser diferente para la persona 1 y la persona 2.

- Sin embargo, al aplicar el modelo clásico a una población de personas, hay solo una aplicación por persona y se considera:

$$\text{Var}(E)$$

  En palabras: La varianza del error de medición entre las diferentes personas de la población.

- Entonces, por definición:
  El error estándar de medición ($\sqrt{\text{Var}(E)}$) es una característica al nivel del grupo; se supone igual para todas las personas del grupo.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

- En teoría, al aplicar el modelo clásico a una sola persona, se permite:

  $$\mathrm{Var}(E_{\text{Persona 1}}) \neq \mathrm{Var}(E_{\text{Persona 2}})$$

  En palabras: La varianza del error de medición entre las diferentes aplicaciones del test puede ser diferente para la persona 1 y la persona 2.

- Sin embargo, al aplicar el modelo clásico a una población de personas, hay solo una aplicación por persona y se considera:

  $$\mathrm{Var}(E)$$

  En palabras: La varianza del error de medición entre las diferentes personas de la población.

- Entonces, por definición:
  El error estándar de medición ($\sqrt{\mathrm{Var}(E)}$) es una característica al nivel del grupo; se supone igual para todas las personas del grupo.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

- No obstante, el problema es:
  En aplicaciones prácticas, el supuesto de un error estándar uniforme generalmente no se cumple.

  En general, la medición es más precisa (es decir, la varianza del error es más pequeña) para personas con puntuaciones promedio.

- En el caso de un examen, donde la decisión principal se sitúa en la aprobación/reprobación del estudiante, es más importante medir con precisión a personas cercanas a la linea divisora.

  La linea divisora no necesariamente está cerca al promedio de los estudiantes.

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Se supone que el error estándar de medición es el mismo para cada persona

- No obstante, el problema es:
  En aplicaciones prácticas, el supuesto de un error estándar uniforme generalmente no se cumple.

  En general, la medición es más precisa (es decir, la varianza del error es más pequeña) para personas con puntuaciones promedio.

- En el caso de un examen, donde la decisión principal se sitúa en la aprobación/reprobación del estudiante, es más importante medir con precisión a personas cercanas a la linea divisora.

  La linea divisora no necesariamente está cerca al promedio de los estudiantes.

Índice:

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Evaluación de los supuestos del modelo

Abad y colegas (2011, p. 125):

> *[En la TCT] no se dispone de indicadores de bondad de ajuste que nos informen del grado en que el modelo se ajusta a los datos.*

Sean críticos cuando alguien opina que:

"los supuestos de la TCT son débiles y fácilmente se ajustan a los datos".

Críticas contra la Teoría Clásica de los Tests

Evaluación de los supuestos del modelo

Abad y colegas (2011, p. 125):

> *[En la TCT] no se dispone de indicadores de bondad de ajuste que nos informen del grado en que el modelo se ajusta a los datos.*

Sean críticos cuando alguien opina que:

"los supuestos de la TCT son débiles y fácilmente se ajustan a los datos".

Índice:

Índice:

Índice:

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el “comportamiento” de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el “comportamiento” de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones
Respuesta A
Respuesta B
Respuesta C
Respuesta D
Sin responder

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el "comportamiento" de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo I
Respuesta A	A	$\rightsquigarrow$	Prob. (A)
Respuesta B	B	$\rightsquigarrow$	Prob. (B)
Respuesta C	C	$\rightsquigarrow$	Prob. (C)
Respuesta D	D	$\rightsquigarrow$	Prob. (D)
Sin responder	O	$\rightsquigarrow$	Prob. (O)

El marco general de la TRI: Ideas básicas

La TRI incluye **un gran número** de modelos, los cuales tienen en común:

- Un modelo TRI es una teoría sobre el “comportamiento” de una persona respondiendo a un ítem.

  En particular: Para cada una de las posibles categorías de respuesta en el ítem, el modelo especifica la probabilidad de que la persona conteste en esta categoría.

  Ejemplo: Una pregunta de opción múltiple con 4 alternativas:

Opciones	Categoría		Modelo Tipo II
Respuesta A	Correcto (1)	$\rightsquigarrow$	Prob. (1)
Respuesta B			
Respuesta C	Incorrecto (0)	$\rightsquigarrow$	Prob. (0)
Respuesta D			
Sin responder			

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona i, al contestar el ítem j, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{ij} = k) = f(\text{parámetro(s) de la persona } i, \text{parámetro(s) del ítem } j)$$

El marco general de la TRI: Ideas básicas

- Un modelo TRI define:
  - una o más características numéricas de la persona
  - una o más características numéricas del ítem.

  Estas características numéricas se llaman parámetros.

- El modelo especifica cómo se combinan los parámetros de la persona y del ítem para conocer las probabilidades de respuesta.

  La probabilidad de que la persona i, al contestar el ítem j, responda en la categoría k:

$$\Pr(Y_{ij} = k) \;=\; f(\text{parámetro(s) de la persona } i, \text{parámetro(s) del ítem } j)$$

Índice:

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona *i* se le puede asignar un parámetro θ_i;
- A cada ítem *j* se puede asignar un parámetro β_j;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona *i* y cualquier item *j*, se cumple:

$$\text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1 \qquad \text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1	$\theta_6 = 13$
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona *i* se le puede asignar un parámetro θ_i;
- A cada ítem *j* se puede asignar un parámetro β_j;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona *i* y cualquier item *j*, se cumple:

$$\text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1 \qquad \text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

$\boxed{\theta_7 < \beta_6 \;\rightarrow\; Y_{76} = 0}$

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona i se le puede asignar un parámetro θ_i;
- A cada ítem j se puede asignar un parámetro β_j;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona i y cualquier item j, se cumple:

$$\text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1 \qquad \text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1	$\theta_6 = 13$
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

$\boxed{\theta_4 \geqslant \beta_2 \;\rightarrow\; Y_{42} = 1}$

En el modelo de Guttman se supone que:

- A cada persona *i* se le puede asignar un parámetro θ_i;
- A cada ítem *j* se puede asignar un parámetro β_j;
- La regla que relaciona los parámetros de personas e ítems en el modelo de Guttman es:

  Para cualquier persona *i* y cualquier item *j*, se cumple:

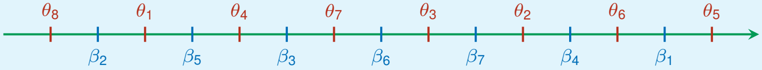
$$\text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1 \qquad \text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0$$

El escalograma de Guttman (1950)

	Preguntas							
	1	2	3	4	5	6	7	
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 3$
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1	$\theta_2 = 11$
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0	$\theta_3 = 9$
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0	$\theta_4 = 5$
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1	$\theta_5 = 15$
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1	$\theta_6 = 13$
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0	$\theta_7 = 7$
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0	$\theta_8 = 1$
	$\beta_1 = 14$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 12$	$\beta_5 = 4$	$\beta_6 = 8$	$\beta_7 = 10$	

Cada estudiante y cada pregunta se puede posicionar en un continuo, tal que:

- el estudiante da la respuesta correcta a las preguntas a su lado izquierdo
- el estudiante da la respuesta incorrecta a las preguntas a su lado derecho



El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

$\boxed{\beta_3 > \theta_4 \geqslant \beta_4}$

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

$\boxed{\beta_3 \leqslant \theta_3 < \beta_4}$

$\boxed{\beta_3 > \theta_4 \geqslant \beta_4}$

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	1	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

$\boxed{\beta_3 \leqslant \theta_3 < \beta_4}$

$\boxed{\beta_3 > \theta_4 \geqslant \beta_4}$

Para datos reales, el modelo de Guttman nunca se ajusta.

El modelo de Guttman es muy/demasiado exigente para los datos.

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	1	2	3	4	5	6	7
Estudiante 1	0	1	0	0	0	0	0
Estudiante 2	0	1	1	0	1	1	1
Estudiante 3	0	1	1	0	1	1	0
Estudiante 4	0	1	0	0	1	0	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1
Estudiante 6	0	1	1	1	1	1	1
Estudiante 7	0	1	1	0	1	0	0
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0

Para datos reales, el modelo de Guttman nunca se ajusta.

El modelo de Guttman es muy/demasiado exigente para los datos.

Para que el modelo se ajusta a los datos, debe ser posible reordenar filas y columnas de la matriz de datos tal que exhibe un “triangulo” de 1s.

El escalograma de Guttman (1950)

¿Cualquier matriz de datos binarios se ajusta al modelo de Guttman?

	Preguntas						
	2	5	3	6	7	4	1
Estudiante 8	0	0	0	0	0	0	0
Estudiante 1	1	0	0	0	0	0	0
Estudiante 4	1	1	0	0	0	0	0
Estudiante 7	1	1	1	0	0	0	0
Estudiante 3	1	1	1	1	0	0	0
Estudiante 2	1	1	1	1	1	0	0
Estudiante 6	1	1	1	1	1	1	0
Estudiante 5	1	1	1	1	1	1	1

Para datos reales, el modelo de Guttman nunca se ajusta.

El modelo de Guttman es muy/demasiado exigente para los datos.

Para que el modelo se ajusta a los datos, debe ser posible reordenar filas y columnas de la matriz de datos tal que exhibe un “triangulo” de 1s.

Índice:

Índice:

Índice:

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Retomemos el modelo de Guttman:

Para cualquier persona *i* y cualquier item *j*, se cumple:

$$\text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1,$$
$$\text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0;$$

lo cual es equivalente con:

$$\Pr(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_i \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta_i < \beta_j \end{cases}$$

Evidentemente, se cumple:

$$\Pr(Y_{ij} = 0) = 1 - \Pr(Y_{ij} = 1)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Retomemos el modelo de Guttman:

Para cualquier persona i y cualquier item j, se cumple:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1, \\ \text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0; \end{aligned}$$

lo cual es equivalente con:

$$\Pr(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_i \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta_i < \beta_j \end{cases}$$

Evidentemente, se cumple:

$$\Pr(Y_{ij} = 0) = 1 - \Pr(Y_{ij} = 1)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Retomemos el modelo de Guttman:

Para cualquier persona i y cualquier item j, se cumple:

$$\text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1,$$
$$\text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0;$$

lo cual es equivalente con:

$$\Pr(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_i \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta_i < \beta_j \end{cases}$$

Evidentemente, se cumple:

$$\Pr(Y_{ij} = 0) = 1 - \Pr(Y_{ij} = 1)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Retomemos el modelo de Guttman:

Para cualquier persona i y cualquier item j, se cumple:

$$\text{Si } \theta_i \geqslant \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 1,$$
$$\text{Si } \theta_i < \beta_j \text{ entonces } Y_{ij} = 0;$$

lo cual es equivalente con:

$$\Pr(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_i \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta_i < \beta_j \end{cases}$$

Evidentemente, se cumple:

$$\Pr(Y_{ij} = 0) = 1 - \Pr(Y_{ij} = 1)$$

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_j(\theta) \equiv \Pr(Y_j = 1|\theta, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_j \end{cases}$$

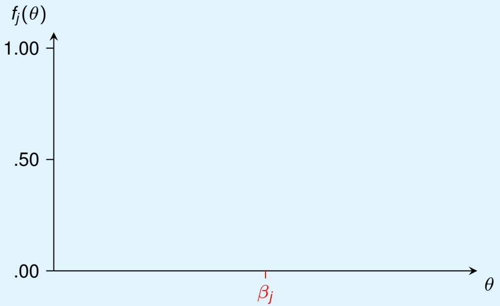
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_j(\theta) \equiv \Pr(Y_j = 1|\theta, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_j \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem j en función del parámetro de la persona?



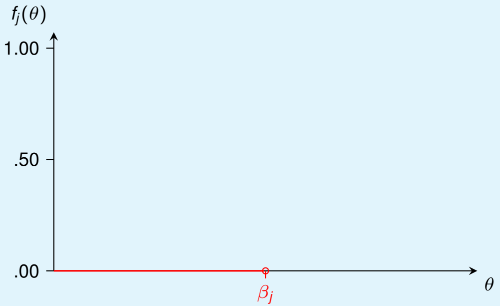
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_j(\theta) \equiv \Pr(Y_j = 1|\theta, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_j \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem j en función del parámetro de la persona?



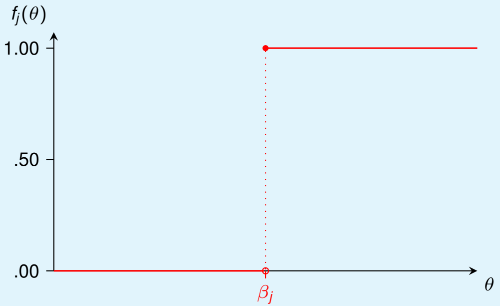
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_j(\theta) \equiv \Pr(Y_j = 1|\theta, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_j \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem j en función del parámetro de la persona?



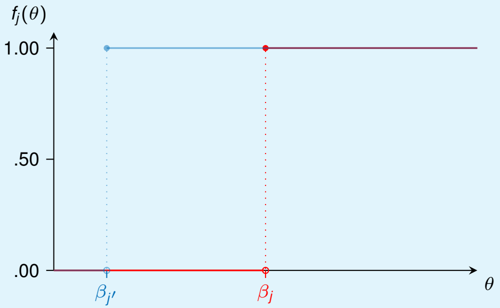
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_j(\theta) \equiv \Pr(Y_j = 1|\theta, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_j \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem j en función del parámetro de la persona?



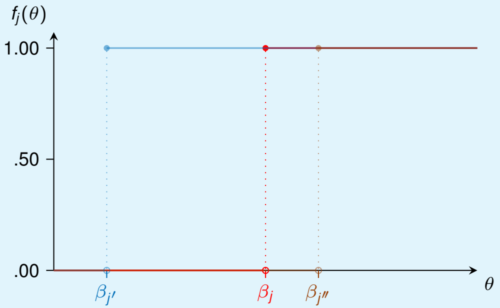
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo de Guttman

Consideramos θ como una variable y definimos:

$$f_j(\theta) \equiv \Pr(Y_j = 1|\theta, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geqslant \beta_j \\ 0 & \text{si } \theta < \beta_j \end{cases}$$

¿Como varía la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem j en función del parámetro de la persona?



La curva característica del ítem (CCI)

La *curva característica del ítem* en un modelo TRI es:

> *La función que describe cómo la probabilidad de dar una respuesta en cierta categoría del ítem varía en función del parámetro de la persona.*

La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo Rasch

El modelo de Rasch es similar al modelo de Guttman respecto a que:

- ambos son modelos para datos binarios
- suponen un parámetro (θ_i) para cada persona y un parámetro (β_j) para cada ítem.

Los modelos difieren respecto a cómo combinan los parámetros de la persona y el ítem para derivar la probabilidad de acertar.

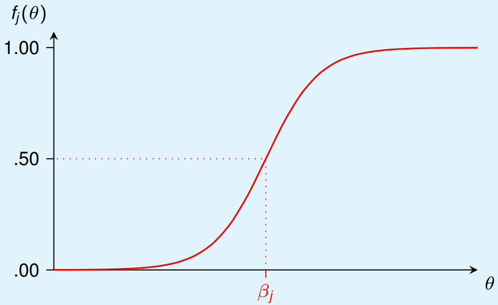
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo Rasch

El modelo de Rasch es similar al modelo de Guttman respecto a que:

- ambos son modelos para datos binarios
- suponen un parámetro (θ_i) para cada persona y un parámetro (β_j) para cada ítem.

Los modelos difieren respecto a cómo combinan los parámetros de la persona y el ítem para derivar la probabilidad de acertar.



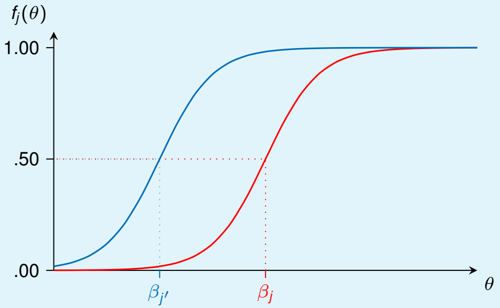
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo Rasch

El modelo de Rasch es similar al modelo de Guttman respecto a que:

- ambos son modelos para datos binarios
- suponen un parámetro (θ_i) para cada persona y un parámetro (β_j) para cada ítem.

Los modelos difieren respecto a cómo combinan los parámetros de la persona y el ítem para derivar la probabilidad de acertar.



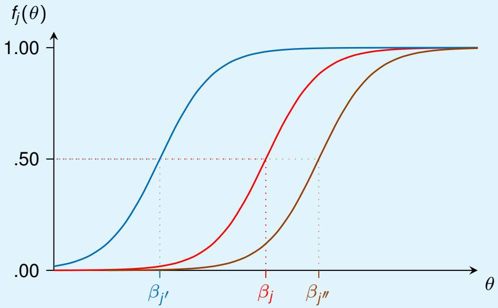
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo Rasch

El modelo de Rasch es similar al modelo de Guttman respecto a que:

- ambos son modelos para datos binarios
- suponen un parámetro (θ_i) para cada persona y un parámetro (β_j) para cada ítem.

Los modelos difieren respecto a cómo combinan los parámetros de la persona y el ítem para derivar la probabilidad de acertar.

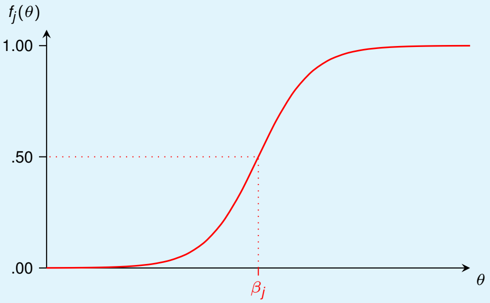


La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo Rasch

En el modelo de Rasch:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\theta - \beta_j}}{1 + e^{\theta - \beta_j}}$$



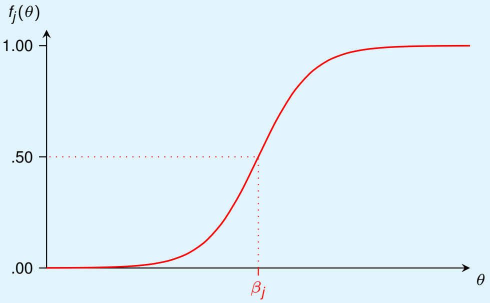
La curva característica del ítem (CCI)

La CCI en el modelo Rasch

En el modelo de Rasch:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\theta - \beta_j}}{1 + e^{\theta - \beta_j}}$$

Propiedades de las CCIs en el modelo de Rasch:



La curva característica del ítem (CCI)

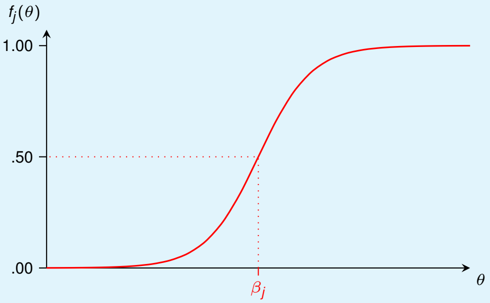
La CCI en el modelo Rasch

En el modelo de Rasch:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\theta - \beta_j}}{1 + e^{\theta - \beta_j}}$$

Propiedades de las CCIs en el modelo de Rasch:

- Son continuas



La curva característica del ítem (CCI)

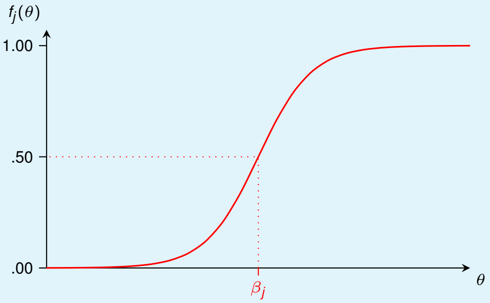
La CCI en el modelo Rasch

En el modelo de Rasch:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\theta - \beta_j}}{1 + e^{\theta - \beta_j}}$$

Propiedades de las CCIs en el modelo de Rasch:

- Son monótonamente crecientes



La curva característica del ítem (CCI)

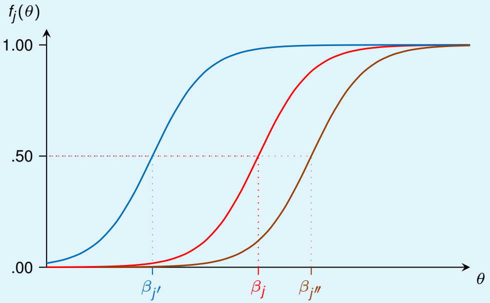
La CCI en el modelo Rasch

En el modelo de Rasch:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\theta-\beta_j}}{1 + e^{\theta-\beta_j}}$$

Propiedades de las CCIs en el modelo de Rasch:

- Nunca se cruzan



La curva característica del ítem (CCI)

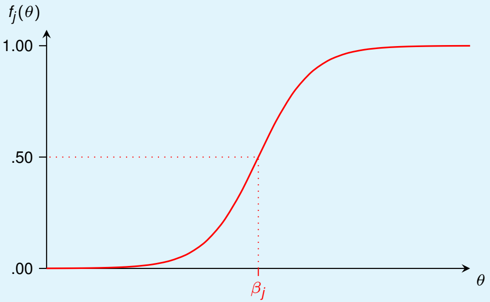
La CCI en el modelo Rasch

En el modelo de Rasch:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\theta - \beta_j}}{1 + e^{\theta - \beta_j}}$$

Propiedades de las CCIs en el modelo de Rasch:

- $\lim\limits_{\theta \to -\infty} f_j(\theta) = 0$ y $\lim\limits_{\theta \to +\infty} f_j(\theta) = 1$



Índice:

El modelo Rasch: 4 supuestos

Gerhard Fischer (1987) mostró que el modelo Rasch es matemáticamente equivalente al siguiente conjunto de cuatro supuestos:

1. θ is unidimensional y la CCI $f_j(\theta)$ es continua y monótonamente creciente para todos los ítems;
2. Para todos los ítems, se cumple que:
$$\lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to +\infty} f_j(\theta) = 1;$$
3. Las respuestas de cada persona son *localmente independientes*;
4. El número de aciertos es un estadístico suficiente para θ.

Una violación de uno o más de estos supuestos directamente implica una violación del modelo Rasch.

Y vice versa:

Si el modelo Rasch no se cumple, entonces uno o más de estos supuestos no son ciertos.

El modelo Rasch: 4 supuestos

Gerhard Fischer (1987) mostró que el modelo Rasch es matemáticamente equivalente al siguiente conjunto de cuatro supuestos:

1. θ is unidimensional y la CCI $f_j(\theta)$ es continua y monótonamente creciente para todos los ítems;
2. Para todos los ítems, se cumple que:
$$\lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to +\infty} f_j(\theta) = 1;$$
3. Las respuestas de cada persona son *localmente independientes*;
4. El número de aciertos es un estadístico suficiente para θ.

Una violación de uno o más de estos supuestos directamente implica una violación del modelo Rasch.

Y vice versa:

Si el modelo Rasch no se cumple, entonces uno o más de estos supuestos no son ciertos.

El modelo Rasch: 4 supuestos

Gerhard Fischer (1987) mostró que el modelo Rasch es matemáticamente equivalente al siguiente conjunto de cuatro supuestos:

1. θ is unidimensional y la CCI $f_j(\theta)$ es continua y monótonamente creciente para todos los ítems;
2. Para todos los ítems, se cumple que:
$$\lim_{\theta\to-\infty} f_j(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to+\infty} f_j(\theta) = 1;$$
3. Las respuestas de cada persona son *localmente independientes*;
4. El número de aciertos es un estadístico suficiente para θ.

Una violación de uno o más de estos supuestos directamente implica una violación del modelo Rasch.

Y vice versa:

Si el modelo Rasch no se cumple, entonces uno o más de estos supuestos no son ciertos.

El modelo Rasch: 4 supuestos

Gerhard Fischer (1987) mostró que el modelo Rasch es matemáticamente equivalente al siguiente conjunto de cuatro supuestos:

1. θ is unidimensional y la CCI $f_j(\theta)$ es continua y monótonamente creciente para todos los ítems;
2. Para todos los ítems, se cumple que:
$$\lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to +\infty} f_j(\theta) = 1;$$
3. Las respuestas de cada persona son *localmente independientes*;
4. El número de aciertos es un estadístico suficiente para θ.

Una violación de uno o más de estos supuestos directamente implica una violación del modelo Rasch.

Y vice versa:

Si el modelo Rasch no se cumple, entonces uno o más de estos supuestos no son ciertos.

El modelo Rasch: 4 supuestos

Gerhard Fischer (1987) mostró que el modelo Rasch es matemáticamente equivalente al siguiente conjunto de cuatro supuestos:

1. θ is unidimensional y la CCI $f_j(\theta)$ es continua y monótonamente creciente para todos los ítems;
2. Para todos los ítems, se cumple que:
$$\lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to +\infty} f_j(\theta) = 1;$$
3. Las respuestas de cada persona son *localmente independientes*;
4. El número de aciertos es un estadístico suficiente para θ.

Una violación de uno o más de estos supuestos directamente implica una violación del modelo Rasch.

Y vice versa:

Si el modelo Rasch no se cumple, entonces uno o más de estos supuestos no son ciertos.

El modelo Rasch: 4 supuestos

Gerhard Fischer (1987) mostró que el modelo Rasch es matemáticamente equivalente al siguiente conjunto de cuatro supuestos:

1. θ is unidimensional y la CCI $f_j(\theta)$ es continua y monótonamente creciente para todos los ítems;
2. Para todos los ítems, se cumple que:
$$\lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to +\infty} f_j(\theta) = 1;$$
3. Las respuestas de cada persona son *localmente independientes*;
4. El número de aciertos es un estadístico suficiente para θ.

Una violación de uno o más de estos supuestos directamente implica una violación del modelo Rasch.

Y vice versa:

Si el modelo Rasch no se cumple, entonces uno o más de estos supuestos no son ciertos.

El modelo Rasch: 4 supuestos

Gerhard Fischer (1987) mostró que el modelo Rasch es matemáticamente equivalente al siguiente conjunto de cuatro supuestos:

1. θ is unidimensional y la CCI $f_j(\theta)$ es continua y monótonamente creciente para todos los ítems;
2. Para todos los ítems, se cumple que:
$$\lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to +\infty} f_j(\theta) = 1;$$
3. Las respuestas de cada persona son *localmente independientes*;
4. El número de aciertos es un estadístico suficiente para θ.

Una violación de uno o más de estos supuestos directamente implica una violación del modelo Rasch.

Y vice versa:

Si el modelo Rasch no se cumple, entonces uno o más de estos supuestos no son ciertos.

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local tiene que ver con la siguiente pregunta:

¿A qué se debe la correlación entre los ítems?

En otras palabras:

¿Por qué, al comparar una persona que acertó el ítem j con otra persona que no lo acertó, la primera persona tiene mayor probabilidad de acertar otro ítem j' ?

Si el supuesto de independencia local se cumple, entonces la respuesta a las preguntas anteriores es:

*La **única** razón es que las personas difieren respecto al valor del parámetro θ.*

Dentro de un grupo de personas que todos tienen el mismo valor para θ, no habrá correlación entre ítems.

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local tiene que ver con la siguiente pregunta:

¿A qué se debe la correlación entre los ítems?

En otras palabras:

¿Por qué, al comparar una persona que acertó el ítem j con otra persona que no lo acertó, la primera persona tiene mayor probabilidad de acertar otro ítem j' ?

Si el supuesto de independencia local se cumple, entonces la respuesta a las preguntas anteriores es:

*La **única** razón es que las personas difieren respecto al valor del parámetro θ.*

Dentro de un grupo de personas que todos tienen el mismo valor para θ, no habrá correlación entre ítems.

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local tiene que ver con la siguiente pregunta:

¿A qué se debe la correlación entre los ítems?

En otras palabras:

¿Por qué, al comparar una persona que acertó el ítem j con otra persona que no lo acertó, la primera persona tiene mayor probabilidad de acertar otro ítem j' ?

Si el supuesto de independencia local se cumple, entonces la respuesta a las preguntas anteriores es:

*La **única** razón es que las personas difieren respecto al valor del parámetro θ.*

Dentro de un grupo de personas que todos tienen el mismo valor para θ, no habrá correlación entre ítems.

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local tiene que ver con la siguiente pregunta:

> *¿A qué se debe la correlación entre los ítems?*

En otras palabras:

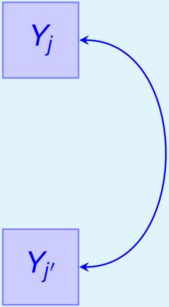
> *¿Por qué, al comparar una persona que acertó el ítem j con otra persona que no lo acertó, la primera persona tiene mayor probabilidad de acertar otro ítem j'?*

Si el supuesto de independencia local se cumple, entonces la respuesta a las preguntas anteriores es:

> *La **única** razón es que las personas difieren respecto al valor del parámetro θ.*
>
> *Dentro de un grupo de personas que todos tienen el mismo valor para θ, no habrá correlación entre ítems.*

El supuesto de independencia local

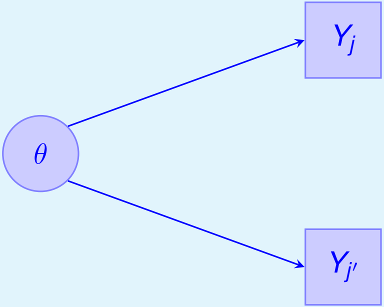
Gráficamente:



Existe correlación entre Y_j y $Y_{j'}$.

El supuesto de independencia local

Gráficamente:



Al "controlar" por θ, la correlación entre Y_j y $Y_{j'}$ desaparece.

El supuesto de independencia local

Una consecuencia importante de independencia local:

Para cualquier par de ítems j y j', se cumple:

$$\begin{aligned} \Pr(Y_j = 1 \text{ y } Y_{j'} = 1 \mid \theta, \beta_j, \beta_{j'}) &= \Pr(Y_j = 1 \mid \theta, \beta_j) \times \Pr(Y_{j'} = 1 \mid \theta, \beta_{j'}) \\ &= f_j(\theta) \times f_{j'}(\theta) \end{aligned}$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} \Pr(Y_j = 1 \text{ y } Y_{j'} = 0 \mid \theta, \beta_j, \beta_{j'}) &= \Pr(Y_j = 1 \mid \theta, \beta_j) \times \Pr(Y_{j'} = 0 \mid \theta, \beta_{j'}) \\ &= f_j(\theta) \times \left(1 - f_{j'}(\theta)\right). \end{aligned}$$

La idea anterior se generaliza a más de dos respuestas.

El supuesto de independencia local

Una consecuencia importante de independencia local:

Para cualquier par de ítems j y j', se cumple:

$$\begin{aligned} \Pr(Y_j = 1 \text{ y } Y_{j'} = 1 \mid \theta, \beta_j, \beta_{j'}) &= \Pr(Y_j = 1 \mid \theta, \beta_j) \times \Pr(Y_{j'} = 1 \mid \theta, \beta_{j'}) \\ &= f_j(\theta) \times f_{j'}(\theta) \end{aligned}$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} \Pr(Y_j = 1 \text{ y } Y_{j'} = 0 \mid \theta, \beta_j, \beta_{j'}) &= \Pr(Y_j = 1 \mid \theta, \beta_j) \times \Pr(Y_{j'} = 0 \mid \theta, \beta_{j'}) \\ &= f_j(\theta) \times \big(1 - f_{j'}(\theta)\big). \end{aligned}$$

La idea anterior se generaliza a más de dos respuestas.

El supuesto de independencia local

Una consecuencia importante de independencia local:

Para cualquier par de ítems j y j', se cumple:

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_j = 1 \text{ y } Y_{j'} = 1 \,|\, \theta, \beta_j, \beta_{j'}) &= \Pr(Y_j = 1 \,|\, \theta, \beta_j) \times \Pr(Y_{j'} = 1 \,|\, \theta, \beta_{j'}) \\
&= f_j(\theta) \times f_{j'}(\theta)
\end{aligned}$$

De forma similar:

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_j = 1 \text{ y } Y_{j'} = 0 \,|\, \theta, \beta_j, \beta_{j'}) &= \Pr(Y_j = 1 \,|\, \theta, \beta_j) \times \Pr(Y_{j'} = 0 \,|\, \theta, \beta_{j'}) \\
&= f_j(\theta) \times \big(1 - f_{j'}(\theta)\big).
\end{aligned}$$

La idea anterior se generaliza a más de dos respuestas.

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local es parte de *todos* los modelos de la TRI.

¿Cuáles pueden ser razones por las que se invalida el supuesto de independencia local?

En general, cualquier factor que influye en algunos ítems y en otros no.

Ejemplos específicos:

- *Casos a los que pertenecen múltiples preguntas*
- *Diferentes formatos de respuesta*
- *Preguntas que se refieren a diferentes temas (y, entonces a diferentes habilidades latentes)*
- *...*

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local es parte de *todos* los modelos de la TRI.

¿Cuáles pueden ser razones por las que se invalida el supuesto de independencia local?

En general, cualquier factor que influye en algunos ítems y en otros no.

Ejemplos específicos:

- *Casos a los que pertenecen múltiples preguntas*
- *Diferentes formatos de respuesta*
- *Preguntas que se refieren a diferentes temas (y, entonces a diferentes habilidades latentes)*
- *...*

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local es parte de *todos* los modelos de la TRI.

¿Cuáles pueden ser razones por las que se invalida el supuesto de independencia local?

En general, cualquier factor que influye en algunos ítems y en otros no.

Ejemplos específicos:

- *Casos a los que pertenecen múltiples preguntas*
- *Diferentes formatos de respuesta*
- *Preguntas que se refieren a diferentes temas (y, entonces a diferentes habilidades latentes)*
- *...*

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local es parte de *todos* los modelos de la TRI.

¿Cuáles pueden ser razones por las que se invalida el supuesto de independencia local?

En general, cualquier factor que influye en algunos ítems y en otros no.

Ejemplos específicos:

- *Casos a los que pertenecen múltiples preguntas*
- *Diferentes formatos de respuesta*
- *Preguntas que se refieren a diferentes temas (y, entonces a diferentes habilidades latentes)*
- *...*

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local es parte de *todos* los modelos de la TRI.

¿Cuáles pueden ser razones por las que se invalida el supuesto de independencia local?

En general, cualquier factor que influye en algunos ítems y en otros no.

Ejemplos específicos:

- *Casos a los que pertenecen múltiples preguntas*
- *Diferentes formatos de respuesta*
- *Preguntas que se refieren a diferentes temas (y, entonces a diferentes habilidades latentes)*
- *...*

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local es parte de *todos* los modelos de la TRI.

¿Cuáles pueden ser razones por las que se invalida el supuesto de independencia local?

En general, cualquier factor que influye en algunos ítems y en otros no.

Ejemplos específicos:

- *Casos a los que pertenecen múltiples preguntas*
- *Diferentes formatos de respuesta*
- *Preguntas que se refieren a diferentes temas (y, entonces a diferentes habilidades latentes)*
- *...*

El supuesto de independencia local

El supuesto de independencia local es parte de *todos* los modelos de la TRI.

¿Cuáles pueden ser razones por las que se invalida el supuesto de independencia local?

En general, cualquier factor que influye en algunos ítems y en otros no.

Ejemplos específicos:

- *Casos a los que pertenecen múltiples preguntas*
- *Diferentes formatos de respuesta*
- *Preguntas que se refieren a diferentes temas (y, entonces a diferentes habilidades latentes)*
- *...*

Índice:

Métodos para estimar los parámetros

¿Cómo conocer los parámetros de personas e ítems?

Existen diferentes métodos para estimar las θ_i's y β_j's a partir de un conjunto de datos. Las dos metodologías más utilizadas son:

- Estimación por máxima verosimilitud
- Estimación Bayesiana

En ambos casos, no se trata de un solo método, sino de una metodología general que cubre muchas variantes.

Métodos para estimar los parámetros

¿Cómo conocer los parámetros de personas e ítems?

Existen diferentes métodos para estimar las θ_i's y β_j's a partir de un conjunto de datos. Las dos metodologías más utilizadas son:

- Estimación por máxima verosimilitud
- Estimación Bayesiana

En ambos casos, no se trata de un solo método, sino de una metodología general que cubre muchas variantes.

Métodos para estimar los parámetros

¿Cómo conocer los parámetros de personas e ítems?

Existen diferentes métodos para estimar las θ_i's y β_j's a partir de un conjunto de datos.
Las dos metodologías más utilizadas son:

- Estimación por máxima verosimilitud
- Estimación Bayesiana

En ambos casos, no se trata de un solo método, sino de una metodología general que cubre muchas variantes.

Métodos para estimar los parámetros

¿Cómo conocer los parámetros de personas e ítems?

Existen diferentes métodos para estimar las θ_i's y β_j's a partir de un conjunto de datos. Las dos metodologías más utilizadas son:

- Estimación por máxima verosimilitud
- Estimación Bayesiana

En ambos casos, no se trata de un solo método, sino de una metodología general que cubre muchas variantes.

Métodos para estimar los parámetros

¿Cómo conocer los parámetros de personas e ítems?

Existen diferentes métodos para estimar las θ_i's y β_j's a partir de un conjunto de datos. Las dos metodologías más utilizadas son:

- Estimación por máxima verosimilitud
- Estimación Bayesiana

En ambos casos, no se trata de un solo método, sino de una metodología general que cubre muchas variantes.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

Consideremos un problema más simple:

- Enfocamos en la estimación del parámetro θ de una persona específica;
- a partir de sus respuestas a un test de cuatro ítems;
- conocemos los valores de los parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

Consideremos un problema más simple:

- Enfocamos en la estimación del parámetro θ de una persona específica;
- a partir de sus respuestas a un test de cuatro ítems;
- conocemos los valores de los parámetros β_1, β_2, β_3, β_4.

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

Consideremos un problema más simple:

- Enfocamos en la estimación del parámetro θ de una persona específica;
- a partir de sus respuestas a un test de cuatro ítems;
- conocemos los valores de los parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

Consideremos un problema más simple:

- Enfocamos en la estimación del parámetro θ de una persona específica;
- a partir de sus respuestas a un test de cuatro ítems;
- conocemos los valores de los parámetros β_1, β_2, β_3, β_4.

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \;\text{ y }\; Y_2 = 1 \;\text{ y }\; Y_3 = 1 \;\text{ y }\; Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \text{ y } Y_2 = 1 \text{ y } Y_3 = 1 \text{ y } Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$f(\theta) = \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4)$$

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \;\text{ y }\; Y_2 = 1 \;\text{ y }\; Y_3 = 1 \;\text{ y }\; Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\ &= \left(1 - \frac{e^{\theta - 2.0}}{1 + e^{\theta - 2.0}}\right) \times \frac{e^{\theta - 0.0}}{1 + e^{\theta - 0.0}} \times \frac{e^{\theta - 1.0}}{1 + e^{\theta - 1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{\theta - 0.5}}{1 + e^{\theta - 0.5}}\right) \end{aligned}$$

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \;\text{ y }\; Y_2 = 1 \;\text{ y }\; Y_3 = 1 \;\text{ y }\; Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\ &= \left(1 - \frac{e^{\theta - 2.0}}{1 + e^{\theta - 2.0}}\right) \times \frac{e^{\theta - 0.0}}{1 + e^{\theta - 0.0}} \times \frac{e^{\theta - 1.0}}{1 + e^{\theta - 1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{\theta - 0.5}}{1 + e^{\theta - 0.5}}\right) \end{aligned}$$

Probemos diferentes valores para θ.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$\Pr(Y_1 = 0 \;\text{ y }\; Y_2 = 1 \;\text{ y }\; Y_3 = 1 \;\text{ y }\; Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\
&= \left(1 - \frac{e^{0.0-2.0}}{1 + e^{0.0-2.0}}\right) \times \frac{e^{0.0-0.0}}{1 + e^{0.0-0.0}} \times \frac{e^{0.0-1.0}}{1 + e^{0.0-1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{0.0-0.5}}{1 + e^{0.0-0.5}}\right) \\
&= .881 \times .500 \times .269 \times .622 \\
&= .074
\end{aligned}
$$

Probemos diferentes valores para θ. Por ejemplo, $\theta = 0$.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \;\; y \;\; Y_2 = 1 \;\; y \;\; Y_3 = 1 \;\; y \;\; Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\ &= \left(1 - \frac{e^{0.5-2.0}}{1+e^{0.5-2.0}}\right) \times \frac{e^{0.5-0.0}}{1+e^{0.5-0.0}} \times \frac{e^{0.5-1.0}}{1+e^{0.5-1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{0.5-0.5}}{1+e^{0.5-0.5}}\right) \\ &= .818 \times .622 \times .378 \times .500 \\ &= .096 \end{aligned}$$

Probemos diferentes valores para θ. Por ejemplo, $\theta = 0.5$.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona i	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \text{ y } Y_2 = 1 \text{ y } Y_3 = 1 \text{ y } Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\
&= \left(1 - \frac{e^{1.0-2.0}}{1+e^{1.0-2.0}}\right) \times \frac{e^{1.0-0.0}}{1+e^{1.0-0.0}} \times \frac{e^{1.0-1.0}}{1+e^{1.0-1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{1.0-0.5}}{1+e^{1.0-0.5}}\right) \\
&= .731 \times .731 \times .500 \times .378 \\
&= .101
\end{aligned}$$

Probemos diferentes valores para θ. Por ejemplo, $\theta = 1$.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$

$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \text{ y } Y_2 = 1 \text{ y } Y_3 = 1 \text{ y } Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\
&= \left(1 - \frac{e^{1.5-2.0}}{1+e^{1.5-2.0}}\right) \times \frac{e^{1.5-0.0}}{1+e^{1.5-0.0}} \times \frac{e^{1.5-1.0}}{1+e^{1.5-1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{1.5-0.5}}{1+e^{1.5-0.5}}\right) \\
&= .622 \times .818 \times .622 \times .269 \\
&= .085
\end{aligned}$$

Probemos diferentes valores para θ. Por ejemplo, $\theta = 1.5$.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$
$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$
$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$
$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$
$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \text{ y } Y_2 = 1 \text{ y } Y_3 = 1 \text{ y } Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\
&= \left(1 - \frac{e^{2.0-2.0}}{1+e^{2.0-2.0}}\right) \times \frac{e^{2.0-0.0}}{1+e^{2.0-0.0}} \times \frac{e^{2.0-1.0}}{1+e^{2.0-1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{2.0-0.5}}{1+e^{2.0-0.5}}\right) \\
&= .500 \times .881 \times .731 \times .182 \\
&= .059
\end{aligned}$$

Probemos diferentes valores para θ. Por ejemplo, $\theta = 2$.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona i	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$
$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$
$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$
$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$
$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$
$\theta_i = 2.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .034$

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \;\text{ y }\; Y_2 = 1 \;\text{ y }\; Y_3 = 1 \;\text{ y }\; Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\
&= \left(1 - \frac{e^{2.5-2.0}}{1+e^{2.5-2.0}}\right) \times \frac{e^{2.5-0.0}}{1+e^{2.5-0.0}} \times \frac{e^{2.5-1.0}}{1+e^{2.5-1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{2.5-0.5}}{1+e^{2.5-0.5}}\right) \\
&= .378 \times .924 \times .818 \times .119 \\
&= .034
\end{aligned}$$

Probemos diferentes valores para θ. Por ejemplo, $\theta = 2.5$.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$
$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$
$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$
$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$
$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$
$\theta_i = 2.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .034$

La probabilidad de este patrón de respuestas es:

$$\Pr(Y_1 = 0 \text{ y } Y_2 = 1 \text{ y } Y_3 = 1 \text{ y } Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_1, \ldots, \beta_4) \equiv f(\theta)$$

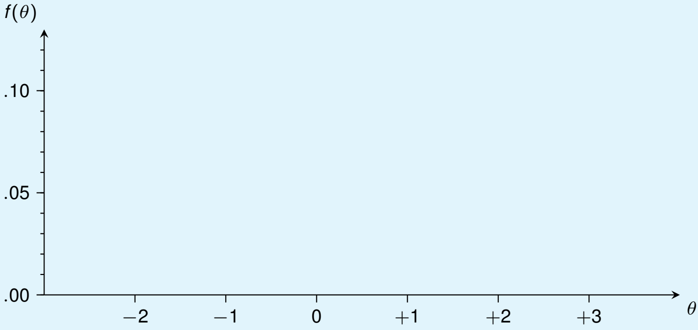
$$\begin{aligned} f(\theta) &= \Pr(Y_1 = 0 \mid \theta, \beta_1) \times \Pr(Y_2 = 1 \mid \theta, \beta_2) \times \Pr(Y_3 = 1 \mid \theta, \beta_3) \times \Pr(Y_4 = 0 \mid \theta, \beta_4) \\ &= \left(1 - \frac{e^{2.5-2.0}}{1+e^{2.5-2.0}}\right) \times \frac{e^{2.5-0.0}}{1+e^{2.5-0.0}} \times \frac{e^{2.5-1.0}}{1+e^{2.5-1.0}} \times \left(1 - \frac{e^{2.5-0.5}}{1+e^{2.5-0.5}}\right) \\ &= .378 \times .924 \times .818 \times .119 \\ &= .034 \end{aligned}$$

Probemos diferentes valores para θ. Por ejemplo, $\theta = 2.5$.

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas				
	1	2	3	4	
Persona *i*	0	1	1	0	$\theta_i = ?$
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$	



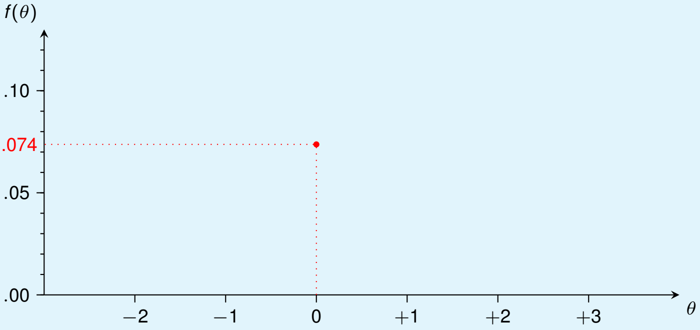
Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$



Estimación por máxima verosimilitud

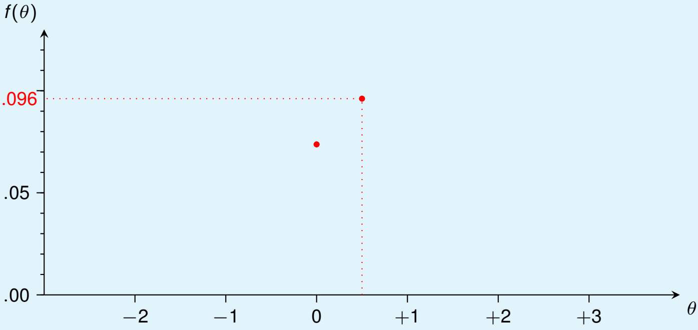
Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

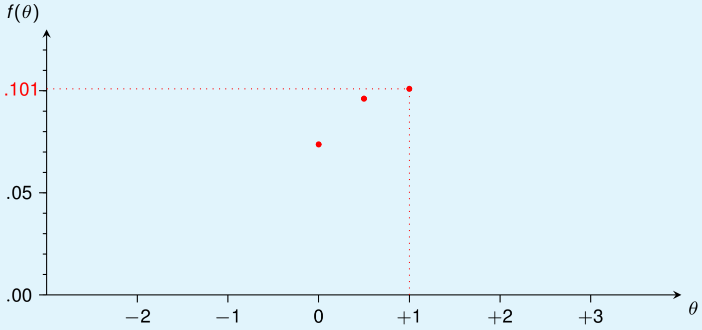
	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

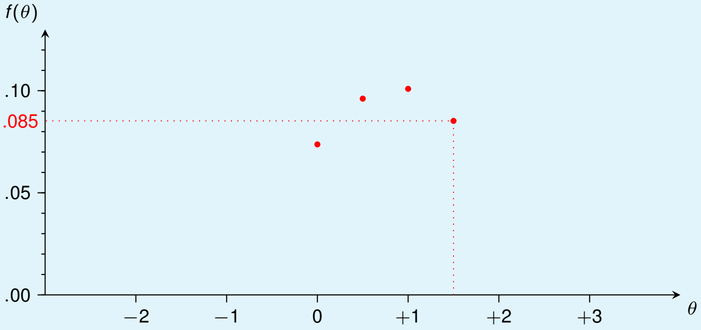
$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$

$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

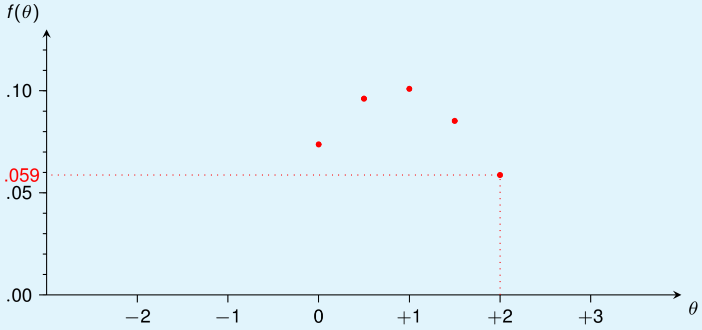
$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$

$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$

$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

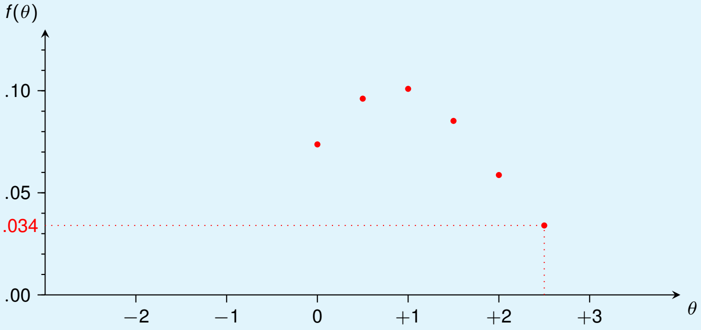
$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$

$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$

$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$

$\theta_i = 2.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .034$



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

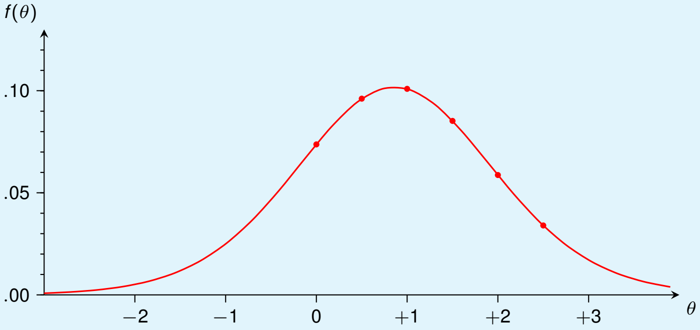
$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$

$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$

$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$

$\theta_i = 2.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .034$



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$

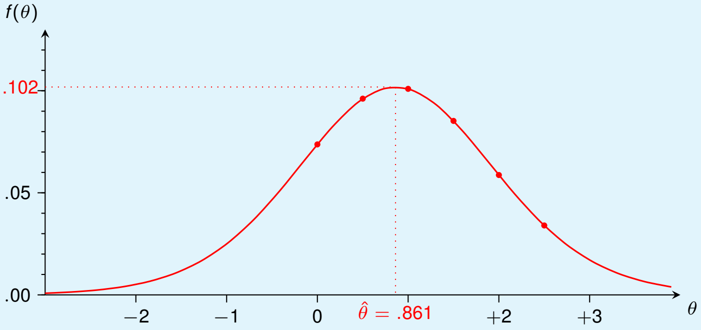
$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$

$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$

$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$

$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$

$\theta_i = 2.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .034$



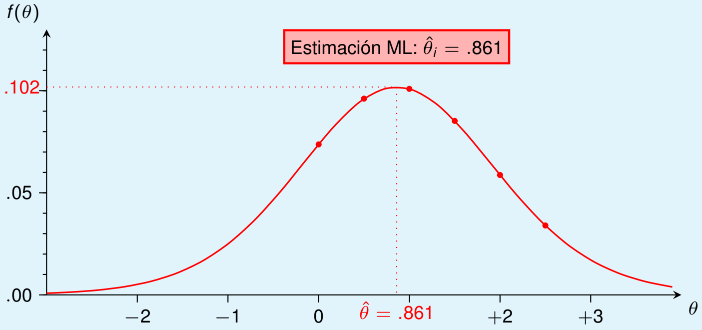
Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas			
	1	2	3	4
Persona *i*	0	1	1	0
	$\beta_1 = 2.0$	$\beta_2 = 0.0$	$\beta_3 = 1.0$	$\beta_4 = 0.5$

$\theta_i = ?$

$\theta_i = 0.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .074$
$\theta_i = 0.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .096$
$\theta_i = 1.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .101$
$\theta_i = 1.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .085$
$\theta_i = 2.0 \Rightarrow f(\theta_i) = .059$
$\theta_i = 2.5 \Rightarrow f(\theta_i) = .034$



Estimación por máxima verosimilitud

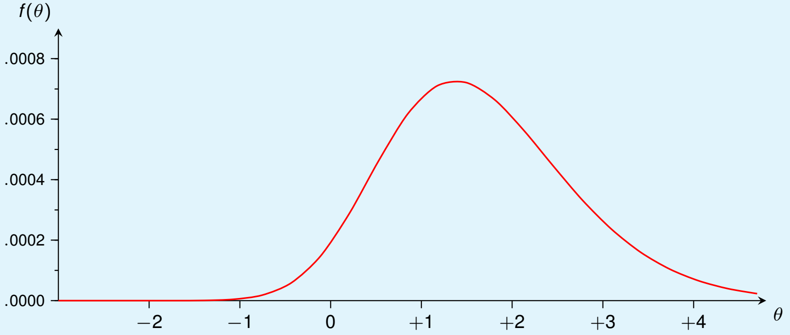
Principios básicos

	Preguntas											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Persona *i*	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}
	-0.5	-0.7	-1.0	$+3.7$	-1.5	-0.9	-0.4	-1.1	-1.4	-1.7	-0.8	-0.1

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

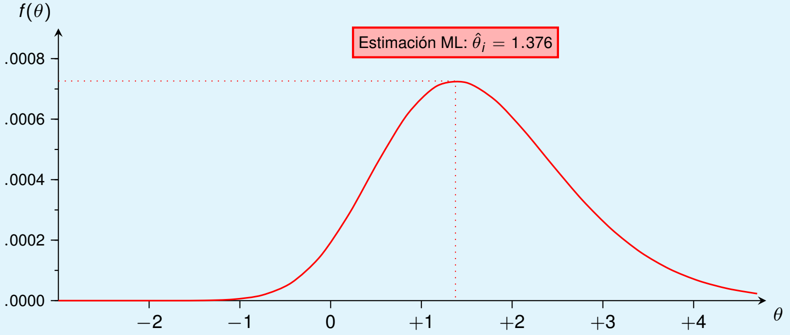
	Preguntas											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Persona *i*	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}
	-0.5	-0.7	-1.0	$+3.7$	-1.5	-0.9	-0.4	-1.1	-1.4	-1.7	-0.8	-0.1



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Persona i	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	β_1 -0.5	β_2 -0.7	β_3 -1.0	β_4 $+3.7$	β_5 -1.5	β_6 -0.9	β_7 -0.4	β_8 -1.1	β_9 -1.4	β_{10} -1.7	β_{11} -0.8	β_{12} -0.1



Estimación por máxima verosimilitud

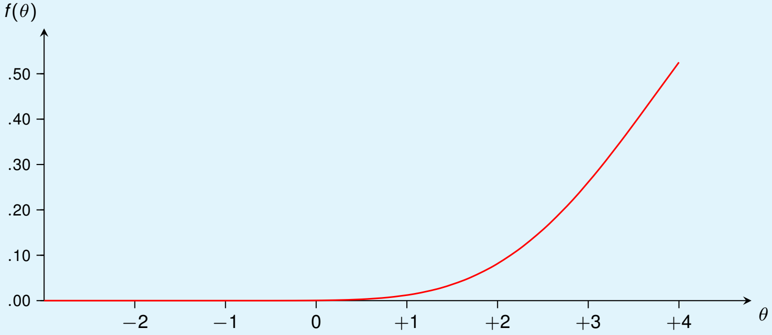
Principios básicos

	Preguntas											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Persona *i*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}
	-0.5	-0.7	-1.0	$+3.7$	-1.5	-0.9	-0.4	-1.1	-1.4	-1.7	-0.8	-0.1

Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

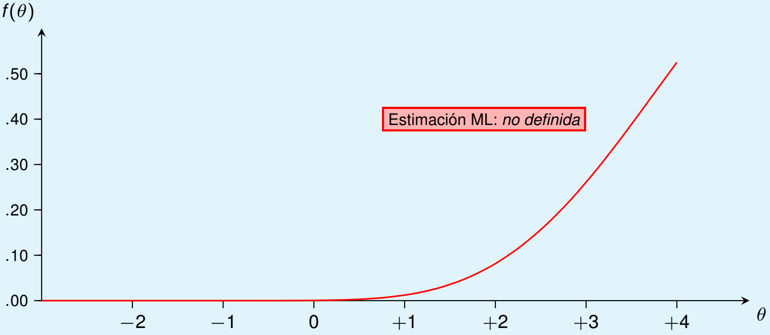
	Preguntas											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Persona *i*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	β_1 -0.5	β_2 -0.7	β_3 -1.0	β_4 $+3.7$	β_5 -1.5	β_6 -0.9	β_7 -0.4	β_8 -1.1	β_9 -1.4	β_{10} -1.7	β_{11} -0.8	β_{12} -0.1



Estimación por máxima verosimilitud

Principios básicos

	Preguntas											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Persona *i*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	β_1 -0.5	β_2 -0.7	β_3 -1.0	β_4 $+3.7$	β_5 -1.5	β_6 -0.9	β_7 -0.4	β_8 -1.1	β_9 -1.4	β_{10} -1.7	β_{11} -0.8	β_{12} -0.1



Estimación por máxima verosimilitud

Resumen

Principio básico:

El método de máxima verosimilitud busca el valor para el parámetro que maximice la verosimilitud de los datos.

¿Cuál valor para θ maximiza $f(\theta)$?

Al considerar el problema general, de estimar todos los parámetros en un modelo Rasch:

El método de máxima verosimilitud busca los valores para los parámetros que maximicen la verosimilitud de los datos.

¿Cuál combinación de valores para $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ maximiza $f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$?

Existen variantes de estimación por máxima verosimilitud.

Estimación por máxima verosimilitud

Resumen

Principio básico:

El método de máxima verosimilitud busca el valor para el parámetro que maximice la verosimilitud de los datos.

¿Cuál valor para θ *maximiza* $f(\theta)$*?*

Al considerar el problema general, de estimar todos los parámetros en un modelo Rasch:

El método de máxima verosimilitud busca los valores para los parámetros que maximicen la verosimilitud de los datos.

¿Cuál combinación de valores para $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *maximiza* $f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$*?*

Existen variantes de estimación por máxima verosimilitud.

Estimación por máxima verosimilitud

Resumen

Principio básico:

El método de máxima verosimilitud busca el valor para el parámetro que maximice la verosimilitud de los datos.

¿Cuál valor para θ *maximiza* $f(\theta)$*?*

Al considerar el problema general, de estimar todos los parámetros en un modelo Rasch:

El método de máxima verosimilitud busca los valores para los parámetros que maximicen la verosimilitud de los datos.

¿Cuál combinación de valores para $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *maximiza* $f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$*?*

Existen variantes de estimación por máxima verosimilitud.

Estimación Bayesiana

La estimación Bayesiana difiere en tres puntos importantes de la estimación por máxima verosimilitud:

1. Se especifica una *distribución a priori*
2. Se explora la *distribución a posteriori*
3. Es *relativamente fácil* utilizarlo con modelos complejos

Estimación Bayesiana

La estimación Bayesiana difiere en tres puntos importantes de la estimación por máxima verosimilitud:

1. Se especifica una *distribución a priori*
2. Se explora la *distribución a posteriori*
3. Es *relativamente fácil* utilizarlo con modelos complejos

Estimación Bayesiana

La estimación Bayesiana difiere en tres puntos importantes de la estimación por máxima verosimilitud:

1. Se especifica una *distribución a priori*
2. Se explora la *distribución a posteriori*
3. Es *relativamente fácil* utilizarlo con modelos complejos

Estimación Bayesiana

La estimación Bayesiana difiere en tres puntos importantes de la estimación por máxima verosimilitud:

1. Se especifica una *distribución a priori*
2. Se explora la *distribución a posteriori*
3. Es *relativamente fácil* utilizarlo con modelos complejos

Una indeterminación del modelo

Parámetro	Sol. 1	Sol. 2
β_1	$+1.3$	$+2.3$
β_2	-2.1	-1.1
β_3	$+0.2$	$+1.2$
β_4	$+0.9$	$+1.9$
β_5	$+1.3$	$+2.3$
β_6	-0.4	$+0.6$
β_7	$+1.1$	$+2.1$
β_8	$+1.7$	$+2.7$
θ_1	$+1.6$	$+2.6$
θ_2	-1.2	-0.2
θ_3	$+2.5$	$+3.5$
θ_4	0.0	$+1.0$
θ_5	$+3.9$	$+4.9$
θ_6	$+1.8$	$+2.8$
θ_7	$+0.2$	$+1.2$
θ_8	$+0.9$	$+1.9$
θ_9	$+1.0$	$+2.0$
θ_{10}	$+1.0$	$+2.0$
θ_{11}	$+0.4$	$+1.4$

Para cualquier persona *i* y cualquier ítem *j*:

$$f_j(\theta_i) = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Una indeterminación del modelo

Parámetro	Sol. 1	Sol. 2
β_1	$+1.3$	$+2.3$
β_2	-2.1	-1.1
β_3	$+0.2$	$+1.2$
β_4	$+0.9$	$+1.9$
β_5	$+1.3$	$+2.3$
β_6	-0.4	$+0.6$
β_7	$+1.1$	$+2.1$
β_8	$+1.7$	$+2.7$
θ_1	$+1.6$	$+2.6$
θ_2	-1.2	-0.2
θ_3	$+2.5$	$+3.5$
θ_4	0.0	$+1.0$
θ_5	$+3.9$	$+4.9$
θ_6	$+1.8$	$+2.8$
θ_7	$+0.2$	$+1.2$
θ_8	$+0.9$	$+1.9$
θ_9	$+1.0$	$+2.0$
θ_{10}	$+1.0$	$+2.0$
θ_{11}	$+0.4$	$+1.4$

Para cualquier persona i y cualquier ítem j:

$$f_j(\theta_i) = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Sol. 1 y Sol. 2 generan exactamente las mismas probabilidades en $f_j(\theta)$.

Una indeterminación del modelo

Parámetro	Sol. 1	Sol. 2
β_1	$+1.3$	$+2.3$
β_2	-2.1	-1.1
β_3	$+0.2$	$+1.2$
β_4	$+0.9$	$+1.9$
β_5	$+1.3$	$+2.3$
β_6	-0.4	$+0.6$
β_7	$+1.1$	$+2.1$
β_8	$+1.7$	$+2.7$
θ_1	$+1.6$	$+2.6$
θ_2	-1.2	-0.2
θ_3	$+2.5$	$+3.5$
θ_4	0.0	$+1.0$
θ_5	$+3.9$	$+4.9$
θ_6	$+1.8$	$+2.8$
θ_7	$+0.2$	$+1.2$
θ_8	$+0.9$	$+1.9$
θ_9	$+1.0$	$+2.0$
θ_{10}	$+1.0$	$+2.0$
θ_{11}	$+0.4$	$+1.4$

Para cualquier persona i y cualquier ítem j:

$$f_j(\theta_i) = \frac{\mathrm{e}^{\theta_i - \beta_j}}{1 + \mathrm{e}^{\theta_i - \beta_j}}$$

Sol. 1 y Sol. 2 generan exactamente las mismas probabilidades en $f_j(\theta)$.

Es decir, el modelo Rasch contiene una **indeterminación**.

Una indeterminación del modelo

Parámetro	Sol. 1	Sol. 2
β_1	$+1.3$	$+2.3$
β_2	-2.1	-1.1
β_3	$+0.2$	$+1.2$
β_4	$+0.9$	$+1.9$
β_5	$+1.3$	$+2.3$
β_6	-0.4	$+0.6$
β_7	$+1.1$	$+2.1$
β_8	$+1.7$	$+2.7$
θ_1	$+1.6$	$+2.6$
θ_2	-1.2	-0.2
θ_3	$+2.5$	$+3.5$
θ_4	0.0	$+1.0$
θ_5	$+3.9$	$+4.9$
θ_6	$+1.8$	$+2.8$
θ_7	$+0.2$	$+1.2$
θ_8	$+0.9$	$+1.9$
θ_9	$+1.0$	$+2.0$
θ_{10}	$+1.0$	$+2.0$
θ_{11}	$+0.4$	$+1.4$

Para cualquier persona *i* y cualquier ítem *j*:

$$f_j(\theta_i) = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Sol. 1 y Sol. 2 generan exactamente las mismas probabilidades en $f_j(\theta)$.

Es decir, el modelo Rasch contiene una **indeterminación**.

Dos maneras para resolverla:

Una indeterminación del modelo

Parámetro	Sol. 1	Sol. 2	Sol. 3
β_1	$+1.3$	$+2.3$	$+0.8$
β_2	-2.1	-1.1	-2.6
β_3	$+0.2$	$+1.2$	-0.3
β_4	$+0.9$	$+1.9$	$+0.4$
β_5	$+1.3$	$+2.3$	$+0.8$
β_6	-0.4	$+0.6$	-0.9
β_7	$+1.1$	$+2.1$	$+0.6$
β_8	$+1.7$	$+2.7$	$+1.2$
θ_1	$+1.6$	$+2.6$	$+1.1$
θ_2	-1.2	-0.2	-1.7
θ_3	$+2.5$	$+3.5$	$+2.0$
θ_4	0.0	$+1.0$	-0.5
θ_5	$+3.9$	$+4.9$	$+3.4$
θ_6	$+1.8$	$+2.8$	$+1.3$
θ_7	$+0.2$	$+1.2$	-0.3
θ_8	$+0.9$	$+1.9$	$+0.4$
θ_9	$+1.0$	$+2.0$	$+0.5$
θ_{10}	$+1.0$	$+2.0$	$+0.5$
θ_{11}	$+0.4$	$+1.4$	-0.1

Para cualquier persona *i* y cualquier ítem *j*:

$$f_j(\theta_i) = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Sol. 1 y Sol. 2 generan exactamente las mismas probabilidades en $f_j(\theta)$.

Es decir, el modelo Rasch contiene una **indeterminación**.

Dos maneras para resolverla:

- Restringir $\sum_j \beta_j = 0$.

Una indeterminación del modelo

Parámetro	Sol. 1	Sol. 2	Sol. 3	Sol. 4
β_1	$+1.3$	$+2.3$	$+0.8$	$+0.2$
β_2	-2.1	-1.1	-2.6	-3.2
β_3	$+0.2$	$+1.2$	-0.3	-0.9
β_4	$+0.9$	$+1.9$	$+0.4$	-0.2
β_5	$+1.3$	$+2.3$	$+0.8$	$+0.2$
β_6	-0.4	$+0.6$	-0.9	-1.5
β_7	$+1.1$	$+2.1$	$+0.6$	0.0
β_8	$+1.7$	$+2.7$	$+1.2$	$+0.6$
θ_1	$+1.6$	$+2.6$	$+1.1$	$+0.5$
θ_2	-1.2	-0.2	-1.7	-2.3
θ_3	$+2.5$	$+3.5$	$+2.0$	$+1.4$
θ_4	0.0	$+1.0$	-0.5	-1.1
θ_5	$+3.9$	$+4.9$	$+3.4$	$+2.8$
θ_6	$+1.8$	$+2.8$	$+1.3$	$+0.7$
θ_7	$+0.2$	$+1.2$	-0.3	-0.9
θ_8	$+0.9$	$+1.9$	$+0.4$	-0.2
θ_9	$+1.0$	$+2.0$	$+0.5$	-0.1
θ_{10}	$+1.0$	$+2.0$	$+0.5$	-0.1
θ_{11}	$+0.4$	$+1.4$	-0.1	-0.7

Para cualquier persona *i* y cualquier ítem *j*:

$$f_j(\theta_i) = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

Sol. 1 y Sol. 2 generan exactamente las mismas probabilidades en $f_j(\theta)$.

Es decir, el modelo Rasch contiene una **indeterminación**.

Dos maneras para resolverla:

- Restringir $\sum_j \beta_j = 0$.
- Restringir $\sum_i \theta_i = 0$.

Índice:

La bondad de ajuste del modelo

Después del proceso de estimar los parámetros del modelo, se pasa a la fase de evaluar la plausibilidad de los supuestos del modelo.

¿Es razonable creer que el modelo es “verdad” para los datos recopilados?

¿El modelo describe adecuadamente el proceso del cual se originaron los datos recopilados?

¡Ojo! Ningún modelo es perfecto.

Con muchos datos se rechazará cualquier modelo.

La bondad de ajuste del modelo

Después del proceso de estimar los parámetros del modelo, se pasa a la fase de evaluar la plausibilidad de los supuestos del modelo.

¿Es razonable creer que el modelo es “verdad” para los datos recopilados?

¿El modelo describe adecuadamente el proceso del cual se originaron los datos recopilados?

¡Ojo! Ningún modelo es perfecto.

Con muchos datos se rechazará cualquier modelo.

La bondad de ajuste del modelo

Después del proceso de estimar los parámetros del modelo, se pasa a la fase de evaluar la plausibilidad de los supuestos del modelo.

¿Es razonable creer que el modelo es “verdad” para los datos recopilados?

¿El modelo describe adecuadamente el proceso del cual se originaron los datos recopilados?

¡Ojo! Ningún modelo es perfecto.

Con muchos datos se rechazará cualquier modelo.

La bondad de ajuste del modelo

Ideas generales:

- Examinar aquellos aspectos de los datos que no se utilizaron para la estimación de los parámetros

Por ejemplo, para la estimación de los parámetros de las personas en el modelo Rasch solo importa el número de aciertos.

Por otro lado, no todos los patrones de respuestas son igualmente probables bajo los supuestos del modelo.

$\rightarrow$ Investigar si no hay demasiadas excepciones.

La bondad de ajuste del modelo

Ideas generales:

- Examinar aquellos aspectos de los datos que no se utilizaron para la estimación de los parámetros

Por ejemplo, para la estimación de los parámetros de las personas en el modelo Rasch solo importa el número de aciertos.

Por otro lado, no todos los patrones de respuestas son igualmente probables bajo los supuestos del modelo.

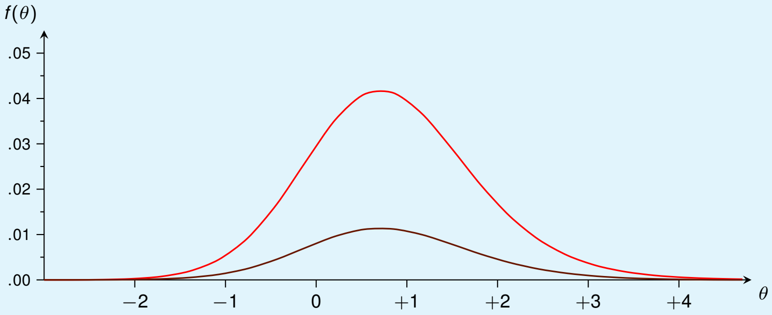
$\rightarrow$ Investigar si no hay demasiadas excepciones.

La bondad de ajuste del modelo

	Preguntas					
	1	2	3	4	5	6
Persona 1	1	1	1	1	0	0
Persona 2	0	0	1	1	1	1
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
	-0.4	-0.2	-0.1	0.0	$+0.2$	$+0.5$

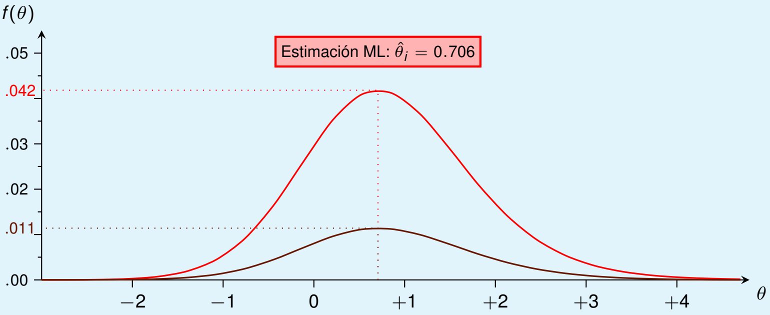
La bondad de ajuste del modelo

	Preguntas					
	1	2	3	4	5	6
Persona 1	1	1	1	1	0	0
Persona 2	0	0	1	1	1	1
	β_1 -0.4	β_2 -0.2	β_3 -0.1	β_4 0.0	β_5 $+0.2$	β_6 $+0.5$



La bondad de ajuste del modelo

	Preguntas					
	1	2	3	4	5	6
Persona 1	1	1	1	1	0	0
Persona 2	0	0	1	1	1	1
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
	-0.4	-0.2	-0.1	0.0	$+0.2$	$+0.5$



La bondad de ajuste del modelo

Ideas generales:

- Comúnmente, la evaluación de la bondad de ajuste es a través de contrastes de hipótesis (pruebas de significancia)

  Importante: En estos contrastes, el modelo es la hipótesis nula.
  Esperamos que **no** se rechace la hipótesis nula.
  ¡Esperamos que $p > .05$!

La bondad de ajuste del modelo

Ideas generales:

- Comúnmente, la evaluación de la bondad de ajuste es a través de contrastes de hipótesis (pruebas de significancia)

  Importante: En estos contrastes, el modelo es la hipótesis nula.
  Esperamos que **no** se rechace la hipótesis nula.
  ¡Esperamos que $p > .05$!

La bondad de ajuste del modelo

Existen varios tipos de pruebas:

- Para evaluar el ajuste global
  ¿El modelo en su globalidad se ajusta?
  Si se rechaza el modelo (es decir, si la prueba resulta significativa), no sabemos por qué.
- Para evaluar el ajuste de cada ítem
  Por ejemplo, los ítems que las personas con niveles más bajos resuelven y las personas con niveles altos no, generalmente tendrán mal ajuste.
- Para evaluar el ajuste de cada persona
  Por ejemplo, personas que resuelven los ítems más difíciles y no los ítems fáciles tendrán mal ajuste
- Para evaluar el ajuste a supuestos específicos
  - ¿es plausible es supuesto de unidimensionalidad?
  - ¿independencia local?
  - ...

La bondad de ajuste del modelo

Existen varios tipos de pruebas:

- Para evaluar el ajuste global
  ¿El modelo en su globalidad se ajusta?
  Si se rechaza el modelo (es decir, si la prueba resulta significativa), no sabemos por qué.
- Para evaluar el ajuste de cada ítem
  Por ejemplo, los ítems que las personas con niveles más bajos resuelven y las personas con niveles altos no, generalmente tendrán mal ajuste.
- Para evaluar el ajuste de cada persona
  Por ejemplo, personas que resuelven los ítems más difíciles y no los ítems fáciles tendrán mal ajuste
- Para evaluar el ajuste a supuestos específicos
  - ¿es plausible es supuesto de unidimensionalidad?
  - ¿independencia local?
  - . . .

La bondad de ajuste del modelo

Existen varios tipos de pruebas:

- Para evaluar el ajuste global
  ¿El modelo en su globalidad se ajusta?
  Si se rechaza el modelo (es decir, si la prueba resulta significativa), no sabemos por qué.
- Para evaluar el ajuste de cada ítem
  Por ejemplo, los ítems que las personas con niveles más bajos resuelven y las personas con niveles altos no, generalmente tendrán mal ajuste.
- Para evaluar el ajuste de cada persona
  Por ejemplo, personas que resuelven los ítems más difíciles y no los ítems fáciles tendrán mal ajuste
- Para evaluar el ajuste a supuestos específicos
  - ¿es plausible es supuesto de unidimensionalidad?
  - ¿independencia local?
  - . . .

La bondad de ajuste del modelo

Existen varios tipos de pruebas:

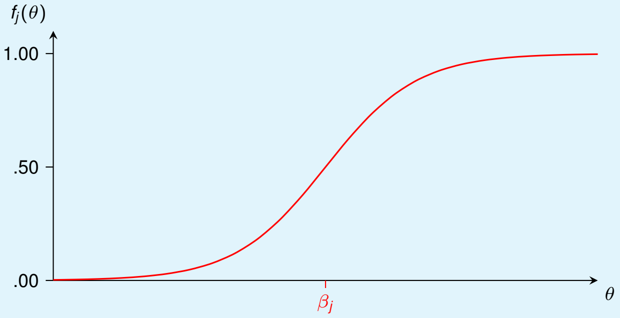
- Para evaluar el ajuste global
  ¿El modelo en su globalidad se ajusta?
  Si se rechaza el modelo (es decir, si la prueba resulta significativa), no sabemos por qué.
- Para evaluar el ajuste de cada ítem
  Por ejemplo, los ítems que las personas con niveles más bajos resuelven y las personas con niveles altos no, generalmente tendrán mal ajuste.
- Para evaluar el ajuste de cada persona
  Por ejemplo, personas que resuelven los ítems más difíciles y no los ítems fáciles tendrán mal ajuste
- Para evaluar el ajuste a supuestos específicos
  - ¿es plausible es supuesto de unidimensionalidad?
  - ¿independencia local?
  - ...

Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\bar{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica

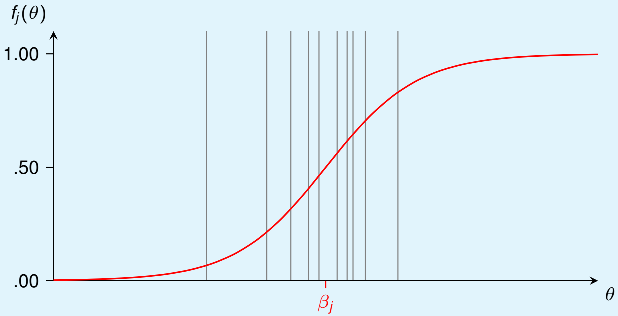
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\bar{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



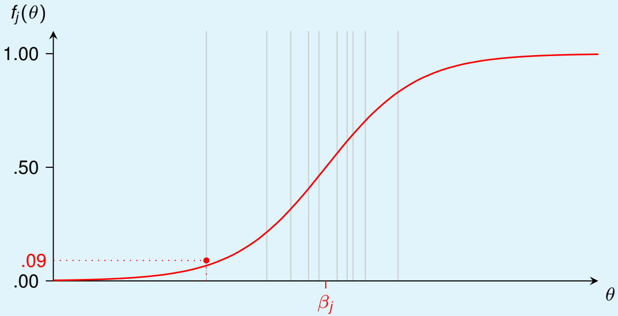
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\bar{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



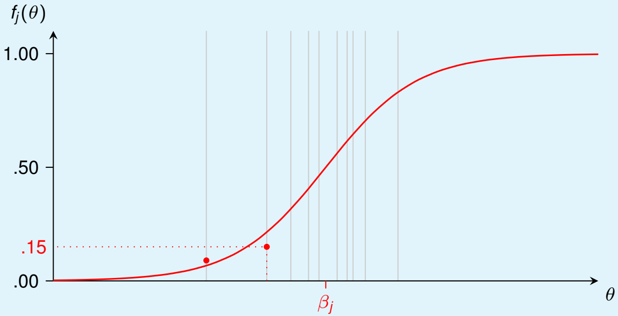
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\overline{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



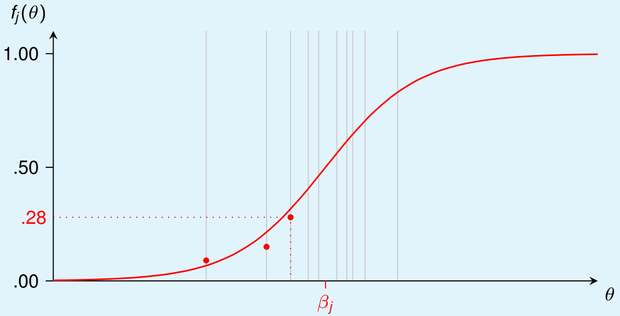
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\bar{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



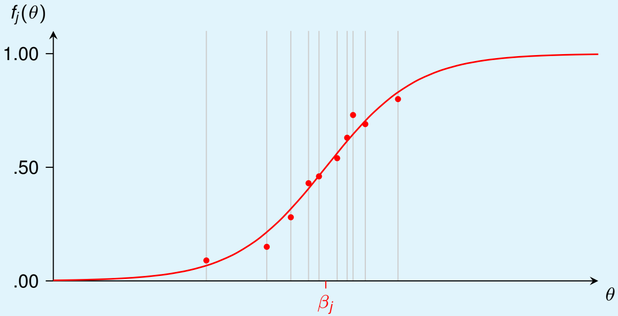
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\bar{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



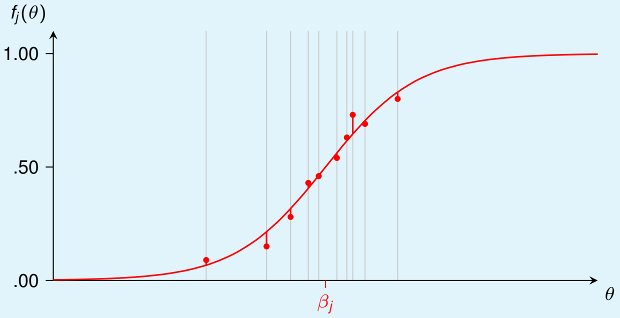
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\bar{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



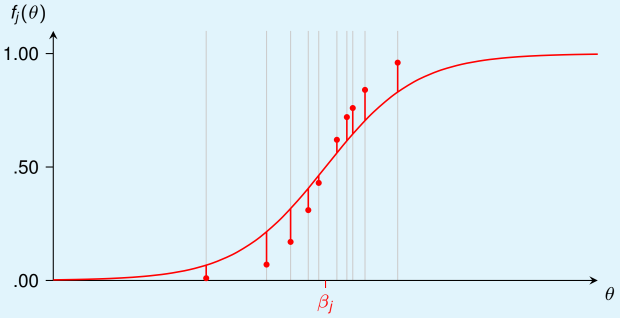
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\overline{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



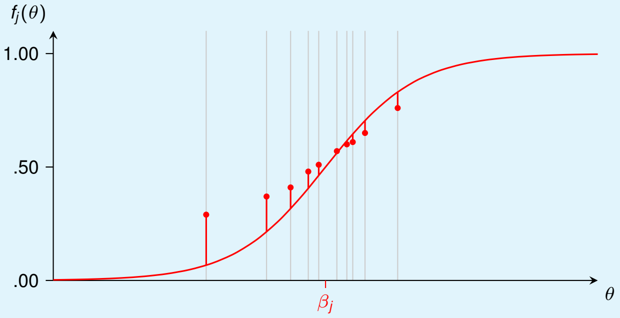
Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\overline{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



Evaluar la bondad de ajuste de ítems: Método gráfico

1. Graficar la curva característica del ítem
2. Dividir la muestra de personas en grupos según su valor en $\hat{\theta}$
   Calcular la media $\overline{\hat{\theta}}$ en cada grupo
3. Calcular y representar la proporción de aciertos en cada grupo
4. Apreciar la diferencia entre proporción observada y probabilidad teórica



Índice:

Índice:

Índice:

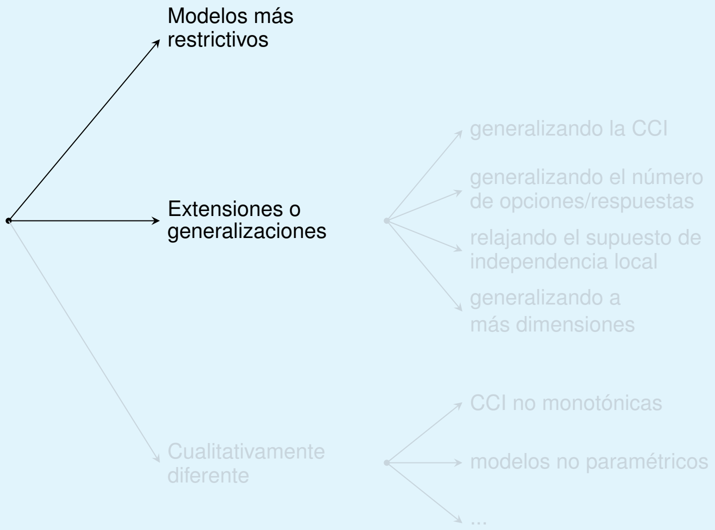
Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

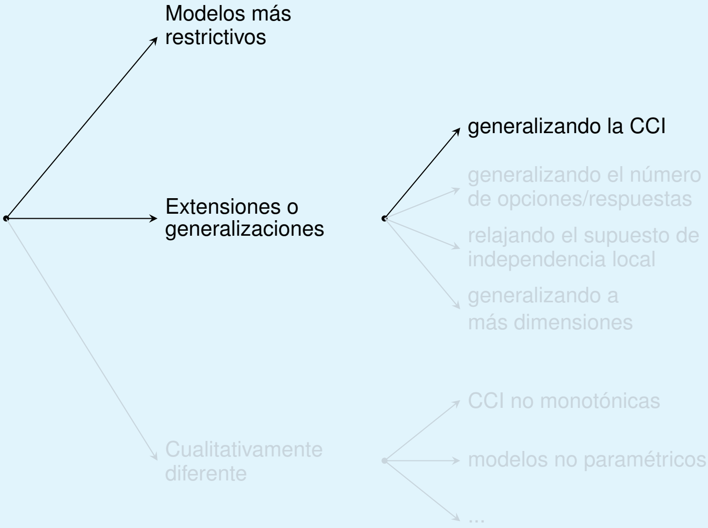
Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

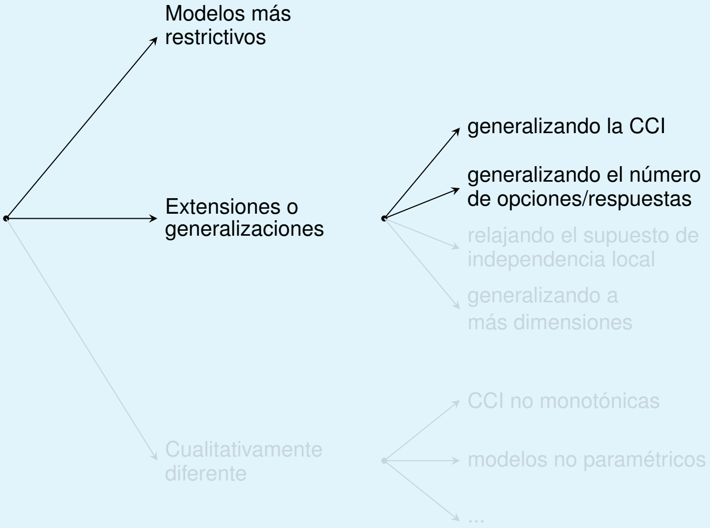
Principios para organizar los modelos TRI



Principios para organizar los modelos TRI



Principios para organizar los modelos TRI



Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

Principios para organizar los modelos TRI

- Modelos más restrictivos
- Extensiones o generalizaciones
  - generalizando la CCI
  - generalizando el número de opciones/respuestas
  - relajando el supuesto de independencia local
  - generalizando a más dimensiones
- Cualitativamente diferente
  - CCI no monotónicas
  - modelos no paramétricos
  - ...

Índice:

El modelo logístico lineal de rasgo latente (LLTM)

Consideremos el siguiente ejemplo:

Un examen sobre cálculo diferencial consiste en 20 ítems; en cada ítem los sustentantes tienen que hallar la derivada de una función. Por ejemplo:

1. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$ 2. $g(x) = e^x \cos(2x)$ 3. $g(x) = \sqrt{e^{4x}+1}$ ...

Para resolver estos items, se requiere aplicar ciertas reglas esecíficas de derivación (por ejemplo, la regla de cadena, la regla del cociente, regla del producto, etc).

Para este tipo de ítems, G. Fisher (1973) propuso el LLTM:
donde se supone que el grado de dificultad de los n ítems (las β_j's) se pueden escribir como una combinación lineal de m (donde $m < n$) parámetros básicos (η_k):

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}\eta_k,$$

donde q_{jk} son coeficientes (constantes) proporcionadas *a priori* por el investigador.

El modelo logístico lineal de rasgo latente (LLTM)

Consideremos el siguiente ejemplo:

Un examen sobre cálculo diferencial consiste en 20 ítems; en cada ítem los sustentantes tienen que hallar la derivada de una función. Por ejemplo:

1. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$ 2. $g(x) = e^x \cos(2x)$ 3. $g(x) = \sqrt{e^{4x}+1}$ ...

Para resolver estos items, se requiere aplicar ciertas reglas esecíficas de derivación (por ejemplo, la regla de cadena, la regla del cociente, regla del producto, etc).

Para este tipo de ítems, G. Fisher (1973) propuso el LLTM:
donde se supone que el grado de dificultad de los n ítems (las β_j's) se pueden escribir como una combinación lineal de m (donde $m < n$) parámetros básicos (η_k):

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}\eta_k,$$

donde q_{jk} son coeficientes (constantes) proporcionadas *a priori* por el investigador.

El modelo logístico lineal de rasgo latente (LLTM)

Consideremos el siguiente ejemplo:

Un examen sobre cálculo diferencial consiste en 20 ítems; en cada ítem los sustentantes tienen que hallar la derivada de una función. Por ejemplo:

1. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$ 2. $g(x) = e^x \cos(2x)$ 3. $g(x) = \sqrt{e^{4x}+1}$ ...

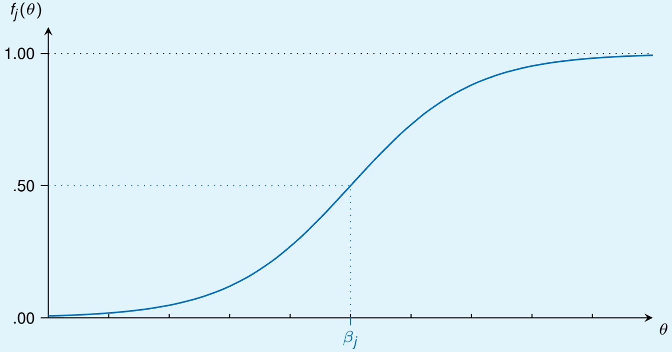
Para resolver estos items, se requiere aplicar ciertas reglas esecíficas de derivación (por ejemplo, la regla de cadena, la regla del cociente, regla del producto, etc).

Para este tipo de ítems, G. Fisher (1973) propuso el LLTM:
donde se supone que el grado de dificultad de los n ítems (las β_j's) se pueden escribir como una combinación lineal de m (donde $m < n$) parámetros básicos (η_k):

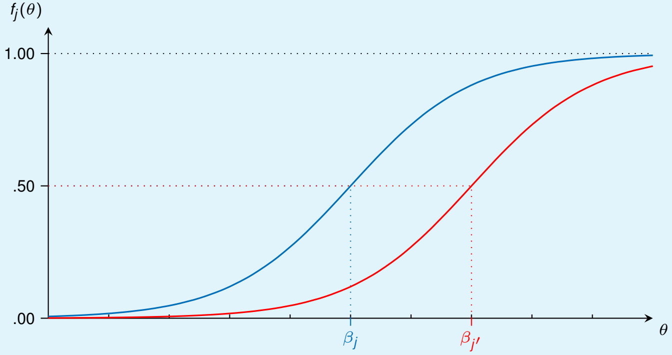
$$\beta_j = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}\eta_k,$$

donde q_{jk} son coeficientes (constantes) proporcionadas *a priori* por el investigador.

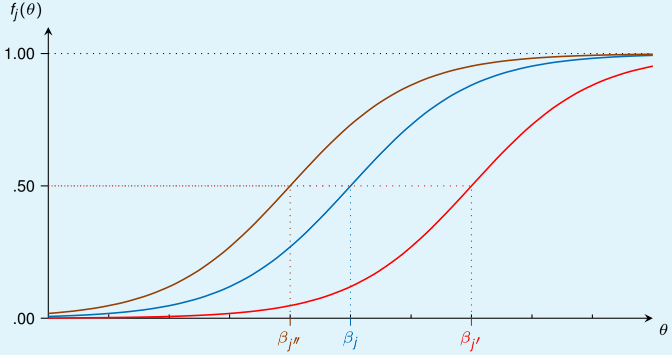
El modelo logístico de dos parámetros (2PL)



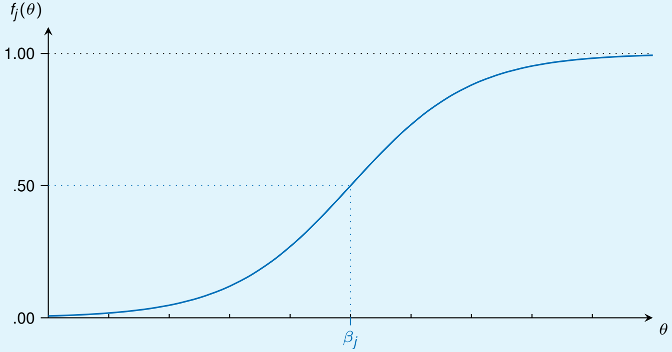
El modelo logístico de dos parámetros (2PL)



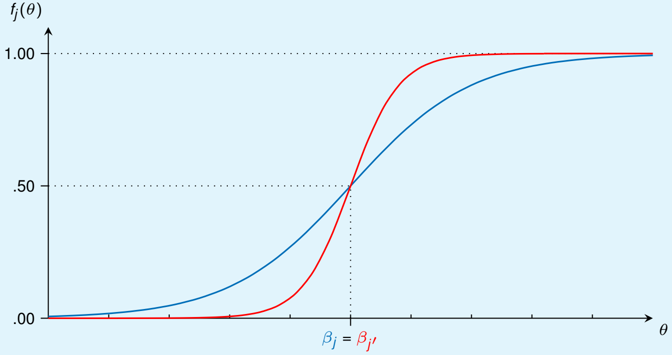
El modelo logístico de dos parámetros (2PL)



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)



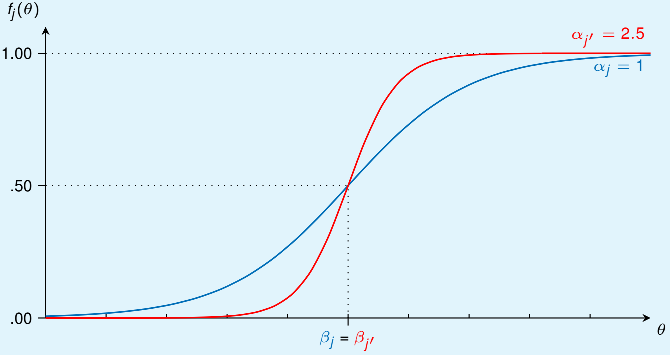
El modelo logístico de dos parámetros (2PL)



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

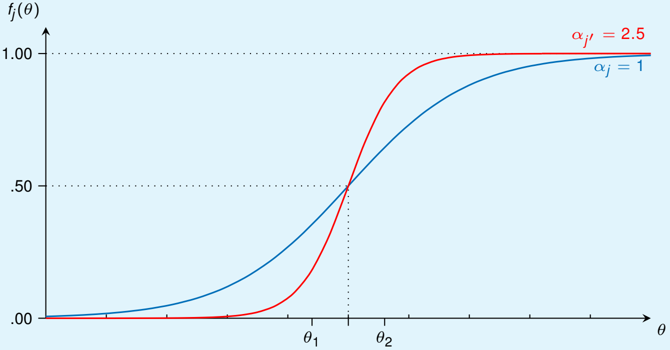
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j (\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j (\theta - \beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

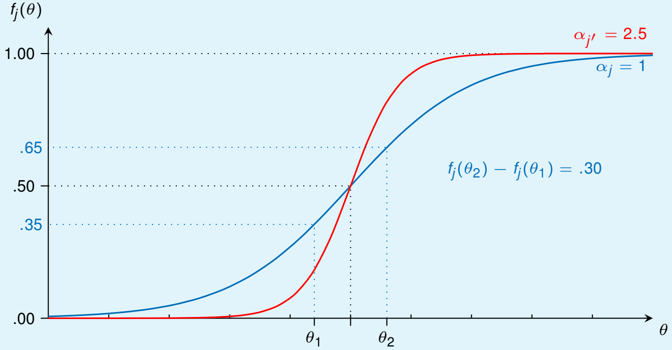
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

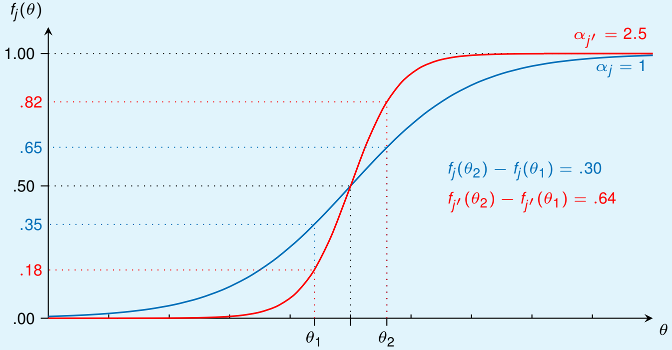
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

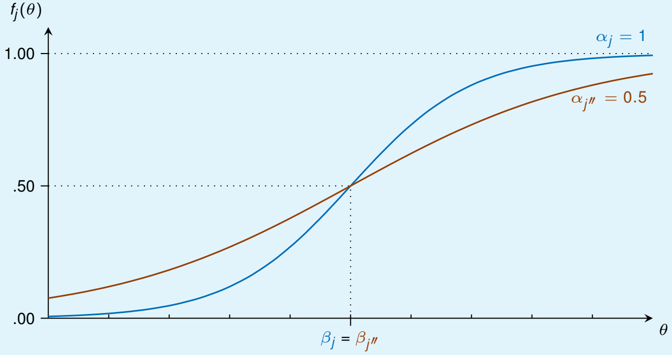
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

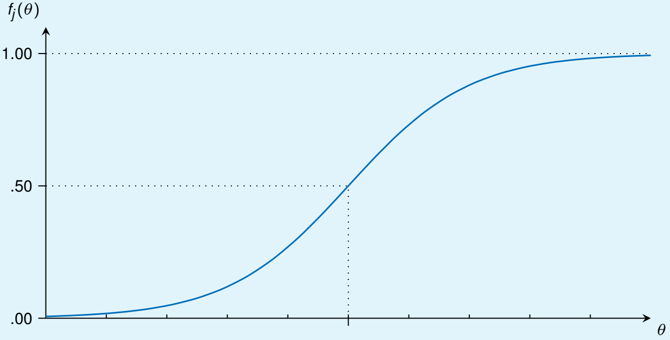
$$f_j(\theta) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\alpha_j\,(\theta-\beta_j)}}{1 \;+\; \mathrm{e}^{\alpha_j\,(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

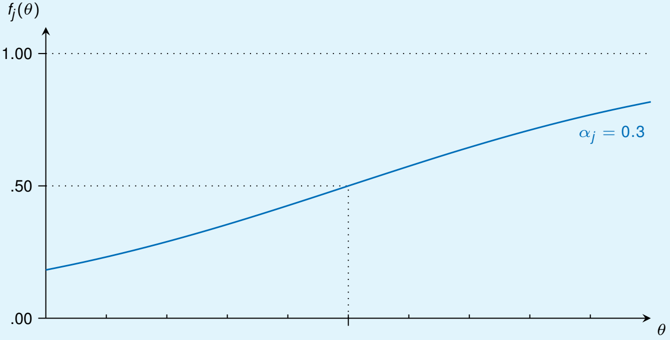
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

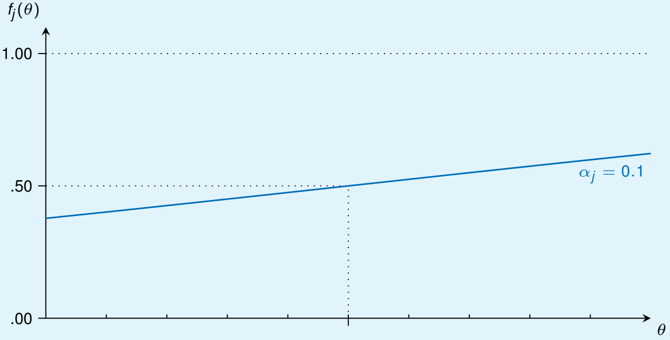
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

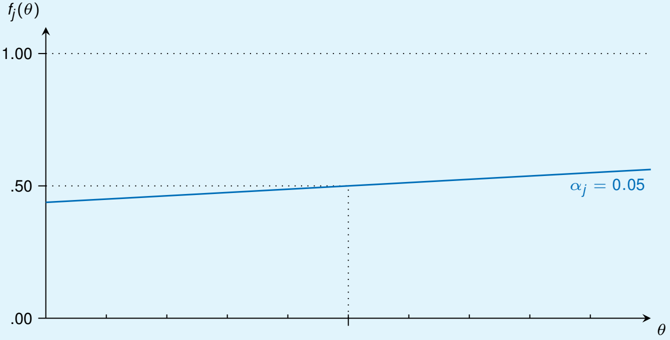
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

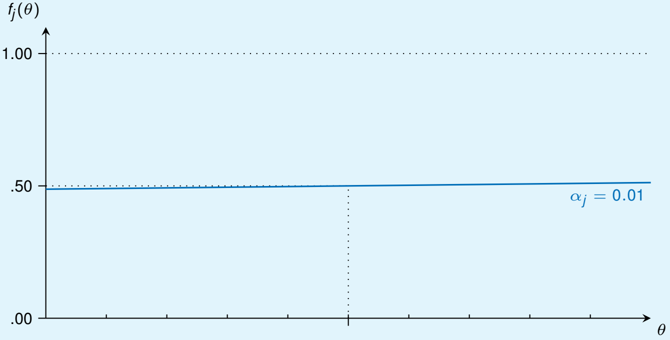
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

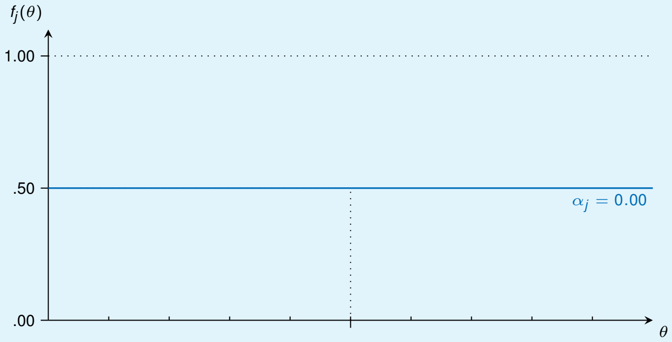
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

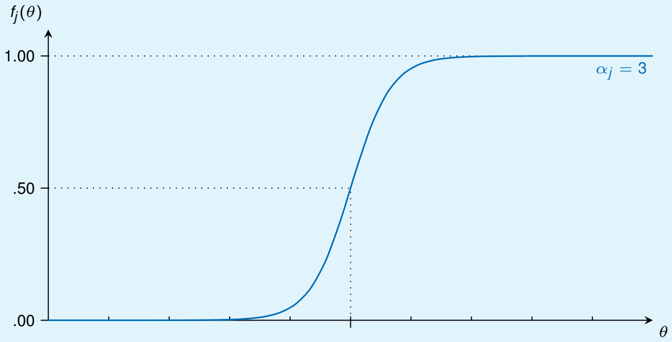
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

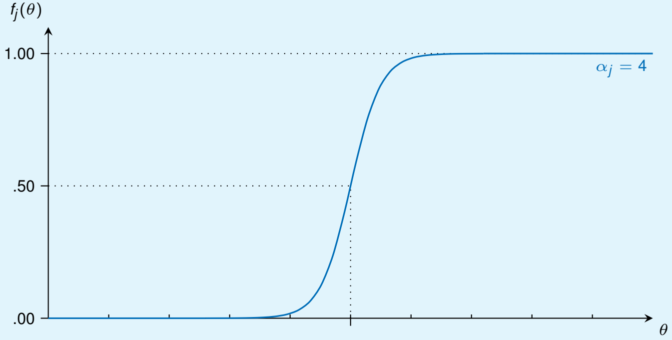
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

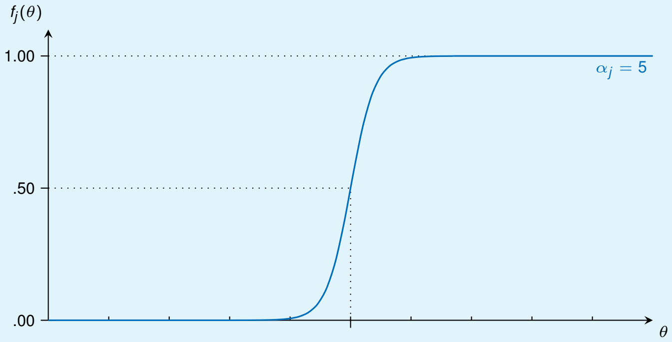
$$f_j(\theta) \;=\; \frac{e^{\alpha_j\,(\theta-\beta_j)}}{1\;+\;e^{\alpha_j\,(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

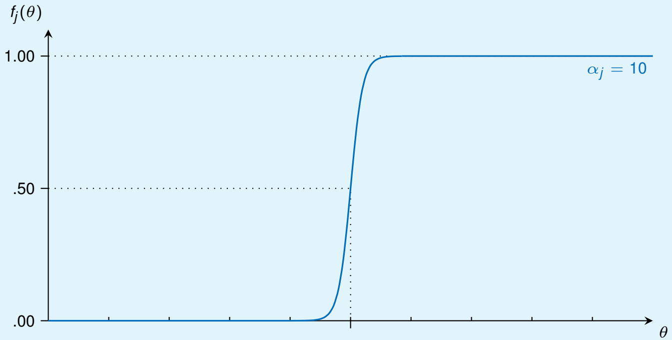
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

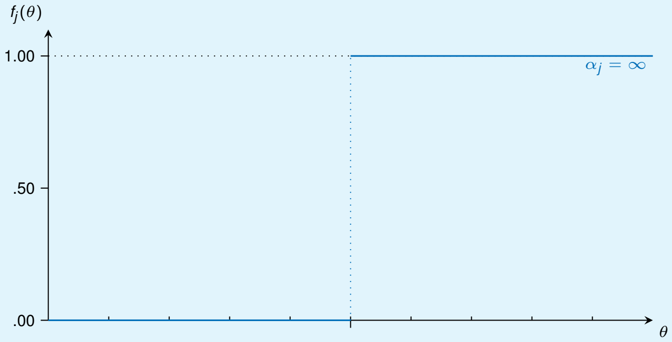
$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

La CCI en el 2PL se da por:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}.$$



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

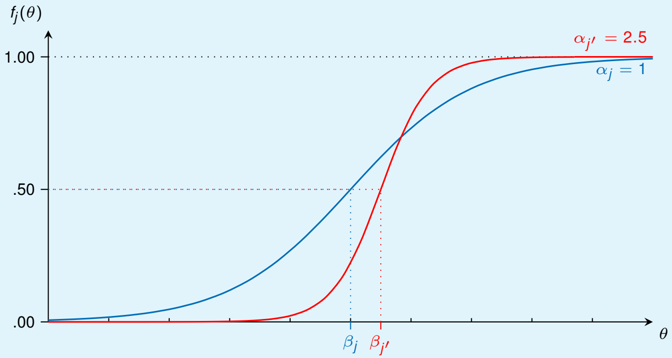
En el modelo 2PL, cada ítem se caracteriza por dos parámetros:

1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad
   Ojo: La interpretación de β_j no es uniforme

El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

En el modelo 2PL, cada ítem se caracteriza por dos parámetros:

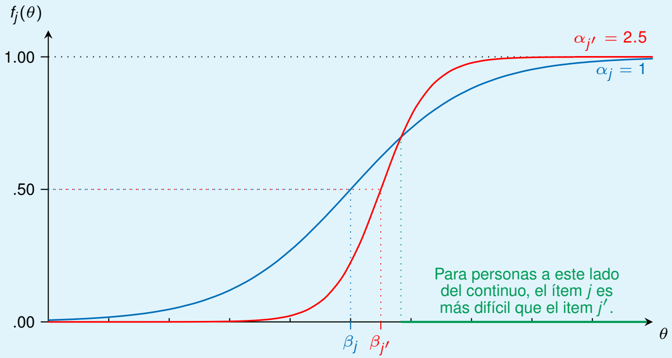
1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad
   Ojo: La interpretación de β_j no es uniforme



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

En el modelo 2PL, cada ítem se caracteriza por dos parámetros:

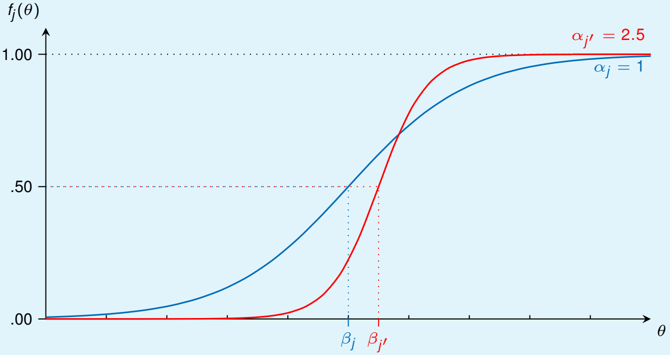
1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad
   Ojo: La interpretación de β_j no es uniforme



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

En el modelo 2PL, cada ítem se caracteriza por dos parámetros:

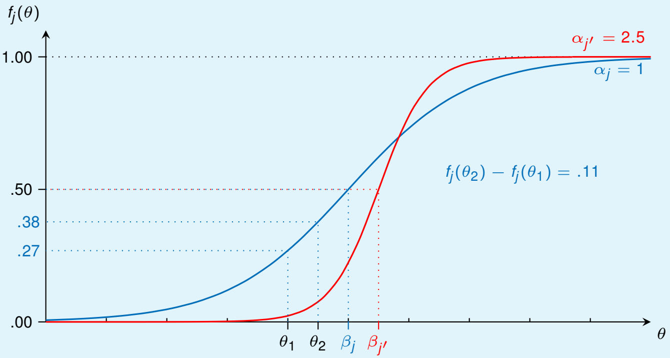
2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación
   Ojo: La interpretación de α_j no es uniforme



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

En el modelo 2PL, cada ítem se caracteriza por dos parámetros:

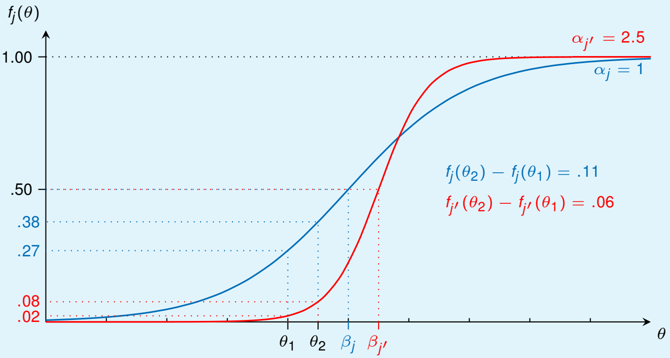
2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación
   Ojo: La interpretación de α_j no es uniforme



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

En el modelo 2PL, cada ítem se caracteriza por dos parámetros:

2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación
   Ojo: La interpretación de α_j no es uniforme



El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

Indeterminaciones

De la ecuación de la CCI del modelo 2PL:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}$$

sigue que:

- Sumar la misma constante a todas las θ_i's y β_j's no afecta las probabilidades de acertar.

  Para este problema y su solución, véase en el modelo Rasch.

- Multiplicar todas las α_j's con una constante y simultáneamente dividir todas las θ_i's y β_j's por esta misma constante tampoco afecta las probabilidades de acertar.

  Es otra indeterminación, que se resuelva por:
  - restringir que $\prod_j \alpha_j = 1$.
  - restringir que la varianza de θ en la muestra sea 1.

El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

Indeterminaciones

De la ecuación de la CCI del modelo 2PL:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j (\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j (\theta - \beta_j)}}$$

sigue que:

- Sumar la misma constante a todas las θ_i's y β_j's no afecta las probabilidades de acertar.

  Para este problema y su solución, véase en el modelo Rasch.

- Multiplicar todas las α_j's con una constante y simultáneamente dividir todas las θ_i's y β_j's por esta misma constante tampoco afecta las probabilidades de acertar.

  Es otra indeterminación, que se resuelva por:

  - restringir que $\prod_j \alpha_j = 1$.
  - restringir que la varianza de θ en la muestra sea 1.

El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

Indeterminaciones

De la ecuación de la CCI del modelo 2PL:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}$$

sigue que:

- Sumar la misma constante a todas las θ_i's y β_j's no afecta las probabilidades de acertar.

  Para este problema y su solución, véase en el modelo Rasch.

- Multiplicar todas las α_j's con una constante y simultáneamente dividir todas las θ_i's y β_j's por esta misma constante tampoco afecta las probabilidades de acertar.

  Es otra indeterminación, que se resuelva por:
  - restringir que $\prod_j \alpha_j = 1$.
  - restringir que la varianza de θ en la muestra sea 1.

El modelo logístico de dos parámetros (2PL)

Indeterminaciones

De la ecuación de la CCI del modelo 2PL:

$$f_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta-\beta_j)}}$$

sigue que:

- Sumar la misma constante a todas las θ_i's y β_j's no afecta las probabilidades de acertar.

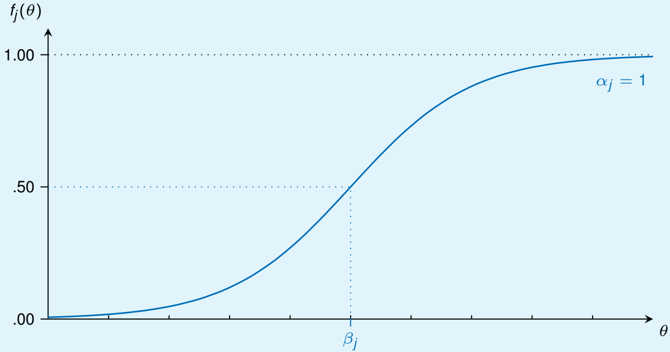
  Para este problema y su solución, véase en el modelo Rasch.

- Multiplicar todas las α_j's con una constante y simultáneamente dividir todas las θ_i's y β_j's por esta misma constante tampoco afecta las probabilidades de acertar.

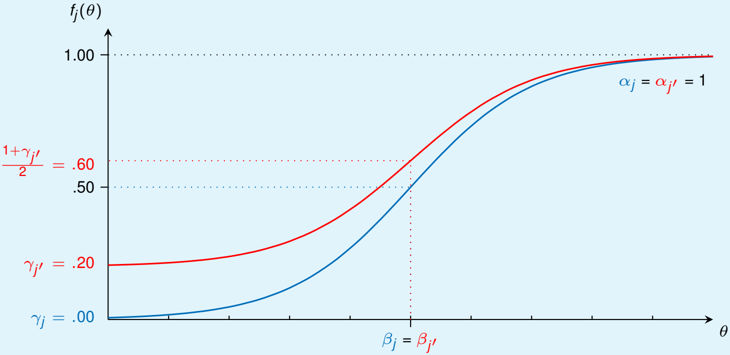
  Es otra indeterminación, que se resuelva por:
  - restringir que $\prod_j \alpha_j = 1$.
  - restringir que la varianza de θ en la muestra sea 1.

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

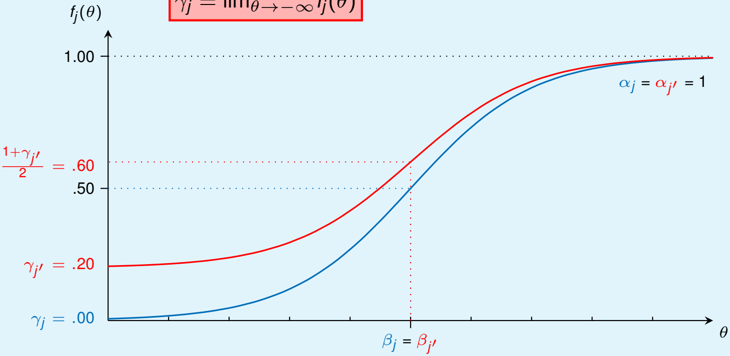


El modelo logístico de tres parámetros (3PL)



El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

$$\boxed{\gamma_j = \lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta)}$$

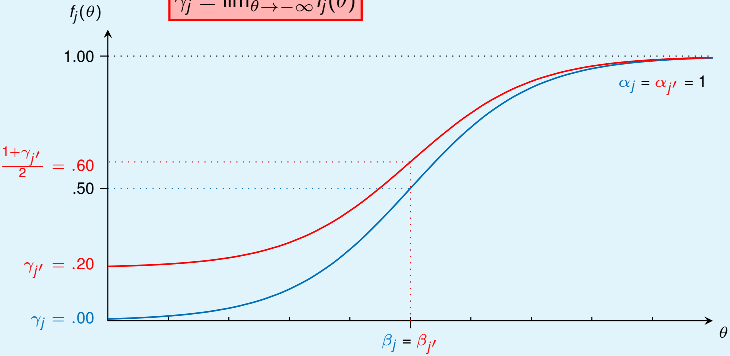


El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

La CCI en el 3PL se da por:

$$f_j(\theta) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

$\boxed{\gamma_j = \lim_{\theta \to -\infty} f_j(\theta)}$



El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

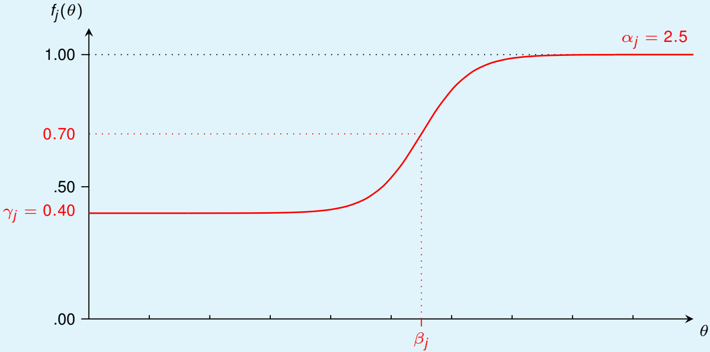
1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad

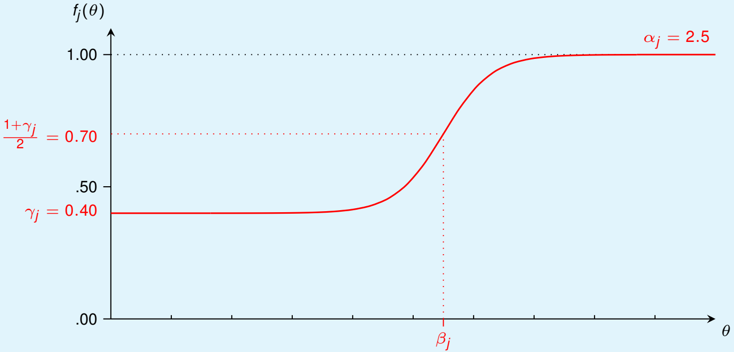


El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad
   Ojo: $\theta = \beta_j \nRightarrow f_j(\theta) = 0.50$.

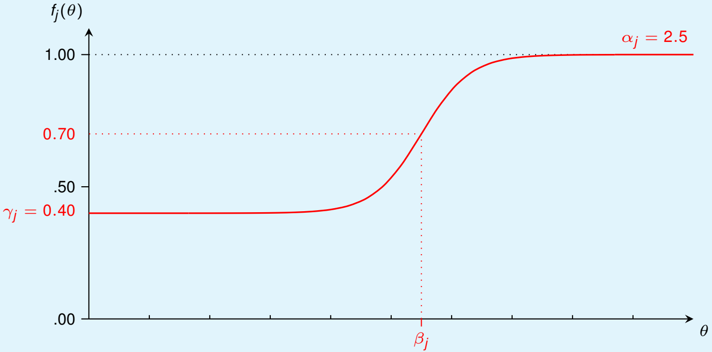


El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad
   Ojo: $\theta = \beta_j \not\Rightarrow f_j(\theta) = 0.50$.
   Ojo: La interpretación de β_j no siempre es consistente

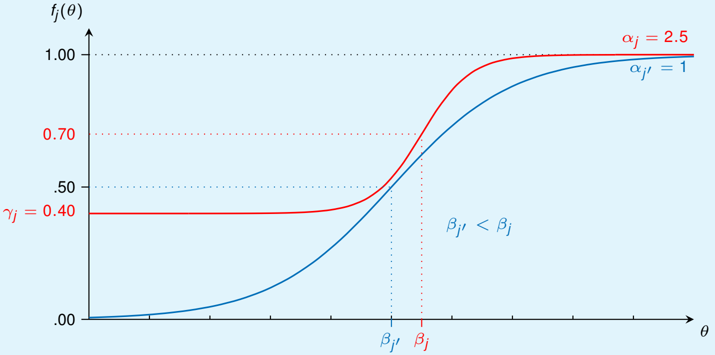


El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad
   Ojo: $\theta = \beta_j \not\Rightarrow f_j(\theta) = 0.50$.
   Ojo: La interpretación de β_j no siempre es consistente

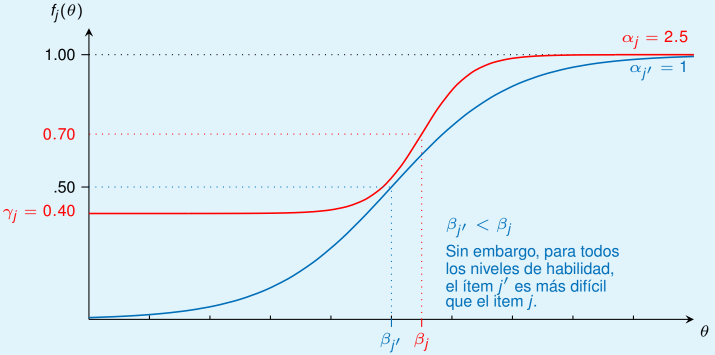


El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

1. $\beta_j \quad (-\infty < \beta_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de dificultad
   Ojo: $\theta = \beta_j \not\Rightarrow f_j(\theta) = 0.50$.
   Ojo: La interpretación de β_j no siempre es consistente

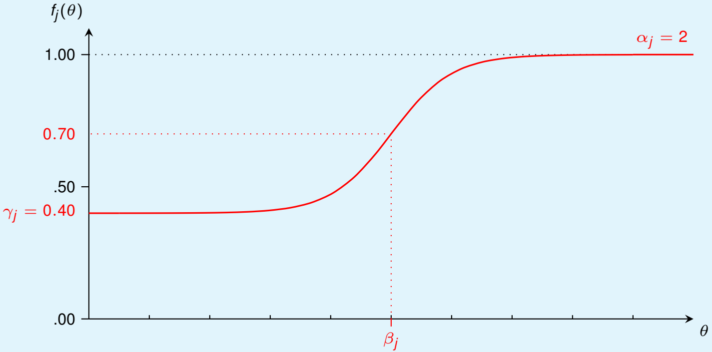


El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación



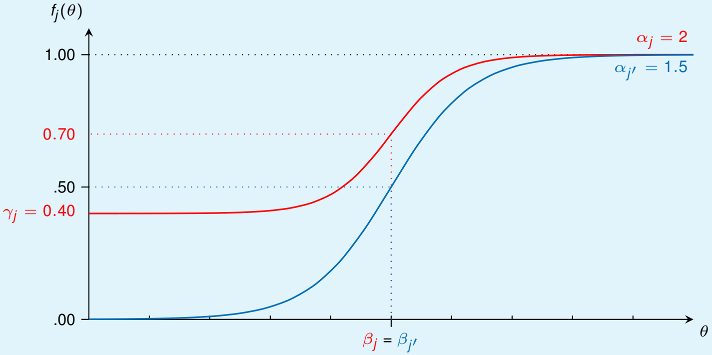
El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación

Ojo: La interpretación de α_j no siempre es consistente



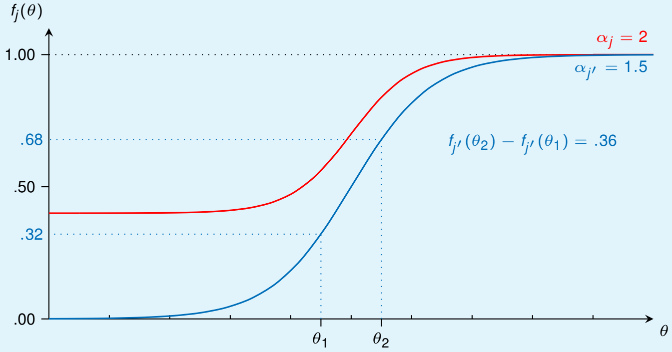
El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación

   Ojo: La interpretación de α_j no siempre es consistente



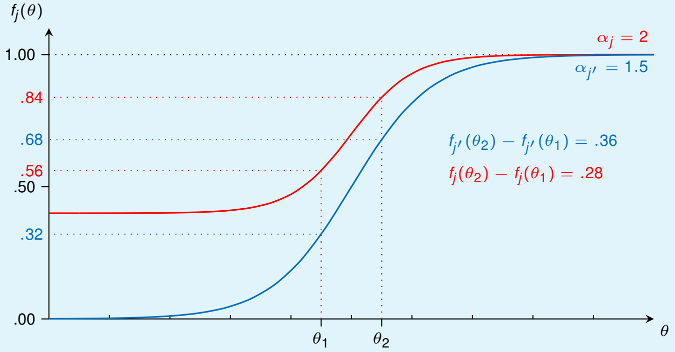
El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación

   Ojo: La interpretación de α_j no siempre es consistente



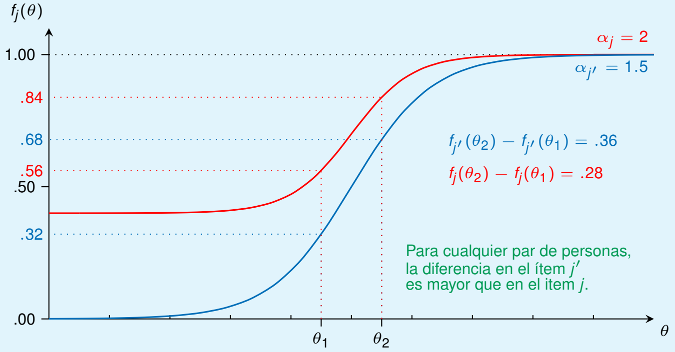
El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

2. $\alpha_j \quad (0 < \alpha_j < +\infty)$
   Interpretación: Grado de discriminación

Ojo: La interpretación de α_j no siempre es consistente



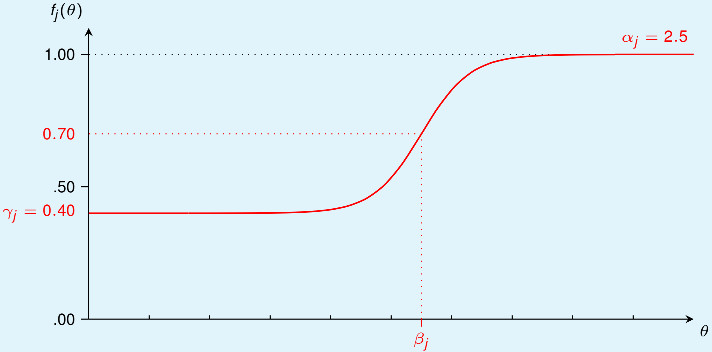
El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Interpretación de los parámetros

En el modelo 3PL, cada ítem se caracteriza por tres parámetros:

3. $\gamma_j \quad (0 < \gamma_j < 1)$
   Interpretación: Parámetro de adivinación

Ojo: El valor de γ_j influye en la interpretación de α_j y β_j



El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\ &= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\ &= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)\end{aligned}$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\
&= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\
&= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)
\end{aligned}$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\
&= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\
&= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)
\end{aligned}$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$
\begin{aligned}
\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\
&= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\
&= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)
\end{aligned}
$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\ &= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\ &= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)\end{aligned}$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\ &= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\ &= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j) \end{aligned}$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$
\begin{aligned}
\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\
&= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\
&= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)
\end{aligned}
$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$
\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.
$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\ &= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\ &= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)\end{aligned}$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.$$

El modelo logístico de tres parámetros (3PL)

Modelo cognitivo del 3PL

Consideramos las siguientes cuatro posibilidades:

	Respuesta	Probabilidad
Conoce la respuesta, pero se equivoca	Incorrecta	$f_j \times h_j$
Conoce la respuesta y no se equivoca	Correcta	$f_j \times (1 - h_j)$
No conoce la respuesta, pero adivina	Correcta	$(1 - f_j) \times g_j$
No conoce la respuesta, y no adivina	Incorrecta	$(1 - f_j) \times (1 - g_j)$

Sigue que:

$$
\begin{aligned}
\Pr(\text{Respuesta correcta}) &= f_j \times (1 - h_j) + (1 - f_j) \times g_j \\
&= f_j - (f_j \times h_j) + g_j - (f_j \times g_j) \\
&= g_j + f_j \times (1 - g_j) - (f_j \times h_j)
\end{aligned}
$$

En el modelo 3PL:

- f_j se da por el modelo de dos parámetros;
- $g_j = \gamma_j$;
- $h_j = 0$.

Entonces:

$$
\Pr(\text{Respuesta correcta}) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \times \frac{e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta - \beta_j)}}.
$$

Índice:

El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

- El PCM es una generalización del modelo de Rasch para ítems que tienen 2 o más categorías de respuesta ordenadas.
- Los valores para las categorías del ítem son 0, 1, ..., m.
- El modelo (Masters, 1982) se desarrolló pensando en ítems que requieren m diferentes pasos para resolverse y donde a cada paso correctamente ejecutado se asigna un "crédito parcial".
- Se asignan parámetros a todas las categorías (excepto la categoría 0): $\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm}$

El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

- El PCM es una generalización del modelo de Rasch para ítems que tienen 2 o más categorías de respuesta ordenadas.
- Los valores para las categorías del ítem son 0, 1, . . . , m.
- El modelo (Masters, 1982) se desarrolló pensando en ítems que requieren m diferentes pasos para resolverse y donde a cada paso correctamente ejecutado se asigna un "crédito parcial".
- Se asignan parámetros a todas las categorías (excepto la categoría 0): $\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm}$

El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

- El PCM es una generalización del modelo de Rasch para ítems que tienen 2 o más categorías de respuesta ordenadas.
- Los valores para las categorías del ítem son 0, 1, . . . , m.
- El modelo (Masters, 1982) se desarrolló pensando en ítems que requieren m diferentes pasos para resolverse y donde a cada paso correctamente ejecutado se asigna un "crédito parcial".
- Se asignan parámetros a todas las categorías (excepto la categoría 0): $\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm}$

El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

- El PCM es una generalización del modelo de Rasch para ítems que tienen 2 o más categorías de respuesta ordenadas.
- Los valores para las categorías del ítem son 0, 1, . . . , m.
- El modelo (Masters, 1982) se desarrolló pensando en ítems que requieren m diferentes pasos para resolverse y donde a cada paso correctamente ejecutado se asigna un “crédito parcial”.
- Se asignan parámetros a todas las categorías (excepto la categoría 0): $\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm}$

El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

Curvas características de las categorías

La curva característica de la categoría (CCC) k del ítem j en el PCM se da por:

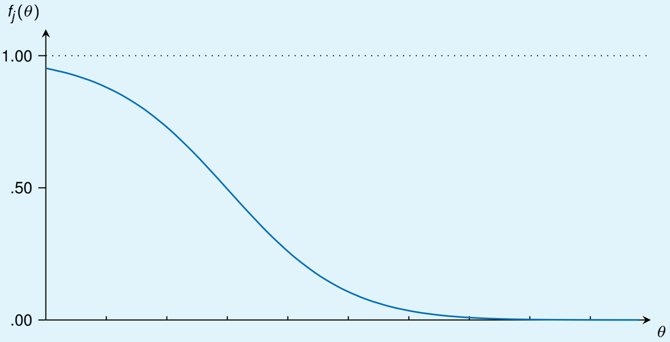
$$f_{jk}(\theta) = \frac{\exp\left[k\theta - \sum_{g=1}^{k} \beta_{jg}\right]}{\sum_{h=0}^{m} \exp\left[h\theta - \sum_{g=1}^{h} \beta_{jg}\right]}$$

El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

Curvas características de las categorías

La curva característica de la categoría (CCC) k del ítem j en el PCM se da por:

$$f_{j0}(\theta) = \frac{\exp\left[0\theta - \sum_{g=1}^{0} \beta_{jg}\right]}{\sum_{h=0}^{m} \exp\left[h\theta - \sum_{g=1}^{h} \beta_{jg}\right]} = \frac{1}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{j1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{j1} + \beta_{j2})\right]}$$

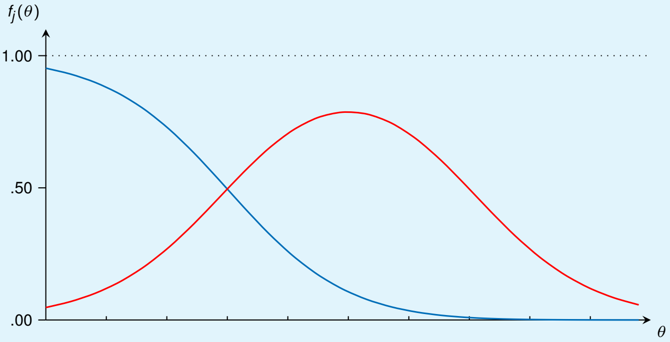


El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

Curvas características de las categorías

La curva característica de la categoría (CCC) k del ítem j en el PCM se da por:

$$f_{j1}(\theta) = \frac{\exp\left[1\theta - \sum_{g=1}^{1} \beta_{jg}\right]}{\sum_{h=0}^{m} \exp\left[h\theta - \sum_{g=1}^{h} \beta_{jg}\right]} = \frac{\exp\left[\theta - \beta_{j1}\right]}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{j1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{j1} + \beta_{j2})\right]}$$

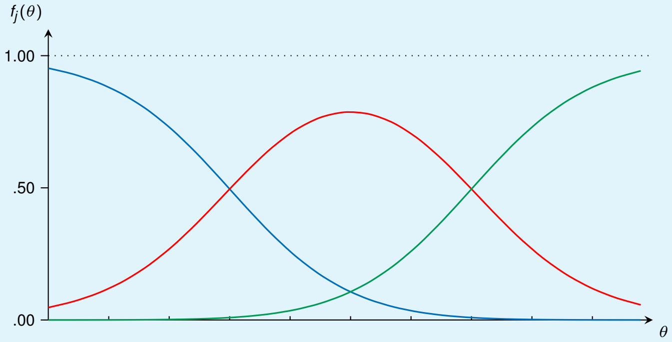


El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

Curvas características de las categorías

La curva característica de la categoría (CCC) k del ítem j en el PCM se da por:

$$f_{j2}(\theta) = \frac{\exp\left[j2\theta - \sum_{g=1}^{j2} \beta_{jg}\right]}{\sum_{h=0}^{m} \exp\left[h\theta - \sum_{g=1}^{h} \beta_{jg}\right]} = \frac{\exp\left[2\theta - (\beta_{j1} + \beta_{j2})\right]}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{j1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{j1} + \beta_{j2})\right]}$$

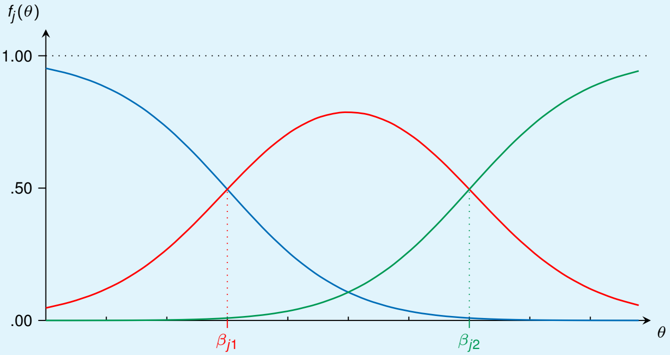


El modelo de crédito parcial (PCM) para ítems de categorías ordenadas

Curvas características de las categorías

La curva característica de la categoría (CCC) k del ítem j en el PCM se da por:

$$f_{j2}(\theta) = \frac{\exp\left[j2\theta - \sum_{g=1}^{j2} \beta_{jg}\right]}{\sum_{h=0}^{m} \exp\left[h\theta - \sum_{g=1}^{h} \beta_{jg}\right]} = \frac{\exp\left[2\theta - (\beta_{j1} + \beta_{j2})\right]}{1 + \exp\left[\theta - \beta_{j1}\right] + \exp\left[2\theta - (\beta_{j1} + \beta_{j2})\right]}$$



Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El “multiple-choice model” (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El “multiple-choice model” (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El “multiple-choice model” (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El “multiple-choice model” (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El “multiple-choice model” (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El “multiple-choice model” (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El “multiple-choice model” (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo 3PL se utiliza a menudo para el análisis de ítems de opción múltiple. Sin embargo, no distingue entre los diferentes distractores.

Sería interesante incluir los distractores en el análisis, por tres razones:

- Pueden proporcionar información sobre el nivel de la persona;
- Se obtiene información psicométrica sobre cada distractor;
- Pueden generar hipótesis sobre el proceso formativo.

Modelos que sí analizan la información en las respuestas incorrectas, incluyen:

- El modelo de respuesta nominal (Bock, 1972)
- La extensión del modelo de respuesta nominal propuesta por Samejima (1979)
- El "multiple-choice model" (Thissen y Steinberg, 1984)

En estos modelos, cada opción de respuesta tiene una curva característica.

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo de opción múltiple de Thissen y Steinberg (1984)

Ideas que subyacen al modelo de Thissen y Steinberg (1984):

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo de opción múltiple de Thissen y Steinberg (1984)

Ideas que subyacen al modelo de Thissen y Steinberg (1984):

Respuesta latente	Parámetros		Respuesta observada
Opción 1	α_{j1}, β_{j1}		Opción 1
Opción 2	α_{j2}, β_{j2}		Opción 2
Opción 3	α_{j3}, β_{j3}		Opción 3
Opción 4	α_{j4}, β_{j4}		Opción 4
No sabe	α_{j0}, β_{j0}	δ_{j1}	Opción 1
		δ_{j2}	Opción 2
	θ_i	δ_{j3}	Opción 3
		δ_{j4}	Opción 4

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo de opción múltiple de Thissen y Steinberg (1984)

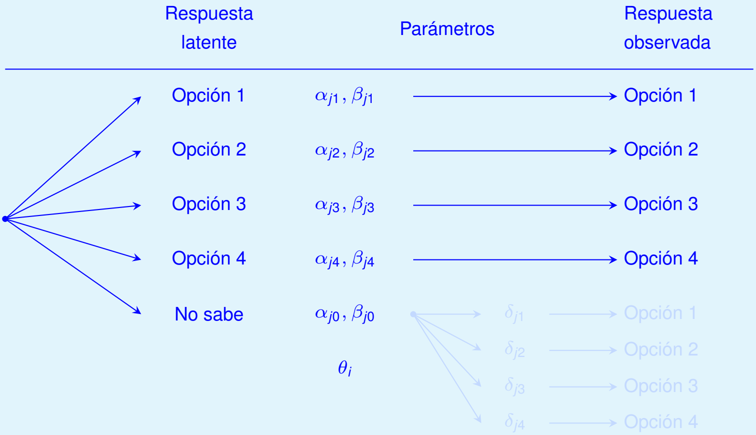
Ideas que subyacen al modelo de Thissen y Steinberg (1984):

Respuesta latente	Parámetros		Respuesta observada
Opción 1	α_{j1}, β_{j1}		Opción 1
Opción 2	α_{j2}, β_{j2}		Opción 2
Opción 3	α_{j3}, β_{j3}		Opción 3
Opción 4	α_{j4}, β_{j4}		Opción 4
No sabe	α_{j0}, β_{j0}	δ_{j1}	Opción 1
		δ_{j2}	Opción 2
		δ_{j3}	Opción 3
		δ_{j4}	Opción 4
	θ_i		

Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo de opción múltiple de Thissen y Steinberg (1984)

Ideas que subyacen al modelo de Thissen y Steinberg (1984):



Modelos TRI para ítems de opción múltiple

El modelo de opción múltiple de Thissen y Steinberg (1984)

Ideas que subyacen al modelo de Thissen y Steinberg (1984):

Respuesta latente	Parámetros		Respuesta observada
Opción 1	α_{j1}, β_{j1}		Opción 1
Opción 2	α_{j2}, β_{j2}		Opción 2
Opción 3	α_{j3}, β_{j3}		Opción 3
Opción 4	α_{j4}, β_{j4}		Opción 4
No sabe	α_{j0}, β_{j0}	δ_{j1}	Opción 1
		δ_{j2}	Opción 2
	θ_i	δ_{j3}	Opción 3
		δ_{j4}	Opción 4

Índice:

Índice:

Índice:

Diseños incompletos

En muchas ocasiones, no todas las personas responden a todos los ítems.

Por ejemplo, porque la persona que contesta el examen

- no tuvo el tiempo suficiente para responder todos los ítems del examen
- saltó unos ítems que le parecieron muy difíciles
- olvidó responder uno o más ítems
- ...

$\longrightarrow$ Las razones de la omisión se sitúan en la persona examinada.

Diseños incompletos

Pero los diseños incompletos pueden ocurrir también por decisiones del examinador. Por ejemplo, porque el examinador

- aplica diferentes variantes de un examen (para evitar que los estudiantes copien)
- presenta cuadernillos diferentes a distintos subgrupos (por ejemplo, con aptitudes distintas)
- desea construir un banco de (un gran número de) ítems y no es viable aplicar todos los ítems a todas las personas
- ...

$\longrightarrow$ Las razones de la omisión se sitúan fuera de la persona examinada.

Diseños incompletos

En general,

- las omisiones llevan a "huecos" en la matriz de datos.
- la validez de las inferencias (a saber, las estimaciones de los parámetros) depende del mecanismo que causó las omisiones y cómo el modelo de análisis lo toma en cuenta (véase Rubin, 1976).
- la TRI trata con más facilidad diseños incompletos, especialmente si están bajo el control del examinador.

Diseños incompletos

En general,

- las omisiones llevan a “huecos” en la matriz de datos.
- la validez de las inferencias (a saber, las estimaciones de los parámetros) depende del mecanismo que causó las omisiones y cómo el modelo de análisis lo toma en cuenta (véase Rubin, 1976).
- la TRI trata con más facilidad diseños incompletos, especialmente si están bajo el control del examinador.

Diseños incompletos

En general,

- las omisiones llevan a “huecos” en la matriz de datos.
- la validez de las inferencias (a saber, las estimaciones de los parámetros) depende del mecanismo que causó las omisiones y cómo el modelo de análisis lo toma en cuenta (véase Rubin, 1976).
- la TRI trata con más facilidad diseños incompletos, especialmente si están bajo el control del examinador.

Índice:

Tests adaptativos informatizados (TAIs)

TAIs llevan el principio de diseños incompletos al extremo:
Cada persona recibe su propio test.

Diagrama de flujo de un TAI:

Tests adaptativos informatizados (TAIs)

Ventajas de un TAI:

- Estimaciones más precisas
- Tests/Exámenes más cortos
- La persona siente que el examen está adaptado a su nivel

Se necesita:

- un banco de ítems previamente calibrados
- un algoritmo para llevar a cabo el TAI

Tests adaptativos informatizados (TAIs)

Ventajas de un TAI:

- Estimaciones más precisas
- Tests/Exámenes más cortos
- La persona siente que el examen está adaptado a su nivel

Se necesita:

- un banco de ítems previamente calibrados
- un algoritmo para llevar a cabo el TAI

Índice:

Funcionamiento diferencial

Uno de los supuestos de los modelos TRI, es que los parámetros son invariantes. En particular, los parámetros de los ítems tienen el mismo valor para todas las personas

Sin embargo, es importante examinar si el supuesto se cumple.
DIF (Funcionamiento Diferencial del Ítem) quiere decir que los parámetros no son invariantes en diferentes grupos de personas, por ejemplo entre:

- diferentes grupos étnicos
- hombres y mujeres
- diferentes grupos culturales
- ...

Índice:

Índice:

Índice:

¿La TRI responde a las críticas de la TCT?

1. Crítica 1: ¿Qué información nos da la "puntuación verdadera"?
   En la TRI, el parámetro θ informa sobre el nivel de la persona.
   Es una entidad latente/abstracta que influye de forma muy precisa en las respuestas.

   El nivel de la escala sobre la que se posicionan los parámetros es de *intervalo*.

2. Crítica 2: No invarianza de los parámetros en la TCT
   Si el modelo TRI se ajusta dentro de una población de personas e ítems,
   - los niveles de las personas son idénticos independientemente de los ítems que conforman el test;
   - las propiedades de los ítems son idénticos en diferentes subgrupos.

¿La TRI responde a las críticas de la TCT?

1. Crítica 1: ¿Qué información nos da la “puntuación verdadera”?
   En la TRI, el parámetro θ informa sobre el nivel de la persona.
   Es una entidad latente/abstracta que influye de forma muy precisa en las respuestas.

   El nivel de la escala sobre la que se posicionan los parámetros es de *intervalo*.

2. Crítica 2: No invarianza de los parámetros en la TCT
   Si el modelo TRI se ajusta dentro de una población de personas e ítems,
   - los niveles de las personas son idénticos independientemente de los ítems que conforman el test;
   - las propiedades de los ítems son idénticos en diferentes subgrupos.

¿La TRI responde a las críticas de la TCT?

3. Crítica 3: La TCT supone el error estándar de medición uniforme
   En los modelos TRI, la precisión de la medición está (inversamente) relacionada con la función de información.

   La información aportada por un test y la precisión de la medición dependen del nivel de la persona.

4. Crítica 4: La TCT carece de métodos formales para evaluar los supuestos del modelo
   Evaluar la bondad de ajuste de un modelo se considera crucial para aplicaciones TRI.

   Se han desarrollado un gran número de pruebas formales (estadísticas) para evaluar los diferentes supuestos del modelo e para identificar posibles causas de un mal ajuste.

¿La TRI responde a las críticas de la TCT?

3. Crítica 3: La TCT supone el error estándar de medición uniforme
   En los modelos TRI, la precisión de la medición está (inversamente) relacionada con la función de información.

   La información aportada por un test y la precisión de la medición dependen del nivel de la persona.

4. Crítica 4: La TCT carece de métodos formales para evaluar los supuestos del modelo
   Evaluar la bondad de ajuste de un modelo se considera crucial para aplicaciones TRI.

   Se han desarrollado un gran número de pruebas formales (estadísticas) para evaluar los diferentes supuestos del modelo e para identificar posibles causas de un mal ajuste.

Índice:

Entonces, ¿desde ahora solo usamos modelos TRI?

Hay algunos inconvenientes asociados con la TRI:

- Generalmente, el proceso de estimación requiere muestras de personas relativamente grandes (especialmente para modelos más complejos).

- En la práctica, los modelos TRI más comunes (y más simples) no se ajustan a los datos.

  ¡La realidad es más compleja que lo que suponen los modelos TRI!

- En comparación con la TCT, es más difícil comunicar los resultados a un público no experto

  Por ejemplo, a pesar de varias ventajas que ofrece un TAI, existe bastante resistencia para utilizar la técnica para exámenes importantes.

- El análisis requiere más tiempo para llevarse a cabo

Entonces, ¿desde ahora solo usamos modelos TRI?

Hay algunos inconvenientes asociados con la TRI:

- Generalmente, el proceso de estimación requiere muestras de personas relativamente grandes (especialmente para modelos más complejos).

- En la práctica, los modelos TRI más comunes (y más simples) no se ajustan a los datos.

  ¡La realidad es más compleja que lo que suponen los modelos TRI!

- En comparación con la TCT, es más difícil comunicar los resultados a un público no experto

  Por ejemplo, a pesar de varias ventajas que ofrece un TAI, existe bastante resistencia para utilizar la técnica para exámenes importantes.

- El análisis requiere más tiempo para llevarse a cabo

Entonces, ¿desde ahora solo usamos modelos TRI?

Hay algunos inconvenientes asociados con la TRI:

- Generalmente, el proceso de estimación requiere muestras de personas relativamente grandes (especialmente para modelos más complejos).
- En la práctica, los modelos TRI más comunes (y más simples) no se ajustan a los datos.

  ¡La realidad es más compleja que lo que suponen los modelos TRI!
- En comparación con la TCT, es más difícil comunicar los resultados a un público no experto

  Por ejemplo, a pesar de varias ventajas que ofrece un TAI, existe bastante resistencia para utilizar la técnica para exámenes importantes.
- El análisis requiere más tiempo para llevarse a cabo

Entonces, ¿desde ahora solo usamos modelos TRI?

Hay algunos inconvenientes asociados con la TRI:

- Generalmente, el proceso de estimación requiere muestras de personas relativamente grandes (especialmente para modelos más complejos).
- En la práctica, los modelos TRI más comunes (y más simples) no se ajustan a los datos.

  ¡La realidad es más compleja que lo que suponen los modelos TRI!
- En comparación con la TCT, es más difícil comunicar los resultados a un público no experto

  Por ejemplo, a pesar de varias ventajas que ofrece un TAI, existe bastante resistencia para utilizar la técnica para exámenes importantes.
- El análisis requiere más tiempo para llevarse a cabo