Técnicas de Muestreo I

Patricia Isabel Romero Mares

Departamento de Probabilidad y Estadística
IIMAS UNAM

septiembre 2015

Estimadores de Razón en Muestreo Estratificado (bajo m.a.s.)

Hay dos tipos: el separado y el combinado.

1. Estimador de razón separado R_s
Estima la razón en cada estrato y luego los suma, ponderando con los pesos de los estratos.

$$\begin{aligned}\hat{R}_s &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \hat{R}_h \\ &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \frac{\hat{Y}_h}{\hat{X}_h}\end{aligned}$$

En el caso de m.a.s. en cada estrato

$$\hat{R}_s = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}$$

Con varianza y estimador de la varianza:

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{R}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2} V\left(\hat{R}_h\right) \\
\hat{V}\left(\hat{R}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2} \hat{V}\left(\hat{R}_h\right)
\end{aligned}
$$

Si tenemos una m.a.s. en cada uno de los estratos:

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{R}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2} \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{1}{n_h} \frac{1}{\bar{X}_h^2} \sum_{i=1}^{N_h} \frac{\left(Y_{hi} - R_h X_{hi}\right)^2}{N_h - 1} \\
\hat{V}\left(\hat{R}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2} \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{1}{n_h} \frac{1}{\bar{x}_h^2} \sum_{i=1}^{n_h} \frac{\left(y_{hi} - \hat{R}_h x_{hi}\right)^2}{n_h - 1}
\end{aligned}
$$

$$\hat{\bar{Y}}_s = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \hat{R}_h \bar{X}_h \ \left\{\bar{X}_h \text{ conocida en c/estrato}\right\}$$

Con varianza y estimador de varianza:

$$\begin{aligned} V\left(\hat{\bar{Y}}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2} \bar{X}_h^2 \, V\left(\hat{R}_h\right) \\ \hat{V}\left(\hat{\bar{Y}}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2} \bar{X}_h^2 \, \hat{V}\left(\hat{R}_h\right) \end{aligned}$$

$$\hat{Y}_s = \sum_{h=1}^{L} \hat{R}_h X_h \ \{X_h \text{ conocido en c/estrato}\}$$

Con varianza y estimador de varianza:

$$\begin{aligned} V\left(\hat{Y}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} X_h^2 \, V\left(\hat{R}_h\right) \\ \hat{V}\left(\hat{Y}_s\right) &= \sum_{h=1}^{L} X_h^2 \, \hat{V}\left(\hat{R}_h\right) \end{aligned}$$

El estimador de razón separado se usa cuando se tienen pocos estratos y/o los tamaños de muestra en cada estrato son grandes. Supone que las razones en cada estrato no son similares.

Los sesgos de los estimadores de la razón en cada estrato se suman, por lo que este estimador puede tener un sesgo muy grande. Por esto es conveniente usarlo cuando los tamaños de muestra en cada estrato sean grandes.

2. Estimador de razón combinado R_c

Combina la información de los estratos y después hace el cociente.

$$\hat{R}_c = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_h}{\sum_{h=1}^{L} \hat{X}_h}$$

En caso de tener m.a.s. en cada estrato

$$\hat{R}_c = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h}$$

La varianza, y su estimador, en caso de tener una m.a.s. en cada estrato:

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{R}_c\right) &= \frac{1}{X^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2\left(\frac{1}{n_h}-\frac{1}{N_h}\right)\times \\
&\quad \frac{1}{N_h-1}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\left(Y_{hi}-\bar{Y}_h\right)-R_c\left(X_{hi}-\bar{X}_h\right)\right]^2 \\
\hat{V}\left(\hat{R}_c\right) &= \frac{1}{\hat{X}^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2\left(\frac{1}{n_h}-\frac{1}{N_h}\right)\times \\
&\quad \frac{1}{n_h-1}\sum_{i=1}^{n_h}\left[y_{hi}-\hat{R}_c x_{hi}-\frac{\sum_{j=1}^{n_h}\left(y_{hj}-\hat{R}_c x_{hj}\right)}{n_h}\right]^2
\end{aligned}
$$

$$\hat{\bar{Y}}_c = \hat{R}_c \bar{X} \quad \left\{\bar{X} \text{ conocida}\right\}$$

Con varianza y estimador de varianza:

$$\begin{aligned} V\left(\hat{\bar{Y}}_c\right) &= \bar{X}^2 \, V\left(\hat{R}_c\right) \\ \hat{V}\left(\hat{\bar{Y}}_c\right) &= \bar{X}^2 \, \hat{V}\left(\hat{R}_c\right) \end{aligned}$$

Estimador del total poblacional con razón combinado

$$\hat{Y}_c = \hat{R}_c X \quad \{X \text{ conocido}\}$$

Con varianza y estimador de varianza:

$$\begin{aligned} V\left(\hat{Y}_c\right) &= X^2\, V\left(\hat{R}_c\right) \\ \hat{V}\left(\hat{Y}_c\right) &= X^2\, \hat{V}\left(\hat{R}_c\right) \end{aligned}$$

El estimador de razón combinado se usa cuando se tienen muchos estratos y/o los tamaños de muestra en cada estrato son pequeños. Supone que las razones en cada estrato son similares.