

OR.M2 3.9.April 6, 2024

Considere el siguiente modelo PL

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Obtenga la solución óptima de acuerdo al algoritmo Simplex, tome como referencia el ejemplo de la lectura.

Definición de ecuaciones

$$Z - 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + s_1 = 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 = 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + s_3 = 10$$

m = numero de ecuaciones

n = numero de variables

Para calcular la cantidad de puntos de esquina

$$C_m^n = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

$$m = 3, n = 7$$

$$C_m^n = \frac{7!}{3(7-3)!} = 70$$

Identificar variables básicas (V_B) y variables no básicas (V_{NB})

Para el punto A sabemos que $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, indicando que éstas son nuestras V_{NB} y s_1, s_2, s_3 son nuestras V_B

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
Z	1	-2	-1	3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	2	2	4	1	0	0	40
s_2	0	2	-1	1	2	0	1	0	8
s_3	0	4	-1	1	-1	0	0	1	10

Primera iteración

Seleccionar variable de entrada (V_E)

¿Qué variable de mi función Z afecta más a mi modelo?

El modelo busca maximizar, para obtener la ecuación de Z , pasamos la función al lado izquierdo, por esto la variable que afecta más es la más negativa.

$$V_E = x_4$$

Variables básicas	Columna V_E	Columna <i>Solución</i>	Relación mínima	Válida
s_1	4	40	$\frac{40}{4} = 10$	Sí
s_2	2	8	$\frac{8}{2} = 4$	Sí
s_3	-1	10	$\frac{10}{-1} = -10$	No

s_2 es nuestra variable pivote (V_P)

Actualizar la fila de la variable pivote (V_P)

Consideraremos que M es nuestra matriz de las variables básicas.

Todos los valores en la fila V_P , es decir, todos los valores $M_{V_P, j}$ los dividiremos entre el valor ubicado en la intersección de la fila V_P y la columna V_E :

$$M_{V_P, j} = \frac{M_{V_P, j}}{M_{V_P, V_E}}$$

En este caso el valor de M_{V_P, V_E} es 2.

Sustituimos V_P por V_E en la columna V_B . Es decir s_2 por x_4 , esto indica que nuestra fila pivote V_P ahora se llamá x_4

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
x_4	0	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2} = 1$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{8}{2} = 4$

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
Z	1	-2	-1	3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	2	2	4	1	0	0	40
x_4	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
s_3	0	4	-1	1	-1	0	0	1	10

Actualizar las demás filas respecto a la fila pivote

Para todas las filas M_i :

$$M_i = M_i - M_{i,V_E} \cdot M_{V_P}$$

Actualizar Z

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
Z	1	-2	-1	3	-5	0	0	0	0
x_4	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$-5x_4$	0	-5	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-5	0	$-\frac{5}{2}$	0	-20
$Z = Z - (-5x_4)$	1	3	$-\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	20

Actualizar s_1

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
s_1	0	1	2	2	== 4 ==	1	0	0	40
x_4	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$4x_4$	0	4	-2	2	4	0	2	0	16
$s_1 = s_1 - 4x_4$	0	-3	4	0	0	1	-2	0	24

Actualizar s_3

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
s_3	0	4	-1	1	== -1 ==	0	0	1	10
x_4	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$-1x_4$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0	-4
$s_3 = s_3 - (-1x_4)$	0	5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	14

Actualizar tabla con las filas actualizadas

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	$Solución$
Z	1	3	$\frac{-7}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	20
s_1	0	-3	4	0	0	1	-2	0	24
x_4	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
s_3	0	5	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	14

Esté PE es B .

Segunda iteración

Seleccionar variable de entrada (V_E)

$V_E = x_2$

Variables básicas	Columna V_E	Columna $Solución$	Relación mínima	Válida
s_1	4	24	$\frac{24}{4} = 6$	Sí
x_4	$\frac{-1}{2}$	4	$\frac{4}{\frac{-1}{2}} = -8$	No
s_3	$\frac{-3}{2}$	14	$\frac{14}{\frac{-3}{2}} = \frac{-28}{3}$	No

s_1 es nuestra variable pivote (V_P)

Actualizar la fila de la variable pivote (V_P)

$M_{V_P,V_E} = 4.$

$M_{V_P,j} = \frac{M_{V_P,j}}{M_{V_P,V_E}}$

$s_1 \rightarrow x_2$

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	$Solución$
x_2	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-4}{-4} = 1$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$	0	$\frac{24}{4} = 6$

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	$Solución$
Z	1	3	$\frac{-7}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	20
x_2	0	$\frac{-3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	0	6
x_4	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
s_3	0	5	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	14

Actualizar las demás filas respecto a la fila pivote

Para todas las filas M_i :

$$M_i = M_i - M_{i,V_E} \cdot M_{V_P}$$

Actualizar Z

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
Z	1	3	$-\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	20
x_2	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	6
$-\frac{7}{2}x_2$	0	$\frac{21}{8}$	$-\frac{7}{2}$	0	0	$-\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	0	-21
$Z = Z - (-\frac{7}{2}x_2)$	1	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{11}{2}$	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	41

Actualizar x_4

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
x_4	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
x_2	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	6
$-\frac{1}{2}x_2$	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	-3
$x_4 = x_4 - (-\frac{1}{2}x_2)$	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	7

Actualizar s_3

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
s_3	0	5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	14
x_4	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$-\frac{3}{2}x_4$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	-6
$s_3 = s_3 - (-\frac{3}{2}x_4)$	0	$\frac{13}{2}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	1	20

Actualizar tabla con las filas actualizadas

V_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	<i>Solución</i>
Z	1	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{11}{2}$	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	41
x_2	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	6
x_4	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	7
s_3	0	$\frac{13}{2}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	1	20

Tercera iteración

Seleccionar variable de entrada (V_E)

Como la función Z ya no tiene variables negativas, significa que estás ya no tendrán impacto en nuestro modelo, por lo cual encontramos nuestro el punto óptimo.

Este PE es C , y Z en el punto C vale 41, el máximo valor posible para Z dadas las restricciones..