T2. Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Campos de direções

Consideremos a EDO de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

O valor $f(x, y)$ que a função f lhe dá a um ponto (x, y) pertencente ao intervalo de definição I representa a pendente de uma linha, isto é, de um segmento de linha que chamaremos **elemento linear**.

O conjunto de todos os elementos lineares que se podem representar em cada ponto (x, y) sobre uma quadrícula retangular denomina-se **campo de direções** ou **campo de pendentes** da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Cada curva solução que atravessa um campo de direções deverá seguir o padrão de fluxo do campo.

Campos de direções

Consideremos a EDO de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

O valor $f(x,y)$ que a função f lhe dá a um ponto (x,y) pertencente ao intervalo de definição I representa a pendente de uma linha, isto é, de um segmento de linha que chamaremos **elemento linear**.

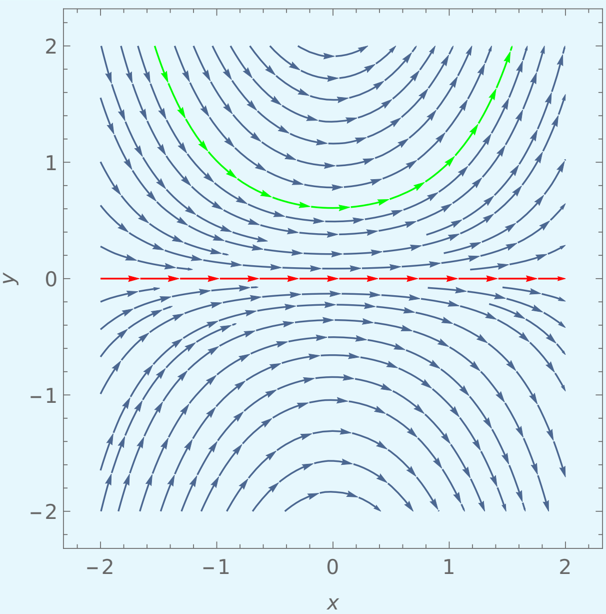
O conjunto de todos os elementos lineares que se podem representar em cada ponto (x,y) sobre uma quadrícula retangular denomina-se **campo de direções** ou **campo de pendentes** da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

Cada curva solução que atravessa um campo de direções deverá seguir o padrão de fluxo do campo.

Campos de direções

Exemplo (um campo de direções)

$$\frac{dy}{dx} = xy$$



Curva solução que passa por (0,0)

Curva solução que passa por (1,1)

Definição

Definição 2.2.1 (equação separável)

Uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1}$$

diz-se que é **separável** ou que tem **variáveis separadas**.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^3\cos x \longrightarrow \text{ separável,}$$
$$\frac{dy}{dx} = x + \operatorname{sen} y \longrightarrow \text{ não separável.}$$

Definição

Definição 2.2.1 (equação separável)

Uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1}$$

diz-se que é **separável** ou que tem **variáveis separadas**.

Exemplo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2y^3\cos x \longrightarrow \text{ separável,} \\ \frac{dy}{dx} &= x + \operatorname{sen} y \longrightarrow \text{ não separável.} \end{aligned}$$

Método de solução

Método

1. Dividindo (1) por $h(y)$ obtém-se

$$\begin{aligned} p(y)\frac{dy}{dx} = g(x) &\Leftrightarrow p(y)dy = g(x)dx \\ &\Leftrightarrow \int p(y)dy = \int g(x)dx, \end{aligned}$$

onde $p(y) = \dfrac{1}{h(y)}$.

$\rightsquigarrow$

Método de solução

❷ Se $H(y)$ é uma primitiva de $p(y)$ e $G(x)$ é uma primitiva de $g(x)$, então estas duas primitivas diferenciam-se numa constante $c \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{H(y) = G(x) + c}, \tag{2}$$

que é uma **solução implícita** da equação diferencial (1).

Método de solução

Exercício 2.2.2 (resolução de uma equação separável)

$$(1 + x)dy - ydx = 0.$$

Resolução

Dividindo por $(1 + x)y$ obtemos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|1+x| + c_1.$$

Nota: É mais direto tomar como constante $\ln c_1$ em lugar de c_1.

$\rightsquigarrow$

Método de solução

Despejando chegamos a

$$\begin{aligned} |y| &= e^{\ln|1+x|+c_1} \\ &= e^{\ln|1+x|} \cdot e^{c_1} \\ &= |1+x|e^{c_1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = \pm e^{c_1}(1+x).$$

Reescrevendo $c = \pm e^{c_1}$ obtemos

$$\boxed{y = c(1+x)}.$$

Método de solução

Exercício 2.2.3 (um problema de valor inicial)

$$\cos x(e^{2y} - y)\frac{dy}{dx} = e^y \operatorname{sen} 2x, \qquad y(0) = 0.$$

Resolução

Dividindo por $e^y \cos x$ temos

$$\frac{e^{2y} - y}{e^y} dy = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} dx.$$

Utilizando a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ obtém-se

$$\int \left(e^y - ye^{-y}\right) dy = 2 \int \operatorname{sen} x \, dx.$$

$\rightsquigarrow$

Método de solução

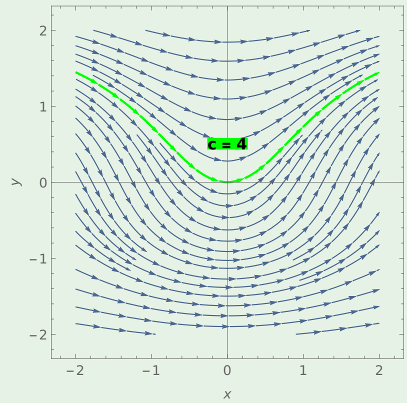
Integrando por partes $\left(\text{nota: } \int u dv = uv - \int v du\right)$

$$\Rightarrow e^y + ye^{-y} + e^{-y} = -2\cos x + c.$$

A condição inicial $y(0) = 0$ implica $c = 4$.

Portanto uma solução é

$$\boxed{e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\cos x}.$$



Definição

Definição 2.3.1 (equação linear)

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{3}$$

diz-se que é uma **equação linear** na variável independente y.

Quando $g(x) = 0$, a equação linear (3) diz-se que é **homogénea**; caso contrário, será **não homogénea**.

Definição

A **forma canónica** de uma equação linear é

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)}, \tag{4}$$

onde

- $P(x) \longrightarrow$ **função coeficiente**,
- $f(x) \longrightarrow$ **função impulsora**.

Método de solução

Fator integrante

Procuramos soluções de (4) num intervalo I no qual as funções $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas.

O membro esquerdo da equação pode ser reescrito como a derivada exata do produto de uma função especial $\mu(x)$ (fator integrante) por y, isto é,

$$\left.\begin{array}{rl} \dfrac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = & \mu\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d\mu}{dx}y \\ (4) \Rightarrow & \mu\dfrac{dy}{dx} + \mu P(x)y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{d\mu}{dx} = \mu P(x).$$

Análise qualitativa
Equações separáveis
Equações lineares
Equações exatas. Fatores integrantes
Soluções por substituições
Modelos lineares e não lineares

Método de solução

Resolvendo por separação de variáveis e integrando obtém-se

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)\,dx \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int P(x)dx + c_1 \Rightarrow \mu(x) = c_2 e^{\int P(x)dx}.$$

Tomando, por simplicidade, $c_2 = 1$ a função

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

é o denominado **fator integrante** para a equação (4).

Método de solução

Método

1. Escrever a equação linear (3) na forma canónica

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x).$$

2. Determinar $P(x)$ e calcular o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

$\rightsquigarrow$

Método de solução

3. Multiplicar a forma canónica da ED pelo fator integrante, lembrando que o membro esquerdo da equação resultante será a derivada do fator integrante por y, isto é,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} y\right] = e^{\int P(x)dx} f(x).$$

4. Integrando esta última equação e dividindo pelo fator integrante obtém-se a **solução geral**

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)f(x)dx + c\right]} \qquad (5)$$

Método de solução

Exercício 2.3.2 (resolução de uma equação linear)

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6.$$

Resolução

Neste caso, $P(x) = -3$. Portanto, o fator integrante será

$$\mu(x) = e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}.$$

Multiplicando a ED por este fator obtemos

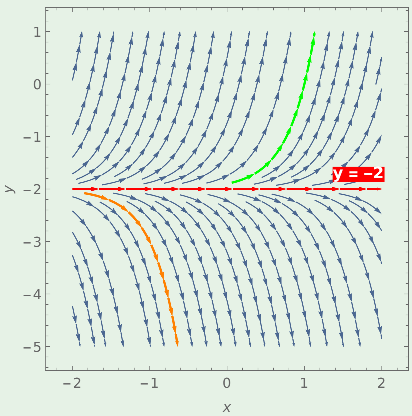
$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{-3x}y\right] = 6e^{-3x}.$$

$\rightsquigarrow$

Método de solução

Integrando chegamos a

$$e^{-3x}y = -2e^{-3x} + c$$
$$\Rightarrow \boxed{y = -2 + ce^{3x}, \qquad -\infty < x < \infty}.$$



Solução geral

Teorema 2.3.3 (existência e unicidade)

Se as funções $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas no intervalo aberto I que contém o ponto x_0, então o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

tem uma e só uma solução, definida no intervalo I, dada pela fórmula (5) com o valor apropriado de c.

Observação

A diferença com o teorema do Tema 1 é que, neste caso, a existência e unicidade da solução aplicam-se sobre a totalidade do intervalo aberto I.

Análise qualitativa
Equações separáveis
Equações lineares
Equações exatas. Fatores integrantes
Soluções por substituições
Modelos lineares e não lineares

Método de solução

Exercício 2.3.4 (pontos singulares)

$$(x^2-9)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Resolução

A equação em forma canónica é

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2-9}y = 0.$$

Identificamos $P(x) = \frac{x}{x^2-9}$, que é contínua em $(-\infty,-3)$, $(-3,3)$ e $(3,\infty)$. Porém, apresenta descontinuidades nos pontos singulares $x=3$ e $x=-3$, que se trasladarão às soluções da ED.

$\rightsquigarrow$

Método de solução

O fator integrante é

$$\mu(x) = e^{\int \frac{xdx}{x^2-9}} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\frac{dx}{x^2-9}} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2-9}.$$

Multiplicamos a forma canónica da ED pelo fator integrante e obtemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-9}y\right] = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{\sqrt{x^2-9}}},$$

que é a solução geral no intervalo $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Método de solução

Exercício 2.3.5 (um problema de valor inicial)

$$\frac{dy}{dx} + y = x, \qquad y(0) = 4.$$

Resolução

A equação está em forma canónica e $P(x) = 1$ e $f(x) = x$ são contínuas em $(-\infty, \infty)$. O fator integrante é

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^x.$$

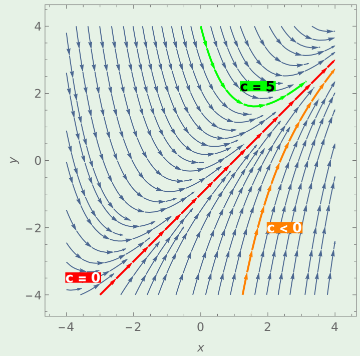
Método de solução

Multiplicando a ED por este fator e integrando obtemos

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = xe^x \Rightarrow e^x y = xe^x - e^x + c \Rightarrow y = x - 1 + ce^{-x}.$$

Tendo em conta a condição inicial obtemos a solução no intervalo $(-\infty, \infty)$, que corresponde a $c = 5$,

$$\boxed{y = x - 1 + 5e^{-x}}.$$



Diferencial de uma função de duas variáveis

Dada uma função $f(x, y)$ com primeiras derivadas parciais contínuas numa região R do plano xy o seu **diferencial** ou **diferencial total** é

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

No caso de $f(x, y) = c$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

Isto é, a partir de uma família de curvas uniparamétrica $f(x, y) = c$ geramos uma equação diferencial de primeira ordem.

Definição

Definição 2.4.1 (equação exata)

A expressão diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é uma **diferencial exata** na região R do plano xy se corresponde ao diferencial de alguma função $f(x, y)$.

Diz-se que uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é uma **equação exata** se a expressão no membro esquerdo é uma diferencial exata.

Definição

Exemplo

A equação

$$x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$$

é exata posto que o lado esquerdo é igual a $d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right)$.

Definição

Teorema 2.4.2 (critério da diferencial exata – Euler, 1734)

Suponhamos que as primeiras derivadas parciais de $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são contínuas numa região retangular R. Então, uma condição necessária e suficiente para que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

seja uma equação exata em R é que se cumpra

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}} \tag{6}$$

para todo $(x, y) \in R$.

Método de solução

Método

1. Dada uma equação na forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ determinamos se se cumpre o critério da diferencial exata

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

2. Se se cumpre, então existe uma função f tal que[a]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y).$$

[a] Também se poderia partir de $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ e integrar com respeito a y.

Análise qualitativa
Equações separáveis
Equações lineares
Equações exatas. Fatores integrantes
Soluções por substituições
Modelos lineares e não lineares

Método de solução

3. Integramos $M(x,y)$ com respeito a x para obter

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y), \tag{7}$$

onde $g(y)$ é a *constante* de integração.

4. A fim de obter $g(y)$ derivamos (7) com respeito a y, supondo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Método de solução

Isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \qquad (8)$$

5. Integramos (8) com respeito a y e substituímos em (7).
6. A **solução implícita** da equação diferencial é

$$\boxed{f(x,y) = c}. \qquad (9)$$

Método de solução

Exercício 2.4.3 (resolução de uma equação exata)

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0.$$

Resolução

Com $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = x^2 - 1$ temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Portanto, a equação é exata.

$\rightsquigarrow$

Método de solução

Conforme ao teorema 2.4.2 existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Integramos a primeira

$$f(x,y) = x^2 y + g(y).$$

Derivamos parcialmente com respeito a y e igualamos a $N(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1.$$

$\rightsquigarrow$

Método de solução

Resulta $g'(y) = -1 \Leftrightarrow g(y) = -y$. Portanto,

$$f(x,y) = x^2 y - y.$$

A solução da equação em forma implícita é

$$x^2 y - y = c.$$

Na sua forma explícita é, simplesmente,

$$\boxed{y = \frac{c}{x^2 - 1}},$$

definida em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Método de solução

Exercício 2.4.4 (um problema de valor inicial)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}, \qquad y(0) = 2.$$

Resolução

Reescrevemos a equação na forma

$$\left(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2\right) dx + y(1-x^2)dy = 0,$$

que resulta ser exata já que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Método de solução

Segundo o teorema 2.4.2 existirá uma função $f(x, y)$ tal que

$$N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = y(1-x^2).$$

Integrando com respeito a y obtemos

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) + h(x).$$

A derivada parcial com respeito a x é

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = M(x, y) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2.$$

Método de solução

Disto deduz-se que $h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$ e, portanto,

$$h(x) = -\int \cos x(-\operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Então a função é

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2}\cos^2 x.$$

E a solução da equação em forma implícita

$$\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2}\cos^2 x = c_1.$$

$\rightsquigarrow$

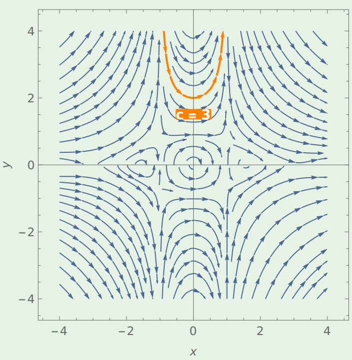
Análise qualitativa
Equações separáveis
Equações lineares
Equações exatas. Fatores integrantes
Soluções por substituições
Modelos lineares e não lineares

Método de solução

Simplificando (substituindo $2c_1$ por c) obtemos

$$y^2(1-x^2) - \cos^2 x = c.$$

Considerando a condição inicial, $y(0) = 2 \Rightarrow c = 3$, obtemos uma solução implícita



$$\boxed{y^2(1-x^2) - \cos^2 x = 3}.$$

Fatores integrantes

Definição 2.4.5 (fator integrante)

Se a equação

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{10}$$

não é exata, mas a equação

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0,$$

que resulta de multiplicar (10) pela função $\mu(x,y)$, é exata, então $\mu(x,y)$ denomina-se **fator integrante** da equação (10).

Fatores integrantes

Teorema 2.4.6 (fatores integrantes)

Se $\frac{M_y - N_x}{N}$ é contínua e só depende de x, então

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right) dx} \tag{11}$$

é um fator integrante para a equação (10).

Se $\frac{N_x - M_y}{M}$ é contínua e só depende de y, então

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right) dy} \tag{12}$$

é um fator integrante para a equação (10).

Fatores integrantes

Método para achar fatores integrantes

1. Se $Mdx + Ndy = 0$ não é separável nem linear, calculamos M_y e N_x.

   Se $M_y = N_x$, então a equação é exata.

2. Se não é exata, consideremos

$$\frac{M_y - N_x}{N}. \tag{13}$$

   Se só depende de x, então um fator integrante virá dado pela fórmula (11).

$\rightsquigarrow$

Fatores integrantes

3. Caso contrário, consideremos

$$\frac{N_x - M_y}{M}. \tag{14}$$

   Se só depende de y, então um fator integrante virá dado pela fórmula (12).

Fatores integrantes

Exercício 2.4.7 (uma equação diferencial não exata)

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0.$$

Resolução

Consideremos as identificações

$$M = xy,$$
$$N = 2x^2 + 3y^2 - 20,$$

e as derivadas parciais

$$M_y = x,$$
$$N_x = 4x.$$

Análise qualitativa
Equações separáveis
Equações lineares
Equações exatas. Fatores integrantes
Soluções por substituições
Modelos lineares e não lineares

Fatores integrantes

Consideramos agora o quociente (13),

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20},$$

que depende de x e de y. Consideramos então o dado em (14),

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{3}{y},$$

que só depende de y. Então, segundo o teorema 2.4.6, o fator integrante será

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{3}{y}\right) dy} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3.$$

Fatores integrantes

Portanto, multiplicando a equação diferencial inicial por este fator integrante obtemos a equação diferencial exata

$$xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0,$$

com uma família de soluções dada por

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c}.$$

Substituições

Se a equação

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

não é separável, nem exata, nem linear, poderíamos tentar transformá-la numa equação que saibamos resolver mediante uma substituição.

Procedimento de substituição

1. Identificar o tipo de equação e determinar a substituição ajeitada.
2. Reescrever a equação em termos das novas variáveis.
3. Resolver a equação transformada.
4. Expressar a solução em termos das variáveis originais.

Equação homogénea

Definição 2.5.1 (equação homogénea)

Uma equação diferencial de primeira ordem

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{15}$$

diz-se que é **homogénea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogéneas do mesmo grau, isto é,

$$\begin{aligned} M(tx, ty) &= t^{\alpha} M(x, y), \\ N(tx, ty) &= t^{\alpha} N(x, y), \end{aligned}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Equação homogénea

Método para reduzir (15) a uma equação separável

Qualquer das substituições

$$u = \frac{y}{x},$$
$$v = \frac{x}{y},$$

onde u e v são novas variáveis dependentes, reduzirá a equação homogénea a uma equação separável.

Equação homogénea

Exercício 2.5.2 (equação homogénea)

$$(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$$

Resolução

Comprovamos que os coeficientes M e N são funções homogéneas de segundo grau

$$M(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow M(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2),$$
$$N(x,y) = x^2 - xy \Rightarrow N(tx,ty) = (tx)^2 - (txty) = t^2(x^2 - xy).$$

$\rightsquigarrow$

Equação homogénea

Portanto, se tomamos $y = ux$, temos

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Substituindo obtemos a equação separável

$$\begin{aligned}(x^2 + u^2x^2)\,dx + (x^2 - ux^2)\,(u\,dx + x\,du) &= 0\\ x^2(1+u)\,dx + x^3(1-u)\,du &= 0\\ \frac{1-u}{1+u}\,du + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \left(-1 + \frac{2}{1+u}\right)\,du + \frac{dx}{x} &= 0.\end{aligned}$$

Equação homogénea

Integrando e desfazendo a substituição de variáveis obtemos

$$\begin{aligned}-u + 2\ln|1+u| + \ln|x| &= \ln|c|\\ -\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| &= \ln|c|.\end{aligned}$$

Que se pode pôr como

$$\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{(x+y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}}.$$

Modelos lineares

Crescimento e decrescimento

O problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{16}$$

onde k é a constante de proporcionalidade, serve de modelo para diversos fenómenos que implicam crescimento e decrescimento.

Modelos lineares

Exercício 2.6.1 (meia-vida)

Um reator converte ^{238}U num isótopo do ^{239}Pu. Após 15 anos determina-se que se desintegrou o 0.043% da quantidade inicial A_0 de plutónio. Acha a meia-vida do isótopo se a taxa de desintegração é proporcional à quantidade restante.

Resolução

Se $A(t)$ denota a quantidade de plutónio restante em qualquer tempo, o modelo para este processo virá dado pelo PVI

$$\frac{dA}{dt} = kA, \qquad A(0) = A_0, \tag{17}$$

onde k é a constante de decaimento.

Modelos lineares

É fácil ver que esta é uma equação diferencial linear e separável

$$\frac{dA}{A} = k\,dt,$$

de cuja integração obtemos

$$\ln A = k\,t + c.$$

Aplicando a condição inicial em $t = 0$ temos que $\ln A_0 = c$. Portanto a solução será

$$\ln A - \ln A_0 = k\,t \Rightarrow \ln\frac{A}{A_0} = kt \Rightarrow \boxed{A(t) = A_0 e^{kt}}.$$

Modelos lineares

Do facto de que após 15 anos permaneça o 99.957% do material deduzimos a constante de decaimento

$$0.99957A_0 = A(15) \Rightarrow 0.99957A_0 = A_0e^{15k} \Rightarrow k = -0.00002867.$$

Portanto, neste caso temos

$$A(t) = A_0e^{-0.00002867t}. \qquad (18)$$

Por outra parte, tendo em conta que a meia-vida corresponde ao tempo $t_{1/2}$,

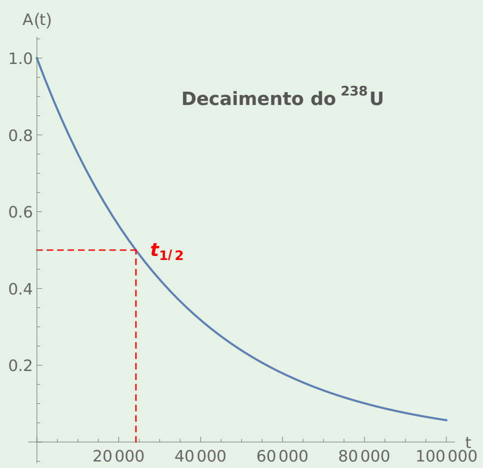
$$A(t_{1/2}) = \frac{1}{2}A_0. \qquad (19)$$

$\rightsquigarrow$

Modelos lineares

De (18) e (19) concluímos que a meia-vida do isótopo é

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{-0.00002867t_{1/2}} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} \approx 24\,180 \text{ anos}}.$$



Modelos não lineares

Dinâmica de populações

Nos modelos anteriores consideramos que a **taxa de crescimento relativa ou específica** considerada em (16),

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = k, \tag{20}$$

era constante.

Porém, isto pode dar lugar a modelos pouco realistas, posto que é difícil que se produza crescimento exponencial durante longos períodos de tempo.

$\rightsquigarrow$

Análise qualitativa
Equações separáveis
Equações lineares
Equações exatas. Fatores integrantes
Soluções por substituições
Modelos lineares e não lineares

Modelos não lineares

Dinâmica de populações

Hipótese de dependência da densidade

Consideramos que a taxa de crescimento/decrescimento de uma população é dependente do número de elementos da população

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = f(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x\, f(x), \tag{21}$$

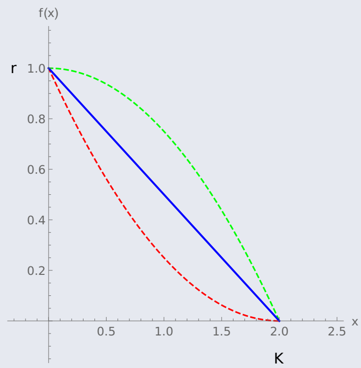
tal e como geralmente se supõe nos modelos de populações animais.

Modelos não lineares

A equação logística

- Suponhamos que um entorno é capaz de sustentar unicamente um número fixo de indivíduos K (**capacidade de suporte** do entorno).
- Portanto, a função f em (21) será tal que

a) $f(0) = r$,
b) $f(K) = 0$.



Na figura mostram-se três possíveis funções f que verificam as duas condições.

Modelos não lineares

A equação logística

- Na hipótese mais simples $f(x)$ é linear, isto é

$$f(x) = c_1 x + c_2$$

Condições: $\left.\begin{array}{l} f(0) = r \\ f(K) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} c_1 & = -\dfrac{r}{K} \\ c_2 & = r \end{array}\right.$

$$\Rightarrow f(x) = r - \frac{r}{K}x.$$

- Portanto, (21) transforma-se em

$$\frac{dx}{dt} = x\left(r - \frac{r}{K}P\right).$$

Modelos não lineares

A equação logística

- Renomeando $a = r$ e $b = \dfrac{r}{K}$ obtemos, finalmente, a equação não linear conhecida como **equação logística**

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = x\,(a - bx)} = \underbrace{ax}_{\text{linear}} \overbrace{-bx^2}^{\text{não linear} \,\to\, \text{concorrência}},$$

cuja solução é a **função logística**

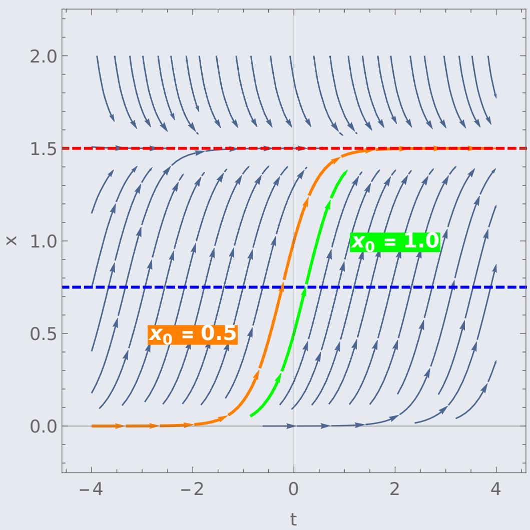
$$\boxed{x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-at}}}. \tag{22}$$

Modelos não lineares

A função logística

- Propriedades:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b}$$
$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$$



Crescimento logístico

Exercício 2.6.2 (crescimento logístico)

Um estudante, contagiado por um vírus, regressa a um comunidade universitária cuja população é de 400 indivíduos. Supondo que a taxa de propagação do vírus é proporcional tanto ao número x de estudantes infetados como ao número de estudantes não infetados, calcula o número de estudantes infetados após uma semana se se observa, ademais, que logo de 4 dias $x(4) = 10$.

Resolução

Supondo que ninguém abandona a comunidade durante a pandemia, devemos resolver o PVI

$$\frac{dx}{dt} = kx\,(400 - x)\,, \qquad x(0) = 1. \tag{23}$$

Crescimento logístico

Identificando $a = 400k$ e $b = k$, a partir de (22) deriva-se imediatamente que

$$x(t) = \frac{400k}{k + 399ke^{-400kt}} = \frac{400}{1 + 399e^{-400kt}}.$$

Tendo em conta que $x(4) = 10$, obtemos k a partir de

$$10 = \frac{400}{1 + 399e^{-1600k}} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{133}{13}}{1600} = 0.00145337.$$

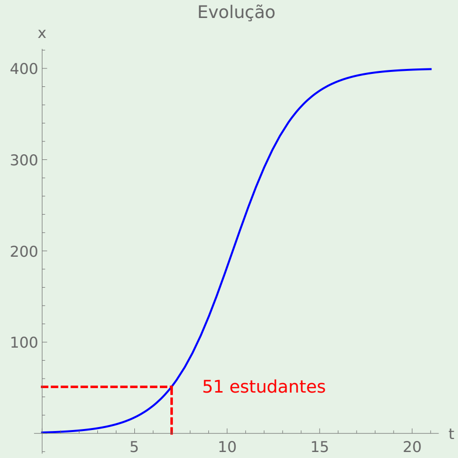
Portanto,

$$x(t) = \frac{400}{1 + 399e^{-0.581348t}}.$$

Crescimento logístico

Ao cabo dos 5 dias teríamos

$$x(7) = \frac{400}{1 + 399e^{-4.069436}} \Rightarrow \boxed{x(7) \simeq 51 \text{ estudantes}}.$$



Licença