DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica (curso 2020–2021)

Seleção de problemas de exame comentados

II. Variável complexa

Instruções: Resolver os problemas utilizando a metodologia descrita nas aulas expositivas e de seminário. Os cálculos deverão ir acompanhados de comentários explicando os passos realizados.

1. Tomando $z = x + iy$ a que será igual $\operatorname{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$?

   Resolução

   Substituímos z na expressão dada e obtemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\bar{z}^2 + z^2) &= \operatorname{Im}\left((x - iy)^2 + (x + iy)^2\right) \\
&= \operatorname{Im}\left((x^2 - 2xyi - y^2) + (x^2 + 2xyi - y^2)\right) \\
&= \operatorname{Im}(2x^2 - 2y^2) \Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}(\bar{z}^2 + z^2) = 0}.
\end{aligned}
$$

2. Encontra o número complexo z que satisfaz a equação

$$
\frac{z}{1 + \bar{z}} = 3 + 4i.
$$

   Resolução

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{1 + \bar{z}} = 3 + 4i \Leftrightarrow z = (3 + 4i)(1 + \bar{z}) &= 3 + 3\bar{z} + 4i + 4i\bar{z} \\
\Leftrightarrow -2x + 4iy &= 3 + 4y + 4i(1 + x) \\
\Leftrightarrow \begin{cases} -2x &= 3 + 4y, \\ \quad y &= 1 + x. \end{cases}
\end{aligned}
$$

   Resolvendo este sistemas de 2 equações com 2 incógnitas chegamos a que

$$
\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{7}{6} \\
y &= -\frac{1}{6}
\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{z = -\frac{7}{6} - \frac{1}{6}i}.
$$

3. Encontra todas as soluções da equação

$$z^8 - 2z^4 + 1 = 0.$$

Resolução

Esta equação é a mesma que

$$(z^4 - 1)^2 = 0,$$

que, ademais, se pode reescrever como

$$(z - i)^2(z + i)^2(z - 1)^2(z + 1)^2 = 0.$$

Portanto, as raízes (com multiplicidade duas) desta equação (ver Figura 1) são

$$\begin{cases} z_1 &= i, \\ z_2 &= -i, \\ z_3 &= -1, \\ z_4 &= 1. \end{cases}$$

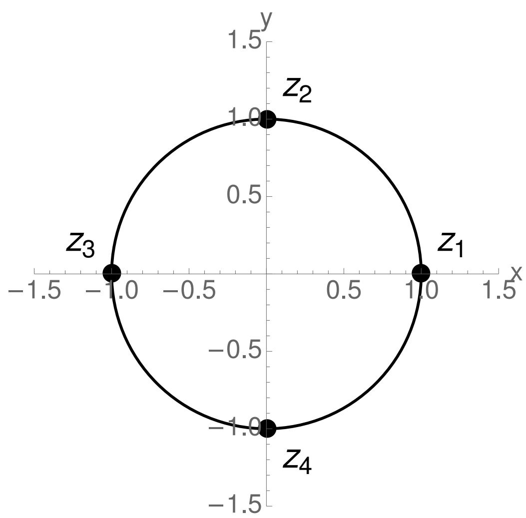

Figura 1: Soluções da equação no plano complexo

4. Representa no plano complexo o conjunto $1 \leq |z-1-i| < 2$ e determina se é um domínio.

Resolução

Esta é a equação de uma coroa circular com centro em $z_0 = 1+i$ com raio menor $r = 1$ (fechado) e raio maior $R = 2$ (aberto), como se pode ver na Figura 2.

Posto que não é um conjunto aberto, **não é um domínio**.

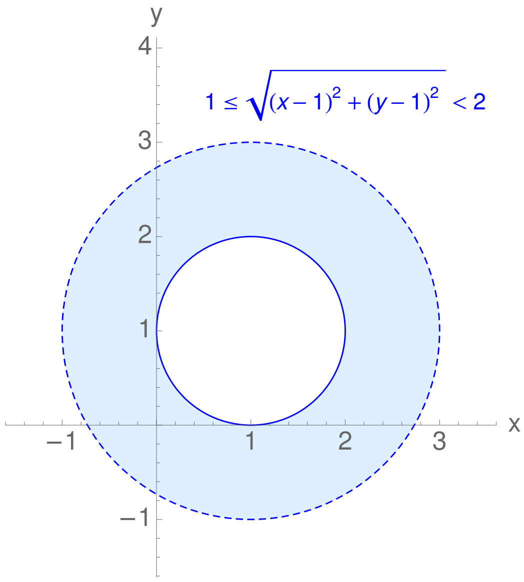

Figura 2: Coroa circular

5. Encontra a imagem da reta $y = 0$ sob a transformação $f(z) = z^2$.

Resolução

A imagem w de um número complexo z é

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são as partes real e imaginária de w.

Neste caso,

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy. \end{cases}$$

Para $y = 0$ temos que

$$\begin{cases} u &= x^2, \\ v &= 0. \end{cases}$$

Dado que $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, **a imagem será a origem e o eixo u positivo**.

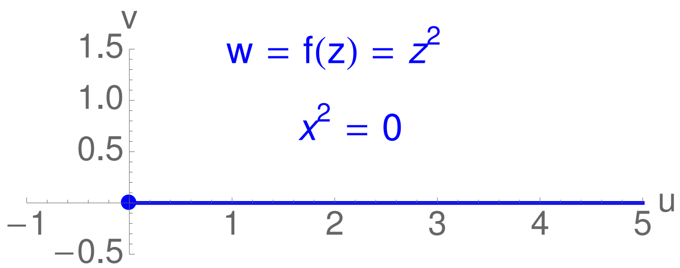

Figura 3: Origem e eixo u positivo

6. Demonstra que $\lim_{z\to 1} \dfrac{x+y-1}{z-1}$ não existe.

Resolução

O limite, se existir, é único.

Neste caso, ao longo da reta $x = 1$ (tendência vertical) temos que

$$\lim_{z\to 1} \frac{x+y-1}{z-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{iy} = \frac{1}{i} = -i.$$

Por outro lado, o limite ao longo do eixo x (tendência horizontal) é

$$\lim_{z\to 1} \frac{x+y-1}{z-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Posto que ambos os dous resultados são diferentes, concluímos que **não existe o limite**.

7. Demonstra que a função $f(z) = \bar{z}^2$ não é holomorfa em nenhum ponto.

Resolução

Consideramos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, de modo que, neste caso

$$f(z) = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u &= x^2 - y^2, \\ v &= -2xy. \end{cases}$$

As derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -2x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, \end{aligned}$$

somente satisfazem as equações de Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

no ponto $(0,0)$. Porém, dado que não existe nenhuma vizinhança em redor de $z = 0$ na qual $f(z)$ seja diferenciável, concluímos que $f(z)$ **não é holomorfa em nenhum ponto**.

8. Usa o teorema de Looman–Menchoff para demonstrar que a função

$$f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$$

é holomorfa num determinado domínio.

Resolução

Consideramos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, de modo que, neste caso

$$\begin{cases} u &= 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9, \\ v &= 8xy + 5y - 1. \end{cases}$$

As derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 8x + 5, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 8x + 5, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -8y, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 8y, \end{aligned}$$

satisfazem as equações de Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} &= -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Como as derivadas parciais de primeira ordem de u e v existem $\forall z \in \mathbb{C}$ e, ademais, se satisfazem as equações de Cauchy–Riemann, então $f(z)$ **será holomorfa em** $\mathbb{C}$.

9. Determina os seguintes logaritmos: $\ln(-ei)$ e $\operatorname{Ln}(-ei)$.

Resolução

Temos que

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi),\\ \operatorname{Ln} z &= \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi,\end{aligned}$$

onde $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.
Deste modo,

$$\begin{aligned}\ln(-ei) &= \ln|-ei| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \ln(e) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\\ &\Rightarrow \boxed{\ln(-ei) = 1 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\operatorname{Ln}(-ei) = \ln|-ei| + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{Ln}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i}.$$

10. Encontra todos os valores de z que satisfazem a equação

$$e^{1/z} = -1.$$

Resolução

Temos que

$$\begin{aligned}e^{1/z} = -1 &\Rightarrow \frac{1}{z} = \ln(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2n\pi) = \ln 1 + i\pi(1+2n)\\ &\Rightarrow \frac{1}{z} = i\pi(2n+1) \Rightarrow z = \frac{1}{i\pi(2n+1)} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{i}{(2n+1)\pi}}.\end{aligned}$$

11. Avalia a integral

$$\int_C \operatorname{sen} z \, dz,$$

onde C é o caminho poligonal consistente nos segmentos de linha de $z = 0$ a $z = 1$ e de $z = 1$ a $z = 1 + i$.

Resolução

Teremos em consideração que o valor de uma integral curvilínea, supondo que $f[z(t)]$ seja contínua numa curva C para $z(t) = x(t) + iy(t)$, com $a \leq t \leq b$, se obtém como

$$\int_C f(z) \, dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) \, dt.$$

Neste caso, o caminho de integração (ver Figura 4) é dado por

$$\begin{cases} y = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x = 1, & 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

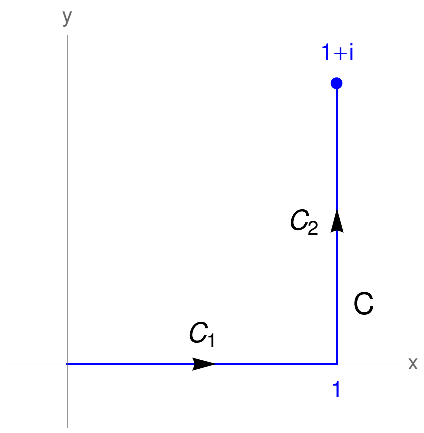

Figura 4: Caminho de integração

Logo,

$$\int_C \operatorname{sen} z \, dz = \int_{C_1} \operatorname{sen} z \, dz + \int_{C_2} \operatorname{sen} z \, dz, \tag{1}$$

onde para C_1

$$z = x + iy = x \Rightarrow dz = dx, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\int_{C_1} \operatorname{sen} z \, dz = \int_0^1 \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x|_0^1 = -\cos 1 + 1, \tag{2}$$

e para C_2

$$z = x + iy = 1 + iy \Rightarrow dz = i\, dy, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \operatorname{sen} z \, dz &= i \int_0^1 \operatorname{sen}(1 + iy)\, dy \\ &= -i \cos(1 + iy) \frac{1}{i}\bigg|_0^1 = -\cos(1+i) + \cos 1, \end{aligned} \tag{3}$$

Então, substituindo (2) e (3) em (1) chegamos a que

$$\int_C \operatorname{sen} z \, dz = 1 - \cos 1 + \cos 1 - \cos(1+i) = 1 - \cos(1+i) \tag{4}$$

Agora temos em conta que o cosseno da soma de dous ângulos é

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta,$$

de modo que a integral dada em (4) se transforma em

$$\int_C \operatorname{sen} z \, dz = 1 - (\cos 1 \cos i - \operatorname{sen} 1 \operatorname{sen} i)\,.$$

Se agora lembramos que $\cos iz = \cosh z$ e $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$ chegamos a

$$\int_C \operatorname{sen} z \, dz = 1 - \cos 1 \cosh 1 + i \operatorname{sen} 1 \operatorname{senh} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \operatorname{sen} z \, dz = 0.1663 + 0.9889i}.$$

12. Encontra um limite superior para o valor absoluto da integral

$$\int_C \frac{1}{z^3}\, dz,$$

onde C é o arco da circunferência $|z| = 4$ que vai de $z = 4i$ a $z = 4$.

Resolução

Se f é contínua numa curva suave C e $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in C$, então

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML,$$

onde L é o cumprimento de C.

Temos, sobre C (ver Figura 5), que

$$M = \left| \frac{1}{z^3} \right| = \frac{1}{|z|^3} = \frac{1}{64}.$$

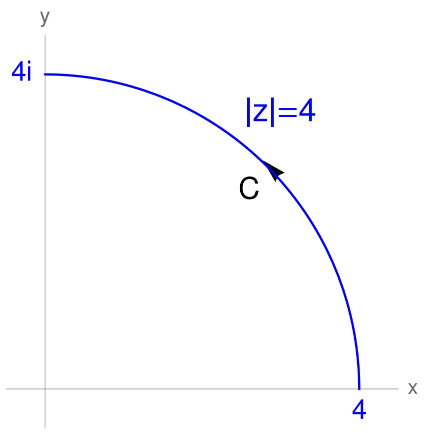

Figura 5: Caminho de integração

Por outro lado, o comprimento do arco é

$$L = \frac{1}{4} 2\pi |z|.$$

Portanto

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{4} 8\pi \Rightarrow \boxed{\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi}{32}}.$$

13. Demonstra o seguinte resultado:

$$\oint_C \frac{e^z}{2z^2+11z+15}\,dz = 0.$$

Resolução

A função

$$f(z) = \frac{e^z}{2z^2+11z+15}$$

é descontínua em

$$2z^2+11z+15=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{5}{2}, \\ z=-3. \end{cases}$$

Porém, é holomorfa sobre e no interior da circunferência $|z|=1$ (ver Figura 6).

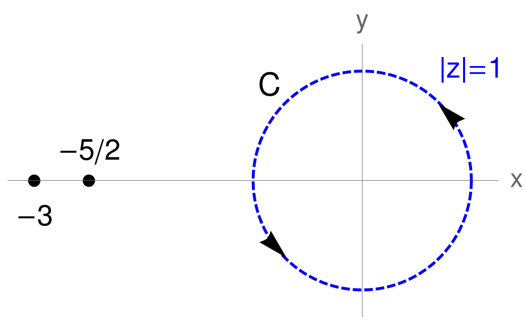

Figura 6: Caminho de integração

Logo, conforme ao teorema de Cauchy–Goursat

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

14. Avalia a integral

$$\oint_C \frac{5}{z+1+i}\,dz,$$

onde C é o caminho que se mostra na Figura 7.

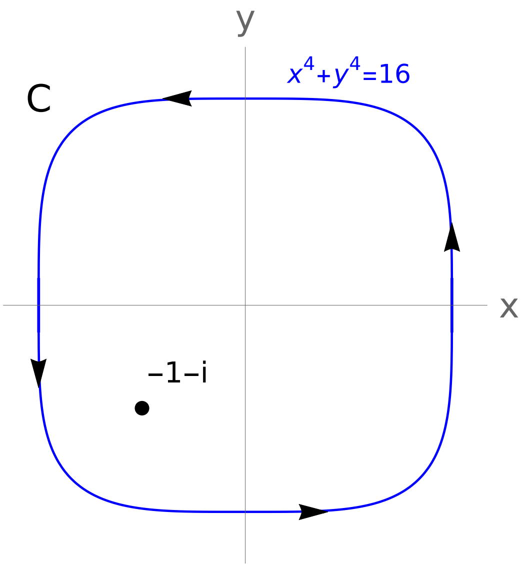

Figura 7: Caminho de integração

Resolução

Aplicando o princípio de deformação de caminhos víramos que para $n \in \mathbb{Z}$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Podemos então escolher um caminho mais conveniente, como o caminho C_1 (ver Figura 8), dado pela circunferência $|z-(-1-i)| = \dfrac{1}{16}$, que circunda o único ponto onde o integrando é descontínuo.

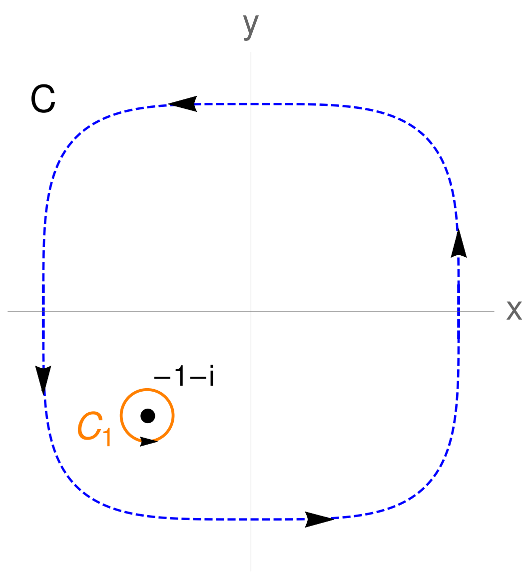

Figura 8: Novo caminho de integração (em laranja)

Então obtemos

$$\oint_C \frac{5}{z+1+i}\,dz = 5\oint_{C_1} \frac{1}{z-(-1-i)}\,dz = 5\cdot 2\pi i$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \frac{5}{z+1+i}\,dz = 10\pi i}.$$

15. Avalia a integral

$$\oint_C \frac{-3z+2}{z^2-8z+12}\,dz$$

ao longo dos seguintes caminhos

(a) $C_a : |z-5| = 2$,

(b) $C_b : |z| = 9$.

Resolução

Posto que

$$z^2 - 8z + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2, \\ z = 6, \end{cases}$$

por frações parciais temos que

$$\frac{-3z+2}{z^2-8z+12} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-6} = \frac{Az - 6A + Bz - 2B}{(z-2)(z-6)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 &= A + B \\ 2 &= -6A - 2B \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} A &= 1, \\ B &= -4. \end{cases}$$

Logo, a integral é equivalente a

$$\oint_C \frac{-3z+2}{z^2-8z+12}\,dz = \oint_C \frac{1}{z-2}\,dz - 4\oint_C \frac{1}{z-6}\,dz.$$

a) A única descontinuidade no interior do caminho C_a (ver Figura 9) é $z = 6$.

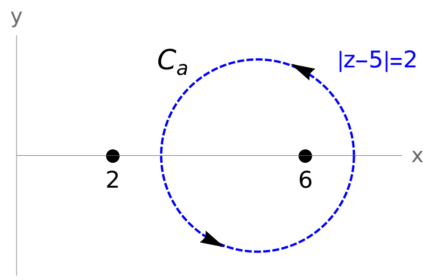

Figura 9: Caminho de integração no apartado a)

Então

$$\oint_{C_a} \frac{1}{z-2}\,dz - 4\oint_{C_a} \frac{1}{z-6}\,dz = 0 - 4\cdot 2\pi i$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{C_a} \frac{-3z+2}{z^2-8z+12}\,dz = -8\pi i}.$$

b) Agora temos as duas descontinuidades, $z = 2$ e $z = 6$, no interior do caminho C_b (ver Figura 10).

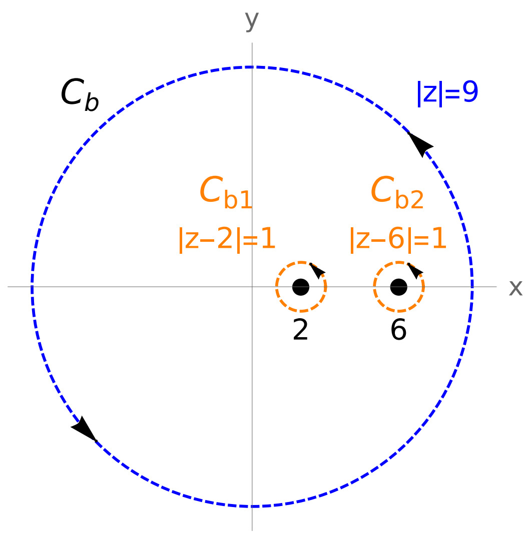

Figura 10: Caminho de integração no apartado b)

Para o cálculo da integral substituiremos o caminho C_b pelos caminhos $C_{b1} : |z-2| = 1$ e $C_{b2} : |z-6| = 1$, cada um deles contendo somente uma das descontinuidades (ver Figura 10). Então temos que

$$\oint_{C_b} \frac{1}{z-2}\,dz - 4\oint_{C_b} \frac{1}{z-6}\,dz$$

$$= \oint_{C_{b1}} \frac{1}{z-2}\,dz - 4\oint_{C_{b1}} \frac{1}{z-6}\,dz + \oint_{C_{b2}} \frac{1}{z-2}\,dz - 4\oint_{C_{b2}} \frac{1}{z-6}\,dz$$

$$= 2\pi i - 4\cdot 0 + 0 - 4\cdot 2\pi i \Rightarrow \boxed{\oint_{C_b} \frac{-3z+2}{z^2-8z+12}\,dz = -6\pi i}.$$

16. Avalia a integral

$$\int_C 6z^2\,dz,$$

onde C é $z(t) = 2\cos^3 \pi t - i\,\text{sen}^2 \dfrac{\pi}{4} t$, $0 \le t \le 2$.

Resolução

O caminho de integração proposto é o que se mostra na Figura 11.

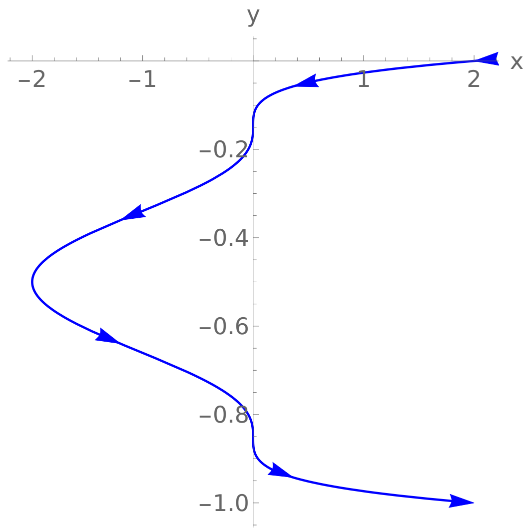

Figura 11: Caminho de integração

Porém, posto que $f(z) = 6z^2$ é holomorfa $\forall z \in \mathbb{Z}$, a integral dada é independente do caminho e $f(z)$ tem antiderivada. Então integramos entre $z(0) = 2 - 0 = 2$ e $z(2) = 2 - i$, de modo que

$$\int_C 6z^2\,dz = \int_2^{2-i} 6z^2\,dz = 2z^3\Big|_2^{2-i} = 2(2-i)^3 - 2\cdot 2^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C 6z^2\,dz = -12 - 22i}.$$

17. Usa as fórmulas integrais de Cauchy para avaliar a integral

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)}\, dz,$$

onde C consiste na circunferência $|z-i| = \dfrac{3}{2}$.

Resolução

O integrando não é holomorfo em $z=0$ e $z=i$ e ambos os dous pontos estão no interior do caminho C (ver Figura 12).

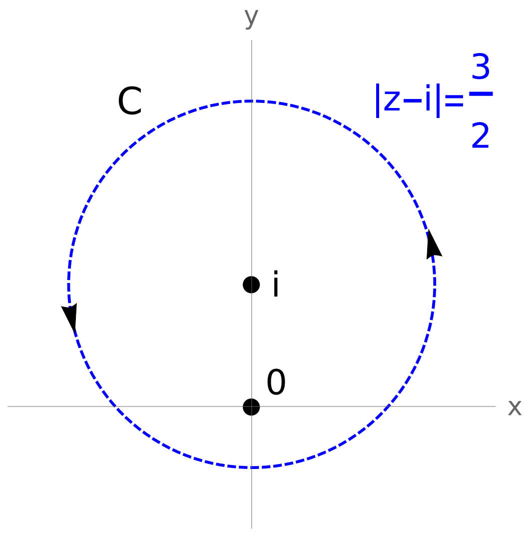

Figura 12: Caminho de integração

No entanto, a integral pode expressar-se como

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z^2(z+i)}}{(z-i)} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{(z^2+1)}}{z^2} dz,$$

onde C_1 e C_2 são as circunferências $|z| = \dfrac{1}{3}$ e $|z-i| = \dfrac{1}{3}$, respetivamente (ver Figura 13).

Para o cálculo da primeira integral usamos a fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

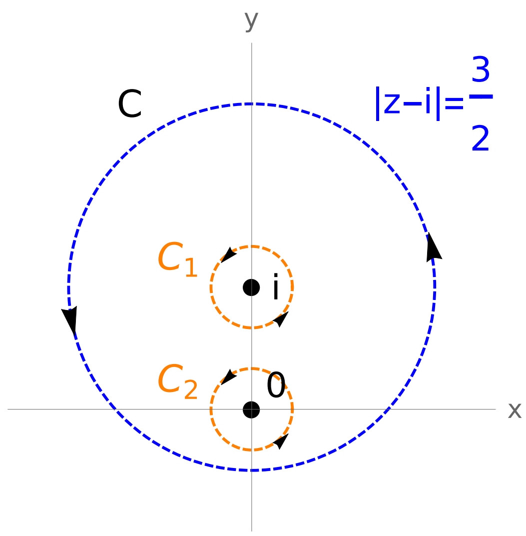

Figura 13: Novos caminhos de integração (em laranja)

de modo que, identificando $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+i)}$ e $z_0 = i$, temos

$$\oint_{C_1} \frac{\dfrac{1}{z^2(z+i)}}{(z-i)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{-2i} \right) = -\pi.$$

No caso da segunda integral usaremos a fórmula integral de Cauchy para derivadas

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

de modo que, identificando $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = 0$ e $n = 1$, chegamos a

$$\oint_{C_2} \frac{\dfrac{1}{(z^2+1)}}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}(0) = 0.$$

Logo,

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz = -\pi + 0 \Rightarrow \boxed{\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz = -\pi}.$$

18. Encontra o círculo e o raio de convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{k^2(3+4i)^k}(z+3i)^k.$$

Resolução

Aplicamos o critério da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L,$$

de maneira que se $L < 1$ a série converge absolutamente, se $L > 1$ a série diverge, e se $L = 1$ o teste não é conclusivo. Neste caso

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2(3+4i)^{n+1}}}{\frac{1}{n^2(3+4i)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\frac{1}{|3+4i|} = \frac{1}{5}.$$

Então, o raio de convergência é

$$\boxed{R = 5},$$

e o círculo de convergência

$$\boxed{|z+3i| = 5}.$$

19. Expande a função

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2}$$

nas correspondentes séries de Laurent válidas para os seguintes domínios

(a) $1 < |z - 1|$,

(b) $0 < |z - 2|$.

Ajuda: $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$.

Resolução

Tenhamos em conta que o quociente dado pela função $f(z)$ se pode reescrever como

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2} = z + \frac{2}{z - 2}.$$

a) Procuramos expressar $f(z)$ em função de $z - 1$, de modo que

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \frac{2}{z-2} = 1 + (z-1) + \frac{2}{-1 + z - 1} \\ &= 1 + (z-1) + \frac{2}{z-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \\ &= 1 + (z-1) + \frac{2}{z-1}\left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \ldots\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \ldots + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 1 + (z-1)}.$$

b) Agora expressaremos $f(z)$ em função de $z - 2$, de modo que

$$f(z) = z + \frac{2}{z-2} \Rightarrow \boxed{f(z) = \frac{2}{z-2} + 2 + (z-2)}.$$

20. Usa uma série de Maclaurin ou de Taylor para determinar a ordem do zero $z = 0$ da função $f(z) = z - \operatorname{sen} z$.

Resolução

Tendo em conta que a série de Maclaurin da função seno é

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$

chegamos a

$$\begin{aligned} f(z) = z - \operatorname{sen} z &= z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) \\ &= z^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots\right), \end{aligned}$$

onde observamos que $z = 0$ **é um zero de ordem três**.

21. Determina a ordem dos polos da função $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$.

Resolução

Tendo em conta que a série de Maclaurin da função exponencial é

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots,$$

chegamos a

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots,$$

onde observamos que $z = 0$ **é um polo de ordem duas**.

22. Usa o teorema dos resíduos de Cauchy para avaliar

$$\oint_C \frac{e^z}{z^3 + 2z^2} dz$$

no caminho $C : |z| = 3$.

Resolução

O integrando tem dous polos em

$$z^3 + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2(z+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z &= 0, \\ z &= -2, \end{cases}$$

sendo $z = 0$ um polo de segunda ordem e $z = -2$ um polo simples. O caminho de integração é o que se mostra na Figura 14, junto com as singularidades do integrando.

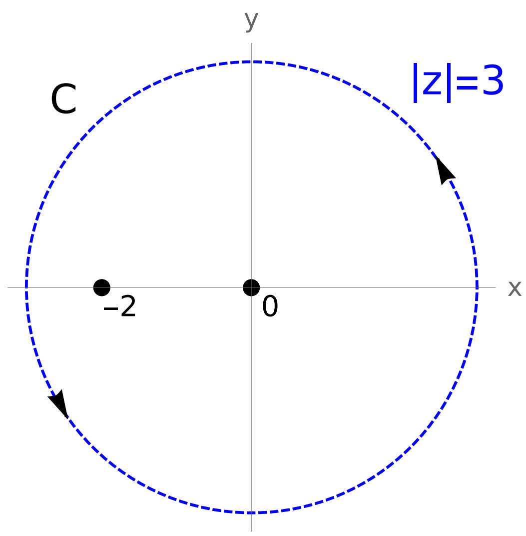

Figura 14: Caminho de integração e singularidades

Segundo o teorema dos resíduos de Cauchy, se temos uma função $f(z)$ holomorfa no interior e em cada ponto de um caminho fechado simples C orientado positivamente, exceto num número finito de singularidades z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ no interior de C, então

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f(z), z_k).$$

Neste caso

$$\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f(z),-2\right)+\operatorname{Res}\left(f(z),0\right)\right]. \tag{5}$$

Calculamos o primeiro resíduo, correspondente a um polo simples, mediante a fórmula do resíduo

$$\operatorname{Res}\left(f(z),z_0\right) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Então, temos que

$$\operatorname{Res}\left(f(z),-2\right) = \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{e^z}{z^2(z+2)} = \lim_{z\to -2}\frac{e^z}{z^2} = \frac{e^{-2}}{4}. \tag{6}$$

Agora, para calcularmos o segundo resíduo, correspondente a um polo de segunda ordem, usamos a fórmula do resíduo num polo de ordem n

$$\operatorname{Res}\left(f(z),z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z).$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z),0\right) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z-0)^2\frac{e^z}{z^2(z+2)} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{z+2}\\ &= \lim_{z\to 0}e^z\frac{z+1}{(z+2)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo os resíduos (6) e (7) em (5) obtemos

$$\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2}\,dz = 2\pi i\left[\frac{e^{-2}}{4}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \boxed{\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2}\,dz = \pi i\left(1+\frac{e^{-2}}{2}\right)}.$$

23. Avalia a integral trigonométrica

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 3}\,d\theta$$

Resolução

Transformamos esta integral numa integral complexa onde o caminho C é a circunferência unidade centrada na origem, isto é, $|z| = 1$. Este pode ser parametrizado considerando

$$z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Por outro lado, temos que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}),$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}).$$

Substituindo as expressões de $\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos\theta$ e $d\theta$ na integral obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 3}\,d\theta &= \oint_C \frac{1}{\frac{1}{2}(z + z^{-1}) + \frac{1}{i}(z - z^{-1}) + 3}\,\frac{dz}{iz} \\
&= \oint_C \frac{2}{i(z^2+1) + 2(z^2-1) + 6iz}\,dz \\
&= \oint_C \frac{2}{(2+i)z^2 + 6iz - 2 + i}\,dz \\
&= \frac{2}{i}\oint_C \frac{1}{(1-2i)z^2 + 6z + 1 + 2i}\,dz \qquad (8)
\end{aligned}$$

Os polos do integrando calculam-se como

$$(1-2i)z^2 + 6z + 1 + 2i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, \\ z_2 = -1 - 2i. \end{cases}$$

Destes dois polos simples, somente z_1 está no interior do caminho de integração (ver Figura 15).

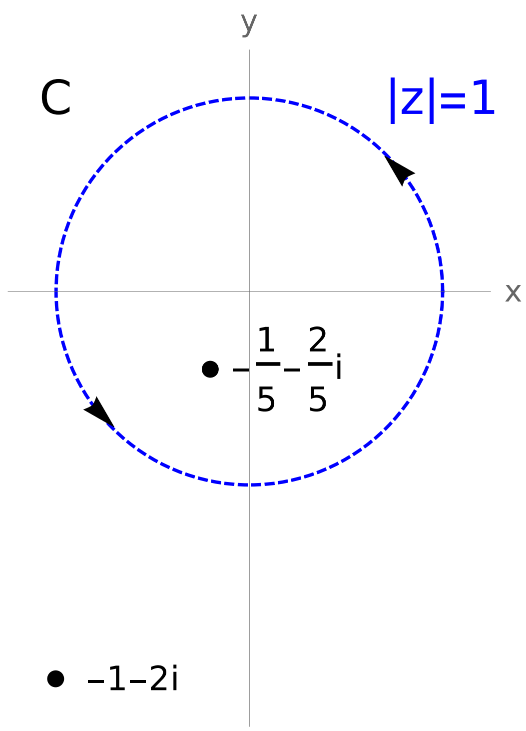

Figura 15: Caminho de integração e singularidades

Então, a integral (8) obtém-se, segundo o teorema do resíduo, como

$$\frac{2}{i}\oint_C \frac{1}{(1-2i)z^2+6z+1+2i}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right),$$

$$\text{onde } f(z) = \frac{1}{(1-2i)z^2+6z+1+2i}.$$

O resíduo calcula-se usando a fórmula para um polo simples

$$\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Então, temos que

$$\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right) = \lim_{z\to -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i}\left(z+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)\frac{1}{(1-2i)z^2+6z+1+2i}$$

$$= \lim_{z\to -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i}\frac{1}{(1-2i)z+5} = \frac{1}{4}.$$

Substituindo em (8) obtemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 3}\, d\theta = \left(\frac{2}{i}\right) 2\pi i \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 3}\, d\theta = \pi},$$

cuja representação gráfica se mostra na Figura 16.

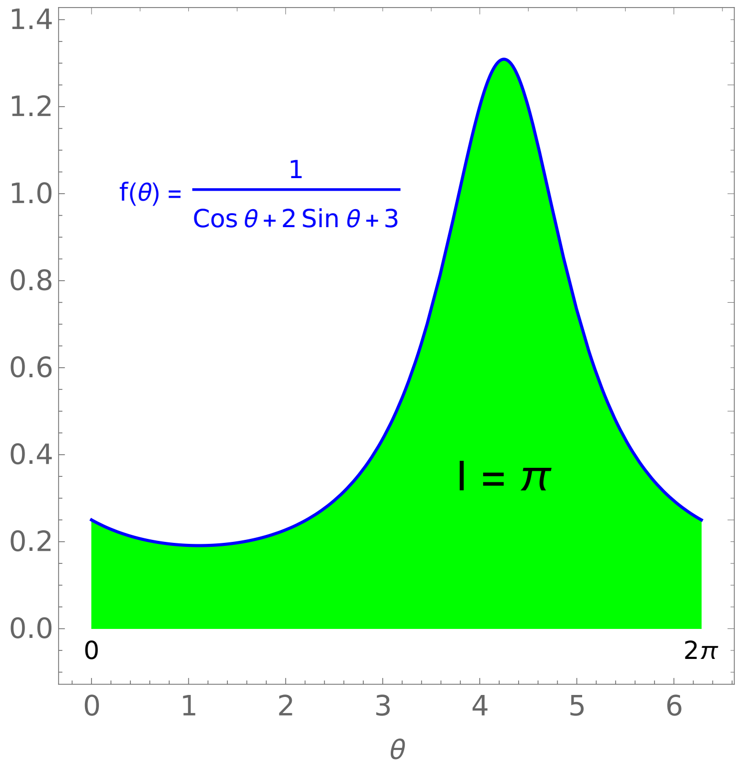

Figura 16: Gráfica da integral

24. Avalia o valor principal de Cauchy da integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Resolução

Tomamos

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2},$$

onde $z = i$ e $z = -i$ são polos de ordem duas de $f(z)$.

Por outro lado, consideramos o caminho de integração fechado consistente no intervalo $[-R, R]$ sobre o eixo real e a semicircunferência C_R de raio $R > 1$ que se mostra na Figura 17.

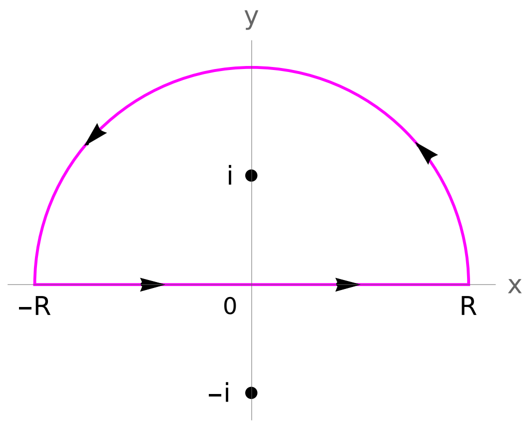

Figura 17: Caminho de integração e singularidades

Então, temos que

$$\oint_C \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{C_R} \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz$$

$$= I_1 + I_2 = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f(z), i), \tag{9}$$

onde apenas consideramos o resíduo no polo $z = i$ por ser o único no interior do caminho de integração. O seu valor calcula-se mediante a fórmula do resíduo num polo de ordem n

$$\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f(z).$$

Ou seja,

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}(z-i)^2 \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i)^2}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{2iz}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}. \tag{10}$$

Substituindo em (9) chegamos a

$$I_1 + I_2 = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Agora temos que provar que ao tomar $R \longrightarrow \infty$ resulta que $|I_2| \longrightarrow 0$. Podemos prová-lo usando a desigualdade ML ou tendo em conta que, se a função que se integra é do tipo $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, e o grau de $P(z)$ é n e o grau de $Q(z)$ é $m \geq n+2$, se verifica

$$\int_{C_R} f(z)dz \longrightarrow 0 \text{ quando } R \longrightarrow \infty.$$

Então obtemos

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}},$$

cuja gráfica se mostra na Figura 18.

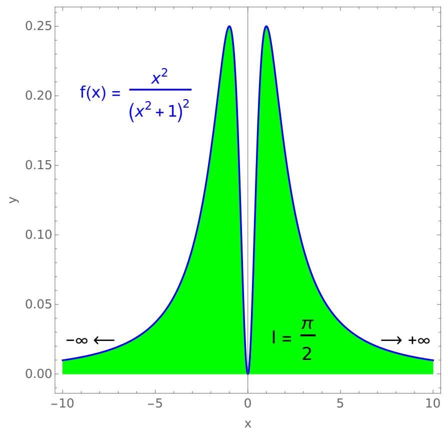

Figura 18: Gráfica da integral

25. Avalia o valor principal de Cauchy da integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5}\, dx.$$

Resolução

Integraremos esta integral de Fourier considerando a integral

$$\oint_C f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz,$$

onde $\alpha > 0$ e C é o caminho consistente no intervalo $[-R, R]$ no eixo real e a semicircunferência C_R com um raio suficientemente grande como para circundar os polos de $f(z)$ no semiplano superior. A integral complexa, tomando $\alpha = 1$, será

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}\, dz,$$

onde os polos do integrando se calculam como

$$z^2+4z+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2+i, \\ z_2 = -2-i. \end{cases}$$

Destes dous polos simples, somente z_1 está no interior do caminho de integração (ver Figura 19).

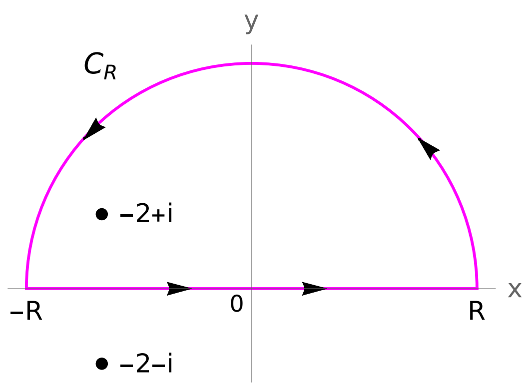

Figura 19: Caminho de integração e singularidades

Então, temos que

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}\,dz$$
$$= I_1 + I_2 = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -2+i), \tag{12}$$

onde apenas consideramos o resíduo no polo $z=-2+i$ por ser o único no interior do caminho de integração. O seu valor calcula-se mediante a fórmula do resíduo para um polo simples

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Ou seja,

$$\operatorname{Res}(f(z), -2+i) = \lim_{z\to -2+i}[z-(-2+i)]\frac{e^{iz}}{[z-(-2+i)][z-(-2-i)]}$$
$$= \lim_{z\to -2+i}\frac{e^{iz}}{[z-(-2-i)]} = \frac{e^{-1-2i}}{2i}. \tag{13}$$

Substituindo (13) em (12) chegamos a

$$I_1 + I_2 = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -2+i) = 2\pi i\frac{e^{-1-2i}}{2i} = \pi e^{-1-2i}. \tag{14}$$

Agora temos que provar que ao tomar $R \longrightarrow \infty$ resulta que $|I_2| \longrightarrow 0$. Podemos prová-lo usando a desigualdade ML ou tendo em conta que, se a função que se integra é do tipo $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, e o grau de $P(z)$ é n e o grau de $Q(z)$ é $m \geq n+1$, se verifica

$$\int_{C_R} f(z)\,e^{iz}\,dz \longrightarrow 0 \text{ quando } R \longrightarrow \infty.$$

Então obtemos

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx = \pi e^{-1-2i} \Rightarrow \text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx = \pi e^{-1-2i}.$$

Agora, segundo a fórmula de Euler, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5}\,dx = \pi e^{-1-2i}.$$

Igualando as partes imaginárias

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5}\, dx = \operatorname{Im}\left(\pi e^{-1-2i}\right).$$

Por outro lado,

$$\pi e^{-1-2i} = \pi e^{-1} e^{-2i} = \pi e^{-1}(\cos -2 + i \operatorname{sen} -2) = \pi e^{-1}(\cos 2 - i \operatorname{sen} 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\pi e^{-1-2i}\right) & = \pi e^{-1} \cos 2, \\ \operatorname{Im}\left(\pi e^{-1-2i}\right) & = -\pi e^{-1} \operatorname{sen} 2. \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5}\, dx = -\pi e^{-1} \operatorname{sen} 2},$$

cuja gráfica se representa na Figura 20.

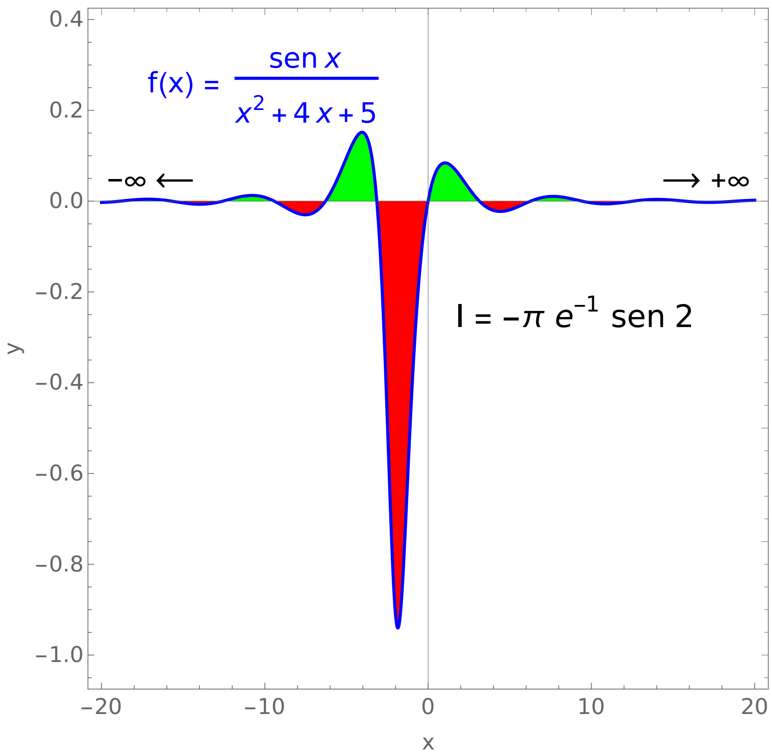

Figura 20: Gráfica da integral

26. Usa um caminho indentado para avaliar o valor principal de Cauchy da integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\, dx.$$

Resolução

Como em exemplos anteriores consideramos a integral

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\, dz.$$

A função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ tem polos simples em $z = 0$, $z = i$ e $z = -i$, estando apenas os dous primeiros no semiplano superior.
Posto que um dos polos ($z = 0$) está sobre o eixo real, consideraremos um caminho de integração indentado C, consistente no intervalo $[-R, R]$ no eixo real, a semicircunferência C_R com um raio suficientemente grande como para circundar os polos de $f(z)$ no semiplano superior e a semicircunferência C_r circundando o polo no eixo real (ver Figura 21).

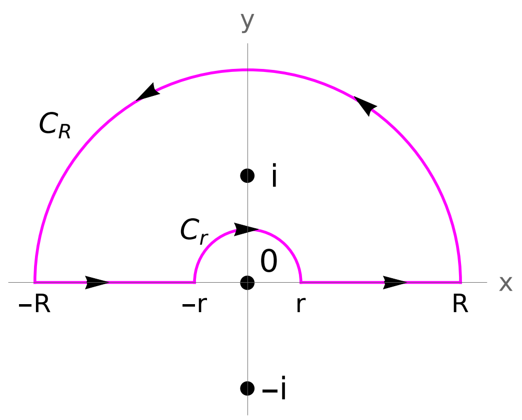

Figura 21: Caminho de integração e singularidades

Então, temos que a integral se calculará como

$$\oint_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, i\right),$$

onde $\int_{-C_r} = -\int_{C_r}$ (usando uma notação abreviada).

Víramos que o integral sobre a semicircunferência C_R tende a zero quando $R \longrightarrow \infty$ se dada $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ o grau de $P(z)$ é n e o de $Q(z)$ é $m \geq n+1$, o qual se satisfaz neste caso.

Por outro lado, o integral sobre a semicircunferência C_r quando $r \longrightarrow 0$ é dado por

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}\left(f(z), c\right),$$

sendo c o polo sobre o eixo real.

Então, temos que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\, dx - \pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 0\right) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, i\right). \tag{15}$$

Calculamos os correspondentes resíduos, tendo em conta que são polos simples, como

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z).$$

Ou seja,

$$\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 0\right) = \lim_{z\to 0} z \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 1. \tag{16}$$

$$\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, i\right) = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^{iz}}{z(z-i)(z+i))} = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z(z+i)} = -\frac{e^{-1}}{2}.$$

Substituindo (16) em (15) chegamos a

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\, dx - \pi i = 2\pi i \left(\frac{-e^{-1}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\, dx = i\pi \left(1 - e^{-1}\right)$$

Igualando as partes imaginárias obtemos

$$\boxed{V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\, dx = \pi \left(1 - e^{-1}\right)},$$

cuja representação gráfica se mostra na Figura 22.

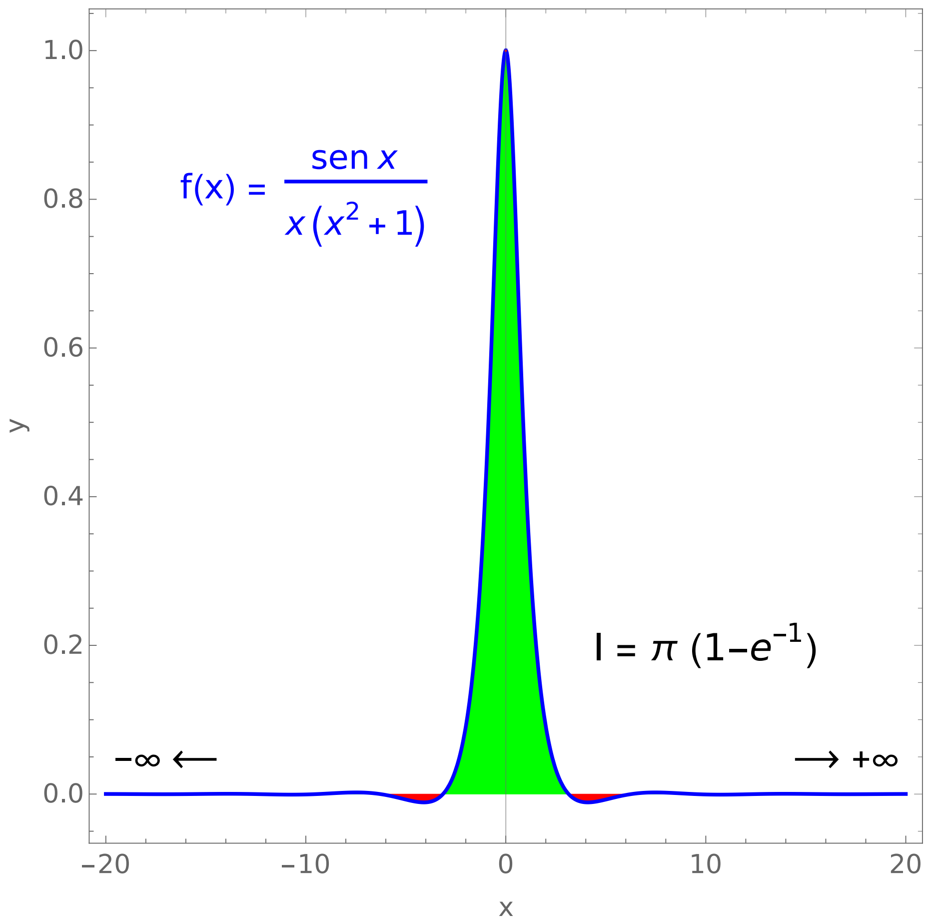

Figura 22: Valor da integral