T8. Séries e resíduos

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

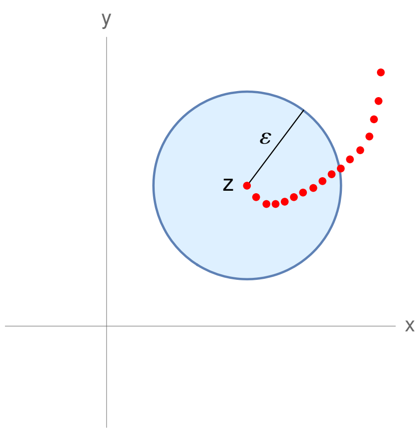
Apartados

Sucessões

Definição 8.1.1 (sucessão)

Uma **sucessão** $\{z_n\}$ é uma função cujo domínio é $\mathbb{Z}^+$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{C}$, isto é, a cada $n = 1, 2, \ldots$, lhe atribui um número complexo z_n.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, diz-se que a sucessão é **convergente**, quer dizer, $\{z_n\}$ converge a z se para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+ : |z_n - z| < \varepsilon$ sempre que $n > N$. Uma sucessão que não é convergente diz-se que é **divergente**.



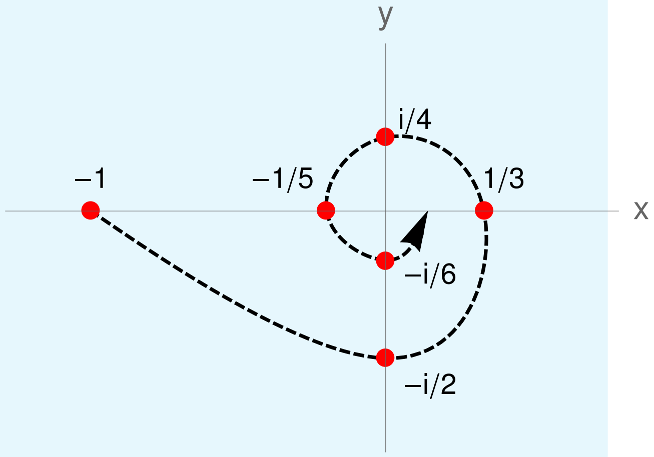
Sucessões

Exemplo

A sucessão $\left\{ \frac{i^{n+1}}{n} \right\}$ é convergente.

De facto,

$$-1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5} \dots$$



satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i^{n+1}}{n} = 0.$$

Sucessões

Teorema 8.1.2 (critério de convergência)

Suponhamos que $z_n = x_n + iy_n$, *com* $n = 1, 2, \dots$, *e* $z = x + iy$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = x, \\ \lim_{n\to\infty} y_n = y. \end{cases}$$

Sucessões

Exercício 8.1.3 (sucessão convergente)

Demonstra que sucessão $\{z_n\} = \left\{ \dfrac{ni}{n+2i} \right\}$ é convergente.

Resolução

$$z_n = \frac{ni}{n+2i} = \frac{2n}{n^2+4} + i\,\frac{n^2}{n^2+4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+4} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+4} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = i$$

Séries geométricas

Algumas séries geométricas de utilidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\,z^{k-1} = a + az + az^2 + \ldots + az^{n-1} + \ldots.$$

Ase séries geométricas especiais

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots, \tag{2}$$

são válidas para $|z| < 1$.

Séries e convergência

Definição 8.1.4 (convergência de séries)

Uma **série infinita** de números complexos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

é **convergente** se a sucessão de **somas parciais** $\{S_n\}$, onde

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$

converge a S; nesse caso, escrevemos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S$.

Séries e convergência

Teorema 8.1.5 (critério de convergência)

Suponhamos que $z_n = x_n + iy_n$, com $n = 1, 2, \ldots$, e $S = X + iY$. Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k = X, \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k = Y. \end{cases}$$

Séries e convergência

Teorema 8.1.6 (condição necessária para a convergência)

Se uma série de números complexos converge, então o n-ésimo termo converge a zero se n tender a infinito, isto é,

$$\text{se } \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Teorema 8.1.7 (teste do n-ésimo termo para a divergência)

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ diverge.}$$

Séries e convergência

Definição 8.1.8 (convergência absoluta)

Dizemos que série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é **absolutamente convergente** se a série dos números reais

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

for convergente.

Teorema 8.1.9 (convergência absoluta ⇒ convergência)

A convergência absoluta de uma série implica a convergência.

Séries e convergência

Teorema 8.1.10 (teste da razão)

Suponhamos que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *é uma série de termos complexos não nulos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = z.$$

1. *Se* $z < 1 \Rightarrow$ *a série é absolutamente convergente.*
2. *Se* $z > 1$ *ou* $z = \infty \Rightarrow$ *a série é divergente.*
3. *Se* $z = 1 \Rightarrow$ *o teste não é conclusivo.*

Séries e convergência

Teorema 8.1.11 (teste da raiz)

Suponhamos que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *é uma série de termos complexos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = z.$$

1. *Se* $z < 1 \Rightarrow$ *a série é absolutamente convergente.*
2. *Se* $z > 1$ *ou* $z = \infty \Rightarrow$ *a série é divergente.*
3. *Se* $z = 1 \Rightarrow$ *o teste não é conclusivo.*

Séries de potências

Definição 8.1.12 (séries de potências)

Uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots,$$

onde os coeficientes a_k são números complexos constantes, denomina-se **série de potências** em $z-z_0$. Dizemos que a série está **centrada em** z_0.

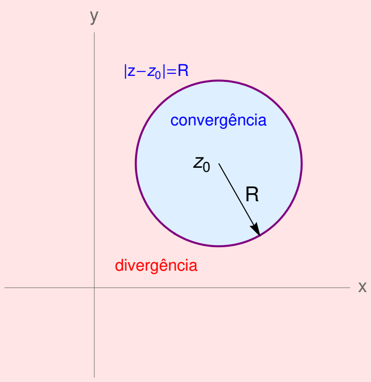
Nota é conveniente definir $(z-z_0)^0 = 1$, mesmo quando $z = z_0$.

Séries de potências

Definição 8.1.13 (círculo de convergência)

Cada série de potências complexas tem um **círculo de convergência**, que é o círculo centrado em z_0 de maior raio $R > 0$ para o qual converge absolutamente em todo ponto no interior do círculo, isto é, $\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-z_0| < R$.

A série diverge em todos os pontos exteriores ao círculo e pode convergir em todos, alguns ou em nenhum dos pontos sobre a circunferência exterior.



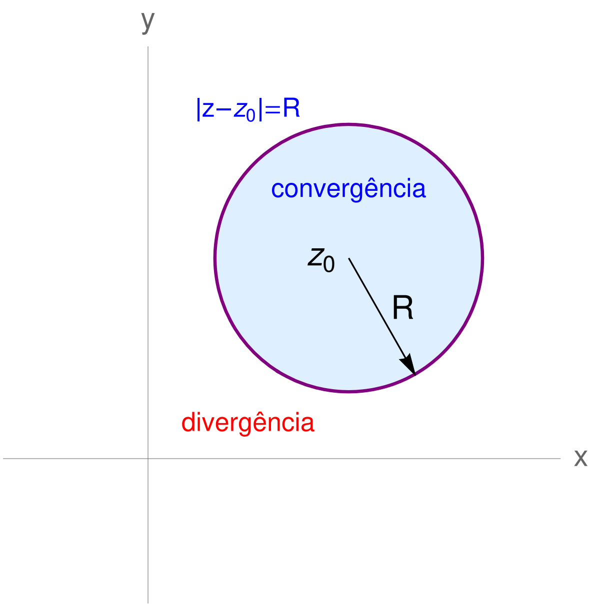
Séries de potências

O raio de convergência pode ser:

$R = 0 \Rightarrow$ só converge em $z = z_0$.

$R > 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ converge em $|z - z_0| < R$.

$R = \infty \Rightarrow$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$.



Séries de potências

Exemplo

Consideremos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k}$. Usando o teste da razão obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+2}}{n+1}}{\frac{z^{n+1}}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |z| = |z|.$$

Portanto, a série é absolutamente convergente para $|z| < 1$.

Séries de potências

Testes da razão e da raiz nas séries de potências

No caso das séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, os limites nos teoremas (8.1.10) e (8.1.11) só dependem dos coeficientes a_k.

Teste da razão

1. $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = z \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{z}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \Rightarrow R = \infty$.
3. $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty \Rightarrow R = 0$.

Séries de potências

Testes da razão e da raiz nas séries de potências

No caso das séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, os limites nos teoremas (8.1.10) e (8.1.11) só dependem dos coeficientes a_k.

Teste da raiz

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = z \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{z}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$.
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow R = 0$.

Séries de potências

Exemplo

Consideremos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(z-1-i)^k}{k!}$.

Identificando $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ e usando o teste da razão obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty.$$

A série de potências converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Séries de potências

Exemplo

Consideremos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k (z-2i)^k$.

Identificando $a_n = \left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n$ e usando o teste da raiz obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{6n+1}{2n+5}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{2n+5} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}.$$

O círculo de convergência é $|z-2i| = \frac{1}{3}$ e a série converge absolutamente para $|z-2i| < \frac{1}{3}$.

Apartados

Séries de potências

Teorema 8.2.1 (continuidade)

Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *representa uma função contínua* $f(z)$ *no interior do seu círculo de convergência* $|z-z_0| = R$, $R \neq 0$.

Teorema 8.2.2 (derivação termo a termo)

Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *pode derivar-se termo a termo no interior do seu círculo de convergência* $|z-z_0| = R$, $R \neq 0$.

Séries de potências

Teorema 8.2.3 (integração termo a termo)

Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *pode integrar-se termo a termo no interior do seu círculo de convergência* $|z-z_0| = R$, $R \neq 0$, *para cada caminho* C *situado completamente no interior do círculo de convergência.*

Séries de potências

Suponhamos que uma série de potências representa uma função $f(z)$ no interior de $|z-z_0| < R$, $R \neq 0$; isto é,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Do teorema de derivação termo a termo chegamos a

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z-z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \dots$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(z-z_0)^{k-2} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(z-z_0) + \dots$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k(z-z_0)^{k-3} = 3\cdot 2a_3 + \dots$$

Séries de potências

Cada uma das séries derivadas, $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots$, tem o mesmo raio de convergência que a série de potências original. Ademais, posto que esta última representa uma função diferenciável $f(z)$ no interior do seu círculo de convergência, então

Uma série de potências representa uma função holomorfa no interior do seu círculo de convergência

Avaliando as expressões de $f, f', f'', \ldots$ em $z = z_0$ obtemos uma relação entre os coeficientes e as derivadas de f

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Séries de potências

Definição 8.2.4 (função analítica)

Dizemos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é **analítica** num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para cada vizinhança centrada em z_0 existe uma série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ que converge a $f(z)$ para qualquer z na vizinhança.

Teorema 8.2.5 (holomorfia $\Leftrightarrow$ analiticidade)

Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, então $f(z)$ é analítica em Ω.

Nota isto não é certo em $\mathbb{R}$: diferenciabilidade $\not\Rightarrow$ analiticidade.

Séries de Taylor

Definição 8.2.6 (série de Taylor)

Dizemos que uma série de potências da forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

é uma **série de Taylor** de $f(z)$ centrada em z_0.

Dizemos que uma série de Taylor centrada em $z_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

é uma **série de Maclaurin** de $f(z)$.

Sucessões e séries
Séries de Taylor
Séries de Laurent
Zeros e polos
Resíduos e teorema dos resíduos
Cálculo de integrais reais

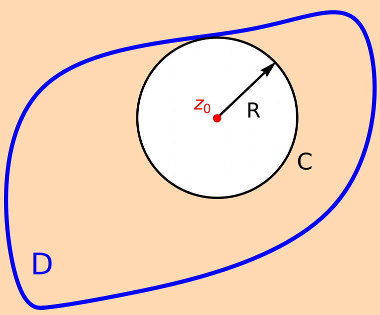
Séries de Taylor

Teorema 8.2.7 (teorema de Taylor)

Seja $f(z)$ holomorfa num domínio D e seja z_0 um ponto em D. Então $f(z)$ tem a representação em série

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \tag{3}$$

que é válida para o maior círculo C com centro em z_0 e raio R que se situa completamente dentro de D. O raio de convergência é a distância do centro da série, z_0, á singularidade isolada de $f(z)$ mais próxima.



Exemplos importantes de séries de Maclaurin

Se uma função $f(z)$ é inteira, então o raio de convergência de uma série de Taylor com centro em qualquer z_0 é $R = \infty$. Assim, as seguintes séries de Maclaurin são válidas $\forall z \in \mathbb{C}$, isto é, $|z| < \infty$.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Séries de Taylor

Exercício 8.2.8 (série de Taylor)

Desenvolve $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ numa série de Taylor com centro em $z_0 = 2i$.

Resolução

Começamos calculando as derivadas que aparecem em (3).

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2},$$

$$f''(z) = \frac{2 \cdot 1}{(1-z)^3},$$

$$f'''(z) = \frac{3 \cdot 2}{(1-z)^4},$$

$\rightsquigarrow$

Séries de Taylor

De modo que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(2i) = \frac{n!}{(1-2i)^{n+1}}.$$

Então, a série de Taylor será

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{k+1}} (z-2i)^k.$$

Posto que a distância do centro $z_0 = 2i$ à singularidade mais próxima $z = 1$ é $|z - z_0| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, o círculo de convergência desta série de potências será $|z - 2i| = \sqrt{5}$.

Apartados

Singularidades

Definição 8.3.1 (singularidade)

Se uma função $f(z)$ não é holomorfa num ponto $z = z_0$, então dizemos que esse ponto é uma **singularidade** da função.

Exemplo

Dada a função $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$, $z = 2i$ e $z = -2i$ são singularidades de $f(z)$, posto que a função é descontínua em cada um desses pontos.

Singularidades

Definição 8.3.2 (singularidade isolada)

Suponhamos que $z = z_0$ é uma singularidade da função $f(z)$. Dizemos que o ponto $z = z_0$ é uma **singularidade isolada** de $f(z)$ se existir alguma vizinhança perfurada de z_0, $0 < |z - z_0| < R$, na qual $f(z)$ é holomorfa.

Exemplo

Dada a função $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$, tanto $z = 2i$ como $z = -2i$ são singularidades isoladas de $f(z)$, posto que a função é holomorfa em cada ponto das vizinhanças perfuradas $0 < |z - 2i| < 1$ e $0 < |z - (-2i)| < 1$.

Singularidades

Definição 8.3.3 (singularidade não isolada)

Dizemos que $z = z_0$ é uma **singularidade não isolada** da função $f(z)$ se todas as vizinhanças de z_0 contêm pelo menos outra singularidade de $f(z)$ distinta de z_0.

Exemplo

O ponto de ramificação $z_0 = 0$ é uma singularidade não isolada de $\operatorname{Ln} z$ posto que toda vizinhança de $z_0 = 0$ deve conter necessariamente pontos do eixo real negativo (que também são singularidades de $\operatorname{Ln} z$).

Séries de Laurent

Se $z = z_0$ é uma singularidade de $f(z)$, então $f(z)$ não se pode expandir em série de potências em redor de z_0.

Porém, se z_0 é uma singularidade isolada é possível representar $f(z)$ por uma série envolvendo potências negativas e positivas de $z - z_0$ de modo que

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k}_{\text{parte analítica}}.$$

Séries de Laurent

A parte principal converge para $\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right| < r^* \Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{r^*} = r$.

A parte analítica converge para $|z-z_0| < R$.

A soma de ambas as duas partes converge para $r < |z-z_0| < R$.

Definição 8.3.4 (série de Laurent)

Dizemos que uma representação de $f(z)$ em série de potências da forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

é uma **série de Laurent** ou **expansão de Laurent**.

Séries de Laurent

Exemplo

A função $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3}$ não é holomorfa em $z = 0$ e, portanto, não se pode expandir em série de Maclaurin. Porém, $\operatorname{sen} z$ é uma função inteira cuja série de Maclaurin

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

converge $\forall z \in \mathbb{C}$. Dividindo-a por z^3 chegamos a

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots,$$

que converge para $0 < |z| < \infty$.

Séries de Laurent

Teorema 8.3.5 (teorema de Laurent)

Se $f(z)$ é holomorfa no anel $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, então $f(z)$ tem a representação em série de Laurent

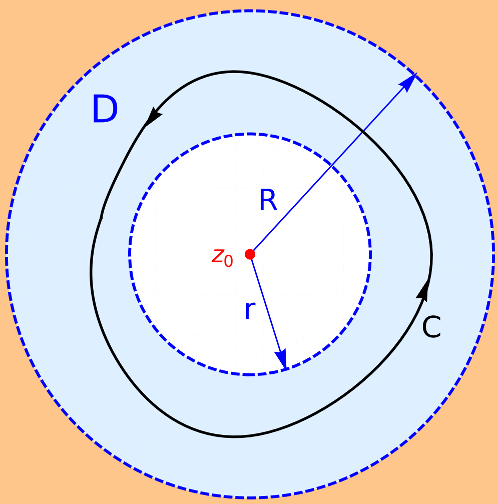
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

onde os coeficientes a_k estão dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - s_0)^{k+1}} ds, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Séries de Laurent

e C é um caminho fechado simples completamente contido em D que tem a z_0 no seu interior.



Séries de Laurent

Exercício 8.3.6 (série de Laurent)

Desenvolve $f(z) = \dfrac{8z+1}{z(1-z)}$ numa série de Laurent válida para $0 < |z| < 1$.

Resolução

Utilizando frações parciais podemos escrever

$$f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{1-z}.$$

$\rightsquigarrow$

Séries de Laurent

Exercício 8.3.7 (série de Laurent)

Usando agora a série geométrica para $\dfrac{1}{1-z}$ dada em (1) chegamos à série de Laurent

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{9 + 9z + 9z^2 + \dots}_{\text{parte analítica}},$$

onde a parte principal converge para $|z| > 0$ e a analítica para $|z| < 1$. A série completa é logo válida para $0 < |z| < 1$.

Apartados

Classificação das singularidades isoladas

Definição 8.4.1 (classificação das singularidades isoladas)

Quando z_0 é uma singularidade isolada de $f(z)$ e os números a_k para $k \in \mathbb{Z}$ são os coeficientes na série de Laurent, dizemos que

i) z_0 é uma **singularidade removível** se a parte principal é nula, quer dizer, se $a_{-k} = 0$.

ii) z_0 é um **polo** se a parte principal contém um número finito de termos distintos não nulos. Se, neste caso, o último coeficiente distinto de zero é $a_{-n}, n \geq 1$, então dizemos que z_0 é um **polo de ordem** n. Um polo de ordem 1 denomina-se **polo simples**.

iii) z_0 é uma **singularidade essencial** se a parte principal contém um número infinito de termos não nulos.

$\rightsquigarrow$

Classificação das singularidades isoladas

Exemplo

Consideremos a função $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$. Vimos que se podia expandir em série de Laurent como

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \underbrace{}_{\text{parte principal}} \quad 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$$

onde todos os coeficientes da parte principal são nulos

$\Rightarrow$ $z = 0$ é uma singularidade removível.

Nota então tem sentido *definir* $f(0) = 1$, de modo que $f(z)$ será agora definida e contínua em $z = 0$. De facto, também será analítica em $z = 0$.

Classificação das singularidades isoladas

Exemplo

Consideremos a função $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}$, cuja expansão em série de Laurent é

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{parte principal}} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots,$$

válida para $|z| > 0$.

O coeficiente $a_{-1} \neq 0 \Rightarrow$ $z = 0$ é um polo simples.

Classificação das singularidades isoladas

Exemplo

Consideremos a função $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$. Sabemos que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \Rightarrow e^{\frac{3}{z}} = 1 + \underbrace{\frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \ldots}_{\text{parte principal}},$$

que é a sua série de Laurent, válida para $|z| > 0$.

A parte principal contém um número infinito de termos

$\Rightarrow z = 0$ é uma singularidade essencial.

Zeros

Definição 8.4.2 (zero)

Um ponto z_0 é um **zero** da função $f(z)$ se $f(z_0) = 0$. Uma função analítica $f(z)$ tem um **zero de ordem** n em $z = z_0$ se

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, f''(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$
$$\text{mas } f^n(z_0) \neq 0.$$

Portanto, a expansão em série de Taylor centrada em z_0 de uma função $f(z)$ que tem um zero de ordem n em $z = z_0$ terá a forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z-z_0)^{n+2} + \ldots \\ &= (z-z_0)^n \left[a_n + a_{n+1}(z-z_0) + a_{n+2}(z-z_0)^2 + \ldots\right], \quad (4) \end{aligned}$$

onde $a_n \neq 0$.

Zeros

Teorema 8.4.3 (zero de ordem n)

*Uma função $f(z)$ que é analítica num disco $|z - z_0| < R$ tem um **zero de ordem** n em $z = z_0$ se, e somente se, se pode escrever como*

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z), \qquad (5)$$

onde $\phi(z)$ é analítica em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$.

Zeros

Exemplo

Consideremos a função analítica $f(z) = z \operatorname{sen} z^2$, com um zero em $z = 0$. Substituindo z por z^2 na série de Maclaurin para o seno obtemos

$$\operatorname{sen} z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = z \operatorname{sen} z^2 = z^3 \left[1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots\right].$$

Comparando com (5) vemos que $z = 0$ é um <u>zero de ordem 3</u>.

Polos

Teorema 8.4.4 (polo de ordem n)

*Uma função $f(z)$ que é analítica num disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$ tem um **polo de ordem** n em $z = z_0$ se, e somente se, se pode escrever como*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}, \tag{6}$$

onde $\phi(z)$ é analítica em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$.

Teorema 8.4.5 (polo $\leftrightarrow$ zero de ordem n)

Se as funções g e h são analíticas em $z = z_0$ e h tem um zero de ordem n em $z = z_0$ e $g(z_0) \neq 0$, então a função $f(z) = g(z)/h(z)$ tem um polo de ordem n em $z = z_0$.

Polos

Exemplo

Consideremos a função racional $f(z) = \dfrac{2z+5}{(z-1)(z+5)(z-2)^4}$.

O denominador, $h(z) = (z-1)(z+5)(z-2)^4$ tem zeros de ordem 1 em $z = 1$ e $z = -5$, e um zero de ordem 4 em $z = 2$.

Posto que o denominador, $g(z) = 2z + 5$ não é nulos nesses pontos, do teorema anterior concluímos que $f(z)$ tem polos simples em $z = 1$ e $z = -5$, e um polo de ordem 4 em $z = 2$.

Polos

Definição 8.4.6 (função meromorfa)

Dizemos que uma função $f(z)$ é **meromorfa** num domínio D se for holomorfa em D, à exceção dos polos em D.

Apartados

Resíduos

Vimos que se $f(z)$ tem uma singularidade isolada em z_0 então tem a representação em série de Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \\ &= \underbrace{\ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots}_{\text{parte analítica}}, \end{aligned}$$

que converge na vizinhança perfurada $0 < |z - z_0| < R$.

Resíduos

Definição 8.5.1 (resíduo)

Se z_0 é uma singularidade isolada de $f(z)$, denominamos **resíduo** de $f(z)$ em z_0 ao coeficiente a_{-1} e escrevemo-lo

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), z_0).$$

Resíduos

Exemplo

Dada a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$, temos que $z = 1$ é um polo de ordem 2. Da sua série de Laurent, válida para a vizinhança perfurada $0 < |z-1| < 2$,

$$f(z) = \frac{-1/2}{(z-1)^2} + \frac{-1/4}{z-1} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \dots$$

observamos que o coeficiente de $\dfrac{1}{z-1}$ é

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), 1) = -\frac{1}{4}.$$

Resíduos

Teorema 8.5.2 (resíduo num polo simples)

Se $f(z)$ tem um polo simples em $z = z_0$, então

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{7}$$

Teorema 8.5.3 (resíduo num polo de ordem n)

Se $f(z)$ tem um polo de ordem n em $z = z_0$, então

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right]. \tag{8}$$

Resíduos

Exercício 8.5.4 (cálculo de resíduos em polos)

Consideremos a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$, que tem um polo simples em $z = 3$ e um polo de ordem 2 em $z = 1$. Usa os teoremas anteriores para calcular o resíduo em cada polo.

Resolução

Para o cálculo do polo simples usamos (7):

$$\operatorname{Res}(f(z), 3) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Resíduos

Para o cálculo do polo de ordem 2 usamos (8):

$$\operatorname{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{z-3}$$

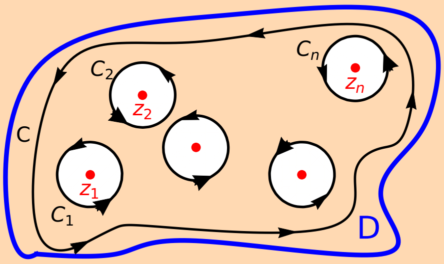
$$= \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Teorema dos resíduos

Teorema 8.5.5 (teorema dos resíduos de Cauchy)

Seja D um domínio simplesmente conexo e C uma caminho fechado simples orientado positivamente e situado completamente em D. Se $f(z)$ é uma função analítica no interior de C e sobre C, exceto num número finito de singularidades $z_1, z_2, \dots, z_n$ no interior de C, então

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f(z), z_k)}. \tag{9}$$



Teorema dos resíduos

Exercício 8.5.6 (avaliação mediante o teorema dos resíduos)

Avalia $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^4+5z^3}dz$, onde C é a circunferência $|z| = 2$.

Resolução

Temos que $z^4 + 5z^3 = z^3(z+5)$, de modo que o integrando tem um polo de ordem 3 em $z = 0$ e um polo simples em $z = -5$. Posto que apenas $z = 0$ está no interior do caminho

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4+5z^3}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f(z), 0) = 2\pi i \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{e^z}{z^3(z+5)}$$

$$= \pi i \lim_{z\to 0} \frac{(z^2+8z+17)e^z}{(z+5)^3} = \frac{17\pi}{125} i.$$

Apartados

Integrais trigonométricas reais

A teoria dos resíduos permite resolver integrais reais do tipos

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\, dx,$$

onde F e f são funções racionais.

Integrais trigonométricas reais

Ideia básica

Queremos converter uma integral da forma

$$\boxed{\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)d\theta}.$$

num integral complexo onde o caminho C é a circunferência unidade centrado na origem parametrizada mediante $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
Temos que

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz},$$

$\rightsquigarrow$

Integrais trigonométricas reais

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}),$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}).$$

Substituindo estas expressões no integral obtemos

$$\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right)\frac{dz}{iz},$$

onde C é $|z| = 1$.

Integrais trigonométricas reais

Exercício 8.6.1 (avaliação de uma integral trigonométrica real)

Avalia $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} d\theta.$

Resolução

Usando as substituições anteriores obtemos

$$\oint_C \frac{1}{\left(2+\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{1}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz}$$
$$= \frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz.$$

Sucessões e séries
Séries de Taylor
Séries de Laurent
Zeros e polos
Resíduos e teorema dos resíduos
Cálculo de integrais reais

Integrais trigonométricas reais

Fatorizando o denominador o integrando pode escrever-se

$$\frac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

sendo $z_1 = -2-\sqrt{3}$ e $z_2 = -2+\sqrt{3}$.
Posto que apenas z_2 está no interior de C, temos que

$$\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f(z), z_2).$$

Integrais trigonométricas reais

Observamos que z_2 é um polo de ordem 2, de modo que

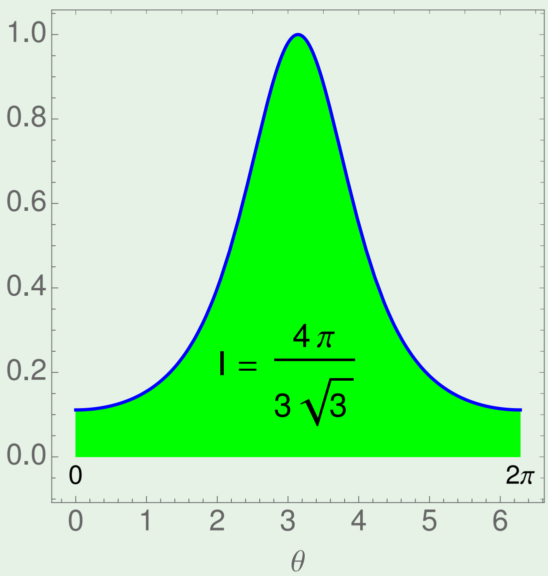
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), z_2) &= \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_1)^2}\\ &= \lim_{z\to z_2}\frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz = \frac{4}{i}2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{4}{i}2\pi i\frac{1}{6\sqrt{3}} \Rightarrow$$

Integrais trigonométricas reais

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$



Integrais reais impróprias

Ideia básica para integrais impróprias de funções racionais

Queremos resolver integrais da forma

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}.$$

Quando uma função f é contínua em $(-\infty, \infty)$ a seguinte integral imprópria define-se em termos de limites

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} f(x)dx.$$

Se os dous limites existem dizemos que a integral é convergente; caso contrário, seria divergente.

Integrais reais impróprias

Se *a priori* sabemos que a integral converge podemos avaliá-la usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

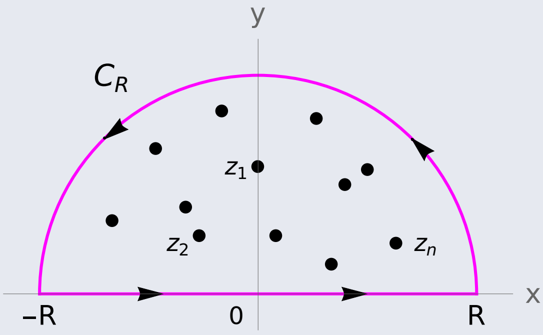
Este limite denomina-se **valor principal de Cauchy** e escreve-se

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Em resumo, quando uma integral é convergente o seu valor principal de Cauchy é o mesmo que o valor da integral.

Integrais reais impróprias

Suponhamos agora que a função é $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ contínua em $(-\infty, \infty)$. Substituímos x por z e integramos $f(z)$ sobre um caminho fechado C dado pelo intervalo $[-R, R]$ no eixo real e uma semicircunferência C_R de raio o suficientemente longo como para circundar todos os polos de $f(z)$ no semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$.



Integrais reais impróprias

Considerando o teorema dos resíduos de Cauchy temos que

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right),$$

onde z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, denota os polos no semiplano superior.

Se agora podemos demonstrar que $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz \longrightarrow 0$ quando $R \longrightarrow \infty$, então

$$\text{V.P.} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right).$$

Integrais reais impróprias

Exercício 8.6.2 (avaliação de uma integral real imprópria)

Avalia o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

Resolução

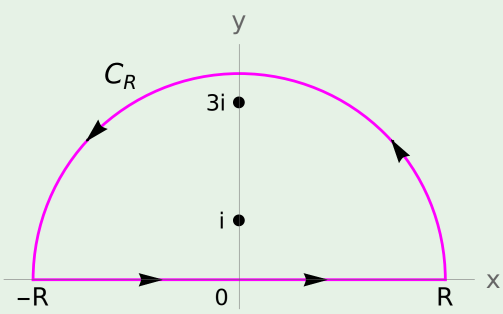
Tomamos $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$. Posto que

$$(z^2+1)(z^2+9) = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i),$$

tomamos C como o caminho fechado formado pelo intervalo $[-R, R]$ no eixo real e a semicircunferência C_R de raio $R > 3$ que circunda os polos simples $z = i$ e $z = 3i$ no semiplano superior.

Sucessões e séries
Séries de Taylor
Séries de Laurent
Zeros e polos
Resíduos e teorema dos resíduos
Cálculo de integrais reais

Integrais reais impróprias



Portanto,

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}dz$$
$$= \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx + \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}dz = I_1 + I_2$$

Integrais reais impróprias

Deste modo temos que

$$I_1 + I_2 = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), 3i)\right].$$

Calculamos os resíduos usando a expressão (7) do resíduo num polo simples

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)} = \frac{1}{16i},$$

$$\operatorname{Res}(f(z), 3i) = \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{1}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)} = -\frac{1}{48i}.$$

Integrais reais impróprias

Daí obtemos

$$I_1 + I_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right] = \frac{\pi}{12}.$$

Porém, agora teremos que fazer $R \longrightarrow \infty$ no cálculo desta integral. Para isso temos em conta que sobre o caminho C_R temos que

$$\begin{aligned}|(z^2+1)(z^2+9)| = |z^2+1|\cdot|z^2+9| &\geq ||z^2|-1|\cdot|z^2|-9| \\ &= (R^2-1)(R^2-9)\end{aligned}$$

Integrais reais impróprias

Se agora consideramos a desigualdade ML chegamos a

$$|I_2| = \left| \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} dz \right| \leq ML = \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-9)}.$$

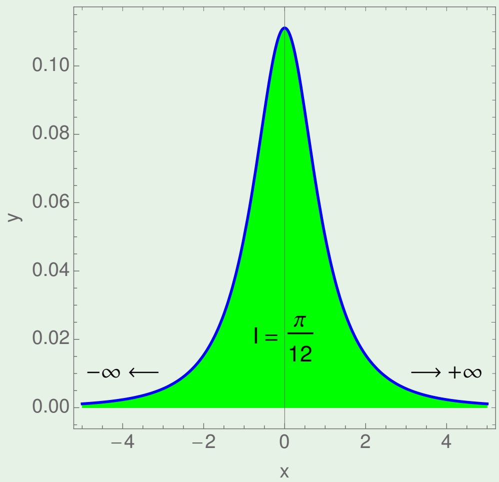
Logo,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{R\to\infty} I_2 = 0 \\ I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} I_1 = \frac{\pi}{12}.$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{12}$$

Integrais reais impróprias

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{12}$$



Integrais reais impróprias

Teorema 8.6.3 (comportamento da integral para $R \to \infty$)

Suponhamos que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *é uma função racional, onde o grau de* $p(z)$ *é* n *e o grau de* $q(z)$ *é* $m \geq n+2$. *Se* C_R *é um caminho semicircular* $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, *então*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz \to 0.$$

Integrais reais impróprias

Exercício 8.6.4 (V.P. de Cauchy de uma integral real imprópria)

Avalia o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$.

Resolução

Observamos que se satisfaz a condição dada no teorema anterior. Por outro lado, o integrando tem 4 polos simples em

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \qquad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Porém, apenas z_1 e z_2 estão no semiplano superior.

$\rightsquigarrow$

Integrais reais impróprias

Usamos a expressão (7) para calcular o resíduo no polo z_1

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z), z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) \\
&= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} \\
&= \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}})} \\
&= \frac{1}{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i} = -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} i.
\end{aligned}
$$

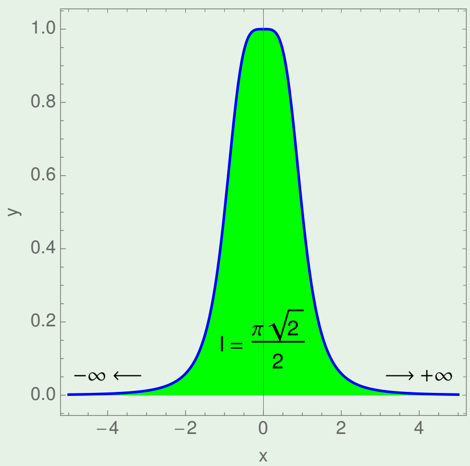
Analogamente obtemos o resíduo no polo z_2

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} i.$$

Integrais reais impróprias

Então, chegamos a

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_2)\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$



Integrais reais impróprias

Ideia básica para integrais de Fourier

Queremos resolver integrais da forma

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx} \quad \text{ou} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,dx}.$$

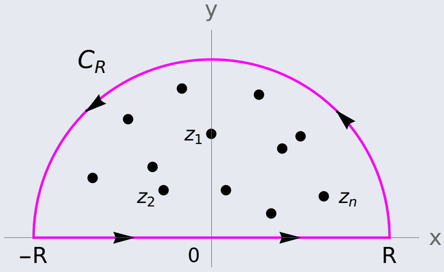
Estas integrais resultam da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,dx,$$

sempre que as integrais no membro direito convirjam.

Integrais reais impróprias

Suponhamos agora que a função é $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ contínua em $(-\infty, \infty)$. Ambas as integrais de Fourier podem ser avaliadas conjuntamente considerando a integral $\int_C f(z)e^{i\alpha z}dz$, onde $\alpha > 0$ e o caminho fechado C é dado pelo intervalo $[-R, R]$ no eixo real e uma semicircunferência C_R de raio o suficientemente longo como para circundar todos os polos de $f(z)$ no semiplano superior $\mathrm{Im}\, z > 0$.



Integrais reais impróprias

Teorema 8.6.5 (comportamento da integral para $R \to \infty$)

Suponhamos que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *é uma função racional, onde o grau de* $p(z)$ *é* n *e o grau de* $q(z)$ *é* $m \geq n + 1$. *Se* C_R *é um caminho semicircular* $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $\alpha > 0$, *então*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z}dz \to 0.$$

Integrais reais impróprias

Exercício 8.6.6 (uso da simetria nas integrais de Fourier)

Avalia o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9}dx$.

Resolução

Ainda que os limites de integração na integral dada não são de $-\infty$ a ∞, como se precisa no método descrito, isto se pode amanhar tendo em conta que o integrando é uma função par, isto é,

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9}dx.$$

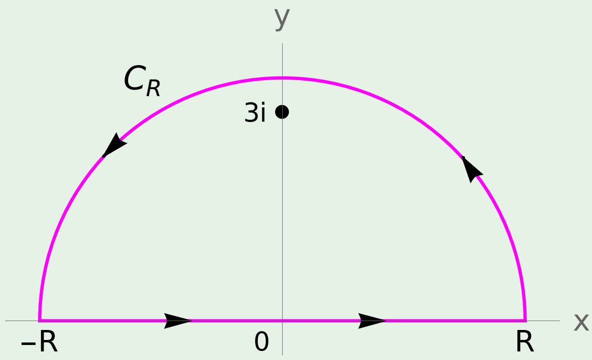
$\rightsquigarrow$

Integrais reais impróprias

Posto que, neste caso, $\alpha = 1$ a integral curvilínea que resolve o problema é

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9} e^{iz}\, dz,$$

onde C é o caminho que se mostra na figura, com um único polo no seu interior, $z_0 = 3i$.



Integrais reais impróprias

Aplicando o teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_{C_R} \frac{z}{z^2+9} e^{iz}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+9} e^{ix}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2+9} e^{iz}, 3i\right),$$

O resíduo no polo $z_0 = 3i$ é

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) \frac{z e^{iz}}{(z-z_0)(z-z_1)}$$
$$= \lim_{z\to 3i} \frac{z e^{iz}}{z + 3i} = \frac{3i e^{i3i}}{3i + 3i} = \frac{e^{-3}}{2}.$$

Considerando o teorema anterior podemos concluir que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz \to 0.$$

Integrais reais impróprias

Então,

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9} e^{ix} dx = 2\pi i \left(\frac{e^{-3}}{2} \right) = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9} e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+9} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Igualando as partes reais e imaginárias chegamos a

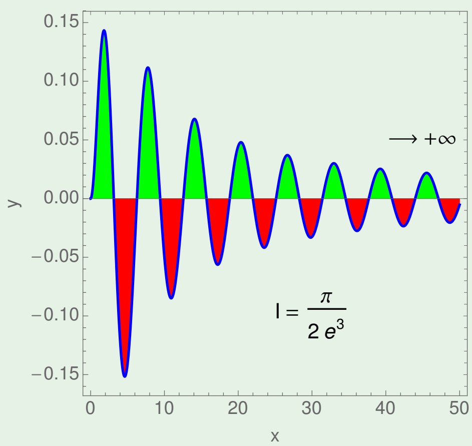
$$\begin{cases} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \cos x}{x^2+9} dx = 0 \\ \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \dfrac{\pi}{e^3}. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

Integrais reais impróprias

Finalmente, considerando o caráter par da função do problema

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{2e^3}.$$



Integrais reais impróprias

Ideia básica para integrais em caminhos indentados

No caso de que a função complexa $f(z)$ que se usa para obter o valor das integrais impróprias

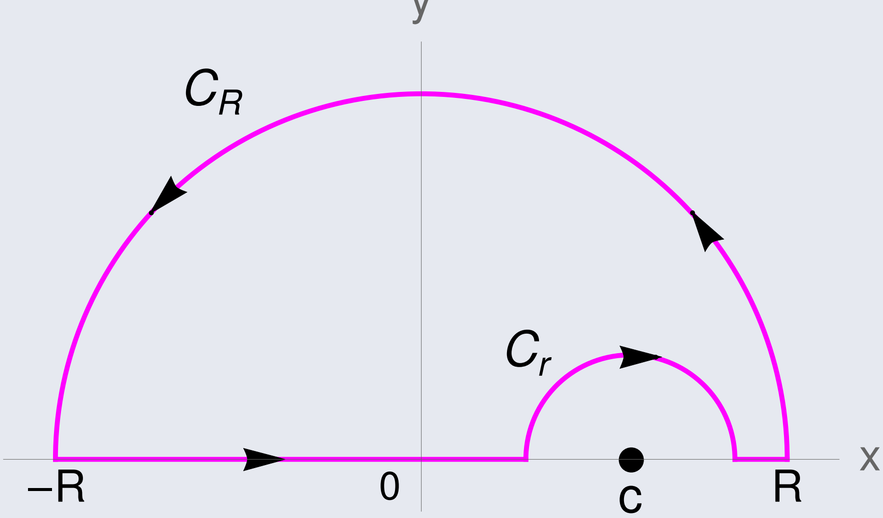
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,dx,$$

tenha algum polo no eixo real, quer dizer, em $z = c$, $c \in \mathbb{R}$, teremos que integrar ao longo de um caminho indentado.

Integrais reais impróprias

O caminho indentado, onde C_r denota uma semicircunferência centrada em $z = c$ que está orientada no sentido positivo, mostra-se na seguinte figura.



Integrais reais impróprias

Teorema 8.6.7 (comportamento da integral para $R \to \infty$)

Suponhamos que $f(z)$ tem um polo simples em $z = c$ sobre o eixo real. Se C_r é o caminho definido por $z = c + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, então

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)dz = \pi i \operatorname{Res}(f(z), c).$$

Integrais reais impróprias

Exercício 8.6.8 (uso de um caminho indentado)

Avalia o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2-2x+2)}dx.$

Resolução

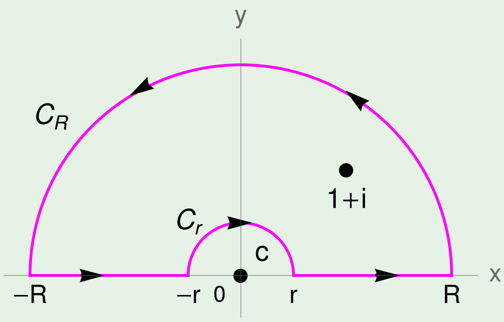
Consideramos a integral curvilínea

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz,$$

onde a função $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-2z+2)}$ tem polos simples em $z = 0$ e $z = 1 + i$ no semiplano superior.

$\rightsquigarrow$

Integrais reais impróprias



O caminho C é indentado na origem. Temos que

$$\oint_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, i+1\right),$$

onde $\int_{-C_r} = -\int_{C_r}$.

$\rightsquigarrow$

Integrais reais impróprias

Tomando os limites destas integrais para $R \to \infty$ e $r \to 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)dx} &- \pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 0\right) \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 1+i\right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 0\right) = \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 1+i\right) = -\dfrac{e^{-1+i}}{4}(1+i). \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

Integrais reais impróprias

Então,

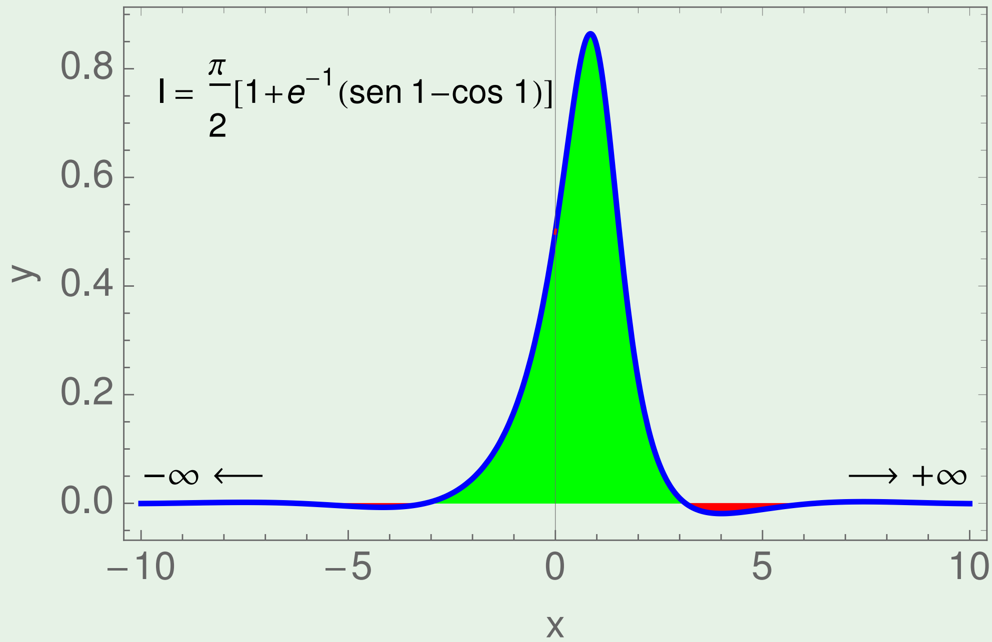
$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)dx} = \pi i \left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi i \left(-\frac{e^{-1+i}}{4}(1+i)\right).$$

Usando agora $e^{-1+i} = e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$, simplificando e igualando as partes reais e imaginárias chegamos a

$$\begin{cases} \text{V.P.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2-2x+2)} dx = \frac{\pi}{2} e^{-1}(\operatorname{sen} 1 + \cos 1) \\ \text{V.P.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2-2x+2)} dx = \frac{\pi}{2} \left[1 + e^{-1}(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)\right]. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

Integrais reais impróprias



Licença