T1. Introdução às equações diferenciais

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Conceito de derivada

Definição 1.1.1 (derivada)

Seja a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $x_0 \in I$. Diz-se que a função f é derivável no ponto $x = x_0$ se existir o limite

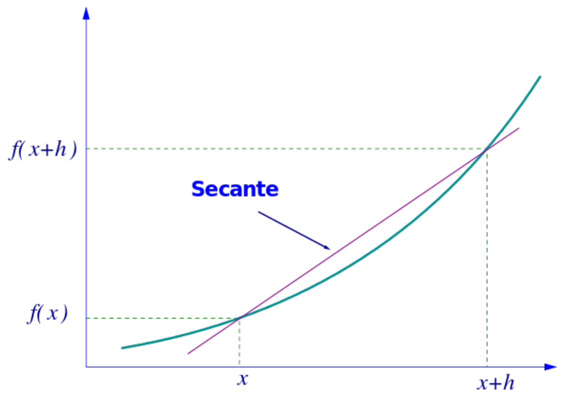
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv f'(x_0).$$

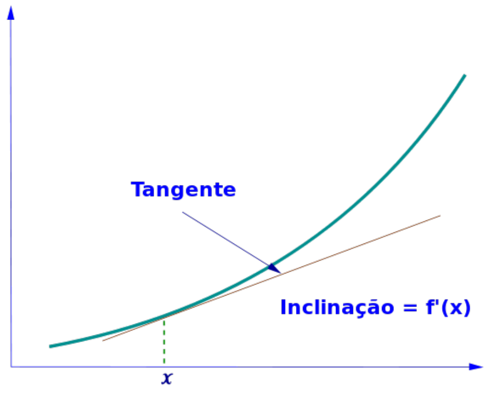
O limite $f'(x_0)$ chama-se **derivada** da função em x_0.

Conceito de derivada

Interpretação

- Determina a razão ou ritmo de variação da função f respeito da variável x,
$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}.$$
- Geometricamente indica a pendente da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$.





Definições e terminologia
Problemas de valor inicial
Modelos matemáticos

Conceito de derivada

- **Notação**

<u>Derivadas ordinárias</u>

Leibniz $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$

Lagrange $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ (notação prima)

Newton $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ (notação de pontos: em física, derivada com respeito ao tempo)

Derivadas parciais

Euler $D_{xx}u, D_{xy}u, \ldots$

Jacobi $\partial_{xx}u, \partial_{xy}u, \ldots$

$u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ (notação de subíndice)

Conceito de derivada

- **Notação**

Derivadas ordinárias

Leibniz $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$

Lagrange $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ (notação prima)

Newton $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ (notação de pontos: em física, derivada com respeito ao tempo)

Derivadas parciais

Euler $D_{xx}u, D_{xy}u, \ldots$

Jacobi $\partial_{xx}u, \partial_{xy}u, \ldots$

$u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ (notação de subíndice)

Equações diferenciais

Definição 1.1.2 (equação diferencial)

Uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com respeito a uma ou mais variáveis independentes, diz-se que é uma **equação diferencial (ED)**.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = 3xy$$

As ED classificam-se por **tipo**, **ordem** e **linearidade**.

Equações diferenciais

Definição 1.1.2 (equação diferencial)

Uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com respeito a uma ou mais variáveis independentes, diz-se que é uma **equação diferencial (ED)**.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = 3xy$$

As ED classificam-se por **tipo**, **ordem** e **linearidade**.

Equações diferenciais

Definição 1.1.2 (equação diferencial)

Uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com respeito a uma ou mais variáveis independentes, diz-se que é uma **equação diferencial (ED)**.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = 3xy$$

As ED classificam-se por **tipo**, **ordem** e **linearidade**.

Classificação por tipo

Equações diferenciais ordinárias (EDO) A ED só contém derivadas ordinárias de uma ou mais funções com respeito a uma única variável independente.

Equações diferenciais em derivadas parciais (EDP) A ED só contém derivadas parciais de uma ou mais funções de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \cos x, \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x - y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Definições e terminologia
Problemas de valor inicial
Modelos matemáticos

Classificação por tipo

Equações diferenciais ordinárias (EDO) A ED só contém derivadas ordinárias de uma ou mais funções com respeito a uma única variável independente.

Equações diferenciais em derivadas parciais (EDP) A ED só contém derivadas parciais de uma ou mais funções de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \cos x, \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x - y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Manuel Andrade Valinho Matemáticas III – Tema 1 8 / 32

Classificação por ordem

Definição 1.1.3 (ordem de uma ED)

A **ordem** de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da derivada mais alta na equação.

Exemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + xy = \ln x, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Definições e terminologia
Problemas de valor inicial
Modelos matemáticos

Classificação por ordem

Definição 1.1.3 (ordem de uma ED)

A ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da derivada mais alta na equação.

Exemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + xy = \ln x, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Manuel Andrade Valinho Matemáticas III – Tema 1 9 / 32

Classificação por ordem

Forma diferencial de uma EDO de primeira ordem:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Forma geral de uma EDO de n-ésima ordem:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Forma normal de uma EDO de n-ésima ordem:

$$\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)}$$

onde f é uma função contínua com valores reais.

Primeira ordem: $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

Segunda ordem: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y')$

Classificação por linearidade

Definição 1.1.4 (ED linear)

Uma EDO de n-ésima ordem como (1) diz-se que é **linear** na variável y se F é linear em $y, y', \ldots, y^{(n)}$, isto é, se

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}$$

Primeira ordem: $a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Segunda ordem: $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Classificação por linearidade

Caraterísticas de uma EDO linear:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ são de primeiro grau.
- Os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dependem, como muito, da variável independente x.

Uma EDO **não linear** é uma que não é linear.

Exemplo

$$(1-y)y' + 3y = \cos x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \cos y = 0,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 3x.$$

Definições e terminologia
Problemas de valor inicial
Modelos matemáticos

Classificação por linearidade

Caraterísticas de uma EDO linear:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ são de primeiro grau.
- Os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dependem, como muito, da variável independente x.

Uma EDO **não linear** é uma que não é linear.

Exemplo

$$(1-y)y' + 3y = \cos x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \cos y = 0,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 3x.$$

Manuel Andrade Valinho Matemáticas III – Tema 1 12 / 32

Solução

Definição 1.1.5 (solução explícita)

Uma função $\phi(x)$ que quando se substitui por y numa equação diferencial satisfaz a equação para todo $x \in I$ denomina-se **solução explícita** da equação em I:

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0 \quad \forall x \in I$$

Uma solução $\phi(x)$ também se indicará com o símbolo $y(x)$.

O intervalo I também se chama **intervalo de definição**, **intervalo de existência**, **intervalo de validez** ou **domínio da solução**.

Definições e terminologia
Problemas de valor inicial
Modelos matemáticos

Solução

Definição 1.1.5 (solução explícita)

Uma função $\phi(x)$ que quando se substitui por y numa equação diferencial satisfaz a equação para todo $x \in I$ denomina-se **solução explícita** da equação em I:

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0 \quad \forall x \in I$$

Uma solução $\phi(x)$ também se indicará com o símbolo $y(x)$.

O intervalo I também se chama **intervalo de definição**, **intervalo de existência**, **intervalo de validez** ou **domínio da solução**.

Manuel Andrade Valinho Matemáticas III – Tema 1 13 / 32

Solução

Exercício 1.1.6

$$\text{EDO:} \quad \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \qquad \longrightarrow \qquad \text{Solução:} \quad y = \frac{1}{16}x^4.$$

Substituindo y na EDO verificamos que, com efeito, é a solução:

$$\text{Lado esquerdo:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}\left(4x^3\right) = \frac{1}{4}x^3.$$

$$\text{Lado direito:} \quad xy^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3.$$

Assim, também tem a solução $y = 0$ no intervalo $-\infty < x < \infty$.

Uma solução de uma ED que é igual a zero num intervalo I diz-se que é a **solução trivial**.

Solução

Exercício 1.1.6

$$\text{EDO:} \quad \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \qquad \longrightarrow \qquad \text{Solução:} \quad y = \frac{1}{16}x^4.$$

Substituindo y na EDO verificamos que, com efeito, é a solução:

$$\text{Lado esquerdo:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}\left(4x^3\right) = \frac{1}{4}x^3.$$

$$\text{Lado direito:} \quad xy^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3.$$

Assim, também tem a solução $y = 0$ no intervalo $-\infty < x < \infty$.

Uma solução de uma ED que é igual a zero num intervalo I diz-se que é a **solução trivial**.

Solução

Exercício 1.1.6

$$\text{EDO:}\quad \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \qquad \longrightarrow \qquad \text{Solução:}\quad y = \frac{1}{16}x^4.$$

Substituindo y na EDO verificamos que, com efeito, é a solução:

$$\text{Lado esquerdo:}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}\left(4x^3\right) = \frac{1}{4}x^3.$$

$$\text{Lado direito:}\ xy^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3.$$

Assim, também tem a solução $y = 0$ no intervalo $-\infty < x < \infty$.

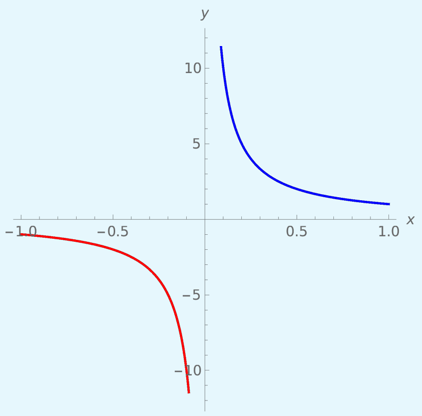
Uma solução de uma ED que é igual a zero num intervalo I diz-se que é a **solução trivial**.

Curva de solução

Chama-se **curva de solução** ou **curva integral** à gráfica de uma solução ϕ.

Exemplo

$$\text{EDO:}\quad xy' + y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \text{Solução:}\quad y = \frac{1}{x}\ \text{em}\ (0, \infty).$$



Soluções explícitas e implícitas

Definição 1.1.7 (solução implícita)

Diz-se que uma relação do tipo $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial sobre um intervalo I sempre que exista ao menos uma função $\phi(x)$ que satisfaça tanto a relação como a equação diferencial sobre I.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$\longrightarrow$ Solução implícita: $x^2 + y^2 = 25$ em $-5 < x < 5$.

Definições e terminologia
Problemas de valor inicial
Modelos matemáticos

Soluções explícitas e implícitas

Definição 1.1.7 (solução implícita)

Diz-se que uma relação do tipo $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial sobre um intervalo I sempre que exista ao menos uma função $\phi(x)$ que satisfaça tanto a relação como a equação diferencial sobre I.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$\longrightarrow$ Solução implícita: $x^2 + y^2 = 25$ em $-5 < x < 5$.

Manuel Andrade Valinho Matemáticas III – Tema 1 16 / 32

Soluções explícitas e implícitas

a) A solução satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

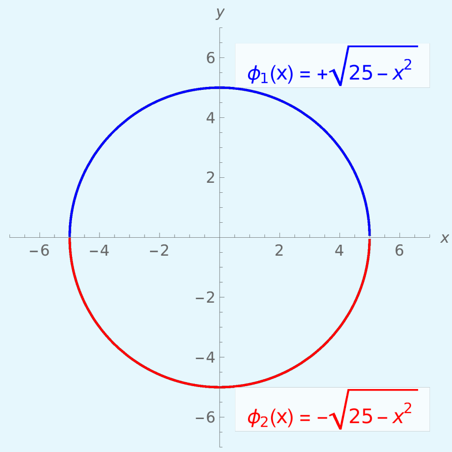
b) E resolvendo y:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

As soluções explícitas $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$ satisfazem a relação:

$$x^2 + \phi_1^2 = 25$$

$$x^2 + \phi_2^2 = 25$$



Famílias de soluções

Em geral, a solução de uma EDO de primeira ordem

$$F(x, y, y') = 0$$

vem dada por um conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluções que denominamos **família de soluções de um parâmetro**.

Para uma EDO de n-ésima ordem

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

obteríamos uma **família de soluções de n parâmetros**

$$G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0.$$

Famílias de soluções

Em geral, a solução de uma EDO de primeira ordem

$$F(x, y, y') = 0$$

vem dada por um conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluções que denominamos **família de soluções de um parâmetro**.

Para uma EDO de n-ésima ordem

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

obteríamos uma **família de soluções de n parâmetros**

$$G(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0.$$

Famílias de soluções

Definição 1.1.8 (solução geral)

Se cada solução de uma EDO de n-ésima ordem $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ num intervalo I se pode obter a partir de uma família de n parâmetros $G(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ mediante uma escolha adequada dos parâmetros c_i, com $i = 1, 2, \dots, n$, então diz-se que a família representa uma **solução geral** da equação diferencial.

Definição 1.1.9 (solução particular)

Se a solução de uma EDO está livre de parâmetros diremos que é uma **solução particular**.

Famílias de soluções

Definição 1.1.8 (solução geral)

Se cada solução de uma EDO de n-ésima ordem $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ num intervalo I se pode obter a partir de uma família de n parâmetros $G(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ mediante uma escolha adequada dos parâmetros c_i, com $i = 1, 2, \dots, n$, então diz-se que a família representa uma **solução geral** da equação diferencial.

Definição 1.1.9 (solução particular)

Se a solução de uma EDO está livre de parâmetros diremos que é uma **solução particular**.

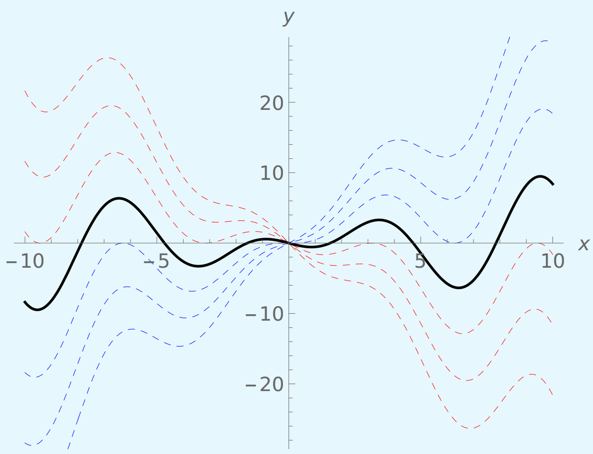
Famílias de soluções

Exemplo

$y = c\,x - x\cos x \longrightarrow$ família de soluções de um parâmetro.

Soluções particulares:

$c > 0$
$c = 0$
$c < 0$



Uma **solução singular** é aquela que não é membro de uma família de soluções.

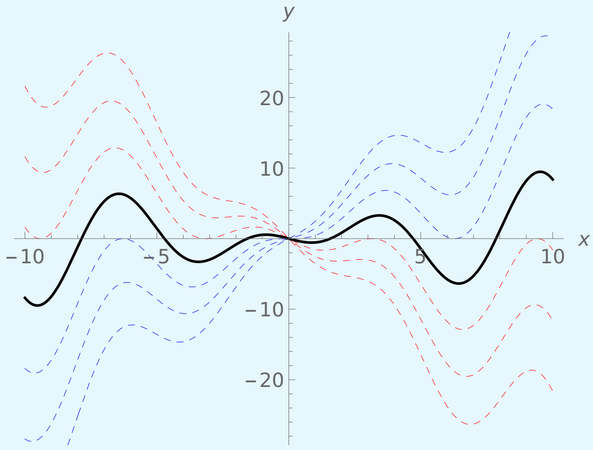
Famílias de soluções

Exemplo

$y = c\,x - x\cos x \longrightarrow$ família de soluções de um parâmetro.

Soluções particulares:

$c > 0$
$c = 0$
$c < 0$



Uma **solução singular** é aquela que não é membro de uma família de soluções.

Sistemas de equações diferenciais

Um **sistema de equações diferenciais** está constituído por duas ou mais equações contendo derivadas de duas ou mais funções desconhecidas de uma única variável independente

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, x, y), \end{cases}$$

cuja **solução** é um par de funções diferenciáveis $x = \phi_1(t)$ e $y = \phi_2(t)$, num intervalo comum I, que satisfazem cada uma das equações em I.

Definições e terminologia

Problemas de valor inicial

Modelos matemáticos

Problemas de valor inicial

Definição 1.2.1 (problema de valor inicial)

Um **problema de valor inicial (PVI)** para a ED de n-ésima ordem

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2}$$

consiste em achar a solução num intervalo I que satisfaz no ponto $x_0 \in I$ as n **condições iniciais**

$$\begin{cases} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ \ldots & & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1}, \end{cases}$$

onde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são constantes reais arbitrárias.

PVI de primeira e de segunda ordem

Primeira ordem:

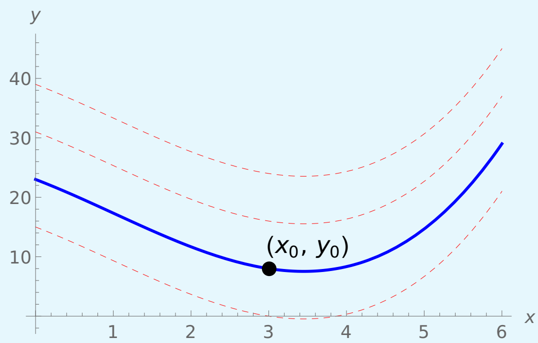
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 5, \ \forall x \in (0, 6)$$

sujeita à condição inicial

$$y(3) = 8.$$



Família de soluções para y(3) = a

Solução considerando a = 8 ($\Rightarrow y_0 = 8$)

PVI de primeira e de segunda ordem

Segunda ordem:

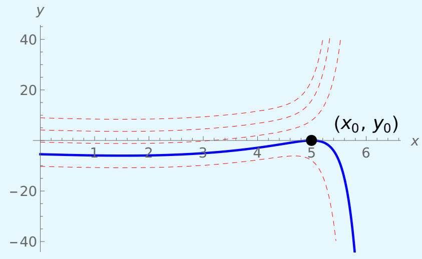
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \qquad (4)$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_1$$

Exemplo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} - x^2 + 3, \ \forall x \in (0, 6)$$

sujeita às condições iniciais

$$y(5) = 0,$$
$$y'(5) = 0.$$



Família de soluções para y(5) = a e y'(5) = 2a

Solução considerando a = 0 ($\Rightarrow y_0 = y_1 = 0$)

Existência e unicidade

Questões fundamentais

Existência: Existem soluções para a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Alguma das curvas de solução passa pelo ponto (x_0, y_0)?

Unicidade: Quando podemos ter a certeza de que existe precisamente uma única curva de solução que passa por (x_0, y_0)?

Existência e unicidade

Questões fundamentais

Existência: Existem soluções para a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Alguma das curvas de solução passa pelo ponto (x_0, y_0)?

Unicidade: Quando podemos ter a certeza de que existe precisamente uma única curva de solução que passa por (x_0, y_0)?

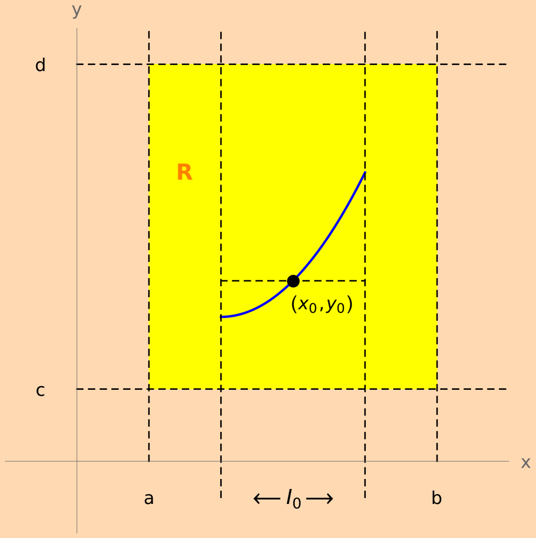
Existência e unicidade

Teorema 1.2.2 (Picard–Lindelöf, 1890)

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, a qual contém o ponto (x_0, y_0) no seu interior.

*Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então **existe** algum intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contido em $[a, b]$, e uma **única** função $y(x)$, definida em I_0 que é **solução** do PVI*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$



Definições e terminologia
Problemas de valor inicial
Modelos matemáticos

Existência e unicidade

Observação

Caso contrário, o PVI pode não ter solução ou ter várias (mesmo infinitas) soluções.

Definições e terminologia

Problemas de valor inicial

Modelos matemáticos

Modelos matemáticos

A descrição matemática de um sistema ou de um fenómeno denomina-se **modelo matemático**.

Construção

1. Identificação das variáveis $\longrightarrow$ nível de resolução
2. Formulação de hipóteses

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{Hipóteses}} & \longrightarrow & \textbf{ED} & \longrightarrow & \boxed{\text{Formulação}} \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\text{Modificar hipóteses ou aumentar a resolução} & & & & \text{Resolver as ED} \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\boxed{\text{Verificação}} & \longleftarrow & \text{Predições} & \longleftarrow & \boxed{\text{Soluções}}
\end{array}$$

Modelos matemáticos

A descrição matemática de um sistema ou de um fenómeno denomina-se **modelo matemático**.

Construção

1. Identificação das variáveis $\longrightarrow$ nível de resolução
2. Formulação de hipóteses

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{Hipóteses}} & \longrightarrow & \textbf{ED} & \longrightarrow & \boxed{\text{Formulação}} \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\text{Modificar hipóteses ou aumentar a resolução} & & & & \text{Resolver as ED} \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\boxed{\text{Verificação}} & \longleftarrow & \text{Predições} & \longleftarrow & \boxed{\text{Soluções}}
\end{array}
$$

Sistemas físicos

Sistemas dinâmicos

Variáveis de estado: conjunto de variáveis dependentes do tempo t.

Modelo matemático: EDO ou sistema de EDO junto com as condições iniciais no instante t_0.

Estado do sistema: valores das variáveis de estado num instante de tempo t.

Resposta do sistema: solução do problema de valor inicial.

Exemplo: decaimento radioativo

- Taxa de decaimento: radioatividade
- $\dfrac{dA}{dt} = kA$

Sistemas físicos

Sistemas dinâmicos

Variáveis de estado: conjunto de variáveis dependentes do tempo t.

Modelo matemático: EDO ou sistema de EDO junto com as condições iniciais no instante t_0.

Estado do sistema: valores das variáveis de estado num instante de tempo t.

Resposta do sistema: solução do problema de valor inicial.

Exemplo: decaimento radioativo

- Taxa de decaimento: radioatividade
- $\dfrac{dA}{dt} = kA$

Licença