T7. Integração no plano complexo

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica
Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Apartados

Arcos

Definição 7.1.1 (arco)

Dizemos que um conjunto C de pontos $z = (x, y)$ do plano complexo é um **arco** se

$$x = x(t),\ \ y = y(t), \qquad t \in [a, b],$$

em que $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas do parâmetro real t. Então, os pontos de C estarão descritos pela equação

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \qquad t \in [a, b].$$

Um arco C é dito **simples**, ou **de Jordan**, se não apresentar autointersecção. Isto é, C é um arco simples se $z(t_1) \neq z(t_2)$ sempre que $t_1 \neq t_2$.

Curvas de Jordan

Definição 7.1.2 (curva de Jordan)

Se um arco C for simples exceto pelo facto de que $z(b) = z(a)$, dizemos que C é uma **curva fechada simples**, ou uma **curva de Jordan**. Esta estará orientada positivamente se estiver orientada no sentido anti-horário.

Definição 7.1.3 (arco derivável)

Se os componentes $x'(t)$ e $y'(t)$ da derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ da função $z(t)$ que representa C forem contínuos $\forall t \in [a, b]$, dizemos que C é um **arco derivável** e, nesse caso, a função real

$$|z'(t)| = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}$$

é integrável no intervalo $[a, b]$.

Caminhos

O comprimento de C é o número

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Definição 7.1.4 (arco regular)

Se $z(t)$ representar um arco derivável e se $z'(t) \neq 0, \ \forall t \in [a, b]$, dizemos que é um **arco regular**.

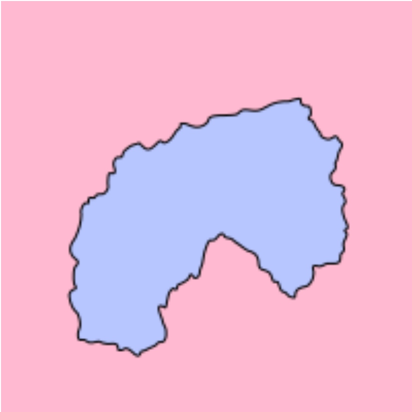
Definição 7.1.5 (caminho)

Um **caminho**, ou arco seccionalmente regular, é um arco consistindo num número finito de arcos regulares justapostos, cada um terminando no começo do seguinte.
Quando somente os valores inicial e final de $z(t)$ coincidirem, dizemos que C é um **caminho fechado simples**.

Caminhos

Teorema 7.1.6 (teorema da curva de Jordan)

Os pontos de qualquer curva fechada simples ou caminho fechado simples C são os pontos de fronteira de dous domínios distintos, um dos quais é o interior de C e é limitado; o outro, que é o exterior de C, é ilimitado.



Integrais curvilíneas

Definição 7.1.7 (integral definida)

Se $w(t) = u(t) + iv(t)$ for uma função complexa de variável real t em que u e v são funções reais, então a **integral definida** de $w(t)$ num intervalo $a \leq t \leq b$ é definida por

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + \int_a^b v(t)dt,$$

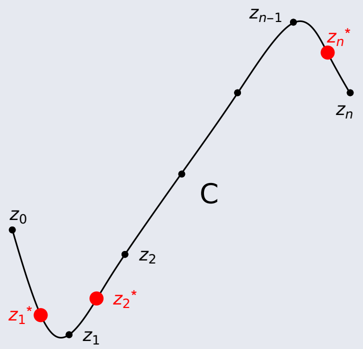
desde que exista cada uma das integrais do lado direito da equação.

A existência dessas integrais é garantida se essas funções forem **seccionalmente contínuas** no intervalo $a \leq t \leq b$, isto é, se forem contínuas em cada ponto do intervalo dado, exceto, possivelmente, num número finito de pontos nos quais, embora descontínuas, existem os limites laterais pertinentes.

Integrais curvilíneas

Passos para chegar à definição de integral curvilínea

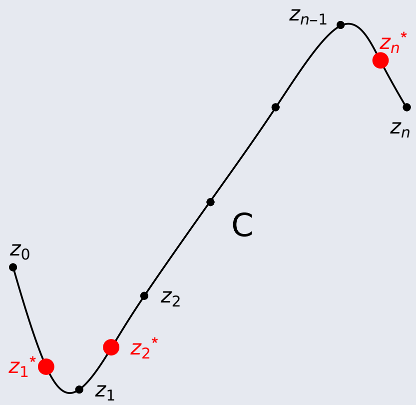
1. Seja $f(z)$ definida em todos os pontos de uma curva *suave* C definida pela parametrização $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$.
2. Seja P uma partição de $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Seja $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.



Integrais curvilíneas

Passos para chegar à definição de integral curvilínea

3. Seja $||P||$ a norma da partição, isto é, o maior dos $|\Delta z_k|$.
4. Toma-se um ponto $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ em cada subarco de C.
5. Forma-se a soma $\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k$.

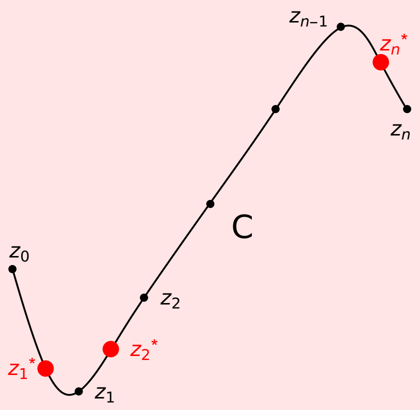


Integrais curvilíneas

Definição 7.1.8 (integral curvilínea)

Seja $f(z)$ definida em todos os pontos de uma curva *suave* C definida pela parametrização $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$.
A **integral curvilínea**, ou **integral complexa**, de $f(z)$ ao longo de C é

$$\int_C f(z)dz = \lim_{||P|| \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k.$$



Integrais curvilíneas

Teorema 7.1.9 (avaliação de uma integral curvilínea)

Suponhamos que $f[z(t)]$ seja contínua numa curva C para $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$. Então,

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)dt.$$

Integrais curvilíneas

Demonstração.

$$\int_C f(z)dz = \lim \sum (u + iv)(\Delta x + i\Delta y)$$
$$= \lim \sum (u\Delta x - v\Delta y) + i \sum (v\Delta x + u\Delta y)$$
$$= \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy$$

Utilizando a parametrização dada por $x = x(t)$ e $y = y(t)$ obtemos

$$= \int_a^b \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}$$
$$+ i \int_a^b \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}$$

Caminhos e integrais curvilíneas
O teorema de Cauchy–Goursat
Homotopia de caminhos
A fórmula integral de Cauchy

Integrais curvilíneas

Utilizando $z(t) = x(t) + iy(t)$ para descrever C chegamos a

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)dt.$$

$\square$

Integrais curvilíneas

Exercício 7.1.10 (avaliação de uma integral curvilínea)

Avalia $\int_C \bar{z}dz$, onde C é dada por $x = 3t$ e $y = t^2$, $-1 \leq t \leq 4$.

Resolução

Temos que $z(t) = 3t + it^2 \Rightarrow z'(t) = 3 + 2it$ e, ademais,

$$f[z(t)] = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2.$$

Então

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{-1}^{4} (3t - it^2)(3 + 2it)dt$$
$$= \int_{-1}^{4} (2t^3 + 9t)dt + i \int_{-1}^{4} 3t^2 dt = 195 + 65i.$$

Caminhos e integrais curvilíneas
O teorema de Cauchy–Goursat
Homotopia de caminhos
A fórmula integral de Cauchy

Integrais curvilíneas

Exercício 7.1.11 (avaliação de uma integral curvilínea)

Avalia $\oint_C \frac{1}{z}dz$, onde C é a circunferência $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução

Temos que $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it} \Rightarrow z'(t) = ie^{it}$ e, ademais,

$$f[z(t)] = \frac{1}{z} = e^{-it}.$$

Então

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it})ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Integrais curvilíneas

Teorema 7.1.12 (propriedades das integrais curvilíneas)

Suponhamos que f e g são contínuas num domínio D e que C é uma curva suave no domínio D. Então

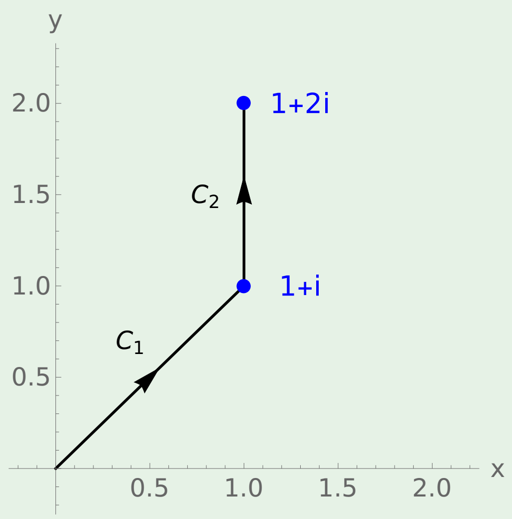
1. $\displaystyle\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, *$k$ constante.*
2. $\displaystyle\int_C [f(z)+g(z)]\,dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz.$
3. $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$, *sendo C a união das curvas C_1 e C_2.*
4. $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$, *onde $(-C)$ indica a curva tendo orientação oposta a C.*

Caminhos e integrais curvilíneas
O teorema de Cauchy–Goursat
Homotopia de caminhos
A fórmula integral de Cauchy

Integrais curvilíneas

Exercício 7.1.13 (avaliação de uma integral curvilínea sobre um caminho a troços)

Avalia $\int_C (x^2+iy^2)dz$, onde C é o caminho mostrado na figura.



Integrais curvilíneas

Resolução

À vista do teorema (3) temos que

$$\int_C (x^2+iy^2)dz = \int_{C_1} (x^2+iy^2)dz + \int_{C_2} (x^2+iy^2)dz.$$

Posto que a curva C_1 é definida por $y = x$, parece razoável utilizar x como parâmetro. Assim, temos que
$z(x) = x + ix \Rightarrow z'(x) = 1 + i$ e, ademais,

$$f[z(x)] = x^2 + ix^2.$$

Integrais curvilíneas

Deste modo,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} (x^2+iy^2)dz &= \int_0^1 (x^2+ix^2)(1+i)dx \\ &= (1+i)^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{(1+i)^2}{3} = \frac{2}{3}i.\end{aligned}$$

A curva C_2 é definida por $x = 1$, $1 \le y \le 2$. Utilizando y como parâmetro temos que $z(y) = 1 + iy \Rightarrow z'(y) = i$ e, ademais,

$$f[z(y)] = 1 + iy^2.$$

Integrais curvilíneas

Então

$$\int_{C_2} (x^2 + iy^2)dz = \int_1^2 (1 + iy^2)idy$$
$$= -\int_1^2 y^2 dy + i\int_1^2 dy = -\frac{7}{3} + i.$$

Finalmente obtemos

$$\int_C (x^2 + iy^2)dz = \frac{2}{3}i + \left(-\frac{7}{3} + i\right) = -\frac{1}{3}(7 - 5i).$$

Integrais curvilíneas

Teorema 7.1.14 (desigualdade ML)

Seja C um caminho de cumprimento L e suponhamos que $f(z)$ seja uma função seccionalmente contínua em C. Se M for uma constante positiva tal que $|f(z)| \leq M$ em cada ponto z de C no qual $f(z)$ estiver definida, então

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq M\,L.$$

$\rightsquigarrow$

Integrais curvilíneas

Exercício 7.1.15 (aplicação da desigualdade ML)

Determina um limite superior para o valor absoluto de $\oint_C \frac{e^z}{z+1}dz$, onde C é a circunferência $|z| = 4$.

Resolução

Primeiro calculamos o comprimento L da circunferência de raio 4, que resulta $L = 2\pi r = 8\pi$.
Víramos que $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$. Deste modo, temos que $|z + 1| \geq |z| - |1| = 4 - 1 = 3$. Daí que

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{|e^z|}{|z|-1} = \frac{|e^z|}{3}.$$

Caminhos e integrais curvilíneas
O teorema de Cauchy–Goursat
Homotopia de caminhos
A fórmula integral de Cauchy

Integrais curvilíneas

Por outro lado, $|e^z| = e^x(\cos x + i \operatorname{sen} y) = e^x$. Para qualquer ponto na circunferência $|z| = 4$ o máximo valor de x é 4. Assim, da expressão anterior obtemos

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{e^4}{3}.$$

Então, do teorema anterior concluímos que

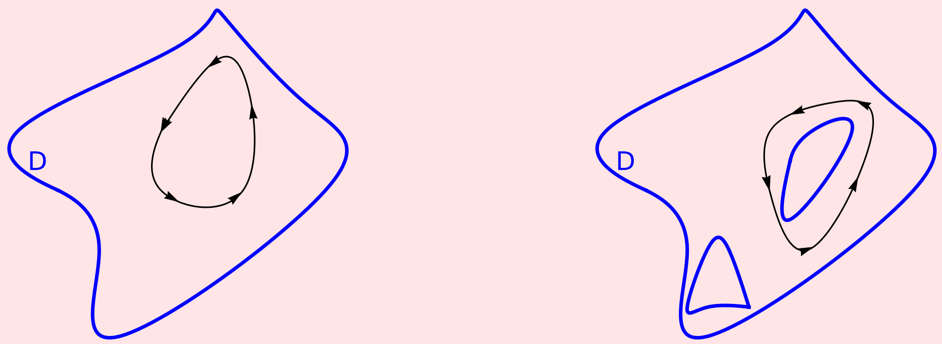
$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z+1}dz\right| \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$$

Apartados

Domínios simples e multiplamente conexos

Definição 7.2.1 (domínios simples e multiplamente conexos)

Um domínio D é denominado **simplesmente conexo** se qualquer caminho fechado simples contido em D tem somente pontos de D no seu interior.
Dizemos que um domínio D é **multiplamente conexo** se não for simplesmente conexo (quer dizer, se tem *buracos*).



O teorema de Cauchy–Goursat

Teorema 7.2.2 (teorema de Cauchy, 1825)

Seja uma função $f(z)$ holomorfa num domínio simplesmente conexo D e seja $f'(z)$ contínua em D. Então, para cada caminho fechado simples C em D temos que

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Teorema 7.2.3 (teorema de Cauchy–Goursat, 1883)

Se uma função $f(z)$ for holomorfa em todos os pontos interiores de um caminho fechado simples C e em todos os pontos do caminho, então

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0}.$$

O teorema de Cauchy–Goursat

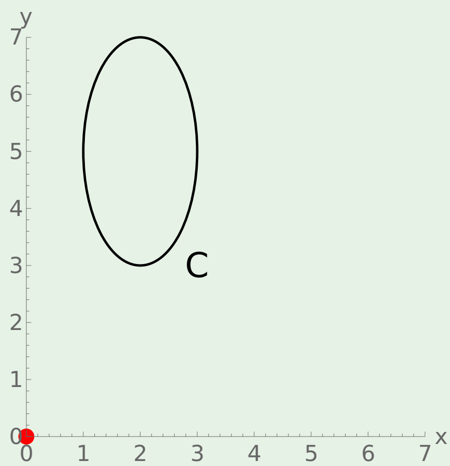
Exercício 7.2.4 (aplicação do teorema de Cauchy–Goursat)

Avalia $\oint_C \frac{dz}{z^2}$, onde C é a elipse $(x-2)^2 + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$.

Resolução

A função racional $f(z) = \frac{1}{z^2}$ é holomorfa em todo $\mathbb{C}$ exceto em $z = 0$. Porém, $z = 0$ não é um ponto interior a C nem está sobre o caminho. Então

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0.$$

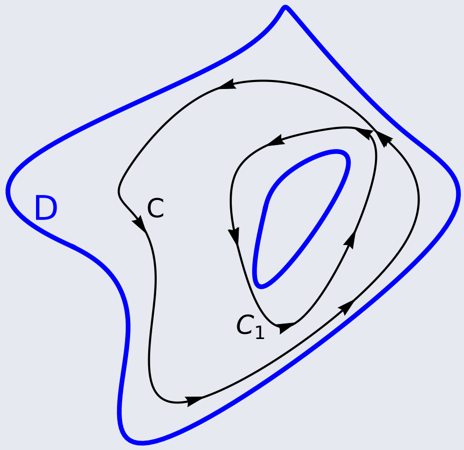


O teorema de Cauchy–Goursat

Princípio da deformação de caminhos

Consideremos uma função f num domínio D **duplamente conexo** e C e C_1 dous caminhos fechados simples tal que C_1 circunda o *buraco* no domínio D e é interior a C.

Suponhamos, ademais, que f é holomorfa em cada caminho e em cada ponto interior a C mas exterior a C_1.



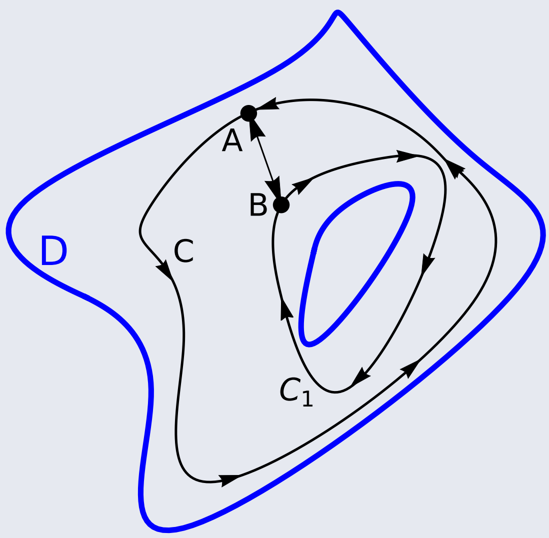
O teorema de Cauchy–Goursat

Quando o corte AB é introduzido, a região limitada pelas curvas C e C_1 é **simplesmente conexa**.

Agora a integral de A a B tem o valor oposto à integral de B a A e aplicando o teorema de Cauchy–Goursat chegamos a

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz = 0$$

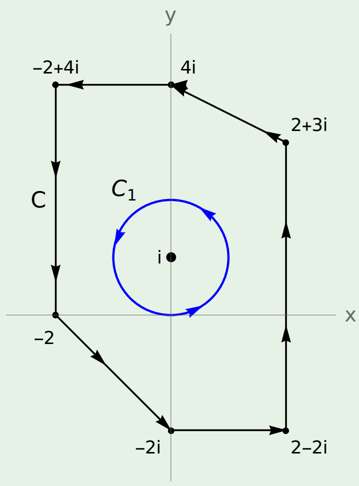
$$\boxed{\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz} \qquad (1)$$



O teorema de Cauchy–Goursat

Exercício 7.2.5 (aplicação do princípio da deformação de caminhos)

Avalia $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-i}$, onde C é o caminho que se mostra na figura.



$\rightsquigarrow$

O teorema de Cauchy–Goursat

Resolução

Tendo em conta (1) escolhemos o caminho C_1, completamente interior a C, que resulta ser mais conveniente para este problema. Este é a circunferência $|z-i|=1$, que se pode parametrizar por $z=i+e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$. Assim, posto que $z-i=e^{it}\Rightarrow dz=ie^{it}dt$ chegamos a

$$\oint_C \frac{dz}{z-i}=\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i.$$

O resultado anterior pode generalizar-se para qualquer $n\in\mathbb{Z}$

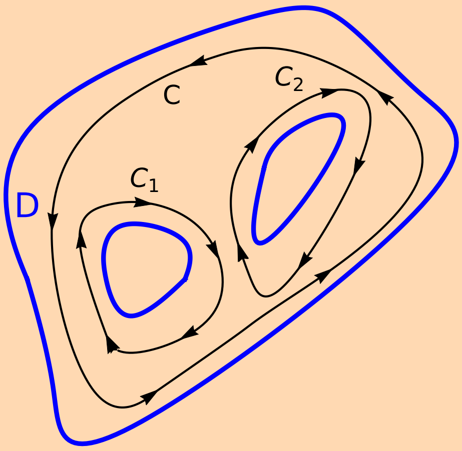
$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

O teorema de Cauchy–Goursat

Teorema 7.2.6 (C–G para domínios multiplamente conexos)

Suponhamos que C seja um caminho fechado orientado no sentido anti-horário e que C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, sejam caminhos fechados simples orientados no sentido horário, todos interiores a C, disjuntos e sem pontos interiores em comum.
Se uma função $f(z)$ for holomorfa em todos esses caminhos e no domínio multiplamente conexo constituído pelos pontos interiores de C e exteriores a cada C_k, então

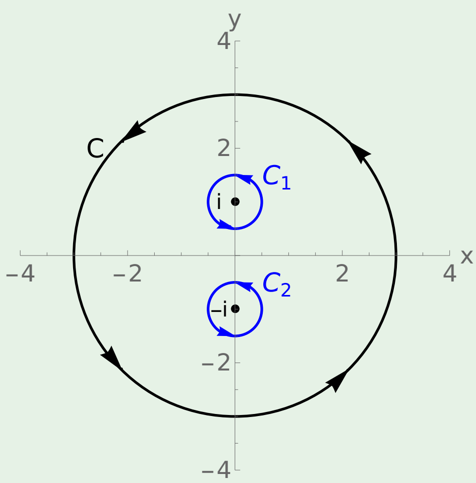
$$\boxed{\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz}.$$



O teorema de Cauchy–Goursat

Exercício 7.2.7 (aplicação do teorema de Cauchy–Goursat para domínios multiplamente conexos)

Avalia $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$, onde C é a circunferência $|z| = 3$.



⇝

O teorema de Cauchy–Goursat

Resolução

Fatorizando o denominador do integrando, $z^2+1=(z-i)(z+i)$.
Logo, o integrando $\dfrac{1}{z^2+1}$ não é uma função holomorfa em $z=\pm i$, pontos que estão no interior do caminho C.
Por descomposição em frações parciais temos que

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}\Rightarrow A(z+i)+B(z-i)=1\Rightarrow\begin{cases} A=\dfrac{1}{2i} \\ B=-\dfrac{1}{2i}. \end{cases}$$

Assim obtemos

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\oint_C\left[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right]dz.$$

O teorema de Cauchy–Goursat

Agora circundamos os pontos $z=i$ e $z=-i$ com caminhos fechados simples circulares C_1 e C_2, respetivamente, ambos os dous situados completamente no interior de C. Em particular tomamos $|z-i|=\dfrac{1}{2}$ para C_1 e $|z+i|=\dfrac{1}{2}$ para C_2. Do teorema de Cauchy–Goursat para domínios multiplamente conexos obtemos

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\oint_{C_1}\left[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right]dz+\frac{1}{2i}\oint_{C_2}\left[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{1}{z-i}dz-\frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{1}{z+i}dz$$

$$+\frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{1}{z-i}dz-\frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{1}{z+i}dz \qquad (2)$$

O teorema de Cauchy–Goursat

Dado que $\dfrac{1}{z+i}$ é holomorfa em C_1 e em cada ponto do seu interior, e dado que $\dfrac{1}{z-i}$ é holomorfa em C_2 e em cada ponto do seu interior, temos que as integrais em vermelho são nulas.
Além disso, víramos num exemplo anterior que

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i \quad \text{e} \quad \oint_{C_2} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i.$$

Então, (2) transforma-se em

$$\oint_{C} \frac{dz}{z^2+1} = \pi - \pi = 0.$$

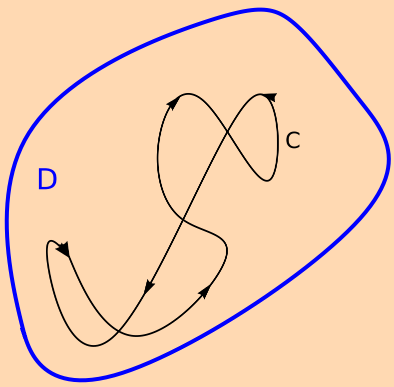
O teorema de Cauchy–Goursat

Teorema 7.2.8 (C–G para domínios simplesmente conexos)

Se uma função $f(z)$ for holomorfa num domínio simplesmente conexo D, então

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0},$$

em cada caminho fechado contido em D.

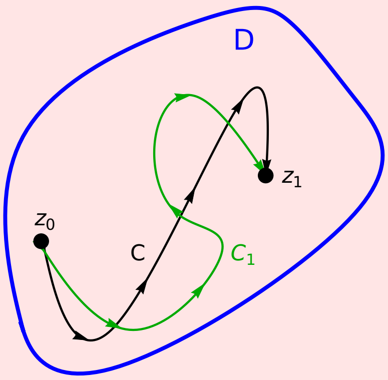


Apartados

Independência do caminho

Definição 7.3.1 (independência do caminho)

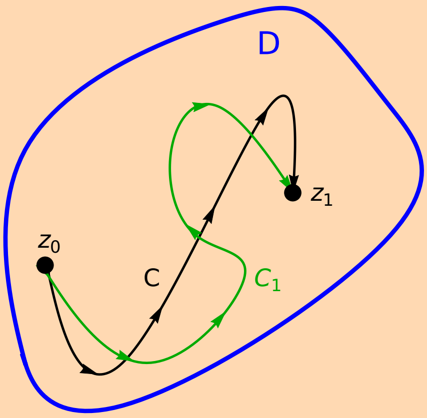
Sejam z_0 e z_1 pontos de um domínio D. Dizemos que uma integral curvilínea $\int_C f(z)dz$ é **independente do caminho** se o seu valor é o mesmo para todos os caminhos C em D que começam em z_0 e rematam em z_1.



Independência do caminho

Teorema 7.3.2 (holomorfia $\Rightarrow$ independência do caminho)

Suponhamos que uma função $f(z)$ é holomorfa num domínio simplesmente conexo D e que C é qualquer caminho em D. Então $\int_C f(z)dz$ é independente do caminho.



Independência do caminho

Demonstração.

Suponhamos que C e C_1 são dous caminhos situados completamente num domínio simplesmente conexo D e ambos os dous com ponto inicial z_0 e ponto final z_1. O caminho C unido ao caminho oposto $(-C_1)$ forma um caminho fechado.
Então, se $f(z)$ é holomorfa em D, do teorema de Cauchy–Goursat

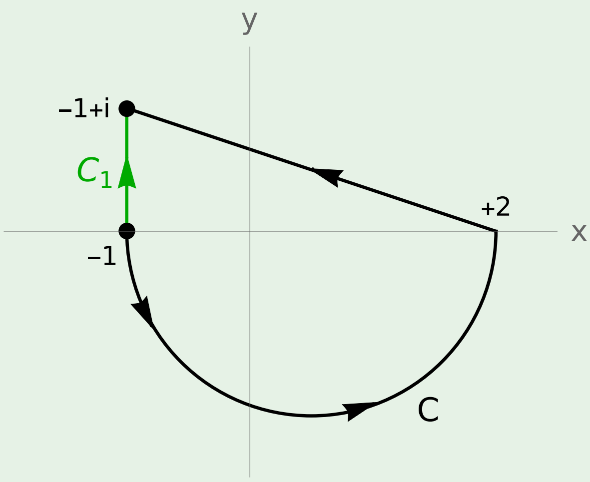
$$\int_C f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz.$$

□

Independência do caminho

Exercício 7.3.3 (escolha do caminho)

Avalia $\int_C 2zdz$, onde C é o caminho com início no ponto $z_0 = -1$ e final no ponto $z_1 = -1 + i$.



Caminhos e integrais curvilíneas
O teorema de Cauchy–Goursat
Homotopia de caminhos
A fórmula integral de Cauchy

Independência do caminho

Resolução

Posto que a função $f(z) = 2z$ é inteira, podemos substituir C por qualquer outro caminho C_1 mais conveniente que vá de z_0 a z_1. Neste caso escolhendo o segmento reto $x = -1$, $0 \le y \le 1$, mostrado em verde na figura, temos que $z = -1 + iy \Rightarrow dz = idy$. Então

$$\int_C 2zdz = \int_{C_1} 2zdz = \int_{C_1} 2(-1+iy)(idy) = \int_{C_1} 2(-ydy - idy)$$
$$= -2\int_0^1 ydy - 2i\int_0^1 dy = -1 - 2i.$$

Antiderivadas

Definição 7.3.4 (antiderivada)

Suponhamos que $f(z)$ é contínua num domínio D. Se existir a função $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in D$, então dizemos que $F(z)$ é a **antiderivada** de $f(z)$.

Teorema 7.3.5 (teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas)

Suponhamos que $f(z)$ é contínua num domínio D e que $F(z)$ seja a antiderivada de $f(z)$ em D. Então, para qualquer caminho C em D com início em z_0 e final em z_1 temos que

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Antiderivadas

Corolários

1. Se o caminho C é fechado, então $z_0 = z_1$ e, consequentemente
$$\oint_C f(z)dz = 0.$$
2. Se uma função contínua $f(z)$ tem uma antiderivada $F(z)$ em D, então $\int_C f(z)dz$ é independente do caminho.
3. Se $f(z)$ é contínua e $\int_C f(z)dz$ é independente do caminho em D, então $f(z)$ tem antiderivada em todo D.

Antiderivadas

Notação

Uma integral curvilínea $\int_C f(z)dz$ que é independente do caminho C é usualmente escrita como $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$, onde z_0 e z_1 são os pontos inicial e final, respetivamente, do caminho C.

Exemplo

Avalia $\displaystyle\int_C 2zdz$ entre $z_0 = -1$ e $z_1 = -1 + i$.

$f(z) = 2z$ é uma função inteira $\Rightarrow$ é contínua. Ademais, $F(z) = z^2$ é uma antiderivada de $f(z)$, posto que $F'(z) = 2z = f(z)$. Então

$$\int_{-1}^{-1+i} 2zdz = z^2\Big]_{-1}^{-1+i} = (-1+i)^2 - (-1)^2 = -1 - 2i.$$

Antiderivadas

Teorema 7.3.6 (existência de uma antiderivada)

Se $f(z)$ é holomorfa num domínio simplesmente conexo D, então $f(z)$ tem uma antiderivada em D, isto é, existe uma função $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.

Contraexemplo

$\dfrac{1}{z}$ derivada de $\operatorname{Ln} z \not\Rightarrow \operatorname{Ln} z$ antiderivada de $\dfrac{1}{z}$.

i) Suponhamos que D é todo o plano complexo sem a origem.

ii) $\dfrac{1}{z}$ é holomorfa em D (que é multiplamente conexo).

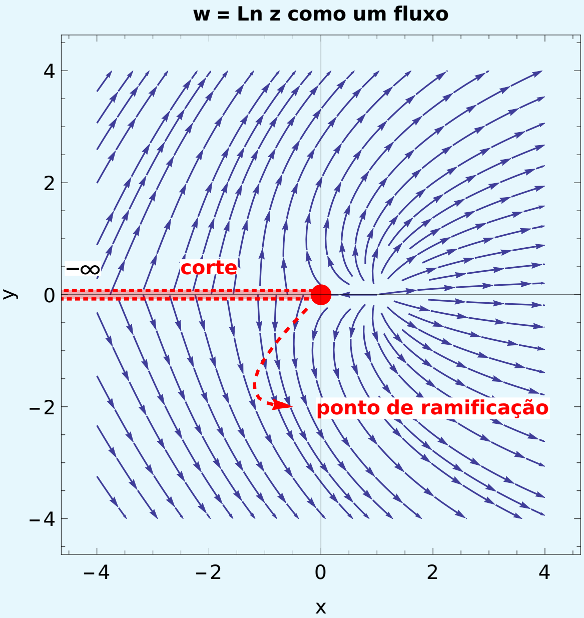
$\rightsquigarrow$

Antiderivadas

iii) Porém, $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i \neq 0.$

iv) $\operatorname{Ln} z$ não é uma antiderivada de $\dfrac{1}{z}$ em D.

v) De facto, $\operatorname{Ln} z$ não é holomorfa em D, posto que não é holomorfa no eixo real negativo.



Apartados

A fórmula integral de Cauchy

Teorema 7.4.1 (fórmula integral de Cauchy)

Seja $f(z)$ uma função holomorfa nos pontos interiores e em cada ponto de um caminho fechado simples C orientado positivamente. Se z_0 for um ponto interior qualquer de C, então

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}. \tag{3}$$

Isto é, se uma função f for holomorfa nos pontos interiores e em cada ponto de um caminho fechado simples C, então os valores de f no interior de C são completamente determinados pelos valores de f em C.

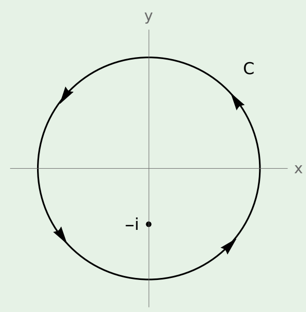
A fórmula integral de Cauchy

Exercício 7.4.2 (uso da fórmula integral de Cauchy)

Avalia $\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz$, onde C é a circunferência $|z|=2$.

Resolução

Identificamos $f(z) = z^2-4z+4$ e $z_0 = -i$. De (3) obtemos



$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3+4i) = 2\pi(-4+3i).$$

A fórmula integral de Cauchy

Teorema 7.4.3 (fórmula integral de Cauchy para derivadas)

Seja $f(z)$ uma função holomorfa nos pontos interiores e em cada ponto de um caminho fechado simples C orientado positivamente. Se z_0 for um ponto interior qualquer de C, então

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz}. \tag{4}$$

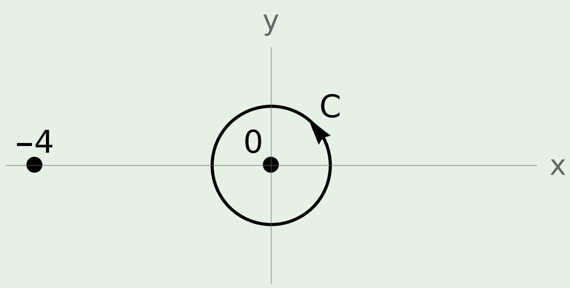
A fórmula integral de Cauchy

Exercício 7.4.4 (uso da fórmula integral de Cauchy para derivadas)

Avalia $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3} dz$, onde C é a circunferência $|z| = 1$.

Resolução

O integrando não é holomorfo em $z = 0$ e $z = -4$, mas apenas $z = 0$ está no interior do caminho.



$\rightsquigarrow$

A fórmula integral de Cauchy

O integrando pode escrever-se

$$\frac{z+1}{z^4+4z^3} = \frac{\frac{z+1}{z+4}}{z^3},$$

de modo que podemos identificar $f(z) = \dfrac{z+1}{z+4}$, $z_0 = 0$ e $n = 2$.

Usando a fórmula (4) chegamos a

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{3\pi}{32} i.$$

Caminhos e integrais curvilíneas
O teorema de Cauchy–Goursat
Homotopia de caminhos
A fórmula integral de Cauchy

A fórmula integral de Cauchy

Teorema 7.4.5 (holomorfia $\Rightarrow$ derivadas holomorfas)

Se uma função $f(z)$ for holomorfa num ponto dado, então as suas derivadas de todas as ordens também serão holomorfas nesse ponto.

Teorema 7.4.6 (teorema de Morera)

Seja $f(z)$ uma função contínua num domínio simplesmente conexo D. Se

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

para qualquer caminho fechado C em D, então $f(z)$ é holomorfa em D.

A fórmula integral de Cauchy

Teorema 7.4.7 (teorema de Liouville)

Se uma função $f(z)$ for inteira e limitada no plano complexo, então $f(z)$ é constante em todo o plano.

Teorema 7.4.8 (teorema fundamental da álgebra)

Qualquer polinómio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0$$

de grau $n \geq 1$ tem, pelo menos, um zero. Ou seja, existe, pelo menos, um ponto z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

Licença