DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 3

Equações diferenciais ordinárias de ordem superior

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Teoria geral das equações lineares

1.1. Para cada uma das seguintes famílias de funções que constituem soluções gerais de certas equações diferenciais nos intervalos mostrados, acha um membro de cada família que seja solução do problema de valor inicial indicado:

a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $(-\infty, \infty)$
$y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

b) $y = c_1 x + c_2 x \ln x$, $(0, \infty)$
$x^2 y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

1.2. Acha um intervalo que contenha $x_0 = 0$ para o qual o problema de valor inicial $(x-2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ tem uma única solução:

1.3. Dada a família biparamétrica $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$ como solução da equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, determina se se pode achar um membro da família que satisfaça as seguintes condições na fronteira:

a) $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

b) $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$.

c) $y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 1.$

d) $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$

1.4. Verifica que as seguintes funções formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial no intervalo indicado. Escreve a solução geral.

a) $y'' - y' - 12y = 0;\ f_1(x) = e^{-3x},\ f_2(x) = e^{4x};\ (-\infty, \infty).$

b) $y'' - 2y' + 5y = 0;\ f_1(x) = e^x \cos 2x,\ f_2(x) = e^x \operatorname{sen} 2x;\ (-\infty, \infty).$

c) $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0;\ f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = x^4;\ (0, \infty).$

d) $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0;\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^{-2},\ f_3(x) = x^{-2} \ln x;\ (0, \infty).$

1.5. Verifica que as seguintes famílias biparamétricas de funções são a solução geral da equação diferencial não homogénea no intervalo indicado.

a) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x;\ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + 6e^x;\ (-\infty, \infty).$

b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12;\ y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x} + x - 2;\ (-\infty, \infty).$

1.6. Verifica que $y_{p_1} = 3e^{2x}$ e $y_{p_2} = x^2 + 3x$ são, respetivamente, soluções particulares de:

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}, \text{ e}$$
$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16.$$

2 Redução de ordem

2.1. As seguintes funções $y_1(x)$ são soluções das equações diferenciais dadas. Acha uma segunda solução $y_2(x)$ utilizando a redução de ordem.

a) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{2x}.$

b) $y'' + 16y = 0;\ y_1 = \cos 4x.$

c) $9y'' - 12y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{\frac{2x}{3}}.$

2.2. As seguintes funções $y_1(x)$ são soluções das equações diferenciais dadas. Acha uma segunda solução $y_2(x)$ utilizando a fórmula de redução de ordem.

a) $x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0;\ y_1 = x^4.$

b) $(1 - 2x - x^2) y'' + 2(1 + x) y' - 2y = 0;\ y_1 = x + 1.$

3 Equações lineares homogéneas com coeficientes constantes

3.1. Acha a solução geral das seguintes equações diferenciais de segunda ordem:

a) $4y'' + y' = 0$

b) $y'' - y' - 6y = 0$

c) $y'' + 8y' + 16y = 0$

d) $12y'' - 5y' - 2y = 0$

e) $y'' + 9y = 0$

f) $y'' - 4y' + 5y = 0$

g) $3y'' + 2y' + y = 0$

3.2. Resolve os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 2$

c) $y'' + y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$

d) $y''' + 12y'' + 36y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -7$

3.3. Resolve os seguintes problemas de valores na fronteira:

a) $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$

b) $y'' + y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi/2) = 0$

3.4. Acha uma equação linear homogénea com coeficiente constantes cuja solução geral seja:

a) $y = c_1e^x + c_2e^{6x}$

b) $y = c_1 + c_2e^{3x}$

c) $y = c_1 \cos 8x + c_2 \operatorname{sen} 8x$

d) $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$

e) $y = c_1 + c_2x + c_3e^{7x}$

4 Equações lineares não homogéneas: métodos de coeficientes indeterminados e de variação de parâmetros

4.1. Resolve as seguintes equação diferenciais mediante coeficientes indeterminados:

a) $y'' + 3y' + 2y = 6$

b) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

c) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

d) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

e) $y'' - y' = -3$

f) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{\frac{x}{2}}$

g) $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$

h) $y'' + y = 2x \operatorname{sen} x$

i) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

j) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3\cos 2x$

k) $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$

l) $y^{(4)} + 2y'' + y = (x-1)^2$

4.2. Resolve os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' + 4y = -2,\ y(\pi/8) = \frac{1}{2},\ y'(\pi/8) = 2$

b) $5y'' + y' = -6x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -10$

4.3. Resolve os seguintes problemas de valores na fronteira:

a) $y'' + y = x^2 + 1,\ y(0) = 5,\ y(1) = 0$

b) $y'' + 3y = 6x,\ y(0) = 0,\ y(1) + y'(1) = 0$

4.4. Resolve as seguintes equação diferenciais mediante variação de parâmetros:

a) $y'' + y = \sec x$

b) $y'' + y = \operatorname{sen} x$

c) $y'' - y = \cosh x$

d) $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$

e) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$

f) $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$

4.5. Resolve as seguintes equações diferenciais mediante variação de parâmetros considerando as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

a) $4y'' - y = xe^{\frac{x}{2}}$

b) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

4.6. Resolve a seguinte equação diferencial de terceira ordem utilizando o método de variação de parâmetros:

$$y''' + y' = \tan x$$

5 Equações não lineares

5.1. Verifica que $y_1 = e^x$ e $y_2 = \cos x$ são soluções da seguinte equação diferencial, mas que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ não é, em geral, uma solução.

$$(y'')^2 = y^2$$

5.2. Resolve a seguinte equação diferencial não linear tendo em conta que falta a variável dependente y.

$$y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

5.3. Resolve a seguinte equação diferencial não linear tendo em conta que falta a variável independente x.

$$y'' + 2y(y')^3 = 0.$$

Soluções

1.1 a) $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

b) $y = 3x - 4x \ln x$.

1.2 $-\infty < x < 2$.

1.3 a) $y = e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)$.

b) Não é possível.

c) $y = e^x \cos x + e^{-\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen} x$.

d) $y = c_2 e^x \operatorname{sen} x$, $\forall\, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.4 a) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$.

b) $y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \operatorname{sen} 2x$.

c) $y = c_1 x^3 + c_2 x^4$.

d) $y = c_1 x + c_2 x^{-2} + c_3 x^{-2} \ln x$.

1.5 a) Verifica-se.

b) Verifica-se.

1.6 Verifica-se em ambos os dous casos.

2.1 a) $y_2 = xe^{2x}$.

b) $y_2 = \operatorname{sen} 4x$.

c) $y_2 = xe^{\frac{2x}{3}}$.

2.2 a) $y_2 = x^4 \ln |x|$.

b) $y_2 = x^2 + x + 2$.

3.1 a) $y = c_1 + c_2 e^{\frac{-x}{4}}$.

b) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

c) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$.

d) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{-1}{4}x}$.

e) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$.

f) $y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.

g) $y = e^{\frac{-x}{3}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{3} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{3} x \right)$.

3.2 a) $y = 2\cos 4x - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4x.$

b) $y = \dfrac{1}{3}\left[e^{5(t-1)} - e^{1-t}\right].$

c) $y = 0.$

d) $y = \dfrac{5}{36} - \dfrac{5}{36}e^{-6x} + \dfrac{1}{6}xe^{-6x}.$

3.3 a) $y = (1-x)\,e^{5x}.$

b) $y = 0.$

3.4 a) $y'' - 7y' + 6y = 0.$

b) $y'' - 3y' = 0.$

c) $y'' + 64y = 0.$

d) $y'' - 2y' + 2y = 0.$

e) $y''' - 7y'' = 0.$

4.1 a) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 3.$

b) $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \dfrac{6}{5}x + \dfrac{3}{5}.$

c) $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + x^2 - 4x + \dfrac{7}{2}.$

d) $y = c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x + \left(-4x^2 + 4x - \dfrac{4}{3}\right)e^{3x}.$

e) $y = c_1 + c_2e^{x} + 3x.$

f) $y = c_1e^{\frac{2}{x}} + c_2xe^{\frac{x}{2}} + 12 + \dfrac{1}{2}x^2e^{\frac{x}{2}}.$

g) $y = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x - \dfrac{3}{4}x\cos 2x.$

h) $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}x^2\cos x + \dfrac{1}{2}x\operatorname{sen} x.$

i) $y = e^{x}\left(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x\right) + \dfrac{1}{4}xe^{x}\operatorname{sen} 2x.$

j) $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{9}{25}\cos 2x + \dfrac{12}{25}\operatorname{sen} 2x.$

k) $y = c_1 + c_2x + c_3e^{6x} - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{6}{37}\cos x + \dfrac{1}{37}\operatorname{sen} x.$

l) $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + c_3x\cos x + c_4x\operatorname{sen} x + x^2 - 2x - 3.$

4.2 a) $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} 2x - \dfrac{1}{2}$.

b) $y = 200e^{\frac{-x}{5}} - 200 - 3x^2 - 30x$.

4.3 a) $y = 6\cos x - 6\cot(1)\operatorname{sen} x + x^2 - 1$.

b) $y = \dfrac{-4\operatorname{sen}\sqrt{3}x}{\operatorname{sen}\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}} + 2x$.

4.4 a) $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \ln|\cos x|\cos x + x\operatorname{sen} x$.

b) $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}x\cos x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$.

c) $y = c_3e^x + c_4e^{-x} + \dfrac{1}{2}x\operatorname{senh} x$.

d) $y = c_1e^{3x} + c_3e^{-3x} - \dfrac{1}{4}xe^{-3x}(1+3x)$.

e) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$.

f) $y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{3}\ln|\cos x|e^x\cos x + \dfrac{1}{3}xe^x\operatorname{sen} x$.

4.5 a) $y = \dfrac{3}{4}e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}} + \dfrac{1}{8}x^2e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{4}xe^{\frac{x}{2}}$.

b) $y = \dfrac{25}{36}e^{2x} + \dfrac{4}{9}e^{-4x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x} + \dfrac{1}{9}e^{-x}$.

4.6 $y = c_4 + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x\ln|\sec x - \tan x|$.

5.1 Verifica-se.

5.2 $y = \ln|\cos(c_1 - x)| + c_2$.

5.3 $\dfrac{1}{3}y^3 + c_1y = x + c_2$.