DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 7

Integração no plano complexo

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Caminhos e integrais curvilíneas

1.1. Avalia as seguintes integrais ao longo dos caminhos indicados.

a) $\displaystyle\int_C (z+3)dz$, onde C é $x=2t$, $y=4t-1$, $1 \le t \le 3$.

b) $\displaystyle\int_C z^2 dz$, onde C é $z(t)=3t+2it$, $-2 \le t \le 2$.

c) $\displaystyle\int_C \frac{1+z}{z} dz$, onde C é a semicircunferência $|z|=1$ desde $z=-i$ a $z=i$.

d) $\displaystyle\oint_C \operatorname{Re}(z)\, dz$, onde C é a circunferência $|z|=1$.

e) $\displaystyle\int_C (x^2+iy^3)dz$, onde C é a linha reta de $z=1$ a $z=i$.

f) $\displaystyle\int_C e^z dz$, onde C é o caminho poligonal formado pelos segmentos de linha de $z=0$ a $z=2$ e de $z=2$ a $z=1+\pi i$.

1.2. Avalia as seguintes integrais ao longo do caminho C dado na Figura 1.

$a)$ $\displaystyle\oint_C x dz.$

$b)$ $\displaystyle\oint_C z^2 dz.$

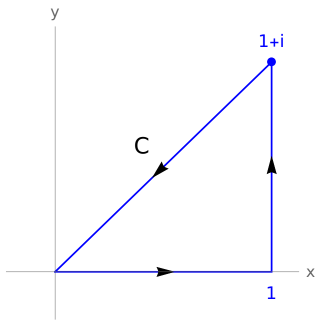

Figura 1: Caminho no exemplo 1.2

1.3. Avalia $\displaystyle\int_C (z^2 - z + 2)dz$ de i a 1 ao longo do caminho indicado na Figura 2.

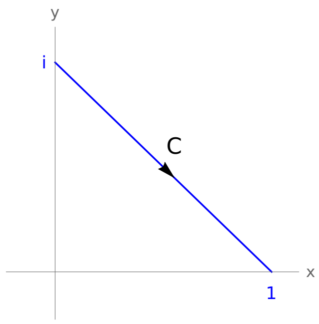

Figura 2: Caminho no exemplo 1.3

1.4. Determina um limite superior para o valor absoluto das seguintes integrais ao longo dos caminho indicados.

$a)$ $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^2+1} dz$, onde C é a circunferência $|z| = 5$.

$b)$ $\displaystyle\int_C (z^2 + 4)dz$, onde C é o segmento de linha de $z = 0$ a $z = 1 + i$.

2 O teorema de Cauchy–Goursat

2.1. Demonstra que $\oint_C f(z)dz = 0$, onde f é a função dada e C é a circunferência unidade $|z| = 1$.

a) $f(z) = z^3 - 1 + 3i$.

b) $f(z) = \dfrac{z}{2z+3}$.

c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 25)(z^2 + 9)}$.

d) $f(z) = \operatorname{tg} z$.

2.2. Avalia $\oint_C \frac{1}{z} dz$, onde C é o caminho da Figura 3.

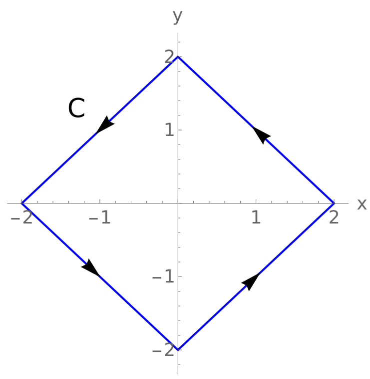

Figura 3: Caminho no exemplo 2.2

2.3. Avalia as seguintes integrais ao longo dos caminhos indicados.

a) $\oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right) dz$; $|z| = 2$.

b) $\oint_C \frac{z}{z^2 - \pi^2} dz$; $|z| = 3$.

2.4. Avalia $\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\bar{z}\right) dz$, onde C é a circunferência unidade $|z| = 1$.

3 Homotopia de caminhos

3.1. Avalia $\int_C (4z-1)dz$, onde C é o caminho mostrado na Figura 4, usando

$a)$ um caminho de integração alternativo,

$b)$ o teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas.

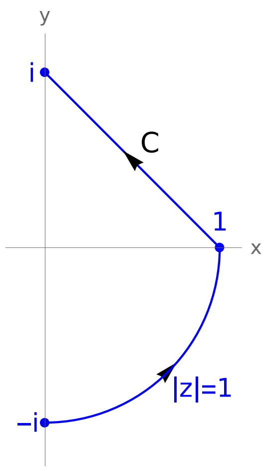

Figura 4: Caminho no exemplo 3.1

3.2. Avalia $\int_C 2z dz$, onde C é $z(t) = 2t^3 + i(t^4 - 4t^3 + 2)$, $-1 \leq t \leq 1$.

3.3. Usa o teorema fundamental do cálculo para integrais curvilíneas para avaliar as seguintes integrais. Escreve o resultado na forma $a + ib$.

$a)$ $\displaystyle\int_0^{3+i} z^2 dz$.

$b)$ $\displaystyle\int_{1-i}^{1+i} z^3 dz$.

$c)$ $\displaystyle\int_{-i/2}^{1-i} (2z+1)^2 dz$.

$d)$ $\displaystyle\int_{i/2}^{i} e^{\pi z} dz$.

$e)$ $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z dz$.

$f)$ $\displaystyle\int_C \frac{1}{z} dz$, C é o arco da circunferência $z = 4e^{it}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$g)$ $\displaystyle\int_{-4i}^{4i} \frac{1}{z^2} dz$, C é qualquer caminho que não passe pela origem.

$h)$ $\displaystyle\int_i^{1+i} z e^z dz$.

4 A fórmula integral de Cauchy

4.1. Usa as fórmulas integrais de Cauchy para avaliar as seguintes integrais ao longo dos caminhos indicados.

a) $\oint_C \frac{4}{z-3i}dz$; $|z|=5$.

b) $\oint_C \frac{e^z}{z-\pi i}dz$; $|z|=4$.

c) $\oint_C \frac{z^2-3z+4i}{z+2i}dz$; $|z|=3$.

d) $\oint_C \frac{z^2}{z^2+4}dz$; a) $|z-i|=2$, b) $|z+2i|=1$.

e) $\oint_C \frac{z^2+4}{z^2-5iz-4}dz$; $|z-3i|=1.3$.

f) $\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}dz$; $|z-i|=1$.

g) $\oint_C \frac{\cos 2z}{z^5}dz$; $|z|=1$.

h) $\oint_C \frac{2z+5}{z^2-2z}dz$; a) $|z|=\frac{1}{2}$, b) $|z+1|=2$, c) $|z-3|=2$, d) $|z+2i|=1$.

i) $\oint_C \frac{z+2}{z^2(z-1-i)}dz$; a) $|z|=1$, b) $|z-1-i|=1$.

j) $\oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4}-\frac{z^4}{(z-i)^3}\right)dz$; $|z|=6$.

Soluções

1.1 a) $-28 + 84i$.

b) $-48 + \frac{736}{3}i$.

c) $(2+\pi)i$.

d) $i\pi$.

e) $-\frac{7}{12} + \frac{1}{12}i$.

f) $-1 - e$.

1.2 a) $\frac{1}{2}i$.

b) 0.

1.3 $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$.

1.4 a) $\frac{5\pi}{12}e^5$.

b) $6\sqrt{2}$.

2.1 a) $f(z)$ é inteira. Teorema Cauchy–Goursat $\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$.

b) $f(z)$ é holomorfa em $|z| = 1$. Teorema C–G $\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$.

b) $f(z)$ é holomorfa em $|z| = 1$. Teorema C–G $\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$.

2.2 $2\pi i$.

2.3 a) $2\pi i$.

b) 0.

2.4 $-6\pi i$.

3.1 a) $-2i$.

b) $-2i$.

3.2 $48 + 24i$

3.3 a) $6 + \frac{26}{3}i$.

b) 0.

c) $-\frac{7}{6} - \frac{22}{3}i$.

d) $-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}i$.

e) 0.

f) πi.

g) $\frac{1}{2}i$.

h) $(\operatorname{sen} 1 + \cos 1 - e \operatorname{sen} 1) + i(\operatorname{sen} 1 - \cos 1 + e\cos 1)$.

4.1 a) $8\pi i$.

b) $-2\pi i$.

c) $-\pi(20+8i)$.

d) A) -2π. B) 2π.

e) -8π.

f) $-2\pi e^{-1} i$.

g) $\dfrac{4\pi}{3} i$.

h) A) $-5\pi i$, B) $-5\pi i$, C) $9\pi i$. D) 0.

i) A) $-\pi(3+i)$. B) $\pi(3+i)$.

j) $\pi\left(\dfrac{8}{3}+12i\right)$.

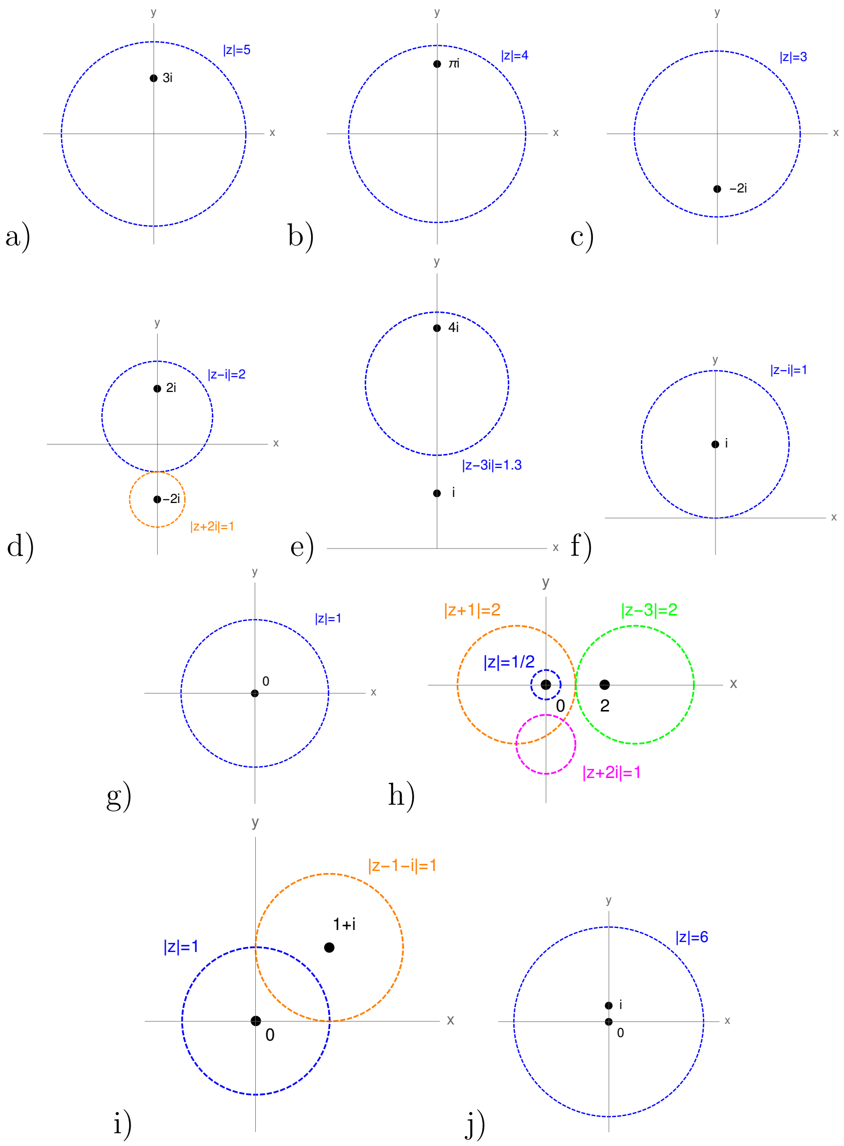

Figura 5: Exemplo 4.1