DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica (curso 2020–2021)

Seleção de problemas de exame comentados

I. Equações diferenciais

Instruções: Resolver os problemas utilizando a metodologia descrita nas aulas expositivas e de seminário. Os cálculos deverão ir acompanhados de comentários explicando os passos realizados.

1. Obtém uma solução explícita do problema de valor inicial

$$yy' = x - 1; \quad y(0) = -2,$$

e determina o correspondente intervalo de definição.

Resolução

Esta é uma **equação em variáveis separáveis** que podemos integrar do seguinte modo,

$$\begin{aligned} y\frac{dy}{dx} &= x - 1 \\ ydy &= (x-1)dx \\ \int ydy &= \int (x-1)dx \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} - x + c \\ y^2 &= x^2 - 2x + c. \end{aligned} \tag{1}$$

Da condição $y(0) = -2$ obtemos

$$(-2)^2 = 0^2 - 2 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 4.$$

Substituindo este valor em (1) obtemos

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 4},$$

Porém, a única **solução** que é compatível com a condição inicial (conforme à qual $y < 0$ em $x = 0$) é a que corresponde à solução negativa da raiz quadrada, isto é,

$$\boxed{y = -\sqrt{x^2 - 2x + 4}}.$$

Além disso, dado que $x^2 - 2x + 4 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, o **intervalo de definição** é $(-\infty, \infty)$.

2. Resolve a equação diferencial

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 3.$$

Resolução

Escrevemos esta equação diferencial **linear** de primeira ordem em forma padrão $y' + P(x)y = f(x)$, isto é,

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x}. \tag{2}$$

Identificamos $P(x) = \dfrac{2}{x}$ e calculamos o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\displaystyle\int P(x)dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\displaystyle\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Logo, multiplicando a equação (2) por este fator integrante e integrando chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[x^2y\right] &= x^2\frac{3}{x} \\ \frac{d}{dx}\left[x^2y\right] &= 3x \\ \int \frac{d}{dx}\left[x^2y\right]dx &= \int 3xdx \\ x^2y &= \frac{3x^2}{2} + c. \end{aligned}$$

A **solução geral** é

$$\boxed{y = \frac{3}{2} + cx^{-2}}.$$

3. Verifica que a equação

$$\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right) dx = (1 - \ln x)dy$$

é exata e resolve-a.

Resolução

Sejam

$$\begin{cases} M(x,y) = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x}, \\ N(x,y) = -1 + \ln x. \end{cases}$$

Como as derivadas parciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

são iguais, **a equação é exata**. Portanto, existirá uma função $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Integrando chegamos a

$$f = \int N dy = \int (-1 + \ln x)dy \Rightarrow f = -y + y \ln x + h(x), \tag{3}$$

onde a função arbitrária $h(x)$ é a *constante* de integração. A fim de obter $h(x)$ derivamos (3) com respeito a x,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + h'(x). \tag{4}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 1 + \ln x + \frac{y}{x}. \tag{5}$$

Tendo em conta (4) e (5) obtemos

$$\frac{y}{x} + h'(x) = 1 + \ln x + \frac{y}{x} \Leftrightarrow h'(x) = 1 + \ln x.$$

Integrando chegamos a

$$h(x) = \int (1 + \ln x)dx = x + (x \ln x - x) \Rightarrow h(x) = x \ln x$$

Então, substituindo $h(x)$ em (3) obtemos

$$-y + y \ln x + x \ln x = c \Rightarrow y(\ln x - 1) + x \ln x = c,$$

donde resulta a **solução geral** explícita

$$\boxed{y = \frac{c - x \ln x}{\ln x - 1}}.$$

4. Resolve o problema de valor inicial

$$(x^2 + y^2 - 5)dx = (y + xy)dy; \quad y(0) = 1,$$

determinando o fator integrante apropriado.

Ajuda: $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x)^3}dx = -\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} + \ln(1+x).$

Resolução

Sejam

$$\begin{cases} M(x,y) = x^2 + y^2 - 5, \\ N(x,y) = -(y + xy). \end{cases}$$

Como as derivadas parciais

$$\begin{cases} M_y = 2y, \\ N_x = -y, \end{cases}$$

não são iguais, **a equação não é exata**. No entanto, como a expressão

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y - (-y)}{-(y + xy)} = \frac{-3}{1+x}$$

só depende de x, existe um fator integrante $\mu(x)$ dado por

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\displaystyle\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} \\ &= e^{\displaystyle\int \frac{-3}{1+x}dx} \\ &= e^{-3\ln 1+x} = e^{\ln(1+x)^{-3}} \\ &= \frac{1}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

Consequentemente, multiplicando a equação diferencial inicial por este fator integrante obtemos uma equação diferencial exata na qual

$$\begin{cases} \mathcal{M}(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 5}{(1+x)^3}, \\ \mathcal{N}(x,y) = \dfrac{-(y + xy)}{(1+x)^3} = \dfrac{-y}{(1+x)^2}. \end{cases}$$

Como agora as derivadas parciais

$$\begin{cases} \mathcal{M}_y = \dfrac{2y}{(1+x)^3}, \\ \mathcal{N}_x = \dfrac{2y}{(1+x)^3}, \end{cases}$$

são iguais, **a equação é exata**. Portanto, existirá uma função $f(x, y)$ tal que

$$f_y = \mathcal{N}.$$

Integrando chegamos a

$$f = \int \mathcal{N} dy = \int \frac{-y}{(1+x)^2} dy \Rightarrow f = -\frac{1}{2} \frac{y^2}{(1+x)^2} + h(x), \tag{6}$$

onde a função arbitrária $h(x)$ é a *constante* de integração. A fim de obter $h(x)$ derivamos (6) com respeito a x,

$$f_x = -\frac{y^2}{2}(-2)(1+x)^{-3} + h'(x) = \frac{y^2}{(1+x)^3} + h'(x). \tag{7}$$

Por outro lado, temos que

$$f_x = \mathcal{M} = \frac{x^2 + y^2 - 5}{(1+x)^3}. \tag{8}$$

Tendo em conta (7) e (8) obtemos

$$\frac{y^2}{(1+x)^3} + h'(x) = \frac{x^2 + y^2 - 5}{(1+x)^3} \Leftrightarrow h'(x) = \frac{x^2 - 5}{(1+x)^3}.$$

Integrando (e utilizando a integral que nos indicam no enunciado) chegamos a

$$\begin{aligned} h(x) &= \int \frac{x^2 - 5}{(1+x)^3} dx = \int \frac{x^2}{(1+x)^3} dx + \int \frac{-5}{(1+x)^3} dx \\ &= -\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} + \ln(1+x) + \frac{5}{2(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Então, substituindo $h(x)$ em (6) obtemos a **solução geral**

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{y^2}{(1+x)^2} - \frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} + \ln(1+x) + \frac{5}{2(1+x)^2} = c \\ -\frac{y^2}{2(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} + \ln(1+x) = c. \end{aligned}$$

Agora, considerando a condição inicial $y(0) = 1$ obtemos a constante de integração

$$\begin{aligned} -\frac{1^2}{2(1+0)^2} + \frac{2}{(1+0)^2} + \frac{2}{1+0} + \ln(1+0) &= c \\ \Rightarrow \frac{-1}{2} + 2 + 2 + 0 = c \Rightarrow c &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a **solução do problema de valor inicial** é

$$\boxed{-\frac{y^2}{2(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} + \ln(1+x) = \frac{7}{2}}.$$

5. Resolve a equação diferencial

$$ydx = 2(x+y)dy$$

utilizando a substituição apropriada.

Resolução

Notamos que temos uma equação **homogénea**. Considerando então a substituição $x = vy$, de modo que

$$dx = vdy + ydv,$$

obtemos à equação separável

$$\begin{aligned} y(vdy + ydv) - 2(vy + y)dy &= 0 \\ ydv - (v+2)dy &= 0 \\ \frac{dv}{v+2} - \frac{dy}{y} &= 0. \end{aligned}$$

Integrando chegamos a

$$\int \frac{dv}{v+2} - \int \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln(v+2) - \ln y = c_1.$$

Desfazendo agora a substituição, $v = \dfrac{x}{y}$, obtemos

$$\ln \frac{x}{y} + 2 - \ln y = c_1,$$

tomando exponenciais chegamos à **solução geral**

$$\boxed{x + 2y = cy^2}.$$

6. Dada a família biparamétrica $y = c_1x^2+c_2x^4+3$, como solução da equação diferencial $x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, determina se é possível achar um membro da família que satisfaça as seguintes equações na fronteira:

   a) $y(-1) = 0$, $y(1) = 4$.

   b) $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

   c) $y(0) = 3$, $y(1) = 0$.

   d) $y(1) = 3$, $y(2) = 15$.

Resolução

a)

Temos que

$$y(-1) = 0 \Leftrightarrow y(-1) = c_1(-1)^2 + c_2(-1)^4 + 3 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + 3 = 0,$$
$$y(1) = 4 \Leftrightarrow y(1) = c_1(1)^2 + c_2(1)^4 + 3 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + 3 = 4,$$

de modo que é **impossível** que se satisfaçam as duas condições ao mesmo tempo.

b)

Com a primeira condição chegamos a

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow y(0) = c_1(0)^2 + c_2(0)^4 + 3 \Leftrightarrow 3 = 1,$$

uma contradição. Concluímos assim que é **impossível** que exista uma solução que satisfaça esta condição.

c)

Temos que

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow y(0) = c_1(0)^2 + c_2(0)^4 + 3 \Leftrightarrow 3 = 3,$$
$$y(1) = 0 \Leftrightarrow y(1) = c_1(1)^2 + c_2(1)^4 + 3 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + 3 = 0.$$

Podemos considerar que c_1 toma qualquer valor arbitrário e que $c_2 = -(c_1 + 3)$. Assim, as **soluções** serão

$$y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3 \Rightarrow \boxed{y = c_1x^2 - (c_1 + 3)x^4 + 3}.$$

7. Sabendo que $y_1 = xe^{-x}$ é uma solução da equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

determina uma segunda solução utilizando a redução de ordem.

Resolução

Consideramos uma solução do tipo

$$y_2 = u(x)y_1(x) \Leftrightarrow y_2 = u(x)xe^{-x}, \tag{9}$$

de maneira que as suas derivadas são

$$\begin{aligned} y_2' &= u(-xe^{-x} + e^{-x}) + xe^{-x}u' \\ &= xe^{-x}u' + (1-x)e^{-x}u, \\ y_2'' &= (-e^{-x} - (1-x)e^{-x})u + (1-x)e^{-x}u' + (e^{-x} - xe^{-x})u' + xe^{-x}u'' \\ &= xe^{-x}u'' + 2(1-x)e^{-x}u' + (x-2)e^{-x}u. \end{aligned}$$

Substituindo y_2 e as suas derivada na equação diferencial obtemos

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y &= 0 \\ xe^{-x}u'' + 2(1-x)e^{-x}u' + (x-2)e^{-x}u & \\ +2[xe^{-x}u' + (1-x)e^{-x}u] + uxe^{-x} &= 0 \\ xe^{-x}u'' + 2e^{-x}u' &= 0 \end{aligned}$$

Chegamos assim à equação diferencial

$$u'' + \frac{2}{x}u' = 0.$$

Se tomamos $w = u'$ obtemos a equação diferencial linear de primeira ordem

$$w' + \frac{2}{x}w = 0,$$

que tem como fator integrante

$$\mu(x) = e^{\displaystyle\int P(x)dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\displaystyle\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2,$$

onde tomamos $P(x) = \dfrac{2}{x}$.

Multiplicando a equação diferencial por este fator integrante obtemos

$$\frac{d}{dx}[x^2 w] = 0 \Rightarrow x^2 w = c_1.$$

Desfazendo a mudança de variável e integrando de novo chegamos a

$$x^2 u' = c_1 \Rightarrow u' = \frac{c_1}{x^2} \Rightarrow u = \frac{c}{x},$$

onde $c = -c_1$.
Tomando agora, por simplicidade, $c = 1$, obtemos uma **segunda solução** da equação diferencial original a partir de (9),

$$y_2 = u(x)y_1(x) \Rightarrow y_2 = \frac{1}{x}xe^{-x} \Rightarrow \boxed{y_2 = e^{-x}}.$$

8. Resolve o problema de valores na fronteira

$$y'' + 4y = 0; \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Resolução

A equação auxiliar desta **equação homogénea com coeficientes constantes** é

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{-4} \Rightarrow m = \pm 2i,$$

cuja solução é da forma $m = \alpha \pm \beta i$, isto é, constituída por duas raízes complexas conjugadas.
Consequentemente, a solução geral será da forma

$$y = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x \right),$$

sendo $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, isto é,

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Agora, considerando as condições na fronteira chegamos a

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Leftrightarrow y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 \Rightarrow c_1 = 0, \\ y(\pi) = 0 &\Leftrightarrow y(\pi) = c_1 \cos 2\pi + c_2 \operatorname{sen} 2\pi \Rightarrow c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Então, a **solução geral** é

$$\boxed{y = c_2 \operatorname{sen} 2x}.$$

9. Escreve a equação linear homogénea com coeficientes constantes cuja solução geral é

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-4x}.$$

Resolução

Dado que a solução geral de uma equação deste tipo é

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x},$$

neste caso temos que

$$\begin{cases} m_1 = & -5, \\ m_2 = & -4. \end{cases}$$

Por conseguinte, a equação auxiliar da equação homogénea será

$$\begin{aligned} (m - m_1)(m - m_2) = 0 &\Leftrightarrow (m + 5)(m + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 9m + 20 = 0. \end{aligned}$$

Em vista disso, a **equação linear homogénea** será

$$\boxed{y'' + 9y' + 20 = 0}.$$

10. Resolve a equação diferencial

$$y'' - y' = -3$$

mediante coeficientes indeterminados.

Resolução

A equação auxiliar da correspondente equação homogénea é

$$m^2 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 - 1 = 0 \Rightarrow m_2 = 1. \end{cases}$$

Neste caso, em que se obtêm duas raízes reais diferentes, a **solução geral da equação homogénea** é dada por

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \\ y_c &= c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{1 \cdot x} \\ y_c &= c_1 + c_2 e^x. \end{aligned} \tag{10}$$

Procuramos agora, mediante coeficientes indeterminados, uma solução particular da equação não homogénea da forma

$$y_p = Ax \Rightarrow \begin{cases} y_p' &= A, \\ y_p'' &= 0. \end{cases}$$

Substituindo y_p e as suas derivadas na equação diferencial obtemos

$$0 - A = -3 \Leftrightarrow A = 3.$$

Logo, a **solução particular da equação não homogénea** será

$$y_p = 3x. \tag{11}$$

Finalmente, a **solução geral da equação não homogénea** virá dada, a partir de (10) e (11), por

$$y = y_c + y_p \Rightarrow \boxed{y = c_1 + c_2 e^x + 3x}.$$

11. Resolve a equação diferencial

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

mediante variação de parâmetros.

Resolução

A equação auxiliar da correspondente equação homogénea é

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i,$$

cuja solução é da forma $m = \alpha \pm \beta i$, isto é, constituída por duas raízes complexas conjugadas.
Então, a **solução geral da equação homogénea** será da forma

$$y_c = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x \right),$$

sendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, isto é,

$$y_c = c_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen} x}_{y_2}. \tag{12}$$

Procuramos agora, mediante variação de parâmetros, uma solução particular da equação não homogénea da forma

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x). \tag{13}$$

Obtemos o wronskiano de y_1 e y_2 como

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Tomando $f(x) = \operatorname{tg} x$ na equação diferencial original chegamos a

$$\begin{cases} u_1' &= \dfrac{W_1}{W}, \\ u_2' &= \dfrac{W_2}{W}, \end{cases} \tag{14}$$

onde

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x, \\ W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \cos x \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Substituindo os wronskianos em (14) obtemos

$$\begin{cases} u_1' &= \dfrac{W_1}{W} = -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = \dfrac{\cos^x -1}{\cos x} = \cos x - \sec x, \\ u_2' &= \dfrac{W_2}{W} = \cos x \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Integrando estas equações obtemos as funções

$$\begin{cases} u_1 = \displaystyle\int (\cos x - \sec x)\, dx \Rightarrow & u_1 &= \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|, \\ u_2 = \displaystyle\int \operatorname{sen} x dx \Rightarrow & u_2 &= -\cos x. \end{cases}$$

Logo, substituindo u_1 e u_2 em (13) chegamos a uma **solução particular para a equação não homogénea**,

$$y_p = \cos x\,(\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) - \cos x \operatorname{sen} x. \tag{15}$$

Finalmente, a **solução geral da equação não homogénea** virá dada, a partir de (12) e (15), por

$$\begin{aligned} &y = y_c + y_p \\ &y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \cos x\,(\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) - \cos x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|}.$$

12. Resolve a equação diferencial

$$(y+1)y'' = (y')^2.$$

Resolução

Esta é uma equação **não linear** na qual falta a variável independente x.
Considerando a mudança de variável

$$u = y' \Rightarrow y'' = u\frac{du}{dy} \tag{16}$$

a equação transforma-se em

$$(y+1)u\frac{du}{dy} = u^2.$$

Por separação de variáveis chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= \frac{dy}{y+1} \\ \ln|u| &= \ln|y+1| + \ln c_1 \\ u &= c_1(y+1). \end{aligned}$$

Agora, substituindo u na expressão considerada para a mudança de variável (16) chegamos a

$$\begin{aligned} y' = u \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= c_1(y+1) \\ \frac{dy}{y+1} &= c_1 dx \\ \ln|y+1| &= c_1 x + c_2 \\ y+1 &= c_3 e^{c_1 x}, \end{aligned}$$

onde $c_3 = e^{c_2}$.
Portanto, a **solução geral** é

$$\boxed{y = -1 + c_3 e^{c_1 x}}.$$

13. A população de bactérias num cultivo aumenta com uma rapidez proporcional à quantidade de bactérias presentes num instante t. Depois de 3 horas observa-se que há 400 bactérias; depois de 10 horas há 2 000. Qual era a quantidade inicial de bactérias?

Resolução

Tomemos $P = P(t)$ como a população de bactérias num instante t e P_0 a sua quantidade inicial. A equação diferencial que modela o aumento de bactérias considerando que este é proporcional ao número de bactérias presentes num tempo t é

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t),$$

cuja solução geral é

$$\frac{dP}{P} = k\,dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int k\,dt \Rightarrow \ln P = kt + c \tag{17}$$

Considerando a condição inicial $P(0) = P_0$ em (17) temos que

$$\ln P_0 = k \cdot 0 + c \Rightarrow c = \ln P_0$$

A partir de (17) e do valor da constante c obtemos a solução

$$\begin{aligned} \ln P &= kt + \ln P_0 \\ \ln P - \ln P_0 &= kt \\ \ln \frac{P}{P_0} &= kt \\ P &= P_0 e^{kt}. \end{aligned} \tag{18}$$

Utilizando as condições $P(3) = 400$ e $P(10) = 2\,000$ em (18) obtemos

$$\begin{cases} 400 &= P_0 e^{3k}, \\ 2\,000 &= P_0 e^{10k}. \end{cases} \tag{19}$$

Resolvendo este sistema de duas equações, com incógnitas P_0 e k, obtemos $k = \dfrac{\ln 5}{7}$. Substituindo este valor em, por exemplo, a primeira das equações em (19) chegamos a

$$P_0 = \frac{400}{e^{\frac{3\ln 5}{7}}} \Rightarrow \boxed{P_0 \approx 201 \text{ bactérias}}.$$

14. Luzia combina um encontro com Gabriel para tomarem algo num bar às 17:00. Ela é a primeira em chegar e pede um café. A temperatura no local é agradável, de uns 22 °C. O barista serve o café quando são as 17:07, a uma temperatura ótima, como ele mesmo comenta, de 82 °C. O tempo vai passando mas Gabriel não acaba de chegar. Às 17:22 o barista recomenda-lhe a Luzia que experimente o sabor do café pois este deveria ter alcançado já uma temperatura ideal de 34 °C.
Finalmente, Luzia decide não prolongar mais a sua espera e abandona o bar quando o seu café está praticamente *frio*, a uns 23 °C. A que horas saiu Luzia do bar?

Resolução

Tomaremos como modelo a **lei de resfriamento de Newton** cuja formulação matemática é dada pela equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

que nos indica que a variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e a vizinhança em que se situa.
Esta pode integrar-se facilmente em variáveis separáveis

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T - T_m} &= k\,dt \\ \ln(T - T_m) &= kt + c_1 \\ T - T_m &= e^{kt+c_1} \\ T &= T_m + ce^{kt}, \end{aligned} \tag{20}$$

onde $c = e^{c_1}$.
Consideramos agora as seguintes condições, em que tomamos como origem do tempo o instante em que se serve o café, isto é, as 17:07,

$$\begin{cases} T(0 \text{ min}) &= 82 \text{ °C}, \\ T(15 \text{ min}) &= 34 \text{ °C}. \end{cases}$$

Substituindo-as em (20) obtemos os valores das constantes c e k

$$\begin{cases} 82 &= 22 + ce^{k\cdot 0} \Rightarrow c = 82 - 22 \Rightarrow c = 60, \\ 34 &= 22 + ce^{k\cdot 15} \Rightarrow e^{15k} = \dfrac{34-22}{60} \Rightarrow k = \dfrac{\ln 0.2}{15}, \end{cases}$$

De (20) também obtemos o tempo t que o café tardará em alcançar uma temperatura T, neste caso os 23 °C,

$$\begin{aligned}
T &= T_m + ce^{kt} \\
e^{kt} &= \frac{T - T_m}{c} \\
t &= \frac{\ln\left(\dfrac{T - T_m}{c}\right)}{k} \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\dfrac{23 - 22}{60}\right)}{\dfrac{\ln 0.2}{15}} \approx 38 \text{ min.}
\end{aligned}$$

Concluímos assim que **Luzia saiu do bar às 17:45**.

15. Um tanque contém 1 200 litros de uma salmoura constituída por 25 kg de sal dissolvida em água. A partir de um certo instante de tempo começa a entrar no tanque uma salmoura contendo 0.25 kg de sal por litro a um ritmo de 12 l/min; ademais, também começa a sair a mistura a um ritmo de 8 l/min. Agora suponhamos que a capacidade máxima do tanque, que é aberto na parte superior, é de 1 600 litros.

   a) Quando começará a derramar o tanque?

   b) Que quantidade de sal haverá no tanque quando comece a derramar?

   c) Suponhamos que, apesar do derramamento, a salmoura continua a entrar à mesma velocidade de 12 l/min e a solução misturada a sair a 8 l/min. Determina a quantidade de sal que há no tanque quando $t = 150$ min.

   d) Determina a quantidade de sal que há no tanque conforme $t \to \infty$.

   e) Qual é a gráfica de $Q(t)$ no intervalo $[0, 600]$?

Resolução

a)

Inicialmente o tanque contém 1 200 litros de água. Dado que o ritmo de entrada de salmoura é de 12 l/min e o de saída da mistura de 8 l/min, o ritmo neto será

$$\Delta r = r_{\text{entrada}} - r_{\text{saída}} = 12\ \frac{\text{l}}{\text{min}} - 8\ \frac{\text{l}}{\text{min}} = 4\ \frac{\text{l}}{\text{min}}.$$

Por outro lado, o volume restante no tanque é

$$\Delta v = v_{\text{total}} - v_{\text{ocupado}} = 1\,600 - 1\,200 = 400\ \text{l}.$$

Assim, o **instante de tempo em que o tanque começará a derramar** será

$$t = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{400\ \text{l}}{4\ \dfrac{\text{l}}{\text{min}}} \Rightarrow \boxed{t = 100\ \text{min}}.$$

b)

A equação diferencial que determina a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque é

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= R_{\text{entrada}} - R_{\text{saída}} \\ &= 0.25\ \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 12\ \frac{\text{l}}{\text{min}} - \frac{Q(t)}{1\,200 + (12-8)t}\ \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 8\ \frac{\text{l}}{\text{min}} \\ &\Rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} = 3 - \frac{8Q(t)}{1\,200 + 4t}.\end{aligned}$$

Esta é uma equação linear de primeira ordem que podemos expressar como

$$Q' = 3 - \frac{8Q}{1\,200 + 4t} \Leftrightarrow Q' + \frac{2}{300+t}\ Q = 3. \tag{21}$$

Podemos então calcular o fator integrante $\mu(t)$ que a fará integrável

$$\mu(t) = e^{\displaystyle\int P(t)dt},$$

onde $P(t) = \dfrac{2}{300+t}$, de maneira que

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\displaystyle\int \frac{2}{300+t}dt} \\ &= e^{2\ln|300+t|} \\ &= e^{\ln|300+t|^2} \\ &= |300+t|^2.\end{aligned}$$

Multiplicando a equação diferencial (21) por este fator integrante chegamos a

$$\frac{d}{dt}[(300+t)^2 \cdot Q] = 3 \cdot (300+t)^2.$$

Integrando

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dt}[(300+t)^2 \cdot Q]dt &= \int 3 \cdot (300+t)^2 dt \\ (300+t)^2 \cdot Q &= 3\frac{(300+t)^3}{3} + c \\ Q &= 300 + t + c\,(300+t)^{-2}.\end{aligned} \tag{22}$$

Agora podemos considerar a condição inicial $Q(0) = 25$ kg na expressão (22), de maneira que

$$25 = 300 + 0 + c\,(300 + 0)^{-2} \Rightarrow c = -2.475 \cdot 10^7.$$

Assim, a quantidade de sal virá determinada por

$$Q = 300 + t - 2.475 \cdot 10^7\,(300 + t)^{-2}, \qquad 0 \leq t \leq 100. \tag{23}$$

Então, a **quantidade de sal no tanque quando este derrama** será

$$Q(100) = 300 + 100 - 2.475 \cdot 10^7\,(300 + 100)^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(100) = 245.312 \text{ kg}}.$$

c)

Uma vez que o tanque derrama, a velocidade de saída da salmoura será igual à de entrada, isto é, 12 l/min. Assim, a quantidade de sal estará determinada pela equação diferencial linear

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= R_{\text{entrada}} - R_{\text{saída}}\\ &= 0.25\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 12\,\frac{\text{l}}{\text{min}} - \frac{Q(t)}{1\,600}\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 12\,\frac{\text{l}}{\text{min}}\\ \Rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} &= 3 - \frac{3Q(t)}{400},\end{aligned}$$

mais a condição inicial $Q(100) = 245.312$ kg.

Para resolvermos este problema de valor inicial

$$Q' + \frac{3}{400}Q = 3, \tag{24}$$

calculamos o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{400}dt} = e^{\frac{3t}{400}}.$$

Multiplicando a equação diferencial (24) por este fator integrante chegamos a

$$\frac{d}{dt}[e^{\frac{3t}{400}} \cdot Q] = 3 \cdot e^{\frac{3t}{400}}.$$

Integrando

$$\int \frac{d}{dt}[e^{\frac{3t}{400}} \cdot Q]dt = \int 3 \cdot e^{\frac{3t}{400}} dt$$

$$e^{\frac{3t}{400}} \cdot Q = 3\frac{400}{3}e^{\frac{3t}{400}} + c$$

$$Q = 400 + ce^{-\frac{3t}{400}}. \tag{25}$$

Agora podemos considerar a condição inicial $Q(100) = 245.312$ kg na expressão (25), de maneira que

$$245.312 = 400 + ce^{-\frac{3 \cdot 100}{400}} \Rightarrow c = -327.474.$$

Assim, a quantidade de sal virá determinada por

$$Q = 400 - 327.474\, e^{\frac{-3t}{400}}, \qquad 100 < t < \infty. \tag{26}$$

Então, a **quantidade de sal para** $t = 150$ **min** será

$$\boxed{Q(150) = 293.685 \text{ kg}}.$$

d)

Por outro lado, da expressão (26) podemos obter a **quantidade de sal para** $t \to \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \left(400 - 327.474\, e^{\frac{-3t}{400}} \right) \Rightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} Q(t) = 400 \text{ kg}},$$

resultado que se poderia ter sido igualmente obtido considerando que o ritmo de entrada é de 0.25 kg/l e que o tanque contém 1 600 l, isto é, $0.25 \cdot 1\,600 = 400$ kg de sal.

e)

A **gráfica de** $Q(t)$ vem determinada pela equação (23) para o intervalo $(0 \leq t \leq 100)$ e pela equação (26) para o intervalo $(100 < t < \infty)$.