USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica (curso 2020–2021)

Compêndio de fórmulas

I. Equações diferenciais

Primeira ordem

Equações separáveis

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

(i) Integrar $\boxed{h(y)^{-1}dy = g(x)dx}$

Equações lineares

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

(i) Dividir por $a_1(x) \longrightarrow$ forma padrão: $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

(ii) Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

(iii) Integrar $\boxed{\dfrac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)f(x)}$

Equações exatas

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

$$\text{equação exata} \Leftrightarrow M_y = N_x$$

(i) $f_x = M \Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$

(ii) $f_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$

$\Rightarrow g'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \longrightarrow g(y)$

(iii) Substituir $g(y)$ em (i) $\longrightarrow \boxed{f(x,y)=c}$

Nota: alternativamente pode começar-se com $f_y = N$ e integrar com respeito a y.

Equações redutíveis a exatas: *fatores integrantes*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \text{(não exata)}$$
$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad \text{(exata)}$$

(i) Fatores integrantes:

Se $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ não depende de $y \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx}$

Se $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ não depende de $x \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}dy}$

(ii) Resolver como uma equação exata

Equações homogéneas

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

$$\text{equação homogénea} \Leftrightarrow f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

(i) Substituir $u = \dfrac{y}{x}$ ou $v = \dfrac{x}{y}$

(ii) Resolver como uma equação separável

Segunda ordem (ou superior)

Equações lineares homogéneas com coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$
$$a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, i = 0, 1, \ldots, n$$

Caso particular ($n = 2 \longrightarrow ay'' + by' + cy = 0$)

(i) Equação auxiliar: $am^2 + bm + c = 0 \longrightarrow m_1, m_2$

(ii) Casos:

- $m_1 \neq m_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$
- $m_1 = m_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}}$
- $m_1 = \alpha + \beta i, m_2 = \overline{m}_1 \in \mathbb{C} \longrightarrow \boxed{y = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x \right)}$

Equações lineares não homogéneas: *método de coeficientes indeterminados*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x),$$
$$a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, i = 0, 1, \ldots, n$$
$$g(x) \sim \text{polinómios, exponenciais, senos e cossenos}$$

Caso particular ($n = 2 \longrightarrow ay'' + by' + cy = g(x)$)

(i) Resolver a equação homogénea
$ay'' + by' + cy = 0 \longrightarrow \boxed{y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

(ii) Obter, supondo que y_p tem a forma de $g(x)$, uma solução particular (mediante coeficientes indeterminados) da equação não homogénea $ay'' + by' + cy = g(x) \longrightarrow \boxed{y_p}$

(iii) $\boxed{y = y_c + y_p}$

Equações lineares não homogéneas: ***método de variação de parâmetros***

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$
$$a_n(x) \neq 0, i = 0, 1, \ldots, n$$

Caso particular ($n = 2 \longrightarrow a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$)

(i) Dividir por $a_2(x) \longrightarrow$ forma padrão: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

(ii) Resolver a equação homogénea
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \longrightarrow \boxed{y_c = c_1y_1 + c_2y_2}$

(iii) Obter, supondo que $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, uma solução particular da equação não homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \longrightarrow \boxed{y_p}$

(a) Calcular $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

(b) Calcular $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$ e $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$

(c) Integrar

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \longrightarrow u_1 \\ u_2' &= \frac{W_1}{W} \longrightarrow u_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{y_p = u_1y_1 + u_2y_2}$$

(iv) $\boxed{y = y_c + y_p}$

Equações não lineares

$$F(x, y, y', y'') = 0 \longrightarrow F(x, y', y'') = 0$$
$$F(x, y, y', y'') = 0 \longrightarrow F(y, y', y'') = 0$$

(i) Substituir $u = y'$

(ii) Resolver a equação de primeira ordem

– Redução de ordem –

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

dada a solução $y_1(x) \longrightarrow y_2(x) = u(x)y_1(x)$ também é solução

(i) $y_2(x)$ obtém-se por substituição na equação diferencial ou, diretamente, como

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

Métodos numéricos

Método de Euler

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)},$$

$$x_n = x_0 + nh, \text{ com } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{Erro de discretização local: } |\varepsilon_n| \leq M\,\frac{h^2}{2}, \text{ com } M = \max_{x_n<\xi<x_{n+1}} |y''(\xi)|$$

$$\text{Erro de discretização global: } |E_n| \leq n\,M\,\frac{h^2}{2}, \text{ com } M = \max_{x_n<\xi<x_{n+1}} |y''(\xi)|$$

Método RK4

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2_k 3 + k_4)},$$

$$x_n = x_0 + nh, \text{ com } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{cases}$$

Método das diferenças finitas

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right) y_{i+1} + \left(-2 + h^2 Q_i\right) y_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right) y_{i-1} = h^2 f_i}$$