T5. Números complexos

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Apartados

Motivação

Não é possível resolver todas as equações algébricas do tipo

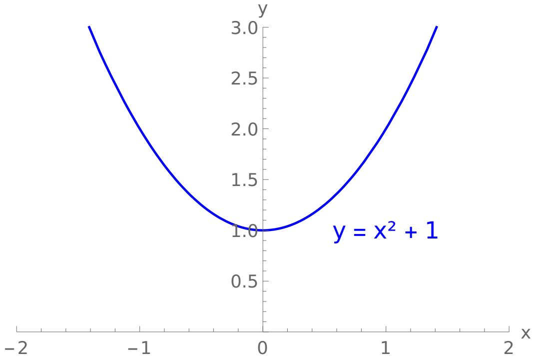
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

dentro do corpo dos número reais.

Por exemplo, a equação

$$x^2 + 1 = 0,$$

não admite solução real, isto é, $\nexists\, x_0 \in \mathbb{R} / x_0^2 = -1$.



Números complexos

Definição 5.1.1 (número complexo)

Um **número complexo** é qualquer número da forma $z = a + ib$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ são, respetivamente, a parte real e a parte imaginária, e i é a unidade imaginária com a propriedade $i^2 = -1$.

Dous números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são **iguais** se

$$\mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2),$$
$$\mathrm{Im}\,(z_1) = \mathrm{Im}\,(z_2).$$

Zero : $x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$.
Unidade: $x + iy = 1 \Leftrightarrow x = 1$ e $y = 0$.

Operações aritméticas

Dados os números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ definimos

Adição $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Subtração $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Multiplicação $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$

Divisão $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Números complexos

Definição 5.1.2 (corpo dos números complexos)

Define-se o **o corpo dos número complexos** $\mathbb{C}$ como $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, quer dizer, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com as leis da soma $(+)$ e do produto $(\cdot)$ usuais em $\mathbb{R}$.

Lembrete

Que um conjunto tenha a estrutura de corpo significa que

1. é um grupo comutativo respeito da soma;
2. o mesmo conjunto sem o zero é um grupo comutativo respeito do produto;
3. as operações da soma e do produto relacionam-se entre si segundo a lei da distributividade

Propriedades algébricas

Dados os números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ verificam-se

Leis da comutatividade

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

Leis da associatividade

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$
$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

Lei da distributividade

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Propriedades algébricas

Exemplo

Cálculo de $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$, sendo $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 1 - i$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1+2i) + (1-i) = (1+1) + (2-1)i = 2 + i, \\ z_1 z_2 &= (1+2i)(1-i) = 1 - i + 2i - 2i^2 \\ &= 1 - i + 2i - 2(-1) = 3 + i. \end{aligned}$$

Propriedades algébricas

Definição 5.1.3 (complexo conjugado)

Dado um número complexo $z = x + iy$ define-se o **complexo conjugado** como $\bar{z} = x - iy$.

Propriedades:

$$\begin{array}{rcl|rcll} \overline{z_1 + z_2} & = & \bar{z}_1 + \bar{z}_2 & z + \bar{z} & = & 2x & \text{(I)} \\ \overline{z_1 - z_2} & = & \bar{z}_1 - \bar{z}_2 & z\bar{z} & = & x^2 + y^2 & \text{(II)} \\ \overline{z_1 z_2} & = & \bar{z}_1 \bar{z}_2 & z - \bar{z} & = & 2iy & \text{(III)} \\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} & = & \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} & & & & \end{array}$$

$$\text{(I) e (III)} \Rightarrow \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$\rightsquigarrow$

Propriedades algébricas

A relação (II) resulta útil para realizar divisões de número complexos. Multiplicamos numerador e denominador pelo complexo conjugado do denominador.

Exemplo

Cálculo de $\frac{z_1}{z_2}$ sendo $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 1 - i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+2i+2i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{-1+3i}{2}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

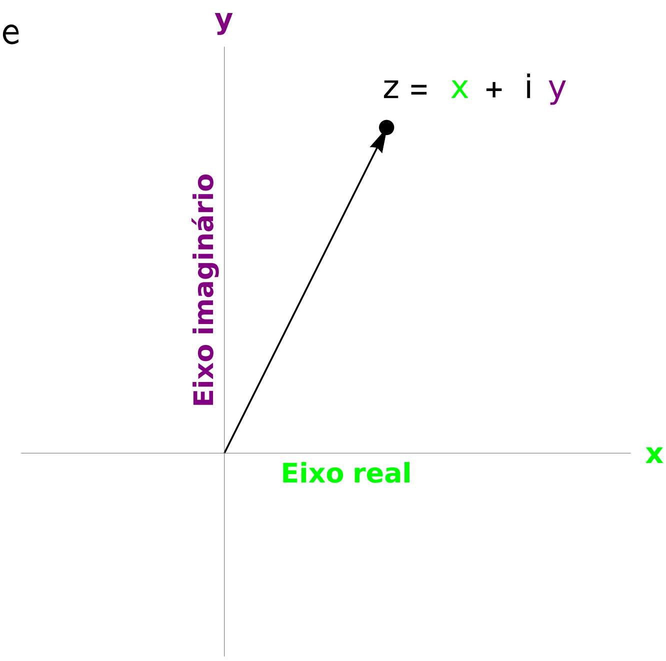
Apartados

Interpretação geométrica

Plano complexo

$z = x + iy \longrightarrow$ par ordenado de números reais (x, y)

$$\begin{cases} x = \mathrm{Re}\,(z) \\ y = \mathrm{Im}\,(z) \end{cases}$$



Interpretação geométrica

Definição 5.2.1 (módulo ou valor absoluto)

O **módulo** ou **valor absoluto** de $z = x + iy$ é o número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Exemplo

Cálculo de $|z|$ sendo $z = 3 - 2i$.

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Desigualdade triangular

Teorema 5.2.2 (desigualdade triangular)

O módulo da soma de dous números complexos z_1 e z_2 tem o seguinte limite superior

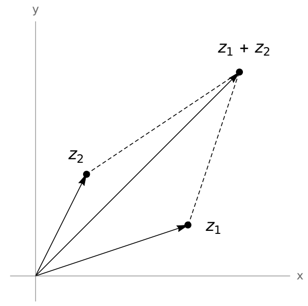
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \tag{1}$$

que se pode estender a qualquer soma finita.

Corolário

Substituindo $z_1 + z_2 + (-z_2)$ em (1) obtém-se também o limite inferior

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$



Apartados

Definição

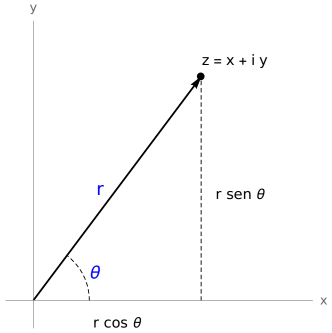
Um número complexo não nulo $z = x + iy$ pode escrever-se como

$$\boxed{z = r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}, \tag{2}$$

onde $r = |z|$, que representa a distância do ponto (x, y) à origem, é o **módulo** de z e $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$, que se mede (em radianos) desde o eixo real em sentido anti-horário, é o **argumento** de z, isto é, $\theta = \arg z$.

O **argumento principal** ($\text{Arg}\, z$) é o argumento no intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$.

$\arg z = \text{Arg}\, z + 2n\pi$,
com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.



Forma polar

Exemplo

Expressa $1 - \sqrt{3}i$ em forma polar.

Neste caso, $x = 1$ e $y = -\sqrt{3}$. Portanto,

$$\begin{cases} r &= |z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2, \\ \theta &= \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{3}. \end{cases}$$

De (2) obtém-se

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Multiplicação e divisão

Consideremos os números complexos:

$$z_1 = r_1 \left(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right),$$
$$z_2 = r_2 \left(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right).$$

Multiplicação

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right. \\ &\quad \left. + \, i\,(\mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right] \\ &\Rightarrow \boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\right]}. \end{aligned} \tag{3}$$

Multiplicação e divisão

Divisão

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right. \\ &\quad \left. + \, i\,(\mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right] \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1-\theta_2)\right]}. \end{aligned} \tag{4}$$

De (3) e (4) deduzem-se as seguintes propriedades

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Forma exponencial

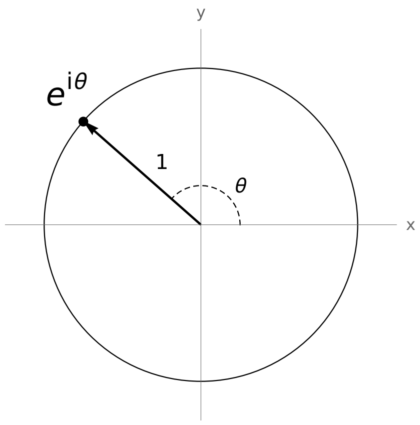
Considerando a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta,$$

podemos escrever um número complexo na **forma exponencial**

$$\boxed{z = re^{i\theta}}. \qquad (5)$$

A expressão (5) com $r = 1$ indica que os números $e^{i\theta}$ estão na circunferência de raio unitário centrada na origem.



Apartados

Potências inteiras de z

De (3) e (4) deduz-se a fórmula para a n-ésima potência de z para qualquer $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = r^n \left(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta\right). \tag{6}$$

Exemplo

Num exemplo anterior vimos que $z = 1 - \sqrt{3}i$ em forma polar era $z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Calcula agora a sua terceira potência.

De (6), com $r = 2$, $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ e $n = 3$, obtemos

$$\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3 = 2^3\left[\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right] = -8$$

Fórmula de de Moivre

A expressão (6) em forma polar com $|z| = r = 1$ transforma-se na **fórmula de de Moivre**

$$\boxed{\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta}, \tag{7}$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Raízes

Dizemos que w é a n-ésima raiz de um número complexo não nulo z se $w^n = z$.
Tomando as formas polares de w e z como

$$w = \rho\left(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi\right),$$
$$z = r\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right),$$

temos que

$$w^n = z \Leftrightarrow \rho^n\left(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi\right) = r\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right).$$

Isto é,

$$\rho^n = r \Leftrightarrow \rho = r^{\frac{1}{n}},$$

$$\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \begin{cases} \cos n\phi & = \cos\theta, \\ \text{sen}\,n\phi & = \text{sen}\,\theta, \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

Raízes

$$\Rightarrow n\phi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Obtemos assim n raízes diferentes com o mesmo módulo mas diferente argumento

$$\boxed{w_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]}, \qquad (8)$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \text{Arg}\,z \text{ (argumento principal)} \\ k = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w \text{ é a raiz principal}$$

Raízes

Exemplo

Achar as raízes cúbicas de $z = 1 + i$.

Neste caso,

$$\begin{cases} r & = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ \theta & = \arg z = \arctan \dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

De (8), com $n = 3$, obtém-se

$$w_k = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right],$$

com $k = 0, 1, 2$.

Definição e propriedades algébricas
O plano complexo
Forma polar
Potências e raízes
Topologia do plano complexo

Raízes

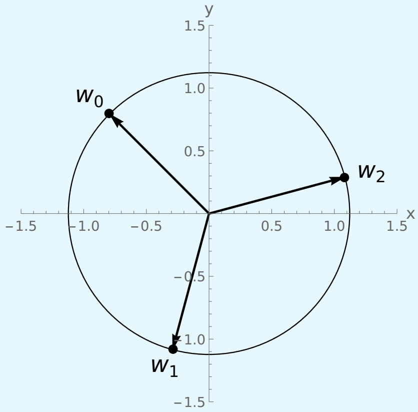
As três raízes, arredondadas ao quarto decimal, são

$$\begin{aligned} k = 0: \quad & w_0 && = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\right] \\ & && = -0.7937 + 0.7937i, \\ k = 1: \quad & w_1 && = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right] \\ & && = -0.2905 - 1.0842i, \\ k = 2: \quad & w_2 && = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\tfrac{17\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{17\pi}{12}\right)\right] \\ & && = 1.0842 + 0.2905i. \end{aligned}$$

Posto que $\theta = \frac{\pi}{4}$ é o argumento principal, com $k = 0$ obtemos a raiz principal w_0.

Raízes

Representação gráfica



Mesmo módulo $\Rightarrow$ circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$ centrada na origem.
Diferença entre argumentos de raízes sucessivas $\dfrac{2\pi}{n}$.

Apartados

Noções topológicas

Circunferência

Consideremos o ponto $z_0 = x_0 + iy_0$. Posto que

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

é a distância entre o ponto $z = x + iy$ e z_0, qualquer ponto que satisfaça

$$|z - z_0| = \rho, \qquad \text{com } \rho > 0,$$

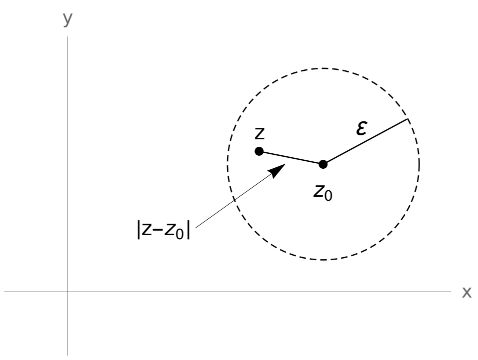
estará sobre uma circunferência de raio ρ centrada em z_0.

Noções topológicas

Definição 5.5.1 (vizinhança)

A **vizinhança** (ou disco aberto) de um ponto z_0 consiste em todos os pontos que estão dentro de um círculo (mas não na circunferência) centrado em z_0 com um raio $\varepsilon > 0$, verificando

$$|z - z_0| < \varepsilon.$$



Noções topológicas

Definição 5.5.2 (vizinhança perfurada)

Uma **vizinhança perfurada**, ou disco perfurado, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, consiste em todos os pontos de uma vizinhança de z_0, exceto o próprio ponto z_0.

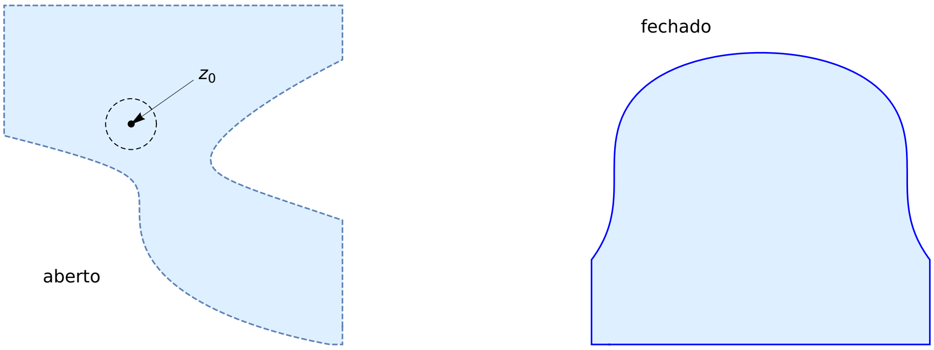
Definição 5.5.3 (ponto interior/exterior/de fronteira)

Dizemos que um ponto z_0 é um **ponto interior** de algum conjunto S se existir alguma vizinhança de z_0 que contenha somente pontos de S; dizemos que é um **ponto exterior** de S se existir alguma vizinhança desse ponto que não contenha ponto algum de S.
Se z_0 não for um ponto interior nem exterior de S, dizemos que é um **ponto de fronteira**. A totalidade dos pontos de fronteira de S é denominada **fronteira** de S.

Noções topológicas

Definição 5.5.4 (conjunto aberto/fechado)

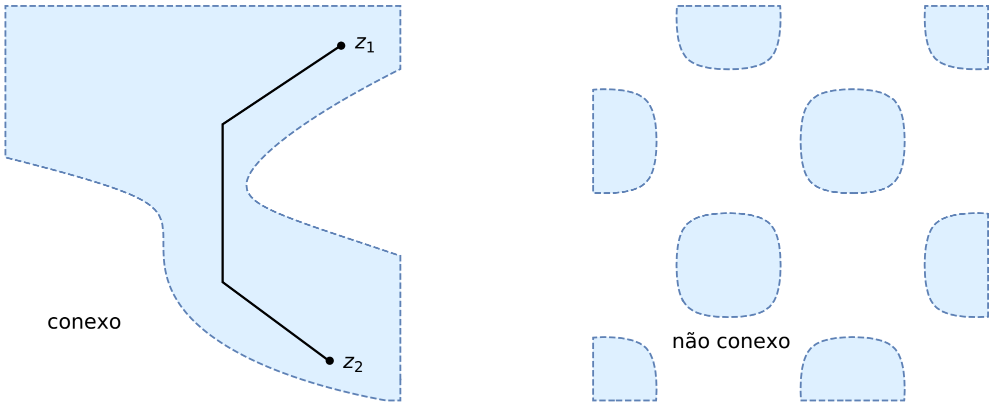
Um conjunto é dito **aberto** se não contiver qualquer um dos seus pontos de fronteira. Um conjunto é dito **fechado** se contiver todos os seus pontos de fronteira.
O **fecho** de um conjunto S é o conjunto fechado que consiste em todos os pontos, tanto de S quanto da fronteira de S.



Noções topológicas

Definição 5.5.5 (conjunto conexo)

Dizemos que um conjunto aberto S é **conexo** se quaisquer dous dos seus pontos podem ser ligados por uma linha poligonal consistindo num número finito de segmentos de reta justapostos inteiramente contidos em S.



Noções topológicas

Definição 5.5.6 (domínio)

Um conjunto aberto não vazio e conexo é denominado **domínio**.

Definição 5.5.7 (região)

Dizemos que um domínio junto com alguns, todos ou nenhum dos seus pontos de fronteira é uma **região**.

Definição 5.5.8 (conjunto limitado/ilimitado)

Um conjunto S é dito **limitado** se cada um dos seus pontos estiver dentro de um mesmo disco $|z| = R$; caso contrário, é dito **ilimitado**.

Noções topológicas

Definição 5.5.9 (ponto de acumulação)

Um ponto z_0 é dito um **ponto de acumulação** de um conjunto S se cada vizinhança perfurada de z_0 contiver pelo menos um ponto de S.

Teorema 5.5.10

Um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

Regiões do plano complexo

Exercício 5.5.11 (representação de conjuntos)

Representa o conjunto $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$.

Resolução

Supondo que z seja não nulo, temos

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Portanto

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \Leftrightarrow \frac{-y}{x^2 + y^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y < 0.$$

$\rightsquigarrow$

Regiões do plano complexo

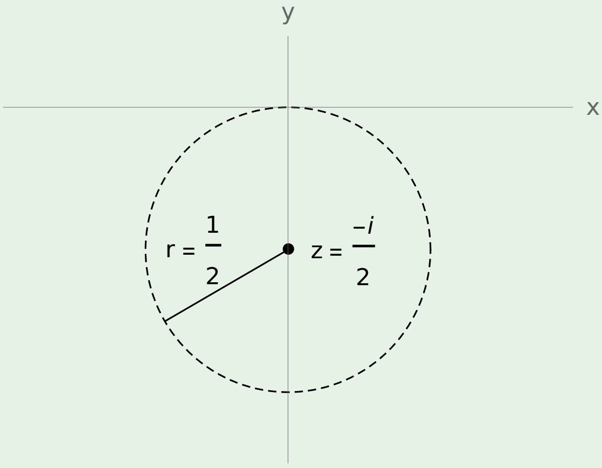
Completando o quadrado, chegamos a

$$x^2 + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) < \frac{1}{4}.$$

Assim, o conjunto consiste na região interior ao círculo

$$(x-0)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

centrado em $z = \frac{-i}{2}$ e com raio $\frac{1}{2}$.



Licença