DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 6

Funções holomorfas

[Revisado: novembro de 2021]

1 Funções de uma variável complexa

1.1. Determina a imagem dos seguintes conjuntos sob a transformação $f(z) = z^2$.

a) $y = 2$.

b) $x = 0$.

c) $y = x$.

1.2. Expressa as funções dadas na forma $f(z) = u + iv$.

a) $f(z) = 6z - 5 + 9i$.

b) $f(z) = z^2 - 3z + 4i$.

c) $f(z) = z^3 - 4z$.

d) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1.3. Avalia as funções dadas nos pontos indicados.

a) $f(z) = 2x - y^2 + i(xy^3 - 2x^2 + 1)$.
  A) $2i$
  B) $2 - i$

b) $f(z) = 4z + i\bar{z} + \mathrm{Re}\,(z)$.
  A) $4 - 6i$
  B) $-5 + 12i$

2 Limites e continuidade

2.1. Determina os seguintes limites.

   a) $\lim_{z \to i}(4z^3 - 5z^2 + 4z + 1 - 5i)$.

   b) $\lim_{z \to i} \dfrac{z^4 - 1}{z - i}$.

2.2. Demonstra que o seguinte limite não existe.

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}.$$

3 Diferenciabilidade. Equações de Cauchy–Riemann

3.1. Usa a definição de derivada para obteres a derivada $f'(z) = 2z$ de $f(z) = z^2$.

3.2. Usa as regras de derivação para obteres a derivada $f'(z)$ das seguintes funções.

   a) $f(z) = 4z^3 - (3 + i)z^2 - 5z + 4$.

   b) $f(z) = (2z + 1)(z^2 - 4z + 8i)$.

   c) $f(z) = (z^2 - 4i)^3$.

   d) $f(z) = \dfrac{3z - 4 + 8i}{2z + i}$.

3.3. Determina os pontos em que as seguintes funções não são holomorfas.

   a) $f(z) = \dfrac{z}{z - 3i}$.

   b) $f(z) = \dfrac{z^3 + z}{z^2 + 4}$.

3.4. Demonstra que a função $f(z) = \bar{z}$ não é diferenciável em nenhum ponto.

3.5. Calcula as linhas de fluxo associadas às seguintes funções complexas.

   a) $f(z) = 2z$.

   b) $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

3.6. Demonstra que a função $f(z) = z^3$, que é inteira, satisfaz as equações de Cauchy–Riemann em todos os pontos.

3.7. Demonstra que as seguintes funções não são holomorfas em nenhum ponto.

a) $f(z) = \mathrm{Re}\,(z)$.

b) $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$.

c) $f(z) = x^2 + y^2$.

3.8. Usa o teorema de Looman–Menchoff para demonstrar que as seguintes funções são holomorfas num determinado domínio.

a) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$.

b) $f(z) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy + ie^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy$.

c) $f(z) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - i\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$.

3.9. Determina as constantes reais a e b para que a seguinte função seja holomorfa.

$$f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3).$$

3.10. Demonstra que as seguintes funções não são holomorfas em nenhum ponto mas que são diferenciáveis ao longo das curvas indicadas.

a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2xyi$; no eixo x.

b) $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$; nos eixos de coordenadas.

3.11. Obtém a derivada de $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$.

4 Algumas funções elementares

4.1. Expressa e^z na forma $a + ib$.

a) $z = \dfrac{\pi}{6}i$.

b) $z = -1 + \dfrac{\pi}{4}i$.

c) $z = \pi + \pi i$.

d) $z = 1.5 + 2i$.

4.2. Expressa o seguinte número na forma $a + ib$.

$$e^{1+\frac{5\pi}{4}i}\, e^{-1-\frac{\pi}{3}i}.$$

4.3. Expressa as seguintes funções na forma $f(z) = u + iv$.

a) $f(z) = e^{-iz}$.

b) $f(z) = e^{z^2}$.

4.4. Verifica os seguintes resultados.

a) $|e^z| = e^x$.

b) $e^{z+\pi i} = e^{z-\pi i}$.

4.5. Demonstra que $f(z) = e^{\bar{z}}$ não é holomorfa em nenhum ponto.

4.6. Expressa $\ln z$ para os seguintes números na forma $a + ib$.

a) $z = -5$.

b) $z = -2 + 2i$.

4.7. Expressa $\mathrm{Ln}\, z$ para os seguintes números na forma $a + ib$.

a) $z = 6 - 6i$.

b) $z = -12 + 5i$.

4.8. Resolve as seguintes equações.

a) $e^z = 4i$.

b) $e^{z-1} = -ie^2$.

4.9. Determina todos os valores das seguinte quantidades.

a) $(-i)^{4i}$.

b) $(1 + i)^{1+i}$.

4.10. Determina o valor principal de $(-1)^{\frac{-2}{\pi}i}$ e expressa-o na forma $a + ib$.

4.11. Se $z_1 = i$ e $z_2 = -1 + i$, verifica que $\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$.

4.12. Determina se as seguinte igualdades são certas.

a) $\mathrm{Ln}\,(-1 + i)^2 = 2\,\mathrm{Ln}\,(-1 + i)$.

b) $\mathrm{Ln}\, i^3 = 3\,\mathrm{Ln}\, i$.

c) $\ln i^3 = 3 \ln i$.

4.13. Expressa as seguintes quantidades na forma $a + ib$.

$a)$ $\cos 3i$.

$b)$ $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$.

$c)$ $\operatorname{tg} i$.

$d)$ $\sec(\pi + i)$.

$e)$ $\cosh(\pi i)$.

$f)$ $\operatorname{senh}\left(1 + \frac{\pi}{3} i\right)$.

4.14. Verifica o seguinte resultado.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right) = \frac{5}{4}.$$

4.15. Resolve as seguinte equações.

$a)$ $\operatorname{sen} z = 2$.

$b)$ $\operatorname{senh} z = -i$.

$c)$ $\cos z = \operatorname{sen} z$.

4.16. Usa a definição de igualdade de números complexos para determinar todos os valores de z que satisfazem $\cos z = \cosh 2$.

4.17. Demonstra as seguinte relações.

$a)$ $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

$b)$ $\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.

$c)$ $|\cosh z|^2 = \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x$.

4.18. Demonstra que $\operatorname{tgh} z$ é periódica com período πi.

4.19. Determina todos os valores das seguintes quantidades.

$a)$ $\operatorname{arcsen}(-i)$.

$b)$ $\arccos 2$.

$c)$ $\operatorname{arctg} 1$.

$d)$ $\operatorname{arcsenh} \frac{4}{3}$.

Soluções

1.1 a) $u = x^2 - 4$ e $v = 4x$.

b) $u = -y^2$ e $v = 0$.

c) $u = 0$ e $v = 2x^2$.

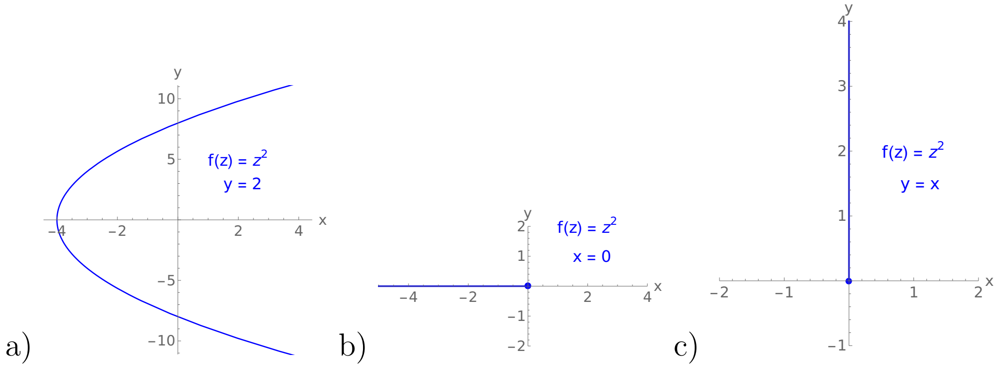

Figura 1: Exemplo 6.1

1.2 a) $f(z) = 6x - 5 + i(6y + 9)$.

b) $f(z) = x^2 - y^2 - 3x + i(2xy - 3y + 4)$.

c) $f(z) = (x^3 - 3xy^2 - 4x) + i(3x^2y - y^3 - 4y)$.

d) $f(z) = x + \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

1.3 a) A) $f(2i) = -4 + i$.

B) $f(2 - i) = 3 - 9i$.

b) A) $f(4 - 6i) = 14 - 20i$.

B) $f(-5 + 12i) = -13 + 43i$.

2.1 a) $\lim\limits_{z \to i}(4z^3 - 5z^2 + 4z + 1 - 5i) = 6 - 5i$.

b) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^4 - 1}{z - i} = -4i$.

2.2 Não existe.

3.1 $f'(z^2) = 2z$.

3.2 a) $f'(z) = 12z^2 - 2(3+i)z - 5.$

b) $f'(z) = 6z^2 - 14z - 4 + 16i.$

c) $f'(z) = 6z(z^2 - 4i)^2.$

d) $f'(z) = \dfrac{8 - 13i}{(2z+i)^2}.$

3.3 a) $z_1 = 3i.$

b) $z_1 = 2i$ e $z_2 = -2i.$

3.4 Verifica-se.

3.5 a) $x = c_1 e^{2t}$ e $y = c_2 e^{2t}.$

b) $y = cx.$

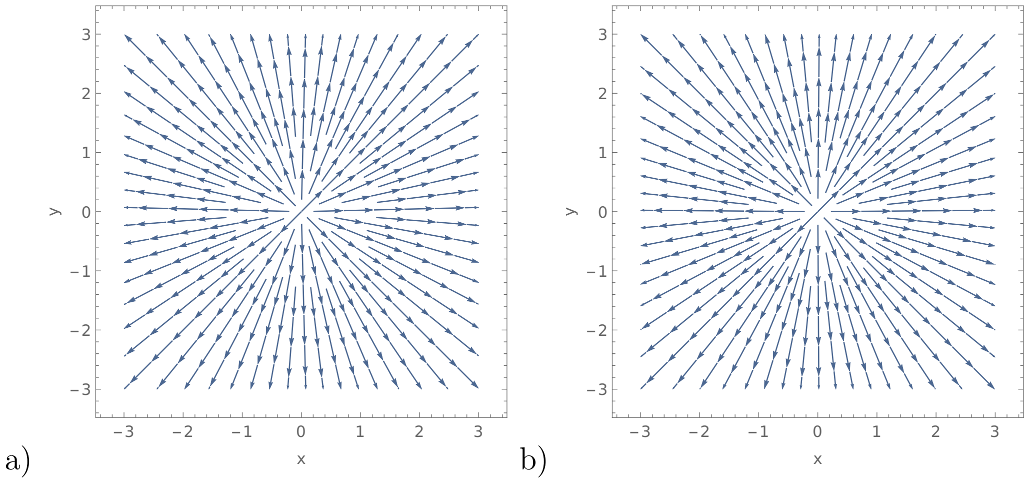

Figura 2: Exemplo 3.5

3.6 Verifica-se.

3.7 a) Não é holomorfa em nenhum ponto.

b) Não é holomorfa em nenhum ponto.

c) Não é holomorfa em nenhum ponto.

3.8 a) $f(z) \in H(\mathbb{C}).$

b) $f(z) \in H(\mathbb{C}).$

c) $f(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \{1\}).$

3.9 $a = 1$ e $b = 3.$

3.10 a) $f(z)$ é diferenciável no eixo x, mas não é holomorfa.

b) $f(z)$ é diferenciável no eixo x e no eixo y, mas não é holomorfa.

3.11 $f'(z) = f(z)$.

4.1 a) $e^z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

b) $e^z = e^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) $e^z = -e^{\pi}$.

d) $e^z = e^{1.5}(\cos 2 + i \operatorname{sen} 2) = -1.8650 + 4.0752i$.

4.2 $e^{\frac{11\pi}{12}i}$

4.3 a) $f(z) = e^y \cos x - ie^y \operatorname{sen} x$.

b) $f(z) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy + ie^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy$.

4.4 Verificam-se.

4.5 Verifica-se.

4.6 a) $\ln(-5) = \ln 5 + i(\pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) $\ln(-2+2i) = \ln(2\sqrt{2}) + i\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.7 a) $\operatorname{Ln}(6-6i) = \ln(6\sqrt{2}) - i\dfrac{\pi}{4}$.

b) $\operatorname{Ln}(-12+5i) = \ln 13 + i\left[\arctan\left(\dfrac{-5}{12}\right) + \pi\right]$.

4.8 a) $z = \ln 4 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) $z = 3 + i\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.9 a) $(-i)^{4i} = e^{\pi(2-8n)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) $(1+i)^{1+i} = e^{\ln\sqrt{2} - \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.10 e^2.

4.11 Verifica-se.

4.12 a) É falsa.

b) É falsa.

c) É certa.

4.13 a) $\cos 3i = \cosh 3 = 10.0677$.

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\cosh 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{senh} 1 = 1.0911 + 08310i$.

c) $\tan i = i \tanh 1 = 0.7616i$.

d) $\sec(\pi + i) = -\operatorname{sech} 1 = -0.6481$.

e) $\cosh(\pi i) = -1$.

f) $\operatorname{senh}\left(1 + \frac{\pi}{3}i\right) = \frac{\operatorname{senh} 1}{2} + i\frac{\sqrt{3}\cosh 1}{2} = 0.5876 + 1.3363i$.

4.14 Verifica-se.

4.15 a) $z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) $z = \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$, $n \in \mathbb{Z}$.

c) $z = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.16 $z = 2k\pi \pm 2i$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.17 Verificam-se.

4.18 Verifica-se.

a) $\operatorname{arcsen}(-i) = 2n\pi - i\ln(1 + \sqrt{2})$,
$\operatorname{arcsen}(-i) = (2n+1)\pi - i\ln(\sqrt{2} - 1)$.

b) $\arccos 2 = 2n\pi - i\ln(2 + \sqrt{3})$,
$\arccos 2 = 2n\pi - i\ln(2 - \sqrt{3})$.

c) $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

d) $\operatorname{arcsenh} \frac{4}{3} = \ln 3 + i2n\pi$,
$\operatorname{arcsenh} \frac{4}{3} = \ln\frac{1}{3} + i\pi(2n+1)$.