T3. Equações diferenciais ordinárias de ordem superior

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica
Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Apartados

Problemas de valor inicial e de valores na fronteira

Definição 3.1.1

Um **problema de valor inicial de n-ésima ordem** para a ED

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (1)$$

consiste em achar a solução num intervalo I que satisfaz no ponto $x_0 \in I$ as n **condições iniciais**

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

onde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são constantes reais arbitrárias.

Problemas de valor inicial e de valores na fronteira

Teorema 3.1.2 (existência e unicidade)

Suponhamos que $a_n(x),\ a_{n-1}(x), \dots,\ a_1(x),\ a_0(x)$ e $g(x)$ são contínuas num intervalo I, e que $a_n(x) \neq 0\ \forall x \in I$.

Se $x = x_0$ está em qualquer ponto deste intervalo, então existirá no intervalo uma solução $y(x)$ para o problema de valor inicial (PVI) formulado em (1) e será única.

Problemas de valor inicial e de valores na fronteira

Exercício 3.1.3 (solução única de um PVI)

Verificar que a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução do PVI $y'' - 4y = 12x$, com $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$.

Resolução

Esta ED é linear. Ademais, tanto os coeficientes, $a_2(x) = 1$ e $a_1(x) = -4$, como $g(x) = 12x$ são contínuos, e $a_2(x) \neq 0$ em qualquer intervalo I que contenha $x = 0$.

Portanto, tendo em conta o teorema anterior, concluímos que a função dada é a única solução em I.

Problemas de valor inicial e de valores na fronteira

Definição 3.1.4

Um **problema de valores na fronteira (PVF)** consiste em resolver uma ED de segunda ordem (ou superior)

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{2}$$

na qual a variável independente e/ou as suas derivadas estão determinadas em pontos diferentes mediante as denominadas **condições de fronteira (CF)** conforme a algum dos pares

$$\begin{cases} y(a) &= y_0, \\ y(b) &= y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y'(a) &= y_0, \\ y(b) &= y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y(a) &= y_0, \\ y'(b) &= y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y'(a) &= y_0, \\ y'(b) &= y_1. \end{cases}$$

Propriedade: um PVF pode ter uma, nenhuma ou várias soluções.

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Problemas de valor inicial e de valores na fronteira

Exemplo (um PVF com várias, uma ou nenhuma solução)

Consideremos a ED, $x'' + 16x = 0$, cuja família de soluções biparamétrica é $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$.

a) Procuremos a solução para as CF, $x(0) = 0$ e $x(\frac{\pi}{2}) = 0$. Então

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$\downarrow$$
$$0 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi \Rightarrow c_2 \text{ pode tomar qualquer valor.}$$

Portanto, o PVF com estas CF tem infinitas soluções do tipo $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$.

$\rightsquigarrow$

Problemas de valor inicial e de valores na fronteira

b) CF: $x(0) = 0$ e $x(\frac{\pi}{8}) = 0$. Então

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$0 = c_2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_2 = 0.$$

Portanto, $x = 0$ é uma solução (neste caso, única) do PVF.

c) CF: $x(0) = 0$ e $x(\frac{\pi}{2}) = 1$. Então

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

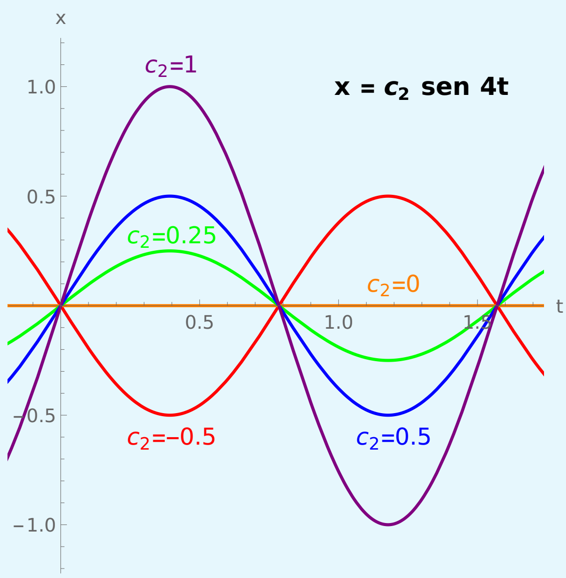
$$\downarrow$$

$$1 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi = 0 \rightarrow \text{contradição!} \Rightarrow \text{ não há solução.}$$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Problemas de valor inicial e de valores na fronteira

Caso a) do PVF (infinitas soluções):



Equações homogéneas

Definição 3.1.5

Uma ED linear de n-ésima ordem da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (3)$$

diz-se que é uma **equação homogénea**, enquanto outra da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (4)$$

com $g(x) \neq 0$, diz-se que é **não homogénea**.

Equações homogéneas

Assunções relativas às equações lineares (3) e (4) num intervalo I:

- Os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, são contínuos.
- A função $g(x)$ é contínua.
- $a_n(x) \neq 0\ \forall x \in I$.

Equações homogéneas

Teorema 3.1.6 (princípio de superposição: equações homogéneas)

Suponhamos que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ são soluções da ED homogénea de n-ésima ordem (3) num intervalo I. Então a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x),$$

onde as c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ são constantes arbitrárias, também é uma solução no intervalo.

Equações homogéneas

Corolários

i) Um múltiplo constante $y = c_1 y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ de uma ED linear homogénea também é uma solução.

ii) A solução trivial $y = 0$ sempre é uma solução de uma ED linear homogénea.

Equações homogéneas

Exemplo

Sabemos que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln x$ são soluções da equação linear homogénea $x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$ no intervalo $(0, \infty)$.

Portanto, pelo princípio de superposição, a combinação linear

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

também é uma solução da ED no intervalo.

Equações homogéneas

Definição 3.1.7 (dependência linear e independência linear)

Um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ diz-se que é **linearmente dependente** num intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, diferentes de zero, tal que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0, \ \forall x \in I \tag{5}$$

Se o conjunto de funções não é linearmente dependente no intervalo, então diz-se que é **linearmente independente**.

Portanto, um conjunto de funções é linearmente independente num intervalo apenas se $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 \quad \forall x \in I$.

Equações homogéneas

Porém, procuraremos soluções linearmente independentes de uma ED linear utilizando um método mais prático.

Definição 3.1.8 (wronskiano)

Suponhamos que cada uma das funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tem ao menos $n-1$ derivadas. O determinante

$$W\left(f_1, \ldots, f_n\right) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

denomina-se **wronskiano** das funções.

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Equações homogéneas

Teorema 3.1.9 (critério para soluções linearmente independentes)

Suponhamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são n soluções da equação diferencial linear homogénea (3) de n-ésima ordem num intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se e somente se $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0\ \forall x \in I$.

Definição 3.1.10 (conjunto fundamental de soluções)

Qualquer conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluções linearmente independentes da ED homogénea (3) de n-ésima ordem num intervalo I diz-se que é um **conjunto fundamental de soluções** no intervalo.

Equações homogéneas

Teorema 3.1.11 (existência de um conjunto fundamental)

Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogénea (3) de n-ésima ordem num intervalo I.

Teorema 3.1.12 (solução geral: equações homogéneas)

Suponhamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ é um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial linear homogénea (3) de n-ésima ordem num intervalo I. Então, a solução geral da equação no intervalo é

$$y = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x),$$

onde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são constantes arbitrárias.

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Equações homogéneas

Exemplo (solução geral de uma ED homogénea)

As funções $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = e^{-3x}$ são soluções da equação linear homogénea $y'' - 9y = 0$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Por inspeção, as soluções são linearmente independentes no eixo x, o que se pode comprovar ao verificar que

$$W\left(e^{3x}, e^{-3x}\right) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \forall x \in I.$$

Assim, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e

$$y = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-3x}$$

é, portanto, a solução geral da equação no intervalo.

Equações não homogéneas

Teorema 3.1.13 (solução geral: equações não homogéneas)

Seja y_p uma solução particular da equação diferencial linear não homogénea de n-ésima ordem (4) num intervalo I, e suponhamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ é um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogénea (3) associada em I.

*Então, a **solução geral** da equação no intervalo é*

$$y = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) + y_p,$$

onde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são constantes arbitrárias.

Manuel Andrade Valinho Matemáticas III – Tema 3 21 / 91
Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Equações não homogéneas

Definição 3.1.14 (função complementar)

A combinação linear

$$y_c(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x),$$

que é a solução geral de (3) denomina-se **função complementar** da equação (4).

Portanto, a **solução geral da equação não homogénea** é

$$y = \text{função complementar} + \text{qualquer solução particular}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_c + y_p}.$$

Equações não homogéneas

Exemplo (solução geral de uma ED não homogénea)

É fácil comprovar que a função $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ é uma solução particular da equação não homogénea no intervalo $(-\infty, \infty)$

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x.$$

Para obter a solução geral desta equação devemos resolver a equação homogénea associada

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0,$$

cuja solução geral é $y_c = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + c_3\, e^{3x}$. Portanto, a solução geral da equação do exemplo no intervalo é

$$y = y_c + y_p = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + c_3\, e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$

Apartados

Redução de ordem

Suponhamos que $y_1(x)$ denota uma solução conhecida da ED linear homogénea de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{7}$$

cuja solução geral está dada pela combinação linear $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$, onde y_1 e y_2 são soluções que constituem um conjunto linearmente independente em algum intervalo I.
Procuramos uma segunda solução $y_2(x)$ tendo em conta que se y_1 e y_2 são linearmente independentes, então o seu quociente não é constante, isto é,

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = u(x) \Leftrightarrow y_2(x) = u(x)\, y_1(x).$$

Redução de ordem

Ideia

Achar $u(x)$ mediante a substituição $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$.

$$\downarrow$$

Para isso devemos resolver uma equação de primeira ordem (redução de ordem)

Redução de ordem

Exercício 3.2.1 (procura de uma segunda solução)

Consideremos a solução $y_1 = e^x$ da ED $y'' - y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Utiliza a redução de ordem para achar uma segunda solução y_2.

Resolução

Se $y_2 = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$, então as primeiras duas derivadas serão

$$\begin{aligned} y_2' &= ue^x + e^x u', \\ y_2'' &= ue^x + 2e^x u' + e^x u''. \end{aligned}$$

Redução de ordem

Substituindo-as na ED original obtemos

$$y_2'' - y_2 = e^x \left(u'' + 2u'\right) = 0.$$

Posto que $e^x \neq 0$, então $u'' + 2u' = 0$. Mediante a substituição $w = u'$ esta ED linear de segunda ordem transforma-se na ED linear de primeira ordem

$$w' + 2w = 0.$$

Utilizando o fator integrante e^{2x} temos

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x} w\right) = 0 \Rightarrow w = c_1\, e^{-2x} \Rightarrow u' = c_1\, e^{-2x}.$$

Redução de ordem

Integrando de novo,

$$u = -\frac{1}{2}c_1\, e^{2x} + c_2 \Rightarrow y_2 = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2\, e^x.$$

Tomando $c_2 = 0$ e $c_1 = -2$ obtemos a segunda solução

$$\boxed{y_2 = e^{-x}}.$$

Posto que $W\left(e^x, e^{-x}\right) \neq 0$ para todo x, as soluções são linearmente independentes no intervalo.

Caso geral

Fórmula para a segunda solução

Se dividimos (7) por $a_2(x)$ obtemos a forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{8}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas em algum intervalo I.
Suponhamos, ademais, que $y_1(x)$ é uma solução conhecida de (8) em I e que $y_1(x) \neq 0\ \forall x \in I$. Se definimos $y_2 = u(x)y_1(x)$ teremos

$$\left.\begin{aligned} y_2' &= uy_1' + y_1 u' \\ y_2'' &= uy_1'' + 2y_1' u' + y_1 u'' \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Caso geral

Fórmula para a segunda solução

$$\Rightarrow y_2'' + Py_2' + Qy_2 =$$

$$= u \left[\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{\overset{\shortparallel}{0}} \right] + y_1 u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

$$\Rightarrow y_1 u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

$$\Rightarrow y_1 w' + (2y_1' + Py_1)w = 0,$$

onde temos tomado $w = u'$. Esta última equação é linear e separável.

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Caso geral

Fórmula para a segunda solução

Portanto, separando as variáveis e integrando obtemos

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + Pdx = 0$$

$$\Rightarrow \ln |wy_1^2| = -\int P\,dx + c$$

$$\Rightarrow wy_1^2 = c_1 e^{-\int P\,dx}.$$

Resolvendo esta equação para $w = u'$ e integrando de novo

$$u = c_1 \int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2} dx + c_2. \tag{9}$$

Caso geral

Fórmula para a segunda solução

Escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, a partir de $y_2 = u(x)y_1(x)$ achamos que uma segunda solução de (8) é

$$\boxed{y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} dx}. \tag{10}$$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Caso geral

Exercício 3.2.2 (obtenção de uma segunda solução mediante a fórmula)

A função $y_1 = x^2$ é solução da ED $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Acha a solução geral no intervalo $(0, \infty)$.

Resolução

A forma padrão da equação é

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0.$$

$\rightsquigarrow$

Caso geral

A partir da fórmula (9) obtemos

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int \frac{dx}{x}}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{x^3}{x^4} dx = x^2 \ln x.$$

Portanto, a solução geral, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, no intervalo $(0, \infty)$ será

$$\boxed{y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x}.$$

Apartados

Motivação

Sabemos que a ED linear de primeira ordem $y' + ay = 0$, onde a é uma constante, possui a solução exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Questão: existirão soluções exponenciais para ED lineares homogéneas de ordem superior?

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{11}$$

onde a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são constantes reais e $a_n \neq 0$.

Equação auxiliar

Consideremos o caso especial de uma equação de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{12}$$

Se procuramos uma solução da forma $y = e^{mx}$ temos

$$\left.\begin{aligned} y' &= me^{mx} \\ y'' &= m^2 e^{mx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$\Rightarrow e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{am^2 + bm + c = 0}.$$

Esta equação denomina-se **equação auxiliar** da equação diferencial (12).

$\rightsquigarrow$

Equação auxiliar

As suas raízes são

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Haverá, portanto, três formas da solução geral de (11) correspondentes aos casos:

- m_1 e m_2 são reais e distintas ($b^2 - 4ac > 0$),
- m_1 e m_2 são reais e iguais ($b^2 - 4ac = 0$), e
- m_1 e m_2 são números complexos conjugados ($b^2 - 4ac < 0$).

Equação auxiliar

Caso 1: raízes reais distintas

Duas soluções da forma

$$y_1 = e^{m_1 x},$$
$$y_2 = e^{m_2 x},$$

que são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$ $\Rightarrow$ formam um conjunto fundamental.

A solução geral será neste intervalo será

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}. \quad (13)$$

Equação auxiliar

Caso 2: raízes reais repetidas

Com $m_1 = m_2$ obtemos uma única solução da forma

$$y_1 = e^{m_1 x}.$$

Posto que $m_1 = m_2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{-b}{2a}$.

Aplicando a fórmula (10) para obter uma segunda solução

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}.$$

Então, a solução geral será

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}. \tag{14}$$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Equação auxiliar

Caso 3: raízes complexas conjugadas

Se m_1 e m_2 são complexas,

$$m_1 = \alpha + i\beta,$$
$$m_2 = \alpha - i\beta,$$

com α e β reais e positivos.
Portanto, a solução geral será do tipo

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{15}$$

Equação auxiliar

Da **fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{cases} e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x, \\ e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x. \end{cases}$$

chegamos a

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x,$$
$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen}\beta x.$$

Agora, escolhendo $C_1 = C_2 = 1$ e $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$ em (15), obtemos duas soluções

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

$\rightsquigarrow$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Equação auxiliar

Do corolário (i) do teorema 3.1.6 deduzimos que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ são soluções reais de (12). Posto que estas soluções formam um conjunto fundamental em $(-\infty, \infty)$ a solução geral é

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \Rightarrow y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x\right). \tag{16}$$

Equação auxiliar

Exercício 3.3.1 (equações diferenciais de segunda ordem)

Resolve as seguintes equações diferenciais:

a) $2y'' - y' - y = 0$,
b) $y'' + 2y' + y = 0$,
c) $y'' - 2y' + 2y = 0$,

Soluções

Mostram-se as equações auxiliares, as raízes e as soluções gerais correspondentes.

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Equação auxiliar

a)

$$2m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1, \\ m_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

A solução geral dada em (13) será

$$\boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{x}{2}}}.$$

b)

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -1.$$

A solução geral dada em (14) será

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}}.$$

Equação auxiliar

c)

$$m^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 + i, \\ m_2 = 1 - i. \end{cases}$$

A solução geral dada em (16), com $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, será

$$\boxed{y = e^x \left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right)}.$$

Equação auxiliar

Exercício 3.3.2 (um problema de valor inicial)

Resolve o PVI

$y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = -\frac{1}{2},\ y'(0) = 1$, no intervalo $(0, 10)$.

Resolução

No exemplo anterior obtivemos a solução geral da ED. Da primeira condição

$$y(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = e^0 \left(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0\right) \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}.$$

$\rightsquigarrow$

Equação auxiliar

Diferenciando a solução geral

$$\begin{aligned} y' &= e^x\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right) + e^x\left(-c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x\right) \\ &= e^x\left(\left(c_1 + c_2\right)\cos x + \left(c_2 - c_1\right)\operatorname{sen} x\right). \end{aligned}$$

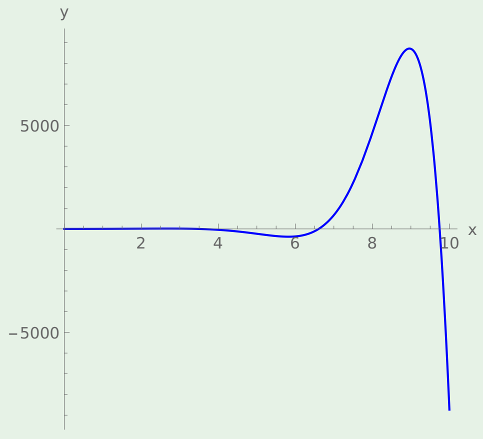
Agora, da segunda condição

$$\begin{aligned} y'(0) = 1 \Rightarrow & 1 = e^0\left(\left(c_1 + c_2\right)\cos 0 + \left(c_2 - c_1\right)\operatorname{sen} 0\right) \\ \Rightarrow & c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Equação auxiliar

Portanto, a solução do PVI no intervalo $(0, 10)$ é

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}e^x\left(\cos x - 3\operatorname{sen} x\right)}.$$



Equações de ordem superior

Em geral, para resolver a ED de ordem superior

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

onde a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são constantes reais, devemos resolver uma equação polinomial de n-ésimo grau

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0.$$

Se todas as raízes são reais e distintas, então a solução geral da ED é

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}.$$

⇝

Equações de ordem superior

Se m_1 é uma raiz de multiplicidade k de uma equação auxiliar de n-ésimo grau, então as soluções linearmente independentes são $e^{m_1 x}$, $xe^{m_1 x}$, $x^2 e^{m_1 x}$, ..., $x^{k-1} e^{m_1 x}$. Neste caso a solução geral deve conter a combinação linear

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \ldots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

Equações de ordem superior

Exercício 3.3.3 (equação diferencial de terceira ordem)

Resolve $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

Resolução

É fácil ver que uma raiz é $m_1 = 1$ e que, fatorizando, obtemos as outras duas, $m_2 = m_3 = -2$.
Portanto, a solução geral é

$$\boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}}.$$

Apartados

Método de coeficientes indeterminados

A solução geral num intervalo I de uma ED linear não homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \qquad (17)$$

onde os coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são constantes, é

$$y = y_c + y_p,$$

sendo a função complementar y_c a solução geral da ED homogénea associada a (17), e y_p é uma solução particular de (17).

O objetivo agora é estudar métodos que permitam obter soluções particulares.

Método de coeficientes indeterminados

Propriedade

As derivadas de somas e produtos de funções constituídas por:

- polinómios (incluindo constantes),
- exponenciais (tipo $e^{\alpha x}$),
- senos e cossenos,

são também somas e produtos de polinómios, exponenciais, senos e cossenos.

Método de coeficientes indeterminados

Ideia básica

Posto que qualquer solução particular y_p deve verificar (17), isto é,

$$a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_p' + a_0 y_p = g(x),$$

que é uma combinação linear das derivadas de y_p idêntica a $g(x)$, parece razoável supor que y_p tem a mesma forma que $g(x)$.

Método de coeficientes indeterminados

Método

1. Resolver a equação homogénea associada a fim de obter a função complementar.
2. Achar uma solução particular supondo que esta tem a mesma forma que a função $g(x)$.
3. Obter a solução geral da equação dada.

O método de coeficientes indeterminados não é aplicável à equação (17) se

$$g(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \tan x, \quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad \text{etc.}$$

Método de coeficientes indeterminados

Soluções particulares de prova

$\mathbf{g(x)}$	**Forma de** $\mathbf{y_p}$
qualquer constante	A
$5x+7$	$Ax+B$
$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
$\operatorname{sen} 4x$	$A\cos 4x+B\operatorname{sen} 4x$
$\cos 4x$	$A\cos 4x+B\operatorname{sen} 4x$
e^{5x}	Ae^{5x}
$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
$e^{3x}\operatorname{sen} 4x$	$(Ae^{3x}\cos 4x+Be^{3x}\operatorname{sen} 4x)$
$5x^2\operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Ex^2+Fx+G)\operatorname{sen} 4x$
$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x+(Cx+E)e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Método de coeficientes indeterminados

CASOS

Caso I

Na solução particular suposta, nenhuma função é uma solução da equação diferencial homogénea associada.

Regra: a forma de y_p é uma combinação linear de todas as funções independentes que se geram por diferenciações repetidas de $g(x)$.

Método de coeficientes indeterminados

Exercício 3.4.1 (solução geral mediante coeficientes indeterminados)

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$$

Resolução

1º) Resolvemos a equação homogénea associada

$$y'' + 4y' - 2y = 0$$

$$m^2 + 4m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -2 - \sqrt{6} \\ m_2 = -2 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Método de coeficientes indeterminados

Portanto, a função complementar é

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

2º) Posto que $g(x)$ é um polinómio quadrático, supomos que a solução particular y_p também tem esta forma:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Método de coeficientes indeterminados

Determinaremos coeficientes específicos A, B e C para os quais y_p é uma solução da ED original. Derivando e substituindo obtemos

$$\begin{cases} y_p' = 2Ax + B \\ y_p'' = 2A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' - 2y_p &= 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \\ &\equiv 2x^2 - 3x + 6. \end{aligned}$$

Identificando os coeficientes de potencias iguais:

$$-2A\ x^2 + (8A - 2B)\ x + 2A + 4B - 2C \equiv 2\ x^2 - 3\ x + 6$$

$\rightsquigarrow$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Método de coeficientes indeterminados

deve verificar-se

$$\left\{\begin{array}{lcr} -2A & = & 2 \\ 8A - 2B & = & -3 \\ 2A + 4B - 2C & = & 6 \end{array}\right. \Bigg\| \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcr} A & = & -1 \\ B & = & -\frac{5}{2} \\ C & = & -9 \end{array}\right.$$

Portanto, uma solução particular é

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

3º) A solução geral da equação dada é

$$\boxed{y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9}.$$

Método de coeficientes indeterminados

CASOS

Caso II

Uma função presente na solução particular suposta também é uma solução da equação diferencial homogénea associada.

Regra: se qualquer y_{p_i} contém termos que duplicam termos em y_c, então tal y_{p_i} deve multiplicar-se por x^n, onde n é o inteiro positivo mais pequeno possível que elimina tal duplicidade.

Método de coeficientes indeterminados

Exercício 3.4.2 (uma falha no método?)

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$$

Resolução

1º) Resolvemos a equação homogénea associada

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

$$m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 4 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

Método de coeficientes indeterminados

Portanto, a função complementar é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

2º) Posto que $g(x)$ é uma exponencial, suponhamos uma solução particular da forma $y_p = Ae^x$.

Dificuldade: ao substituir na equação diferencial obtemos a contradição $0 = 8e^x$.

Explicação: o nosso suposto Ae^x já está na função complementar $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$, de modo que como e^x é uma solução da equação diferencial homogénea ao substituir um múltiplo desta na equação diferencial o resultado é zero.

$\rightsquigarrow$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Método de coeficientes indeterminados

Experimentemos, então, com $y_p = Axe^x$. Derivando e substituindo obtemos

$$\begin{cases} y_p' = Axe^x + Ae^x \\ y_p'' = Axe^x + 2Ae^x \end{cases}$$

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x \Rightarrow A = -\frac{8}{3}.$$

Portanto, uma solução particular será $y_p = -\frac{8}{3}xe^x$.

3º) A solução geral da equação dada é

$$\boxed{y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3}xe^x}.$$

Método de variação de parâmetros

Lagrange (1774)

Vantagens

- É aplicável a equações de qualquer ordem.
- Sempre produz uma solução particular de y_p (desde que a equação homogénea associada seja resolúvel).
- Não está limitado
  - nem a casos onde a função de entrada é uma combinação determinada de uns poucos tipos de funções (somas e produtos de polinómios, exponenciais, senos e cossenos),
  - nem a equações diferenciais com coeficientes constantes.

Método de variação de parâmetros

Consideremos a ED linear de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{18}$$

que na sua forma padrão resulta

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \tag{19}$$

sendo $P(x)$, $Q(x)$ e $f(x)$ funções contínuas em algum intervalo I.

Método de variação de parâmetros

Ideia básica

Procuraremos uma solução particular de (19) da forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{20}$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em I da forma homogénea associada a (18).

Derivando duas vezes temos

$$y_p'(x) = u_1 y_1' + y_1 u_1' + u_2 y_2' + y_2 u_2',$$
$$y_p''(x) = u_1 y_1'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' + y_2 u_2'' + u_2' y_2'.$$

$\rightsquigarrow$

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Método de variação de parâmetros

Substituindo em (20) e agrupando termos

$$\begin{aligned}
& y_p''(x) + P(x)y_p' + Q(x)y_p \\
&= u_1 \Bigg[\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{\overset{\shortparallel}{0}} \Bigg] + u_2 \Bigg[\underbrace{y_2'' + Py_2' + Qy_2}_{\overset{\shortparallel}{0}} \Bigg] \\
&\quad + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + y_2 u_2'' + u_2' y_2' + P\left[y_1 u_1' + y_2 u_2'\right] + y_1' u_1' + y_2' u_2' \\
&= \frac{d}{dx}\left[y_1 u_1'\right] + \frac{d}{dx}\left[y_2 u_2'\right] + P\left[y_1 u_1' + y_2 u_2'\right] + y_1' u_1' + y_2' u_2' \\
&= \frac{d}{dx}\left[y_1 u_1' + y_2 u_2'\right] + P\left[y_1 u_1' + y_2 u_2'\right] + y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x).
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

Método de variação de parâmetros

Se impomos a condição de que o que está entre colchetes em cor de laranja na última linha seja zero, então a equação fica reduzida à parte em azul.
Portanto, temos um sistema de duas equações com duas incógnitas

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= f(x), \end{cases}$$

que resolveremos utilizando a regra de Cramer, de modo que

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \\ u_2' &= \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}, \end{aligned} \tag{21}$$

$\rightsquigarrow$

Método de variação de parâmetros

onde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}.$$

onde W representa o wronskiano de y_1 e y_2, por cuja independência linear em I sabemos que $W(y_1, y_2) \neq 0 \ \forall x \in I$.

Finalmente, as funções u_1 e u_2 determinam-se integrando (21).

Método de variação de parâmetros

Método

Para resolver uma ED $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$ procederemos do seguinte modo:

1. Achamos a função complementar $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$.
2. Calculamos o wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$.
3. Pomos a ED na forma padrão $y'' + Py' + Qy = f(x)$.
4. Achamos u_1 e u_2 por integração.
5. Uma solução particular da ED é $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$.
6. A solução geral da ED é

$$y = y_c + y_p.$$

Método de variação de parâmetros

Exercício 3.4.3 (a solução geral utilizando variação de parâmetros)

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$$

Resolução

1º) Resolvemos a equação homogénea associada

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

$$m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 4 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

Método de variação de parâmetros

Portanto, a função complementar é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

2º) Identificamos $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{4x}$ e calculamos o wronskiano

$$W(e^x, e^{4x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 3e^{5x}.$$

3º) Posto que a ED já está na forma padrão, identificamos $f(x) = 8e^x$.

Teoria geral das equações lineares
Redução de ordem
Equações lineares homogéneas com coef. constantes
Equações lineares não homogéneas: métodos
Equações não lineares
Sistemas lineares de primeira ordem

Método de variação de parâmetros

4º) Para calcular u_1 e u_2 temos, previamente, que

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{4x} \\ 8e^x & 4e^{4x} \end{vmatrix} = -8e^{5x},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 8e^x \end{vmatrix} = 8e^{2x}.$$

Assim obtemos

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-8e^{5x}}{3e^{5x}} = -\frac{8}{3} \qquad \Rightarrow u_1 = -\frac{8}{3}x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{8e^{2x}}{3e^{5x}} = \frac{8}{3}e^{-3x} \qquad \Rightarrow u_2 = -\frac{8}{9}e^{-3x}$$

Método de variação de parâmetros

5º) Então, uma solução particular é

$$y_p = -\frac{8}{3}x \cdot e^x - \frac{8}{9}e^{-3x} \cdot e^{4x} = -\frac{8}{3}xe^x - \frac{8}{9}e^x.$$

Compare-se com a solução obtida com o método de coeficientes indeterminados no Exercício 3.4.2.

6º) A solução geral da equação dada é

$$\boxed{y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3}xe^x - \frac{8}{9}e^x}.$$

Método de variação de parâmetros

Equações de ordem superior

Consideremos a ED de n-ésima ordem na sua forma padrão

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x). \quad (22)$$

Seja

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

a sua função complementar.

Método de variação de parâmetros

Então uma solução particular é

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x),$$

onde os u'_k, $i = 1, 2, \ldots, n$, se obtêm a partir do sistema de n equações

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} y_1 u'_1 & + & y_2 u'_2 & + & \ldots & + & y_n u'_n & = & 0 \\ y'_1 u'_1 & + & y'_2 u'_2 & + & \ldots & + & y'_n u'_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} u'_1 & + & y_2^{(n-1)} u'_2 & + & \ldots & + & y_n^{n-1} u'_n & = & f(x) \end{array}\right.$$

com

$$u'_k = \frac{W_k}{W}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Apartados

Considerações importantes

Principais diferenças entre as ED lineares e não lineares

Propriedade	**Lineares**	**Não lineares**
Princípio de superposição	✓	×
Soluções singulares de ED de 1ª ordem	×	✓
Métodos analíticos para ED de 2ª ordem ou superior	✓	×

Redução de ordem

Consideremos ED não lineares de segunda ordem dos seguintes tipos:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \longrightarrow \text{falta a variável dependente } y$$
$$F(x, y, y', y'') = 0 \longrightarrow \text{falta a variável independente } x$$

Estes casos podem, às vezes, resolver-se utilizando métodos de primeira ordem.

Cada equação reduz-se a uma equação de primeira ordem mediante a substituição $u = y'$.

Redução de ordem

Exercício 3.5.1 (quando falta a variável dependente y)

$$y'' = 2x(y')^2.$$

Resolução

Tomamos $u = y' \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = y''$. A substituição reduz a ED de segunda ordem a uma ED de primeira ordem com variáveis separáveis (x: variável independente. u: variável dependente)

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = 2xdx \Leftrightarrow \int u^{-2}du = \int 2xdx$$

$$\Rightarrow -u^{-1} = x^2 + c_1^2.$$

$\rightsquigarrow$

Redução de ordem

Posto que $u^{-1} = \dfrac{1}{y'}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c_1^2} \Rightarrow y = -\int \frac{dx}{x^2 + c_1^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\frac{x}{c_1} + c_2}.$$

Redução de ordem

Exercício 3.5.2 (quando falta a variável independente x)

$$yy'' = (y')^2.$$

Resolução

Tomamos $u = y' \Rightarrow y'' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{du}{dy}$ (regra da cadeia).
A substituição reduz a ED de segunda ordem a uma ED de primeira ordem com variáveis separáveis (y: variável independente. u: variável dependente)

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) = u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}.$$

$\rightsquigarrow$

Redução de ordem

Integrando

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|u| = \ln|y| + c_1 \Rightarrow u = c_2 y.$$

Substituindo agora $u = \dfrac{dy}{dx}$, separando variáveis e integrando de novo

$$\frac{dy}{dx} = c_2 y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = c_2 \int dx \Leftrightarrow \ln|y| = c_2 x + c_3$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c_4 e^{c_2 x}}.$$

Apartados

Teoria geral das equações lineares

Redução de ordem

Equações lineares homogéneas com coeficientes constantes

Equações lineares não homogéneas: métodos de coeficientes indeterminados e de variação de parâmetros

Equações não lineares

Sistemas lineares de primeira ordem

Método de eliminação

Sistema de n EDO lineares/não lineares
de **primeira ordem** com *n* incógnitas

$$\updownarrow$$

Uma **única EDO** linear/não linear de **ordem n**

Licença