USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 8

Séries e resíduos

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Sucessões e séries

1.1. Escreve os primeiros cinco termos das sucessões dadas.

a) $\{5i^n\}$.

b) $\{1 + e^{n\pi i}\}$.

1.2. Determina se as seguintes sucessões convergem ou divergem.

a) $\left\{\dfrac{3ni+2}{n+ni}\right\}$.

b) $\left\{\dfrac{(ni+2)^2}{n^2 i}\right\}$.

c) $\left\{\dfrac{n+i^n}{\sqrt{n}}\right\}$.

1.3. Determina se a sucessão $\left\{\dfrac{4n+3ni}{2n+i}\right\}$ converge a um número complexo L calculando $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n)$.

1.4. Usa a sucessão de somas parciais para demonstrar que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2i} - \frac{1}{k+1+2i}\right)$$

é convergente.

1.5. Determina se as seguintes séries geométricas são convergentes ou divergentes. Se forem convergentes, soma-as.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1-i)^k.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k.$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}3\left(\frac{2}{1+2i}\right)^k.$

1.6. Encontra o círculo e o raio de convergência das seguintes séries de potências.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{k+1}}(z-2i)^k.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k2^k}(z-1-i)^k.$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1+3i)^k(z-i)^k.$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-4-3i)^k}{5^{2k}}.$

2 Séries de Taylor e de Laurent

2.1. Expande as seguintes funções numa série de Maclaurin e calcula o raio de convergência de cada série.

a) $f(z)=\dfrac{z}{1+z}.$

b) $f(z)=\dfrac{1}{(1+2z)^2}.$

c) $f(z)=e^{-2z}.$

2.2. Expande a função $f(z)=\dfrac{1}{z}$ numa série de Taylor centrada no ponto $z_0=1$ e determina o seu raio de convergência.

2.3. Sem realizares a sua expansão, determina o raio de convergência da série de Taylor da função

$$f(z)=\frac{4+5z}{1+z^2},$$

centrada em $z_0=2+5i$.

2.4. Expande as seguinte funções numa série de Laurent válida para cada um dos domínios anulares indicados.

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$; $0 < |z|$.

b) $f(z) = e^{\frac{-1}{z^2}}$; $0 < |z|$.

c) $f(z) = \dfrac{e^z}{z-1}$; $0 < |z-1|$.

3 Zeros e polos

3.1. Demonstra que $z_0 = 0$ é uma singularidade removível da função $f(z) = \dfrac{e^{2z}-1}{z}$ e indica o valor de $f(0)$ de modo que f seja analítica em $z = 0$.

3.2. Determina os zeros e a sua ordem para as seguintes funções.

a) $f(z) = (z + 2 - i)^2$.

b) $f(z) = z^4 + z^2$.

c) $f(z) = e^{2z} - e^z$.

3.3. Usa uma série de Maclaurin ou de Taylor para determinar a ordem dos zeros das seguintes funções.

a) $f(z) = z(1 - \cos z^2)$; $z_0 = 0$.

b) $f(z) = 1 - e^{z-1}$; $z_0 = 1$.

3.4. Determina a ordem dos polos das seguintes funções.

a) $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^2+2z+5}$.

b) $f(z) = \dfrac{1+4i}{(z+2)(z+i)^4}$.

c) $f(z) = \operatorname{cotg} z$.

d) $f(z) = \dfrac{1-\cosh z}{z^4}$.

e) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$.

4 Resíduos e teorema dos resíduos

4.1. Usa a série de Laurent para calcular os resíduos indicados.

a) $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z+4)}$; Res$(f(z), 1)$.

b) $f(z) = \dfrac{4z-6}{z(2-z)}$; Res$(f(z), 0)$.

c) $f(z) = e^{-2/z^2}$; Res$(f(z), 0)$.

4.2. Usa as fórmulas dos resíduos para calculá-los nos polos das seguintes funções.

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+16}$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^3-2z^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$.

d) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$.

4.3. Usa o teorema dos resíduos de Cauchy para avaliar as seguintes integrais ao longo dos caminhos indicados.

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}dz$; A) $|z| = \frac{1}{2}$, B) $|z| = \frac{3}{2}$, C) $|z| = 3$.

b) $\displaystyle\oint_C z^3 e^{-1/z^2} dz$; A) $|z| = 5$, B) $|z+i| = 2$, C) $|z-3| = 1$.

4.4. Usa o teorema dos resíduos de Cauchy para avaliar as seguintes integrais ao longo dos caminhos indicados.

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}dz$; $|z-3i| = 3$.

b) $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$; $|z| = 2$.

c) $\displaystyle\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$; $|z| = 2$.

d) $\displaystyle\oint_C \operatorname{cotg} \pi z\, dz$; C é o retângulo definido por $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $y = -1$, $y = 1$.

5 Cálculo de integrais reais

5.1. Avalia as seguintes integrais trigonométricas.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta} d\theta.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\operatorname{sen}\theta} d\theta.$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5+4\cos\theta} d\theta.$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta.$

5.2. Avalia o valor principal de Cauchy das seguintes integrais impróprias.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2} dx.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} dx.$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx.$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+1} dx.$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx.$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)} dx.$

5.3. Usa um caminho indentado e os resíduos para demonstrares o seguinte resultado.

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

Soluções

1.1 a) $5i, -5, -5i, 5, 5i$.

b) $0, 2, 0, 2, 0$.

1.2 a) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

b) i.

c) ∞.

1.3 $L = 2 + \dfrac{3}{2}i$.

1.4 $L = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

1.5 a) Divergente.

b) Convergente: $-\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$.

c) Convergente: $\dfrac{9}{5} - \dfrac{12}{5}i$.

1.6 a) $|z - 2i| = \sqrt{5}$; $R = \sqrt{5}$.

b) $|z - 1 - i| = 2$; $R = 2$.

c) $|z - i| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $R = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

c) $|z - 4 - 3i| = 25$; $R = 25$.

2.1 a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k$; $R = 1$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k (2z)^{k-1}$; $R = \dfrac{1}{2}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (2z)^k$; $R = \infty$.

2.2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k$; $R = 1$.

2.3 $R = 2\sqrt{5}$.

2.4 a) $\frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \ldots$.

b) $1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^6} + \ldots$.

c) $\frac{e}{z-1} + e + \frac{e(z-1)}{2} + \frac{e(z-1)^2}{6} + \ldots$.

3.1 $a_{-k} = 0 \Rightarrow$ singul. removível. $f(z) = z + 2z + \frac{4}{3}z^2 + \ldots \Rightarrow f(0) = 0$.

3.2 a) $z_0 = -2 + i$ (segunda ordem).

b) $z_0 = i$ e $z_0 = -i$ (primeira ordem). $z_0 = 0$ (segunda ordem).

c) $z_0 = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ (primeira ordem).

3.3 a) $z_0 = 0$ (quinta ordem).

b) $z_0 = 0$ (primeira ordem).

3.4 a) $Z = -1 + 2i$ e $z = -1 - 2i$ (polos simples).

b) $z = -2$ (polo simples) e $z = -i$ (polo de quarta ordem).

c) $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (polos simples).

d) $z = 0$ (polo de segunda ordem).

e) $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ (polos simples).

4.1 a) $\operatorname{Res}(f(z), 1) = \frac{2}{5}$.

b) $\operatorname{Res}(f(z), 0) = -3$.

c) $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 0$.

4.2 a) $\operatorname{Res}(f(z), 4i) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Res}(f(z), -4i) = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{3}$, $\operatorname{Res}(f(z), -2) = -\frac{1}{12}$, $\operatorname{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{4}$.

c) $\operatorname{Res}(f(z), -1) = 6$, $\operatorname{Res}(f(z), -2) = -31$, $\operatorname{Res}(f(z), -3) = 30$.

d) $\operatorname{Res}(f(z), 0) = -\frac{3}{\pi^4}$, $\operatorname{Res}(f(z), \pi) = \frac{\pi^2 - 6}{2\pi^4}$.

4.3 Ver Figura 1.

a) A) 0. B) $\frac{2\pi}{9}i$. C) 0.

b) A) πi. B) πi. C) 0.

4.4 Ver Figura 2.

a) $\dfrac{\pi}{3}$.

b) 0.

c) $2\pi i \cosh 1$.

d) $6i$.

5.1 Ver Figura 3.

a) $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

b) 0.

c) $\dfrac{\pi}{4}$.

d) $\dfrac{\pi}{6}$.

5.2 Ver Figura 4.

a) π.

b) $\dfrac{\pi}{16}$.

c) $\dfrac{3\pi}{8}$.

d) $\dfrac{\pi}{2}$.

e) $\dfrac{\pi}{e}$.

f) $\dfrac{\pi}{e}$.

g) $\dfrac{\pi}{e^3}$.

h) $\dfrac{\pi}{8}\left(e^{-1} - \dfrac{e^{-3}}{3}\right)$.

5.3 Demonstra-se usando o teorema de Cauchy–Goursat sobre o caminho indentado e tomando $R \to \infty$ e $r \to 0$ (ver Figura 5).

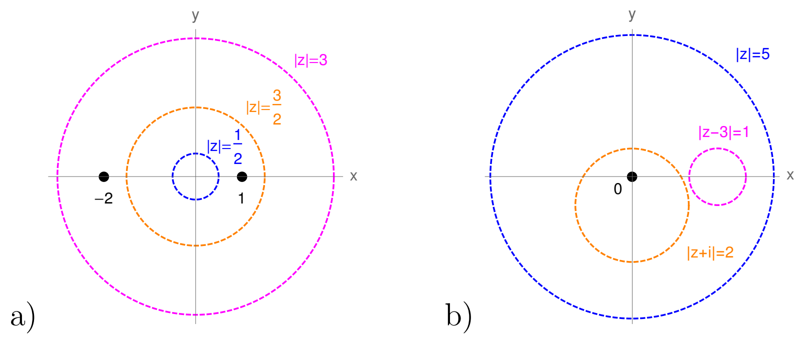

Figura 1: Exemplo 4.3

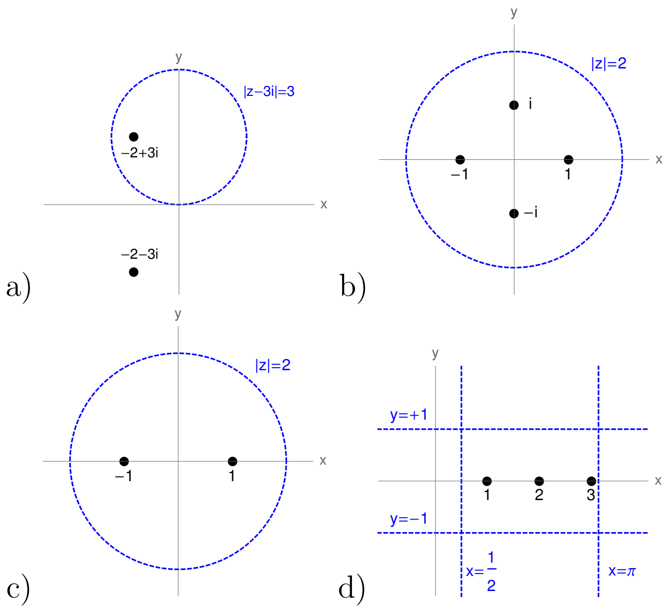

Figura 2: Exemplo 4.4

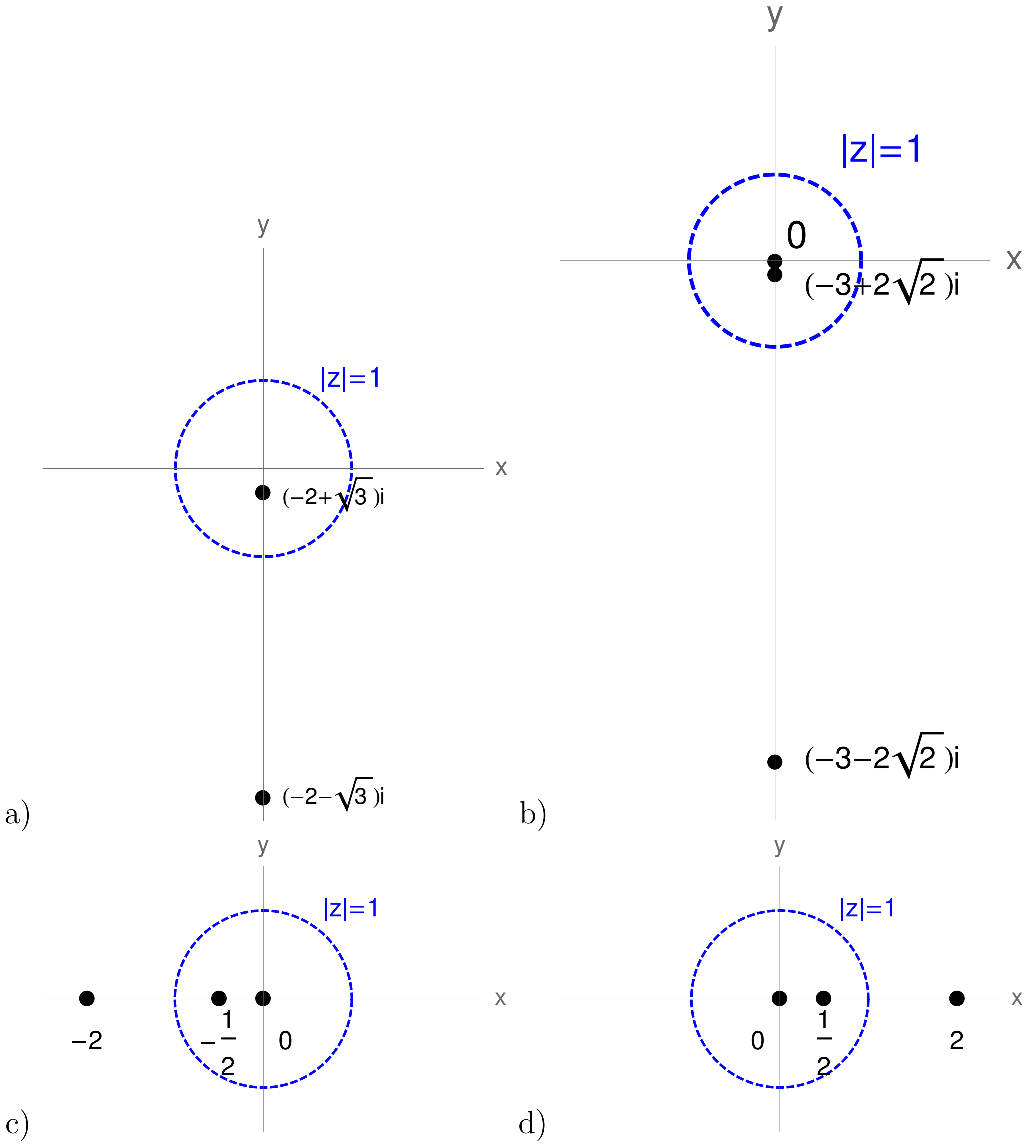

Figura 3: Exemplo 5.1

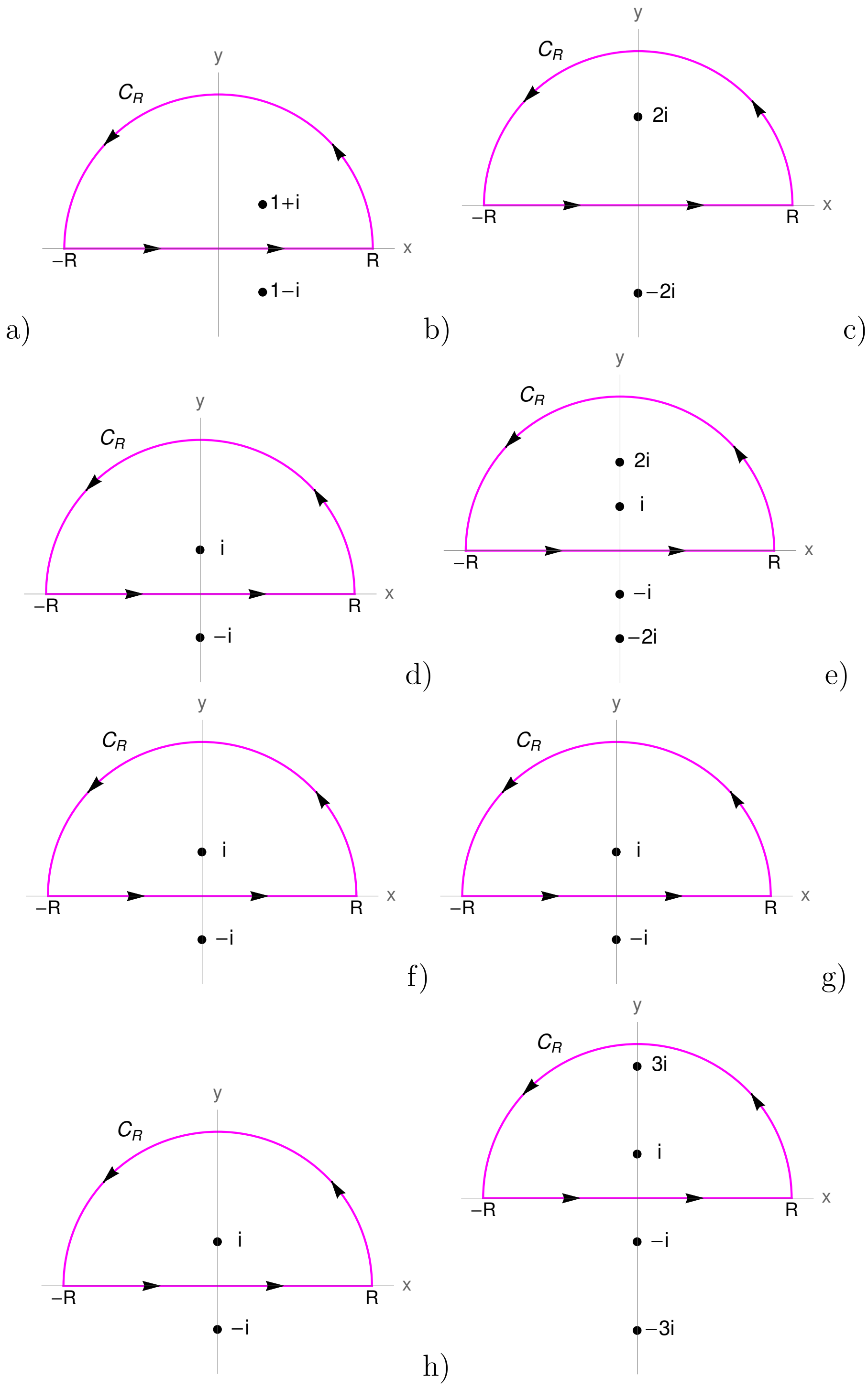

Figura 4: Exemplo 5.2

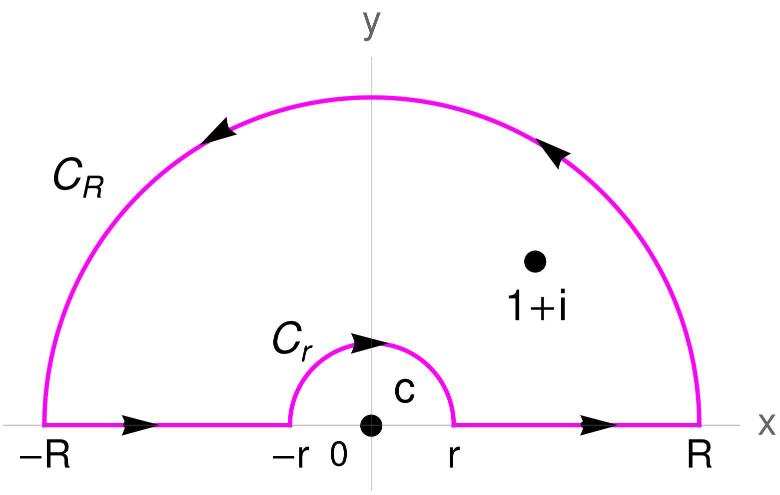

Figura 5: Exemplo 5.3