DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 5

Números complexos

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Definição e propriedades algébricas

1.1. Escreve os números dados na forma $a + ib$.

a) $2i^3 - 3i^2 + 5i$.

b) i^8.

c) $(5 - 9i) + (2 - 4i)$.

d) $i(5 + 7i)$.

e) $(2 - 3i)(4 + i)$.

f) $(2 + 3i)^2$.

g) $\dfrac{2}{i}$.

h) $\dfrac{2 - 4i}{3 + 5i}$.

i) $\dfrac{(3 - i)(2 + 3i)}{1 + i}$.

j) $\dfrac{(5 - 4i) - (3 + 7i)}{(4 + 2i) + (2 - 3i)}$.

k) $i(1 - i)(2 - i)(2 + 6i)$.

l) $(3 + 6i) + (4 - i)(3 + 5i) + \dfrac{1}{2 - i}$.

m) $\left(\dfrac{i}{3-i}\right)\left(\dfrac{1}{2+3i}\right)$.

1.2. Determina as expressões dadas.

- *a*) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.
- *b*) $\operatorname{Im}(2z+4\bar{z}-4i)$.
- *c*) $|z-1-3i|$.

1.3. Resolve as seguintes equações.

- *a*) $2z = i(2+9i)$.
- *b*) $z^2 = i$.
- *c*) $z + 2\bar{z} = \dfrac{2-i}{1+3i}$.

1.4. Determina qual dos números complexos, $z_1 = 10+8i$ e $z_2 = 11-6i$, está mais próximo à origem.

2 O plano complexo

2.1. Demonstra que para todos os números complexos z no círculo $x^2+y^2 = 4$ se satisfaz $|z+6+8i| \leq 12$.

3 Forma polar

3.1. Escreve os seguintes números complexos em forma polar.

- *a*) 2.
- *b*) $-3i$.
- *c*) $1+i$.
- *d*) $-\sqrt{3}+i$.
- *e*) $\dfrac{3}{-1+i}$.

3.2. Escreve os seguintes números complexos dados em forma polar na forma $a+ib$.

- *a*) $5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

b) $6\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$.

3.3. Calcula z_1z_2 e $\frac{z_1}{z_2}$ e escreve os resultados na forma $a+ib$ para

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right),$$
$$z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right).$$

4 Potências e raízes

4.1. Calcula as seguintes potências.

a) $(1+i\sqrt{3})^9$.

b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$.

c) $\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}.\right)^{12}$

4.2. Calcula todas as raízes seguintes e representa-as sobre a correspondente circunferência centrada na origem.

a) $(8)^{1/3}$.

~~*b*)~~ $(i)^{1/2}$.

c) $(-1+i\sqrt{3})^{1/2}$.

4.3. Determina todas as soluções da equação $z^4+1=0$ e representa-as graficamente.

4.4. Expressa o seguinte número complexo primeiro em forma polar e logo na forma $a+ib$.

$$z=\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$$

4.5. Se $z_1=-1$ e $z_2=5i$, verifica que

$$\mathsf{Arg}\,(z_1z_2)\neq\mathsf{Arg}\,(z_1)+\mathsf{Arg}\,(z_2).$$

5 Topologia do plano complexo

5.1. Representa graficamente os seguintes conjuntos no plano complexo.

- *a*) $\operatorname{Re}(z) = 5$.
- *b*) $\operatorname{Im}(\bar{z} + 3i) = 6$.
- *c*) $|z - 3i| = 2$.
- *d*) $|z - 4 + 3i| = 5$.

5.2. Representa graficamente os seguintes conjuntos no plano complexo determina se cada um desses conjuntos é um domínio.

- *a*) $\operatorname{Re}(z) < -1$.
- *b*) $\operatorname{Im}(z) > 3$.
- *c*) $2 < \operatorname{Re}(z - 1) < 4$.
- *d*) $\operatorname{Re}(z^2) > 0$.
- *e*) $0 \leq \arg z \leq \dfrac{2\pi}{3}$.
- *f*) $|z - i| > 1$.
- *g*) $2 < |z - i| < 3$.

5.3. Descreve o conjunto de pontos no plano complexo que satisfaz $|z + 1| = |z - i|$.

5.4. Descreve o conjunto de pontos no plano complexo que satisfaz $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

Soluções

1.1 a) $3+3i$.

b) 1.

c) $7-13i$.

d) $-7+5i$.

e) $11-10i$.

f) $-5+12i$.

g) $-2i$.

h) $-\dfrac{7}{17}-\dfrac{11}{17}i$.

i) $8-i$.

j) $\dfrac{23}{37}-\dfrac{64}{37}i$.

k) $20i$.

l) $\dfrac{102}{5}+\dfrac{116}{5}i$.

m) $\dfrac{7}{130}+\dfrac{9}{130}i$.

1.2 a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

b) $\operatorname{Im}(2z+4\bar{z}-4i)=-2y-4$.

c) $|z-1-3i|=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$.

1.3 a) $z=-\dfrac{9}{2}+i$.

b) $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $z=-\dfrac{1}{30}+i\dfrac{7}{10}$.

1.4 $z_2=11-6i$

2.1 Satisfaz-se.

3.1 a) 2.

b) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

c) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$.

d) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

e) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

3.2 a) $-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{5}{2}$.

b) $5.5433+2.2961i$.

3.3 a) $z_1z_2=8i$.

b) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}-i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

4.1 a) -512.

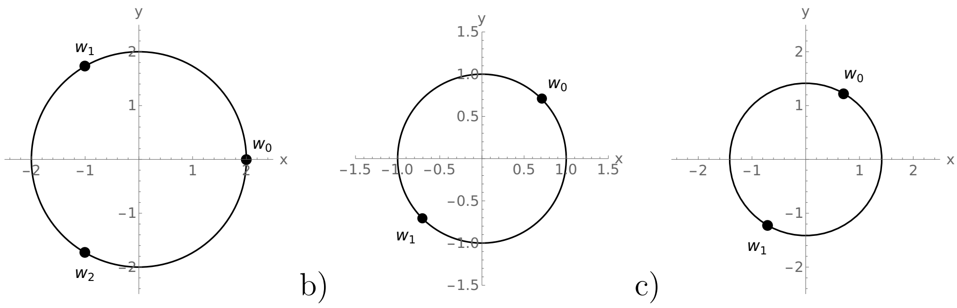
b) $\dfrac{i}{32}$.

c) $-i$.

4.2 a) $w_0 = 2$, $w_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $w_2 = -1 - \sqrt{3}i$.

b) $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $w_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $w_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



a) b) c)

Figura 1: Exemplo 4.2

4.3 $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $w_1 = -1 + i$, $w_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $w_3 = 1 - i$.

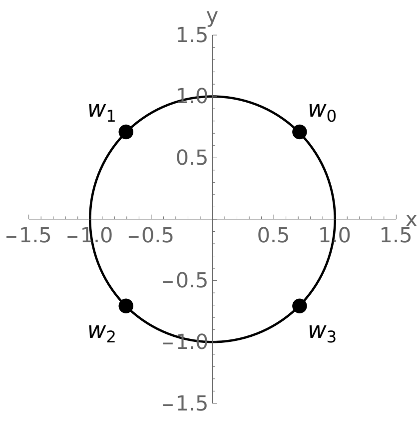


Figura 2: Exemplo 4.3

4.4 $z = 32\left(\cos\dfrac{13\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{13\pi}{6}\right)$, $z = 16\sqrt{3} + 16i$.

4.5 Verifica-se.

5.1 a) $x = 5$.

b) $y = -3$.

c) $x^2 + (y-3)^2 = 2^2$.

d) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5^2$.

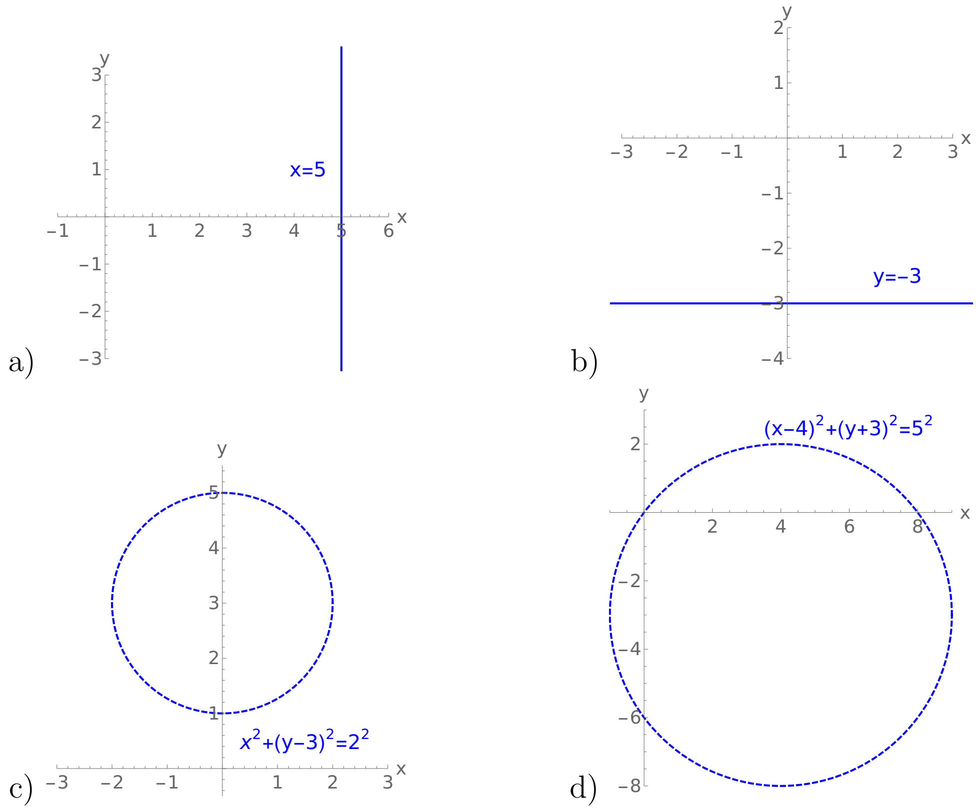


Figura 3: Exemplo 5.1

5.2 a) $x < -1$ (é domínio).

b) $y > 3$ (é domínio).

c) $3 < x < 5$ (é domínio).

d) $x^2 - y^2 > 0$ (não é domínio).

e) $0 \leq \arg z \leq \dfrac{2\pi}{3}$ (não é domínio).

f) $x^2 + (y-1)^2 > 1$ (é domínio).

g) $2^2 < x^2 + (y-1)^2 < 3^2$ (é domínio).

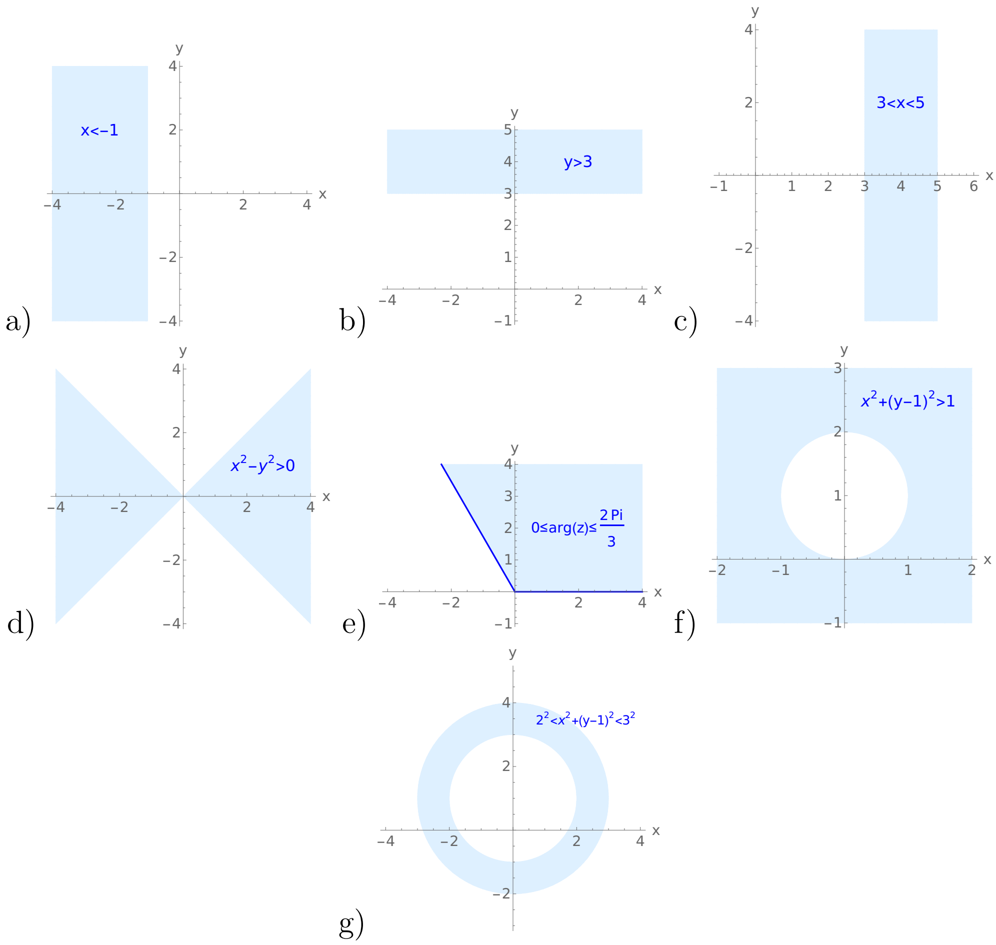


Figura 4: Exemplo 5.2

5.3 $y = -x$.

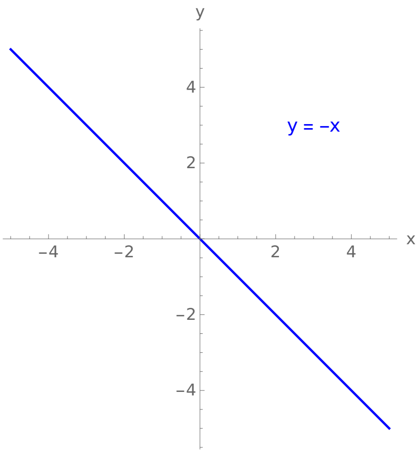


Figura 5: Exemplo 5.3

5.4 $x^2 - y^2 = 1$.

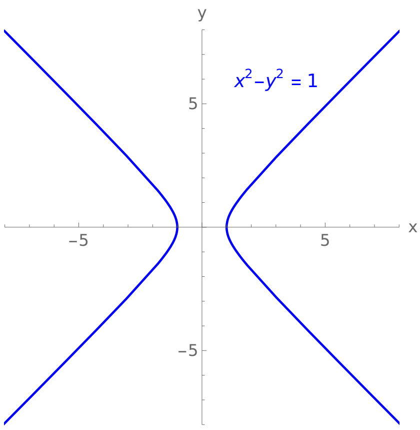


Figura 6: Exemplo 5.4