T6. Funções holomorfas

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Apartados

Introdução

Definição 6.1.1 (função de uma variável complexa)

Seja S um conjunto de números complexos. Uma **função complexa** f definida em S é uma regra que associa a cada z de S um número complexo w.

Dizemos que w é o **valor** ou a **imagem** de f em z, ou seja,

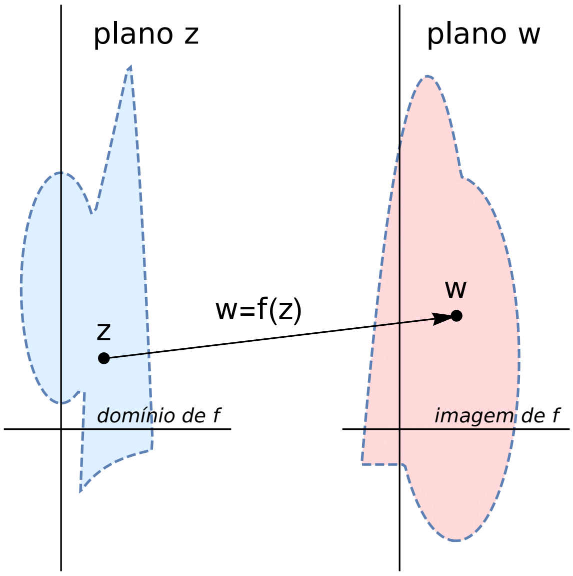
$$w = f(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)\,,$$

onde u e v (que são funções reais) constituem as partes real e imaginária de w.

O conjunto S é denominado o **domínio de definição** de f e a imagem de todo o domínio de definição de S é a **imagem** de f.

Mapeamento complexo

Ainda que não é possível representar a gráfica de uma função complexa $w = f(z)$, podemos interpretá-la como uma **aplicação** ou **transformação** do plano z no plano w.



Mapeamento complexo

Exercício 6.1.2 (mapeamento complexo)

Acha a imagem da linha $\text{Re}\,(z) = 1$ sob o mapeamento $f(z) = z^2$.

Resolução

Para a função $f(z) = z^2$ temos

$$f(z) = z^2 = (x + iy)(x + iy) = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Isto é, $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$. Por outra parte, considerando $\text{Re}\,(z) = x$ e substituindo $x = 1$ em u e v, obtemos

$$\begin{cases} u(x, y) = 1 - y^2, \\ v(x, y) = 2y, \end{cases}$$

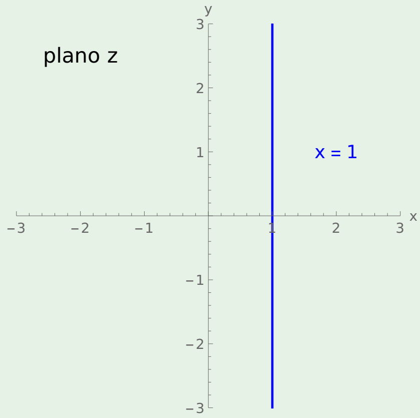
que são as equações paramétricas da curva no plano w.

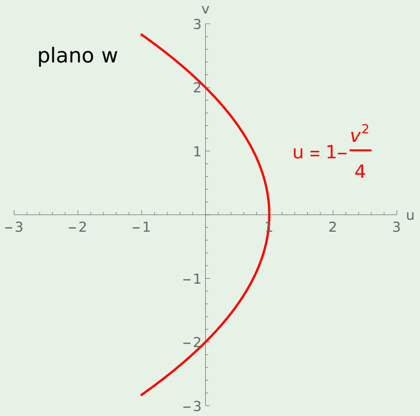
Mapeamento complexo

Substituindo $y = \frac{v}{2}$ na primeira equação elimina-se y e obtemos

$$u = 1 - \frac{v^2}{4},$$

de maneira que a imagem da reta é uma parábola.





Mapeamento complexo

Definição 6.1.3 (curva paramétrica no plano complexo)

Se $x(t)$ e $y(t)$ são as funções de valores reais de uma variável real t, então o conjunto C formado por todos os pontos $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, chama-se **curva paramétrica complexa**.
A função de valores complexos de variável real t, $z(t) = x(t) + iy(t)$, chama-se **parametrização** de C.

Funções complexas como campos vetoriais

Função complexa $w = f(z) \longrightarrow$ fluxo bidimensional (w representa a velocidade e a direção do fluxo em z)

Seja $z(t) = x(t) + iy(t)$ uma parametrização do caminho de uma partícula no fluxo e $z' = x'(t) + iy'(t)$ o vetor tangente

$\Rightarrow z'(t) = x'(t) + iy'(t) = f(z(t)) = f(x(t) + iy(t))$.

Posto que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, o caminho da partícula verifica

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x, y), \end{cases}$$

cuja família de soluções são as **linhas de corrente** do fluxo planar associado a $f(z)$.

Funções complexas como campos vetoriais

Exercício 6.1.4 (linhas de corrente)

Acha as linhas de corrente do fluxo associado a $f(z) = z^2$.

Resolução

Temos

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2, \\ v(x, y) = 2xy. \end{cases}$$

As linhas de corrente do fluxo associado a $f(z)$ devem satisfazer

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy. \end{cases}$$

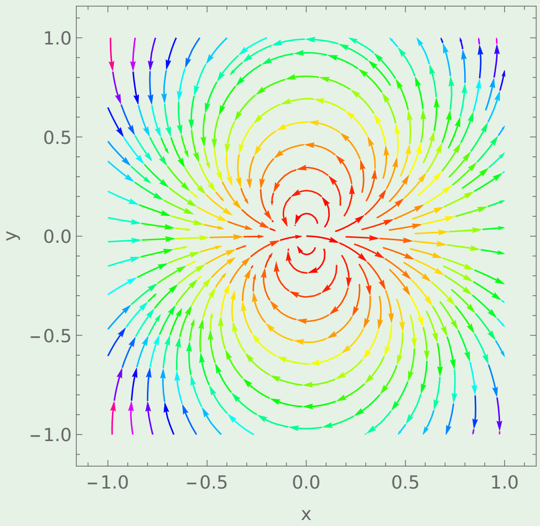
$\rightsquigarrow$

Funções complexas como campos vetoriais

Chegamos à equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = c\,y,$$

cuja solução representa uma família de circunferências com centro no eixo y que passam pelo zero.



Apartados

Limite

Definição 6.2.1 (limite de uma função)

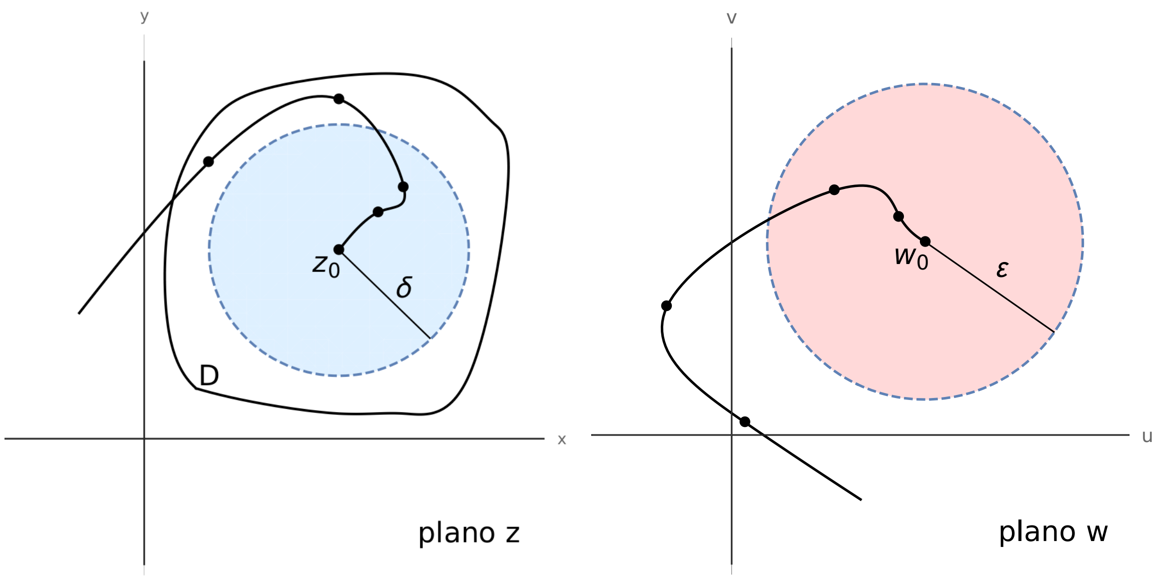
Suponhamos que f seja um função definida em todos os pontos z de alguma vizinhança perfurada de um ponto z_0. Diremos que $f(z)$ tem um **limite** em z_0, isto é,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0,$$

se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Limite

Significado geométrico do limite complexo



Teoremas de limites

Teorema 6.2.2 (unicidade)

Se um limite de uma função $f(z)$ existir num ponto z_0, ele é único.

Teorema 6.2.3 (partes real e imaginária de um limite)

Suponhamos que

$$\begin{aligned} z &= x + iy, & f(z) &= u(x,y) + iv(x,y), \\ z_0 &= x_0 + iy_0, & w_0 &= u_0 + iv_0. \end{aligned}$$

Então

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = w_0.$$

Teoremas de limites

Teorema 6.2.4 (limites da soma, do produto e do quociente)

Suponhamos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1,$$

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = w_2.$$

Então

- $\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = w_1 \pm w_2$,
- $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = w_1 w_2$,
- $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_1}{w_2}, \quad w_2 \neq 0.$

Continuidade

Definição 6.2.5 (continuidade num ponto)

A função f é **contínua** num ponto z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Teorema 6.2.6 (continuidade das partes real e imaginária)

Seja a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $z_0 = x_0 + iy_0$, então f é contínua no ponto z_0 se, e somente, se ambas funções reais u e v são contínuas no ponto z_0.

Funções de uma variável complexa
Limites e continuidade
Diferenciabilidade. Equações de Cauchy–Riemann
Algumas funções elementares

Continuidade

Teorema 6.2.7 (continuidade de funções polinomiais)

*Um **polinómio** de grau n*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+,$$

com $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, é contínuo em todo o plano z.

Continuidade

Teorema 6.2.8 (função limitada)

Se uma função f for contínua em toda uma região R que é fechada e também limitada, então existirá um número real não negativo M tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in R.$$

Apartados

Diferenciabilidade

Definição 6.3.1 (derivada)

Seja f uma função definida numa vizinhança de um ponto z_0. A **derivada** de f em z_0 é o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

ou

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \qquad \Delta z = z - z_0.$$

e, se existir, diremos que a função f é **complexa diferenciável** ($\mathbb{C}$–diferenciável) em z_0.

Notação $\quad w = f(z),\ f'(z_0) = \left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$

Diferenciabilidade

Regras de derivação

constante $\dfrac{d}{dz}c = 0,\ \dfrac{d}{dz}cf(z) = cf'(z),$

soma $\dfrac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z),$

produto $\dfrac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + g(z)f'(z),$

quociente $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2},$

potência $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1},\ n \in \mathbb{Z},$

regra da cadeia $\dfrac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z).$

Diferenciabilidade

Exemplo

Derivar $f(z) = \dfrac{z^2}{4z+1}$.

$$f'(z) = \frac{(4z+1)\cdot 2z - z^2\cdot 4}{(4z+1)^2} = \frac{4z^2+2z}{(4z+1)^2}.$$

Diferenciabilidade

Definição 6.3.2 (função holomorfa)

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, uma função complexa. Dizemos que f é **holomorfa em** $z_0 \in \Omega$ se é diferenciável numa vizinhança de z_0.
Dizemos que f é holomorfa em Ω se é holomorfa em todos os pontos de Ω (escreve-se $f \in H(\Omega)$).

Em geral, um ponto z em que uma função f não é holomorfa chama-se **ponto singular** ou **singularidade**.

Nota É frequente o uso do termo *analítica* como sinónimo de *holomorfa*, apesar de que o primeiro se refere a uma função igual à sua série de Taylor num disco aberto. Porém, em análise complexa prova-se que as funções holomorfas também são analíticas.

Diferenciabilidade

Definição 6.3.3 (função inteira)

Dizemos que uma função f é **inteira** se é holomorfa em todo ponto z do plano complexo, isto é, se $f \in H(\mathbb{C})$.

Teorema 6.3.4 (funções polinomiais e racionais)

i) *Uma função polinomial complexa* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *é uma função inteira.*

ii) *Uma função racional complexa* $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, *onde* p *e* q *são funções polinomiais, é holomorfa num domínio* D *que não contém nenhum ponto* z_0 *para o qual* $q(z_0) = 0$.

Diferenciabilidade

Teorema 6.3.5 (diferenciabilidade $\Rightarrow$ continuidade)

Se f *é* ***derivável*** *num ponto* z_0, *então* f *é* ***contínua*** *em* z_0.

Teorema 6.3.6 (infinitamente diferenciável)

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ *aberto, uma função* ***holomorfa***, *então* f *é* ***infinitamente diferenciável***.

Teorema 6.3.7 (regra de L'Hôpital)

Suponhamos que f *e* g *são funções holomorfas num ponto* z_0 *e* $f(z_0)$=0, $g(z_0)$=0, *mas* $g'(z_0) \neq 0$. *Então*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Equações de Chauchy-Riemann

Teorema 6.3.8 (equações de Cauchy–Riemann)

Suponhamos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e que exista $f'(z)$ num ponto $z_0 = x_0 + iy_0$. Então, as derivadas parciais de primeira ordem de u e v existem em (x_0, y_0) e satisfazem nesse ponto as ***equações de Cauchy–Riemann***

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}} \qquad (1)$$

Funções de uma variável complexa
Limites e continuidade
Diferenciabilidade. Equações de Cauchy–Riemann
Algumas funções elementares

Equações de Chauchy-Riemann

Demonstração.

Posto que $f'(z)$ existe

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Tomando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ transforma-se em

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \cdots$$

$$\cdots \frac{-u(x,y) - iv(x,y)}{}$$

$\rightsquigarrow$

Equações de Chauchy-Riemann

Δz pode aproximar-se a zero desde qualquer direção. Tomemos a direção horizontal, então $\Delta z = \Delta x$ e

$$\begin{aligned} f'(z) = & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \\ & + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ & \Leftrightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2}$$

$\rightsquigarrow$

Funções de uma variável complexa
Limites e continuidade
Diferenciabilidade. Equações de Cauchy–Riemann
Algumas funções elementares

Equações de Chauchy-Riemann

Fazendo o mesmo, mas tomando $\Delta z \to 0$ verticalmente, então $\Delta z = i\Delta y$, temos que

$$\begin{aligned} f'(z) = & \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} \\ & + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ & \Leftrightarrow f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3}$$

Igualando as partes real e imaginária de (2) e (3) obtemos as equações de Cauchy–Riemann. $\square$

Equações de Chauchy-Riemann

Exercício 6.3.9 (função não holomorfa)

Demonstra que a função $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ não é holomorfa em nenhum ponto.

Resolução

Identificamos $u(x, y) = 2x^2 + y$ e $v(x, y) = y^2 - x$.

Calculamos as derivadas parciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x \quad , \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad , \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = -1. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$

Funções de uma variável complexa
Limites e continuidade
Diferenciabilidade. Equações de Cauchy–Riemann
Algumas funções elementares

Equações de Chauchy-Riemann

Vejamos se se satisfazem as equações de Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 4x = 2y \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 1 = -(-1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1. \end{cases}$$

Porém, para qualquer ponto na reta $y = 2x$ não existe nenhuma vizinhança de z na qual f seja derivável $\Rightarrow$ f não é holomorfa em nenhum ponto.

Equações de Chauchy-Riemann

As equações de Cauchy–Riemann são uma condição necessária, mas não suficiente, para garantir que uma função seja holomorfa.

Teorema 6.3.10 (teorema de Looman–Menchoff, 1923–1936)

Seja $f = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função contínua no disco aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Suponhamos que as derivadas parciais de primeira ordem de $u(x,y)$ e $v(x,y)$ existem em cada ponto de Ω. Então

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow u, v \text{ satisfazem as equações de Cauchy–Riemann}$$

Equações de Chauchy-Riemann

Exercício 6.3.11 (função holomorfa)

Será $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ holomorfa em algum domínio?

Resolução

A função f é contínua exceto no ponto onde $x^2+y^2=0$, isto é, em $z=0$. Identificamos $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$. Comprovamos que se satisfazem as equações de Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = & -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

exceto em $z=0 \Rightarrow f(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Equações de Chauchy-Riemann

$$f \text{ holomorfa} \Rightarrow f \text{ diferenciável}$$
$$f \text{ holomorfa} \not\Leftarrow f \text{ diferenciável}$$

Teorema 6.3.12 (critério de diferenciabilidade)

Suponhamos que as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas, que têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa vizinhança de z e que satisfazem as equações de Cauchy–Riemann (1) em z.

Então, a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é diferenciável em z e a sua derivada é

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Funções de uma variável complexa
Limites e continuidade
Diferenciabilidade. Equações de Cauchy–Riemann
Algumas funções elementares

Equações de Chauchy-Riemann

Exercício 6.3.13 (derivada de uma função complexa)

Calcula a derivada, se existir, da função $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$.

Resolução

Num exemplo anterior provamos que f não era holomorfa em nenhum ponto, mas que satisfazia as equações de Cauchy–Riemann na reta $y = 2x$.
Posto que as funções

$$\begin{cases} u(x, y) = 2x^2 + y, & u_x = 4x, \quad u_y = 1 \\ v(x, y) = y^2 - x, & v_x = -1, \quad v_y = 2y, \end{cases}$$

são contínuas em cada ponto, deduzimos que f é derivável na reta $y = 2x$. Utilizamos (4) para calcular a derivada

$$f'(z) = 4x - i = 2y - i.$$

Equações de Chauchy-Riemann

Definição 6.3.14 (funções harmónicas)

Dizemos que uma função real $\phi(x, y)$ é **harmónica** num domínio Ω se tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{(sendo } \nabla \text{ o operador laplaciano)}$$

Teorema 6.3.15 (fonte de funções harmónicas)

Se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é holomorfa num domínio Ω, então as suas funções componentes u e v são harmónicas em Ω.

Apartados

A função exponencial

Cálculo de uma variável real

$$f(x) = e^x,$$
$$f'(x) = e^x,$$
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2).$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(em série de McLaurin)}$$

$\rightsquigarrow$

A função exponencial

Tomando $x = iy$ obtemos a fórmula de Euler

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Definição 6.4.1 (exponencial complexa)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

A função exponencial

Exercício 6.4.2 (exponencial)

Avalia e^{2+3i}.

Resolução

Identificando $x = 2$ e $y = 3$ chegamos a

$$e^z = e^{2+3i} = e^2 (\cos 3 + i \operatorname{sen} 3) = -7.3151 + 1.0427i.$$

A função exponencial

Teorema 6.4.3 (diferenciabilidade da exponencial)

A função exponencial e^z é inteira e a sua derivada é

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Teorema 6.4.4 (propriedades algébricas)

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ temos que

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{z_1+z_2}, \\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{z_1-z_2}, \\ (e^{z_1})^n &= e^{nz_1}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots . \end{aligned}$$

A função exponencial

Definição 6.4.5 (periodicidade)

Dizemos que uma função complexa f é **periódica** com período T se $f(z+T) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 6.4.6

A função exponencial complexa e^z é periódica com um período imaginário puro $2\pi i$.

Demonstração.

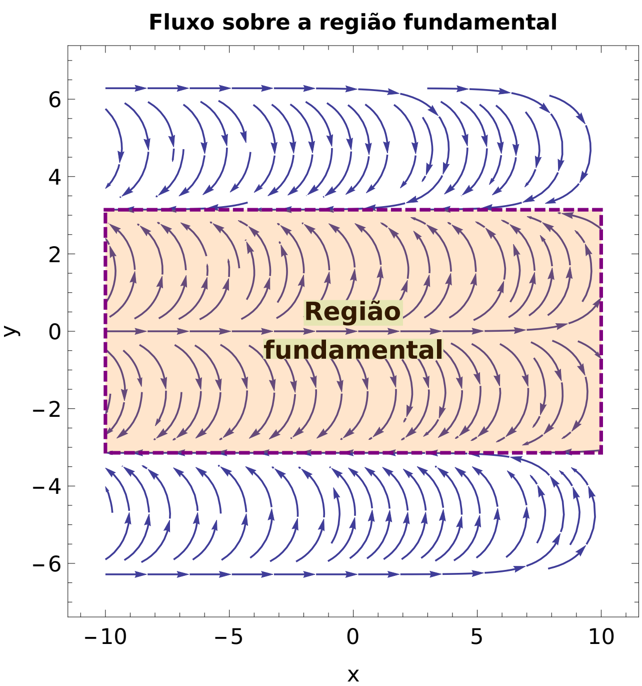
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z\left(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi\right) = e^z.$$

$\square$

A função exponencial

O plano complexo divide-se em infinitas faixas horizontais.

Aquela definida por $-\infty < x < \infty$ e $-\pi < y \leq -\pi$ chama-se a **região fundamental** da função exponencial complexa.



A função logaritmo

O logaritmo de um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, define-se como a inversa da exponencial, isto é,

$$w = \ln z \Leftrightarrow z = e^w,$$

onde $w = u + iv$.

Partes real e imaginária

$$z = re^{i\theta} = e^w = e^u e^{iv} \Rightarrow \begin{cases} r = e^u, \\ \theta = v, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \ln r, \\ v = \theta, \end{cases}$$

onde se θ é um argumento de z, também o é $\theta + 2n\pi$ com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

A função logaritmo

Definição 6.4.7 (logaritmo)

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

sendo $z \neq 0$, $\arg z = \theta + 2n\pi$.

O **valor principal** de $\ln z$ corresponde ao logaritmo complexo com $n = 0$ e $\theta = \operatorname{Arg} z$ (isto é, $-\pi < \theta \leq \pi$)

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i\theta.$$

A função logaritmo

Exercício 6.4.8 (valores complexos do logaritmo)

Acha os valores de **a)** $\ln(-1)$, **b)** $\ln i$, e **c)** $\ln(-1-i)$.

Resolução

a)

$$\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2n\pi) = i\pi(1+2n), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = i\pi.$$

Argumento

b)

$$\ln i = \ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\operatorname{Ln} i = i\frac{\pi}{2}.$$

$\rightsquigarrow$

A função logaritmo

c)

$$\ln(-1-i) = \ln|-1-i| + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\operatorname{Ln}(-1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

A função logaritmo

Exercício 6.4.9 (resolução de uma equação exponencial)

Acha todos os valores de z que satisfazem $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

Resolução

$$e^z = 1 + \sqrt{3}i \Leftrightarrow z = \ln\left(1 + \sqrt{3}i\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = |1 + \sqrt{3}i| = 2, \\ \arg\left(1 + \sqrt{3}i\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow = \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$$

$$z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right).$$

A função logaritmo

O logaritmo complexo,

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

é uma *função* **multivalente**, quer dizer, uma coleção infinita de funções logaritmo.

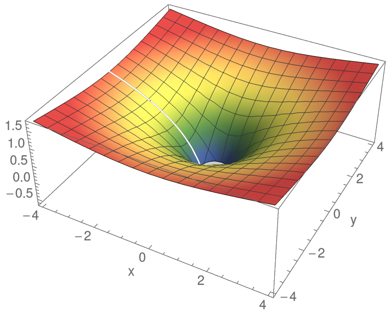
Definição 6.4.10 (ramo)

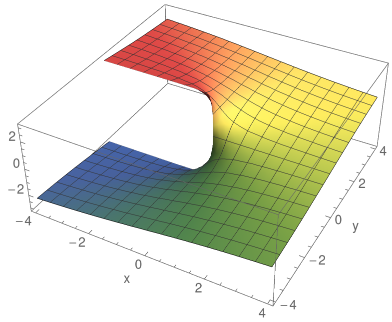
Um **ramo** de uma função multivalente f é qualquer função bem definida (ou seja, univalente) F que seja holomorfa em algum domínio e tal que, em cada ponto z desse domínio, $F(z)$ é um dos valores de $f(z)$. $F(z)$ chama-se **ramo principal** da função multivalente f.

A função logaritmo

Definição 6.4.11 (corte e ponto de ramificação)

Um **corte** é uma parte de uma reta ou curva que é introduzida para definir um ramo F de uma função multivalente f. Os pontos de um corte para F são singularidades de F, e qualquer ponto em comum de todos os cortes de f é denominado um **ponto de ramificação** de f.

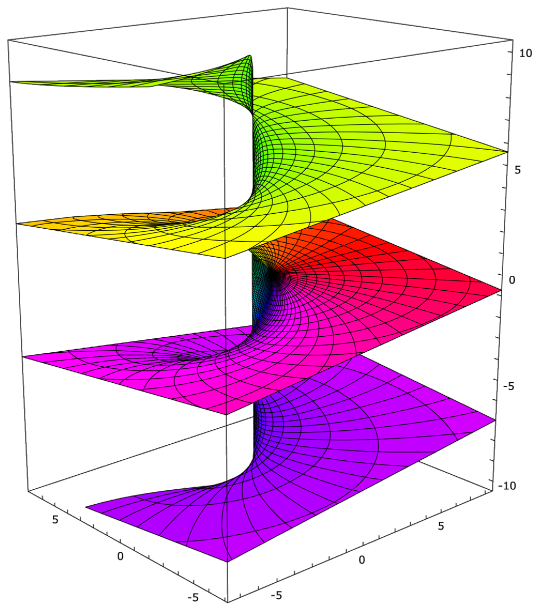




Partes real e imaginária da função logaritmo

A função logaritmo

Representação da parte imaginária do logaritmo complexo com vários dos ramos. A medida que o número complexo z gira em redor da origem, a parte imaginária *sobe* ou *baixa*.

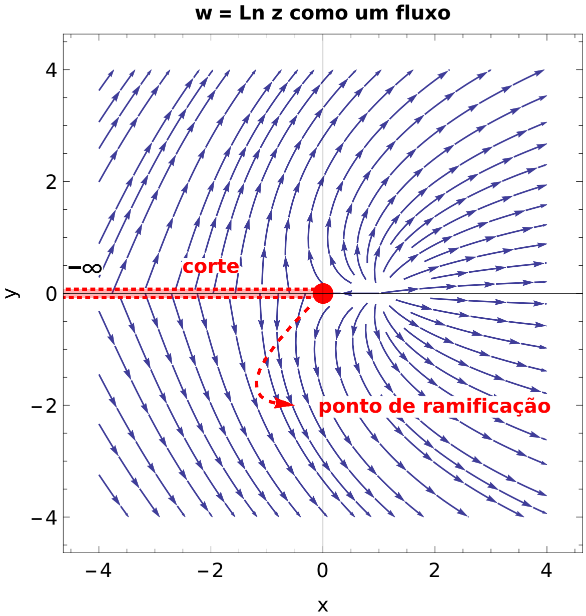


Superfície de Riemann

A função logaritmo

A função $F(z) = \operatorname{Ln} z$ é o ramo principal da função $f(z) = \ln z$.

O corte do ramo principal do logaritmo consiste no zero e na parte negativa do eixo real. De facto, a origem é um ponto de ramificação de todos os ramos da função multivalente logaritmo.



A função logaritmo

Teorema 6.4.12 (diferenciabilidade do logaritmo)

A função logaritmo $\operatorname{Ln} z$ *é holomorfa em* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *e tem como derivada*

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}.$$

Teorema 6.4.13 (propriedades algébricas)

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *temos que*

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2,$$
$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2,$$
$$\ln z_1^n = n \ln z_1.$$

A função logaritmo

Exemplo

Consideremos $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$. Tomando logaritmos (para o caso $n = 0$) temos $\operatorname{Ln} z_1 = 2\pi i$ e $\operatorname{Ln} z_2 = \pi i$. Portanto

$$\begin{cases} \operatorname{Ln}(z_1 z_2) & = \operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 = 2\pi i + \pi i = 3\pi i, \\ \operatorname{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) & = \operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 = 2\pi i - \pi i = \pi i. \end{cases}$$

A propriedades algébricas dos logaritmos não se verificam, em geral, quando substituímos $\ln z$ por $\operatorname{Ln} z$.

A função logaritmo

Exemplo

A identidade $\operatorname{Ln}(1+i)^2 = 2\operatorname{Ln}(1+i)$ é válida, posto que

$$\begin{cases} \operatorname{Ln}(1+i)^2 & = \operatorname{Ln}(2i) & = \ln 2 + \dfrac{\pi}{2} i, \\ 2\operatorname{Ln}(1+i) & = 2\left(\ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4} i\right) & = \ln 2 + \dfrac{\pi}{2} i. \end{cases}$$

Porém, temos que $\operatorname{Ln}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Ln}(-1+i)$, posto que

$$\begin{cases} \operatorname{Ln}(-1+i)^2 & = \operatorname{Ln}(-2i) & = \ln 2 - \dfrac{\pi}{2} i, \\ 2\operatorname{Ln}(-1+i) & = 2\left(\ln\sqrt{2} + \dfrac{3\pi}{4} i\right) & = \ln 2 + \dfrac{3\pi}{2} i. \end{cases}$$

A função potência

Definição 6.4.14 (função potência)

Se α é um número complexo e $z \neq 0$, então a **potência complexa** z^α define-se como

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

Em geral, z^α é multivalente, posto que $\ln z$ também o é. Porém, no caso em que $\alpha = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, z^α será univalente.

O **valor principal** de z^α obtém-se utilizando o valor principal do logaritmo, isto é,

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}.$$

A função potência

Exemplo

Considera a função potência $i^i = e^{i \ln i}$.

Posto que

$$\ln i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi i, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

Podemos escrever

$$i^i = e^{i\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi i} = e^{-\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

cujo valor principal é $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

A função potência

Teorema 6.4.15 (diferenciabilidade da função potência)

O valor principal de $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ *tem como derivada*

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}, \quad (|z| > 0, -\pi < \arg z < \pi).$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Cálculo de uma variável real

Da fórmula de Euler

$$\begin{cases} e^{ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x &= \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \cos x &= \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \end{cases}$$

Definição 6.4.16 (funções seno e cosseno)

$$\begin{cases} \operatorname{sen} z &= \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cos z &= \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Definição 6.4.17 (outras funções trigonométricas)

$$\begin{cases} \operatorname{tg} z & = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \\ \operatorname{cotg} z & = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \\ \sec z & = \dfrac{1}{\cos z}, \\ \operatorname{cossec} z & = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.18 (diferenciabilidade das funções seno e cosseno)

As funções seno e cosseno são inteiras e as suas derivadas são

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz} \operatorname{sen} z & = \cos z, \\ \dfrac{d}{dz} \cos z & = -\operatorname{sen} z. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.19 (propriedades algébricas)

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-z) &= -\operatorname{sen} z, \quad \cos(-z) = \cos z,\\
\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z &= 1,\\
\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 + \operatorname{sen} z_2,\\
\cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 + \operatorname{sen} z_2,\\
\operatorname{sen}(2z) &= 2 \operatorname{sen} z \cos z, \quad \cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z.
\end{aligned}$$

Funções de uma variável complexa
Limites e continuidade
Diferenciabilidade. Equações de Cauchy–Riemann
Algumas funções elementares

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.20 (periodicidade do seno e do cosseno)

As funções seno e cosseno complexas, $\operatorname{sen} z$ *e* $\cos z$*, são periódicas com um período real puro* 2π*.*

Demonstração.

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \operatorname{sen} z,$$

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

□

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Seno e cosseno hiperbólicos na análise real

Seno e cosseno hiperbólicos ($y \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} \operatorname{senh} y &= \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}, \\ \cosh y &= \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}. \end{cases}$$

Destas expressões, junto com as definições (5), obtemos na forma $u + iv$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Definição 6.4.21 (zero de uma função)

Um **zero** de uma função dada f é um número z_0 tal que $f(z_0) = 0$.

Teorema 6.4.22 (zeros das funções seno e cosseno)

Os zeros de $\operatorname{sen} z$ *e* $\cos z$ *no plano complexo são os mesmos zeros de* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *na reta real, ou seja,*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} z &= 0 \Leftrightarrow z = n\pi, \\ \cos z &= 0 \Leftrightarrow z = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$\rightsquigarrow$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Demonstração.

Tendo em conta que $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$ chegamos a

$$\begin{cases} |\operatorname{sen} z|^2 & = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y, \\ |\cos z|^2 & = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y. \end{cases} \tag{6}$$

$\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = n\pi, \\ \operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow z = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

$\cos z = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow z = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

□

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Na análise real satisfazem-se $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$. Porém, das expressões (6), posto que $\operatorname{senh} y$ toma valores no intervalo $(-\infty, \infty)$, deduz-se que $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ não estarão limitadas.

Exemplo

Consideremos a função seno $\operatorname{sen}(2+i)$.

O seu valor será

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \\ &= \operatorname{sen} 2 \cosh 1 + i \cos 2 \operatorname{senh} 1 = 1.4031 - 0.4891i. \end{aligned}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.23 (diferenciabilidade das outras funções trigonométricas)

As funções $\operatorname{tg} z$ *e* $\sec z$ *são holomorfas em toda parte, exceto nas* ***singularidades*** *correspondentes aos zeros de* $\cos z$.

As funções $\operatorname{cotg} z$ *e* $\operatorname{cossec} z$ *são holomorfas em toda parte, exceto nas* ***singularidades*** *correspondentes aos zeros de* $\operatorname{sen} z$.

As suas derivadas são

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\operatorname{tg} z = \sec^2 z, & \dfrac{d}{dz}\operatorname{cotg} z = -\operatorname{cossec}^2 z, \\[2ex] \dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \operatorname{tg} z, & \dfrac{d}{dz}\operatorname{cossec} z = -\operatorname{cossec} z \operatorname{cotg} z. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Exercício 6.4.24 (resolução de uma equação trigonométrica)

Resolve a equação $\cos z = 10$.

Resolução

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 10 &\Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 20 \\ &\Rightarrow e^{iz}e^{iz} + e^{iz}e^{-iz} = 20e^{iz} \Rightarrow e^{2iz} - 20e^{-iz} + 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{iz} = 10 \pm 3\sqrt{11} \\ &\Rightarrow iz = \ln\left(10 \pm 3\sqrt{11}\right) + 2n\pi i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ &\Rightarrow z = 2n\pi \pm i \ln\left(10 + 3\sqrt{11}\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \end{aligned}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Definição 6.4.25 (funções seno e cosseno hiperbólicos)

Para qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \operatorname{senh} z &= \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}, \\[2ex] \cosh z &= \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Definição 6.4.26 (outras funções hiperbólicas)

$$\begin{cases} \operatorname{tgh} z &= \dfrac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \\[2ex] \operatorname{cotgh} z &= \dfrac{1}{\operatorname{tgh} z}, \\[2ex] \operatorname{sech} z &= \dfrac{1}{\cosh z}, \\[2ex] \operatorname{cossech} z &= \dfrac{1}{\operatorname{senh} z}. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.27 (diferenciabilidade das funções seno e cosseno hiperbólicos)

As funções seno e cosseno são inteiras e as suas derivadas são

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\operatorname{senh} z &= \cosh z, \\[2ex] \dfrac{d}{dz}\cosh z &= \operatorname{senh} z. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.28 (propriedades algébricas)

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ temos que

$$\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z, \quad \cosh(-z) = \cosh z,$$
$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1,$$
$$\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 + \operatorname{senh} z_2,$$
$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 + \operatorname{senh} z_2.$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.29 (relação funções trigonométricas/hiperbólicas)

$$\begin{cases} \operatorname{sen} z &= -i \operatorname{senh} z, \\ \cos z &= i \cosh z, \\ \operatorname{tg} iz &= i \operatorname{tgh} z, \\ \operatorname{tg} iz &= i \operatorname{tgh} z, \end{cases}$$

Teorema 6.4.30 (periodicidade do seno e do cosseno hiperbólicos)

As funções seno e cosseno hiperbólicas de uma variedade complexa, $\operatorname{senh} z$ *e* $\cosh z$*, são periódicas com um período imaginário puro* $2\pi i$*.*

As funções trigonométricas e hiperbólicas

As expressões das funções hiperbólicas na forma $u + iv$ são

$$\begin{cases} \operatorname{senh} z &= \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y, \\ \cosh z &= \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y. \end{cases}$$

Teorema 6.4.31 (zeros das funções seno e cosseno hiperbólicos)

Todos os zeros de $\operatorname{senh} z$ *e* $\cosh z$ *no plano complexo pertencem ao eixo imaginário,*

$$\begin{cases} \operatorname{senh} z &= 0 \Leftrightarrow z = n\pi i, \\ \cosh z &= 0 \Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) i, \end{cases}$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.32 (diferenciabilidade das outras funções hiperbólicas)

As funções tgh z *e* sech z *são holomorfas em toda parte, exceto nas* ***singularidades*** *correspondentes aos zeros de* cosh z.

As funções cotgh z *e* cossech z *são holomorfas em toda parte, exceto nas* ***singularidades*** *correspondentes aos zeros de* senh z.

As suas derivadas são

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\operatorname{tgh} z = \operatorname{sech}^2 z, & \dfrac{d}{dz}\operatorname{cotgh} z = -\operatorname{cossech}^2 z, \\[2ex] \dfrac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \operatorname{tgh} z, & \dfrac{d}{dz}\operatorname{cossech} z = -\operatorname{cossech} z \operatorname{cotgh} z. \end{cases}$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.33 (função inversa do seno)

$$\operatorname{arcsen} z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Demonstração.

$$w = \operatorname{arcsen} z \quad \text{se} \quad z = \operatorname{sen} w.$$

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$\Rightarrow iw = \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \Rightarrow w = -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

□

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Exercício 6.4.34 (valores da função inversa do seno)

Acha todos os valores de arcsen $\sqrt{5}$.

Resolução

$$\operatorname{arcsen} z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsen}\sqrt{5} = -i\ln\left(\sqrt{5}i + \sqrt{1-(\sqrt{5})^2}\right) = -i\ln\left[\left(\sqrt{5}\pm 2\right)i\right]$$

$$= -i\left[\ln\left|\left(\sqrt{5}\pm 2\right)i\right| + \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\ln\left(\sqrt{5}+2\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nota: $\ln\left(\sqrt{5}-2\right) = \ln\left(1/(\sqrt{5}+2)\right) = -\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$.

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.35 (funções inversa do cosseno e da tangente)

$$\arccos z = -i\ln\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right).$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}.$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.36 (derivadas das funções trigonométricas inversas)

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arcsen} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$\frac{d}{dz}\arccos z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arctg} z = \frac{1}{1+z^2}.$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Exercício 6.4.37 (derivada da função inversa do seno)

Acha a derivada de $w = \operatorname{arcsen} z$ em $z = \sqrt{5}$.

Resolução

Tomando a raiz concreta $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{\left(1-(\sqrt{5})^2\right)} = 2i$ na expressão da derivada de $\operatorname{arcsen} z$ obtemos

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=\sqrt{5}} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i.$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.38 (inversas das funções hiperbólicas)

$$\operatorname{arcsenh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\operatorname{arccosh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Exercício 6.4.39 (derivada da função inversa do seno)

Acha todos os valores de $\operatorname{arccosh}(-1)$.

Resolução

Tomando $z=-1$ na expressão da inversa do cosseno hiperbólico obtemos

$$\operatorname{arccosh} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) = \ln\left(-1+\sqrt{(-1)^2-1}\right) = \ln(-1)$$

$$= \ln|-1| + (\pi + 2n\pi)i, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccosh}(-1) = (2n+1)\pi i, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas

Teorema 6.4.40 (derivadas das funções hiperbólicas inversas)

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arcsenh} z = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}},$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arccosh} z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}},$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arctgh} z = \frac{1}{1-z^2}.$$

Algumas diferenças importantes com a análise real

i) A função **exponencial** real é unívoca, mas a exponencial complexa não.

ii) No referente à função **logaritmo**, $\ln x$ é uma função de valor único, mas $\ln z$ é multivalente.

iii) Não todas as **propriedades dos logaritmos** reais são aplicáveis aos logaritmos complexos, especialmente ao seu valor principal $\operatorname{Ln} z$.

iv) Existem algumas **propriedades das potências** reais que não satisfazem as potências complexas. Exemplo: $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \neq z^{\alpha_1\alpha_2}$, a menos que $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$.

v) Algumas **propriedades válidas para potências** complexas não são aplicáveis a valores principais de potências complexas. Exemplo: $(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$ para quaisquer números complexos não nulos, mas não se satisfaz para os valores principais.

$\rightsquigarrow$

Algumas diferenças importantes com a análise real

vi) A função **exponencial** é muito mais importante na análise complexa que na real, posto que todas as funções elementares complexas se podem definir em termos da exponencial e da logarítmica complexas.

vii) As funções de uma variável real $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ não são periódicas, ao contrário que as funções complexas $\operatorname{senh} z$ e $\cosh z$. Ademais, $\cosh x$ não tem **zeros** e $\operatorname{senh} x$ só tem um zero em $x = 0$. Porém, as funções complexas $\operatorname{senh} z$ e $\cosh z$ têm um número infinito de zeros.

Licença