DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 4

Métodos numéricos

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Método de Euler. Análise de erros

1.1. Dados os seguintes problemas de valor inicial, usa o método de Euler para obter uma aproximação de quatro decimais ao valor indicado considerando primeiro $h = 0.1$ e depois $h = 0.05$.

a) $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$; $y(1.5)$

b) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$

c) $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$

d) $y' = (x - y)^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$

e) $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$

1.2. Considera o problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(0) = 1$ cuja solução analítica é $y = e^{2x}$.

a) Aproxima $y(0.1)$ utilizando o método de Euler com 1 passo.

b) Acha um limite para o erro de discretização local em y_1.

c) Compara o erro real em y_1 com o limite achado em b).

d) Aproxima $y(0.1)$ utilizando o método de Euler com 2 passos.

e) Verifica que o erro de discretização global para o método de Euler é $\mathcal{O}(h)$ comparando os erros calculados em a) e em d).

2 Métodos de Runge–Kutta

2.1. Usa o método RK4 com $h = 0.1$ para aproximar $y(0.5)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = (x+y-1)^2$, $y(0) = 2$. Compara esta aproximação com o valor real obtido resolvendo analiticamente a equação diferencial (ajuda: utiliza a substituição $u = x + y - 1$ para obter uma equação em variáveis separadas).

2.2. Dados os seguintes problemas de valor inicial, usa o método RK4 com $h = 0.1$ para obter uma aproximação de quatro decimais ao valor indicado.

a) $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$; $y(1.5)$

b) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$

c) $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$

d) $y' = (x - y)^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$

e) $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$

Soluções

1.1 a) $h = 0.1, y_5(1.5) = 1.8207$; $h = 0.05, y_{10}(1.5) = 1.9424$; $y_{exato} = 2.0532$.

b) $h = 0.1, y_5(0.5) = 0.5315$; $h = 0.05, y_{10}(0.5) = 0.5384$; $y_{exato} = 0.5463$.

c) $h = 0.1, y_5(0.5) = 0.4198$; $h = 0.05, y_{10}(0.5) = 0.4124$; $y_{exato} = 0.4055$.

d) $h = 0.1, y_5(0.5) = 0.5639$; $h = 0.05, y_{10}(0.5) = 0.5565$; $y_{exato} = 0.5493$.

e) $h = 0.1, y_5(1.5) = 1.2194$; $h = 0.05, y_{10}(1.5) = 1.2696$; $y_{exato} = 1.3333$.

1.2 a) $y_1(0.1) = 1.2000$.

b) $|\varepsilon_1| \leq 0.0244$.

c) $y_{exato}(0.1) = e^{2 \cdot 0.1} = 1.2214$.
$E_{abs} = 0.0214$.

d) $y_2(0.1) = 1.2100$.

e) $E_{abs}^{(a)} = 0.0214$ com $h = 0.1$.
$E_{abs}^{(b)} = 0.0114$ com $h = 0.05$.

2.1 $y_5 = 3.9078$; $y_{exato} = 3.9082$.

2.2 a) $y_5 = 2.0533$.

b) $y_5 = 0.5463$.

c) $y_5 = 0.4055$.

d) $y_5 = 0.5493$.

e) $y_5 = 1.3333$.