T9. Séries de Fourier

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Apartados

Funções periódicas

Definição 9.1.1 (função periódica)

Uma função $f(x)$ é chamada de **função periódica** se $f(x)$ for definida para todo $x \in \mathbb{R}$, talvez exceto nalguns pontos, e se existir algum número $p > 0$, denominado **período** de $f(x)$, tal que

$$f(x+p) = f(x).$$

Exemplos

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f(x) = x^2,$$
$$f(x) = \cos x, \qquad f(x) = \cosh x.$$

Funções periódicas

Propriedades

1. Se $f(x)$ tem um período p, também tem o período $2p$,

$$f(x+2p) = f(x+p+p) = f(x+p) = f(x).$$

Em geral,

$$f(x+np) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Se $f(x)$ e $g(x)$ têm período p, então

$$af(x) + bg(x), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

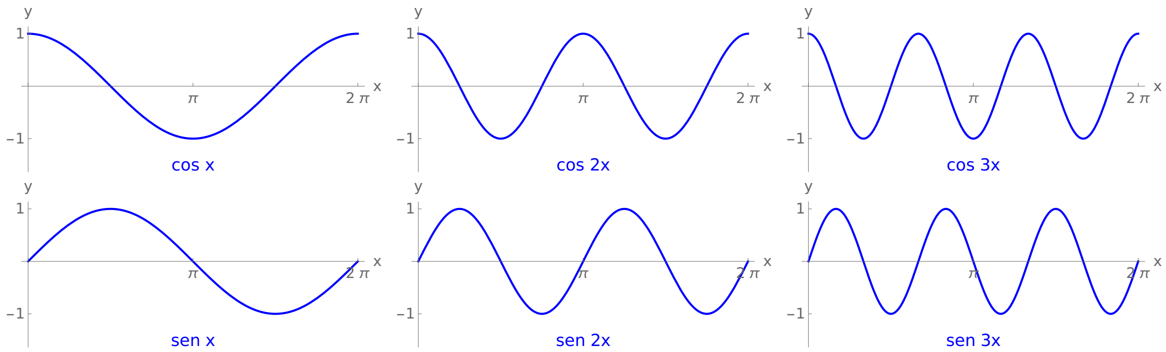
também tem o período p.

Sistema trigonométrico

O conjunto de funções

$$\left\{1, \quad \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots, \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\},$$

constituem o chamado **sistema trigonométrico**.



Séries trigonométricas

Definição 9.1.2 (série trigonométrica)

A soma de todas estas funções periódicas dá lugar à **série trigonométrica**

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi}{p}x + b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}x + a_2 \cos\frac{2\pi}{p}x + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}x + \dots$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right), \quad (1)$$

onde $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ são constantes chamadas **coeficientes da série**.

Nota Tomou-se o coeficiente do primeiro termo como $\frac{a_0}{2}$ em lugar de a_0 a fim de que a fórmula de a_n se reduza a a_0 para $n = 0$.

Apartados

Séries de Fourier

Definição 9.2.1 (série de Fourier)

Suponhamos que $f(x)$ seja uma função definida no intervalo $(-p, p)$ tal que possa ser representada por uma série trigonométrica, isto é, (1) converge e, além disso, possui a soma $f(x)$.
Então dizemos que

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x \right)}, \tag{2}$$

é a **série de Fourier** de $f(x)$ e os coeficientes a_0, a_n e b_n chamam-se **coeficientes de Fourier** de $f(x)$.

$\rightsquigarrow$

Séries de Fourier

Os coeficientes de Fourier estão dados pelas fórmulas de Euler

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx, \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \tag{4}$$

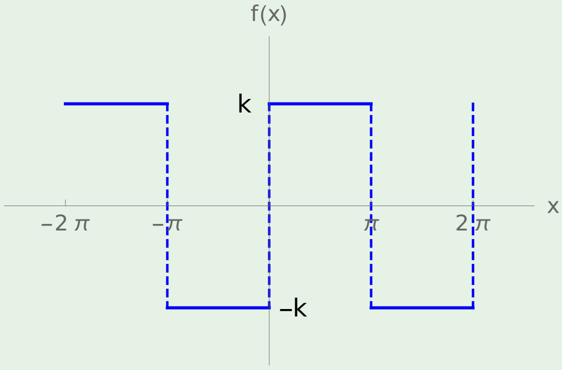
$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{5}$$

Séries de Fourier

Exercício 9.2.2 (onda retangular periódica)

Encontra os coeficientes de Fourier da função 2π-periódica $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ +k & \text{se} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$



Séries de Fourier

Resolução

Calculamos os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)dx + \int_{0}^{\pi} kdx\right],$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k(0-(\pi)) - k(\pi - 0)\right] = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} k\cos nxdx\right]$$

⇝

Séries de Fourier

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + k\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k) \operatorname{sen} nx dx + \int_{0}^{\pi} k \operatorname{sen} nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + -k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

$$= \frac{k}{n\pi}\left[\cos 0 - cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0\right]$$

$$= \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$$

Séries de Fourier

Temos que

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{se n ímpar} \\ +1 & \text{se n par} \end{cases} \Rightarrow 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & \text{se n ímpar,} \\ 0 & \text{se n par.} \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier são

$$b_1 = \frac{4k}{\pi},\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{4k}{3\pi},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \ldots.$$

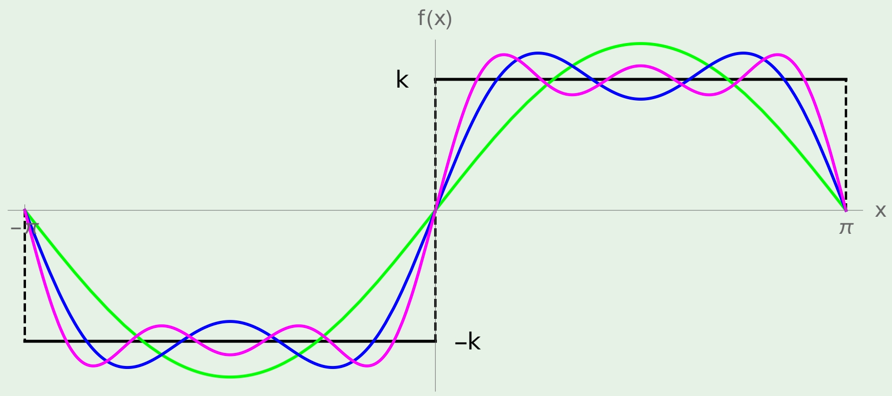
A série de Fourier de $f(x)$ é

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \ldots\right).$$

Séries de Fourier

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}(\operatorname{sen} x), \quad S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right),$$

$$S_3 = \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x\right).$$



Convergência das séries de Fourier

Teorema 9.2.3 (convergência das séries de Fourier)

Se a função $f(x)$ é $\mathcal{C}^1$ a troços em $(-p, p)$, então a série de Fourier de $f(x)$ converge.
A sua soma é $f(x)$, excetuando-se nos pontos onde $f(x)$ é descontínua. Nesses pontos, a soma da série é a média

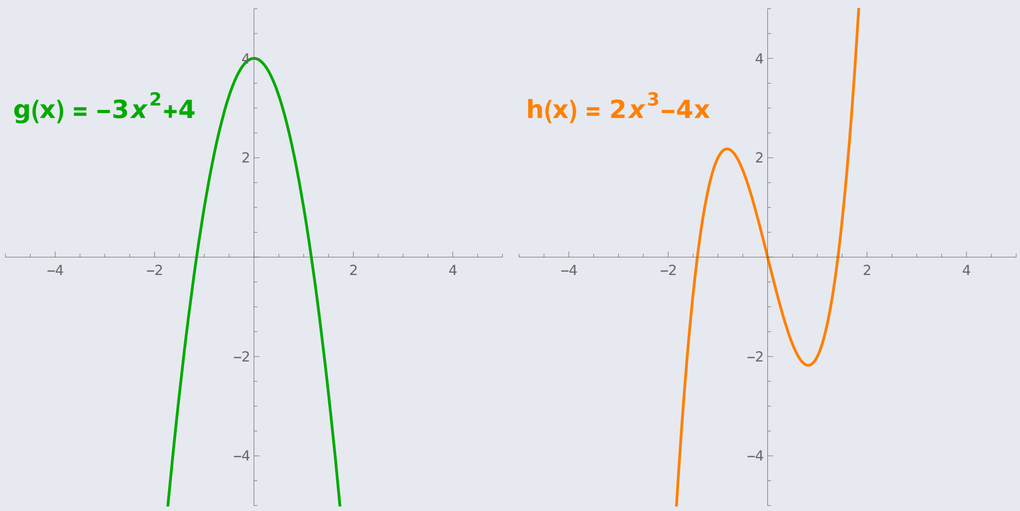
$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2},$$

onde $f(x-)$ e $f(x+)$ denotam os limites de $f(x)$ à direita e à esquerda, respetivamente.

Apartados

Definição

Funções pares e ímpares



g é par se $g(-x) = g(x)$ h é ímpar se $h(-x) = -h(x)$

Definição

Propriedades das funções pares e ímpares

1. O produto de duas funções pares é par.
2. O produto de duas funções ímpares é par.
3. O produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar.
4. A soma de duas funções pares é par.
5. A soma de duas funções ímpares é ímpar.
6. Se $f(x)$ é par $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$
7. Se $f(x)$ é ímpar $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Apartados

Funções periódicas

Séries de Fourier

Funções pares e ímpares

Séries de Fourier de senos e cossenos

Séries de Fourier de senos e cossenos

Teorema 9.4.1 (Série de Fourier de cossenos)

*A série de Fourier de uma função par no intervalo $(-p, p)$ é a **série de Fourier de cossenos***

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x \tag{6}$$

com os coeficientes

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Séries de Fourier de senos e cossenos

Teorema 9.4.2 (Série de Fourier de senos)

*A série de Fourier de uma função ímpar no intervalo $(-p, p)$ é a **série de Fourier de senos***

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x \tag{7}$$

com os coeficientes

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Séries de Fourier de senos e cossenos

Exercício 9.4.3 (expansão em série de Fourier de senos)

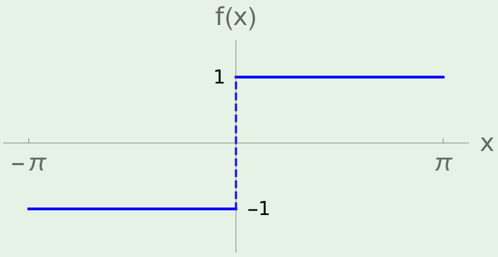
Expande a função

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

em série de Fourier de senos.

Resolução

Esta função é ímpar no intervalo $(-\pi, \pi)$



Séries de Fourier de senos e cossenos

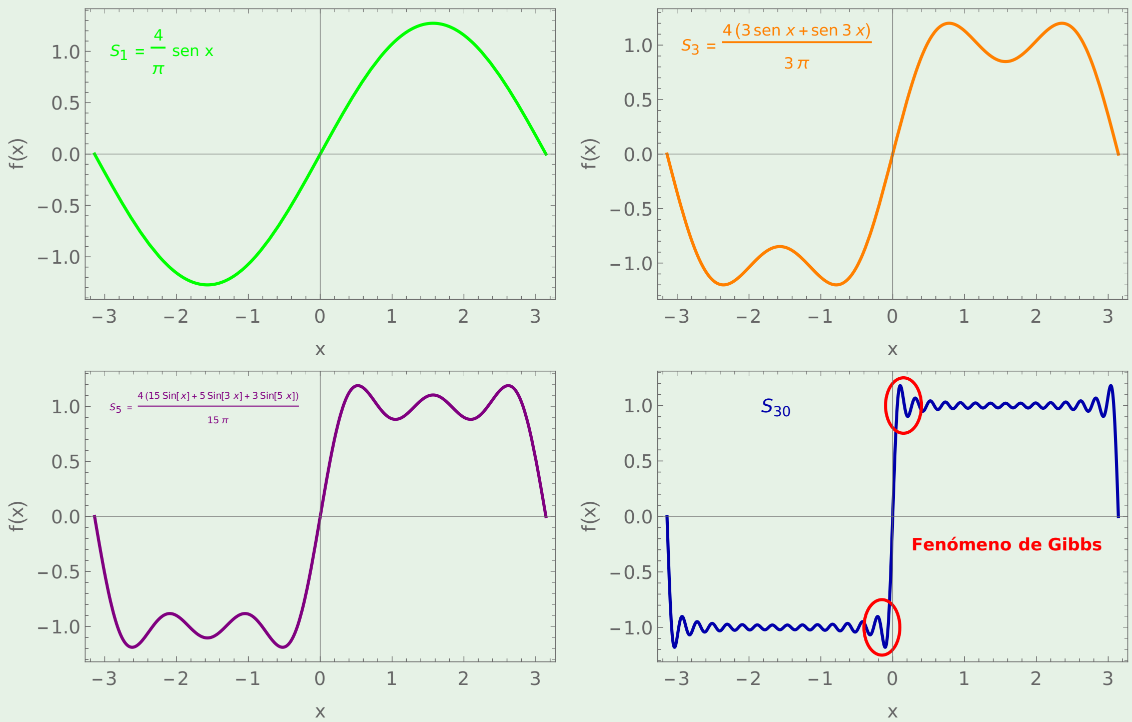
Expandimos $f(x)$ tomando $p = \pi$ em (7), de modo que

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1)\,\text{sen}\,nx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}.$$

Então, a série de Fourier de senos será

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,nx.$$

Séries de Fourier de senos e cossenos

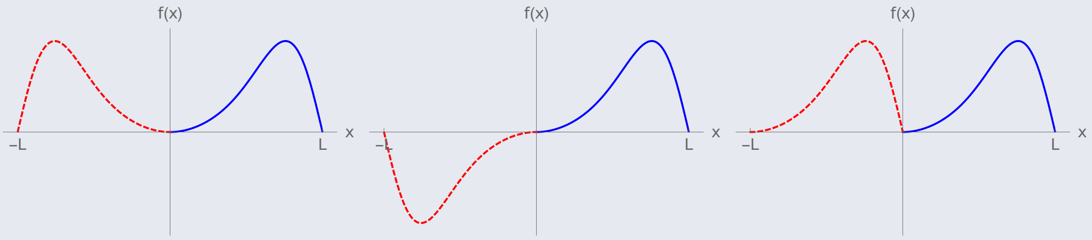


Expansões de meia-escala

Ideia básica

As expansões de meia-escala são séries de Fourier para funções definidas num intervalo $(0, L)$, isto é, nas quais o ponto meio não é a origem de coordenadas. Existem três modos fundamentais de expandir a função no intervalo $(-L, 0)$:

1. Reflexão sobre o eixo $y \longrightarrow$ função par em $(-L, L)$.
2. Reflexão através da origem $\longrightarrow$ função ímpar em $(-L, L)$.
3. Translação mediante $f(x) = f(x + L)$.



$\rightsquigarrow$

Expansões de meia-escala

Exercício 9.4.4 (expansão em séries de Fourier)

Expande a função $f(x) = x^2$, $0 < x < L$, em

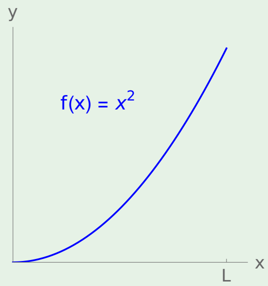
a) série de Fourier de cossenos,

b) série de Fourier de senos,

c) série de Fourier.

Resolução

Esta função está definida em $(0, L)$



Expansões de meia-escala

a) Considerando a série de Fourier de cossenos (6) temos que

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{2}{3}L^2,$$

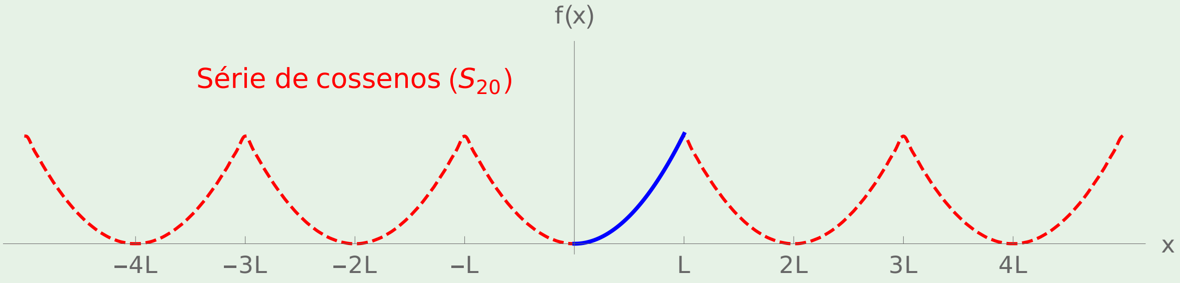
$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx$$
$$= \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

onde a_n se obtém integrando duas vezes por partes (tomando $u_1 = x^2$ e $dv_1 = \cos\frac{n\pi x}{L}dx$ e $u_2 = x$ e $dv_1 = \text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx$).

Expansões de meia-escala

Então, $f(x)$ em série de cossenos é

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} x.$$



Expansões de meia-escala

b) Considerando a série de Fourier de senos (7) temos que

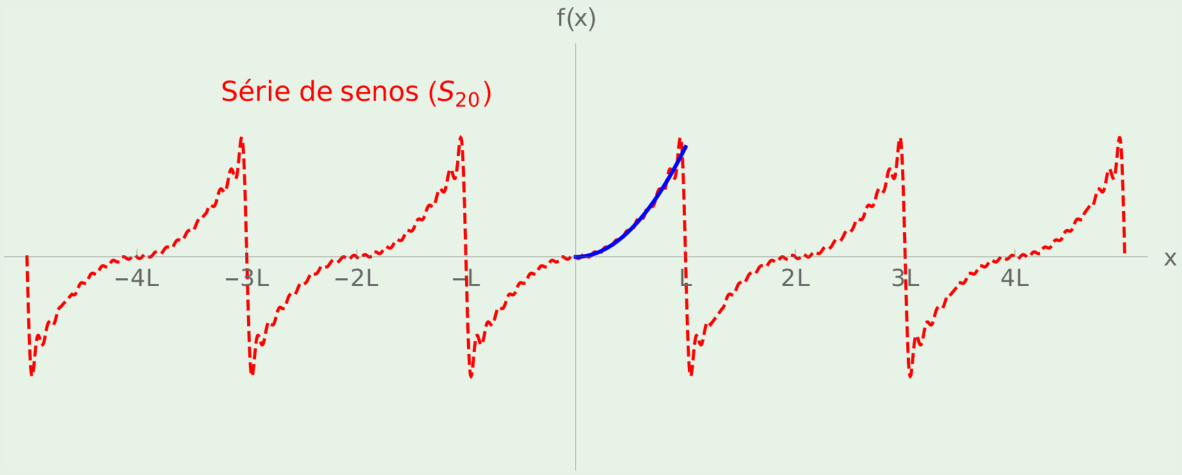
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2}{n^3\pi^3} \left[(-1)^n - 1\right], \end{aligned}$$

onde b_n se obtém integrando de novo duas vezes por partes.

Expansões de meia-escala

Então, $f(x)$ em série de senos é

$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1] \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$



Expansões de meia-escala

c) Considerando a série de Fourier (2) com o período $p = \frac{L}{2}$ temos que

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{2n\pi x}{L}dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2},$$

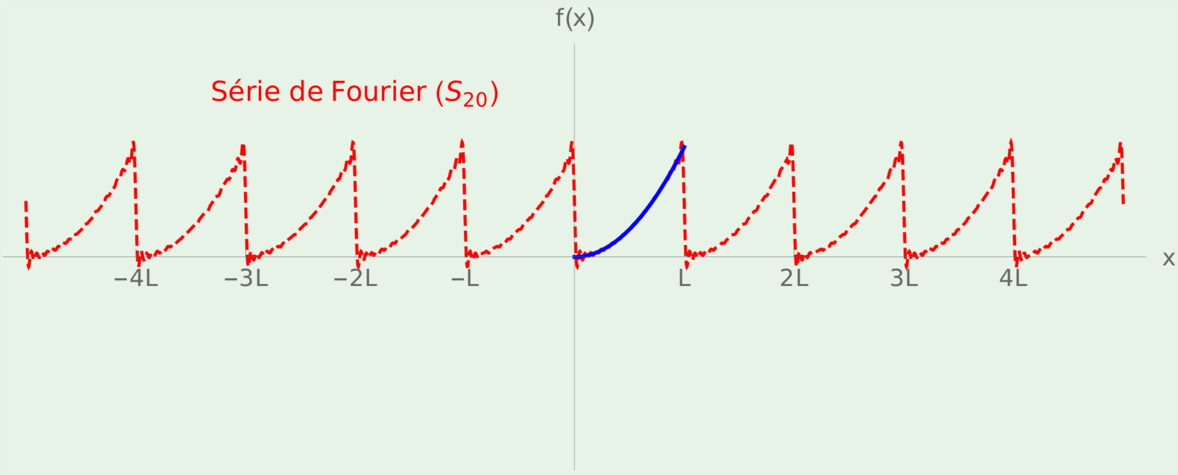
$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{L}dx = -\frac{L^2}{n\pi},$$

onde a_n e b_n se obtém integrando duas vezes por partes.

Expansões de meia-escala

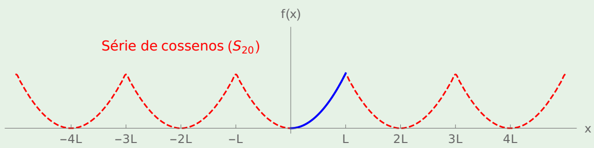
Então, $f(x)$ em série de Fourier é

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2\pi} \cos \frac{2n\pi x}{L} - \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right\}.$$

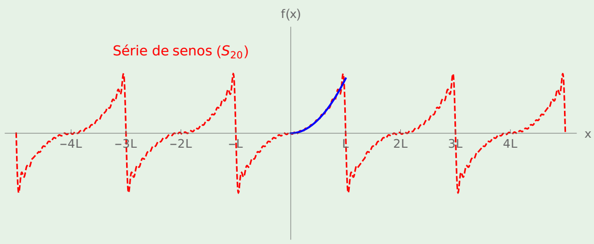


Expansões de meia-escala

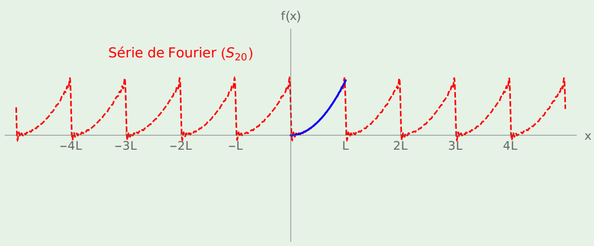
A série de cossenos converge à extensão par de $f(x)$ de período $2L$.



A série de senos converge à extensão ímpar de $f(x)$ de período $2L$.



A série completa converge à extensão de $f(x)$ de período L.



Séries de Fourier complexas

Se consideramos as expressões do cosseno e do seno em função de exponenciais

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

e as usamos para obter $\cos \dfrac{n\pi x}{p}$ e $\operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{p}$ chegamos à forma complexa da série de Fourier.

Séries de Fourier complexas

Definição 9.4.5 (séries de Fourier complexas)

A **série de Fourier complexa** de uma função $f(x)$ definida num intervalo $(-p, p)$ é

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x) e^{\frac{in\pi x}{p}} dx, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Séries de Fourier complexas

Exercício 9.4.6 (série de Fourier complexa)

Encontra a série de Fourier complexa de $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$.

Resolução

Com $p = \pi$ obtemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(in+1)x}dx \\ &= -\frac{1}{2\pi(in+1)}\left[e^{-(in+1)\pi} - e^{(in+1)\pi}\right]. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} e^{-(in+1)\pi} &= e^{-\pi}(\cos n\pi - i \operatorname{sen} n\pi) = (-1)^n e^{-\pi}, \\ e^{(in+1)\pi} &= e^{\pi}(\cos n\pi + i \operatorname{sen} n\pi) = (-1)^n e^{\pi}. \end{aligned}$$

⇝

Séries de Fourier complexas

Chegamos a

$$c_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2(in+1)\pi} = (-1)^n \frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi}\frac{1-in}{n^2+1}.$$

Então, obtemos a série de Fourier complexa como

$$f(x) = \frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1-in}{n^2+1}e^{inx}.$$

Licença