DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 9–10

Séries e integrais de Fourier

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Séries de Fourier

1.1. Encontra a série de Fourier da função f no intervalo dado. Determina o número ao qual a série de Fourier converge no ponto de descontinuidade de f.

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

d) $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi.$

e) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1, \\ -2, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$

1.2. Usa a série de Fourier do exercício 1.1.c para provar

a) $\dfrac{\pi^2}{6} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \ldots.$

b) $\dfrac{\pi^2}{12} = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots.$

2 Funções pares e ímpares

2.1. Determina se as seguintes funções são pares, ímpares ou de nenhum dos dous tipos.

a) $f(x) = \sin 3x.$

b) $f(x) = x^2 + x.$

c) $f(x) = e^{|x|}.$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0, \\ -x^2, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$

e) $f(x) = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2.$

3 Séries de Fourier de senos e cossenos

3.1. Expande a função dada apropriadamente numa série de Fourier de senos ou de cossenos.

a) $f(x) = \begin{cases} \pi, & -1 < x < 0, \\ -\pi, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$

b) $f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi.$

c) $f(x) = x^2, \quad -1 < x < 1.$

d) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1, \\ -x, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$

3.2. Encontra as expansões de meia-escala em série de Fourier de senos e em série de Fourier de cossenos das seguintes funções.

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & -0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$

c) $f(x) = x^2 + x, \quad 0 < x < 1.$

3.3. Expande as seguintes funções em série de Fourier.

a) $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi.$

b) $f(x) = x + 1, \quad 0 < x < 1\pi.$

3.4. Considera que as funções $y = f(x), 0 < x < L$, dadas nas seguintes gráficas (Figura 1) são expandidas em série de Fourier de senos, em série de Fourier de cossenos e em série de Fourier. Representa graficamente a extensão periódica à qual convergiria cada série.

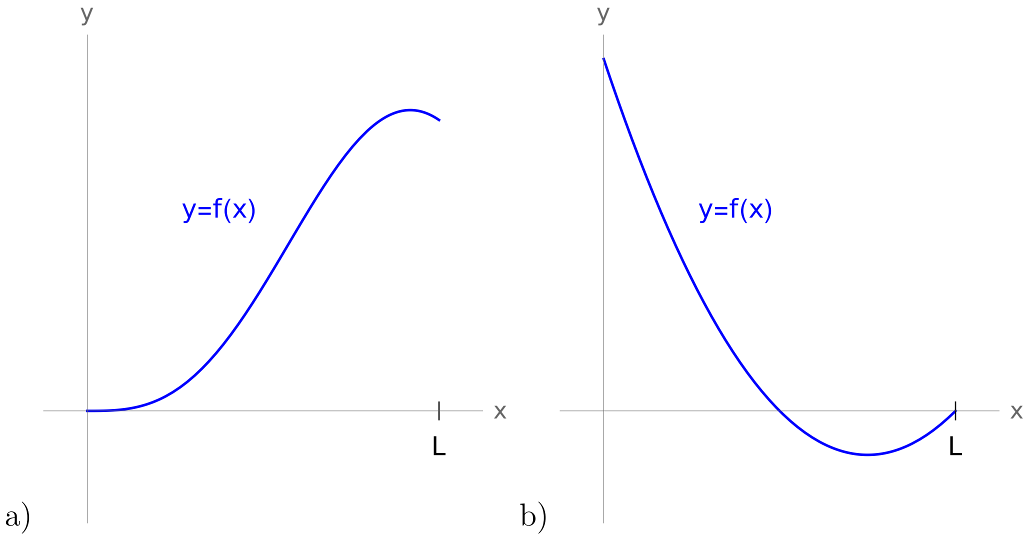


Figura 1: Extensões periódicas

3.5. Encontra a série de Fourier complexa de f no intervalo dado.

$a)\ f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 2. \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} 0, & -\dfrac{1}{2} < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \dfrac{1}{4}, \\ 0, & \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$c)\ f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi.$

4 A integral de Fourier

4.1. Encontra a representação mediante a integral de Fourier da função dada.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ -1, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

4.2. Representa a função dada pela integral de senos ou de cossenos apropriada.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ -5, & -1 < x < 0, \\ 5, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Soluções

1.1 a) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx.$

b) $f(x) = \dfrac{3}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \dfrac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x\right].$

c) $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx + \left(\dfrac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \dfrac{2}{n^3\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\right) \operatorname{sen} nx\right].$

d) $f(x) = \pi + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx.$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\dfrac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} \cos \dfrac{n\pi x}{2} + \dfrac{3}{n\pi}\left(1 - \cos \dfrac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{2}\right].$

1.2 a) Verifica-se.

b) Verifica-se.

1.3 Verifica-se.

2.1 a) Ímpar.

b) Nem par nem ímpar.

c) Par.

d) Ímpar.

e) Nem par nem ímpar.

3.1 a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n}\left[1 - (-1)^n\right] \operatorname{sen} nx.$

b) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \cos nx.$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos n\pi x.$

d) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2(\pi+1)}{n\pi}(-1)^{n+1} + \dfrac{2}{n\pi}\right] \operatorname{sen} nx.$

e) $f(x) = \dfrac{3}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos \dfrac{n\pi}{2} - 1\right) \cos \dfrac{n\pi x}{2}.$

3.2 a) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos n\pi x.$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen} n\pi x.$

b) $f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right) \cos \frac{n\pi x}{2}.$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}.$

c) $f(x) = \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} \left[3(-1)^n - 1\right] \cos n\pi x.$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi^3} \left[(-1)^n - 1\right]\right) \operatorname{sen} n\pi x.$

3.3 a) $f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \operatorname{sen} nx\right).$

b) $f(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} 2n\pi x.$

3.4 Ver Figura 2.

3.5 a) $f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{in\pi\frac{x}{2}}.$

b) $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-i)^n - 1}{n} e^{2\pi inx}.$

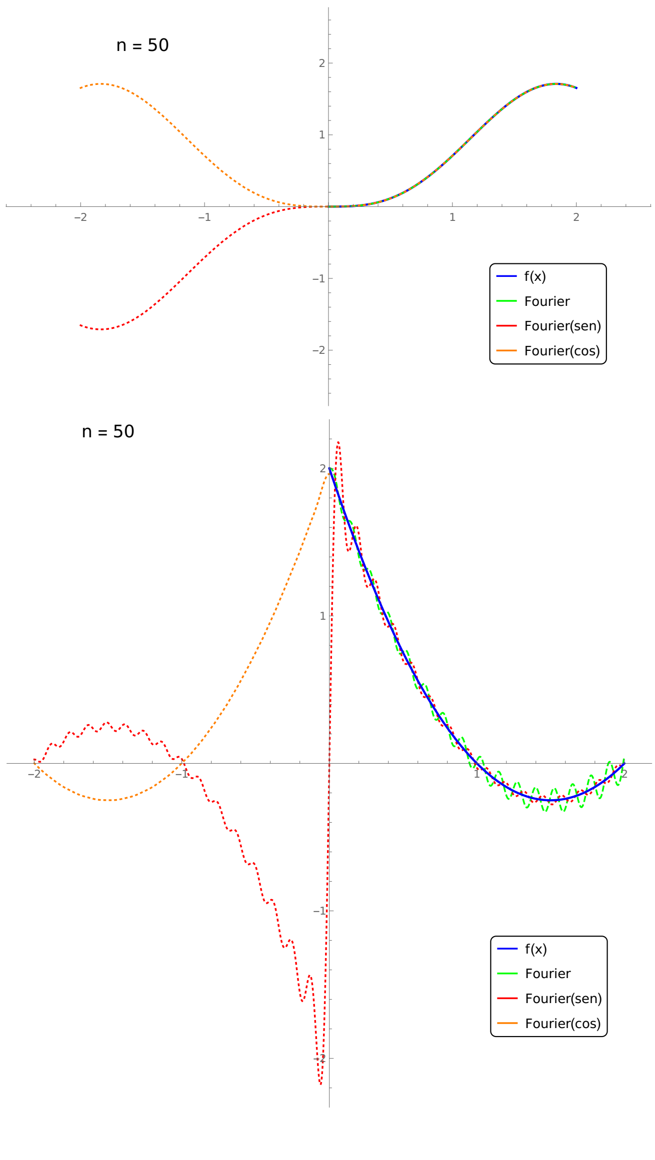
c) $f(x) = \pi + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx}.$

4.1 a) $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha x + 3(1 - \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} d\alpha.$

b) $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{3\alpha \operatorname{sen} \alpha(3 - x) + \cos \alpha(3 - x) - \cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha.$

4.2 a) $f(x) = \frac{10}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} d\alpha.$

b) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\pi\alpha \operatorname{sen} \pi\alpha + \cos \pi\alpha - 1)\cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha.$



a)

b)

Figura 2: Exemplo 3.4