DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
APLICADA

Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica (curso 2020–2021)

Seleção de problemas de exame comentados

III. Análise de Fourier

Instruções: Resolver os problemas utilizando a metodologia descrita nas aulas expositivas e de seminário. Os cálculos deverão ir acompanhados de comentários explicando os passos realizados.

1. Encontra a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Resolução

A série de Fourier de uma função f num intervalo $(-p, p)$ é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x \right), \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx, \\ a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \\ b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \tag{2}$$

Então, os coeficientes da série de Fourier para a função dada no intervalo $(-1, 1)$ são

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x\, dx = \int_0^1 x \cos n\pi x\, dx = \frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1], \\ b_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \operatorname{sen} n\pi x\, dx = \int_0^1 x \operatorname{sen} n\pi x\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \end{aligned} \tag{3}$$

onde no cálculo de a_n se usou a integração por partes, tomando

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = \cos nx\, dx \Rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \end{cases}$$

$$\int x \cos n\pi x\, dx = x \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} - \int \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}\, dx = x \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} + \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}$$

$$\int_0^1 x \cos n\pi x\, dx = \left[x \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} + \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{\operatorname{sen} n\pi}{n\pi} + \frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} - 0 - \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1],$$

onde se teve em conta que $\operatorname{sen} n\pi = 0$ e $\cos n\pi = (-1)^n$. Analogamente obtém-se a integral para b_n.

Substituindo os coeficientes 3 na expressão da série de Fourier (1) chegamos a

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \right)}.$$

2. Determina se as seguintes funções são pares ou ímpares

(a) $f(x) = x \cos x$,

(b) $f(x) = x^3 - 4x$,

(c) $f(x) = e^x - e^{-x}$,

(d) $f(x) = \begin{cases} x+5, & -2 < x < 0, \\ -x+5, & 0 \le x < 2. \end{cases}$

Resolução

a) Temos que

$f(-x) = -x \cos(-x) = -x \cos x = -x \cos x = -f(x) \Rightarrow$ **função ímpar**

b) Temos que

$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x) \Rightarrow$ **função ímpar**

c) Temos que

$$f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x) \Rightarrow \textbf{função ímpar}$$

d) Para $0 \le x < 2$ temos que

$$f(-x) = -x + 5 = f(x) \Rightarrow \textbf{função par}$$

3. Expande a função dada apropriadamente numa série de Fourier de senos ou de cossenos.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \end{cases}$

(b) x, $-\pi < x < \pi$.

Resolução

a) Como $f(x)$ é uma função par, expandimo-la em série de Fourier de cossenos usando as fórmulas:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x, \tag{4}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx, \\ a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \tag{5}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 dx = 1, \\ a_n &= \int_1^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx = \left. \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right|_1^2, \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo os coeficientes 6 na expressão da série de Fourier de cossenos (4) chegamos a

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2}}.$$

b) Como $f(x)$ é uma função ímpar, expandimo-la em série de Fourier de senos usando as fórmulas:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x, \tag{7}$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{8}$$

Então, temos que

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \,\mathrm{sen}\, nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\mathrm{sen}\, nx}{n^3}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\pi\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\mathrm{sen}\, n\pi}{n^3} - (0-0)\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\pi\frac{(-1)^n}{n} + 0\right] \qquad (9)\\
&= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

onde no cálculo da integral de b_n se usou a integração por partes (ver exercício 1). Substituindo o coeficiente 9 na expressão da série de Fourier de senos (7) chegamos a

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\,\mathrm{sen}\, nx}.$$

4. Encontra as expansões de meia-escala em série de Fourier de cossenos e em série de Fourier de senos da função $f(x) = x(2-x)$, $0 < x < 2$.

Resolução

De acordo com as fórmulas para as séries de Fourier de cossenos e de senos vistas em exercícios anteriores, temos que os coeficientes se calculam como

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \textstyle\int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}, \\
a_n &= \textstyle\int_0^2 (2x - x^2)\cos\frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{8}{n^2\pi^2}\left[(-1)^{n+1} - 1\right], \qquad (11)\\
b_n &= \textstyle\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{16}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right],
\end{aligned}
$$

onde as integrais em a_n e b_n se resolveram usando integração por partes, de maneira análoga ao indicado nos exercícios anteriores. Então, a expansão de meia-escala em série de Fourier de cossenos é

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]\cos\frac{n\pi x}{2}}.$$

Por outro lado, a expansão de meia-escala em série de Fourier de senos é

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}}.$$

5. Expande em série de Fourier a função $2-x$, $0<x<2$.

   Resolução

   De acordo com as fórmulas para a série de Fourier vistas em exercícios anteriores, temos que os coeficientes se calculam como

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 (2-x)\,dx = 2, \\ a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 (2-x)\cos n\pi x\,dx = 0, \\ b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 (2-x)\operatorname{sen} n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}, \end{aligned} \tag{12}$$

   onde as integrais em a_n e b_n se resolveram usando integração por partes, de maneira análoga ao indicado nos exercícios anteriores. Então, a expansão em série de Fourier é

$$\boxed{f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x}.$$

6. Encontra a série de Fourier complexa da função $f(x) = e^{-|x|}$, $-1 < x < 1$.

Resolução

A série de Fourier complexa de uma função f num intervalo $(-p, p)$ é dada por

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\dfrac{in\pi x}{p}}, \tag{13}$$

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x) e^{\dfrac{in\pi x}{p}} \, dx, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Então, os coeficientes da série de Fourier para a função dada no intervalo $(-1, 1)$ são

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) e^{-in\pi x} \, dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^{0} e^{x} e^{-in\pi x} \, dx + \int_{0}^{1} e^{-x} e^{-in\pi x} \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1 - in\pi} e^{(1-in\pi)x} \Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{1 + in\pi} e^{-(1+in\pi)x} \Big|_{0}^{1} \right] \\ &= \frac{e - (-1)^n}{e(1 - in\pi)} + \frac{1 - e^{-1}(-1)^n}{1 + in\pi} = \frac{2[e - (-1)^n]}{e(1 + n^2\pi^2)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Substituindo os coeficientes (15) na expressão da série de Fourier complexa (13) chegamos a

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2[e - (-1)^n]}{e(1 + n^2\pi^2)} e^{in\pi x}}.$$

7. Encontra a representação mediante a integral de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi, \\ 4, & \pi < x < 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi. \end{cases}$$

Resolução

A integral de Fourier de uma função f definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x] \, d\alpha, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx, \\ B(\alpha) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx. \end{aligned} \tag{17}$$

Então, os coeficientes da integral de Fourier para a função dada são

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_{\pi}^{2\pi} 4 \cos \alpha x \, dx = 4 \frac{\operatorname{sen} 2\pi\alpha - \operatorname{sen} \pi\alpha}{alpha}, \\ B(\alpha) &= \int_{\pi}^{2\pi} 4 \operatorname{sen} \alpha x \, dx = 4 \frac{\cos \pi\alpha - \cos 2\pi\alpha}{alpha}. \end{aligned} \tag{18}$$

Substituindo os coeficientes (18) na expressão da integral de Fourier (16) chegamos a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{sen} 2\pi\alpha - \operatorname{sen} \pi\alpha) \cos \alpha x + (\cos \pi\alpha - \cos 2\pi\alpha) \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} \, d\alpha \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi\alpha \cos \alpha x - \cos 2\pi\alpha \operatorname{sen} \alpha x - \operatorname{sen} \pi\alpha \cos \alpha x + \cos \pi\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} \, d\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha(2\pi - x) - \operatorname{sen} \alpha(\pi - x)}{\alpha} \, d\alpha},$$

para cujo cálculo se usou a fórmula para o seno da diferença de dous ângulos.