DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 2

Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Análise qualitativa

1.1. Representa graficamente, no correspondente campo de direções (ver Fig. 1), as curvas solução das seguintes equações diferenciais que passam através de cada um dos pontos indicados:

a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$, $y(-2) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-0.01xy^2}$, $y(-6) = 0$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 1 - xy$, $y(0) = 0$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \cos y$, $y(0) = 1$

2 Equações separáveis

2.1. Resolve as seguinte equações em variáveis separadas:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$

b) $dx + e^{3x} dy = 0$

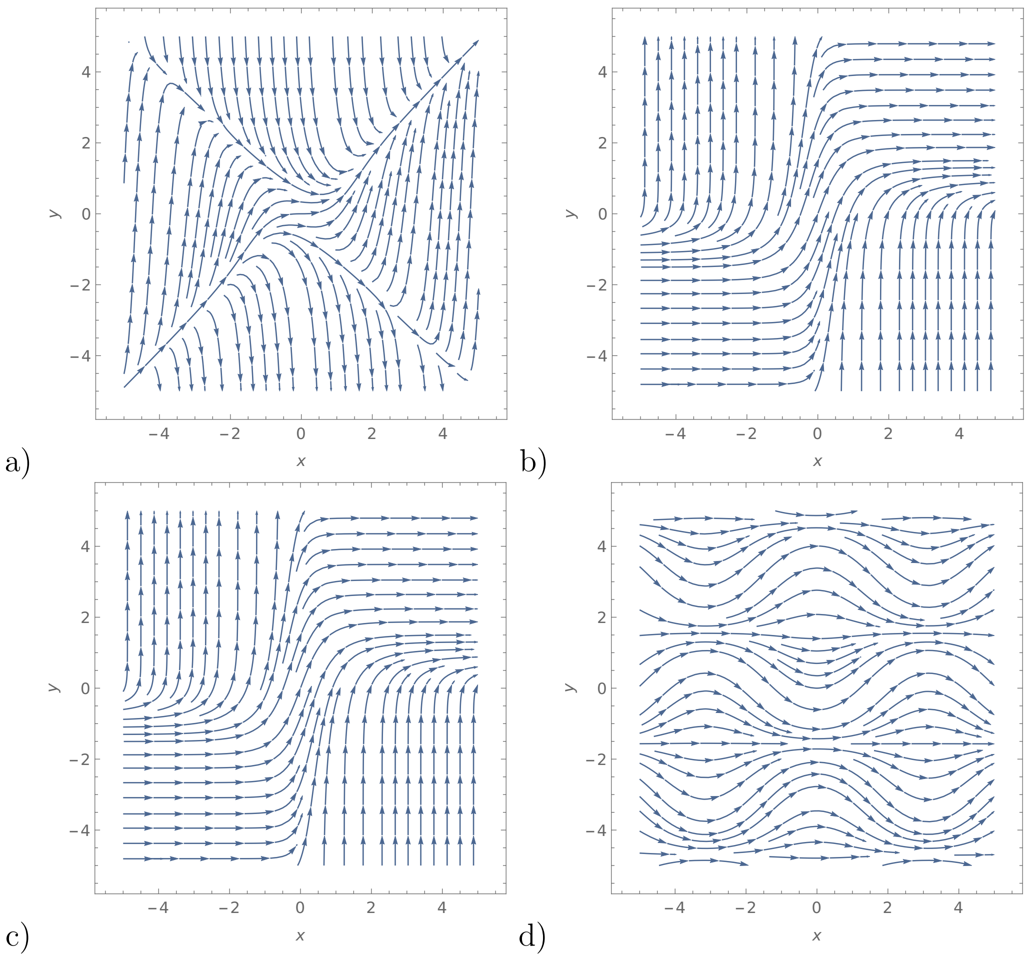


Figura 1: Campos de direções

$c)$ $x\dfrac{dy}{dx} = 4y$

$d)$ $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

$e)$ $y\ln x\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

$f)$ $\csc y dx + \sec^2 x dy = 0$

$g)$ $(e^y+1)^2 e^{-y}dx + (e^x+1)^3 e^{-x}dy = 0$

$h)$ $\dfrac{ds}{dr} = ks$

$i)$ $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$

$j)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

$k)$ $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1 - y^2}$

2.2. Acha uma solução implícita e uma solução explícita dos seguintes problemas de valor inicial:

$a)$ $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1),\ x(\frac{\pi}{4}) = 1$

$b)$ $x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy,\ y(-1) = -1$

$c)$ $\sqrt{1 - y^2}dx - \sqrt{1 - x^2}dy = 0,\ y(0) = \sqrt{\frac{3}{2}}$

2.3. Acha uma solução explícita dos seguintes problemas de valor inicial dado, determina o correspondente intervalo de definição para cada solução e representa-a graficamente:

$a)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + 1}{2y},\ y(-2) = -1$

$b)$ $e^y dx - e^{-x} dy = 0,\ y(0) = 0$

3 Equações lineares

3.1. Resolve as seguinte equações lineares fornecendo o maior intervalo sobre o que a equação geral está definida:

$a)$ $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

$b)$ $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

$c)$ $y' + 3x^2 y = x^2$

$d)$ $x^2 y' + xy = 1$

$e)$ $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$

$f)$ $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

$g)$ $x^2 y' + x(x + 2)y = e^x$

$h)$ $ydx - 4(x + y^6)dy = 0$

$i)$ $\cos x\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$

$j)$ $(x+1)\dfrac{dy}{dx}+(x+2)y=2xe^{-x}$

$k)$ $\dfrac{dr}{d\theta}+r\sec\theta=\cos\theta$

$l)$ $x\dfrac{dy}{dx}+(3x+1)y=e^{-3x}$

3.2. Resolve os seguintes problemas de valor inicial fornecendo o maior intervalo I sobre o que está definida a solução:

$a)$ $xy'+y=e^x,\ y(1)=2$

$b)$ $(x+1)\frac{dy}{dx}+y=\ln x,\ y(1)=10$

$c)$ $\left(\dfrac{e^{-2\sqrt{x}}-y}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{dx}{dy}=1,\ y(1)=1$

4 Equações exatas. Fatores integrantes

4.1. Determina se as seguintes equações diferenciais são exatas e de ser assim resolve-as:

$a)$ $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$

$b)$ $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$

$c)$ $(2xy^2-3)dx+(2x^2y+4)dy=0$

$d)$ $(x^2-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$

$e)$ $(x-y^3+y^2\operatorname{sen}x)dx=(3xy^2+2y\cos x)dy$

$f)$ $(y\ln y-e^{-xy})dx+\left(\dfrac{1}{y}+x\ln y\right)dy=0$

$g)$ $x\dfrac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$

$h)$ $\left(x^2y^3-\dfrac{1}{1+9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy}+x^3y^2=0$

$i)$ $(\tan x-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)dx+\cos x\cos y dy=0$

$j)$ $(4t^3y-15t^2-y)dt+(t^4+3y^2-t)dy=0$

4.2. Resolve os seguintes problemas de valor inicial:

$a)$ $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0,\ y(1)=1$

$b)$ $(4y+2t-5)dt+(6y+4t-1)dy=0,\ y(-1)=2$

c) $(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x)dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)dy = 0$, $y(0) = e$

4.3. Verifica que a seguinte equação diferencial não é exata. Multiplica-a pelo fator integrante $\mu(x)$, que a faz exata, e resolve-a:

$$(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)dx + 2x \cos x dy = 0, \qquad \mu(x, y) = xy$$

4.4. Resolve as seguintes equações diferenciais achando, para cada caso, o fator integrante apropriado:

a) $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$

b) $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$

c) $(10 - 6y + e^{-3x})dx - 2dy = 0$

4.5. Resolve o seguinte problema de valor inicial achando o fator integrante apropriado:

$$xdx + (x^2 y + 4y)dy = 0, \qquad y(4) = 0$$

4.6. Considerando a equação diferencial

$$(4xy + 3x^2)dx + (2y + 2x^2)dy = 0,$$

a) demonstra que $x^3 + 2x^2 y + y^2 = c$ é uma família uniparamétrica de soluções,

b) demonstra que as condições iniciais $y(0) = -2$ e $y(1) = 1$ determinam a mesma solução implícita,

c) acha soluções explícitas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tal que $y_1(0) = -2$ e $y_2(1) = 1$ e representa-as graficamente.

5 Soluções por substituições

5.1. Resolve as seguintes equações homogéneas:

a) $(x - y)dx + xdy = 0$

b) $xdx + (y - 2x)dy = 0$

c) $(y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$

e) $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$

5.2. Resolve os seguintes problemas de valor inicial com equações homogéneas:

a) $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$, $y(1) = 2$

b) $(x + ye^{\frac{y}{x}})dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$, $y(1) = 0$

6 Modelos lineares e não lineares

Dinâmica de populações

6.1. Sabe-se que a população de uma comunidade aumenta a um ritmo proporcional ao número de pessoas presentes num instante t. Se a população inicial P_0 se duplica em 5 anos,

a) quanto tempo fará falta para que se triplique?

b) E para que se quadriplique?

Decaimento radioativo

6.2. O isótopo radioativo do chumbo, ^{209}Pb, decai a um ritmo proporcional à quantidade de material presente num instante t e tem uma meia-vida de 3.3 horas. Se inicialmente há 1 g deste isótopo, quanto tempo terá que passar para que decaia o 90%?

6.3. Inicialmente havia 100 mg de uma substância radioativa. Após 6 horas a massa diminuiu um 3%. Se o ritmo de decaimento é proporcional à quantidade de substância presente num instante t,

a) acha a quantidade que resta passadas 24 horas.

b) Determina a sua meia-vida.

Datação por carbono

A datação por carbono-14 (^{14}C) foi proposta por Willard Libby em 1946. A teoria baseia-se no facto de que a proporção nos organismos vivos do isótopo radioativo ^{14}C (que se produz na atmosfera pelo impacto da radiação cósmica no ^{14}N) em relação ao ^{12}C é constante e igual à que se observa na atmosfera.
Porém, quando o organismo morre a absorção ^{14}C cessa, de maneira

que comparando a proporção de ^{14}C que existe num fóssil com a proporção constante medida na atmosfera é possível obter uma estimação da sua idade.

6.4. Os arqueólogos utilizam peças de madeira queimada ou carvão vegetal, achadas no lugar, para datar pinturas pré-históricas de paredes e tetos de cavernas. Sabendo que a meia-vida do ^{14}C é de 5 730 anos, calcula a idade aproximada de uma peça de madeira queimada se se determinou que o 85.5% do ^{14}C achado em árvores vivas do mesmo tipo se tinha desintegrado.

Lei de resfriamento/aquecimento

6.5. Um termómetro leva-se de um quarto onde a temperatura é de 21 °C ao exterior, onde a temperatura do ar é de -12 °C. Após meio minuto o termómetro indica 10 °C.

a) Qual será a leitura do termómetro para t=1 minuto?

b) Quanto tempo lhe levou atingir os -9 °C?

6.6. Uma pequena barra de metal cuja temperatura inicial era de 20 °C deita-se num grande tanque de água fervendo.

a) Quanto tempo tardará a barra em atingir 90 °C sabendo que a temperatura aumentou 2 °C em 1 segundo?

b) Quanto tardará em alcançar os 98 °C?

6.7. Um termómetro que indica 21 °C coloca-se num forno pré-aquecido a uma temperatura constante. Através do vidro na porta do forno uma pessoa regista que o termómetro lê 43 °C depois de $\frac{1}{2}$ minuto e 63 °C depois e 1 minuto. Qual é a temperatura do forno?

6.8. Topou-se um cadáver num quarto fechado numa casa a uma temperatura constante de 21 °C. No instante da descoberta determinou-se que a temperatura do corpo era de 29 °C. Após 1 hora, uma nova medida determinou que esta temperatura tinha descido a 27 °C. Supondo que o instante da morte corresponde a $t = 0$ e que a temperatura do corpo nesse instante era de 37 °C, calcula quantas horas levava morta a pessoa quando se topou o seu cadáver.

Misturas

6.9. Um tanque contém 200 litros de um líquido no qual se dissolveram 30 g de sal. Uma salmoura que tem 1 g de sal por litro entra no tanque a um ritmo de 4 l/min enquanto a solução (suponhamos bem misturada) sai do tanque com a mesma velocidade. Qual será a quantidade $A(t)$ de sal que há no tanque no instante t?

6.10. Um grande tanque de 2 000 litros está cheio de água pura. Introduz-se salmoura contendo 0.25 kg de sal por litro a um ritmo de 20 l/min. A solução bem misturada sai do tanque com a mesma velocidade.

a) Determina a quantidade $A(t)$ de sal que há no tanque no instante t.

b) Qual seria a quantidade de sal que há no tanque no instante t no caso de que a solução saísse a um ritmo de 40 l/min?

c) No caso anterior, quando se vaziaria o tanque?

Drenagem de um tanque

6.11. Um tanque com forma de cilindro reto em posição vertical vazia água por um buraco circular no seu fundo. Desprezando o efeito de atrito no buraco, a altura h da água no tanque vem descrita pela equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_b}{A_s}\sqrt{2gh},$$

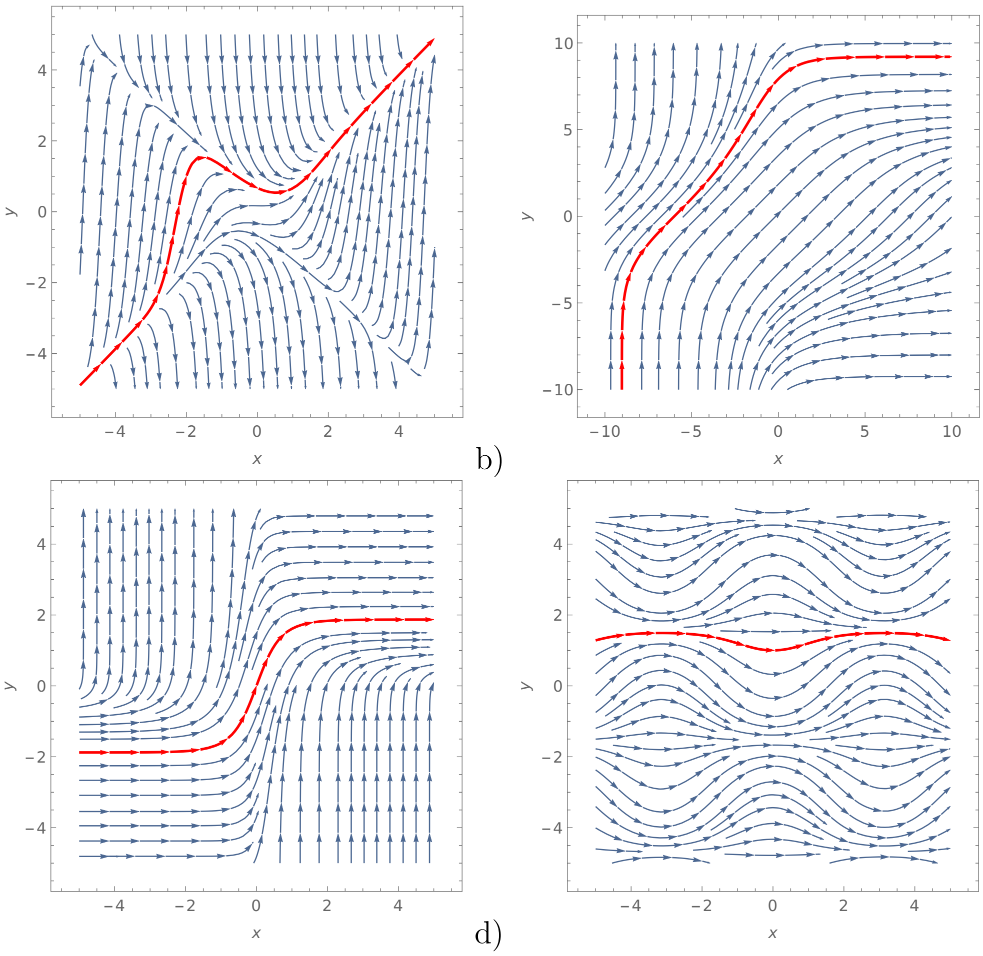
onde A_b e A_s são as áreas das secções transversais da água e do buraco, respetivamente, e $g = 9.81$ ms^{-2} é a aceleração da gravidade.

a) Resolve a equação diferencial anterior considerando que a altura inicial da água é H.

b) Supondo que o tanque tem 3 m de altura e um raio de 0.6 m e que o buraco circular tem um raio de 1.2 cm, calcula quanto tempo tardará em esvaziar-se se inicialmente estava cheio.

Soluções

1.1



a) b) c) d)

Figura 2: Exemplo 1.1

2.1 a) $y = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + c.$

b) $y = \dfrac{1}{3}e^{-3x} + c.$

c) $y = cx^4.$

d) $3e^{-2y} + 2e^{3x} = c.$

e) $\dfrac{y^2}{2} + 2y + \ln|y| = \dfrac{x^3}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{9}x^3 + c.$

f) $4\cos y = 2x + \operatorname{sen} 2x + c.$

g) $-\left(e^y + 1\right)^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(e^x + 1\right)^{-2} + c.$

h) $s = ce^{kr}$.

i) $p = \dfrac{ce^t}{1 + ce^t}$.

j) $\left(\dfrac{x+4}{y+3}\right)^5 = ce^{x-y}$.

k) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2}{2} + c\right)$.

2.2 a) $x = \tan\left(4t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

b) $y = \dfrac{e^{-1-\frac{1}{x}}}{x}$.

c) $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{3(1-x^2)}\right)$.

2.3 a) $y = -\sqrt{x^2 + x - 1}, \qquad x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

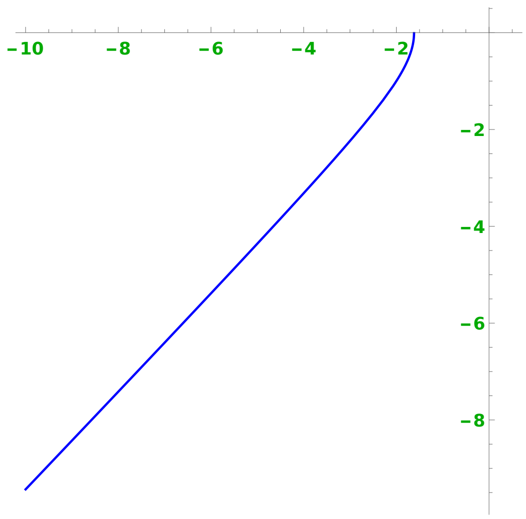


Figura 3: Exemplo 2.3.a

b) $y = -\ln|2 - e^x|, \qquad x \in (-\infty, \ln 2)$.

3.1 a) $y = ce^{5x}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$.

b) $y = \dfrac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$.

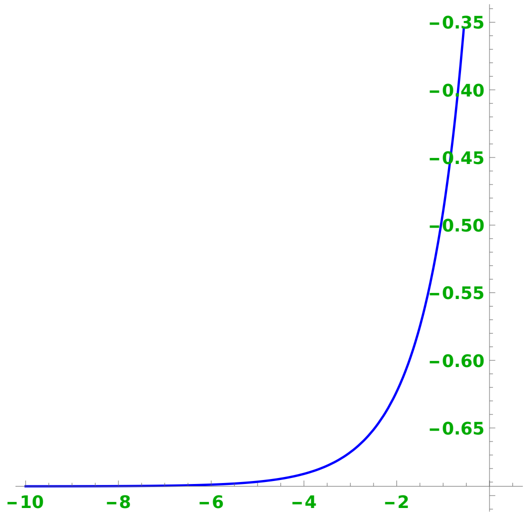


Figura 4: Exemplo 2.3.b

c) $y = \dfrac{1}{3} + ce^{-x^3}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$

d) $y = \dfrac{1}{x}\ln|x| + \dfrac{c}{x}, \qquad x \in (0, \infty).$

e) $y = -x\cos x + cx, \qquad x \in (0, \infty).$

f) $y = \dfrac{x^3}{7} - \dfrac{x}{5} + cx^{-4}, \qquad x \in (0, \infty).$

g) $y = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^x}{x^2} + \dfrac{ce^{-x}}{x^2}, \qquad x \in (0, \infty).$

h) $x = 2y^6 + cy^4, \qquad y \in (0, \infty).$

i) $y = \operatorname{sen} x + c\cos x, \qquad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$

j) $y = \dfrac{x^2 + c}{x+1}e^{-x}, \qquad x \in (-1, \infty).$

k) $r = \dfrac{\theta - \cos\theta + c}{\sec\theta + \tan\theta}, \qquad \theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$

l) $y = e^{-3x} + \dfrac{ce^{-3x}}{x}, \qquad x \in (0, \infty).$

3.2 a) $y = \dfrac{1}{x}e^x + \dfrac{2-e}{x}, \qquad x \in (0, \infty).$

b) $y = \dfrac{x\ln|x| - x + 21}{x+1}, \qquad x \in (0, \infty).$

c) $y = e^{-2\sqrt{x}}\left(2\sqrt{x} + e^2 - 2\right), \qquad x \in (0, \infty)$.

4.1 a) $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$.

b) $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$.

c) $x^2y^2 - 3x + 4y = c$.

d) Não é exata.

e) $-\frac{x^2}{2} + xy^3 + y^2\cos x = c$.

f) Não é exata.

g) $2e^x(x-1) - xy + 2x^3 = c$.

h) $x^3y^3 - \arctan 3x = c$.

i) $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = c$.

j) $t^4y - 5t^3 - yt + y^3 = c$.

4.2 a) $x^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 3y = 4$.

b) $4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$.

c) $y^2 \operatorname{sen} x - x^3y - x^2 + y\ln|y| - y = 0$.

4.3 $x^2y^2\cos x = c$.

4.4 a) $x^2y^2 + x^3 = c$.

b) $3x^2y^3 + y^4 = c$.

c) $\frac{10}{3}e^{3x} - 2ye^{3x} + x = c$.

4.5 $e^{y^2}(x^2 + 4) = 20$.

4.6 a) Diferencia-se implicitamente a solução.

b) Obtém-se $c = 4$ para ambas as duas condições iniciais.

c) $y_1 = -x^2 + \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$, (em verde)
$y_2 = -x^2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$ (em vermelho).

5.1 a) $x\ln|x| + y = cx$.

b) $(x-y)\ln|x-y| - x = c(x-y)$.
Nota: também é solução $(x-y)\ln|x-y| - y = c(x-y)$.

c) $y\ln|x| + x = cy$.

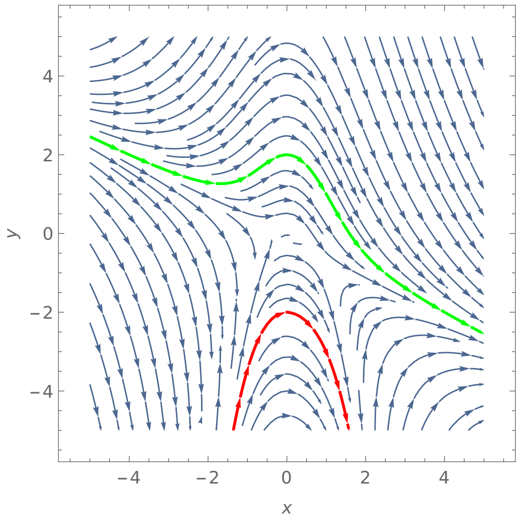


Figura 5: Exemplo 4.6.c

d) $2\arctan\dfrac{y}{x}+\ln|x^2+y^2|=c$.

e) $y\,(\ln|y|-c)^2=4x$.

5.2 a) $3x^3\ln|x|+y^3=8x^3$.

b) $\ln|x|=e^{\frac{y}{x}}-1$.

6.1 a) $t\simeq 7.9$ anos.

b) $t=10$ anos.

6.2 $t\simeq 10.96$ horas.

6.3 a) $A\simeq 88.5$ mg.

b) $t_{\frac{1}{2}}\simeq 136.5$ horas $=5$ dias e 16.5 horas.

6.4 $t\simeq 15\,963$ anos.

6.5 a) $T(1)=2.67$ °C.

b) $t=2.96$ minutos.

6.6 a) $t=82.1$ segundos.

b) $t=145.7$ segundos.

6.7 $T_{\text{forno}}=263$ °C.

6.8 $t = 2.41$ horas.

6.9 $A = 200 - 170e^{-\dfrac{t}{50}}$.

6.10 a) $A(t) = 500\left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right)$.

b) $A(t) = -5(t-100) - 0.05(t-100)^2$.

c) $t = 100$ minutos.

6.11 a) $h = \left(\sqrt{H} - \dfrac{1}{2}\dfrac{A_b}{A_s}\sqrt{2g}\,t\right)^2$.

b) $t = 1956$ segundos $= 32.60$ minutos.