DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Área de Astronomia e Astrofísica

Matemáticas III

Grau em Robótica

Exemplos 1

Introdução às equações diferenciais

[Revisado: janeiro de 2021]

1 Definições e terminologia

1.1. Classifica as seguintes EDO indicando a ordem de cada uma delas e determinando se a equação é linear ou não linear:

a) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

b) $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

d) $(\operatorname{sen}\theta)y''' - (\cos\theta)y' = 2$

1.2. Indica se a EDO de primeira ordem

$$(y^2 - 1)dx + xdy = 0$$

é linear na variável y. E na variável x?

1.3. Verifica se a função indicada é uma solução explícita das EDO seguintes assumindo um intervalo de definição I apropriado:

a) $2y' + y = 0$; $y = e^{-\frac{x}{2}}$

b) $y'' - 6y' + 13y = 0$; $y = e^{3x}\cos 2x$

c) $(y-x)y' = y - x + 8$; $y = x + 4\sqrt{x+2}$

d) $y' = 2xy^2$; $y = \dfrac{1}{4-x^2}$

1.4. Verifica se a expressão indicada é uma solução implícita da seguinte EDO. Acha uma solução explícita $y = \phi(x)$, dando o correspondente intervalo de definição I, e representa-a graficamente.

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(1-2x); \qquad \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = t$$

1.5. Verifica se a família de soluções indicada é uma solução da EDO dada, assumindo um intervalo de definição I apropriado para cada solução.

a) $\dfrac{dp}{dt} = p(1-p)$; $p = \dfrac{c_1e^t}{1+c_1e^t}$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$; $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

1.6. Acha os valores de m de maneira que a função $y = e^{mx}$ seja uma solução das seguintes EDO:

a) $y' + 2y = 0$

b) $y'' - 5y' + 6y = 0$

1.7. Acha o valor de m tal que a função $y = x^m$ seja uma solução da EDO

$$xy'' + 2y' = 0$$

2 Problemas de valor inicial

2.1. A função $y = \frac{1}{1+c_1e^{-x}}$ é uma família uniparamétrica de soluções da EDO de primeira ordem $y' = y - y^2$. Acha uma solução do PVI de primeira ordem consistente na anterior equação diferencial junto com a condição inicial $y(0) = -\frac{1}{3}$.

2.2. A função $y = \frac{1}{x^2+c}$ é uma família uniparamétrica de soluções da EDO de primeira ordem $y' + 2xy^2 = 0$. Acha uma solução do PVI de primeira ordem consistente na anterior equação diferencial junto com a condição inicial dada. Indica, também, qual é o intervalo I sobre o que está definida a solução.

a) $y(2) = \frac{1}{3}$

b) $y(0) = 1$

2.3. A função $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ é uma família biparamétrica de soluções da EDO de segunda ordem $x'' + x = 0$. Acha uma solução do PVI de segunda ordem consistente nesta equação diferencial junto com as condições iniciais dadas.

a) $x(0) = -1$, $x'(0) = 8$

b) $x(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $x'(\frac{\pi}{6}) = 0$

2.4. A função $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ é uma família biparamétrica de soluções da EDO de segunda ordem $y'' - y = 0$. Acha uma solução do PVI de segunda ordem consistente nesta equação diferencial junto com as condições iniciais dadas.

a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

b) $y(-1) = 5$, $y'(-1) = -5$

2.5. Determina a região do plano xy para a qual a equação diferencial dada tem uma única solução cuja gráfica passa através do ponto (x_0, y_0) nessa região.

a) $\dfrac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$

b) $x\dfrac{dy}{dx} = y$

c) $(4 - y^2)y' = x^2$

d) $(x^2 + y^2)y' = y^2$

2.6. Determina se o teorema de Picard–Lindelöf garante que a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ possui uma única solução que passa por algum dos seguintes pontos:

a) $(1, 4)$

b) $(2, -3)$

2.7. Verifica que $y = -\frac{1}{x+c}$ é uma família de soluções uniparamétrica da equação diferencial $y' = y^2$. Acha uma solução para cada uma das seguintes condições iniciais e determina, em cada caso, qual é o maior intervalo de definição I:

a) $y(0) = 1$

b) $y(0) = -1$

2.8. Considera a família uniparamétrica de soluções $3x^2 - y^2 = c$ de uma equação diferencial.

a) Demonstra que corresponde à equação diferencial $y\dfrac{dy}{dx} = 3x$

b) Representa graficamente a solução implícita $3x^2 - y^2 = 3$. Acha todas as soluções explícitas $y = \phi(x)$ da equação diferencial anterior definidas por esta relação. Indica qual é o intervalo de definição I de cada solução explícita.

c) O ponto $(-2, 3)$ está sobre a gráfica de $3x^2 - y^2 = 3$, mas qual das soluções explícitas anteriores satisfaz $y(-2) = 3$.

2.9. Identifica as gráficas das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$ que aparecem na Fig. 1 com algum dos seguintes pares de condições iniciais

a) $y(2) = 0$; $y'(2) = 0$

b) $y(0) = -2$; $y'(0) = -1$

c) $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$

d) $y(-2) = 1$; $y'(-2) = 0$

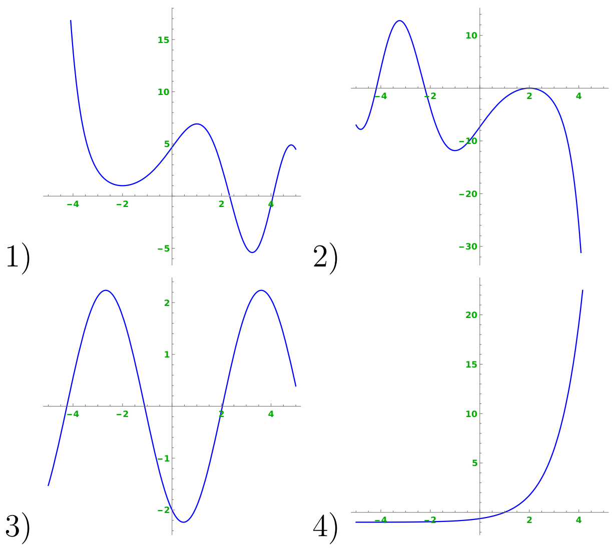

Figura 1: Gráficas das soluções

3 Modelos matemáticos

DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Assumindo, de acordo com as ideias de Malthus (1798), que o ritmo ao que a população de um país aumenta num determinado tempo é proporcional à sua população total nesse momento temos que

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

onde $P(t)$ é a população total no instante t e k é uma constante de proporcionalidade.

3.1. Neste contexto, determina uma equação diferencial que estabeleça a população $P(t)$ de um país que permite a imigração a uma taxa constante $r > 0$.
Qual será a equação diferencial que determina a população $P(t)$ quando se permite a emigração a uma taxa constante $r > 0$?

3.2. O modelo anterior (1) não tem em conta a mortandade, isto é, a taxa de crescimento é igual à taxa de natalidade. Determina um modelo populacional $P(t)$ no qual:

a) tanto a taxa de natalidade como a de mortandade sejam proporcionais à população presente no tempo t;

b) a taxa de natalidade é proporcional à população presente no tempo t mas a taxa de mortandade é proporcional ao quadrado da população presente no tempo t.

LEI DE NEWTON DO RESFRIAMENTO/AQUECIMENTO

Segundo a lei empírica de Newton (1701) para o resfriamento (ou aquecimento), o ritmo ao qual a temperatura de um corpo muda é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \tag{2}$$

onde $T(t)$ é a temperatura do corpo num instante t, T_a é a temperatura do ambiente e $k < 0$ é uma constante de proporcionalidade.

3.3. Suponhamos que uma chávena de café arrefece segundo a lei de Newton. Determina, a partir da gráfica de temperaturas da Fig. 2, os valores das temperaturas T_0 e T_a num modelo do tipo de um problema de valor inicial de primeira ordem

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \; T(0) = T_0 \tag{3}$$

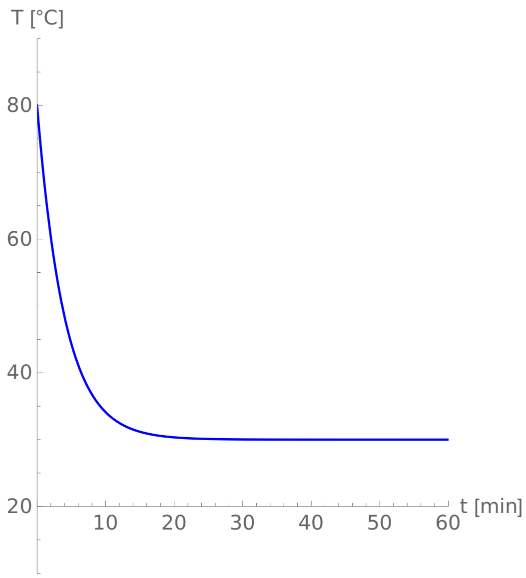

Figura 2: Curva de resfriamento

Propagação de doenças

Num modelo simples de propagação de um vírus é razoável assumir que o ritmo ao qual se propaga a doença é proporcional ao número de encontros entre as pessoas que têm contraído a doença, $x(t)$, e aqueles que ainda não têm sido expostos a ela, $y(t)$. Assim,

$$\frac{dx}{dt} = kxy, \tag{4}$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

3.4. Suponhamos que um estudante, que é portador do vírus da gripe, regressa a um campus universitário isolado com uns 1 000 estudantes. Determina uma equação diferencial para estabelecer o número de estudantes $x(t)$ que contraem a doença se a taxa à qual se propaga é proporcional ao número de interações dadas entre a quantidade de estudantes com gripe e a dos que ainda não foram expostos ao vírus.

Misturas

A concentração de uma substância numa mistura de duas soluções com diferentes concentrações da mesma modela-se mediante um equação diferencial de primeira ordem. O ritmo ao qual varia a concentração da substância vem dado por

$$\frac{dA}{dt} = R_{\text{entrada}} - R_{\text{saída}}, \tag{5}$$

onde $A(t)$ é a quantidade de substância que há no tanque num instante t, R_{entrada} é o ritmo de entrada da substância e $R_{\text{saída}}$ o de saída. Este último depende de $A(t)$.

3.5. Suponhamos que um grande tanque de misturas contém inicialmente 1 000 l de água na qual se dissolveram 50 kg de sal. No tanque bombeia-se água pura a uma velocidade de 10 l/min, e quando a dissolução está bem misturada, bombeia-se para fora à mesma velocidade. Determina uma equação diferencial para a quantidade $A(t)$ de sal presente no tanque no tempo t. Que é $A(0)$?

3.6. Suponhamos que um grande tanque de misturas contém inicialmente 1 000 l de água na qual se dissolveram 50 kg de sal. Bombeia-se outra dissolução salgada no tanque a uma velocidade de 10 l/min, e quando a dissolução está bem misturada, bombeia-se para fora a uma velocidade menor de 5 l/min. Se a concentração da dissolução de entrada é de 0.20 kg/l, determina uma equação diferencial para a quantidade $A(t)$ de sal presente no tanque no tempo t.

Drenagem de um tanque

Segundo a lei de Torricelli da hidrodinâmica, a velocidade v do fluxo de saída de água através de um orifício plano situado na parte inferior de um tanque cheio até a uma altura h é igual à velocidade de queda

de um corpo desde essa mesma altura, quer dizer, $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade.
Consideremos a drenagem de um tanque cheio de água através de um orifício como o descrito. O volume de água que sai do tanque será igual à área do orifício, A_b, multiplicada pela velocidade do fluxo de saída, isto é, $V = A_b\sqrt{2gh}$. Portanto, o volume $V(t)$ que há no tanque num instante t é

$$\frac{dV}{dt} = -A_b\sqrt{2gh}. \tag{6}$$

Expressando o volume como $V(t) = A_s h$, onde A_s é a área da superfície superior do tanque, obtemos a equação diferencial para a altura da água num instante t,

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_b}{A_s}\sqrt{2gh}. \tag{7}$$

3.7. Suponhamos que pinga água de um tanque através de um buraco circular com área A_b situado no fundo. Quando a água pinga através do buraco, o atrito e a concentração da corrente perto dele reduzem o volume da água que escapa do tanque por segundo a $cA_b\sqrt{2gh}$, onde c $(0 < c < 1)$ é uma constante empírica. Determina uma equação diferencial para a altura h da água no tempo t para um tanque cúbico de 3 m de lado, sabendo que o raio do buraco é de 5 cm e tomando $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$.

Soluções

1.1 a) Segunda ordem linear
    b) Quarta ordem linear
    c) Segunda ordem não linear
    d) Terceira ordem linear

1.2 É não linear em y e linear em x.

1.3 Há que calcular as derivadas da função indicada e substitui-las na equação diferencial a fim de comprovar que esta se verifica. Os intervalos de definição seriam:

a) $x \in \mathbb{R}$.
b) $x \in \mathbb{R}$.
c) $x \in (-2, \infty)$.
d) $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

1.4
$$x = \frac{e^t - 1}{e^t - 2}, \quad t \in \mathbb{R} - \{\ln 2\}.$$

1.5 Há que calcular as derivadas da função indicada e substitui-las na equação diferencial a fim de comprovar que esta se verifica. Os intervalos de definição seriam:

a) $t \in \mathbb{R}$.
b) $x \in \mathbb{R}$.

1.6 a) $m = -2$.
    b) $m = 2$ e $m = 3$.

1.7 $m = 0$ e $m = -1$.

2.1 $y = \dfrac{1}{1 - 4e^{-x}}$.

2.2 a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
    b) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

2.3 a) $x = -\cos t + 8 \operatorname{sen} t$.

b) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos t + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\, t.$

2.4 a) $y = \dfrac{3}{2}e^{x} - \dfrac{1}{2}e^{-x}.$

b) $y = 5e^{-x-1}.$

2.5 a) Semiplanos $y > 0$ e $y < 0$.

b) Semiplanos $x > 0$ e $x < 0$.

c) Regiões com $y > -2$, $-2 < y < 2$ e $y > 2$.

d) Qualquer região $\mathbb{R} - \{0, 0\}$.

2.6 a) Sim.

b) Não.

2.7 Há que calcular a derivada da função indicada e substitui-la na equação diferencial a fim de comprovar que esta se verifica. As correspondentes soluções e intervalos pedidos seriam:

a) $y = \dfrac{1}{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1).$

b) $y = \dfrac{-1}{x+1}, \quad x \in (-1, \infty).$

2.8 a) Há que calcular a derivada da função indicada e substitui-la na equação diferencial a fim de comprovar que esta se verifica.

b) $y = \pm\sqrt{3(x^2-1)}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Ver a representação gráfica na Fig. 3.

c) $y = +\sqrt{3(x^2-1)}.$

2.9 a) #2.

b) #3.

c) #4.

d) #1.

3.1

$$\frac{dP}{dt} = kP + r.$$

$$\frac{dP}{dt} = kP - r.$$

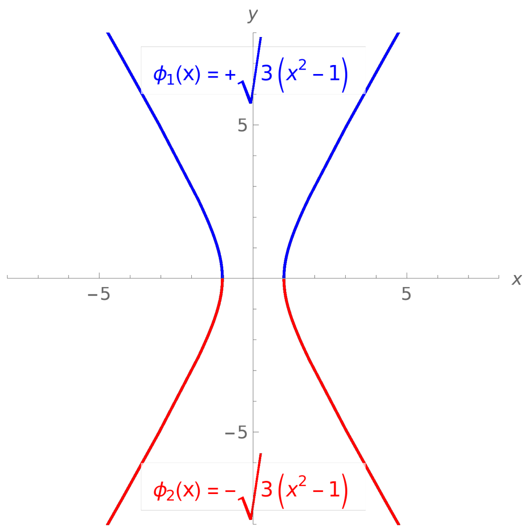

Figura 3: Representação das soluções do exemplo 2.8

3.2 a) $\dfrac{dP}{dt} = (k_n - k_m)P.$

b) $\dfrac{dP}{dt} = k_n P - k_m P^2.$

3.3

$T_0 = 80\ °\mathrm{C}.$
$T_a = 30\ °\mathrm{C}.$

3.4

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x).$$

3.5

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{A(t)}{100}.$$

$A(0) = A_0 = 50\,\mathrm{kg}.$

3.6

$$\frac{dA}{dt} = 2 - \frac{A(t)}{200 + t}.$$

3.7

$$\frac{dh}{dt} = -c\pi\, 10^{-4}\sqrt{19.62\, h}.$$