T10. A transformada de Fourier

Matemáticas III

Manuel Andrade Valinho

manuel.andrade@usc.gal

Área de Astronomia e Astrofísica

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior de Engenharia
Campus Terra (Lugo)

Índice

Apartados

Introdução

Séries de Fourier $\longrightarrow$ representação de *funções periódicas* num intervalo $(-p, p)$ ou $(0, L)$.

f e f' contínuas por intervalos $\Rightarrow$ a série de Fourier representa a função e converge à extensão periódica de f fora do intervalo.

Que acontece com *funções não periódicas* definidas num intervalo $(-\infty, \infty)$ ou $(0, \infty)$?

Séries de Fourier $\to$ integral de Fourier

Suponhamos uma função f definida em $(-p,p)$. Substituindo os coeficientes da série de Fourier na sua expressão obtemos:

$$f(x)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(t)dt+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p}f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dt\right)\cos\frac{n\pi}{p}x+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{-p}^{p}f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{p}t\,dt\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\right].$$

Tomando $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{p}$ e $\Delta\alpha=\alpha_{n+1}-\alpha_n=\dfrac{\pi}{p}$, chegamos a

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-p}^{p}f(t)dt\right)\Delta\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p}f(t)\cos\alpha_n t\,dt\right)\cos\alpha_n x+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{-p}^{p}f(t)\,\mathrm{sen}\,\alpha_n t\,dt\right)\mathrm{sen}\,\alpha_n x\right]\Delta\alpha.$$

Séries de Fourier $\to$ integral de Fourier

Tomamos $p\to\infty$ $(\Rightarrow\Delta\alpha\to 0)$ para expandir o intervalo $(-p,p)$.

$$f(x)=\overbrace{\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-p}^{p}f(t)dt\right)\Delta\alpha}^{0}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p}f(t)\cos\alpha_n t\,dt\right)\cos\alpha_n x+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{-p}^{p}f(t)\,\mathrm{sen}\,\alpha_n t\,dt\right)\mathrm{sen}\,\alpha_n x\right]\Delta\alpha.$$

No segundo termo, o limite da soma converge à integral

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{n=0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x+\right.$$
$$\left.\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathrm{sen}\,\alpha t\,dt\right)\mathrm{sen}\,\alpha x\right]d\alpha.$$

Integral de Fourier

Definição 10.1.1 (integral de Fourier)

A **integral de Fourier** de uma função f definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha x]\,d\alpha, \qquad (1)$$

onde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx, \qquad (2)$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,dx. \qquad (3)$$

Convergência

Teorema 10.1.2 (convergência da integral de Fourier)

Se $f(x)$ for contínua por intervalos em cada intervalo finito, se possuir derivada à direita e à esquerda de cada ponto e se for absolutamente integrável, então $f(x)$ pode ser representada por uma integral de Fourier. Num ponto onde $f(x)$ seja descontínua, o valor da integral de Fourier é igual à media

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2},$$

onde $f(x-)$ e $f(x+)$ denotam os limites de $f(x)$ à direita e à esquerda, respetivamente.

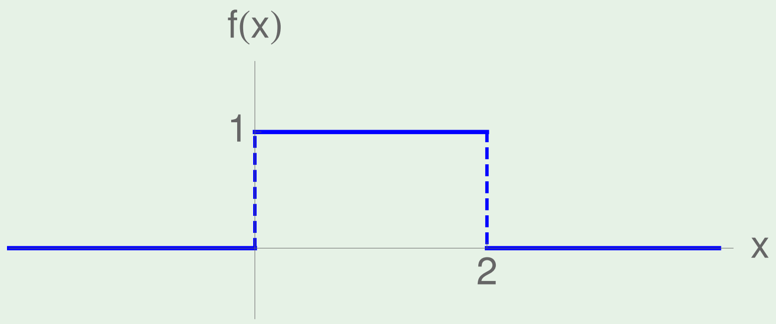
Absolutamente integrável: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge.

Convergência

Exercício 10.1.3 (representação pela integral de Fourier)

Encontra a representação pela integral de Fourier da função definida por intervalos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$



A integral de Fourier
A transformada de Fourier
A transformada de Fourier discreta
A transformada rápida de Fourier

Convergência

Resolução

A função satisfaz as condições do teorema anterior. Os coeficientes da integral de Fourier são

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\cos\alpha x dx + \int_{0}^{2} f(x)\cos\alpha x dx + \int_{2}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx \\ &= \int_{0}^{2} f(x)\cos\alpha x dx = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x dx = \int_{0}^{2} f(x)\operatorname{sen}\alpha x dx = \frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}.$$

Convergência

Substituindo $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ na expressão da integral de Fourier obtemos

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha}\right)\cos\alpha x + \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha x\right] d\alpha$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\left[\alpha(x-1)\right]}{\alpha} d\alpha,$$

onde no último passo se usou o seno e o cosseno do dobro do ângulo e o cosseno da diferença de dous ângulos.

Integrais de Fourier de seno e de cosseno

Definição 10.1.4 (integral de Fourier de cossenos)

A **integral de Fourier** de uma função f par definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ é a integral **de cossenos**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha, \tag{4}$$

onde

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx. \tag{5}$$

Integrais de Fourier de seno e de cosseno

Definição 10.1.5 (integral de Fourier de senos)

A **integral de Fourier** de uma função f ímpar definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ é a integral **de senos**

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha, \tag{6}$$

onde

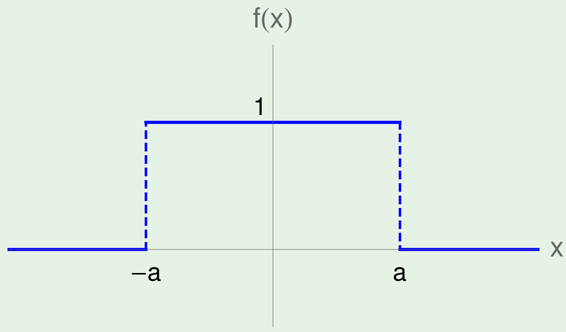
$$B(\alpha) = \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx. \tag{7}$$

Integrais de Fourier de seno e de cosseno

Exercício 10.1.6 (representação pela integral de Fourier de cossenos)

Encontra a representação pela integral de Fourier da função definida por intervalos

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$



⇝

Convergência

Resolução

Esta é uma função par, de modo que representaremos f por uma integral de Fourier de cossenos. Calculamos o coeficiente da série

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x dx = \int_0^a f(x)\cos\alpha x dx + \int_a^\infty f(x)\cos\alpha x dx$$
$$= \int_0^a \cos\alpha x dx = \frac{\operatorname{sen} a\,\alpha}{\alpha}.$$

Portanto, a integral de Fourier de cossenos virá dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a\,\alpha \cos\alpha x}{\alpha}d\alpha.$$

Forma complexa da integral de Fourier

Definição 10.1.7 (integral de Fourier complexa)

A **integral de Fourier complexa** de uma função f definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha, \tag{8}$$

onde

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx. \tag{9}$$

Apartados

A transformada de Fourier

Definição 10.2.1 (pares de transformadas de Fourier)

Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = F(\alpha), \tag{10}$$

Transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{F(\alpha)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = f(x). \tag{11}$$

A transformada de Fourier

Notação

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ib\alpha x}\,dx = F(\alpha),$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-ib\alpha x}\,d\alpha = f(x).$$

$$(a,b) = \begin{cases} (-1,1) & \text{(física clássica)} \\ (0,1) & \text{(física moderna)} \\ (1,-1) & \textbf{(matemáticas puras/engenharia de sistemas)} \\ (1,1) & \text{(teoria de probabilidades)} \\ (0,-2\pi) & \text{(processamento de sinais)} \end{cases}$$

A transformada de Fourier

Definição 10.2.2 (pares de transformadas de Fourier de senos)

Transformada de Fourier de senos

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,dx = F(\alpha), \tag{12}$$

Transformada inversa de Fourier de senos

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,d\alpha = f(x). \tag{13}$$

A transformada de Fourier

Definição 10.2.3 (pares de transformadas de Fourier de cossenos)

Transformada de Fourier de cossenos

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} = \int_0^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx = F(\alpha), \tag{14}$$

Transformada inversa de Fourier de cossenos

$$\mathcal{F}_c^{-1}\left\{F(\alpha)\right\} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha = f(x). \tag{15}$$

A transformada de Fourier

Teorema 10.2.4 (existência da transformada de Fourier)

Seja $f(x)$ absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$ e contínua por intervalos em cada intervalo finito, então a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ de $f(x)$, dada por (10) , existe.

$\rightsquigarrow$

A transformada de Fourier

Exercício 10.2.5 (cálculo da transformada de Fourier)

Encontra a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & \text{qualquer outro caso.} \end{cases}$$

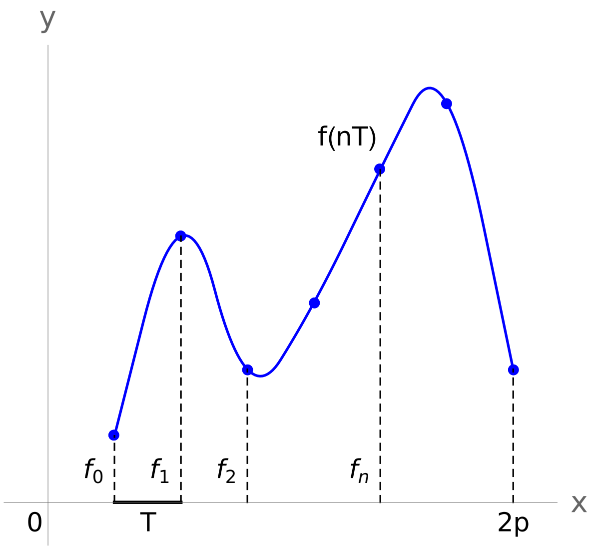
Usando (10) e integrando chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x}\, dx = F(\alpha) \\ &= \int_{-1}^{1} e^{i\alpha x}\, dx = \left.\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\right|_{-1}^{1} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\ &= \frac{2i \operatorname{sen} \alpha}{i\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Apartados

Amostragem de sinal (*sampling*)

Consideremos uma função f definida num intervalo contínuo $[0, 2p]$. Os valores da função $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ representam uma amostragem discreta da função f.



A transformada de Fourier discreta (DFT)

Vimos que a uma f definida no intervalo $[0, 2p]$ podia escrever-se como uma série de Fourier complexa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x},$$

$$\text{com } c_n = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x) e^{-in\omega x} dx,$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}$ é a chamada **frequência angular fundamental** e $2p$ é o **período fundamental**.

Porém, no caso de uma amostragem discreta, o número T é a chamada **taxa de amostragem**.

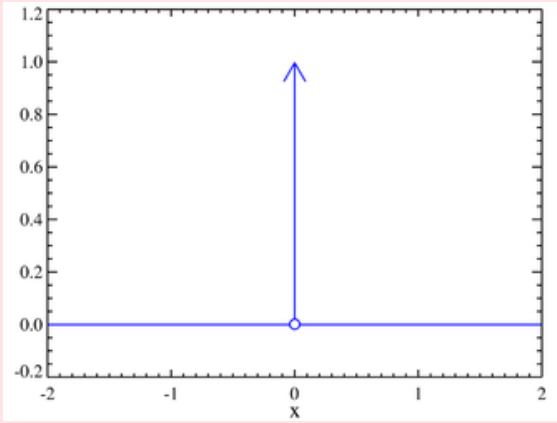
A transformada de Fourier discreta (DFT)

Definição 10.3.1 (função delta de Dirac)

A "*função*" **delta de Dirac** pode caraterizar-se mediante as seguintes duas propriedades

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & x\neq t_0\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1.$$



A integral de Fourier
A transformada de Fourier
A transformada de Fourier discreta
A transformada rápida de Fourier

A transformada de Fourier discreta (DFT)

No caso de que f seja contínua em T a amostragem de f em T define-se como

$$f(x)\delta(x-T),$$

onde $\delta(x-T)$ é a função delta de Dirac.

Então é possível representar esta versão discreta de f (sinal discreto) como a soma dos impulsos unitários agindo sobre a função $x=nT$, isto é

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-nT)$$

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Aplicando a transformada de Fourier obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - nT)e^{i\alpha x}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{i\alpha nt},$$

onde a última igualdade é possível graças a consideramos a *propriedade de filtragem* da delta de Dirac, dada por

$$\int_{0}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0).$$

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Definição 10.3.2 (transformada de Fourier discreta)

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{i\alpha nT}. \tag{16}$$

Notação $f(nT) \equiv f(n) \equiv f_n$.

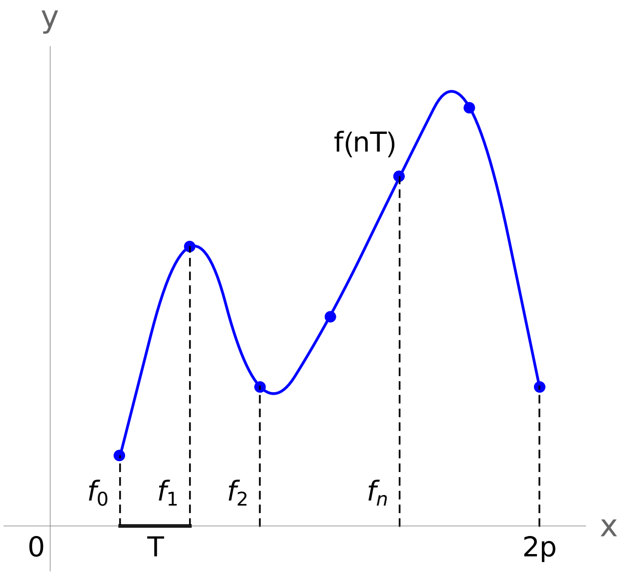
Periodicidade $e^{i\alpha x}$ periódica em $\alpha \longrightarrow \alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{T}\right]$.

Intervalo $N = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow x \in [0, 2\pi]$

1 período $\Rightarrow$ soma finita.

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Tomamos os valores da função $f(x)$, dados por $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$ em N pontos igualmente espaçados, $x = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, no intervalo $[0, 2\pi]$.



A integral de Fourier
A transformada de Fourier
A transformada de Fourier discreta
A transformada rápida de Fourier

A transformada de Fourier discreta (DFT)

A série de Fourier (finita) $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ dos N termos é

$$
\begin{aligned}
f_0 &= c_0 + c_1 e^{i\,1\cdot 0} && + c_2 e^{i\,2\cdot 0} + \ldots + c_{N-1} e^{i\,(N-1)\cdot 0} \\
f_1 &= c_0 + c_1 e^{i\dfrac{2\pi}{N}} && + c_2 e^{i\dfrac{4\pi}{N}} + \ldots + c_{N-1} e^{i\dfrac{2(N-1)\pi}{N}} \\
f_2 &= c_0 + c_1 e^{i\dfrac{4\pi}{N}} && + c_2 e^{i\dfrac{8\pi}{N}} + \ldots + c_{N-1} e^{i\dfrac{4(N-1)\pi}{N}} \\
&\vdots && \vdots \\
f_{N-1} &= c_0 + c_1 e^{i\frac{2(N-1)\pi}{N}} && + c_2 e^{i\frac{4(N-1)\pi}{N}} + \ldots + c_{N-1} e^{i\frac{2(N-1)2\pi}{N}}.
\end{aligned}
$$

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Tomando $\omega_n = e^{i2\pi/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ chegamos a

$$\begin{aligned}
f_0 &= c_0 + c_1 && + c_2 + \ldots + c_{N-1} \\
f_1 &= c_0 + c_1\omega_N && + c_2\omega_N^2 + \ldots + c_{N-1}\omega_N^{N-1} \\
f_2 &= c_0 + c_1\omega_N^2 && + c_2\omega_N^4 + \ldots + c_{N-1}\omega_N^{2(N-1)} \\
&\vdots && \qquad\vdots \\
f_{N-1} &= c_0 + c_1\omega_N^{N-1} && + c_2\omega_N^{2(N-1)} + \ldots + c_{N-1}\omega_N^{(N-1)^2}.
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Em forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \ddots & \omega_N^{(N-1)} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \ddots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \ldots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_N} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Também se satisfaz

$$\mathbf{F}_N\bar{\mathbf{F}}_N = \bar{\mathbf{F}}_N\mathbf{F}_N = N\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{F}_N^{-1} = \frac{1}{N}\bar{\mathbf{F}}_N,$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $N \times N$.

$\rightsquigarrow$

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Finalmente obtemos

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\bar{\mathbf{F}}_N \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Definição 10.3.3 (par de transformações de Fourier discretas)

$$\mathbf{c} = \frac{1}{N}\bar{\mathbf{F}}_N \mathbf{f},$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}_N \mathbf{c}.$$

$\rightsquigarrow$

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Exemplo N=4

Considerando que

$$\omega_n = e^{i2\pi/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$
$$\Rightarrow \omega_4 = \cos\frac{2\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4} = i.$$

obtemos

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

A transformada de Fourier discreta (DFT)

Exercício 10.3.4 (DFT)

Calcula a DFT dos seguintes 4 pontos $f_0 = 0, f_1 = 2, f_2 = 4, f_3 = 6$.

Resolução

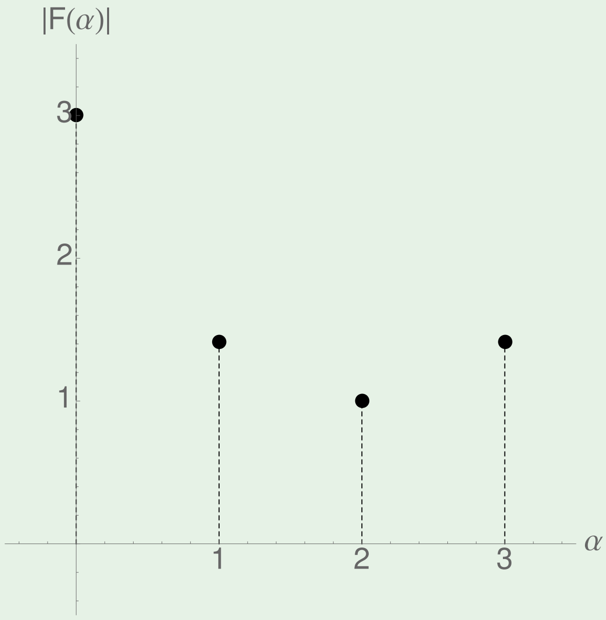
$$\mathbf{c} = \frac{1}{N}\bar{\mathbf{F}}_N\mathbf{f}$$

$$= \frac{1}{4}\bar{\mathbf{F}}_4\mathbf{f} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1+i \\ -1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

A integral de Fourier
A transformada de Fourier
A transformada de Fourier discreta
A transformada rápida de Fourier

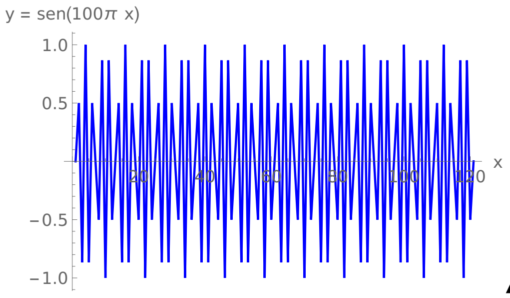
A transformada de Fourier discreta (DFT)

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1+i \\ -1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

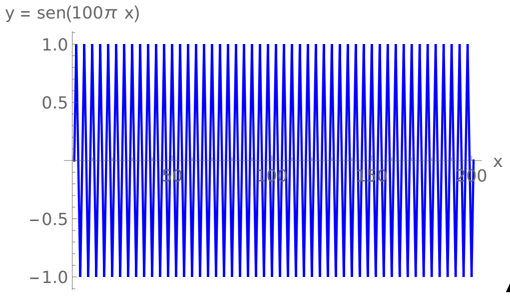


Processamento de sinais

O modo em que se realiza a mostragem influi na representação da função (*aliasing*)



$$\Delta x = \frac{1}{120}$$



$$\Delta x = \frac{1}{200}$$

Processamento de sinais

Teorema 10.3.5 (teorema de amostragem)

Se um sinal estiver limitado a um certa banda, isto é, restringido a um intervalo de frequências $-A < k < A$, então o sinal pode reconstruir-se realizando uma amostragem duas vezes por cada ciclo da máxima frequência presente, de modo que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \frac{\operatorname{sen}(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}.$$

Então, para amostragens a intervalos de $\dfrac{\pi}{A}$, todos os valores de $f(x)$ podem ser reconstruidos.

Processamento de sinais

Sinais multifrequência $\xrightarrow{\textbf{filtragem}}$ sinais de banda limitada.

Teorema 10.3.6 (teorema de convolução)

Seja $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ *e* $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(\alpha)$. *Então,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)G(\alpha)\} = f * g$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}\{f * g\} = F(\alpha)G(\alpha).$$

$\rightsquigarrow$

Processamento de sinais

Sinais de banda limitada

A função

$$g(x) = \frac{\text{sen}\, Ax}{\pi x}$$

tem como transformada de Fourier

$$G(\alpha) = \begin{cases} 1, & -A < \alpha < A, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Então, $(f * g)(x)$ é um sinal de banda limitada.

Apartados

A integral de Fourier

A transformada de Fourier

A transformada de Fourier discreta

A transformada rápida de Fourier

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Transformada de Fourier discreta

Aproximemos os valores da transformada discretizando a integral

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx.$$

Consideremos o intervalo $[a, b]$ e tomemos $f(x)$ dada em n pontos igualmente espaçados,

$$x_j = a + \frac{b-a}{n}j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Agora, aproximando

$$\begin{aligned} F(\alpha) &\approx \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)e^{i\alpha x_j} \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\alpha x_j} \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\alpha a}e^{i\alpha\frac{b-a}{n}j} \\ &= \frac{b-a}{n}e^{i\alpha a}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\alpha\frac{b-a}{n}j}. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Se escolhemos um valor conveniente $\alpha = \dfrac{2\pi M}{b-a}$, $M \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\pi M}{b-a}\right) &\approx \frac{b-a}{n}e^{i\frac{2\pi Ma}{b-a}}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)e^{i\frac{2\pi jM}{n}} \\ &= \frac{b-a}{n}e^{i\frac{2\pi Ma}{b-a}}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)\omega_n^{jM}, \qquad (17) \end{aligned}$$

onde $\omega_n = e^{i2\pi/n}$. A expressão (17) é uma aproximação à transformada de Fourier de $f(x)$ avaliada nos pontos $\dfrac{2\pi M}{b-a}$ com $M \in \mathbb{Z}$.

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Se consideramos (17) tomando n pontos igualmente espaçados uma distância T, começando em $a = 0$, obtemos

$$F\left(\frac{2\pi k}{nT}\right) = T\sum_{j=0}^{n-1} f(jT)\omega_n^{kj}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Por simplicidade reescrevemos isto como

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j\omega_n^{kj}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

A integral de Fourier
A transformada de Fourier
A transformada de Fourier discreta
A transformada rápida de Fourier

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Em forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \ddots & \omega_n^{(n-1)} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \ddots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \ldots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_n} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

ou o que é o mesmo

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}_n\,\mathbf{c}.$$

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Se $n = 2^N$ pode provar-se que

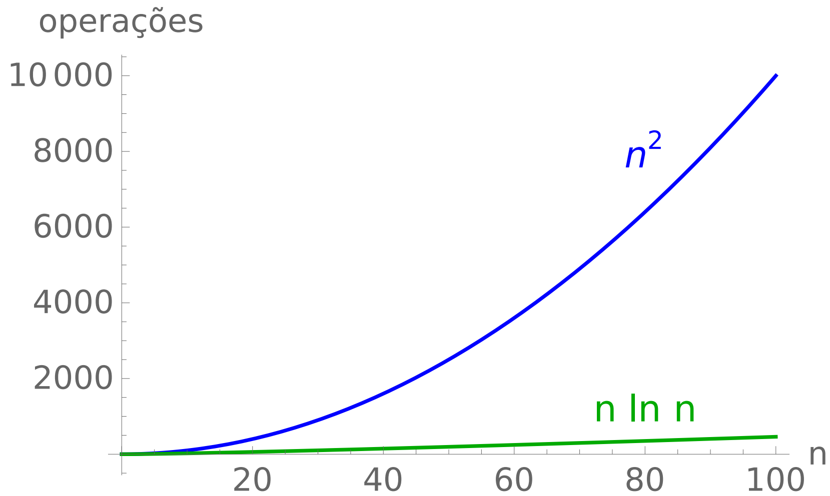
$$\mathbf{F}_{2^N} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2^{N-1}} & \mathbf{D}_{2^{N-1}} \\ \mathbf{I}_{2^{N-1}} & -\mathbf{D}_{2^{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{2^{N-1}} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{2^{N-1}} \end{pmatrix} \mathbf{P}, \tag{18}$$

onde $\mathbf{I}_k$ é a matriz identidade $k \times k$ e $\mathbf{P}$ é a matriz permutação que permite escrever $\mathbf{c}$ de modo que os subíndices pares se ordenam acima e os pares abaixo.
A matriz $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal

$$\mathbf{D}_{2^{N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega_{2^N} & & & \\ & & (\omega_{2^N})^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\omega_{2^N})^{2^{N-1}-1} \end{pmatrix}.$$

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Como consequência deste procedimento, cada matriz $\mathbf{F}_{2^{N-1}}$ pode ser fatorizada. Finalmente, a matriz $\mathbf{F}_n$ com n^2 entradas não nulas é fatorizável no produto de n matrizes mais simples
$\Rightarrow$ muitas menos operações.



Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Exercício 10.4.1 (FFT)

Dada a matriz $\mathbf{F}_4$ (anteriormente obtida)

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

determina a sua fatorização usando o método FFT.

Cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT)

Resolução

Da expressão (18) obtemos:

$$\mathbf{F}_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}.$$

Licença