Percepción y procesado de señales

Señales en tiempo discreto

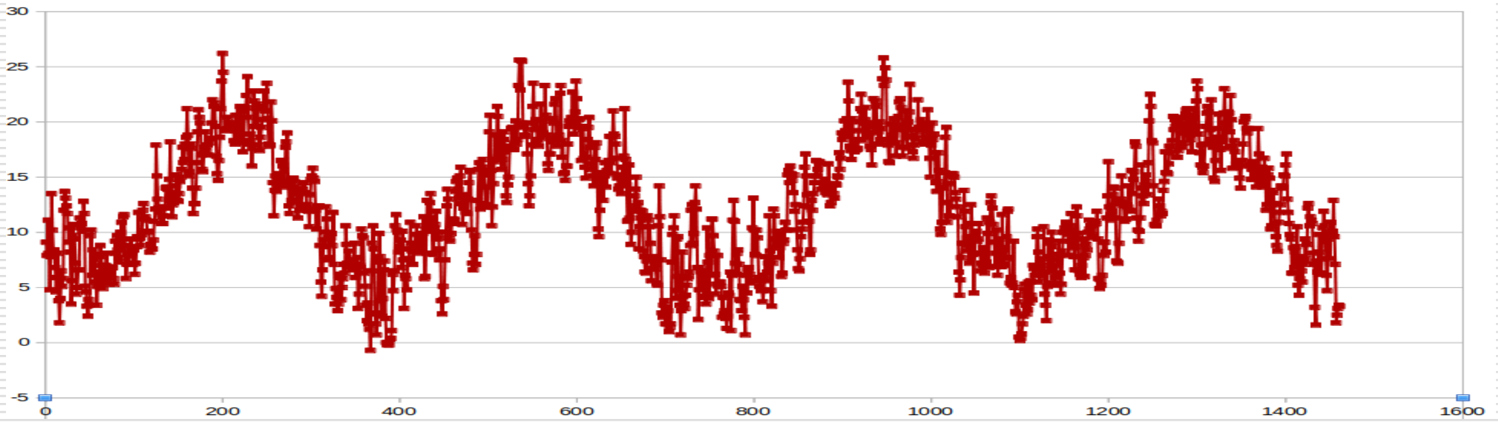
David Mera

Área de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Departamento de Electrónica e Computación

Señales en tiempo discreto

- Origenes prácticos de las señales en tiempo discreto
  - Orígenes prácticos de las señales en tiempo discreto
    - Seleccionando valores de una señal analógica en instantes discretos de tiempo

Temperatura diaria Lugo 2016-2020



Fuente de datos: meteogalicia

Señales en tiempo discreto

- Origenes prácticos de las señales en tiempo discreto
  - Orígenes prácticos de las señales en tiempo discreto
    - Valor acumulativo a lo largo de un período de tiempo.

Manchas solares mensuales: 1750-2020

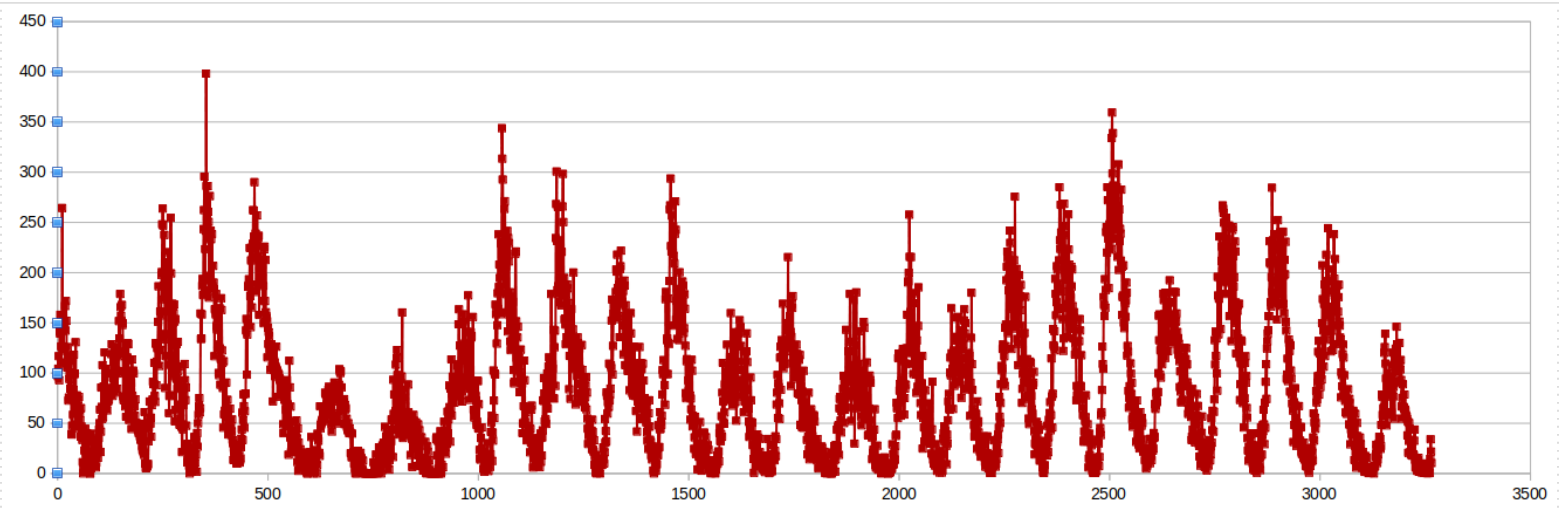


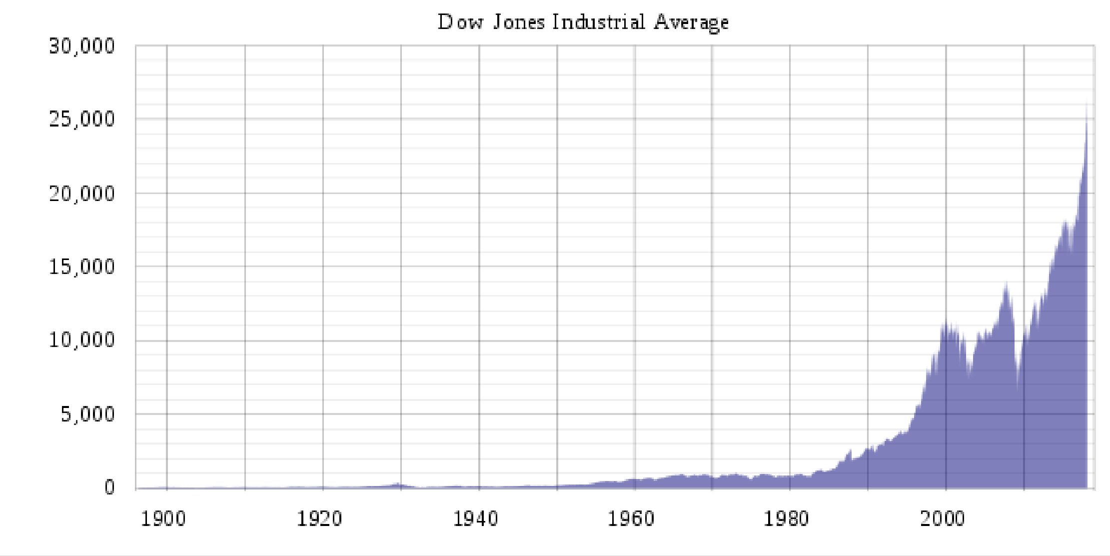
Imagen propia. Fuente de datos: WDC-SILSO, Royal Observatory of Belgium, Brussels

Señales en tiempo discreto

- Origenes prácticos de las señales en tiempo discreto
  - Orígenes prácticos de las señales en tiempo discreto
    - Valor acumulativo a lo largo de un período de tiempo.

Señales en tiempo discreto

- Origenes prácticos de las señales en tiempo discreto
  - Orígenes prácticos de las señales en tiempo discreto
    - Valor acumulativo a lo largo de un período de tiempo. Señal puramente hecha por el hombre

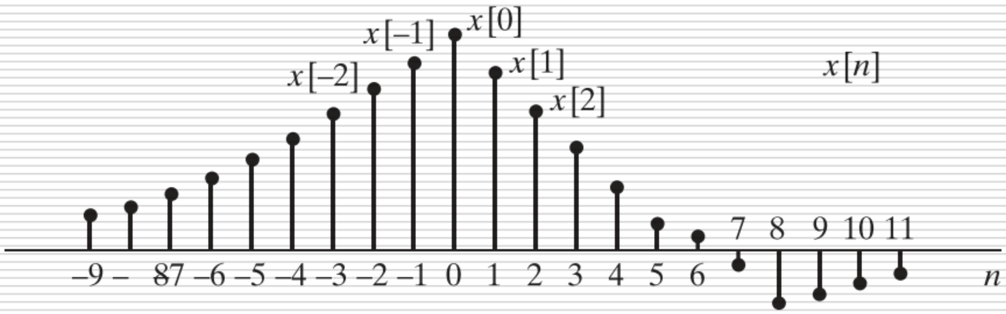


Fuente Wikipedia

Señales en tiempo discreto

- Señal en tiempo discreto se representa como una secuencia de números
  - Por ahora trataremos solo con una dimensión
  - Notación x[n]
  - $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$
  - ‘n’ es tiempo adimensional (no está asociado con una unidad física)

Representación gráfica de una señal en tiempo discreto.

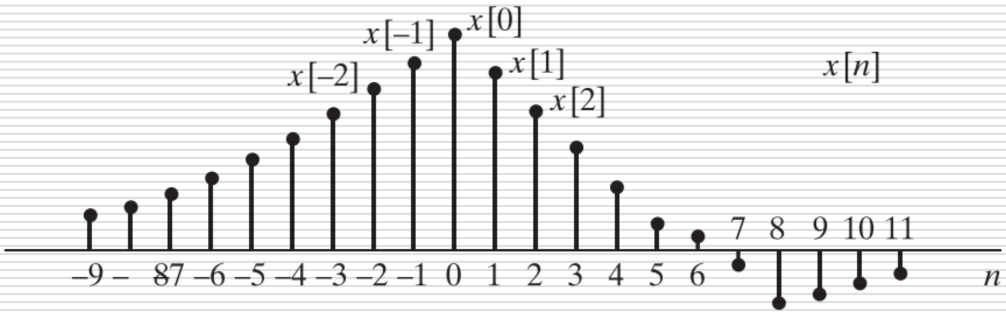


Fuente: Tratamiento de señales en tiempo discreto. Oppenheim, A. V; Schafer, R.W

Señales en tiempo discreto

- Señal en tiempo discreto se representa como una secuencia de números
  - Nos referiremos a x[n] como la muestra *n-ésima* (aunque no se obtuviese con muestreando una señal analógica)
  - x[n] está definida solo para valores enteros de ‘n’
  - **No es correcto** pensar que es cero en valores de n no enteros. Simplemente, x[n] no está definido en esos valores

Representación gráfica de una señal en tiempo discreto.



Fuente: Tratamiento de señales en tiempo discreto. Oppenheim, A. V; Schafer, R.W

Señales en tiempo discreto

Representación de las señales

1. Representación funcional:

$$x[n]\begin{cases} 1, para\ n = 1{,}3 \\ 4, para\ n = 2 \\ 0, en\ otro\ caso \end{cases}$$

2. Representación tabular:

n	...	-2	-1	0	1	2	...
x[n]	...	0	0	2	4	6	...

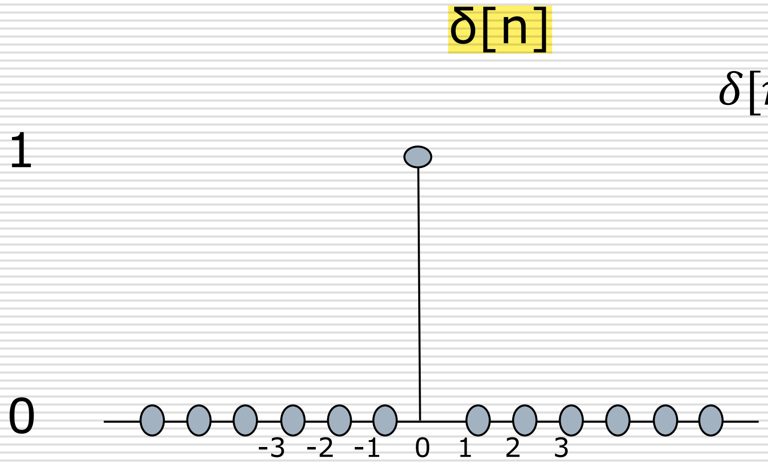
3. Representación como secuencia:

$$x[n]=\{\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},0,2,0,3,\ldots\} \qquad x[n]=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,2,0,2,\ldots\}$$

($\uparrow$ representa n=0)

Señales en tiempo discreto

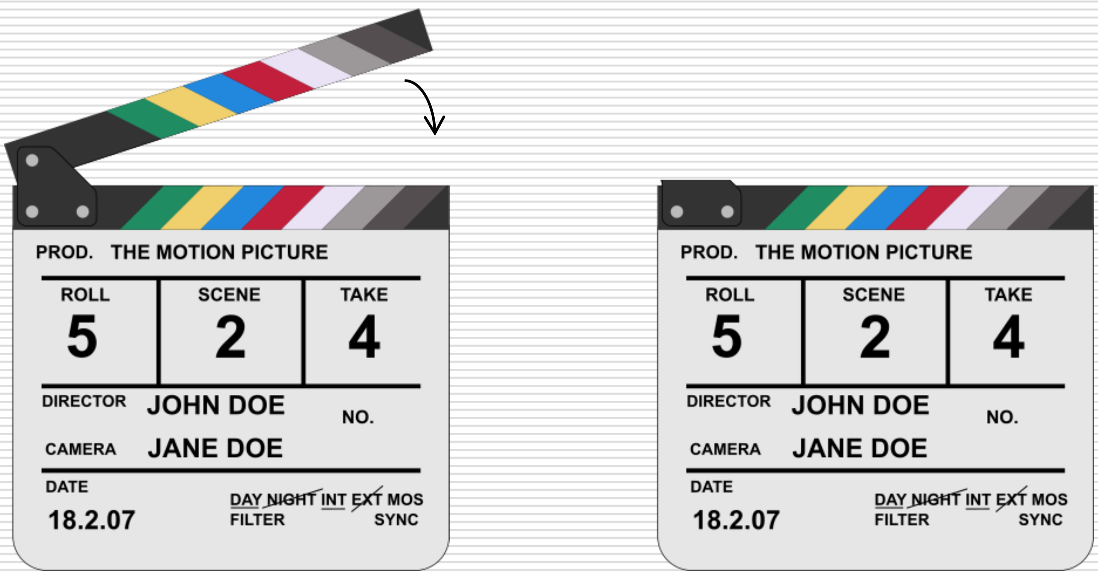
- Secuencias básicas
  - **Impulso** unitario, secuencia muestra unidad o *delta signal*



$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Señales en tiempo discreto

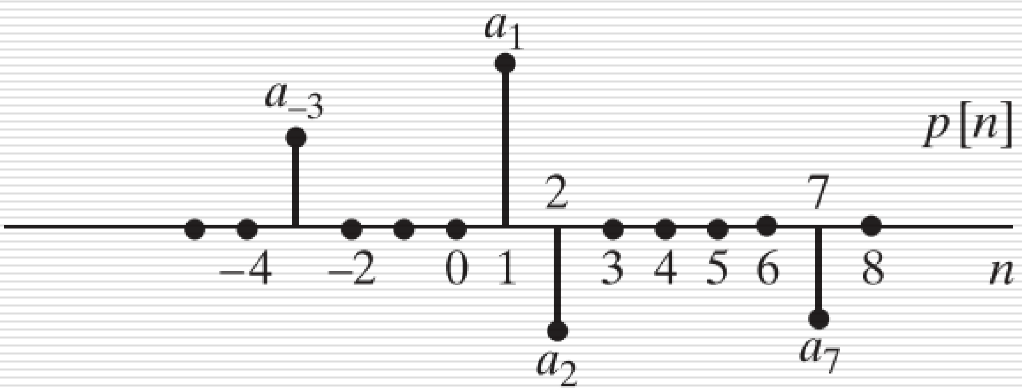
- Secuencias básicas
  - **Impulso** unitario, secuencia muestra unidad o *delta signal*



Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - **Impulso** unitario, secuencia muestra unidad o *delta signal*
    - Cualquier secuencia arbitraria puede expresarse como una suma de impulsos desplazados y escalados

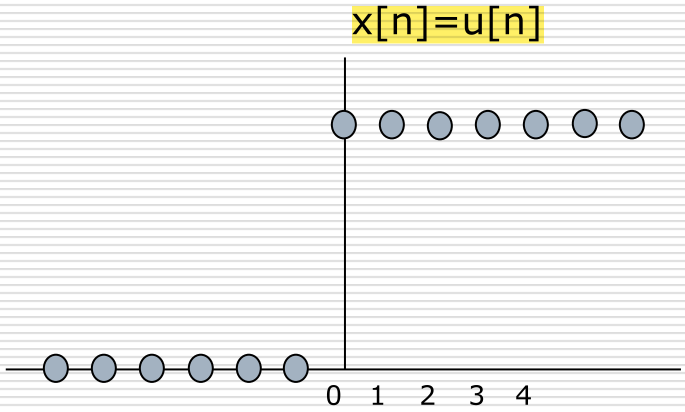
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\,\delta[n-2] + a_7\delta[n-7]$$

Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - **Escalón** unidad



$$u[n] = \begin{cases} 1, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases}$$

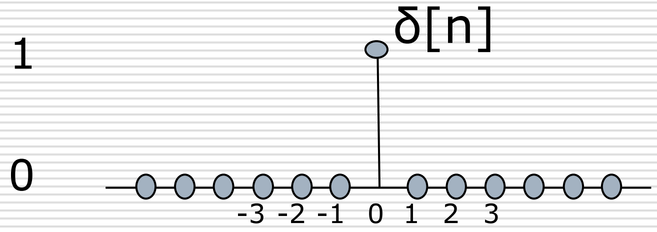
Señales en tiempo discreto

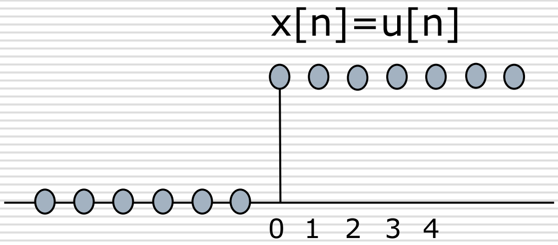
- Secuencias básicas
  - **Escalón** unidad
    - La relación entre el escalón unidad y el impulso es:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

    - La secuencia impulso también se puede expresar como:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



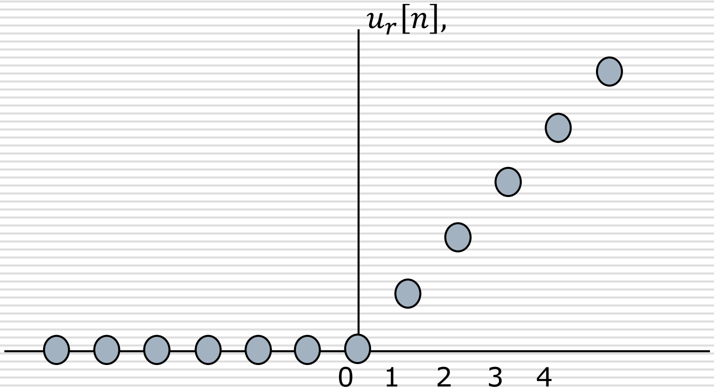


Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - **Rampa**

$$x[n] = u_r[n],$$

$$u_r[n] = \begin{cases} n, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases}$$

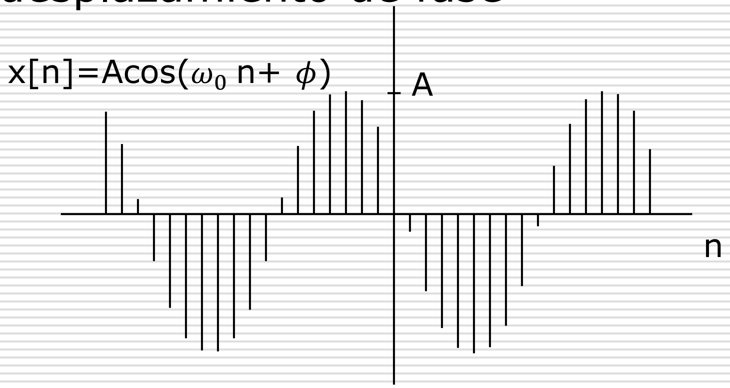


Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - Señal **sinusoidal**

$$x[n] = \mathrm{A}\cos(\omega_0 n + \phi)$$

- A es la amplitud
- n es el número de la muestra
- ω_0 es la frecuencia en radianes por muestra. Típicamente usaremos la frecuencia f_0 en ciclos por muestra: $\omega_0 = 2\pi f_0$
- ϕ es el desplazamiento de fase



Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - Señal **exponencial**

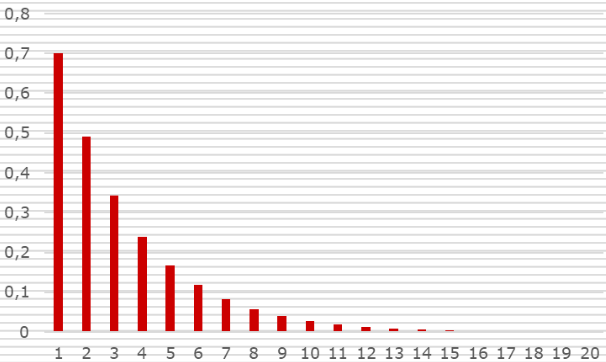
Forma general: $x[n] = A\alpha^n$

- Si A y α son números reales, la secuencia es real
- Si 0<α<1 y A es positivo, los valores de la secuencia son positivos y decrecen con n
- Si -1<α<0 , los valores de la secuencia alternan el signo pero su módulo decrece
- Si $|\alpha| > 1$ el módulo de los valores de la secuencia crecen al aumentar n

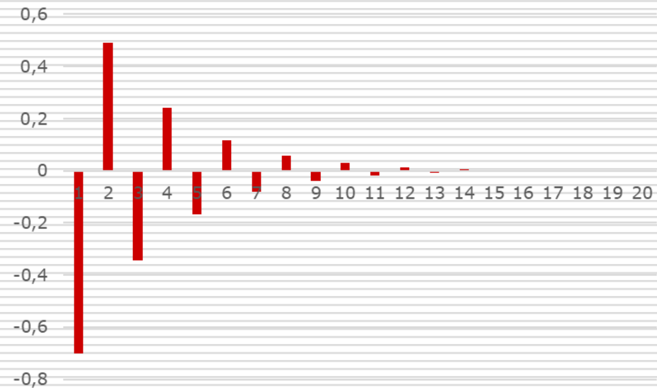
Señales en tiempo discreto

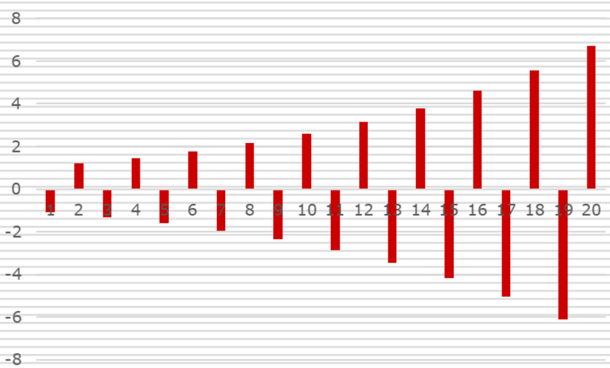
- Señal **exponencial**

$0<\alpha<1$

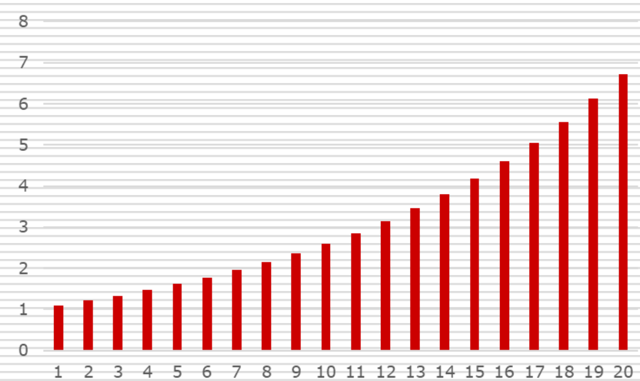


$-1<\alpha<0$





$\alpha<-1$

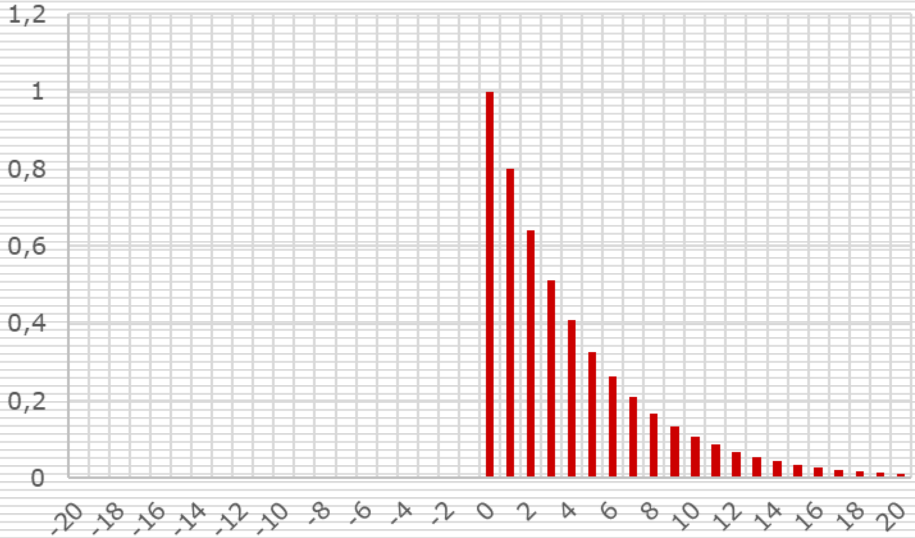


$\alpha>1$

Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - Señal **exponencial**
    - Decaimiento exponencial (otra forma de representarlo)

$$x[n] = A|\alpha|^n\, u[n], \qquad |\alpha| < 1$$



Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - Señal **exponencial**
    - Si α es un número complejo tendremos una exponencial compleja

$$x[n] = A\alpha^n \qquad A = |A|e^{j\phi} \qquad \alpha = |\alpha|e^{j\omega_o} \qquad = |A|e^{j\phi}|\alpha|^n\, e^{j\omega_0 n}$$

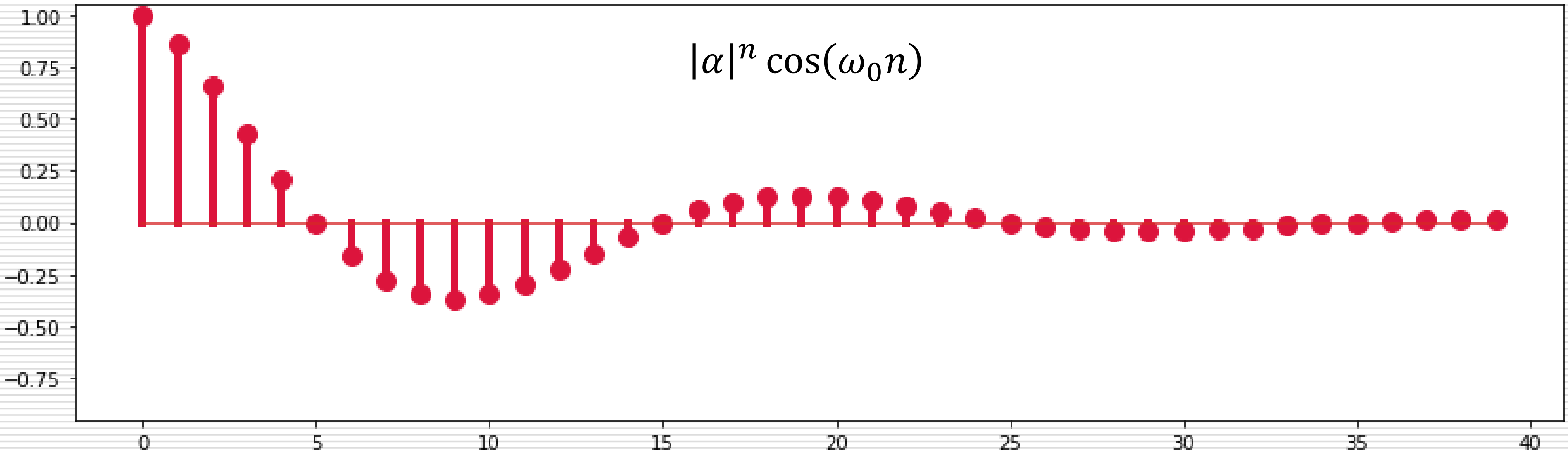
$$= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

$$= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi)$$

- Al ser una señal compleja podemos representar gráficamente cada parte por separado
  - La secuencia oscila con una envolvente exponencial creciente si $|\alpha| > 1$ o decreciente si $|\alpha| < 1$

Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - Señal exponencial compleja



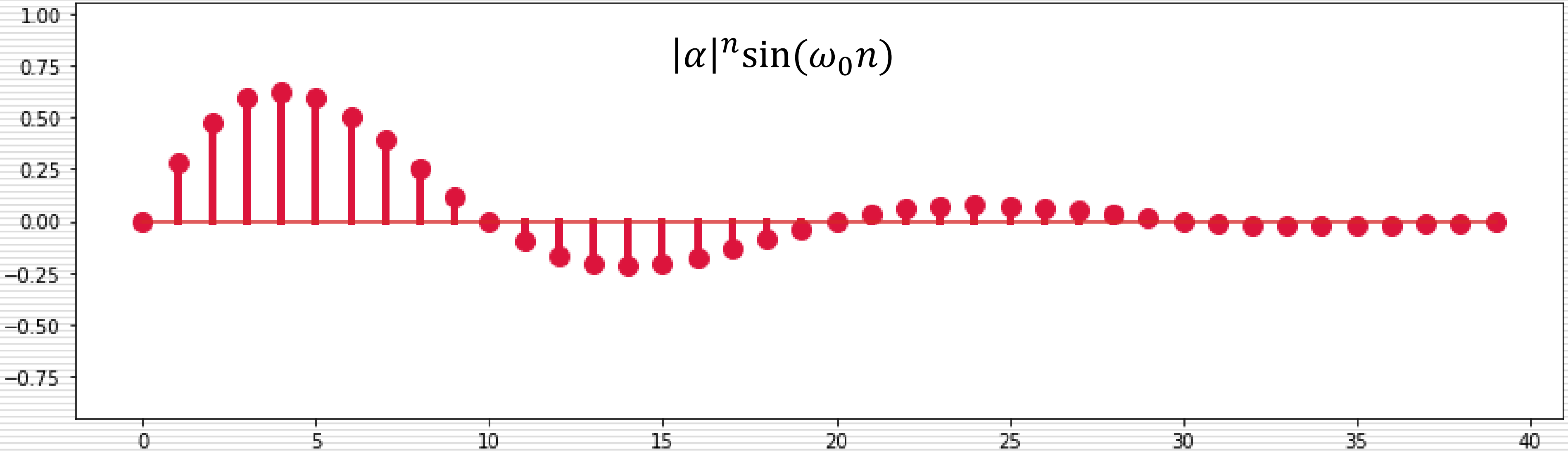
Componente real

$$A = 1, |\alpha| = 0.9, \omega_0 = \frac{\pi}{10}$$

Señales en tiempo discreto

Secuencias básicas

- Señal exponencial compleja



Componente imaginaria

$$A = 1, |\alpha| = 0.9, \omega_0 = \frac{\pi}{10}$$

Señales en tiempo discreto

- Secuencias básicas
  - Señal exponencial compleja
    - Si $|\alpha| = 1$ entonces tendremos la forma que ya conocemos

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\phi)}$$

$$x[n] = Acos(\omega_0 n + \phi) + Ajsin(\omega_0 n + \phi)$$

    - Es decir, las partes real e imaginaria de varían sinusoidalmente con n

Señales en tiempo discreto

- Clases de señales discretas
  - Longitud finita
  - Longitud infinita
  - Periódica
  - Soporte finito

Señales en tiempo discreto

- Clases de señales discretas:
  - Longitud finita
    - Notación secuencial: $x[n] = \{0,1,2, \dots, N-1\},\ n = 0,1, \dots\dots, N-1$
    - Notación vectorial: $x = [x_0\ x_1\ \dots\ x_{n-1}]^T$
    - Adecuadas para los paquetes de software tipo *numpy*
  - Longitud infinita
    - Notación secuencial: $x[n],\ n \in \mathbb{Z}, \qquad -\infty \leq n \leq \infty$
    - Adecuadas para la abstracción y teoremas
  - Periódicas
    - Secuencia infinita PERO **los datos se repiten cada N muestras**
    - Notación secuencial: $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + kN],\ n, k, N\ \in\ \mathbb{Z}$
    - Contienen la misma información que una secuencia finita de longitud N
    - *Puente* entre las señales de longitud finita e infinita

Señales en tiempo discreto

- Clases de señales discretas:
  - Secuencias de soporte finito
    - Secuencias infinitas con **un número finito de muestras distintas de cero**
    - Misma información que una secuencia finita de longitud N
    - Otro *puente* entre las señales finitas e infinitas

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x[n], & para\ 0 \leq n < N \\ 0, & para\ el\ resto \end{cases}$$

Señales en tiempo discreto

Operaciones básicas con secuencias

- La **suma** de 2 secuencias $x[n]$ e $y[n]$ se define como la suma muestra a muestra

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad -\infty < n < \infty$$

- El **producto** de 2 secuencias x[n] e y[n] se define como el producto muestra a muestra

$$y[n] = x_1[n]x_2[n] \quad -\infty < n < \infty$$

Señales en tiempo discreto

Operaciones básicas con secuencias

- La multiplicación de una secuencia por un número α se define como la multiplicación de los valores de cada muestra por α (**escalado**)

$$y[n] = \alpha x[n] \quad -\infty < n < \infty$$

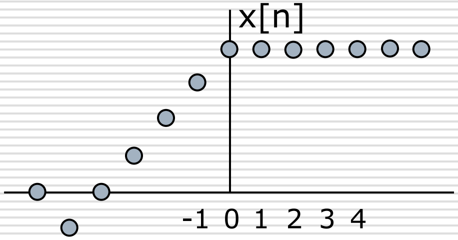
- Se dice que una secuencia y[n] es una versión retrasada o **desplazada** de x[n] si

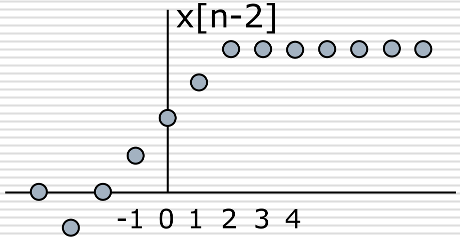
$$y[n] = x[n-k],$$

siendo k un número entero

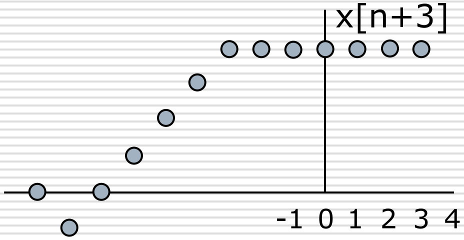
Señales en tiempo discreto

- Operaciones básicas con secuencias
  - Desplazamiento en secuencias finitas
    - Secuencia desplazada: $y[n] = x[n-k]$
    - Si el desplazamiento es **k>0** entonces se produce un **retraso** de k unidades de tiempo
    - Si el desplazamiento es **k<0** entonces se produce un **adelanto** de k unidades





retraso

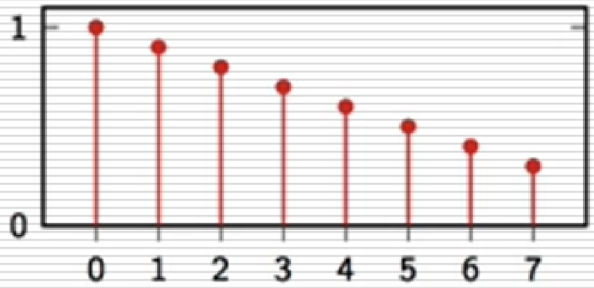


adelanto

Señales en tiempo discreto

- Operaciones básicas con secuencias
  - Desplazamiento en secuencias finitas
    - Opción 1: tratarla como una señal de soporte finito

$$x[n] = [x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; x_6 \;\; x_7]$$

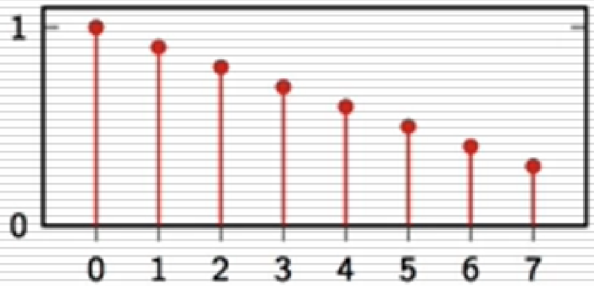


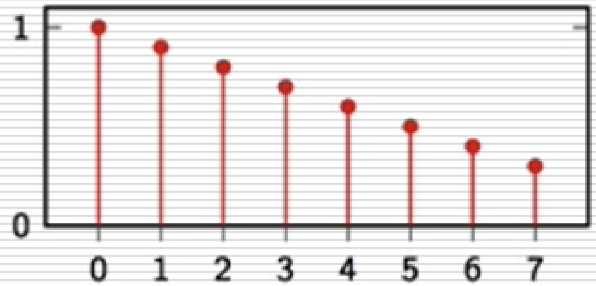
Señales en tiempo discreto

- Operaciones básicas con secuencias
  - Desplazamiento en secuencias finitas
    - Opción 1: tratarla como una señal de soporte finito

$$\bar{x}[n]$$

$$0\ 0\ 0\ x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6\ \ x_7\ 0\ 0\ 0$$



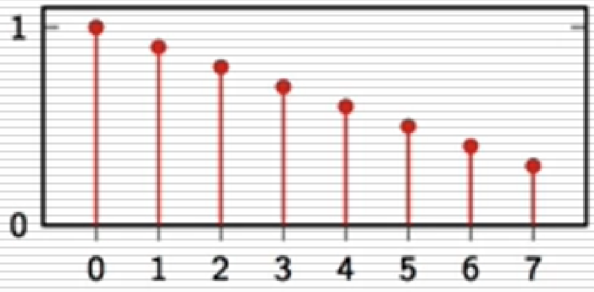


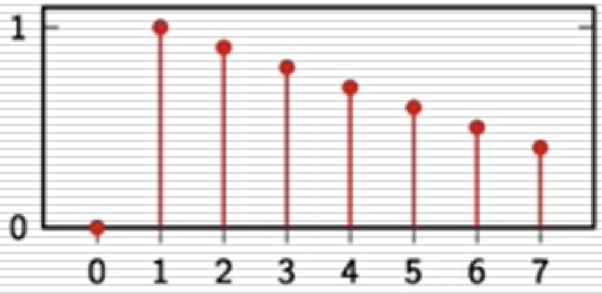
Señales en tiempo discreto

- Operaciones básicas con secuencias
  - Desplazamiento en secuencias finitas
    - Opción 1: tratarla como una señal de soporte infinito

$$\bar{x}[n-1]$$

$$0\ 0\ 0\ x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6\ \ x_7\ 0\ 0\ 0$$



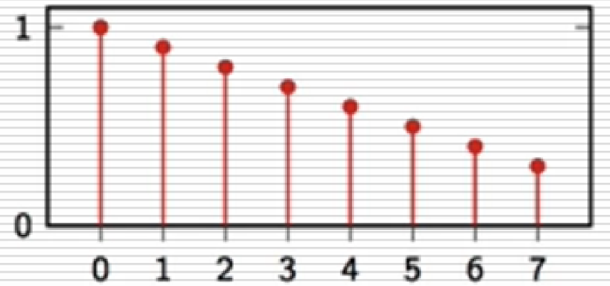


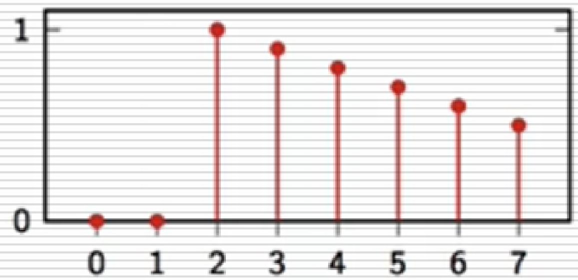
Señales en tiempo discreto

- Operaciones básicas con secuencias
  - Desplazamiento en secuencias finitas
    - Opción 1: tratarla como una señal de soporte infinito

$$\bar{x}[n\ -2]$$

$$0\ 0\ 0\ x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6\ \ x_7\ 0\ 0\ 0$$

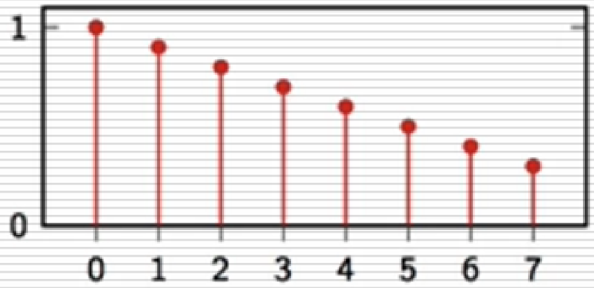




Señales en tiempo discreto

- Operaciones básicas con secuencias
  - Desplazamiento en secuencias finitas
    - Opción 2: extenderla como una función periódica

$$x[n] = \{x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; x_6 \;\; x_7\}$$



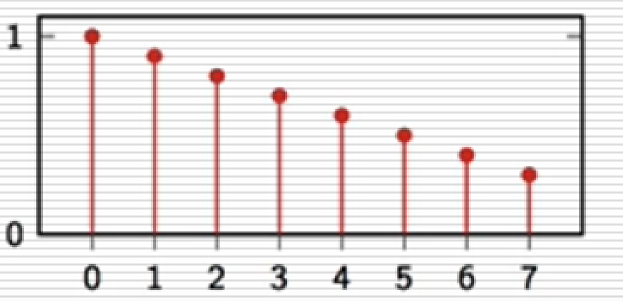
Señales en tiempo discreto

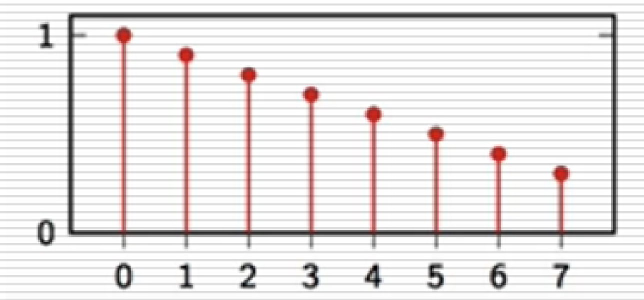
Operaciones básicas con secuencias

- Desplazamiento en secuencias finitas
  - Opción 2: extenderla como una función periódica

$$\tilde{x}[n]$$

$$\ldots\ x_5\ \ x_6\ \ x_7\ \boxed{x_0 x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6\ \ x_7}\ x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ \ldots$$





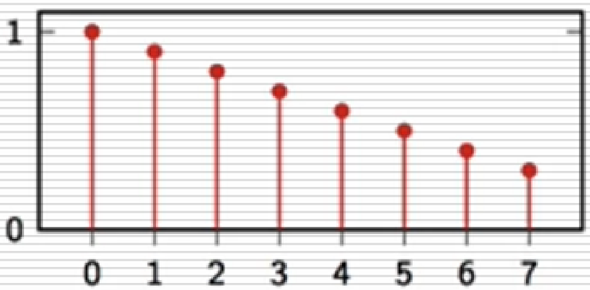
Señales en tiempo discreto

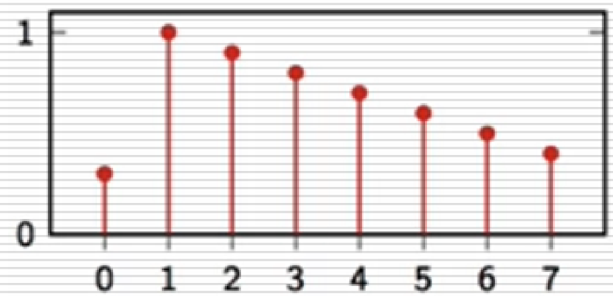
Operaciones básicas con secuencias

- Desplazamiento en secuencias finitas
  - Opción 2: extenderla como una función periódica

$$\tilde{x}[n-1]$$

$$\ldots\ x_5\ \ x_6\ \boxed{x_7\ x_0 x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6}\ x_7\ x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ \ldots$$





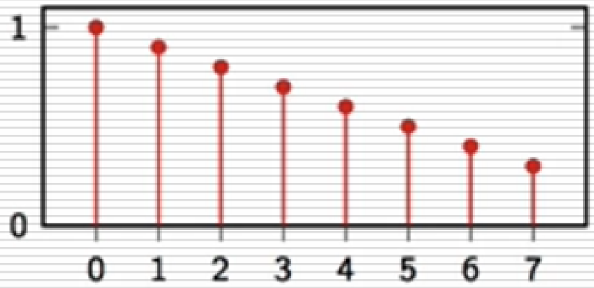
Señales en tiempo discreto

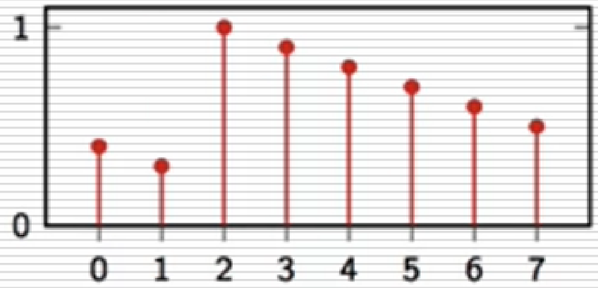
Operaciones básicas con secuencias

- Desplazamiento en secuencias finitas
  - Opción 2: extenderla como una función periódica

$$\tilde{x}[n-2]$$

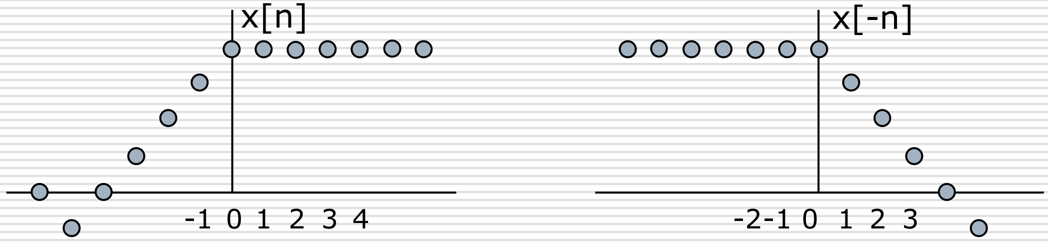
$$\ldots\ x_5\ \boxed{x_6\ x_7\ x_0 x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5}\ x_6\ x_7\ x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \ldots$$





Señales en tiempo discreto

- Operaciones básicas con secuencias
  - Desplazamiento en secuencias finitas
    - En una señal almacenada es sencillo realizar desplazamientos
    - En una señal obtenida en tiempo real es físicamente imposible realizar un adelanto (predictores de ML)
  - Denominamos operación de reflexión respecto a n=0 al substituir en una señal n por –n



reflexión

Señales en tiempo discreto

- Energía y Potencia de una señal
  - La energía de una señal se define como:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

  - Una señal puede tener energía finita o infinita
  - Si la energia es finita ($0<E<\infty$) entonces se dice que x[n] es una **señal de energía**

  - La potencia media de una señal discreta en el tiempo se define como:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Señales en tiempo discreto

- Energía y Potencia de una señal
  - Muchas señales con energía infinita tiene potencia media finita
  - Si definimos la energia de la señal en el intervalo finito $-N \leq n \leq N$ como:

$$E_N \equiv \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

  - Entonces podemos expresar la energía de la señal como:

$$E \equiv \lim_{N\to\infty} E_N$$

Señales en tiempo discreto

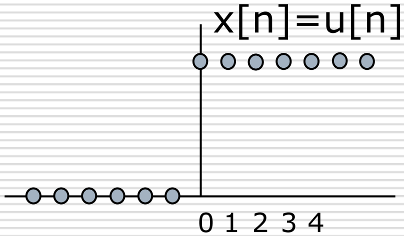
- Energía y Potencia de una señal
  - Y la potencia media de una señal x[n]como:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

  - Por lo tanto, **si E es finita entonces P=0**.
  - Si **E es infinita entonces P puede ser finita o infinita**
  - Si P es finita (y distinta de cero), x[n] se llama **señal de potencia**

Ejercicio

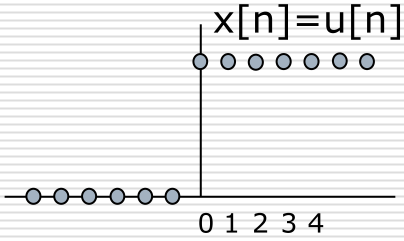
1. Calcular la potencia media y la energía del escalón unidad



$$u[n] = \begin{cases} 1, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases}$$

Ejercicio

1. Calcular la potencia media y la energía del escalón unidad



$$u[n] = \begin{cases} 1, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} |u[n]|^2 = \infty$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} |u[n]|^2$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = 1/2$$

Ejercicio

2. Calcular la potencia media y la energía de:

$$\mathrm{x}[n] = \begin{cases} 3(-1)^n, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases}$$

Ejercicio

2. Calcular la potencia media y la energía de:

$$\mathrm{x}[n] = \begin{cases} 3(-1)^n, & para\ n \geq 0 \\ 0, & para\ n < 0 \end{cases}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |3(-1)^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |3|^2 = \infty$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left(9 \sum_{n=0}^{N} 1\right)$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{9(N+1)}{2N+1} = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ejercicio

2. Calcular la potencia media y la energía de:

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, n \geq 0$$

Ejercicio

2. Calcular la potencia media y la energía de:

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{16}{3}$$

$$P = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 \qquad P = 0$$

Señales en tiempo discreto

- Energía y Potencia de una señal - Señales periódicas y aperiódicas
  - Una señal x[n] es **periódica** con período N (N>0) si:

$$x[n+N] = x[n]$$

  - Si no se verifica la expresión para ningún N, la señal se denomina **aperiódica**
  - **La energía de una señal periódica** en $-\infty \leq n \leq \infty$ **es infinita**

$$E_{\tilde{x}} = \infty$$

  - **La energía** de una señal periódica $\tilde{x}[n]$ **sobre un único período** (ej. $0 \leq n \leq N-1$) **es finita**

Señales en tiempo discreto

- Energía y Potencia de una señal - Señales periódicas y aperiódicas
  - **La potencia media de una señal periódica es finita** e igual a la potencia media sobre un período:

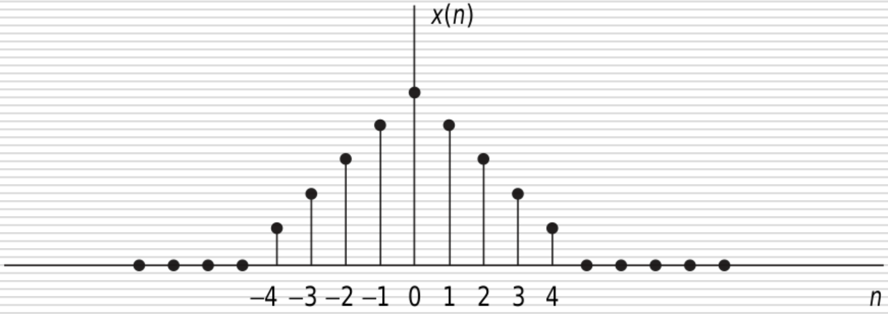
$$P_{\tilde{x}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$$

  - Una señal $\tilde{x}[n]$ periódica es una **señal de potencia** (potencia finita)

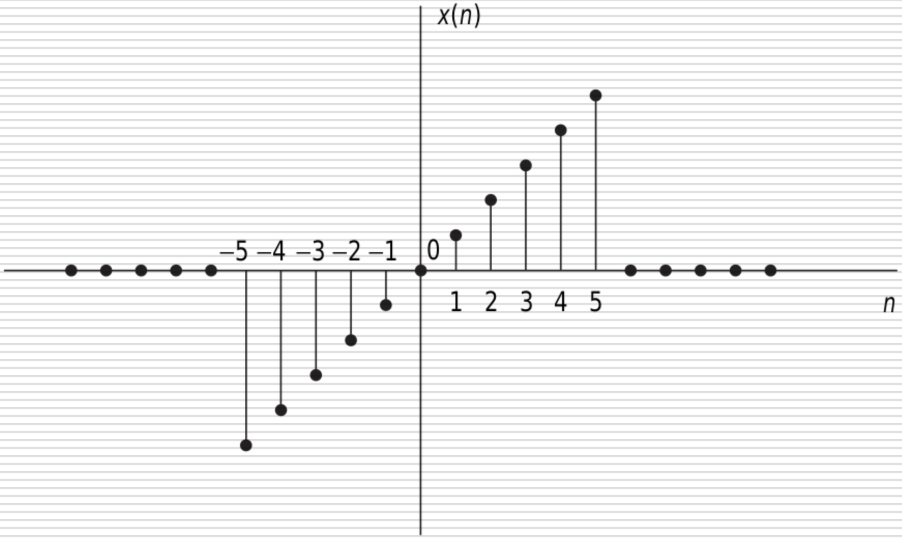
Señales en tiempo discreto

- Señales simétricos (pares) y antisimétricos (impares)
  - Una señal es **simétrica** si cumple: $x[-n] = x[n]$
  - Una señal es **antisimétrica** si cumple: $x[-n] = -x[n]$

Señal simétrica



Señal asimétrica



Señales en tiempo discreto

- Señales simétricos (pares) y antisimétricos (impares)
  - Cualquier señal arbitraria puede expresarse como la suma de 2 componentes de señal (una par y otra impar)
    - Componente de señal par

$$x_e[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]]$$

    - Componente de señal impar

$$x_o[n] = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]]$$

  - Así x[n] se calcula como $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$

Señales en tiempo discreto

- Señales simétricos (pares) y antisimétricos (impares)

  - Par: $x_e[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]]$
  - Impar: $x_o[n] = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]]$
  - $x[n] = 3, 2, \underset{\uparrow}{2}, 4, 2$
  - $x_e[n] = \frac{5}{2}, 3, 2, 3, \frac{5}{2}$
  - $x_o[n] = \frac{1}{2}, -1, 0, 1, -\frac{1}{2}$

Ejercicio

- Obtén los componentes par e impar de la siguiente señal

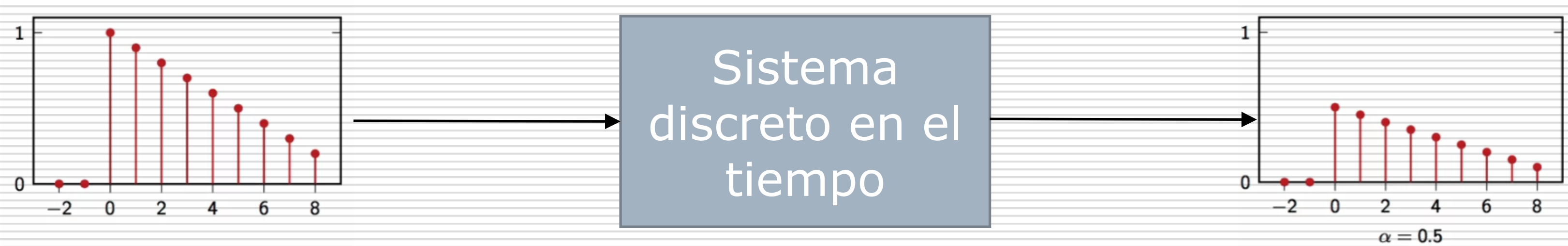
$$x[n] = \{2,3,\underset{\uparrow}{4},5,6\}$$

Sistemas en tiempo discreto

- Un sistema es una operación o conjunto de operaciones que se realizan sobre una señal de entrada $x[n]$ para generar una señal de salida $y[n]$

$$y[n] \equiv \mathrm{T}\{x[n]\}$$

- El símbolo $\mathbf{T}$ **representa la transformación** o procesamiento sobre la señal de entrada ($x[n]$) para generar la salida ($y[n]$)

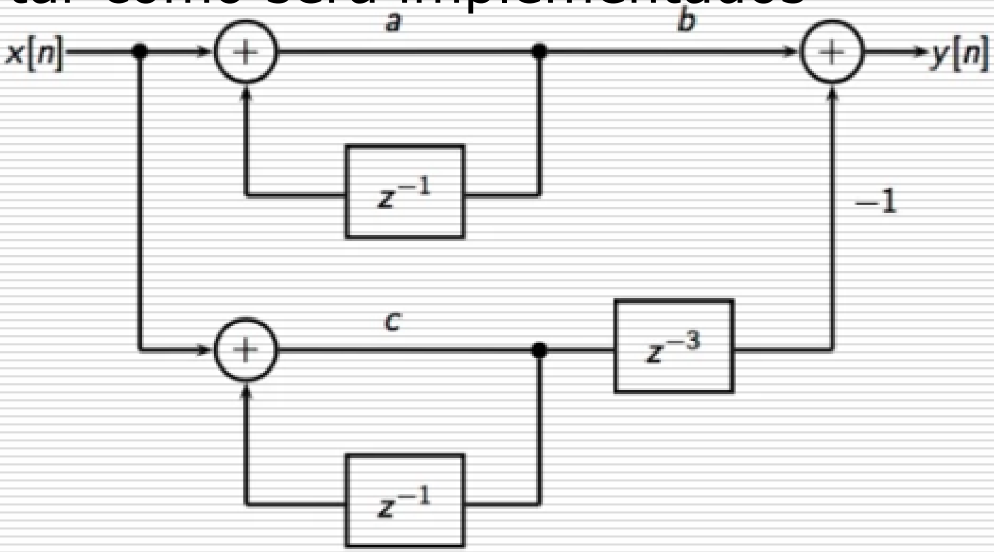


Señal de entrada (excitación)

Señal de salida (respuesta)

Sistemas en tiempo discreto

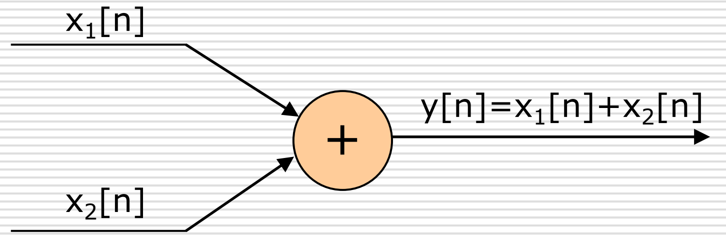
- Representación mediante diagramas de bloques
  - Diferentes "bloques de construcción" que nos permiten crear circuitos para el análisis y síntesis (procesamiento) de las señales
  - Basados en las operaciones elementales sobre señales
  - Nos permiten diseñar de forma abstracta algoritmos sin importar como será implementados

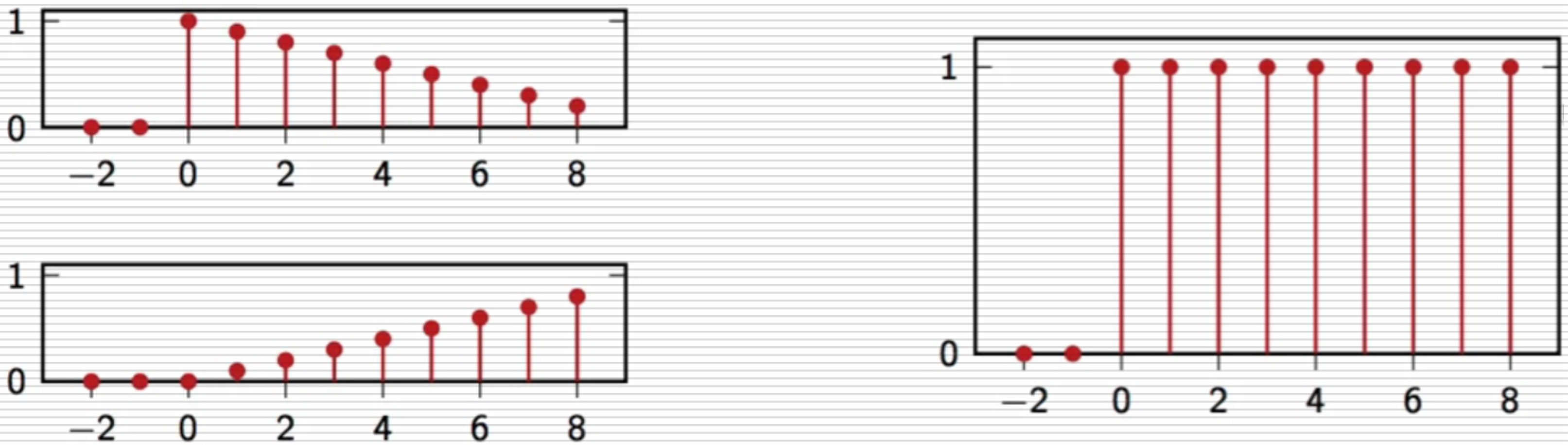


Sistemas en tiempo discreto

- Representación mediante diagramas de bloques

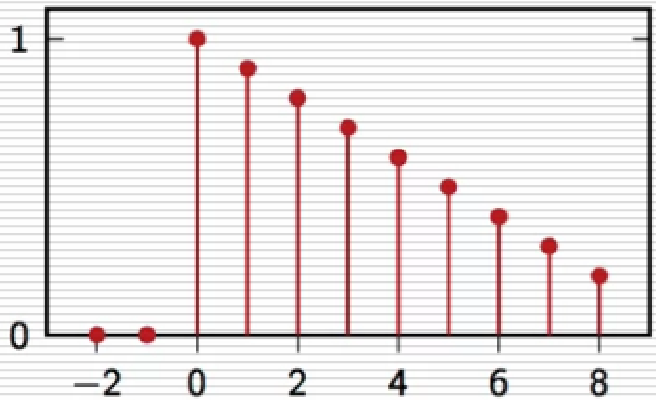
  - Un sumador

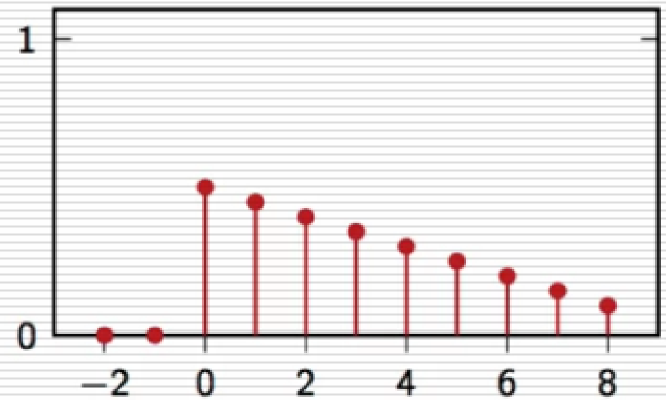




Sistemas en tiempo discreto

- Representación mediante diagramas de bloques
  - Un multiplicador por una constante
    - Escala una señal



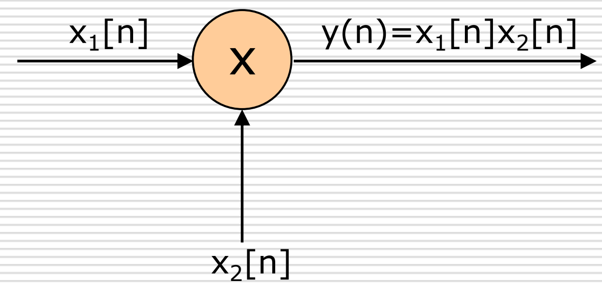


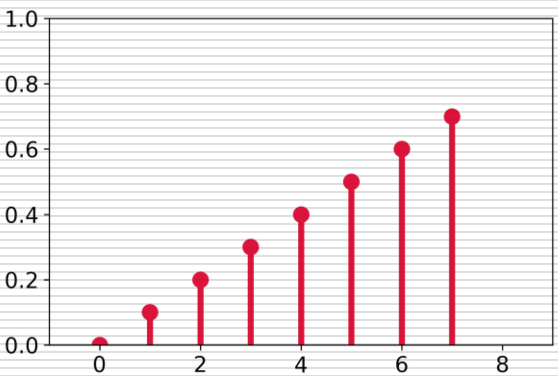
$\alpha = 0.5$

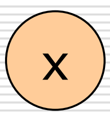
Sistemas en tiempo discreto

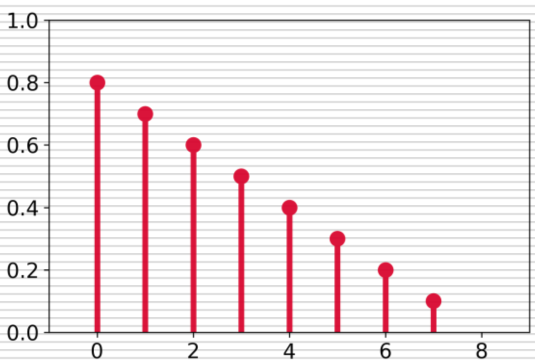
- Representación mediante diagramas de bloques

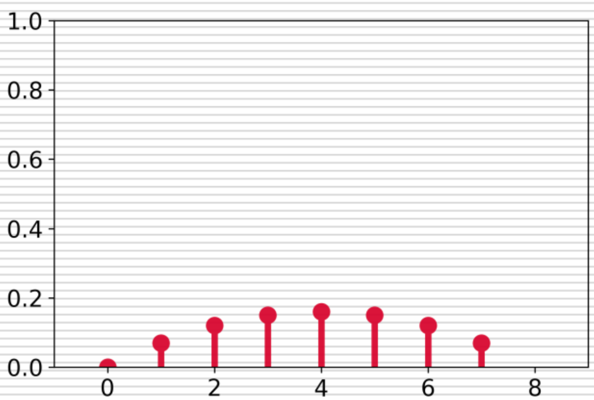
  - Un multiplicador de señales







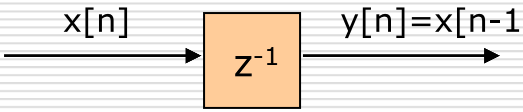




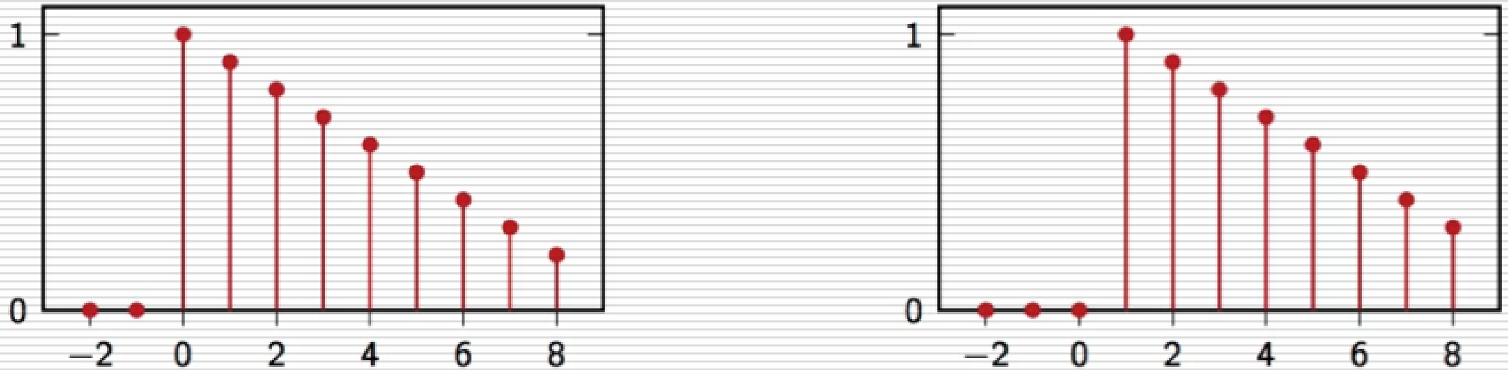
X1=[0. , 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7]
X2=[0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1])

Sistemas en tiempo discreto

- Un retardador de un elemento.

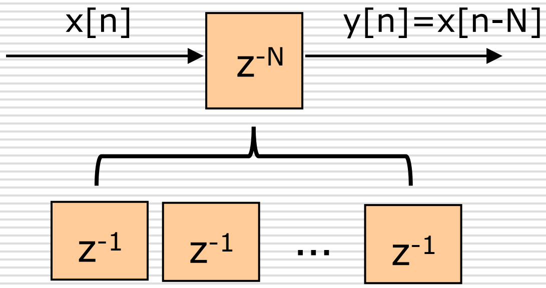


Este bloque funciona como un buffer de memoria: la muestra x[n-1] se almacena en memoria y se extrae en el instante n

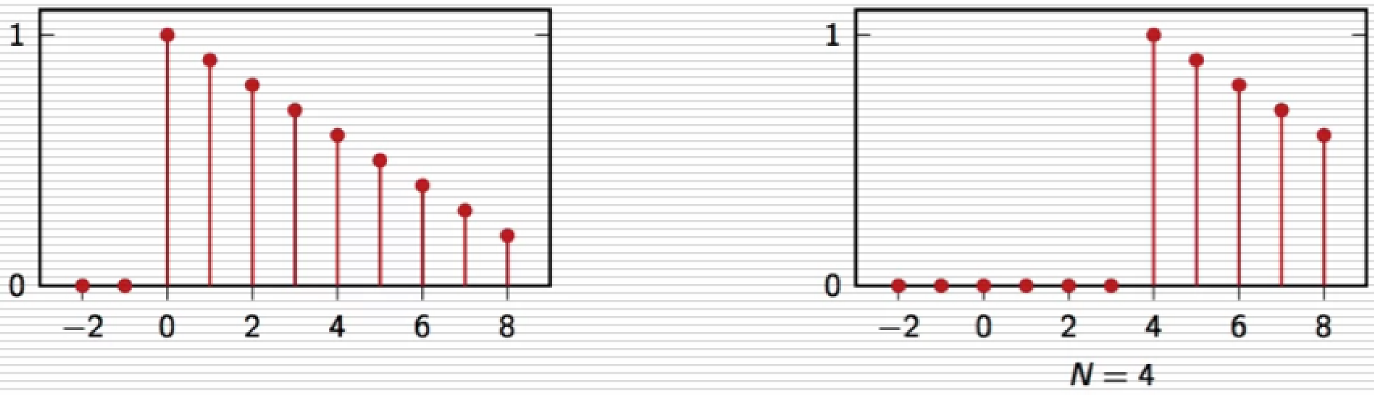


Sistemas en tiempo discreto

- Un retardador genérico

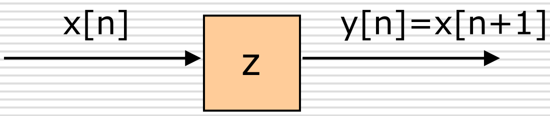


Este bloque funciona como como un buffer circular de memoria en el que se van almacenando las muestras y *circulando* para extraerse en el momento adecuado

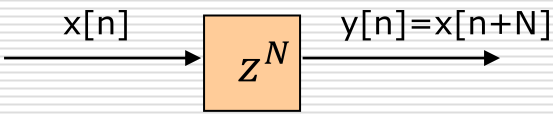


Sistemas en tiempo discreto

- Un acelerador de un elemento.



- Un acelerador genérico



Estas operaciones no se pueden hacer en tiempo real, ya que se exige conocer el futuro de una señal pero pueden realizarse con señales almacenadas

Sistemas en tiempo discreto

- Condiciones iniciales
  - Se define un instante inicial (típicamente $n_0 = 0$)
  - Se asumen que las entradas y salidas (inputs y ouputs) antes de n_0 son cero

Ejercicio

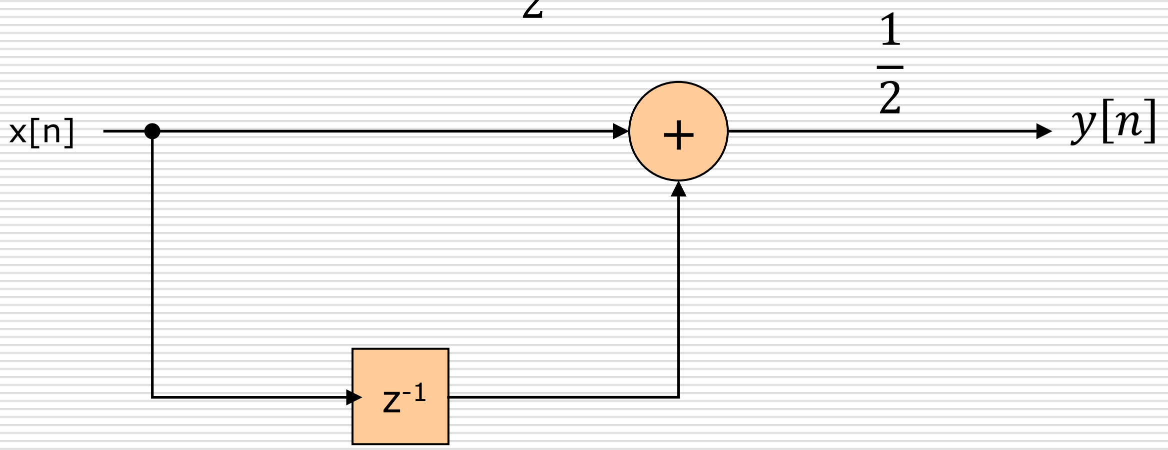
1. Crear el diagrama de bloques para calcular una media móvil de 2 elementos

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

Ejercicio

1. Crear el diagrama de bloques para calcular una media móvil de 2 elementos

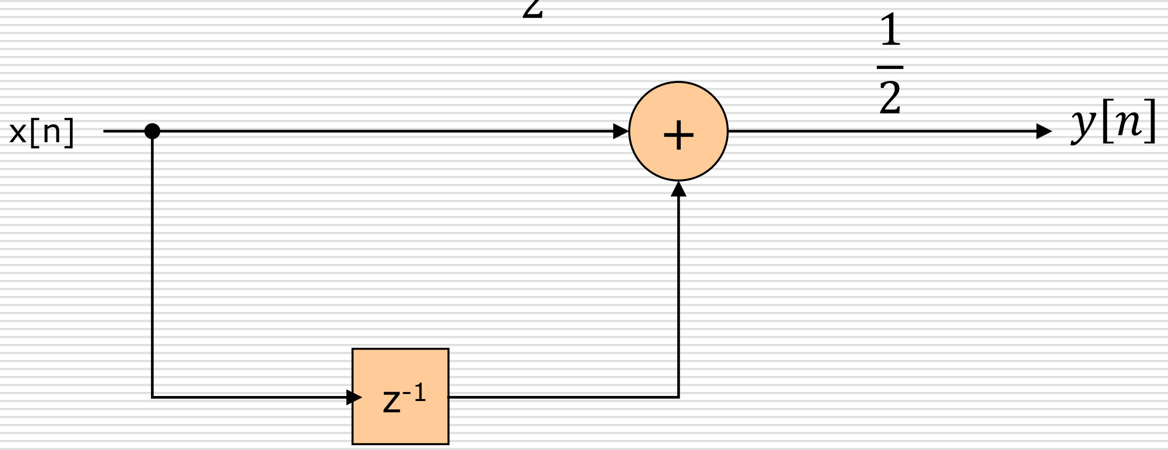
$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$



Ejercicio

1. Crear el diagrama de bloques para calcular una media móvil de 2 elementos

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$



$$x[n] = \delta[n]$$

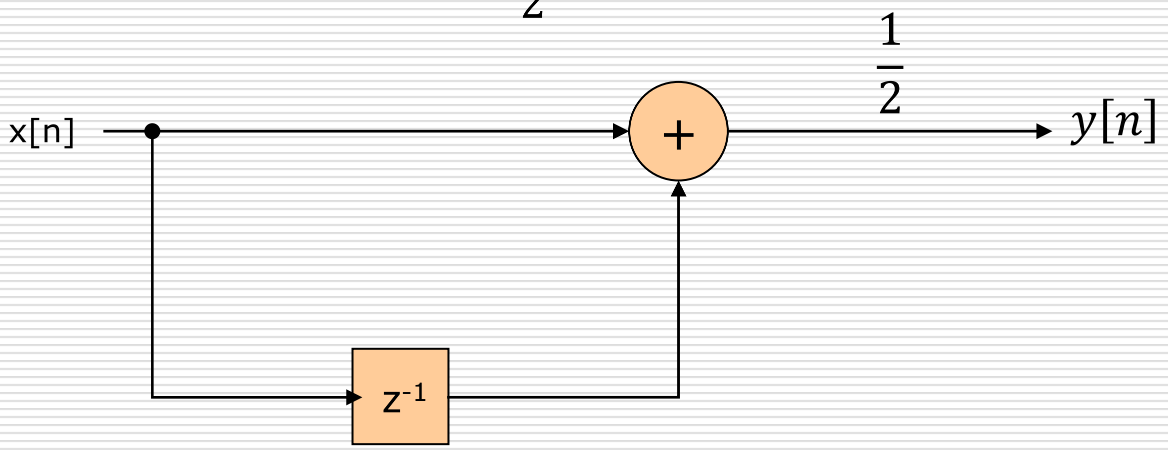
¿Qué forma tendría la media móvil de la señal impulso?

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio

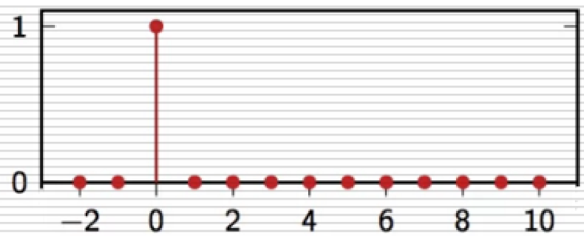
1. Crear el diagrama de bloques para calcular una media móvil de 2 elementos

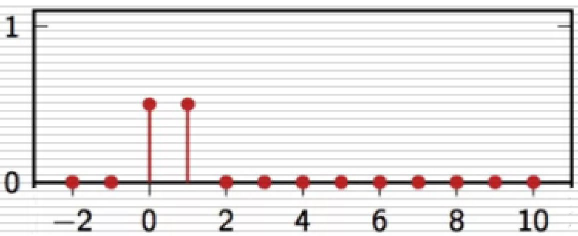
$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$



$$x[n] = \delta[n]$$

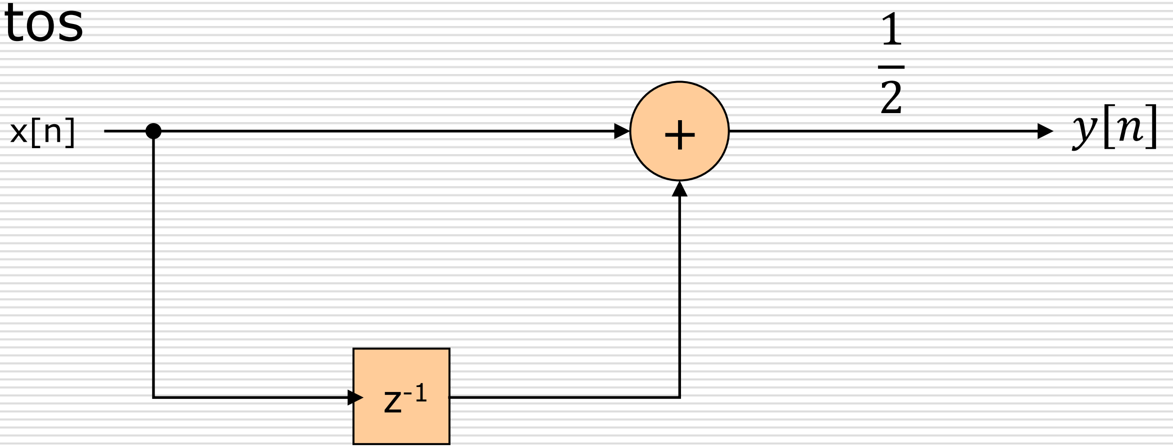
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$





Ejercicio

1. Crear el diagrama de bloques para calcular una media móvil de 2 elementos



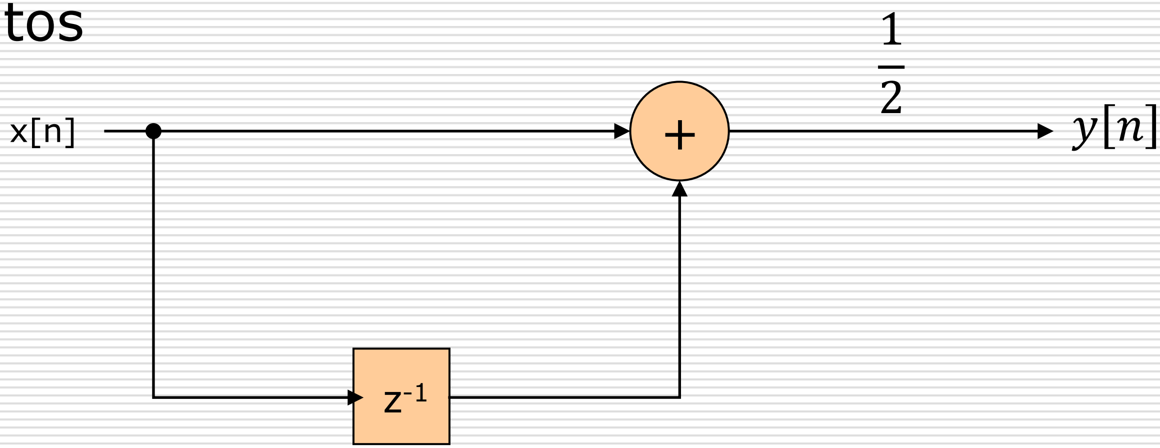
$$x[n] = u[n]$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \geq 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

¿Qué forma tendría la media móvil del escalón unidad?

Ejercicio

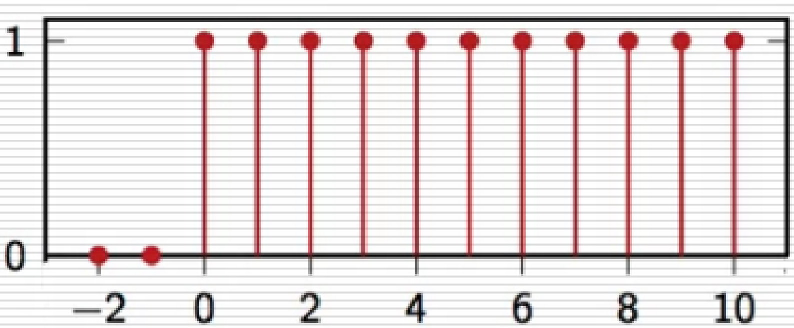
1. Crear el diagrama de bloques para calcular una media móvil de 2 elementos

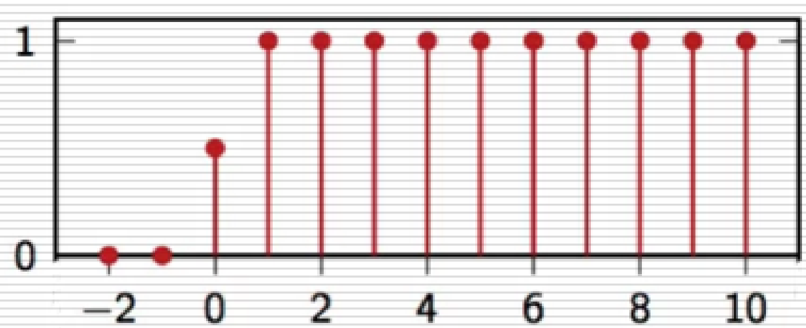


$$x[n] = u[n]$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \geq 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

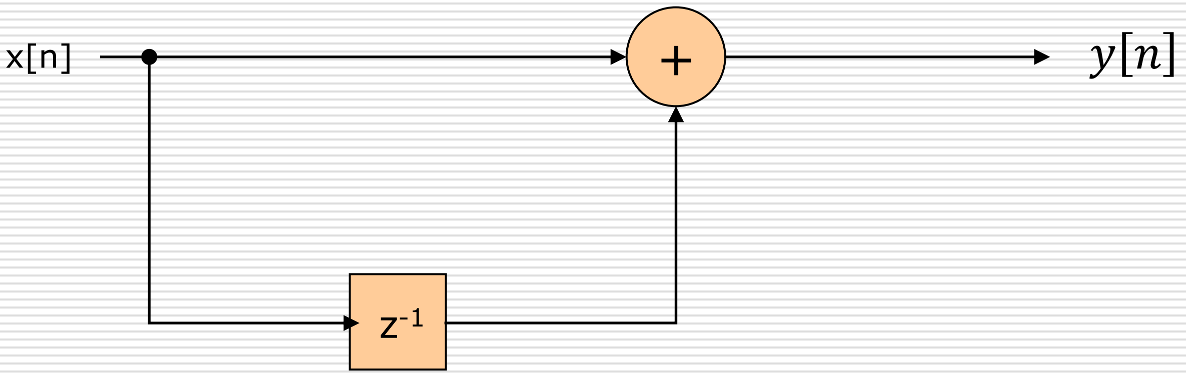
¿Qué forma tendría la media móvil del escalón unidad?





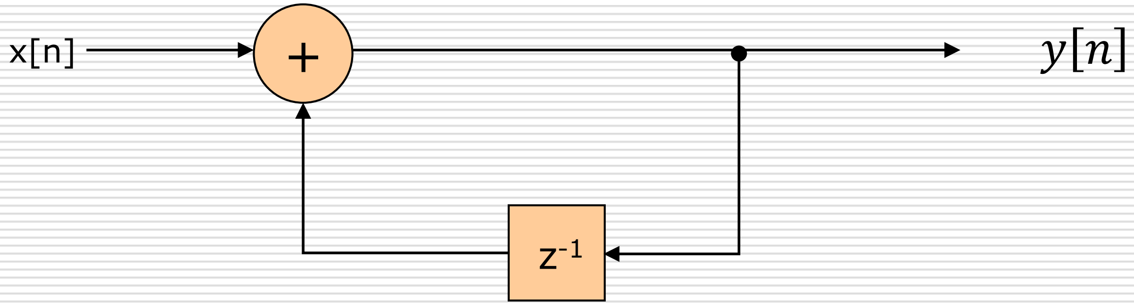
Sistemas en tiempo discreto

- ¿**Podemos realimentar el sistema** con las salidas anteriores
  - Los bloques pueden combinarse de diferentes formas



Sistemas en tiempo discreto

- ¿Podemos realimentar el sistema con las salidas anteriores
  - Los bloques pueden combinarse de diferentes formas



$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Ejercicio

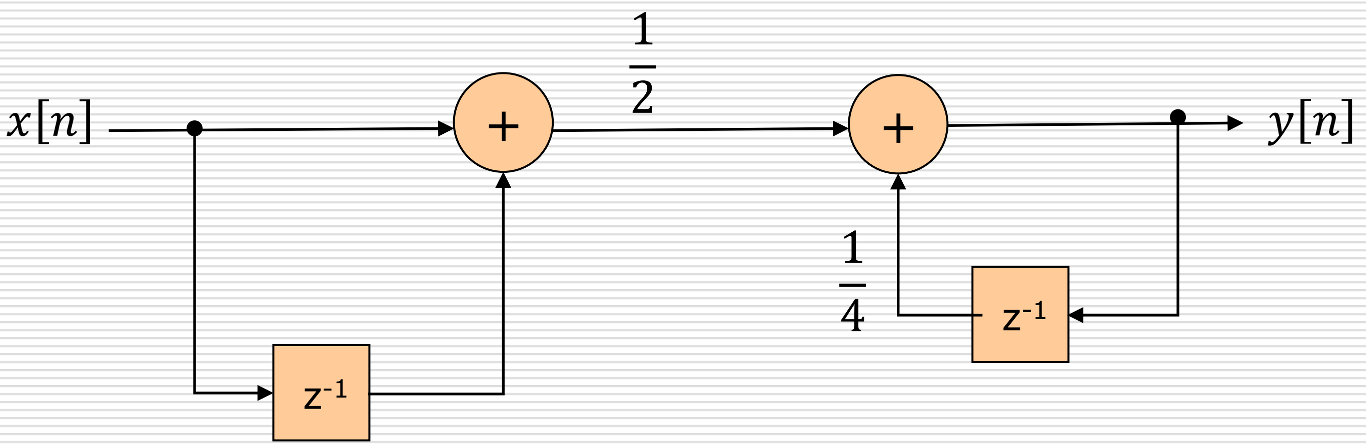
2. Crear el diagrama de bloques para la siguiente señal

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

Ejercicio

2. Crear el diagrama de bloques para la siguiente señal

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

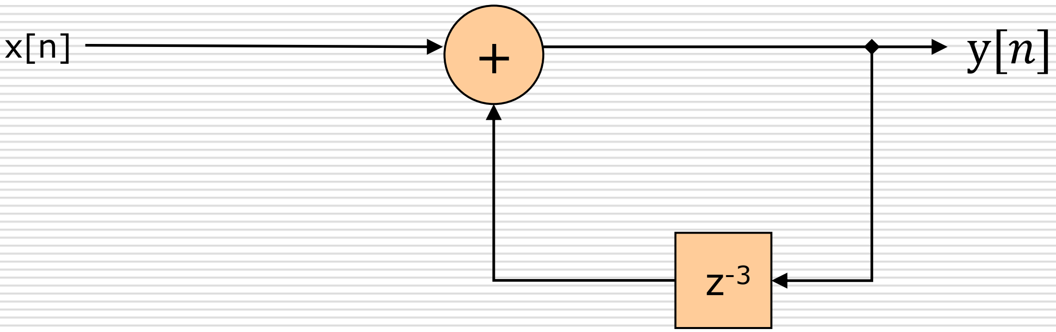


Ejercicio

3. Dibuja la señal de entrada y de salida

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{x}[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

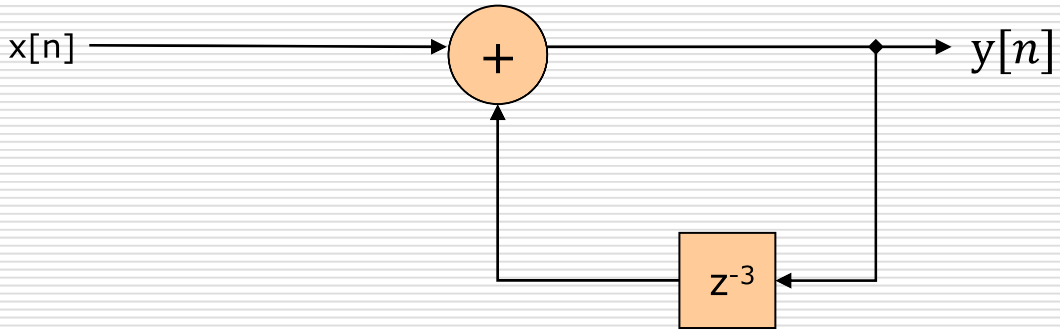


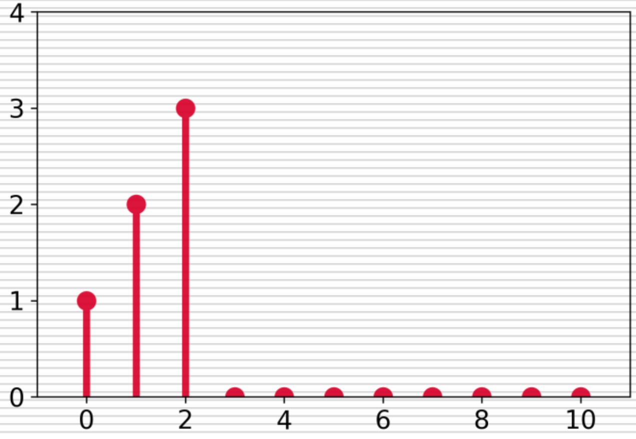
Ejercicio

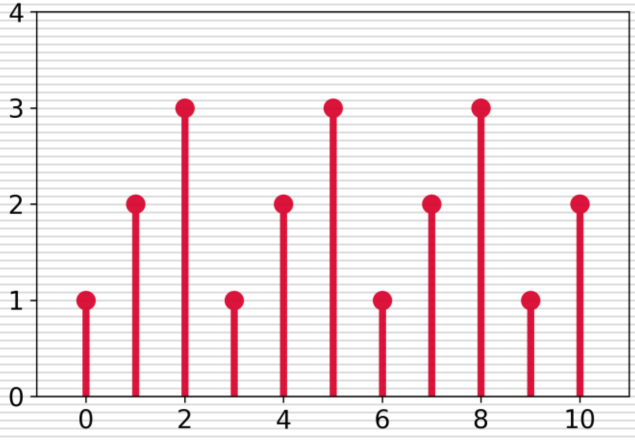
3. Dibuja la señal de entrada y de salida

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$







Sistemas en tiempo discreto

- Clasificación de los sistemas discretos

Necesitamos caracterizar los sistemas para determinar las técnicas matemáticas que les son aplicables

SISTEMAS ESTÁTICOS Y SISTEMAS DINÁMICOS

- Un sistema en tiempo discreto se denomina estático o **sin memoria**, si su salida en el instante n no depende de las muestras anteriores o posteriores a n
  - *No tenemos necesidad de almacenar ninguna de las entradas o salidas anteriores para calcular la salida actual*
- En cualquier otro caso se dice que es sistema es dinámico o **con memoria**

Sistemas en tiempo discreto

Clasificación de los sistemas discretos

SISTEMAS ESTÁTICOS Y SISTEMAS DINÁMICOS

Ejemplos

1) $y[n] = ax[n]$

2) $y[n] = x[n] + 3x[n-1]$

3) $y[n] = nx[n] + bx^3[n]$

4) $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k]$

5) $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$

Sistemas en tiempo discreto

Clasificación de los sistemas discretos

SISTEMAS ESTÁTICOS Y SISTEMAS DINÁMICOS

Ejemplos

1) $y[n] = ax[n]$

2) $y[n] = x[n] + 3x[n-1]$

3) $y[n] = nx[n] + bx^3[n]$

4) $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k]$

5) $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$

Sistemas en tiempo discreto

SISTEMAS VARIANTES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

- Un sistema invariante en el tiempo es un sistema para el que un desplazamiento o retardo de la secuencia de entrada provoca el mismo desplazamiento o retardo en la secuencia de salida

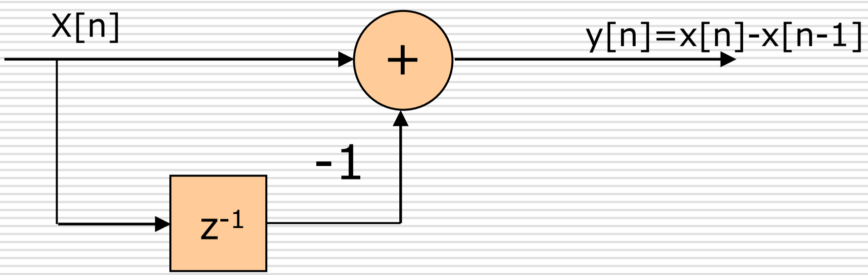
$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} \qquad y_1[n] = \mathrm{T}\{x_1[n]\} \begin{cases} x_1[n] = x[n-k] \\ y_1[n] \stackrel{?}{=} y[n-k] \end{cases}$$

- Un sistema invariante en el tiempo **tiene una función dependiente del tiempo que no es una función directa del tiempo**

- En caso contrario se denomina sistema variante en el tiempo

Ejercicio

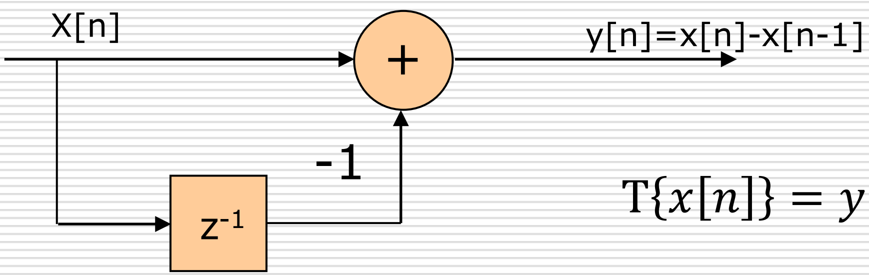
- Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo



1.

Ejercicio

- Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo



$$T\{x[n]\} = y[n] = x[n] - x[n-1]$$

1.

$$x_1[n] = x[n-k] \qquad T\{x_1[n]\} = y_1[n]$$

$$y_1[n] \overset{?}{=} y[n-k]$$

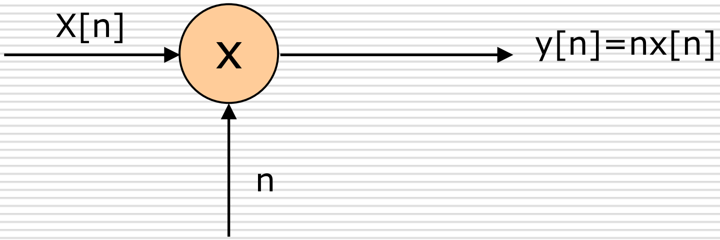
$$T\{x_1[n]\} = x_1[n] - x_1[n-1] \qquad = x[n-k] - x[n-k-1]$$

$$y[n-k] = x[n-k] - x\,[n-k-1]$$

Invariante en el tiempo

Ejercicio

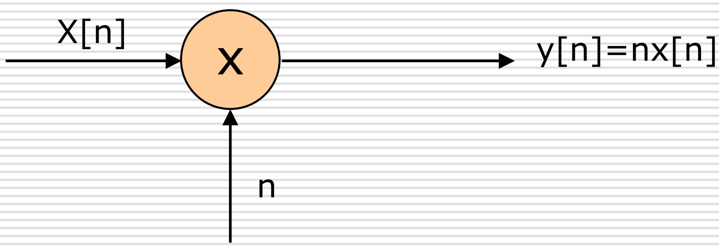
- Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo



2.

Ejercicio

- Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo



$$\mathrm{T}\{x[n]\} = y[n] = nx[n]$$

$$x_1[n] = x[n-k] \qquad \mathrm{T}\{x_1[n]\} = y_1[n]$$

$$y_1[n] \overset{?}{=} y[n-k]$$

2.

$$\mathrm{T}\{x_1[n]\} = \mathrm{n}x_1[n] = nx[n-k]$$

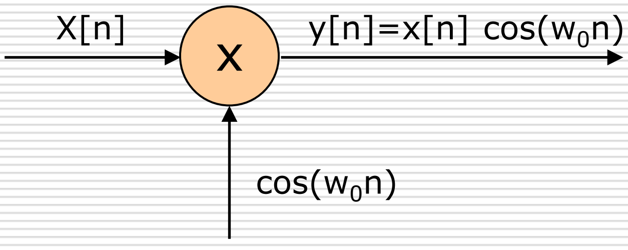
$$\neq$$

$$y[n-k] = (n-k)x[n-k]$$

variante en el tiempo

Ejercicio

- Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo

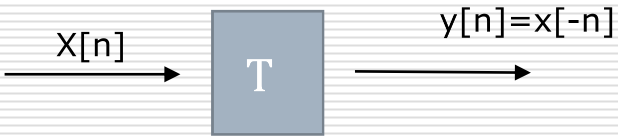


3.

variante en el tiempo

Ejercicio

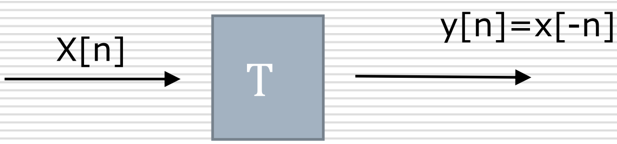
- Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo



4.

Ejercicio

- Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo



4.

$$\mathrm{T}\{x[n]\} = y[n] = x[-n]$$

$$x_1[n] = x[n-k] \qquad \mathrm{T}\{x_1[n]\} = y_1[n]$$

$$y_1[n] \stackrel{?}{=} y[n-k]$$

$$\mathrm{T}\{x_1[n]\} = x_1[-n] = x[-n-k]$$

$$y[n-k] = x[-(n-k)]$$

variante en el tiempo

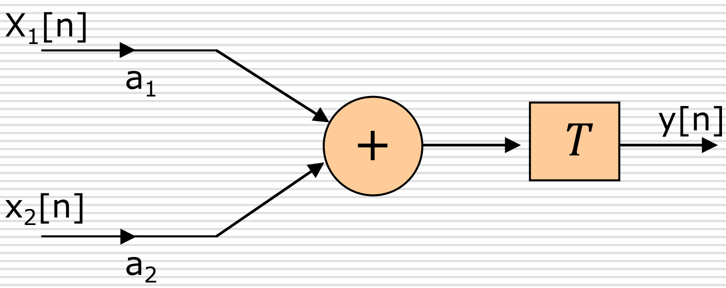
Sistemas en tiempo discreto

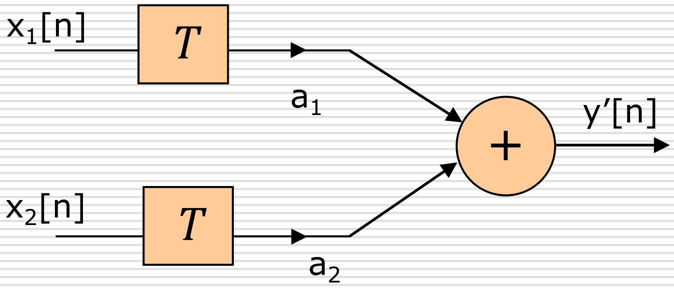
SISTEMAS LINEALES Y SISTEMAS NO LINEALES

- Un sistema es lineal si satisface el principio de superposición

$$\mathcal{T}\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

- Gráficamente:





El sistema es lineal si y solo si y[n]=y'[n]

Sistemas en tiempo discreto

SISTEMAS LINEALES Y SISTEMAS NO LINEALES

- El principio de superposición puede separarse en dos partes

$$\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$$

- **Propiedad multiplicativa** o de escalado de un sistema lineal
  - Si $a_2=0$
  - $\mathcal{T}\{a_1x_1[n]\}=a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}$
  - Si la respuesta del sistema a $x[n]$ es $y[n]$, entonces la respuesta a $a_1x[n]$ es simplemente $a_1y[n]$

Sistemas en tiempo discreto

SISTEMAS LINEALES Y SISTEMAS NO LINEALES

- El principio de superposición puede separarse en dos partes

$$\mathcal{T}\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

- **Propiedad aditiva** de un sistema lineal
  - $a_2 = a_1 = 1$
  - $\mathcal{T}\{x_1[n] + x_2[n]\} = \mathcal{T}\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$

Sistemas en tiempo discreto

SISTEMAS LINEALES Y SISTEMAS NO LINEALES

- La condición de linealidad

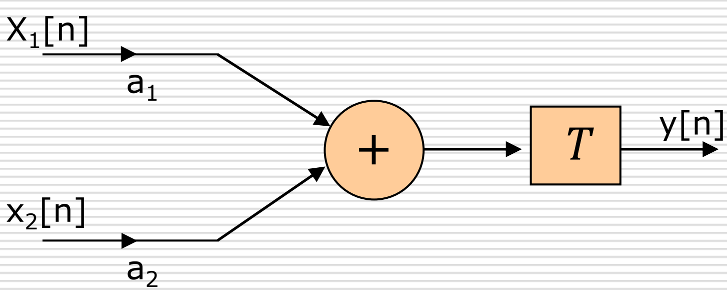
$$\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$$

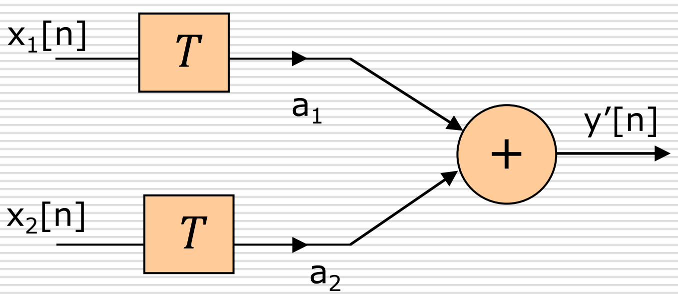
- Puede ampliarse arbitrariamente a cualquier combinación lineal ponderada de señales

$$x[n]=\sum_{k=1}^{M}a_kx_k[n]\xrightarrow{T}y[n]=\sum_{k=1}^{M}a_ky_k[n],\quad donde\ y_k[n]=T[x_k[n]]$$

Ejercicio

- Determinar si los siguientes sistemas son o no lineales:
  1. $y[n]=nx[n]$
  2. $y[n]=x[n^2]$
  3. $y[n]=x^2[n]$





Ejercicio

- Determinar si los seguintes sistemas son o no lineales:
  - y[n]=nx[n] $\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$

$$\mathcal{T}\{x_1[n]\}=y_1=nx_1[n]$$

$$\mathcal{T}\{x_2[n]\}=y_2=nx_2[n]$$

$$a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\} \quad =a_1\ nx_1[n]+a_2nx_2[n]$$

$$\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}= \quad n\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}= \quad a_1nx_1[n]+a_2nx_2[n]$$

Sistema lineal

Ejercicio

- Determinar si los seguintes sistemas son o no lineales:
  - $y[n]=x[n^2]$ $\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$

$\mathcal{T}\{x_1[n]\}=y_1=x_1[n^2]$

$\mathcal{T}\{x_2[n]\}=y_2=x_2[n^2]$

$a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\} \quad =a_1x_1[n^2]+a_2x_2[n^2]$

$\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\} \quad =a_1x_1[n^2]+a_2x_2[n^2]$

Sistema lineal

Ejercicio

- Determinar si los seguintes sistemas son o no lineales:
  - $y[n]=x^2[n]$ $\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$

$$\mathcal{T}\{x_1[n]\}=y_1=x_1^2[n]$$

$$\mathcal{T}\{x_2[n]\}=y_2=x_2^2[n]$$

$$a_1\mathcal{T}\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\} \quad = a_1\ x_1^2[n]+a_2x_2^2[n]$$

$$\mathcal{T}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\} \quad = (a_1x_1[n]+a_2x_2[n])^2$$

$$= \mathrm{a}_1^2\mathrm{x}_1^2[n]+2a_1a_2x_1[n]x_2[n]+a_2^2x_2^2[n]$$

Sistema NO lineal

Sistemas en tiempo discreto

SISTEMAS CAUSALES Y SISTEMAS NO CAUSALES

- Un sistema es causal si la salida del sistema en un instante n, $y[n]$, depende de las entradas presentes y pasadas pero no de las futuras
- Un sistema es no causal si no se satisface el criterio anterior
- Con una señal **en tiempo real no se puede realizar físicamente un sistema no causal**

Ejercicio

- Determinar si los siguientes sistemas son causales o no:
  1. $y[n]=x[n]-x[n-1]$
  2. $y[n]=ax[n]$
  3. $y[n]=x[n^2]$
  4. $y[n]=x[2n]$
  5. $y[n]=x[-n]$

Ejercicio

- Determinar si los siguientes sistemas son causales o no:

1. $y[n]=x[n]-x[n-1]$
2. $y[n]=ax[n]$
3. $y[n]=x[n^2]$
4. $y[n]=x[2n]$
5. $y[n]=x[-n]$

Sistemas en tiempo discreto

SISTEMAS ESTABLES Y SISTEMAS NO ESTABLES

- Un sistema arbitrario en reposo se le denomina estable si **toda entrada acotada produce una salida acotada**.
- Matemáticamente, diremos que existen determinados números finitos, como por ejemplo, M_x e M_y, tales que:

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \qquad |y[n]| \leq M_y < \infty$$

para todo n.

- Si para alguna entrada acotada x[n] la salida es infinita, el sistema se clasifica como inestable (no estable).
- Los sistemas inestables normalmente presentan un comportamiento errático y extremo, y producen **desbordamiento en cualquier implementación práctica**.

Sistemas en tiempo discreto

SISTEMAS ESTABLES Y SISTEMAS NO ESTABLES

- Ejemplo práctico
  - Considera el sistema descrito por la ecuación de entrada-salida:

$$y[n] = y^2\,[n-1] + x[n]$$

  - Como secuencia de entrada seleccionamos la señal acotada:

$$x[n] = C\delta[n]$$

  - siendo C una constante. Suponemos también que $y[-1] = 0$
  - La secuencia de salida sería:

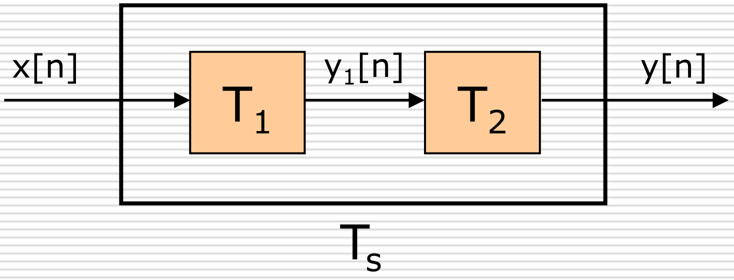
$$y[0] = C, y[1] = C^2, y[2] = C^4, \ldots, y[n] = C^{2n}$$

  - **La salida no estará acotada** cuando $1 < |C| < \infty$

Sistemas en tiempo discreto

Interconexión de sistemas discretos

- Existen dos maneras elementales de interconectar dos sistemas para formar uno más grande:



En serie o en cascada

$$y_1[n] = T_1\{x[n]\}$$

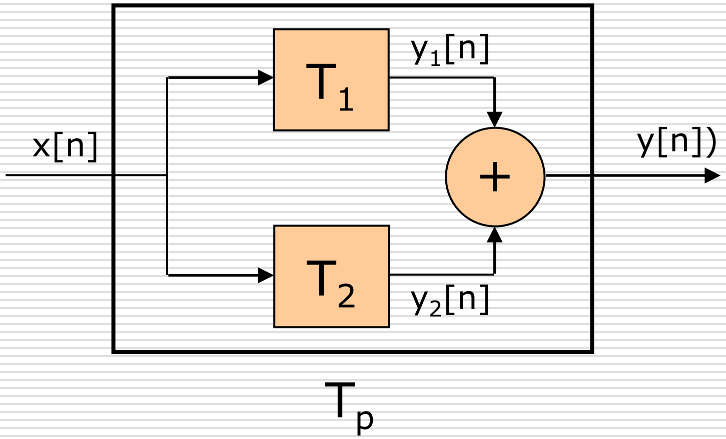
$$y[n] = T_2\{y_1[n]\} = T_2\{T_1\{x[n]\}\} = T_s\{x[n]\}$$

- En general el orden en que se realicen las operaciones es importante $T_1T_2 \neq T_2T_1$
- Sin embargo, si los sistema T_1y T_2 son lineales e invariantes en el tiempo, entonces
  - T_s es invariante en el tiempo
  - $T_1T_2 = T_2T_1$ El orden en que se procesen las señales no es importante

Sistemas en tiempo discreto

Interconexión de sistemas discretos

- Existen dos maneras elementales de interconectar dos sistemas para formar uno más grande:



En paralelo

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$= T_1\{x[n]\} + T_2\{x[n]\}$$

$$= (T_1 + T_2)\{x[n]\} = T_p\{x[n]\}$$

Análisis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo (LIT)

- Analizaremos a continuación los sistemas discretos **LIT**
- Demostraremos que **estos sistemas quedan caracterizados por su respuesta a la secuencia impulso**
- Veremos que **cualquier señal de entrada puede expresarse como una suma ponderada de secuencias de impulsos unitarios**
- Introduciremos la operación de **convolución**, como la relación entre la respuesta de un sistema al impulso unitario y las señales de entrada y salida
- A través de la operación de convolución **determinaremos la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo para cualquier señal de entrada**

Análisis de sistemas discretos LIT

- Existen muchas aplicaciones en DSP en las **que es necesario determinar el comportamiento de un sistema ante una entrada arbitraria**
  - Ej. En aplicaciones relacionadas con geofísica se llevan a cabo explosiones controladas (señal de entrada) para determinar la naturaleza del subsuelo (sistema) mediante el análisis de la señal de salida

Técnicas para el análisis de los **sistemas lineales**

- Existen dos métodos básicos para analizar el comportamiento de un **sistema lineal** a una señal de entrada arbitraria
  1. Resolución directa de la ecuación entrada-salida del sistema

$$\mathrm{y}[\mathrm{n}] = \mathrm{F}\{\mathrm{y}[\mathrm{n}-1], \mathrm{y}[\mathrm{n}-2], \ldots, \mathrm{y}[\mathrm{n}-N], \mathrm{x}[\mathrm{n}], x[\mathrm{n}-1], \ldots x[\mathrm{n}-M]\}$$

Análisis de sistemas discretos LIT

Técnicas para el análisis de los sistemas lineales

2. Descomponer la señal de entrada x[n] en una suma de señales elementales
   - Estas señales se seleccionan de manera que la respuesta del sistema a cada componente de señal se determine facilmente
   - La suma de las respuestas del sistema a las señales elementales nos proporciona la respuesta total (propiedad de linealidad)

- Supongamos que la señal de entrada x[n] se descompone en una suma ponderada de componentes elementales

$$x[n] = \sum_k c_k x_k[n]$$

$\{C_k\}$ hace referencia al conjunto de amplitudes (coeficientes de ponderación)

Análisis de sistemas discretos LIT

- Técnicas para el análisis de los sistemas lineales
  - Supongamos que la respuesta del sistema a la señal elemental $x_k[n]$ es:

$$y_k[n] = T\{x_k[n]\}$$

  - Por las **propiedads del sistema lineal**, la respuesta total a la entrada x[n] es:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left[\sum_k c_k x_k[n]\right] = \sum_k c_k T\{x_k[n]\} = \sum_k c_k y_k[n]$$

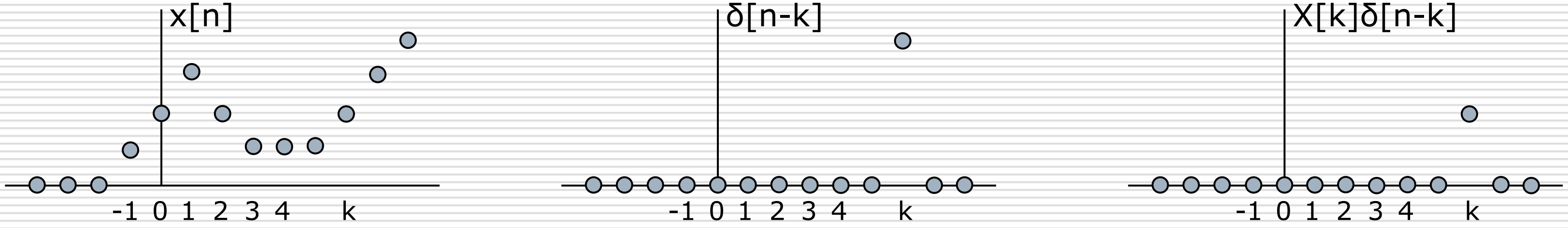
  - ¿Cómo escogemos las señales elementales?
    - En general, el **impulso unitario** es una buena opción.
    - En algunos casos podemos escoger otras señales como, por ejemplo, exponenciales complejas ante señales periódicas.

Análisis de sistemas discretos LIT

Descomposición de una señal discreta en impulsos

- Supongamos una señal arbitraria x[n] que queremos expresar como suma de impulsos.
- Escogemos como señal elemental el impulso: $x_k[n] = \delta[n-k]$
  - k representa un retardo (visto anteriormente)
- Ahora supongamos que multiplicamos la 2 secuencias $x[n]$ y $\delta[n-k]$
  - El resultado de la secuencia será todo ceros excepto en n=k, donde será $x_k[n]$. Por tanto

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$



Análisis de sistemas discretos LIT

Descomposición de una señal discreta en impulsos

- Si repetimos la multiplicación de $x[n]$ por $\delta[n-m]$, siendo m otro retardo $m \neq k$
  - El resultado de la secuencia será todo ceros excepto en n=m, donde será $x_m[n]$. Por tanto:

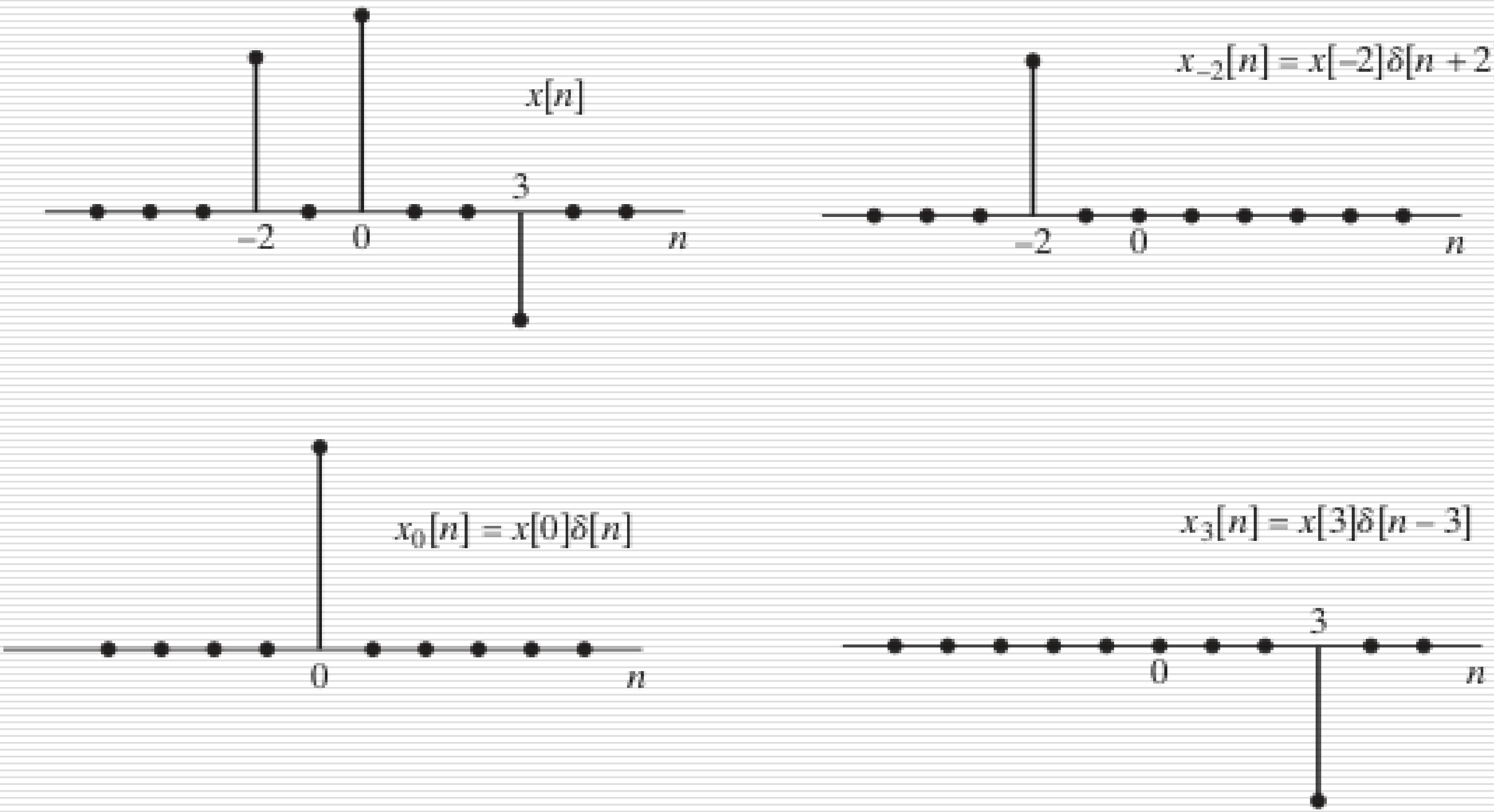
$$x[n]\delta[n-m] = x[m]\delta[n-m]$$

  - **Cada multiplicación de la señal x[n] por un impulso unitario desplazado un cierto k, δ (n − k), extrae el valor x[k] de la señal x[n]** en el instante en que el impulso unitario es distinto de cero
  - Si repetimos esta operación para todos los posibles desplazamientos $-\infty < k < \infty$ y sumamos todos los productos obtenemos una secuencia igual a x[n]

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Análisis de sistemas discretos LIT

- Descomposición de una señal discreta en impulsos



Ejercicio

- Descompón la secuencia x[n] en una suma de impulsos ponderados

$$x[n] = \{2, \underset{\uparrow}{4}, 0, 3\}$$

Análisis de sistemas discretos LIT

La convolución

- Queremos determinar la respuesta de **un sistema lineal en reposo** a una señal arbitraria x[n]
- Denotamos por h[n,k] a la respuesta del sistema a un impulso unitario de entrada en n=k:

$$h[n,k] = y[n,k] = T\{\delta[n-k]\}$$

  - n=índice de tiempo (muestra)
  - k representa la posición del impulso de entrada
- Si se cambia la escala del impulso a la entrada en una cantidad $c_k \equiv x[k]$, la escala de la respuesta del sistema cambiará en la misma magnitud (**propiedad multiplicativa**)

$$x[k]h[n,k]$$

Análisis de sistemas discretos LIT

La convolución

- Tomemos una señal arbitraria de entrada x[n] como una suma de impulsos:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Empleando la propiedad de linealidad del sistema:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n,k]$$

sumatorio de superposición

Análisis de sistemas discretos LIT

- Si el sistema **es invariante en el tiempo**, tenemos que su respuesta al impulso unitario es:

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

- Por la propiedad de invarianza en el tiempo, la respuesta del sistema a la secuencia e impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$ es:

$$T\{\delta[n-k]\} = y[n-k] = h[n-k]$$

- La expresión anterior quedaría ahora como:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Análisis de sistemas discretos LIT

- El sistema LTI en reposo queda completamente caracterizado por una única función $h[n]$ (su respuesta al impulso unitario)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- La expresión anterior proporciona la respuesta del sistema LTI como una función de la señal de entrada $x[n]$ y de la respuesta al impulso $h[n]$.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Se denomina suma de convolución

Análisis de sistemas discretos LIT

- Supongamos que queremos calcular la salida del sistema en un instante de tiempo $n = n_0$. La respuesta vendrá dada por la expresión:

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n_0 - k]$$

- Podemos determinar la salida mediante un procedemiento algorítmico (**cálculo de la convolución**):

1. Reflexión. Se refleja $h[k]$ respecto a $k = 0$ para obtener $h[-k]$
2. Desplazamiento. Se desplaza $h[-k]$ una cantidad n_0 hacia la derecha (izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener $h[n_0 - k]$
3. Multiplicación. Multiplicamos $x[k]$ por $h[n_0 - k]$, para obtener $x[k]h[n_0 - k]$
4. Suma. Sumamos todos los productos anteriores para cualquier valor de k

Ejercicio

- La respuesta impulsional de un sistema LIT es:

$$h[n]=\{1,\underset{\uparrow}{2},1,-1\}$$

1. Determinar la respuesta (y[n])de este sistema a la señal de entrada:

$$x[n]=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\}$$

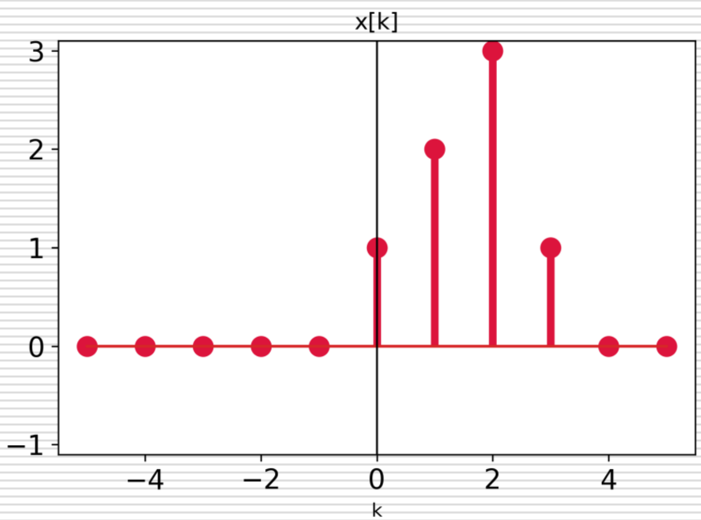
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

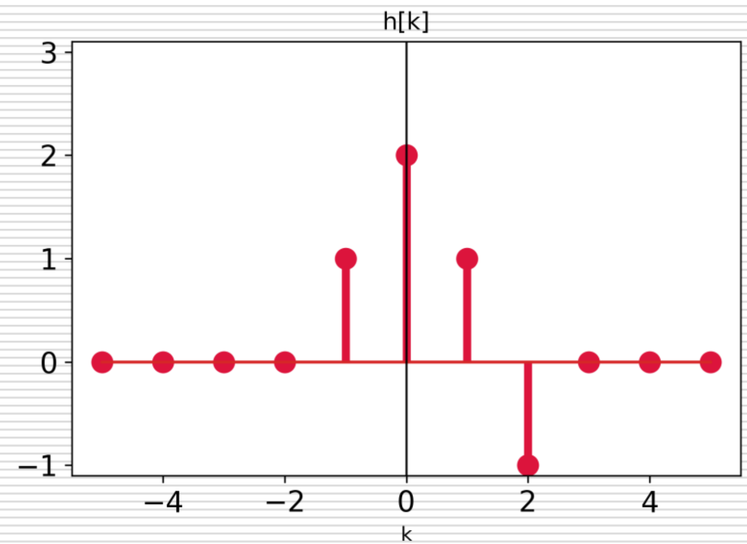
Ejercicio – solución

x[n]={1,2,3,1}   h[n]={1,2,1,-1} $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Vamos a realizar la convolución ayudándonos de gráficos de secuencia. Empezamos calculando la salida para **n=0**

1. Posicionamos las secuencias empleando k como el índice de tiempos para ser coherentes con la ecuación

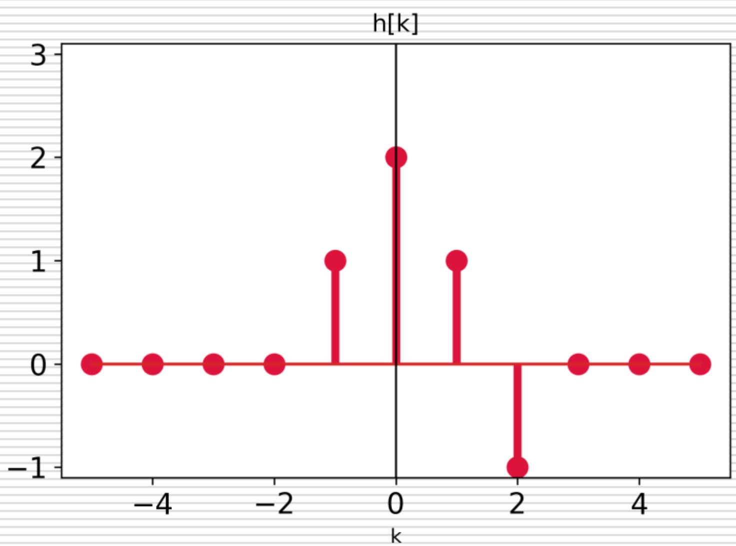


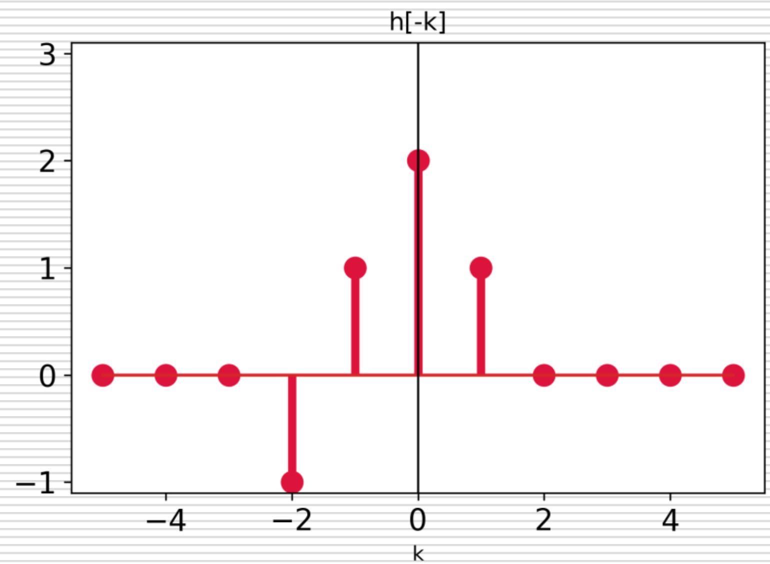


Ejercicio – solución

x[n]={1,2,3,1}   h[n]={1,2,1,-1} $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

2. Reflejamos h[k]

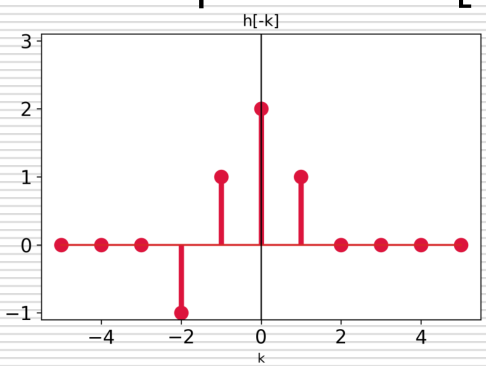


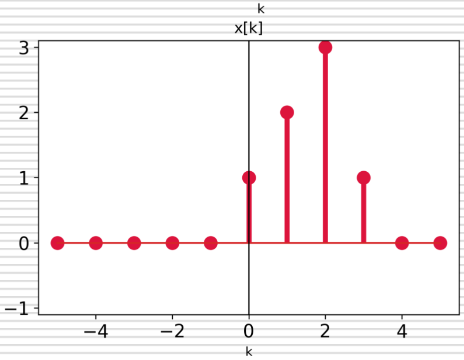


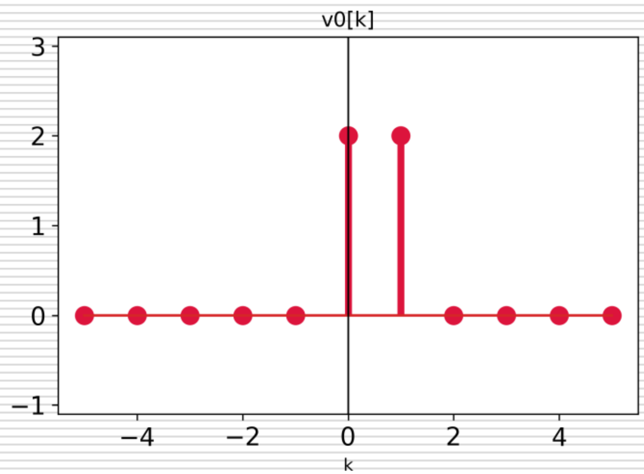
Ejercicio – solución

x[n]={1,2,3,1} h[n]={1,2,1,-1} $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

3. Desplazamos h[-k], n unidades de tiempo. n=0
4. Multiplicamos h[n-k] por x[k]





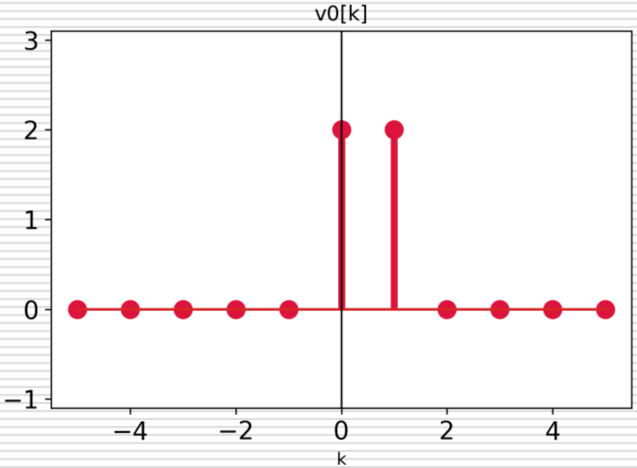


Ejercicio – solución

x[n]={1,2,3,1}   h[n]={1,2,1,-1}

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

5. Sumamos el resultado de la multiplicación



$y[n_0]=4$

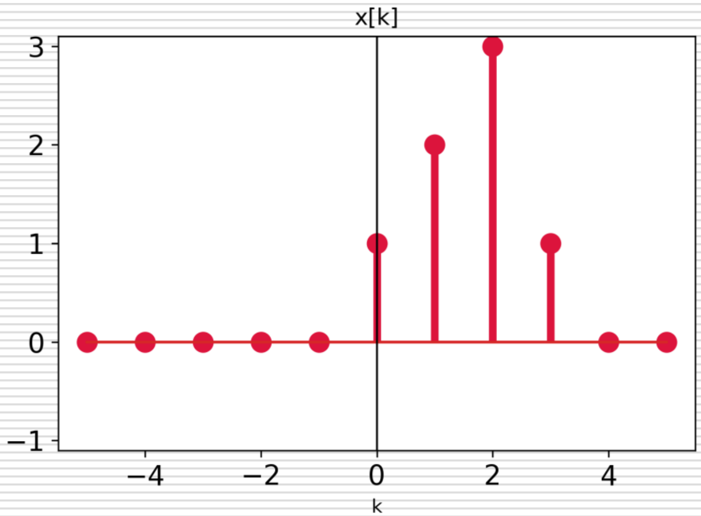
Ejercicio – solución

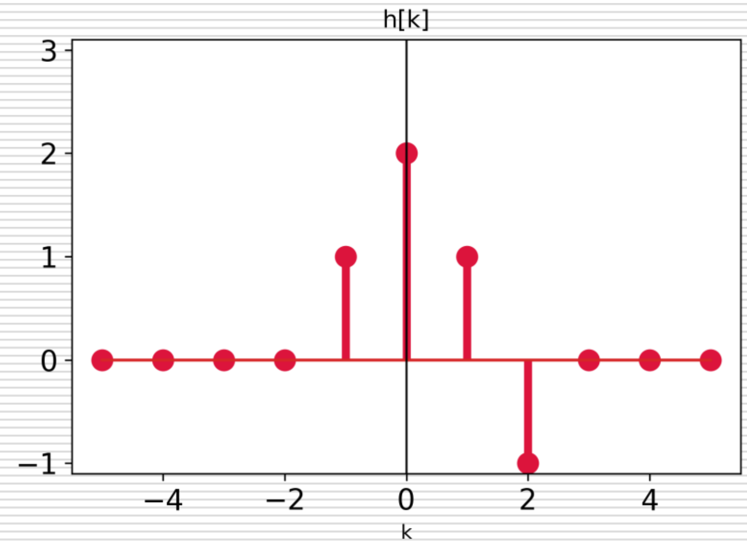
x[n]={1,2,3,1} h[n]={1,2,1,-1}

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Vamos a realizar la convolución ayudándonos de gráficos de secuencia. **Calculamos ahora para n=1**

1. Posicionamos las secuencias empleando k como el índice de tiempos para ser coherentes con la ecuación



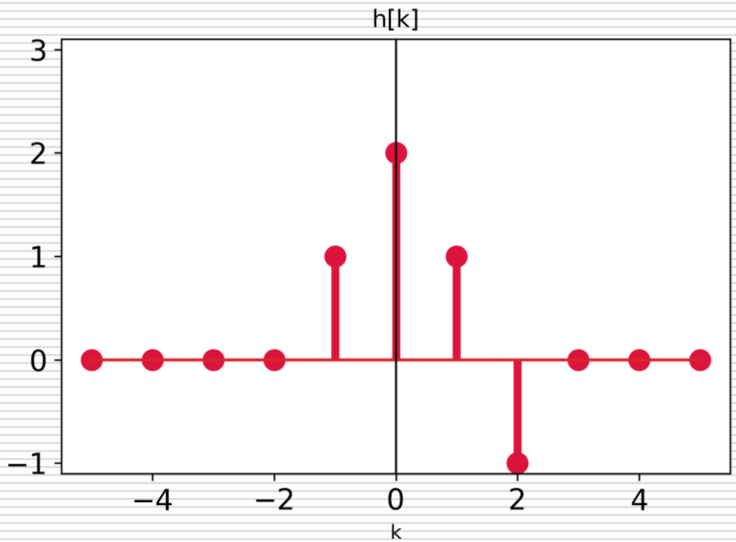


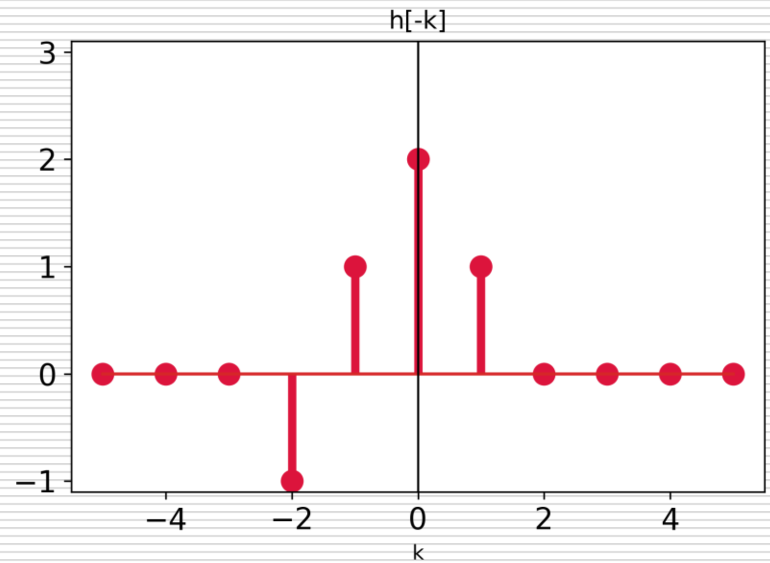
Ejercicio – solución

x[n]={1,2,3,1}   h[n]={1,2,1,-1}

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

2. Reflejamos h[k]



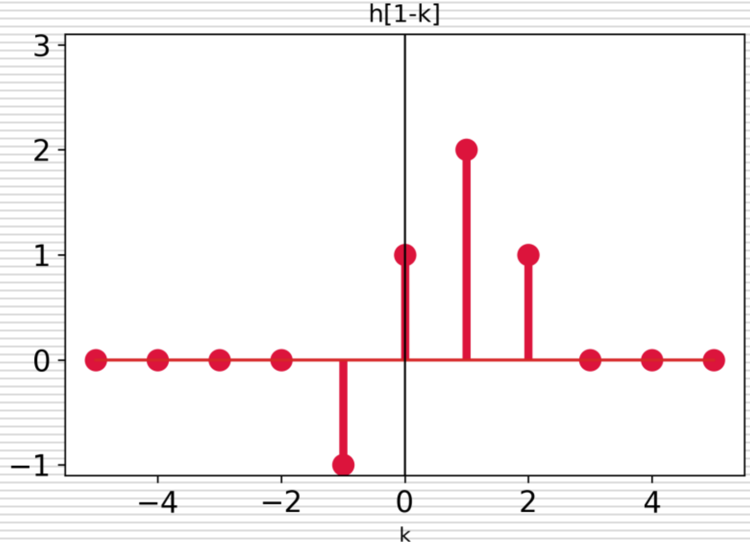


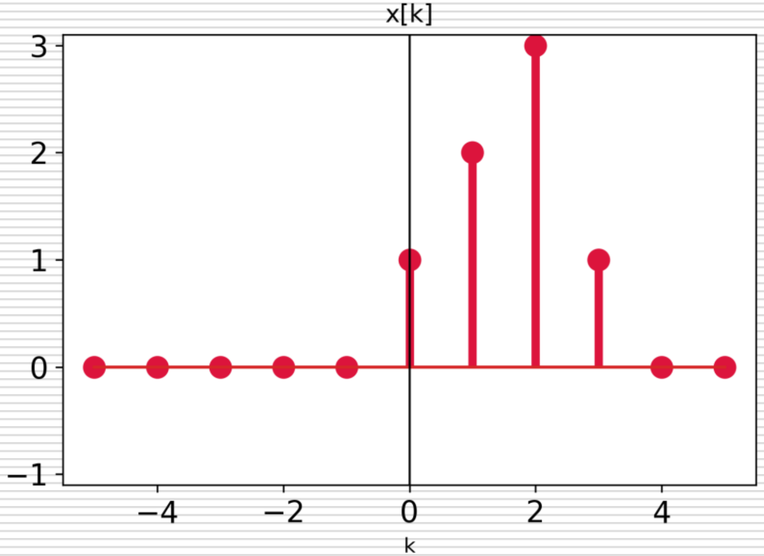
Ejercicio – solución

x[n]={1,2,3,1} h[n]={1,2,1,-1}

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

3. Desplazamos h[-k], n unidades de tiempo. n=1
4. Multiplicamos h[n-k] por x[k]

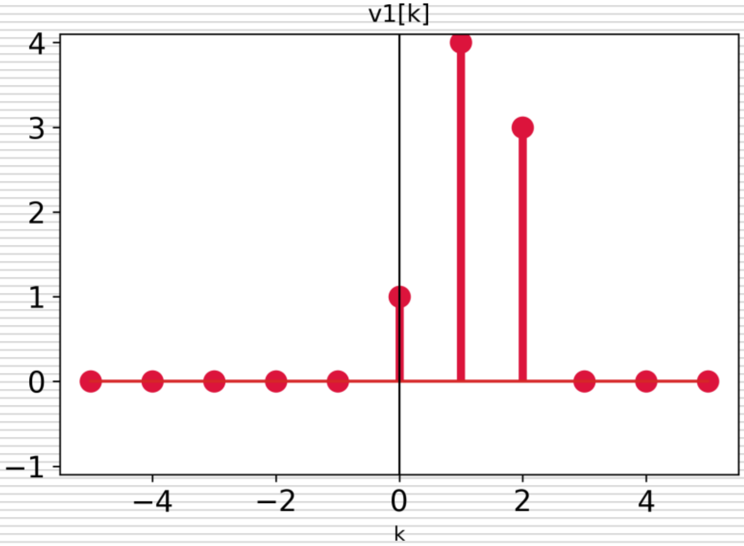




Ejercicio – solución

$x[n]=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\}$ $h[n]=\{1,\underset{\uparrow}{2},1,-1\}$ $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

5. Sumamos el resultado de la multiplicación



$y[n_1]=8$

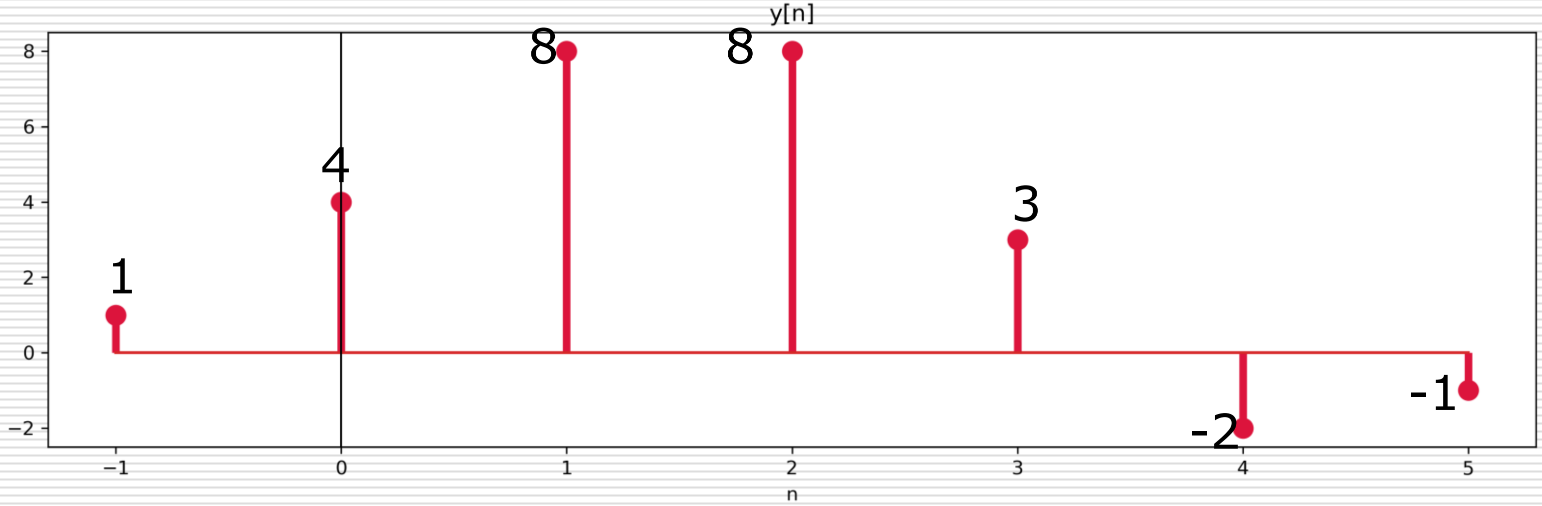
Ejercicio – solución

x[n]={1,2,3,1} h[n]={1,2,1,-1}

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Resultados para y[n]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{n[k]}$$



Análisis de sistemas discretos LIT

- Convolución
  - Sobre **secuencias finitas**, las muestras de la secuencia de salida que podemos calcular con la operación de convolución se encuentran en el rango:

$$\left[\,\left(add(\min(idx_x)\,,\min(idx_h))\right),\left(add(\max(idx_x),\max(idx_h))\right)\right]$$

$$x[n]=\{1,\underset{\uparrow}{2},3,1\} \qquad h[n]=\{1,2,\underset{\uparrow}{1},-1\}$$

$$rango\ de\ la\ y\text{: }[-1,5]$$

Ejercicio

- Calcula la convolución
  - $x_1[n] = \{\underset{\uparrow}{1},2,4\}$ $\qquad h_1[n] = \{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1\}$
  - $x_2[n] = \{\underset{\uparrow}{0},1,-2,3,-4\}$ $\qquad h_2[n] = \{\frac{1}{2},1,\underset{\uparrow}{2},1,\frac{1}{2}\}$

Ejercicio - Solución gráfica

- La respuesta impulsional de un sistema LIT es:

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

- Determinar la respuesta (y[n]) de este sistema a la señal de entrada:

$$x[n] = \begin{cases} |a|^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}, \qquad 0 < |a| < 1$$

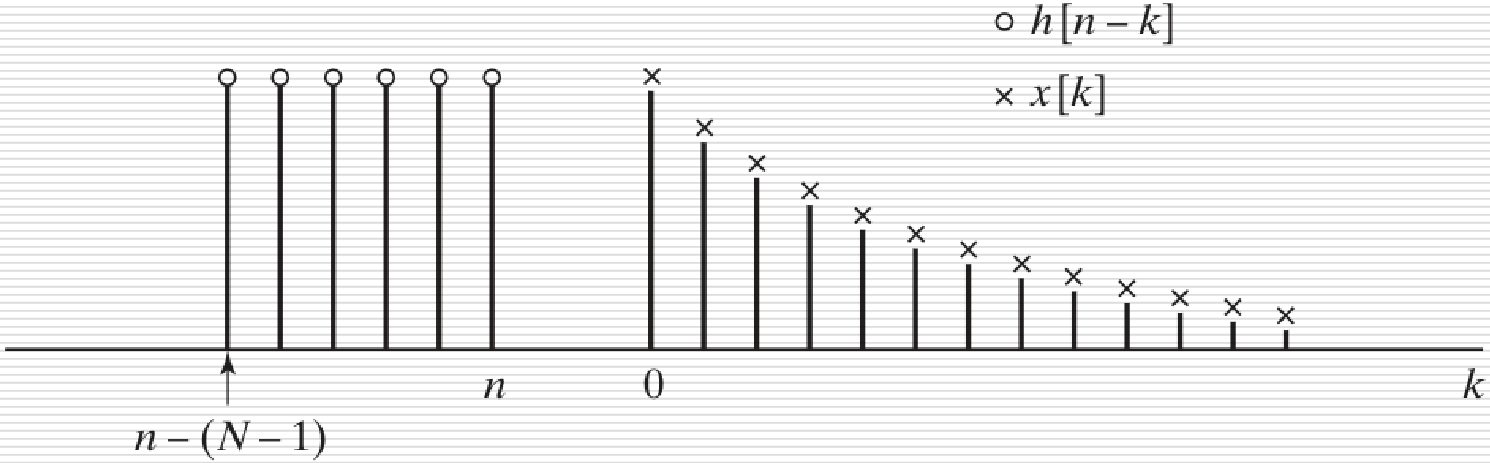
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Ejercicio – Solución gráfica

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, 0 \le n \le N-1 \\ 0, en\ el\ resto \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} |a|^n, n \ge 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}, \qquad 0 < |a| < 1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

n<0



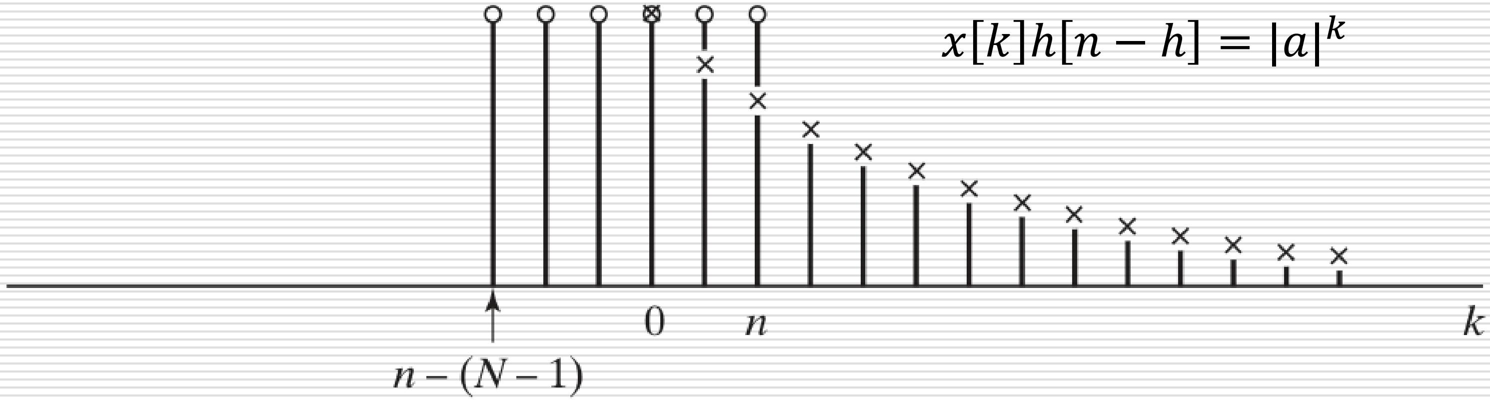
$$y[n] = 0, \qquad n < 0$$

Ejercicio - Solución gráfica

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, 0 \le n \le N-1 \\ 0, en\ el\ resto \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} |a|^n, n \ge 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}, \qquad 0 < |a| < 1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\boldsymbol{0 \le n \le N-1}$$



$$x[k]h[n-h] = |a|^k$$

$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k$, para $\quad 0 \le n \le N-1$

Ejercicio - Solución gráfica

- Y[n] es la suma de n+1 términos de una serie geométrica de razón *a*
  - Fórmula general (acotada) para la suma de una serie geométrica

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} r^k = \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{1-r}$$

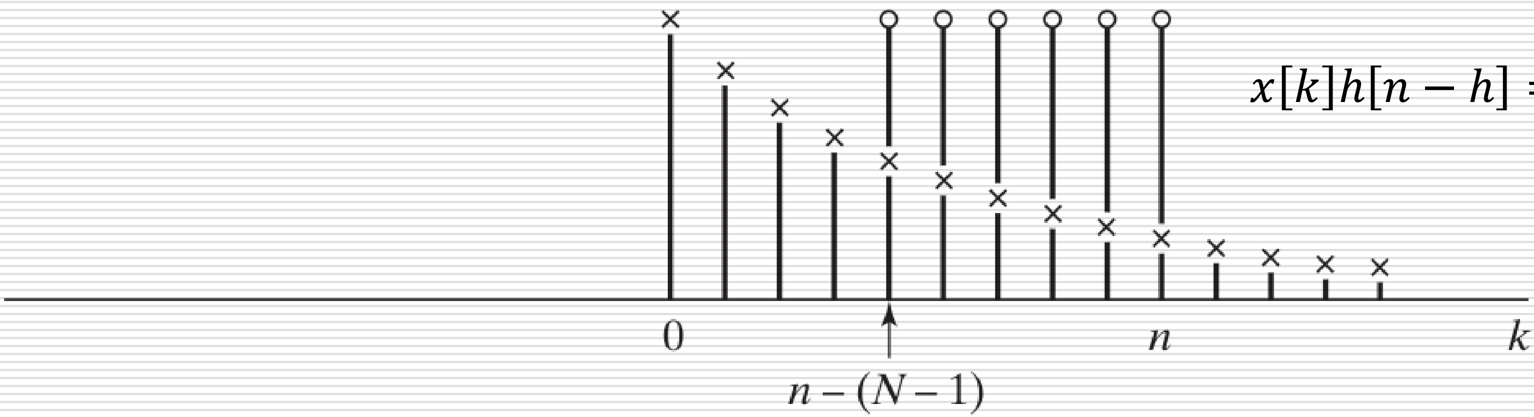
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad 0 \le n \le N-1$$

Ejercicio - Solución gráfica

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, en\ el\ resto \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} |a|^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}, \qquad 0 < |a| < 1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

N-1<n

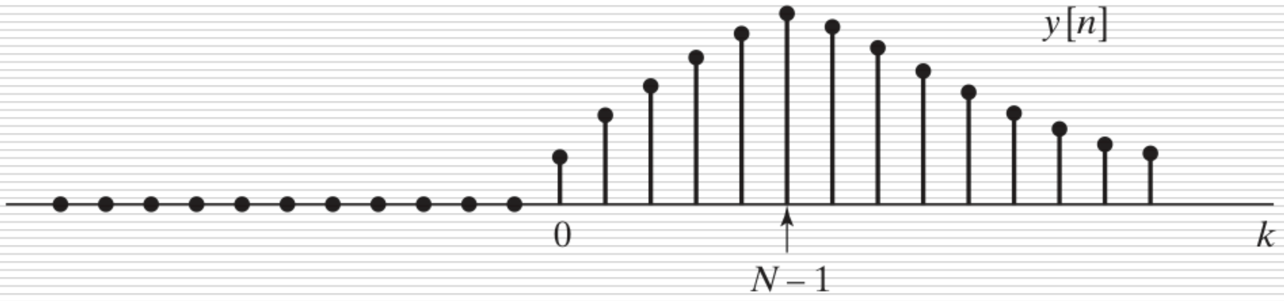


$$x[k]h[n-h] = a^k$$

$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a}$, N-1<n

Ejercicio - Solución gráfica

$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, en\ el\ resto \end{cases}$ $\quad x[n] = \begin{cases} |a|^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}, \quad 0 < |a| < 1$



$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ a^{n-N+1}\left(\dfrac{1-a^N}{1-a}\right), & N-1 < n. \end{cases}$$

Análisis de sistemas discretos LIT

- Propiedades de la convolución
  - Propiedad de identidad y desplazamiento:
    - El impulso unitario $\boldsymbol{\delta[n]}$ **es el elemento identidad** de la operación de convolución

$$y[n] = x[n] * \delta[n] = x[n]$$

    - Si desplazamos $\delta[n]$ una cantidad k, la secuencia de la convolución se desplaza también k unidades

$$x[n] * \delta[n-k] = y[n-k] = x[n-k]$$

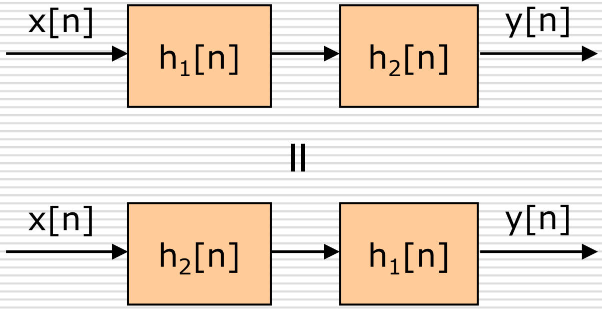
Análisis de sistemas discretos LIT

Propiedades de la convolución

- Propiedad conmutativa:
  - La operación de convolución es conmutativa, **es irrelevante cual de las 2 secuencias sea reflejada y desplazada**

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

  - El uso de esta propiedad nos permite intercambiar el orden de sistemas LIT dispuestos en cascada sin alterar el resultado del sistema total



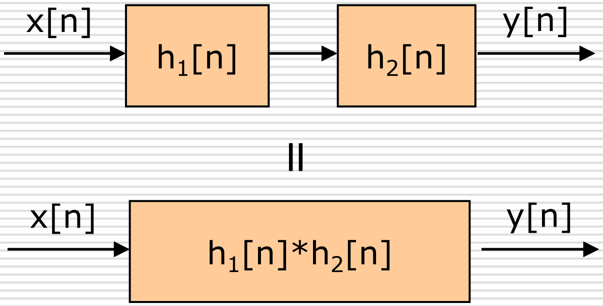
Análisis de sistemas discretos LIT

Propiedades de la convolución

- Propiedad asociativa:
  - La operación de convolución satisface la propiedad **asociativa**

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

  - El uso de esta propiedad nos permite agrupar varios sistemas LIT en cascada en un **único sistema cuya respuesta impulsiva es la convolución de las respuestas impulsivas de todos** los sistemas en cascada



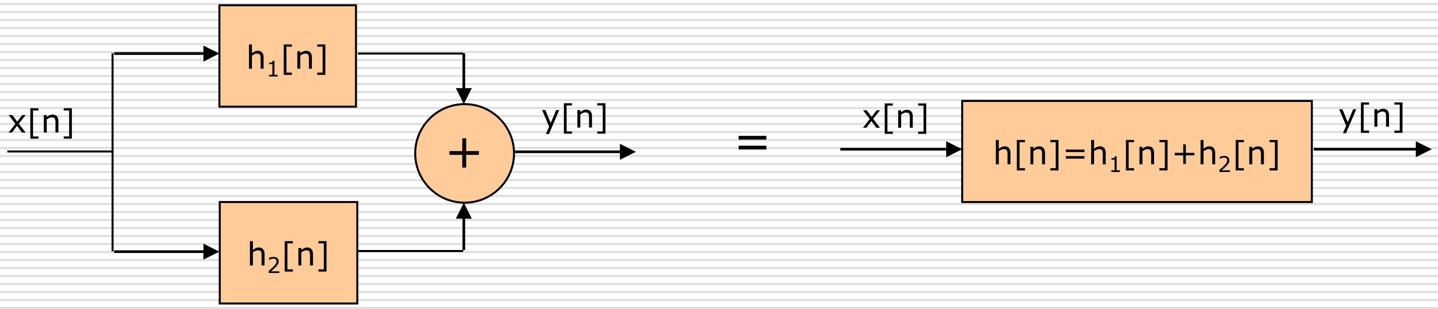
Análisis de sistemas discretos LIT

Propiedades de la convolución

- **Propiedad distributiva:**
  - La operación de convolución satisface la propiedad **distributiva**

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

  - El uso de esta propiedad nos permite agrupar varios sistemas LIT en paralelo en un único sistema cuya respuesta impulsiva es la suma de las respuestas impulsivas de cada uno de los sistemas dispuestos en paralelo



Análisis de sistemas discretos LIT

Sistemas discretos LIT causales

- La salida de **un sistema causal** en el instante 'n' **solo depende de las entradas actual y pasadas**
- En el caso de un sistema LIT la causalidad se puede traducir a **una condición que debe de satisfacer la respuesta al impulso**.
- Lo demostraremos: consideremos un sistema LIT con una salida en el instante $\boldsymbol{n = n_0}$ dada por la fórmula de la convolución

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0 - k]$$

*uso la propiedad conmutativa

Análisis de sistemas discretos LIT

Sistemas discretos LIT causales

- Dividimos el sumatorio en dos conjuntos, uno incluirá el valor actual y los pasados y el otro los valores futuros

$$y[n_0] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_0 - k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n_0 - k]$$

$$= \left(h[0]x[n_0] + h[1]x[n_0 - 1] + h[2]x[n_0 - 2] + \cdots\right)$$
$$+\left(h[-1]x[n_0 + 1] + h[-2]x[n_0 + 2] + \cdots\right)$$

- Si la salida en el instante $n=n_0$ solo depende de las entradas actual y pasadas, entonces para que un **sistema LIT** sea **causal** tiene que darse que la respuesta impulsional **h[n]=0, n<0**

Análisis de sistemas discretos LIT

Sistemas discretos LIT causales

- En un sistema LIT causal podemos restringir los límites del sumatorio

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0 - k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Formas equivalentes

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

- Denominamos ***secuencia causal*** a una secuencia que es igual a 0 para n<0.
- Si la entrada a un sistema LIT causal es una secuencia causal

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k] \qquad x[n] = 0 \; para \; n < 0$$

Ejercicio

- Determinar la respuesta a la secuencia escalón unidad a un sistema LIT que tiene como respuesta al impulso:

$$h[n] = a^n u[n], \qquad |a| < 1$$

Ejercicio

- Determinar la respuesta a la secuencia escalón unidad a un sistema LIT que tiene como respuesta al impulso:

$$h[n] = a^n u[n], \qquad |a| < 1$$

  - La secuencia escalón es causal $(x[n] = 0, n < 0)$
  - La respuesta al impulso es causal $(x[n] = 0, n < 0)$
  - Podemos emplear la fórmula de la convolución que más nos interese (restringimos los índices)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$ si $n >= 0$ e $y[n] = 0$, si $n < 0$

Análisis de sistemas discretos LIT

Estabilidad de los sistemas LIT

- Propiedad importante pensando en una implementación práctica del sistema
- El sistema es estable si y solo si su secuencia de salida y[n] está acotada para toda entrada acotada x[n]
- Un ***sistema LIT es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable***
  - x[n] está acotada si existe una constante M_x tal que:

$$|x[n]| <= M_x < \infty \quad \text{para todo } n$$

  - y[n] está acotada si existe una constante M_y tal que:

$$|y[n]| <= M_y < \infty \quad \text{para todo } n$$

Análisis de sistemas discretos LIT

Estabilidad de los sistemas LIT

- Dado una secuencia de entrada acotada, estudiaremos la salida del sistema LIT

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- Si tomamos el valor absoluto a ambos lados:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

- El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de sus valores absolutos

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

Análisis de sistemas discretos LIT

Estabilidad de los sistemas LIT

- La entrada ya sabemos que está acotada por lo que $|x[n]| \leq M_x$

$$|y[n]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

- Por la expresión anterior podemos ver que la salida estará acotada si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Es decir, un ***sistema LIT es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable***

Ejercicio

- Determinar el rango de valores del parámetro *a* para el que el sistema LIT sea estable. La respuesta impulsional del sistema es:

$$h[n] = a^n u[n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

El sistema es causal: h[n]=0, n<0

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = 1 + |\mathrm{a}| + |\mathrm{a}^2| + \cdots$$

Suma de una serie geométrica. Para que converja, |a|<1

Análisis de sistemas discretos LIT

Respuesta impulsional de duración finita e infinita

Subdividimos los sistemas LIT en:

1. FIR (Finite-duration impulse response): Sistemas en los que la respuesta impulsional es cero fuera de un intervalo determinado. Nos centraremos en los sistemas **FIR causales**

$$h[n] = 0, n < 0 \text{ y } n \geq M$$

- La fórmula de convolución queda restringida a

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

- Por tanto **la salida depende** solo las muestras x[n],x[n-1],...,x[n-M+1], es decir, **de las últimas M muestras**. Por tanto, decimos que un **sistema FIR tiene una memoria finita** de M muestras

Análisis de sistemas discretos LIT

Respuesta impulsional de duración finita e infinita

Subdividimos los sistemas LIT en:

2. IIR (Infinite-duration impulse response): Sistemas en los que la repuesta impulsional tiene una duración infinita
   - Suponemos causalidad, aunque no es una suposición necesaria
   - La suma ponderada implica las muestras de la entrada actual y todas las pasadas
   - **Un sistema IIR tiene memoria infinita**

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- **Un sistema FIR**, implica sumas, multiplicaciones y un número finito de posiciones de memoria, por lo que **puede implementarse** basándose **directamente en la convolución**

- Sin embargo una implementación de **un sistema IIR** basándonos en la convolución **no sería posible**

- ¿Es posible implementar un sistema IIR de otra manera? Sí, existe **una familia de sistemas IIR que puede ser descrita mediante ecuaciones en diferencias.**
  - Muy útil en aplicaciones prácticas, incluyendo implementación de filtros digitales y el modelado de fenómenos y sistemas físicos

Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- Sistemas discretos recursivos y no recursivos
  - La fórmula de la convolución expresa la salida del sistema LIT solo en función de la secuencia de entrada, $x[n]$
  - Existen otros sistemas en los que es necesario o conveniente expresar la salida en función de valores pasados de la propia salida.
  - Ejemplo: Sistema acumulador

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k], \quad n = 0,1,\ldots$$

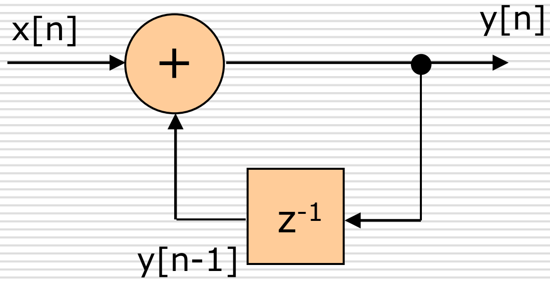
  - El cálculo de y[n] requiere el almacenamiento de todas las muestras de entrada $x[k]$ para $0 \leq k \leq n$
    - Dado que n es creciente, los requisitos de memoria crecen linealmente con el tiempo

Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

Sistemas discretos recursivos y no recursivos

- Sin embargo podemos expresar este sistema de una manera alternativa y más conveniente:

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$



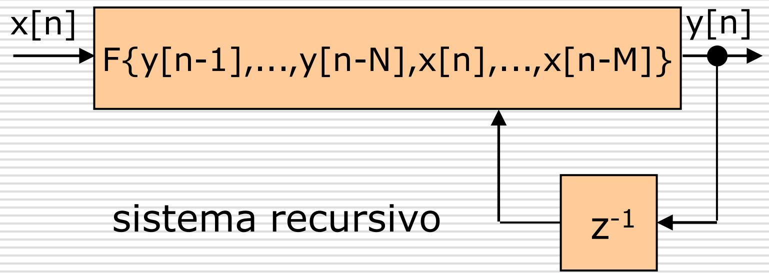
- Para una señal de entrada con $n = n_0$, necesitamos conocer $y[n_0 - 1]$ y $x[n_0]$
  - $y[n_0-1]$ es la condición inicial del sistema.

Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- El sistema acumulador es un ejemplo de sistema recursivo causal que en su forma más general se puede expresar como:

$$y[n] = F\{y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N], x[n], x[n-1], \dots, x[n-M]\}$$

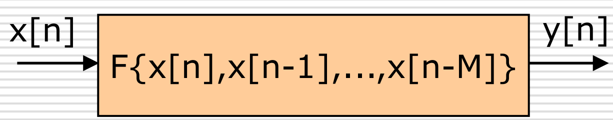
- $F\{\cdot\}$ representa alguna función de sus argumentos
- Para que sea **implementable** tiene que tener **un número finito de retardos**



Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- En contraste si solo depende de sus argumentos de entrada actual y pasados (sistema no recursivo)

$$y[n] = F\{x[n], x[n-1], \ldots, x[n-M]\}$$



sistema no recursivo

- Los sistemas FIR causales, lineales e invariantes que podemos implementar con convoluciones también tienen esta forma. Son, por tanto, no recursivos
  - Suma ponderada lineal de las entradas actual y pasadas

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

Sistemas LIT caracterizados por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

- Son sistemas en los que la entrada y la salida satisfacen una ecuación en diferencias lineal con coeficientes de constantes de orden N de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , a_0 \equiv 1$$

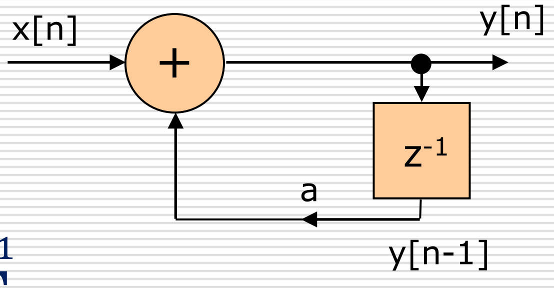
- Equivalente a:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Expresan la salida en el instante n como la suma de la entrada actual y las salidas y entradas pasadas
- Son una subclase de los sistemas recursivos y no recursivos

Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- Sistemas LIT caracterizados por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes
  - Los vamos a introducir a través de un ejemplo
    - Sistema acumulador



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \qquad y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$N = 1, a_0 = 1, a_1 = -1, M = 0, b_0 = 1,$$

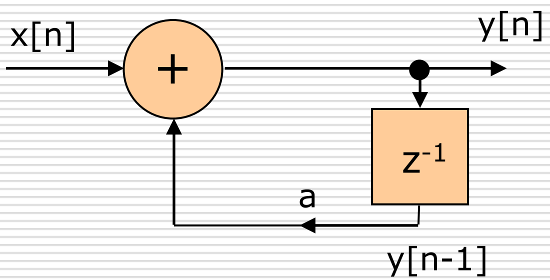
Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- Vamos a desarrollar el ejemplo para destacar las ideas más importantes
  - Supongamos que aplicamos una señal de entrada $x[n]$ para $n \geq 0$.
  - No vamos a hacer suposiciones acerca de $x[n], n < 0$
  - Supondremos que **existe una condición inicial** $y[-1]$

$$
\begin{aligned}
&y[0] = ay[-1] + x[0] \\
&y[1] = ay[0] + x[1] = \overbrace{a^2 y[-1] + ax[0]}^{ay[0]} + x[1] \\
&y[2] = ay[1] + x[2] = a^3 y[-1] + a^2 x[0] + ax[1] + x[2] \\
&\ldots \\
&y[n] = ay[n-1] + x[n] \\
&= a^{n+1} y[-1] + a^n x[0] + \ldots + ax[n-1] + x[n]
\end{aligned}
$$

  - O de forma más compacta

$$
y[n] = a^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0
$$



Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- Tomando la ecuación resultante anterior
  - La primera parte depende de la condición inicial
  - La segunda parte es la respuesta a la señal de entrada

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0$$

- **Si el sistema está inicialmente en reposo** en $n = 0$, su memoria debería ser 0 $(y[-1] = 0)$
  - Se dice que el sistema está en estado nulo
  - Su salida se denomina respuesta al estado nulo

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0$$

Sistemas discretos descritos mediante ecuaciones en diferencias

- Supongamos ahora que el sistema no está inicialmente en reposo ($y[-1] \neq 0$)
  - Supongamos que la señal de entrada es $x[n] = 0, \forall\, n$
  - La salida de este sistema se denomina respuesta para la entrada nula o *respuesta natural*

$$y_{zi}[n] = a^{n+1} y[-1], \quad n \geq 0$$

- **Un sistema recursivo con condiciones iniciales no nulas** no está en reposo, ya que **puede producir una salida sin ser excitado**. La respuesta depende de la memoria del sistema
- Uniendo los casos anteriores, la respuesta total al sistema de ejemplo se puede expresar como:

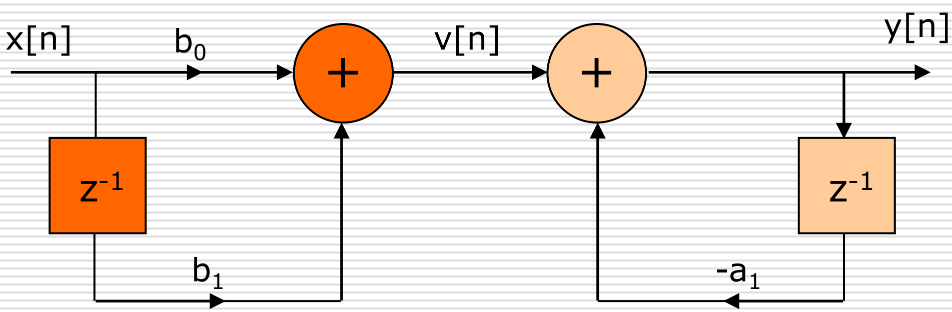
$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

Implementación de sistemas discretos

- Estructuras para la implementación de sistemas LIT
  - Una estructura que utiliza elementos de retardo (memoria) separados para las muestras de las señales de entrada y de salida se conoce como Forma Directa I
  - Consideremos el sistema

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

LIT caracterizado por ecuaciones en diferencias



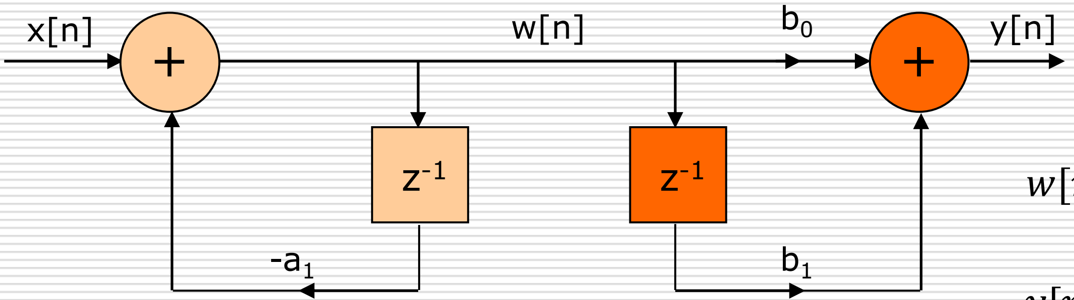
  - Puede interpretarse como 2 sistemas LIT conectados en cascada

$$v[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$ Sistema no recursivo

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + v[n]$$ Sistema recursivo

Implementación de sistemas discretos

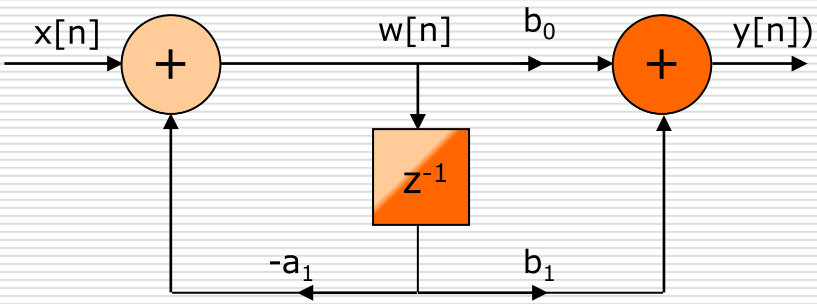
- En una serie de sistemas LIT podemos intercambiar el orden de los elementos si alterar el resultado



$$w[n] = -a_1 w[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1]$$

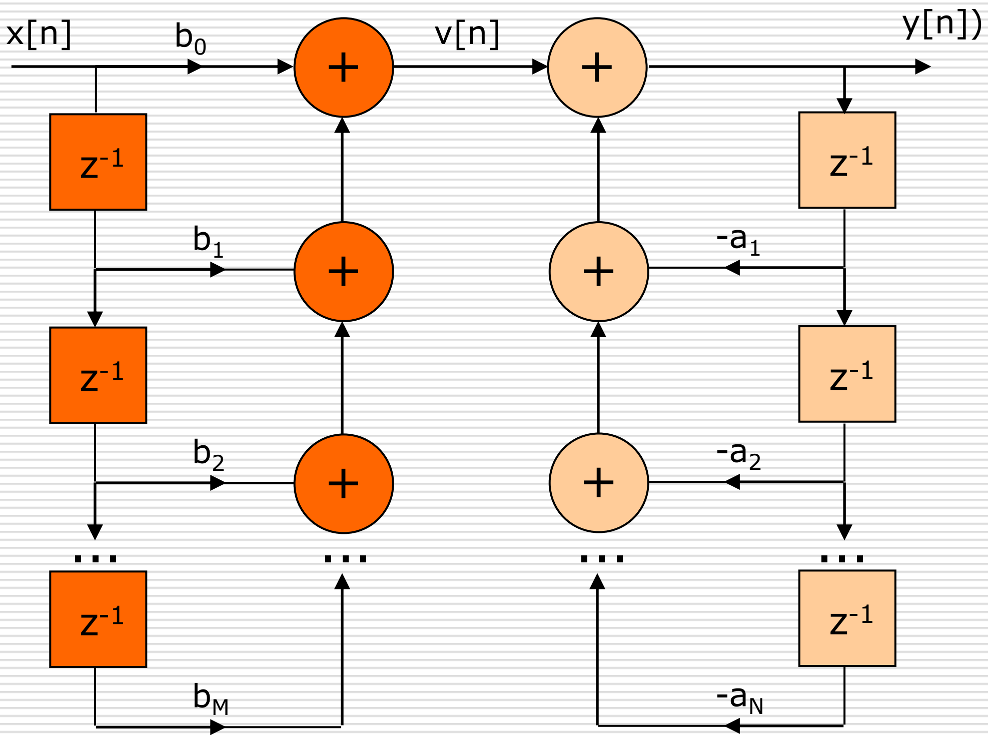
- O equivalentemente la denominada Forma Directa II :



Implementación de sistemas discretos

- FORMA DIRECTA I: para un sistema general descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

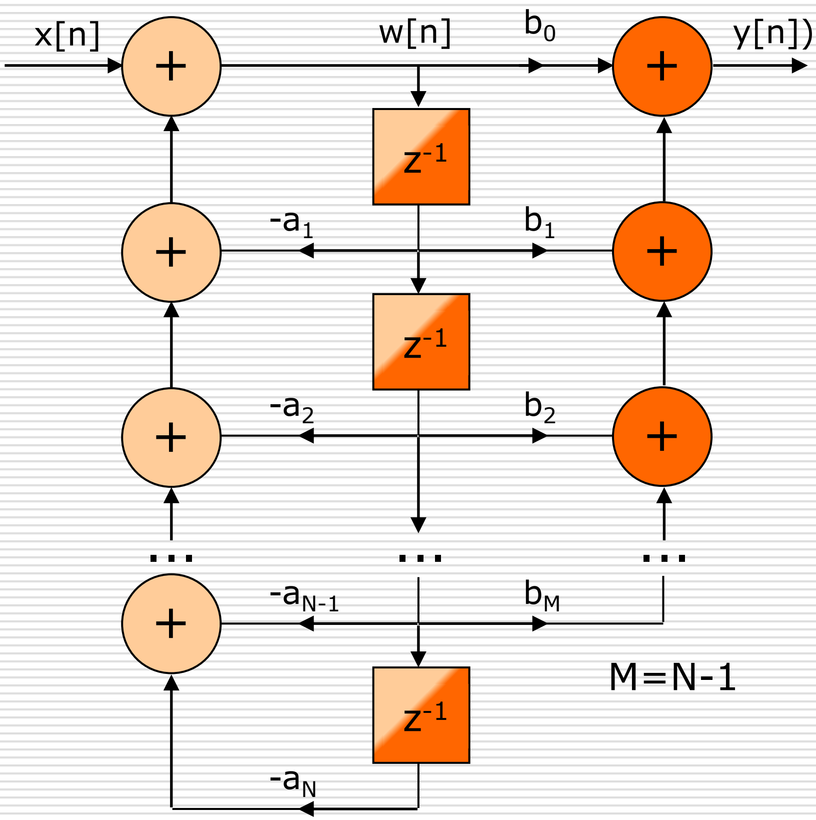


$$v[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + v[n]$$

Implementación de sistemas discretos

- FORMA DIRECTA II: En general, para un sistema descrito por la misma ecuación en diferencias, cuando N>M:

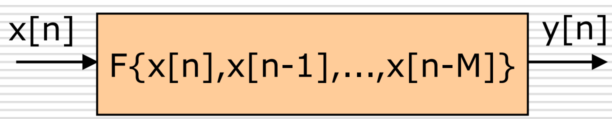


$$w[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + x[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k]$$

Implementación de sistemas discretos

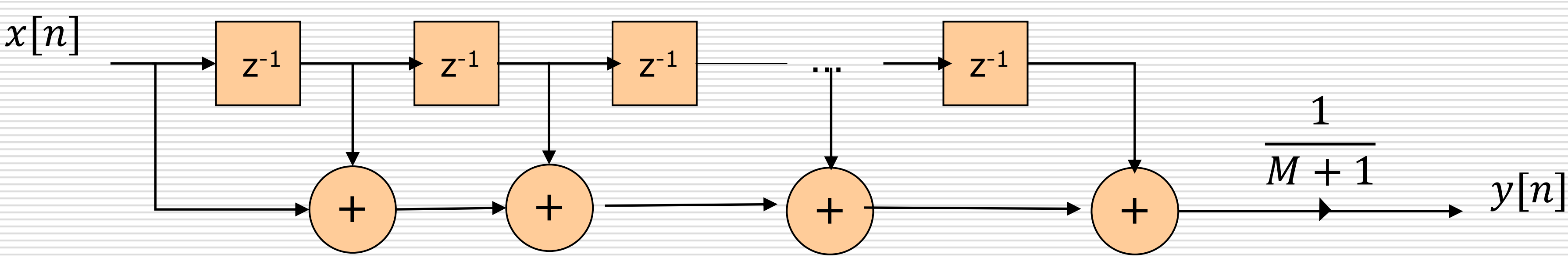
- Los sistemas FIR causales, lineales e invariantes que podemos implementar con convoluciones tienen la forma:



sistema no recursivo

- Los podemos implementar como sistemas no recursivos

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$



Implementación de sistemas discretos

- Todo sistema FIR puede realizarse también de forma recursiva
- Supongamos el sistema de media móvil del ejemplo anterior

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k) \qquad = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-1-k)$$

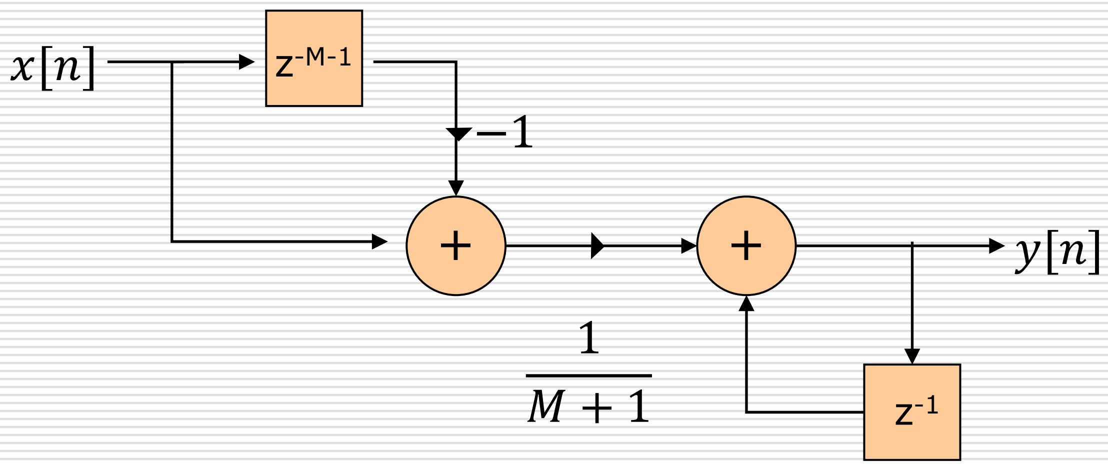
$$+ \frac{1}{M+1}\left[x[n] - x[n-1-M]\right]$$

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{M+1}\left[x[n] - x[n-1-M]\right]$$

Implementación de sistemas discretos

- Todo sistema FIR puede realizarse también de forma recursiva
- Supongamos el sistema de media móvil del ejemplo anterior

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{M+1}\left[x[n] - x[n-1-M]\right]$$

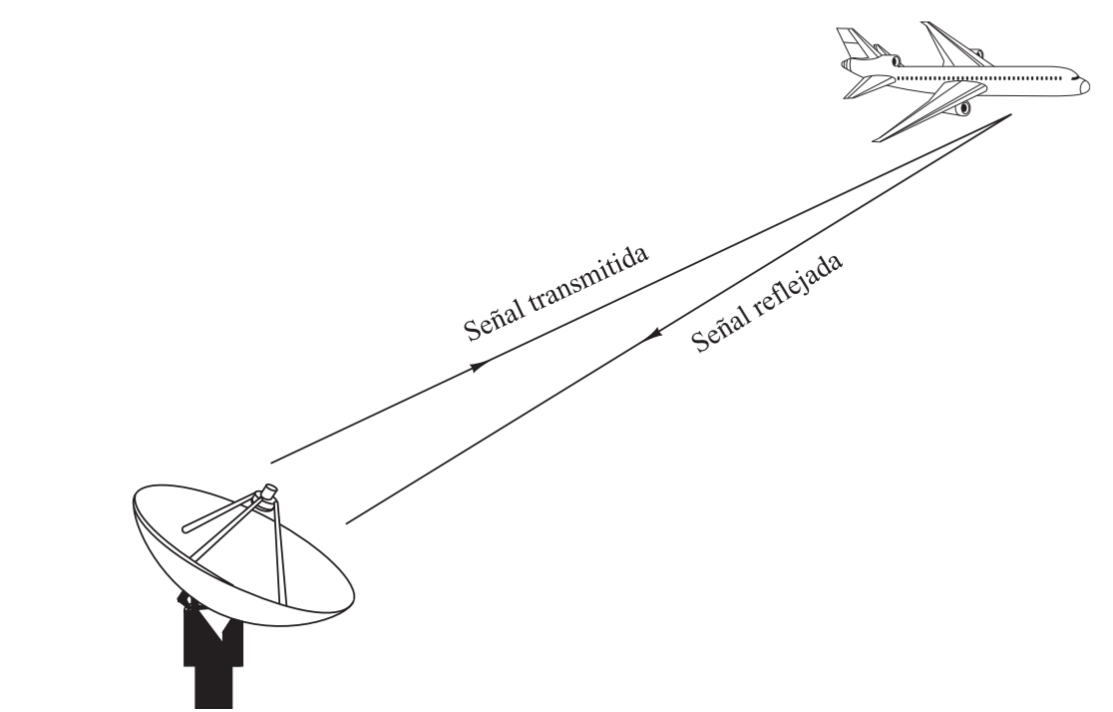


Correlaciones de señales discretas en el tiempo

- La correlación es una operación similar a la convolución
- El objetivo es medir el grado de semejanza entre dos señales
- Tiene aplicaciones prácticas en diferentes áreas de la ciencia e ingeniería como el radar, el sonar, las comunicaciones digitales, la geología, etc.

Correlaciones de señales discretas en el tiempo

- Ejemplo: aplicaciones de radar
  - x[n] versión muestreada de la señal transmitida
  - y[n] versión muestreada de la señal recibida



Fuente: "Digital signal processing : principles, algorithms and applications". John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis

Correlaciones de señales discretas en el tiempo

- Ejemplo: aplicaciones de radar
  - x[n] versión muestreada de la señal transmitida
  - y[n] versión muestreada de la señal recibida
  - Si existe un blanco, la señal recibida estará formada por una versión retardada de la señal transmitida, reflejada desde el blanco, y distorsionada por efecto del ruido aditivo

$$y[n] = \underbrace{\alpha}_{\text{Factor de atenuación}} x[n - \underbrace{D}_{\text{Retado ida y vuelta}}] + \underbrace{w[n]}_{\text{Ruido aditivo}}$$

  - Si no existe blanco y[n] será solo ruido
  - Teniendo las dos señales, el problema de la detección del radar consiste en comparar x[n] e y[n] para saber si existe blanco y en caso afirmativo determinar el tiempo de retardo para saber la distancia al blanco

Correlaciones de señales discretas en el tiempo

- Correlación cruzada
  - Supongamos 2 secuencias de señales reales con **energía finita**
  - La correlación cruzada se define como:

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l], \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

    - l es el parámetro de desplazamiento (tiempo) (o retardo)
    - El subíndice xy indica las secuencias que se van a correlar y su orden indica la dirección en que se desplaza una respecto a la otra

  - Equivalente a:

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]y[n], \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Correlaciones de señales discretas en el tiempo

- Correlación cruzada
  - Si invertimos los papeles

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]x[n-l], \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  - Equivalente a:

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n+l]x[n], \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  - Comparando las 2 alternativas: $r_{xy}[l] = r_{yx}[-l]$
  - $r_{yx}[l]$ es la versión reflejada de $r_{xy}[l]$
  - Nos dan la misma información en lo que respecta a la similitud de las señales

Ejercicio

- Calcula la correlación cruzada de las siguientes secuencias

$x[n]$	...	0	0	2	-1	3	7	1	2	-3	0	0	0	...
$y[n]$	...	0	0	1	-1	2	-2	4	1	-2	5	0	0	...

$$r_{xy}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]$$

$$r_{xy}[-1] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+1]$$

$$r_{xy}[1] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-1]$$

Correlaciones de señales discretas en el tiempo

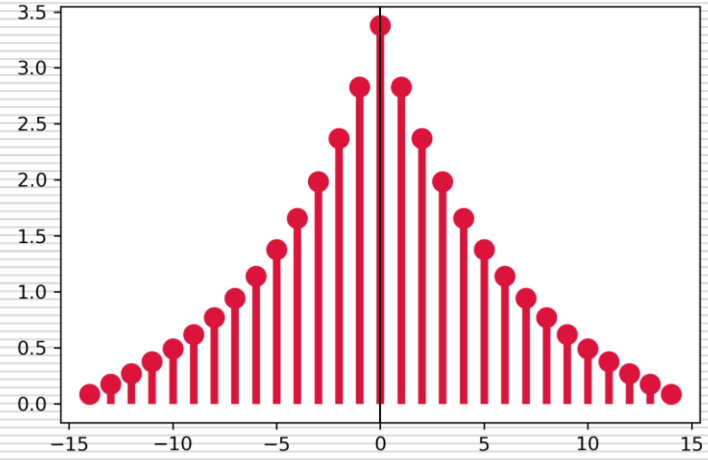
- El cálculo de la correlación cruzada de dos secuencias es muy similar al de la convolución
- Convolución vs Correlación cruzada:
  - Una secuencia se refleja
  - La secuencia se desplaza
  - Se multiplican las secuencias (secuencia producto)
  - Se suman los valores de la secuencia producto
- Implementación
  - Un algoritmo para calcular la convolución puede emplearse para realizar la correlación cruzada
    - Las entradas serían la secuencia x[n] y la secuencia reflejada y[-n]
    - La ausencia de reflexión hace de la correlación cruzada una **operación no conmutativa**

Correlaciones de señales discretas en el tiempo

- Autocorrelación
  - Correlación cruzada de una señal consigo misma (desplazada)
  - Es útil, por ejemplo, para encontrar patrones repetitivos dentro de una señal, como la periodicidad de una señal enmascarada bajo el ruido
  - La autocorrelación en n=0 tiene su máximo y **representa la energía de la señal**

$$x[n] = 0{,}84^n$$

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-l]$$



Correlaciones de señales discretas en el tiempo

- Autocorrelación
  - Ejemplo
    - Señal periódica con ruido
    - Se repite la siguiente señal y se le añade ruido

$x[n]$	..	0	0	2	-1	3	7	1	2	-3	0	0	0	...