

*Demostración.* Dado que  $x(n)$  es causal, (3.1.1) proporciona

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Obviamente, como  $z \rightarrow \infty$ ,  $z^{-n} \rightarrow 0$  ya que  $n > 0$ , y se obtiene (3.2.23).

Todas las propiedades de la transformada  $z$  presentadas en esta sección se resumen en la Tabla 3.2. Están enumeradas en el mismo orden que se han ido explicando en el texto. Las propiedades de conjugación y la relación de Parseval se dejan como ejercicios para el lector.

| Propiedad                          | Dominio del tiempo   | Dominio $z$  | ROC  |
|------------------------------------|--|--|--|
| Notación                           | $x(n)$<br>$x_1(n)$<br>$x_2(n)$   | $X(z)$<br>$X_1(z)$<br>$X_2(z)$                                       | ROC: $r_2 <  z  < r_1$<br>ROC <sub>1</sub><br>ROC <sub>2</sub>   |
| Linealidad                         | $a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$  | $a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$  | Al menos la intersección de ROC <sub>1</sub> y ROC <sub>2</sub>  |
| Desplazamiento temporal            | $x(n-k)$   | $z^{-k}X(z)$   | La de $X(z)$ , excepto $z=0$ si $k > 0$ y $z=\infty$ si $k < 0$  |
| Cambio de escala en el dominio $z$ | $a^n x(n)$   | $X(a^{-1}z)$   | $ a r_2 <  z  <  a r_1$  |
| Inversión temporal                 | $x(-n)$  | $X(z^{-1})$  | $\frac{1}{r_1} <  z  < \frac{1}{r_2}$                            |
| Conjugación                        | $x^*(n)$   | $X^*(z^*)$   | ROC  |
| Parte real                         | $\text{Re}\{x(n)\}$  | $\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$                                       | Incluye la ROC   |
| Parte imaginaria                   | $\text{Im}\{x(n)\}$  | $\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$                                      | Incluye la ROC   |
| Diferenciación en el dominio $z$   | $nx(n)$  | $-z \frac{dX(z)}{dz}$  | $r_2 <  z  < r_1$  |
| Convolución                        | $x_1(n) * x_2(n)$  | $X_1(z)X_2(z)$   | Al menos, la intersección de ROC <sub>1</sub> y ROC <sub>2</sub> |
| Correlación                        | $r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$   | $R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$                                  | Al menos, la intersección de la ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z^{-1})$  |
| Teorema del valor inicial          | Si $x(n)$ es causal  | $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$                            |  |
| Multiplicación                     | $x_1(n)x_2(n)$   | $\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$ | Como mínimo,<br>$r_{1l}r_{2l} <  z  < r_{1u}r_{2u}$              |
| Relación de Parseval               | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$ |  |  |

**Tabla 3.2.** Propiedades de la transformada  $z$ .