Percepción y procesado de señales

Tema 1: Introducción al procesado de señales digitales - Parte 2

Marcos Boullón Magán

Área de Lenguajes y Sistemas
Departamento de Electrónica y Computación

Clasificación de las señales

- Monocanal *vs* multicanal
  - Una **señal** se describe mediante una función de **una o más variables independientes**. **El valor** de la función puede ser una magnitud **real, compleja** o incluso un **vector**
  - Una señal **monocanal** describe un fenómeno mediante una sola función

    $x(t) = a(t) \cos(2\pi f t + \varphi)$

  - Una señal **multicanal** describe un fenómeno mediante un vector de señales. Ejemplo: en electrocardiografía se realizan procesos de adquisición de 3 o 12 canales

    $ECG(t) = (I(t), II(t), III(t), aVL(t), aVR(t), aVF(t), V1(t), V2(t), V3(t), V4(t), V5(t), V6(t))$

$$S_3(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$$

Clasificación de las señales

- Unidimensional *vs* multidimensional
  - Una señal **unidimensional** es función de una única variable independiente

    $x(t) = 3\cos(50\pi t) + 2\sin(100\pi t)$

  - Una señal **multidimensional** es función de un conjunto de variables independientes. Ejemplo: la intensidad o brillo de una imagen en una televisión en blanco y negro es una señal tridimensional, función de la posición y el tiempo

    $f(x, y, t) = Intensidad(t)$

Clasificación de las señales

- Tiempo continuo *vs* tiempo discreto
  - Las señales de **tiempo continuo** (**analógicas**) están definidas para todo instante de tiempo en el intervalo continuo *(a,b)*, donde *a* puede ser -∞ y *b* puede ser +∞

    $x(t) = \cos(\pi t)$

    $-\infty < t < +\infty$

  - Las señales en **tiempo discreto** solo están definidas para instantes específicos del tiempo, y se representan como secuencias de números

Clasificación de las señales

- Tiempo continuo *vs* tiempo discreto
  - Orígenes prácticos de las señales en tiempo discreto
    - Seleccionando valores de una señal analógica en instantes discretos de tiempo:
      - $x[n] = x(nT)$

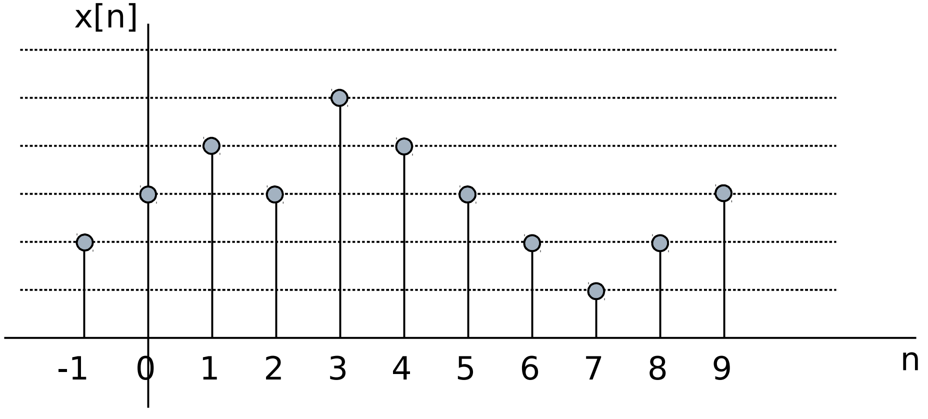
        T es el período de muestreo

        $1/T$ es la frecuencia de muestreo

        $x[n]$ es la n-ésima muestra de la secuencia
    - Acumulando una variable en un período de tiempo. Ejemplo: número de manchas solares observadas en el intervalo de un año, población mundial, etc.

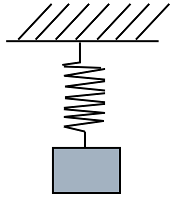
Clasificación de las señales

- Señal continua *vs* señal discreta
  - El valor de una señal en tiempo continuo o discreto puede ser a su vez continuo o discreto
  - La señal es continua si toma todos los posibles valores de un intervalo
  - La señal es discreta si solo puede tomar un conjunto finito de valores en un intervalo
  - Se denomina **señal digital** a una **señal discreta en tiempo discreto**



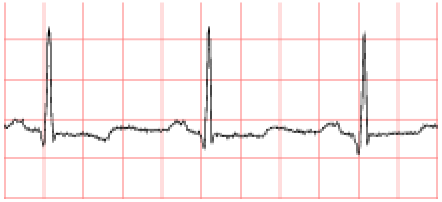
Clasificación de las señales

- Señales determinísticas *vs* señales aleatorias
  - Una señal **determinística** puede ser descrita mediante una fórmula matemática explícita o una regla bien definida. **Todos los valores de la señal** (pasado, presente y futuro) **se conocen** sin incerteza. Ejemplo: resorte (oscilador armónico)



$$x(t) = a(t)\cos(2\pi f t + \varphi)$$

  - Una señal **aleatoria** no puede ser descrita con una precisión razonable. Su evolución en el tiempo **es *a priori* impredecible**. Ejemplo: ECG



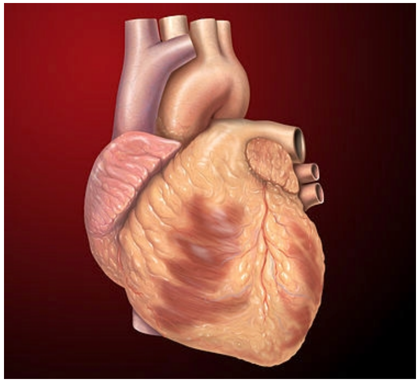
$$x(t) = ?$$

Clasificación de las señales

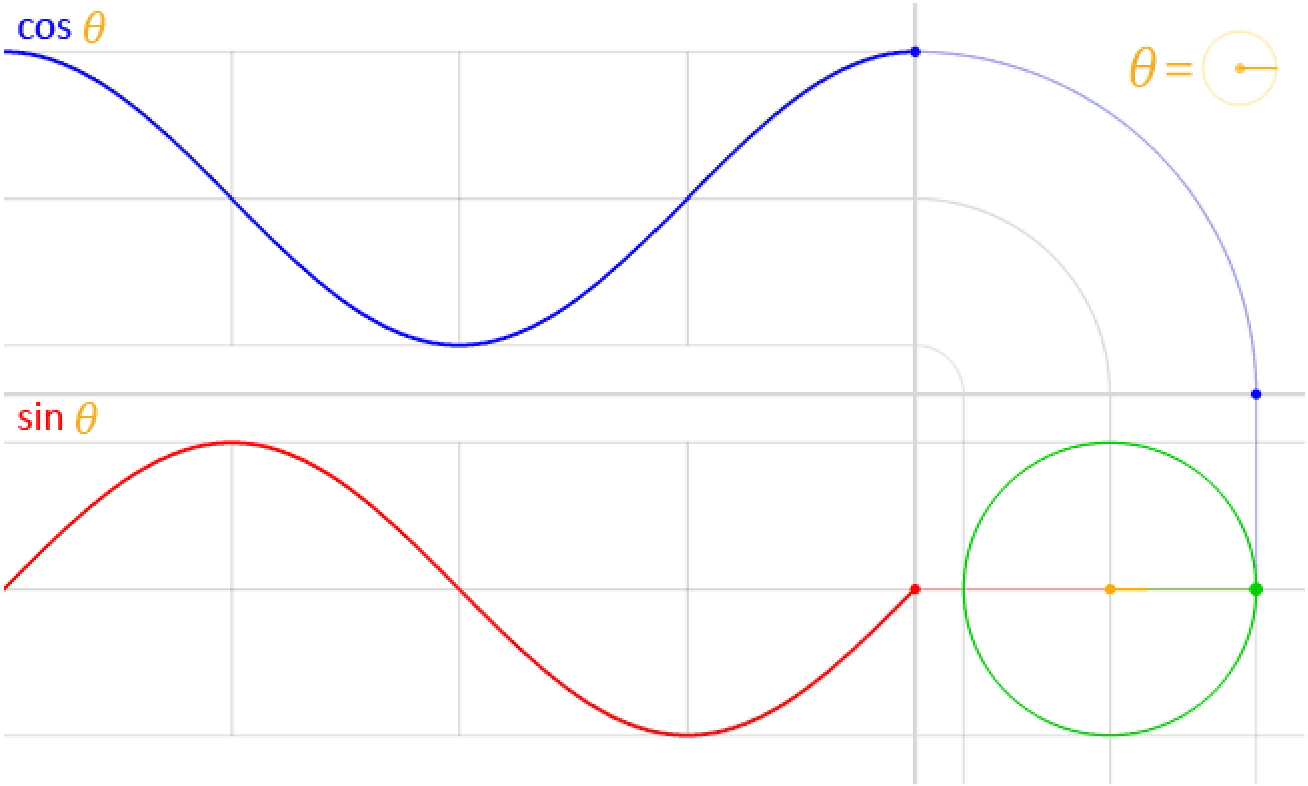
- Clasifica las siguientes señales: monocanal/multicanal; unidimensional/multidimensional; continuas/discretas (tiempo); continuas/discretas (amplitud)
  - Película digital a color
  - Las medidas mensuales de peso y altura de una persona
  - Señal de radio

Señales sinusoidales

- Movimiento oscilatorio armónico

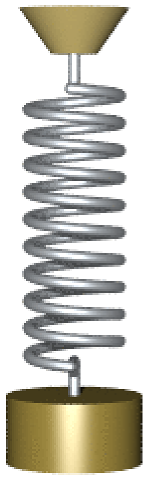


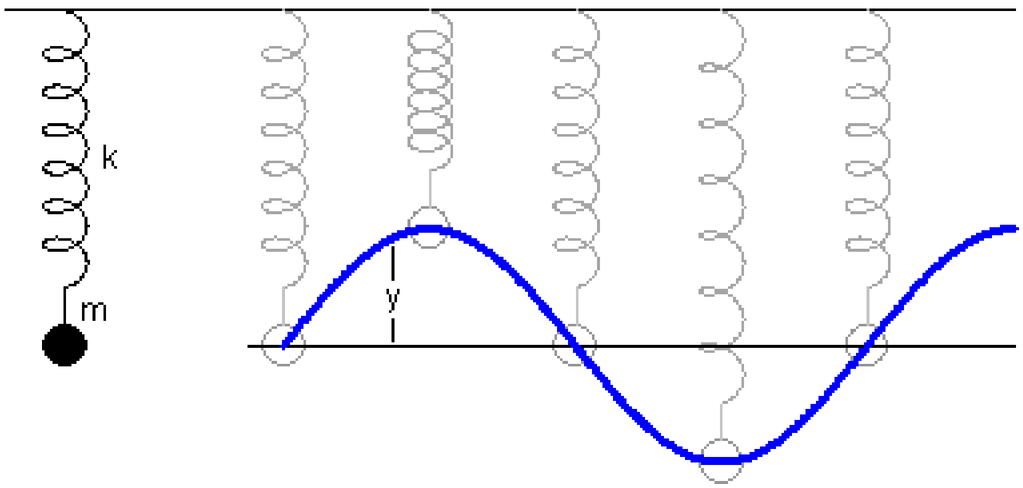
Señales sinusoidales



Lucas Vieira - Own work, Public Domain, *https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31642523*

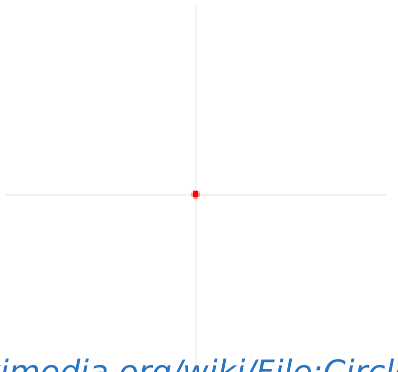
Señales sinusoidales





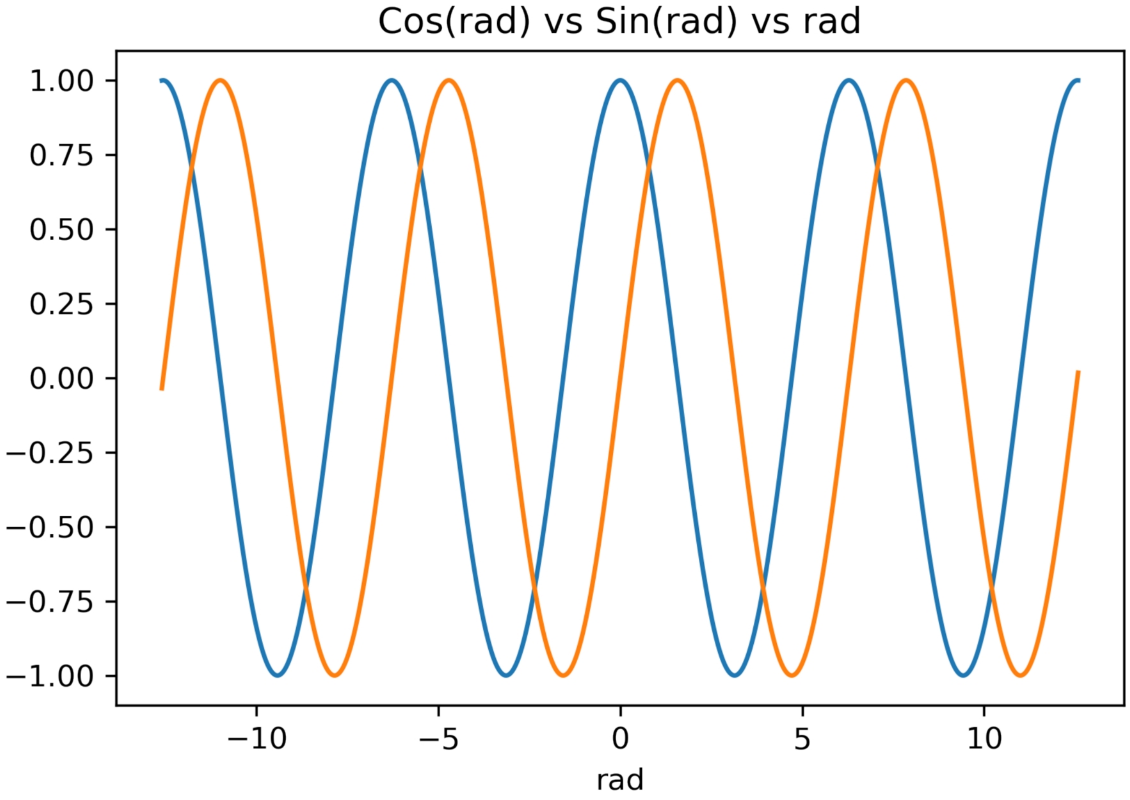
Revisión de trigonometría

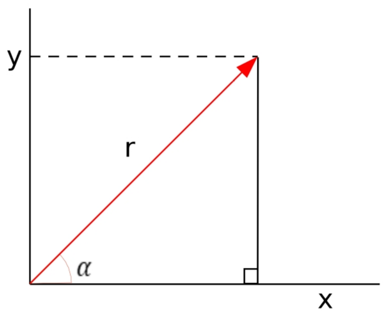
- Las señales sinusoidales están definidas en base a las funciones trigonométricas de seno y coseno
- Estas funciones emplean ángulos como argumento
  - En procesado de señales usaremos radianes en lugar de grados
    - *360 grados = 2π radianes*
    - *180° = π rad ~ 3.1416 rad*
    - *90° = π/2 rad ~ 1.5708 rad*
    - *1° = π/180 rad ~ 0.1745 rad*
    - *1 rad = 180/π ° ~ 57.2958°*



Lucas Vieira - Own work, Public Domain, *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle_radians.gif*

Revisión de trigonometría





$$\sin(\alpha) = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos(\alpha)$$

Revisión de trigonometría

Propiedad	*Ecuación*
Equivalencia	*sin(θ) = cos(θ - π/2); cos(θ) = sin(θ + π/2)*
Periocidad	*cos(θ + 2πk) = cos(θ), si k es entero*
Coseno, función par	*cos(-θ) = cos(θ)*
Seno, función impar	*sin(-θ) = - sin(θ)*
Ceros del seno	*sin(πk) = 0, si k es entero*
Unos del coseno	*cos(2πk) = 1, si k es entero*
Menos unos del coseno	*cos(2π (k + 1/2)) = -1, si k es entero*

Adaptación de *Signal Processing First,* James H. McClellan y Ronald W. Schafer

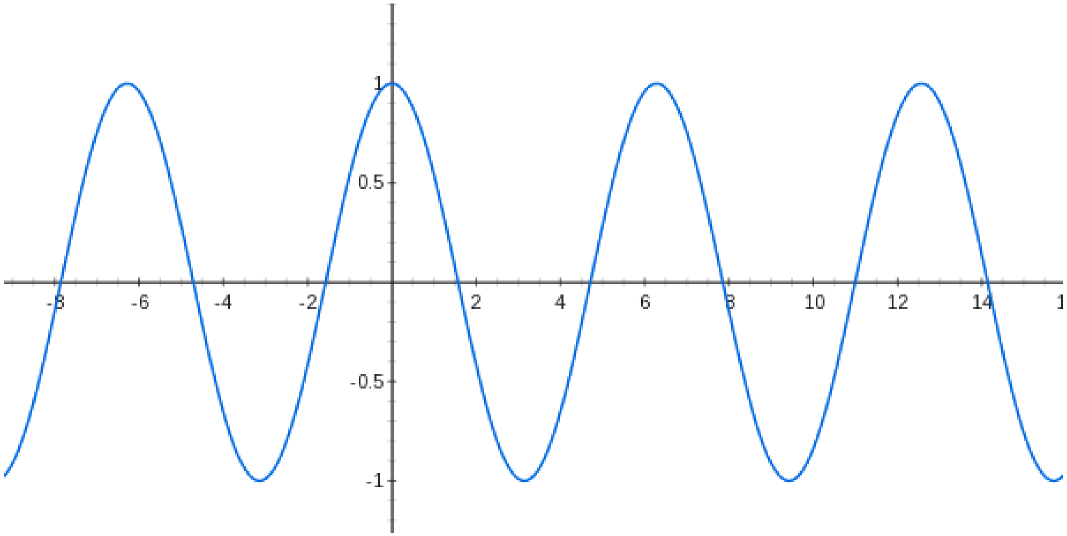
Revisión de trigonometría

Identidad	Ecuación
1	$sin2(\theta) + cos2(\theta) = 1$
2	$cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sin^2(\theta)$
3	$sin(2\theta) = 2\ sin(\theta)\ cos(\theta)$
4	$sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha)\ cos(\beta) \pm cos(\alpha)\ sin(\beta)$
5	$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)\ sin(\beta) \mp sin(\alpha)\ cos(\beta)$

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo continuo
  - Una oscilación armónica simple se describe como:

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \qquad -\infty < t < +\infty$$



La frecuencia en las señales

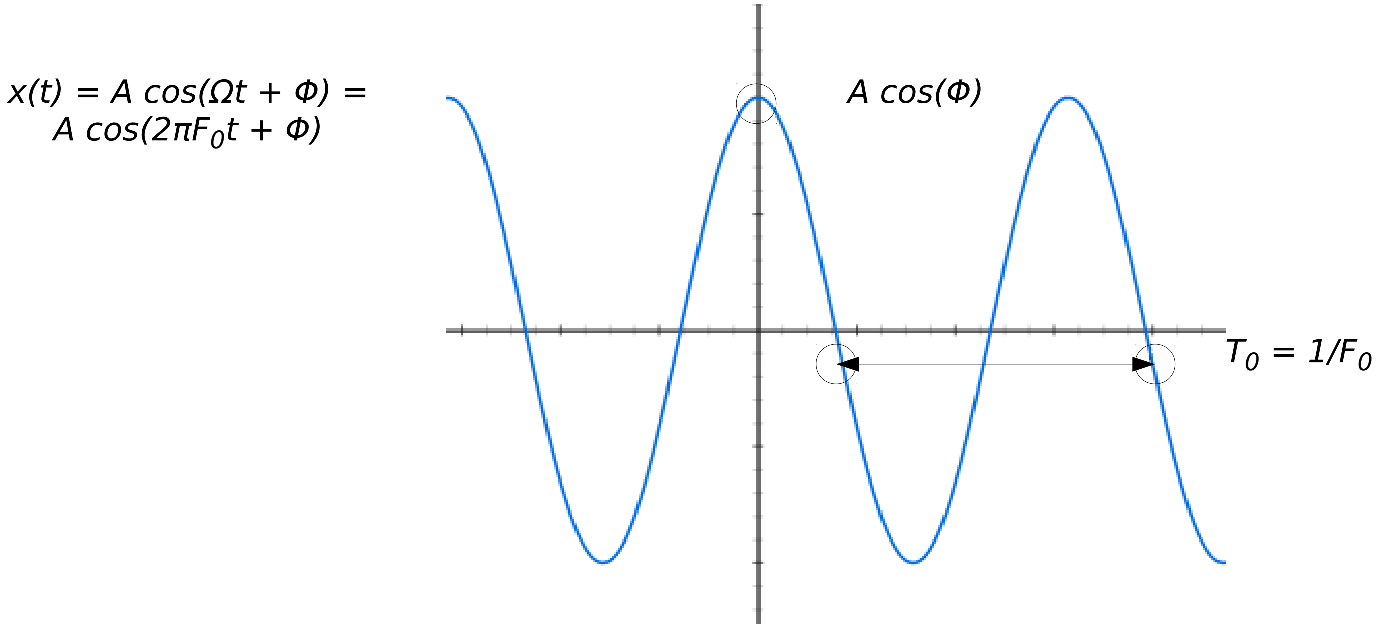
- Señales sinusoidales en tiempo continuo
  - Una oscilación armónica simple se describe como:

    $x(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \qquad -\infty < t < +\infty$

    - ***x(t)*** es una señal analógica en la variable independiente tiempo (s)
    - ***cos()*** es la función coseno
    - ***A*** es la amplitud de la sinusoide
    - $\boldsymbol{\Omega}$ es la frecuencia en radianes por segundo (rad/s), $\Omega = 2\pi F_0$
    - $\boldsymbol{\Phi}$ es el desplazamiento de fase en radianes (rad)

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo continuo
  - En lugar de la frecuencia en radianes por segundo Ω, usamos habitualmente la frecuencia F_0 medida en ciclos por segundo (ciclos/s) o herzios (Hz), siendo $\Omega = 2\pi F_0$
  - También podemos usar el período, $T_0 = 1/F_0$



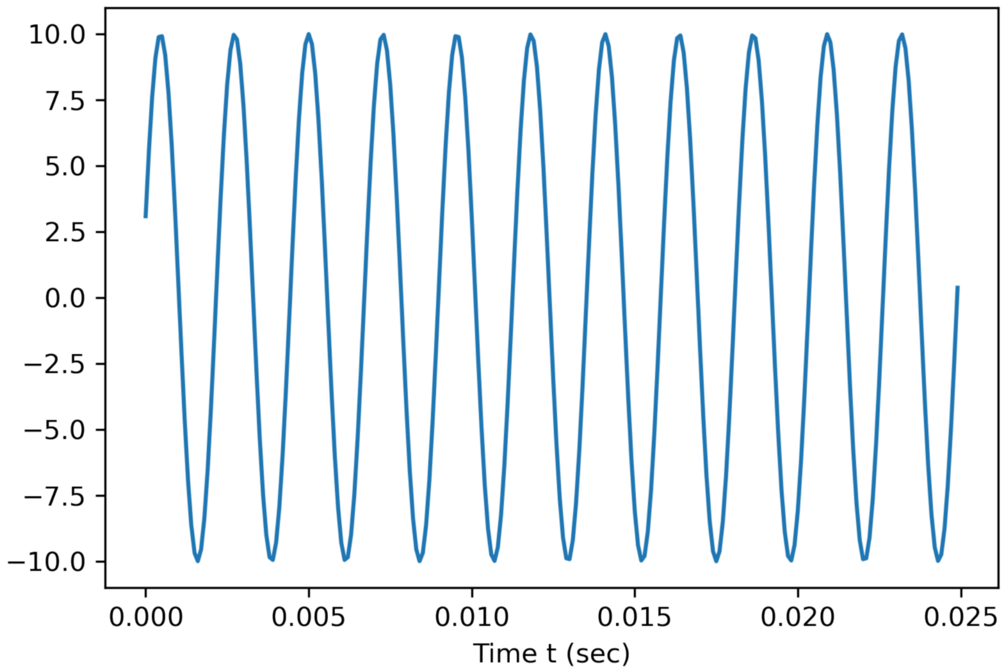
La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo continuo

1. **Para todo valor fijo de la frecuencia F_0, $x(t)$ es periódica**, de forma que $x(t+T_0)=x(t)$, siendo $T_0=1/F_0$ el período fundamental
2. **Señales con frecuencias diferentes son diferentes**
3. **Un aumento en la frecuencia** F_0 da lugar a un **incremento en la velocidad de oscilación** de la señal

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo continuo



$x(t) = 10 \cos(2\pi\ 440\ t - 0.4\ \pi)$

$A = 10$

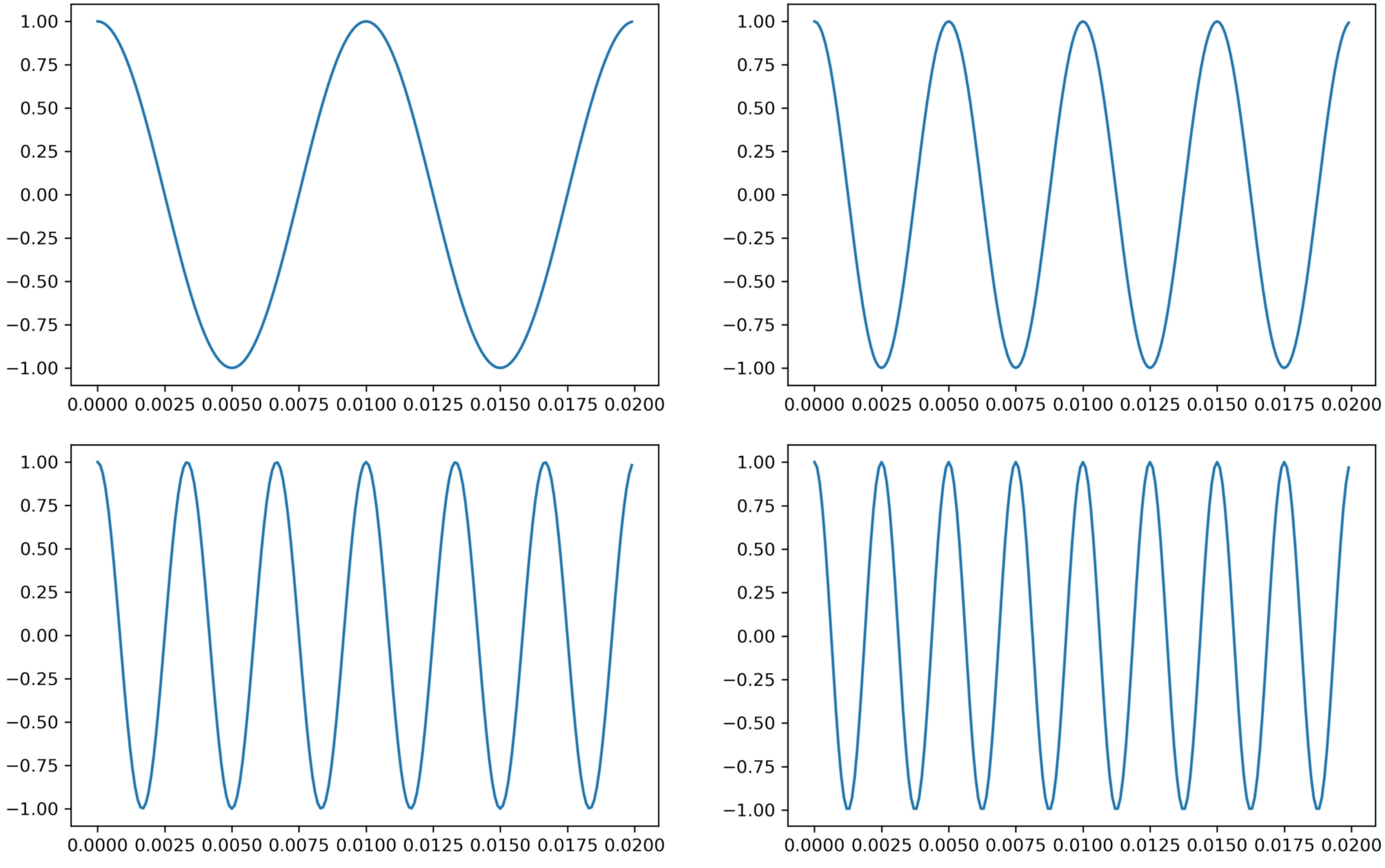
$F_0 = 440$

$\Phi = -0.4\pi$

Se repite el mismo patrón de oscilaciones cada 1/440 segundos. Este intervalo se denomina período de la sinusoide o fundamental (inversa de la frecuencia).

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo continuo
  - Variación en las frecuencias: aparecen señales diferentes, periódicas, donde la oscilación aumenta con la frecuencia



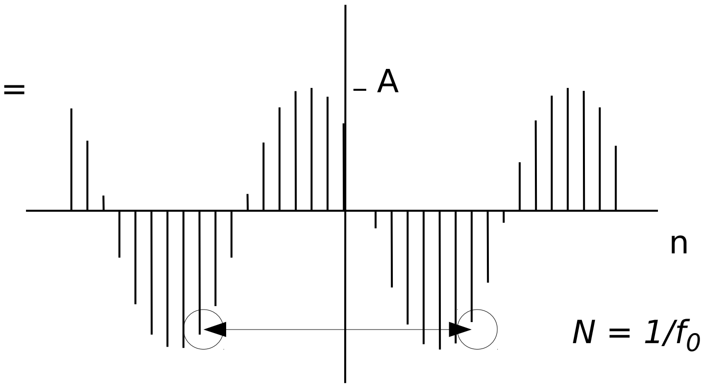
La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto
  - Se describe como:

    $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \Phi) \qquad -\infty < n < +\infty$

    - ***A*** es la amplitud
    - ***n*** es el número de muestra
    - $\boldsymbol{\omega_0}$ es la frecuencia en radianes por muestra. Habitualmente usaremos la frecuencia f_0 en ciclos por muestra (o el período, N): $\omega_0 = 2\pi f_0$
    - $\boldsymbol{\Phi}$ es el desplazamiento de fase en radianes (rad)

$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \Phi) =$
$A\cos(2\pi f_0 n + \Phi)$



La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

1. **Una sinusoide es periódica si su frecuencia f_0 es un número racional**

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

1. **Una sinusoide es periódica si su frecuencia f_0 es un número racional**

   $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \Phi)$

   Una señal $x[n]$ es periódica de período N ($N>0$) si:

   $x[n] = x[n + N]$

   $A\cos(\omega_0 n + \Phi) = A\cos(\omega_0(n+N) + \Phi)$

   $A\cos(\omega_0 n + \Phi) = A\cos(\omega_0 n+\omega_0 N + \Phi)$

   Esto es cierto si existe un número entero k tal que

   $\omega_0 N = 2\pi k$

   O, lo que es lo mismo,

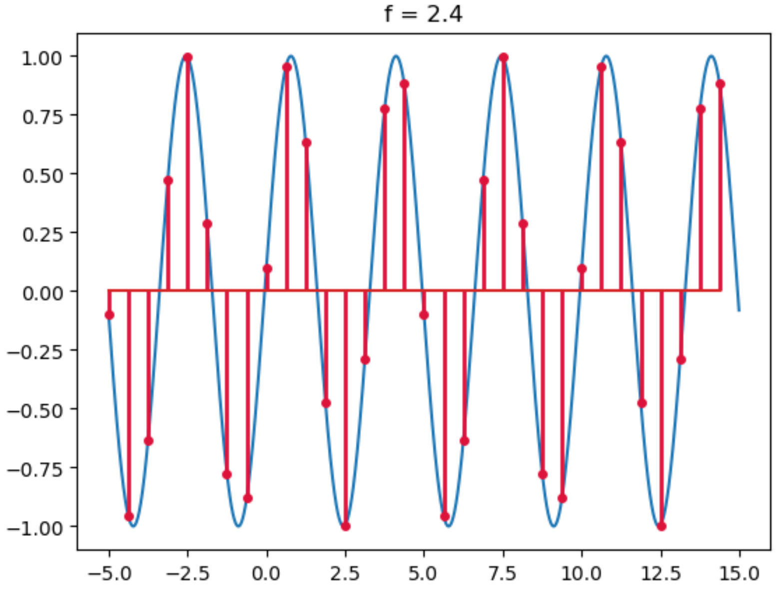
   $2\pi f_0 N = 2\pi k$

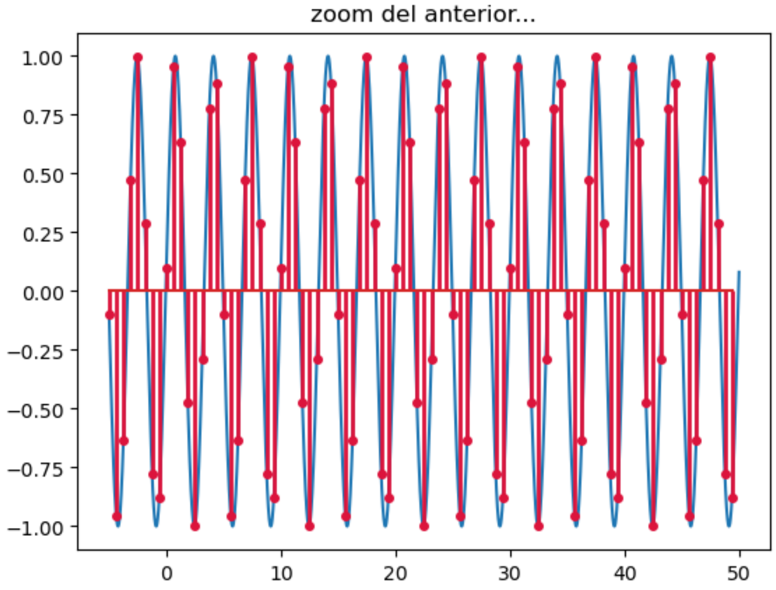
   $\boldsymbol{f_0 = k/N}$

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

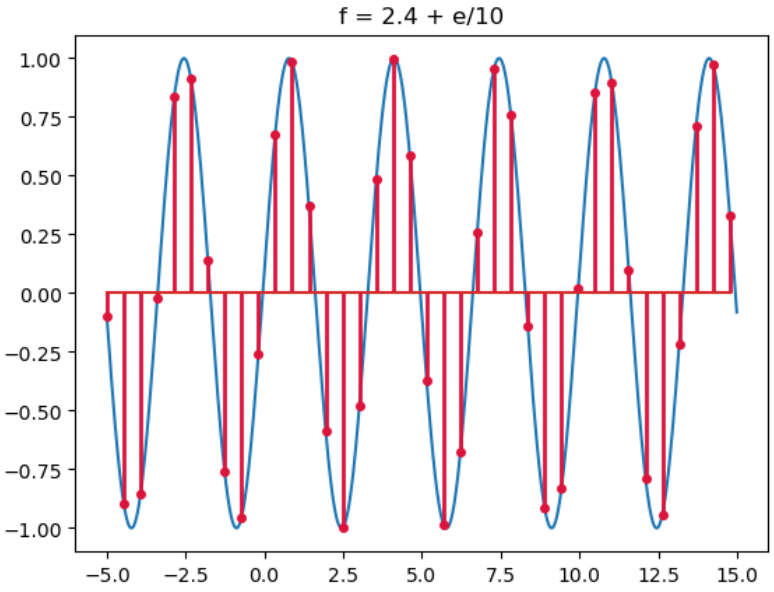
  1. **Una sinusoide es periódica si su frecuencia f_0 es un número racional**

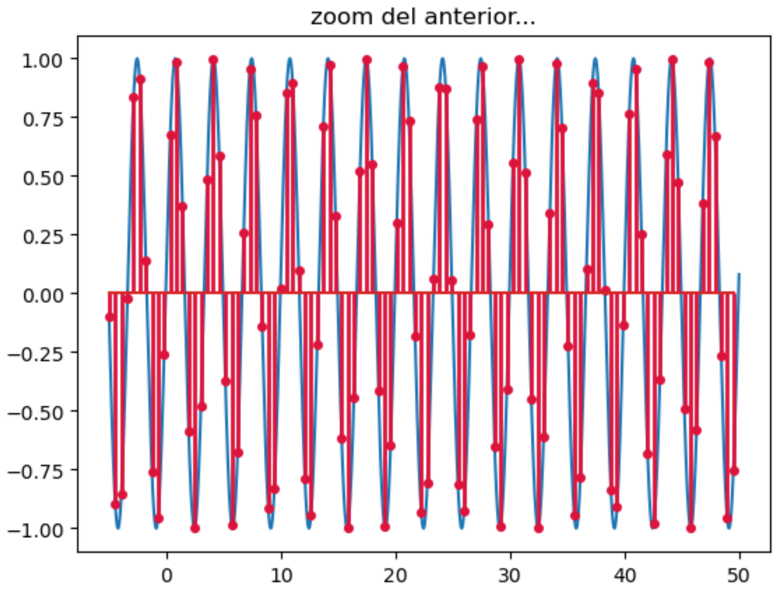




La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto
  1. **Una sinusoide es periódica si su frecuencia f_0 es un número racional**





La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

2. **Sinusoides en tiempo discreto separadas por una frecuencia ω_o múltiplo de 2π son idénticas**

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

2. **Sinusoides en tiempo discreto separadas por una frecuencia ω_o múltiplo de 2π son idénticas**

$$A \cos(\omega_0 n + \Phi) = A \cos((\omega_0 + 2\pi)n + \Phi)$$

$$A \cos(\omega_0 n + \Phi) = A \cos(\omega_0 n + 2\pi n + \Phi)$$

Por tanto, todas las secuencias sinusoidales

$$x_k[n] = A \cos(\omega_k n + \Phi) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde

$$\omega_k = \omega_o + 2\pi k$$

$$-\pi \leq \omega_o \leq \pi$$

son **indistinguibles** (idénticas)

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

2. **Sinusoides en tiempo discreto separadas por una frecuencia $\boldsymbol{\omega_o}$ múltiplo de $\boldsymbol{2\pi}$ son idénticas**

   - Consideramos **únicas** a las sinusoides en el rango

     $-\pi \leq \omega_o \leq \pi$

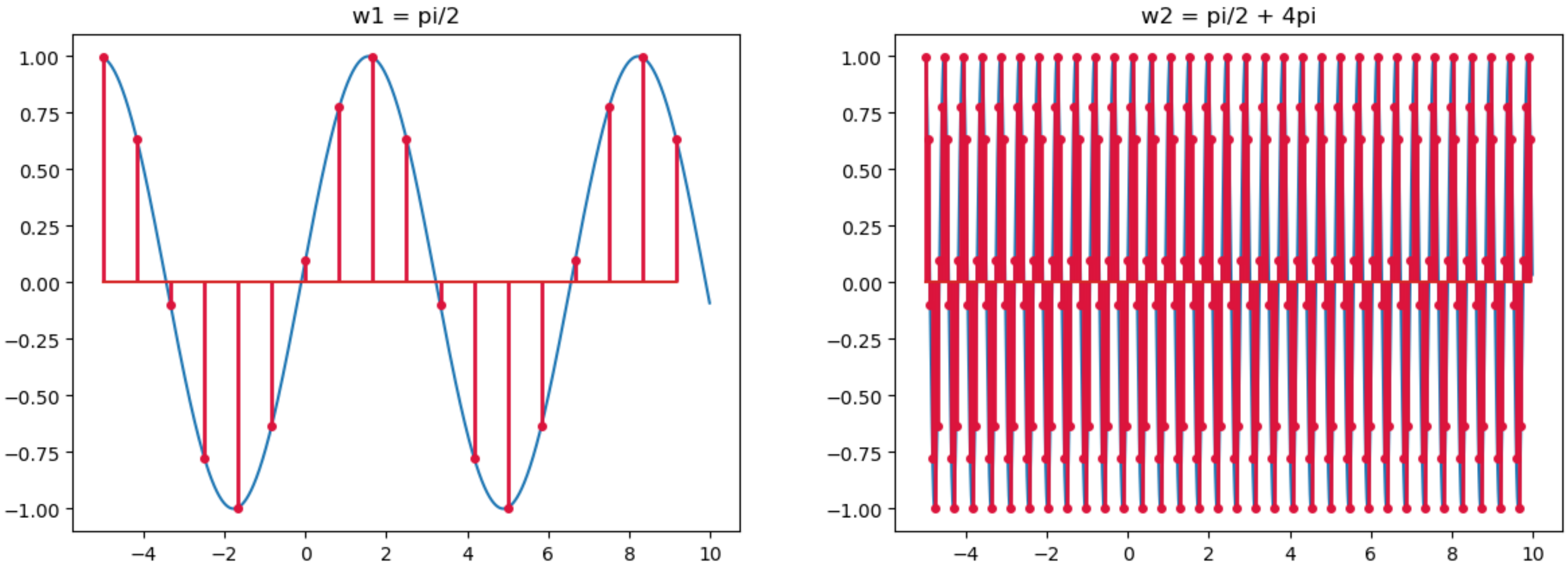
   - Cada secuencia resultante de una sinusoide con frecuencia $|\omega_o| > \pi$ es idéntica a una secuencia obtenida a partir de una señal sinusoidal de frecuencia $|\omega| \leq \pi$

   - Llamamos **alias** a las sinusoides con frecuencia $|\omega_o| > \pi$

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

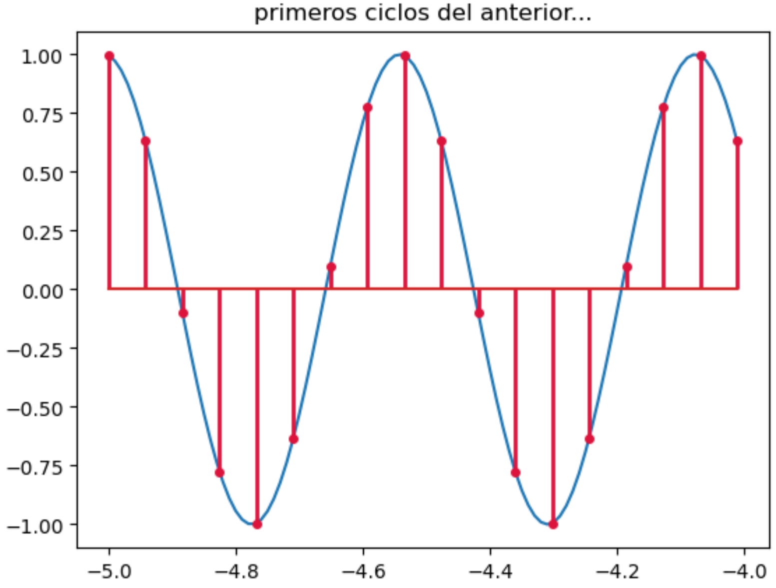
  2. Sinusoides en tiempo discreto separadas por una frecuencia $\boldsymbol{\omega_o}$ múltiplo de $\boldsymbol{2\pi}$ son idénticas



La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

  2. Sinusoides en tiempo discreto separadas por una frecuencia ω_o múltiplo de 2π son idénticas



w1 = [0.99500417 0.63298131 -0.09983342 -0.77416708 -0.99500417 -0.63298131 0.09983342 0.77416708 0.99500417 0.63298131 ...]

w2 = [0.99500417 0.63298131 -0.09983342 -0.77416708 -0.99500417 -0.63298131 0.09983342 0.77416708 0.99500417 0.63298131 ...]

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

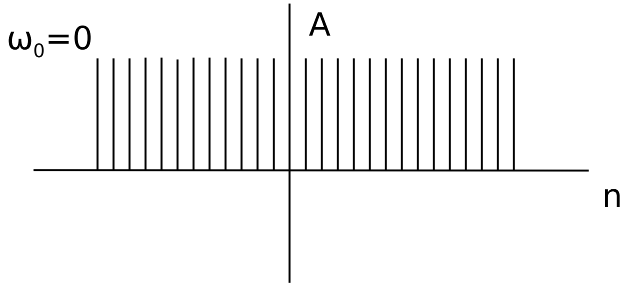
La frecuencia en las señales

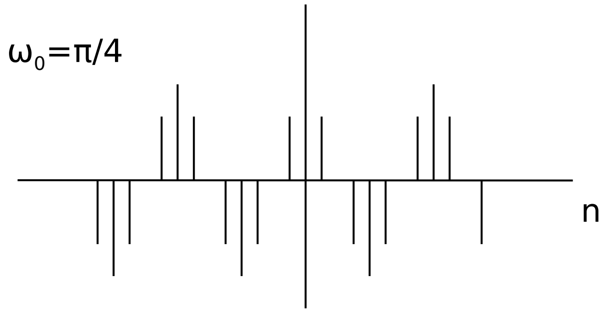
- Señales sinusoidales en tiempo discreto

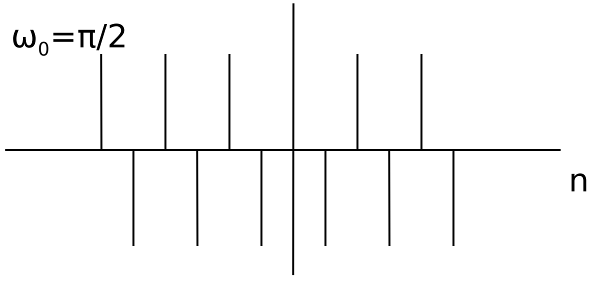
3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

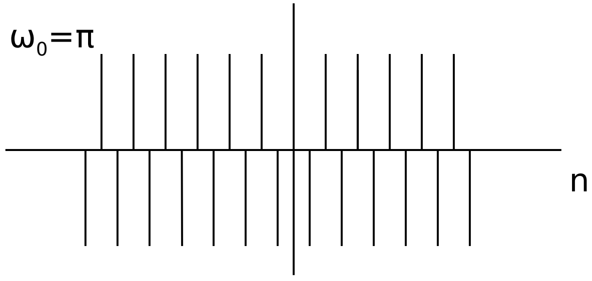
$$x[n] = A\cos(\omega_0 n)$$

Variamos la frecuencia entre 0 y π









La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\boldsymbol{\omega_o}| = \boldsymbol{\pi}$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n)$$

Variamos ahora la frecuencia entre π y 2π

Consideramos dos sinusoides con frecuencias ω_1 y ω_2

$$\omega_1 = \omega_0 \qquad \omega_2 = 2\pi - \omega_0$$

ω_1 *está entre* π *y* 2π $(\pi \le \omega_0 \le 2\pi)$, ω_2 *está entre* π *y* 0

$$x_1[n] = A\cos(\omega_1 n) = A\cos(\omega_0 n)$$

$$x_2[n] = A\cos(\omega_2 n) = A\cos((2\pi - \omega_0)n) =$$

$$A\cos(2\pi n - \omega_0 n) = A\cos(-\omega_0 n) =$$

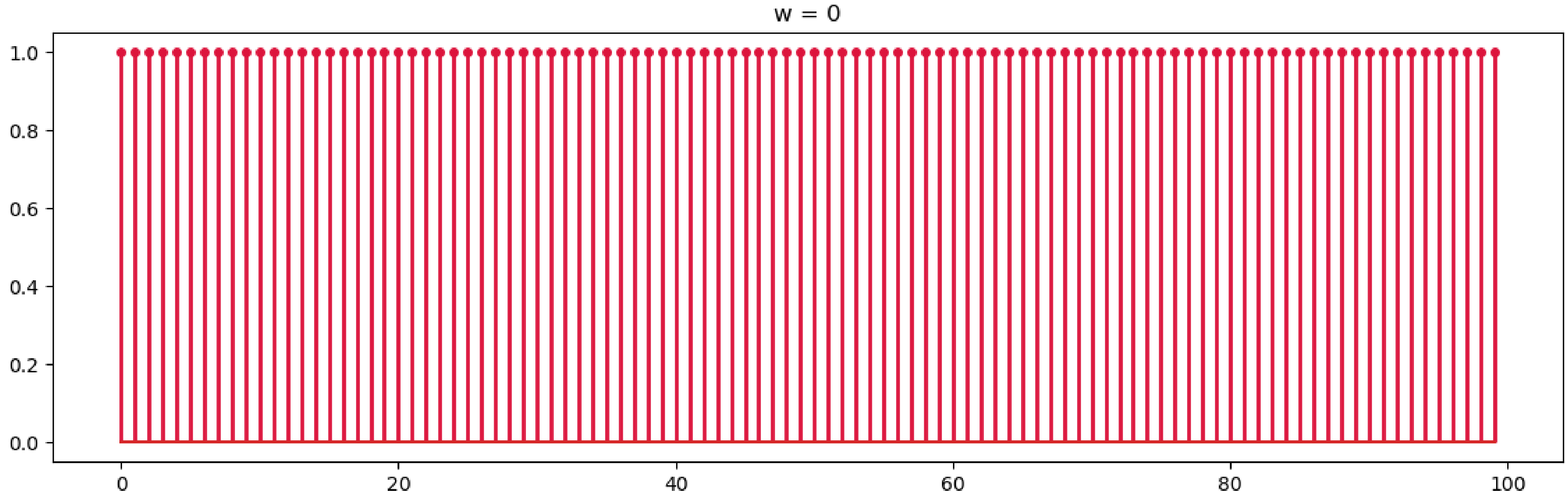
$$A\cos(\omega_0 n) = x_1[n]$$

La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

  3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

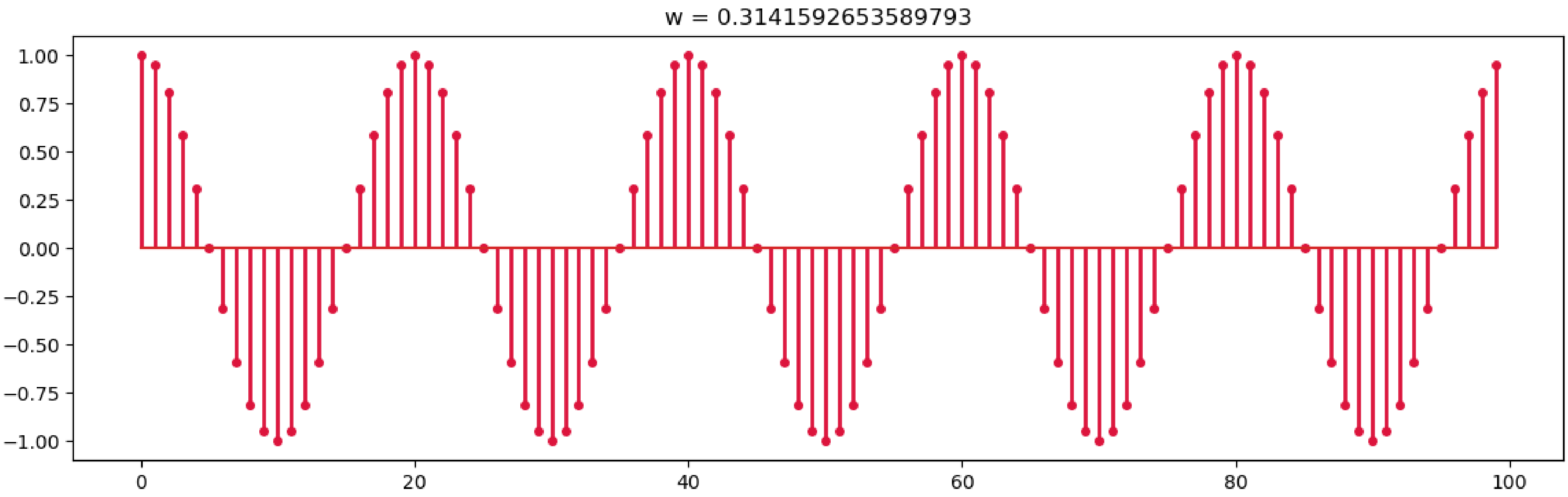


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

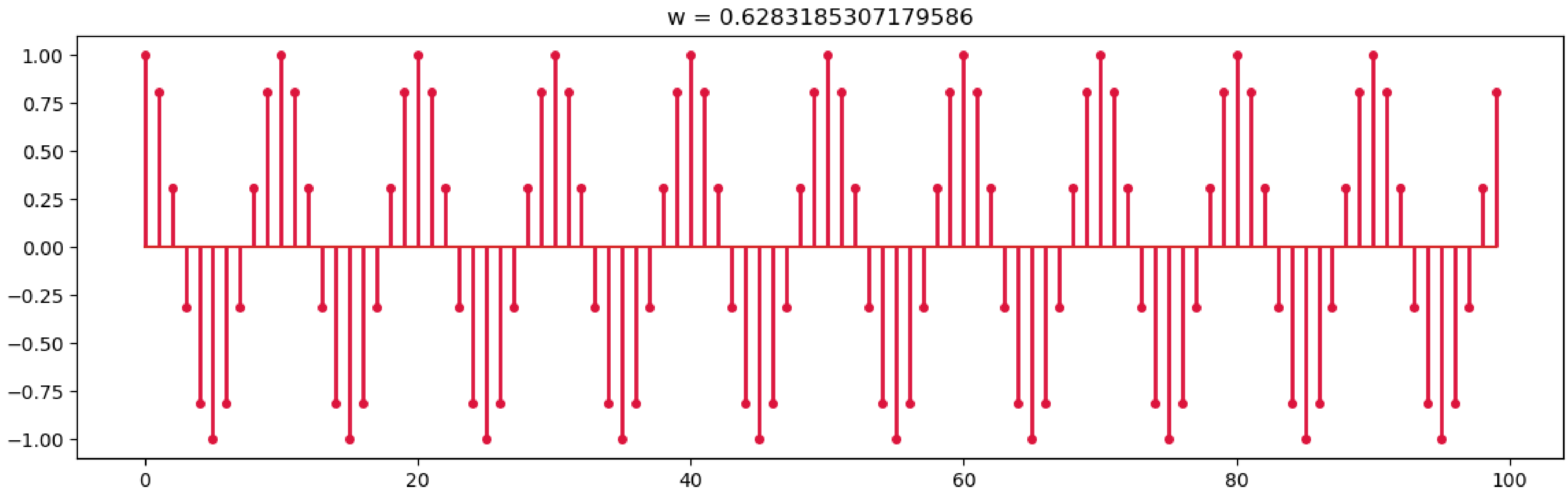
w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*



La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto
  3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 [0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]

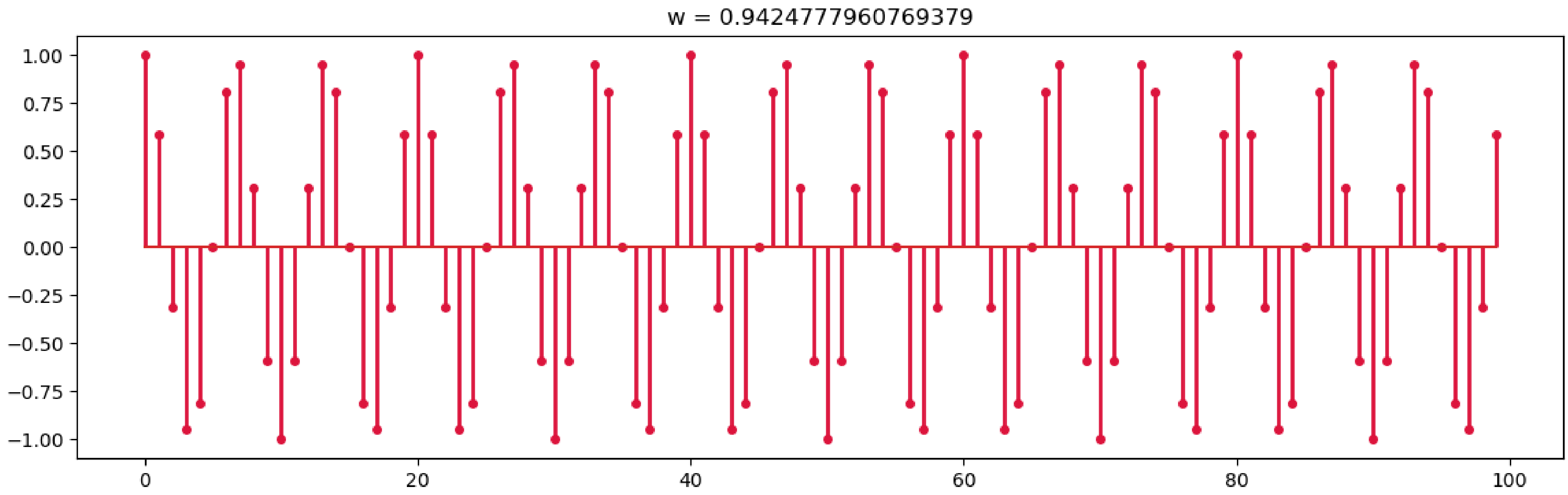


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 [0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]

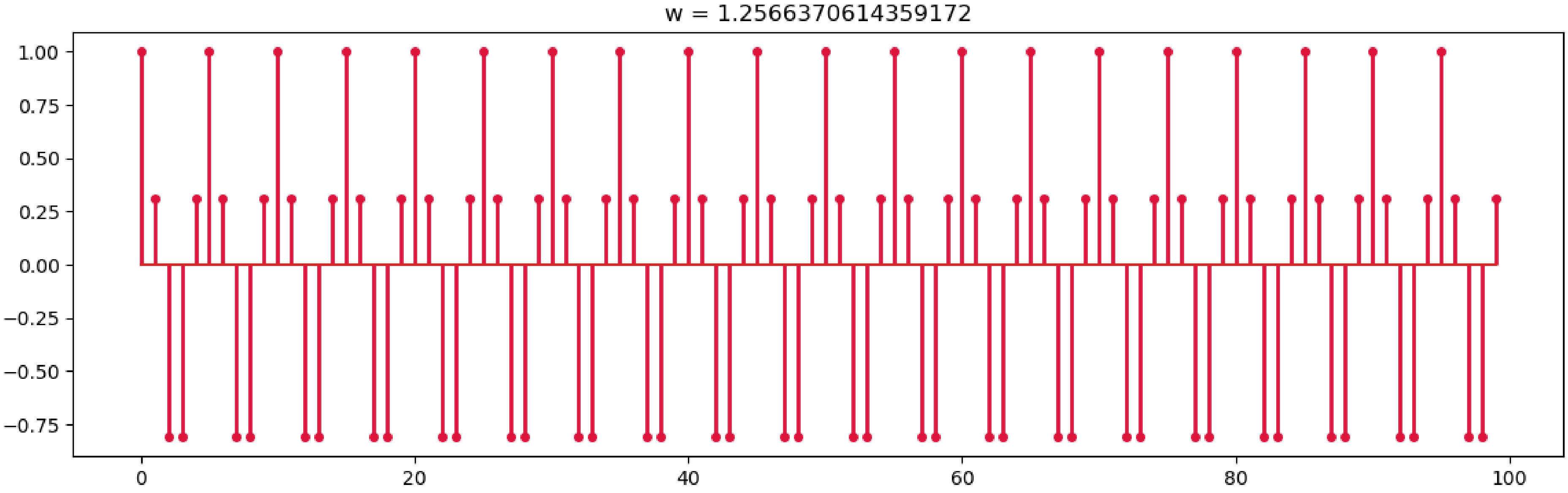


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

  3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

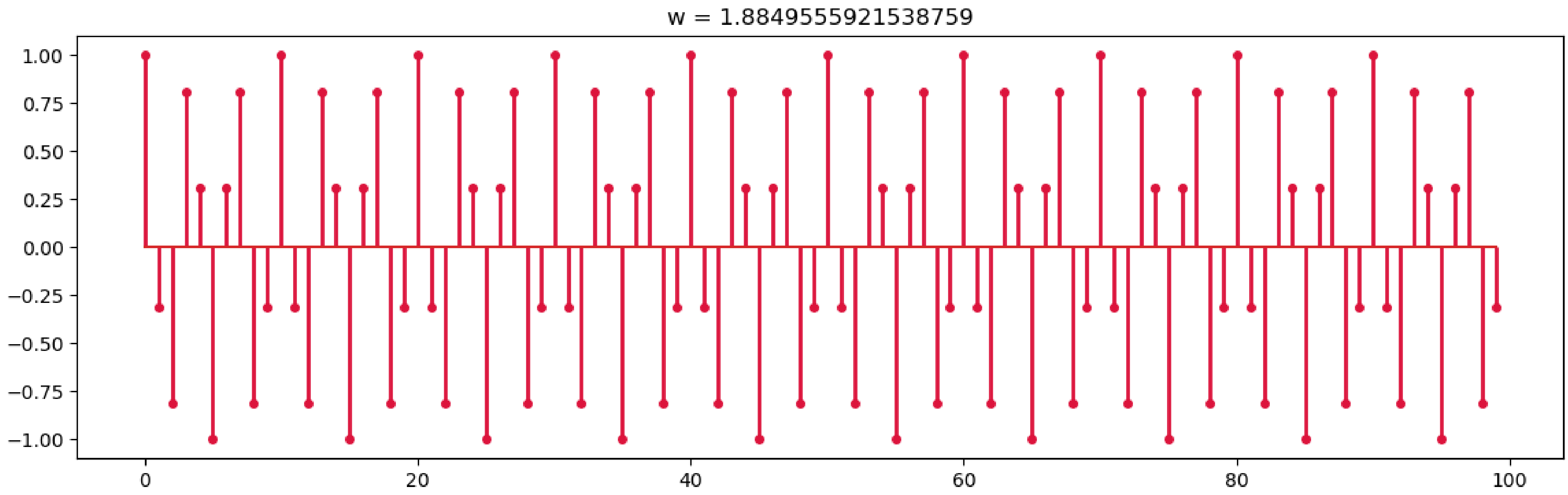


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

  3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

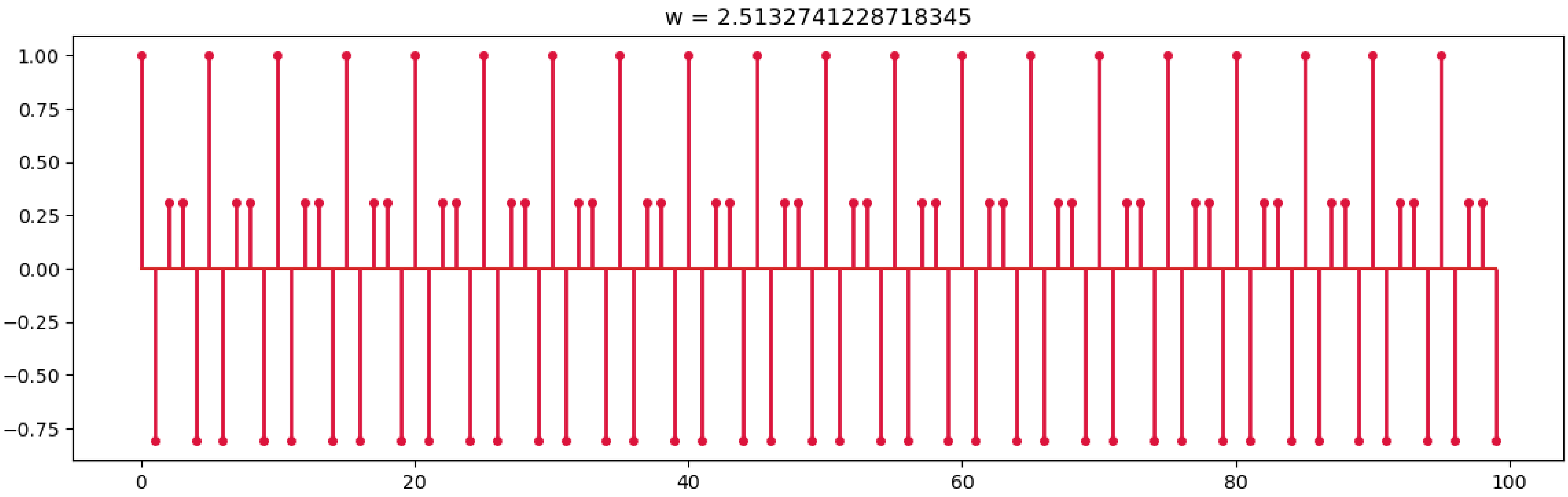


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

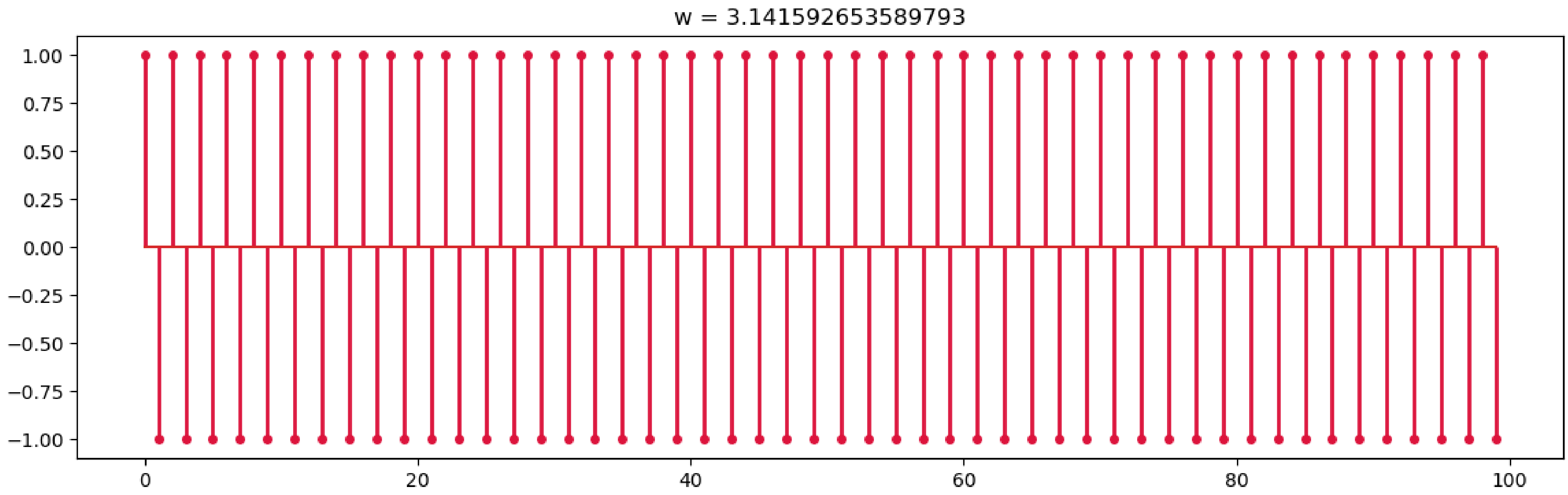


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

  3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\boldsymbol{\omega_o}| = \boldsymbol{\pi}$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

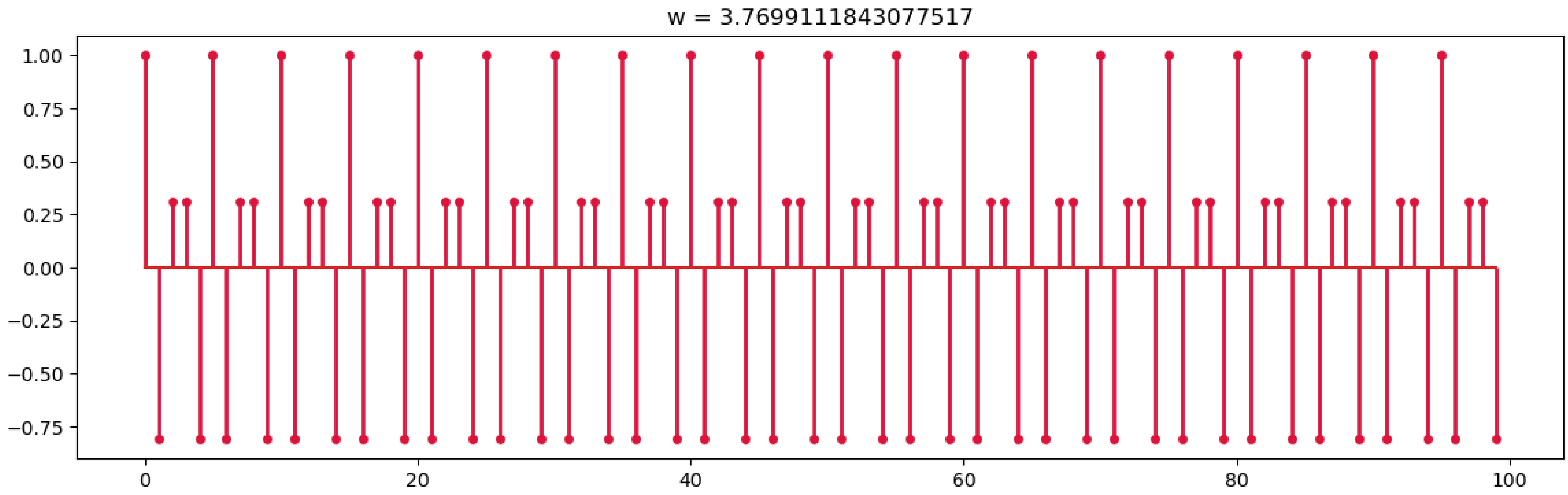


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

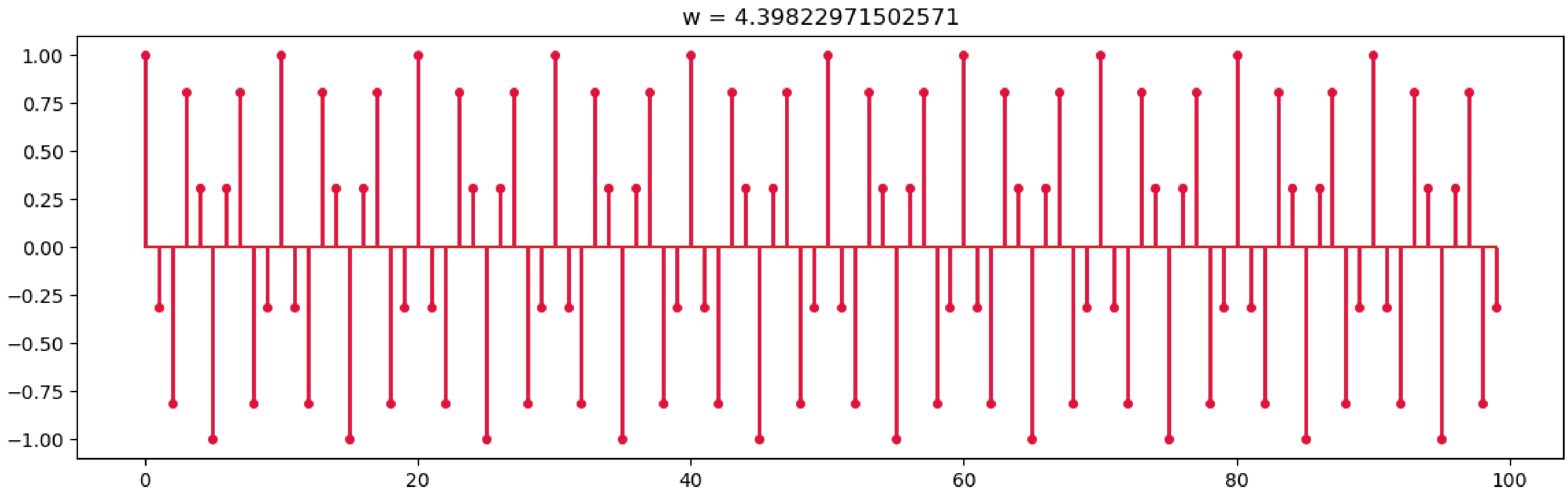


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

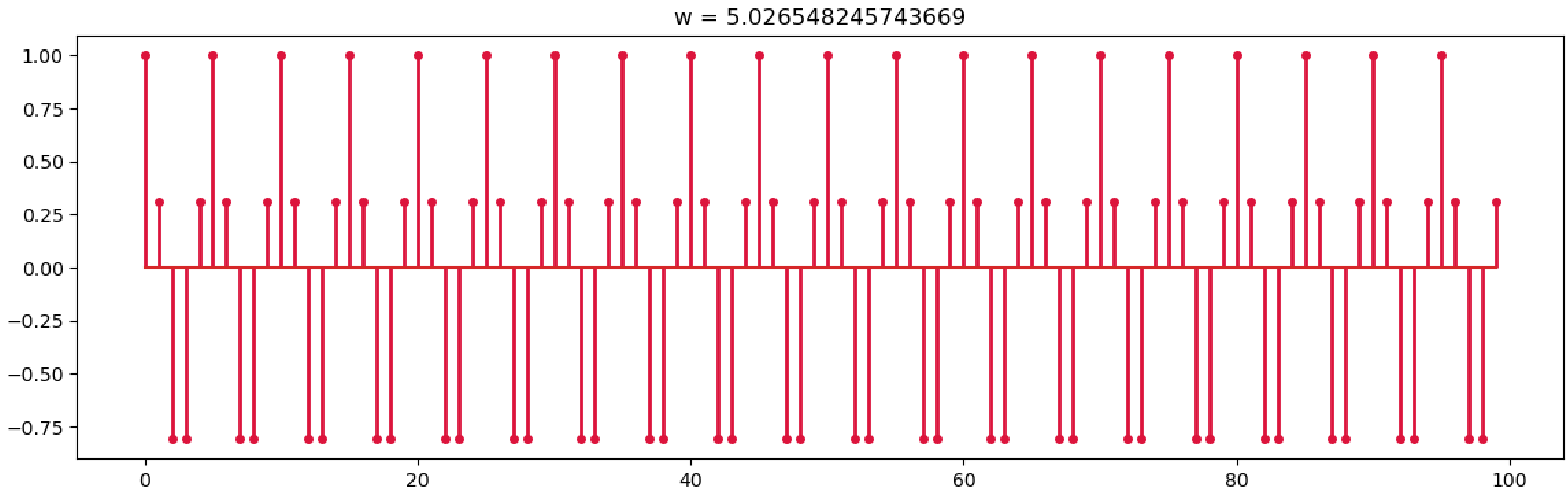


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\boldsymbol{\omega_o}| = \boldsymbol{\pi}$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

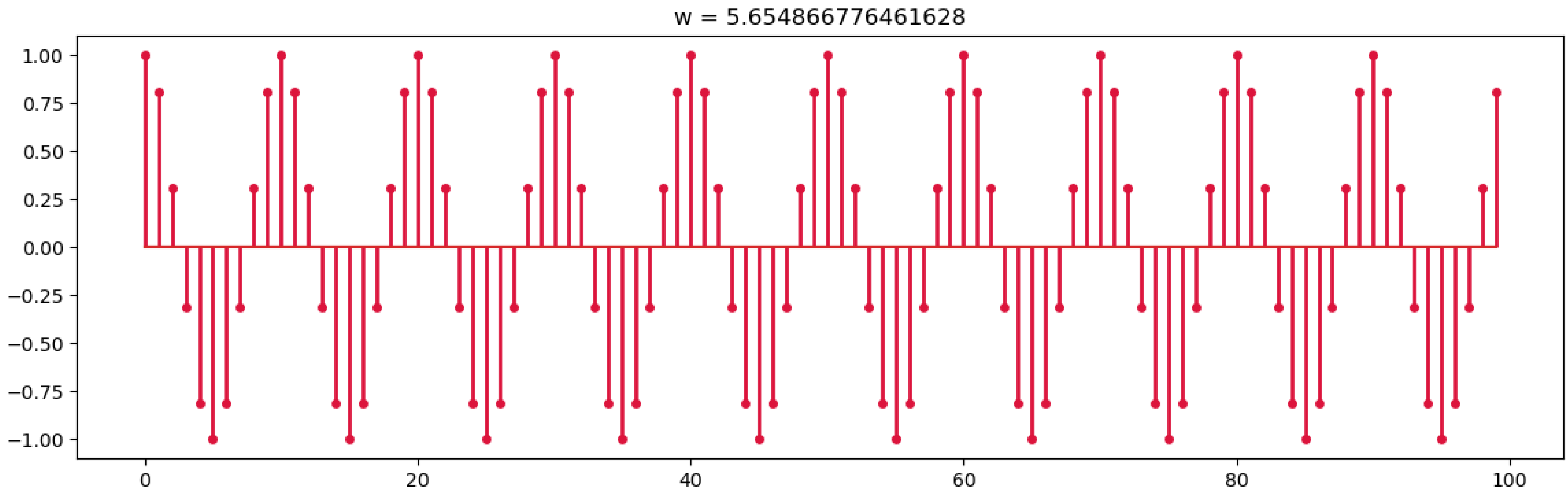


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

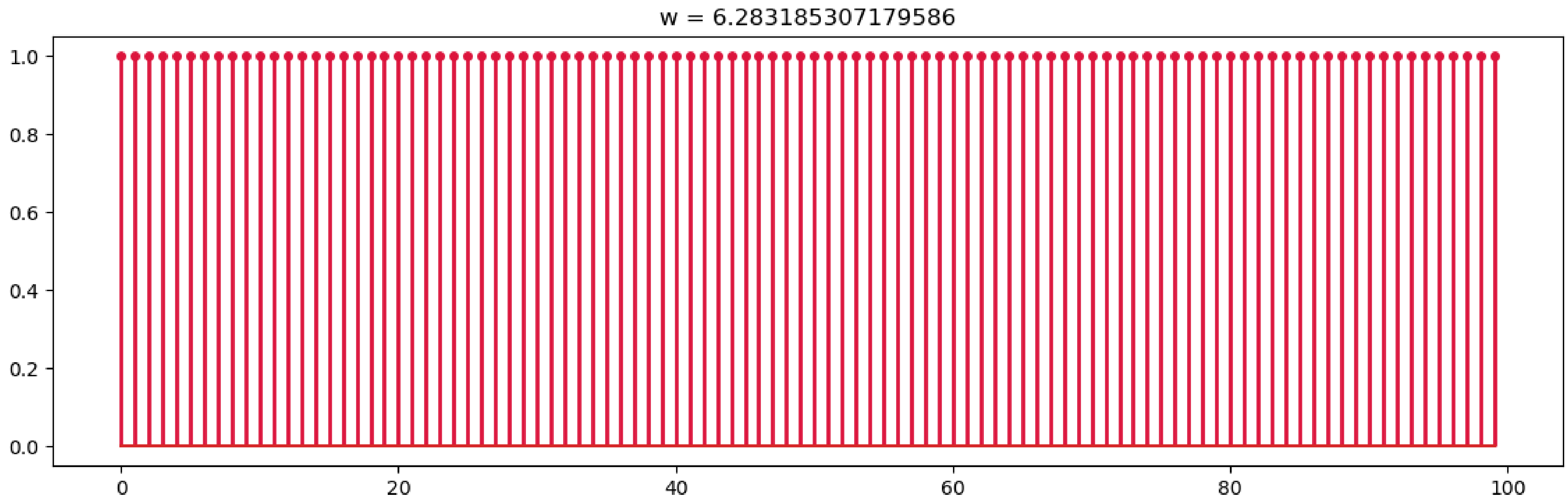


La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

  3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

  w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*



La frecuencia en las señales

- Señales sinusoidales en tiempo discreto

  3. **La mayor tasa de oscilación de una sinusoide en tiempo discreto es $|\omega_o| = \pi$** (equivalente a $|f_0| = 1/2$)

w_0 *[0, 0.1π, 0.2π, 0.3π, 0.4π, 0.6π, 0.8π, π, 1.2π, 1.4π, 1.6π, 1.8π, 2π]*

w = 0	max_oscilacion = 0
w = 0.3141592653589793	max_oscilacion = 0.3090169943749493
w = 0.6283185307179586	max_oscilacion = 0.6180339887498982
w = 0.9424777960769379	max_oscilacion = 0.8968022466674261
w = 1.2566370614359172	max_oscilacion = 1.1180339887499033
w = 1.8849555921538759	max_oscilacion = 1.6180339887499011
w = 2.5132741228718345	max_oscilacion = 1.8090169943749603
w = 3.141592653589793	max_oscilacion = 2.0
w = 3.7699111843077517	max_oscilacion = 1.809016994374966
w = 4.39822971502571	max_oscilacion = 1.6180339887498971
w = 5.026548245743669	max_oscilacion = 1.118033988749929
w = 5.654866776461628	max_oscilacion = 0.6180339887499458
w = 6.283185307179586	max_oscilacion = 0

Ejercicios

- Determina si las siguientes señales discretas son periódicas
  - $\cos(0.01\pi n)$
  - $\cos(5n)$
  - $\cos(3\pi n)$
  - $3\cos(5n + \pi/6)$

Revisión de números complejos

- Un **número complejo z** es un par ordenado de números reales $z = (x, y)$, donde $x = \Re e(z)$ mientras que $y = \Im m(z)$
- Lo representaremos como

  $z = x + yj \qquad j = \sqrt{-1}$

- Operaciones básicas en forma binómica
  - Suma y resta

    $(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$

    $(a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j$

  - Multiplicación: producto de binomios

    $j^2 = -1$

    Ejemplo: $(5 + 2j) * (2 - 3j) = 10 - 15j + 4j - 6j^2 = 16 - 11j$

Revisión de números complejos

- Operaciones básicas en forma binómica
  - División
    - Se realizan multiplicando tanto el numerador como el denominador por el **conjugado** del denominador;
    - El conjugado de *(a + bj)* es *(a - bj)*

$$\frac{(a+bj)}{(c+dj)} = \frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)}$$

  - Potencia

$j^0 = 1$ $\quad j^1 = j$ $\quad j^2 = -1$

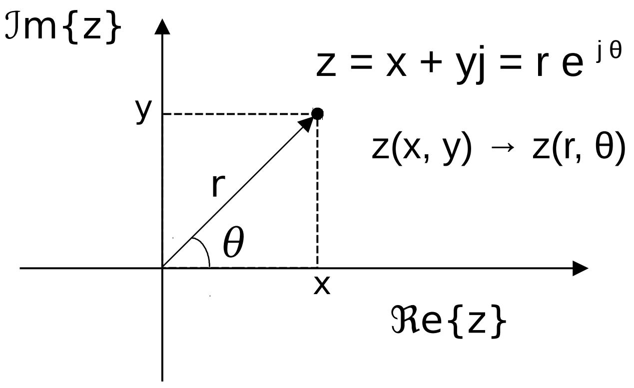
$j^3 = -j$ $\quad j^4 = 1$ $\quad j^5 = j$ $\quad \ldots$

$(a + bj)^2 = (a + bj)\ (a + bj) = a^2 - b^2 + 2abj$

$(a + bj)^3 = (a + bj)\ (a + bj)^2 = \ldots$

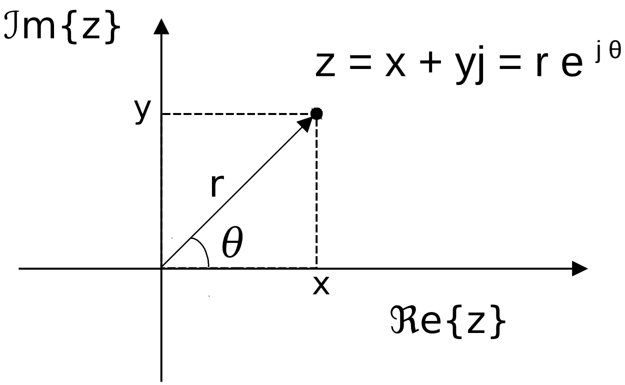
Revisión de números complejos

- La representación de los números complejos en el **plano complejo** nos permite emplear una interpretación geométrica de éstos como si fuesen vectores



Revisión de números complejos

- En el plano complejo utilizamos indistintamente la representación en forma cartesiana o en forma polar



z(x, y) → z(r, θ)

$$|z| = r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$\theta = \mathrm{atan}(y/x)$$

z(r, θ) → z(x, y)

$$x = r \cos(\theta)$$
$$y = r \sin(\theta)$$

Revisión de números complejos

- Señales sinusoidales como exponenciales complejas
- Fórmula de Euler
  - Nos permite expresar una exponencial compleja como

    $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

  - El par $(\cos\theta, \sin\theta)$ permite representar cualquier punto en un círculo de radio 1
  - Generalizando la fórmula tenemos

    $z = r\, e^{j\theta} = r \cos(\theta) + j\, r \sin(\theta)$

- Otras expresiones interesantes

  $\cos(\theta) = (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) / 2$

  $\sin(\theta) = (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) / 2j$

Revisión de números complejos

- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - Podemos expresar una exponencial compleja en tiempo continuo como

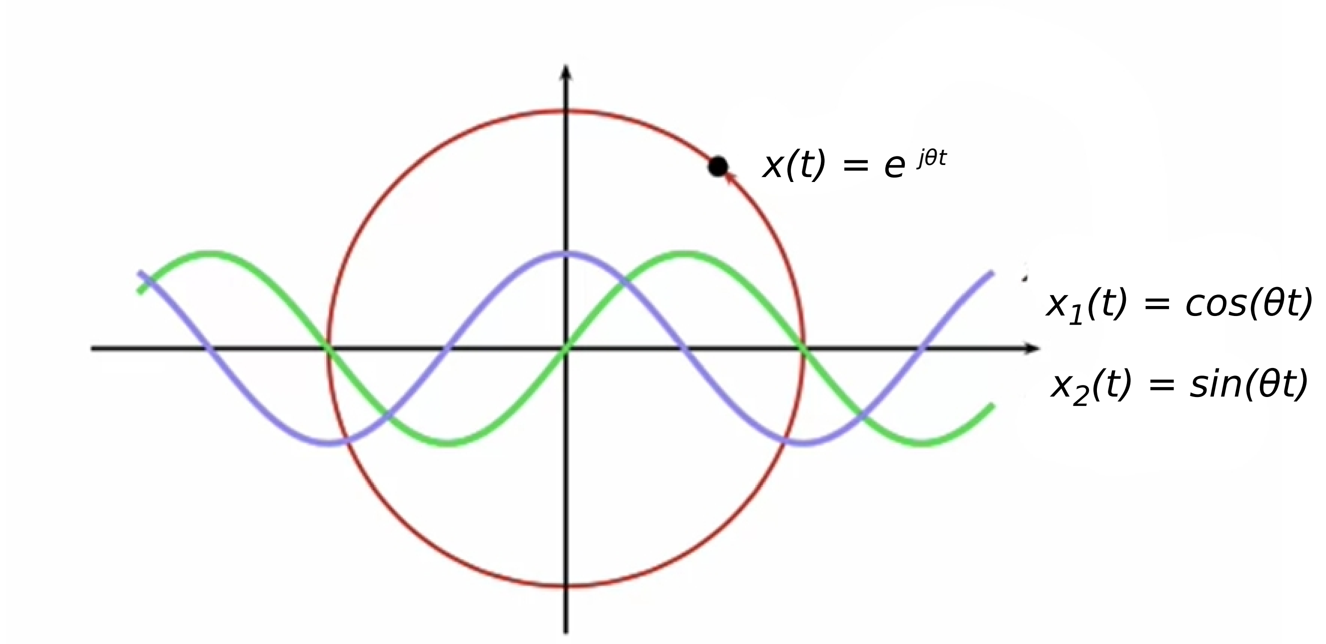
    $$x(t) = A\, e^{\,j(\Omega t + \Phi)}$$

    $$x(t) = A \cos(\Omega t + \Phi) + j\, A \sin(\Omega t + \Phi)$$

  - La exponencial compleja introduce un **factor *oscilante*** *(una oscilación de manera sinusoidal)* en la función original
    - Una oscilación es el resultado de una rotación dentro del plano complejo
    - Nos enfocamos en el término real de la función
      - La proyección de la función en el eje real

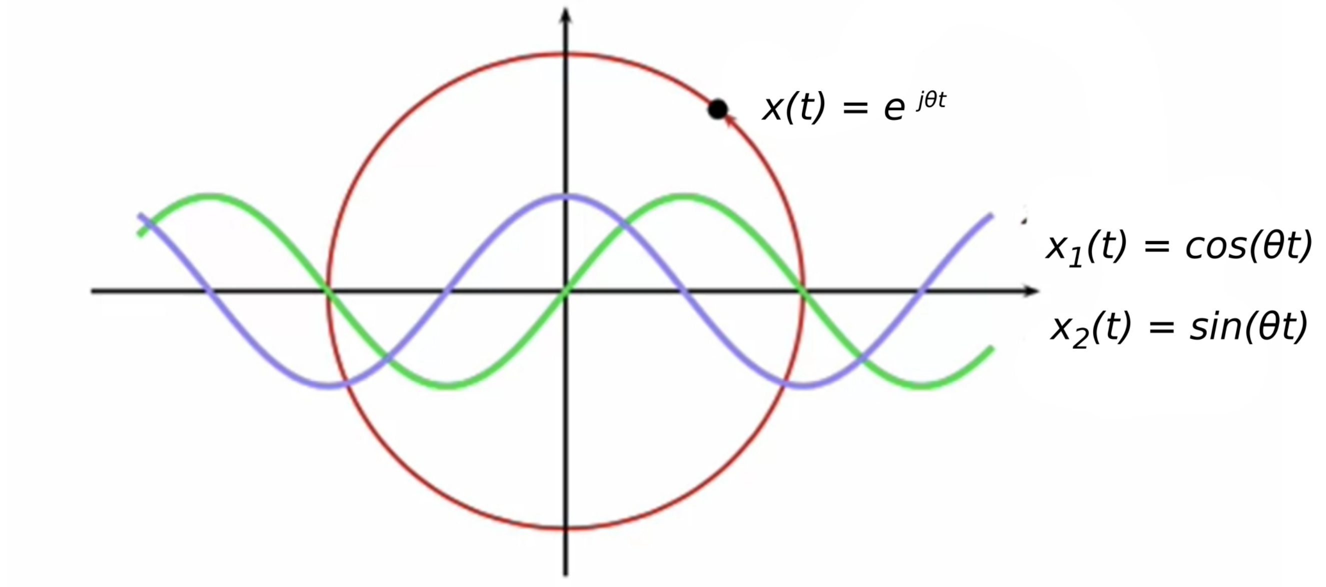
La frecuencia en las señales

- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - Una oscilación es el producto de una rotación dentro del plano complejo



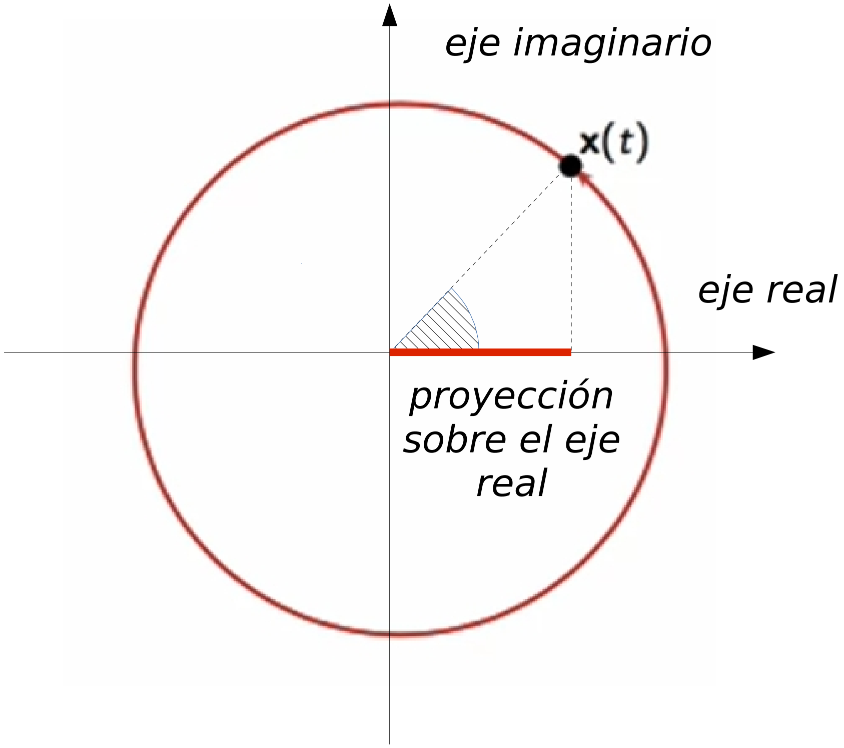
La frecuencia en las señales

- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - Podríamos describir la **posición** a lo largo del tiempo como un número complejo **empleando una exponencial compleja**
  - Con la **fórmula de Euler** vamos a poder relacionar el seno y el coseno



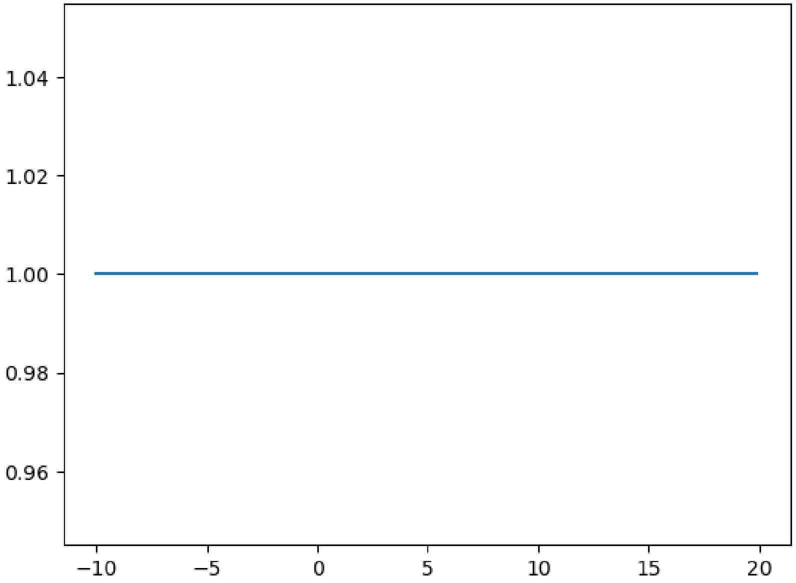
La frecuencia en las señales

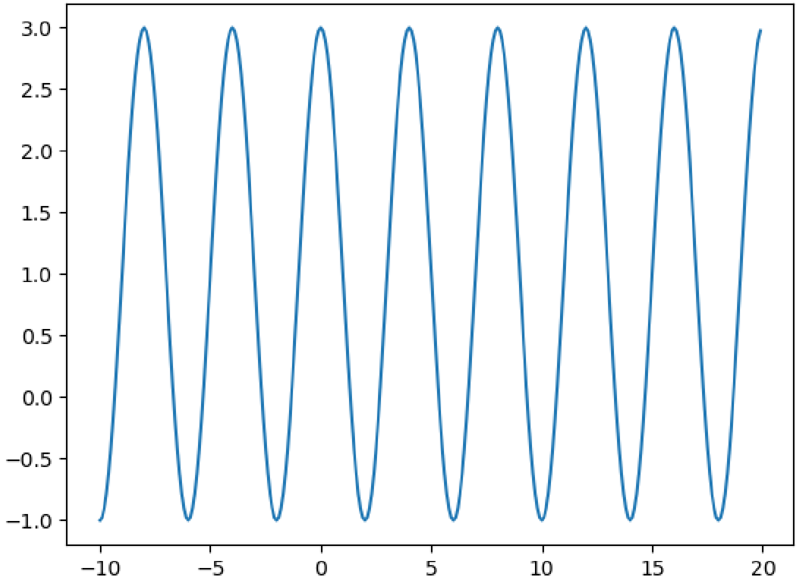
- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - Parte real: la proyección de la función en el eje real



La frecuencia en las señales

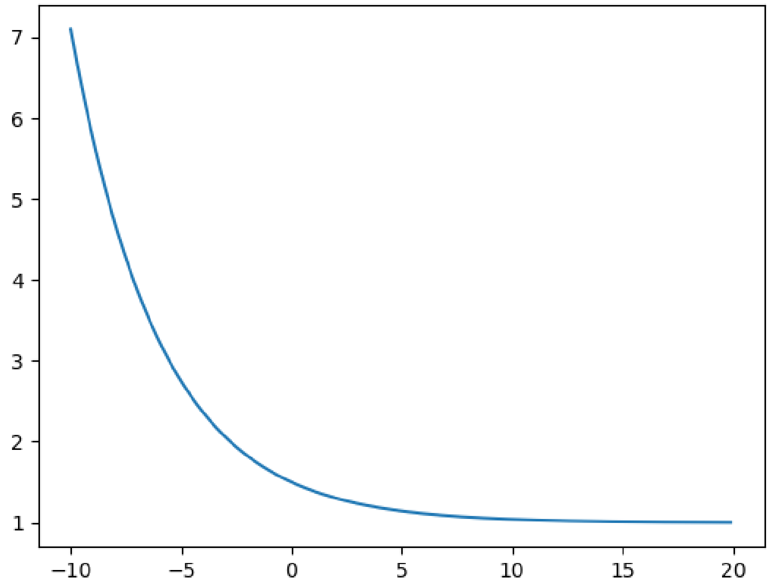
- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - Parte real: la proyección de la función en el eje real
    - $x(t) = A$
    - $x(t) = A\, e^{j\theta t}$

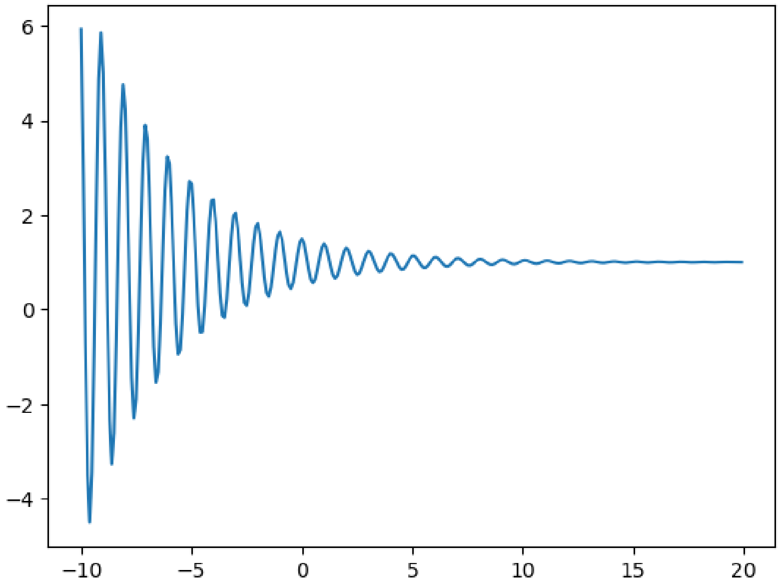




La frecuencia en las señales

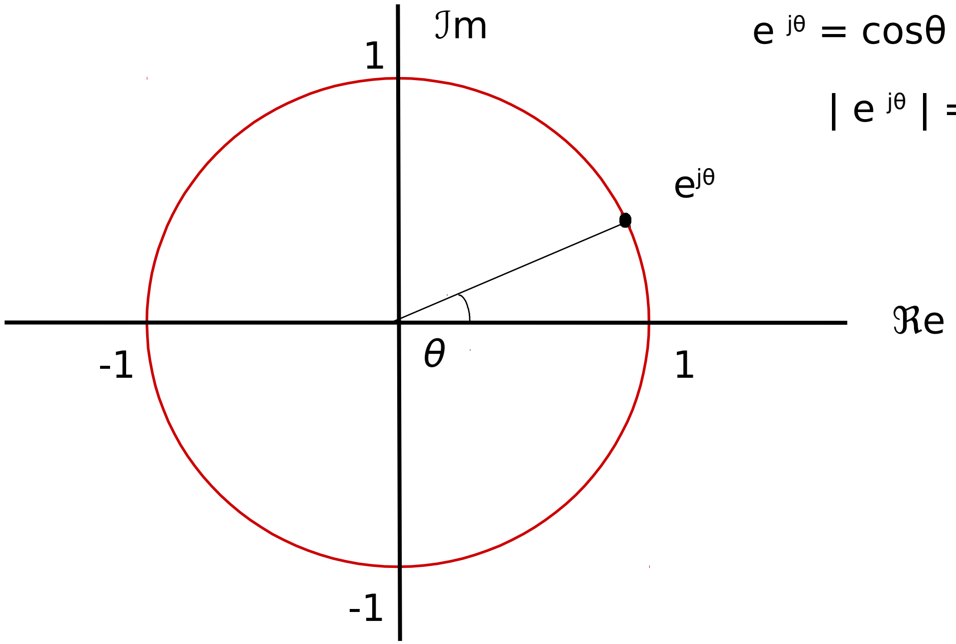
- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - Parte real: la proyección de la función en el eje real
    - $x(t) = A\ \alpha^t$
    - $x(t) = A\ \alpha^t\ e^{\ j\theta t}$





La frecuencia en las señales

- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - En resumen, utilizamos la multiplicación por una exponencial compleja para rotar la función en el plano complejo

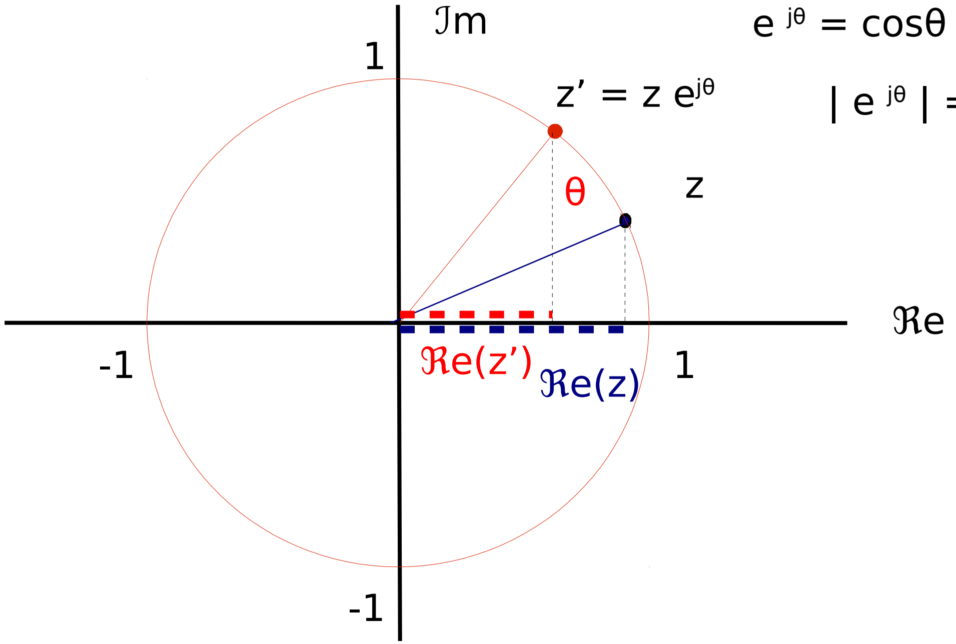


$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$$

$$| e^{j\theta} | = 1$$

La frecuencia en las señales

- Exponenciales complejas en tiempo continuo
  - En resumen, utilizamos la multiplicación por una exponencial compleja para rotar la función en el plano complejo



$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$

$| e^{j\theta} | = 1$

La frecuencia en las señales

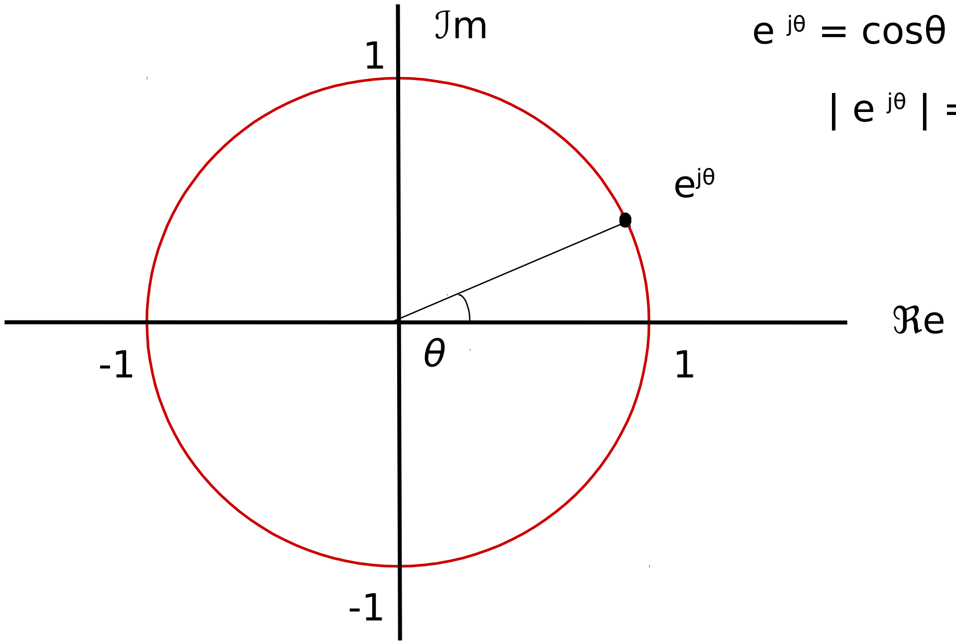
- Exponenciales complejas en tiempo discreto

$$x[n] = A\, e^{\,j(\omega n+\Phi)} = A(\cos(\omega n+\Phi) + j\,\sin(\omega n+\Phi))$$

  - **A** es la amplitud
  - ***ω*** es la frecuencia en radianes por segundo
  - ***Φ*** es la fase inicial en radianes

La frecuencia en las señales

- Exponenciales complejas en tiempo discreto
  - También en tiempo discreto utilizamos la multiplicación por una exponencial compleja para rotar la función en el plano complejo

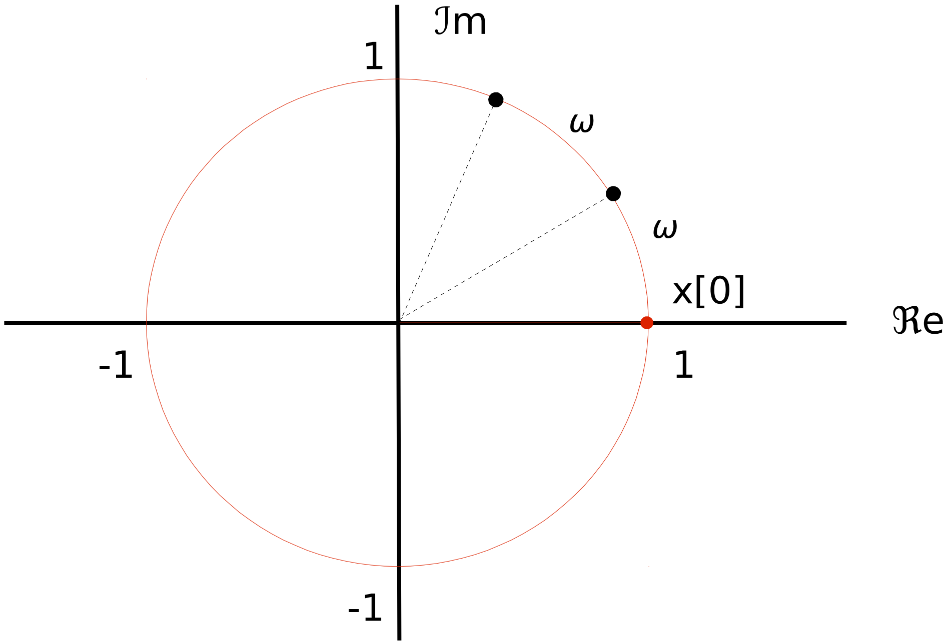


$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$|e^{j\theta}| = 1$$

La frecuencia en las señales

- Exponenciales complejas en tiempo discreto
  - La rotación va generando los valores de la función discreta
    - $x[n] = e^{j\omega n}$
    - $x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$



Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

- Conjuntos de exponenciales complejas (o sinusoides) periódicas que son múltiplos de una misma frecuencia positiva
- Exponenciales continuas en el tiempo

  $s_k(t) = e^{jk\Omega t} = e^{jk2\pi F_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$

  - Para cada ***k***, $s_k(t)$ es periódica con frecuencia fundamental kF_0
  - Para cada ***k***, $s_k(t)$ es periódica con período fundamental $1/kF_0 = T_0/k$
  - Para cualquier entero positivo ***k***, todas las $s_k(t)$ tienen un período común (no fundamental) igual a T_0
  - *F0* puede tomar cualquier valor, por lo que todos los miembros del conjunto son distintos. Si $k_1 \neq k_2 \rightarrow s_{k_1} \neq s_{k_2}$

Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

- Conjuntos de exponenciales complejas (o sinusoides) periódicas que son múltiplos de una misma frecuencia positiva
- Exponenciales continuas en el tiempo
  - A partir de estas señales básicas podemos construir una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\Omega t}$$

  - Esta representación se denomina **expansión de la serie de Fourier** de *x(t)*
  - *x(t)* es una señal periódica de período fundamental $T_0 = 1/F_0$
  - c_k son constantes complejas arbitrarias, los **coeficientes** de la serie de Fourier
  - La señal $s_k(t)$ es el **armónico k-ésimo** de *x(t)*

Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

- Conjuntos de exponenciales complejas (o sinusoides) periódicas que son múltiplos de una misma frecuencia positiva
- Exponenciales discretas en el tiempo
  - En este caso una exponencial compleja sólo es periódica si su frecuencia es un número racional
  - Seleccionamos como frecuencia $f_0=1/N$, siendo N el período fundamental

$$s_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk2\pi f_0 n} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  - Número de exponenciales complejas periódicas está limitado a N

$$s_{k+N}[n] = e^{j(k+N)2\pi(1/N)n} = e^{(j2\pi n(k+N))/N} = e^{j2\pi n}\, s_k[n] = s_k[n]$$

Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

- Conjuntos de exponenciales complejas (o sinusoides) periódicas que son múltiplos de una misma frecuencia positiva
- Exponenciales discretas en el tiempo

$$s_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk2\pi f_0 n} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  - Todos las señales del conjunto tienen un período común N
  - Podemos escoger para formar el conjunto N exponenciales complejas consecutivas, es decir, desde $k = n_0$ hasta $k = n_0 + N - 1$
  - Podemos crear una combinación lineal con el conjunto de exponenciales complejas armónicamente relacionadas

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, s_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j2\pi kn/N}$$

Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

- Conjuntos de exponenciales complejas (o sinusoides) periódicas que son múltiplos de una misma frecuencia positiva
- Exponenciales discretas en el tiempo

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, s_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{j 2\pi k n / N}$$

  - El resultado es una señal de período fundamental N
  - Se trata de la representación de la **serie de Fourier de una secuencia periódica discreta** en el tiempo
  - c_k son los **coeficientes** de Fourier
  - La secuencia $s_k[n]$ es el **armónico k-ésimo**