

-- CONVOLUCIÓN

--
La convolución es una operación que nos permite conocer la respuesta $y[n]$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo a una señal de entrada arbitraria $x[n]$, a partir del conocimiento de la respuesta del mismo sistema a una señal de entrada básica, el impulso:

$x[n] \rightarrow \text{sistema LIT} \rightarrow y[n]$
donde
 $y[n] = T\{x[n]\}$

La función $h[n]$ es el resultado de usar impulso como función de entrada:

$h[n] = T\{\delta[n]\}$

A partir de $h[n]$ podemos calcular la respuesta a cualquier señal $x[n]$ usando la operación de convolución

$y[n] = x[n] * h[n]$

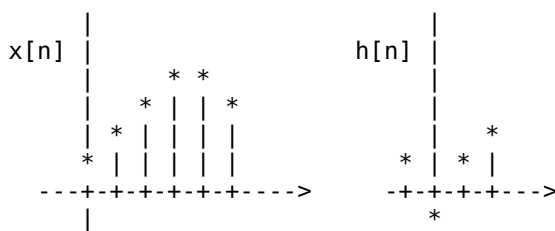
Definición matemática de la operación de convolución:

$x[n] * h[n] = \text{sumatorio}(\text{desde } k=-\infty; \text{ hasta } \infty; x[k]h[n-k])$

Datos

Vamos a particularizar a señales concretas para hacerlo más sencillo:

$x[n] = [\underline{1}, 2, 3, 4, 4, 3]$
 $h[n] = [1, \underline{-1}, 1, 2]$



Fíjate que la señal $x[n]$ comienza en $n=0$ y la señal $h[n]$ en $n=-1$.

Comentarios

Por limitaciones con el formato de texto, estoy indicando dónde empieza cada señal usando subrayados.

Método 1 ("método gráfico")

En este método para calcular la convolución $x[n]*h[n]$ vamos a hacer uso de las propiedades de los sistemas LIT para reducir las operaciones que se deben realizar:

1. El sistema es lineal

Eso significa que, si la señal es una combinación lineal, la salida será la suma escalada de los términos de la combinación lineal. Es decir,

para

$$x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$$

obtenemos

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

2. El sistema es invariante en el tiempo

Eso significa que si conocemos la respuesta del sistema a una señal de entrada, la respuesta del sistema a la misma señal de entrada desplazada es la respuesta original desplazada la misma cantidad. Es decir,

si tenemos

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

también se cumple, para todo valor i ,

$$T\{x[n-i]\} = y[n-i]$$

3. La señal de entrada es una combinación lineal de impulsos

$$x[n] = 1*\delta[n] + 2*\delta[n-1] + 3*\delta[n-2] + 4*\delta[n-3] + 4*\delta[n-4] + 3*\delta[n-5]$$

Juntando estas tres propiedades, tratamos de calcular la respuesta del sistema a la señal $x[n]$:

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

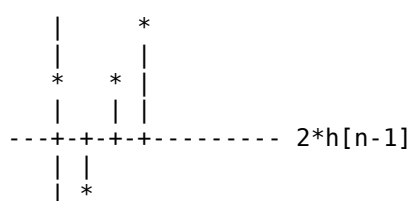
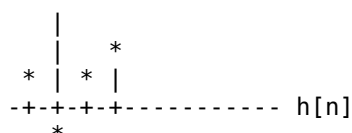
$$= T\{1*\delta[n] + 2*\delta[n-1] + 3*\delta[n-2] + 4*\delta[n-3] + 4*\delta[n-4] + 3*\delta[n-5]\}$$

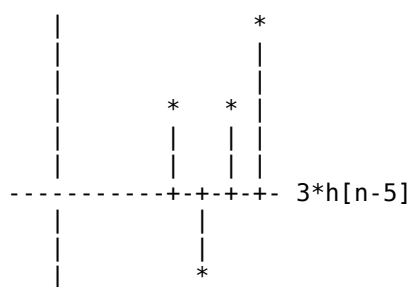
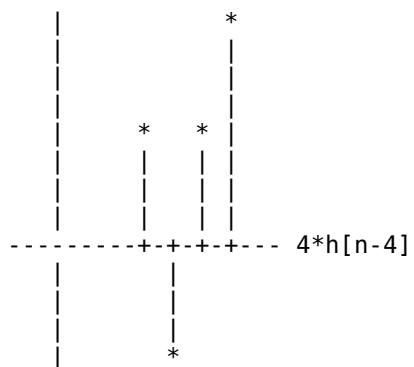
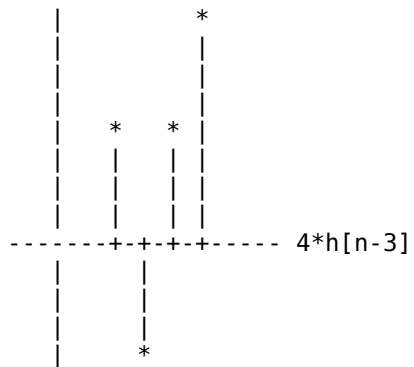
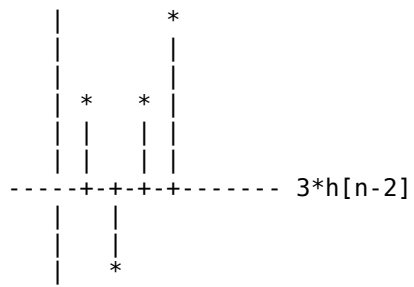
$$= 1*T\{\delta[n]\} + 2*T\{\delta[n-1]\} + 3*T\{\delta[n-2]\} + 4*T\{\delta[n-3]\} + 4*T\{\delta[n-4]\} + 3*T\{\delta[n-5]\}$$

Conocemos el valor de $T\{\delta[n]\}$, que es $h[n]$ por definición, y por tanto también el valor de $T\{\delta[n-i]\}$, que es $h[n-i]$. De esta manera la salida se convierte en una suma de funciones $h[n]$ desplazadas y reescaladas:

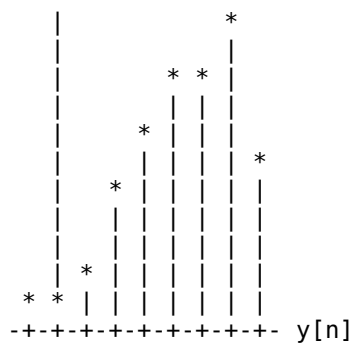
$$y[n] = 1*h[n] + 2*h[n-1] + 3*h[n-2] + 4*h[n-3] + 4*h[n-4] + 3*h[n-5]$$

Gráficamente,





Suma total (y, por tanto, el resultado de la convolución):



$y[n] = [1, \text{_1_}, 2, 5, 7, 9, 9, 11, 6]$
 donde
 $-1 \leq n \leq 7$

Los límites de la convolución van desde $n=-1$ hasta $n=7$.

Se podían haber calculado previamente, porque los límites van desde (límite inferior de $x[n]$ + límite inferior de $h[n]$) hasta (límite superior de $x[n]$ + límite superior de $h[n]$), es decir, desde $(0 + -1 = -1)$ hasta $(5 + 2 = 7)$.

Método 2 ("método analítico")

En este método para calcular la convolución $x[n]*h[n]$ vamos utilizar directamente la definición matemática de la operación:

$$y[n] = x[n]*h[n] = \text{sumatorio}(\text{desde } k=-\infty; \text{ hasta } \infty; x[k]h[n-k])$$

Como sabemos que $x[n]$ está definido entre $n=0$ y $n=5$, el sumatorio queda reducido a los valores $0 \leq k \leq 5$.

Como sabemos los límites de la convolución (desde $\text{límite_inferior}(x) + \text{límite_inferior}(h)$ hasta $\text{límite_superior}(x) + \text{límite_superior}(h)$), podemos limitar también los valores de n : $-1 \leq n \leq 7$

Expresamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y[-1] &= x[0]h[-1-0] + x[1]h[-1-1] + x[2]h[-1-2] + x[3]h[-1-3] + \\ &\quad x[4]h[-1-4] + x[5]h[-1-5] \\ y[0] &= x[0]h[0-0] + x[1]h[0-1] + x[2]h[0-2] + x[3]h[0-3] + \\ &\quad x[4]h[0-4] + x[5]h[0-5] \\ y[1] &= x[0]h[1-0] + x[1]h[1-1] + x[2]h[1-2] + x[3]h[1-3] + \\ &\quad x[4]h[1-4] + x[5]h[1-5] \\ y[2] &= x[0]h[2-0] + x[1]h[2-1] + x[2]h[2-2] + x[3]h[2-3] + \\ &\quad x[4]h[2-4] + x[5]h[2-5] \\ y[3] &= x[0]h[3-0] + x[1]h[3-1] + x[2]h[3-2] + x[3]h[3-3] + \\ &\quad x[4]h[3-4] + x[5]h[3-5] \\ y[4] &= x[0]h[4-0] + x[1]h[4-1] + x[2]h[4-2] + x[3]h[4-3] + \\ &\quad x[4]h[4-4] + x[5]h[4-5] \\ y[5] &= x[0]h[5-0] + x[1]h[5-1] + x[2]h[5-2] + x[3]h[5-3] + \\ &\quad x[4]h[5-4] + x[5]h[5-5] \end{aligned}$$

Como sabemos que $h[n]$ sólo está definido en $-1 \leq n \leq 2$ podemos eliminar un montón de términos de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y[-1] &= x[0]h[-1-0] \\ y[0] &= x[0]h[0-0] + x[1]h[0-1] \\ y[1] &= x[0]h[1-0] + x[1]h[1-1] + x[2]h[1-2] \\ y[2] &= x[0]h[2-0] + x[1]h[2-1] + x[2]h[2-2] + x[3]h[2-3] \\ y[3] &= x[1]h[3-1] + x[2]h[3-2] + x[3]h[3-3] + x[4]h[3-4] \\ y[4] &= x[2]h[4-2] + x[3]h[4-3] + x[4]h[4-4] + x[5]h[4-5] \\ y[5] &= x[3]h[5-3] + x[4]h[5-4] + x[5]h[5-5] \end{aligned}$$

Por tanto el resultado de la convolución es,

$$\begin{aligned} y[n] &= [1*1, (1*-1 + 2*1), (1*1 + 2*-1 + 3*1), \dots] \\ &= [1, -1, 2, 5, 7, 9, 9, 11, 6] \\ \text{donde} \\ &-1 \leq n \leq 7 \end{aligned}$$

Método 3 ("método h reflejada")

--

En este método para calcular la convolución $x[n]*h[n]$ vamos a cambiar ligeramente la definición matemática de la operación:

$$y[n] = x[n]*h[n] = \text{sumatorio}(\text{desde } k=-\infty; \text{ hasta } \infty; x[k]h[n-k])$$

Definimos $hr[n]$ como la reflexión de $h[n]$.

$$\begin{aligned} h &= [1, _1_, 1, 2] \\ hr &= [2, 1, _1_, 1] \end{aligned}$$

Por definición de lo que es la reflexión, se cumple que $h[n] = hr[-n]$.

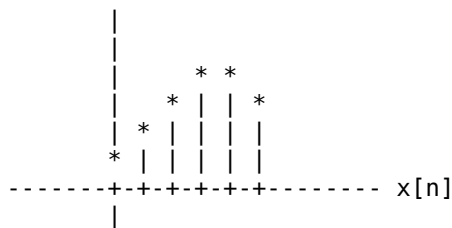
Reescribimos la ecuación:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n]*h[n] = x[n]*hr[-n] \\ &= \text{sumatorio}(\text{desde } k=-\infty; \text{ hasta } \infty; x[k]hr[-(n-k)]) \\ &= \text{sumatorio}(\text{desde } k=-\infty; \text{ hasta } \infty; x[k]hr[k-n]) \end{aligned}$$

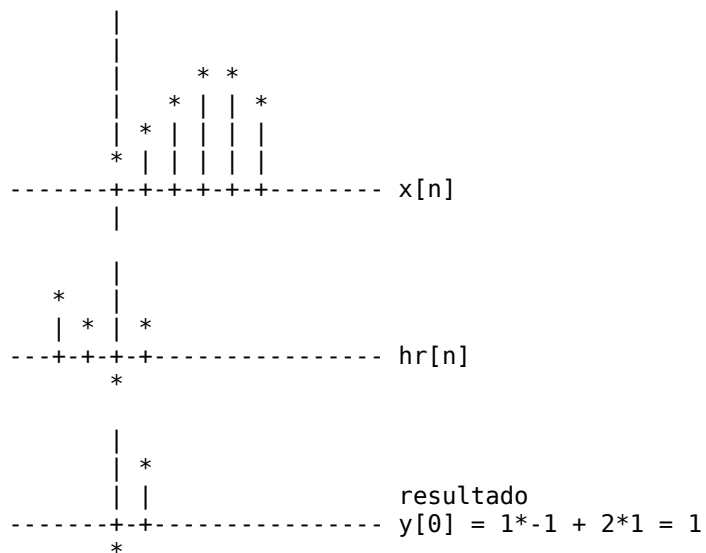
Tal como está expresado el sumatorio, ahora se puede entender como una multiplicación escalar de los vectores: $x[k]$ y $hr[k-n]$. La representación gráfica de esta operación es simplemente una señal móvil que se va desplazando por encima de la otra señal y en cada punto multiplicando elemento a elemento y sumando resultados parciales.

Gráficamente:

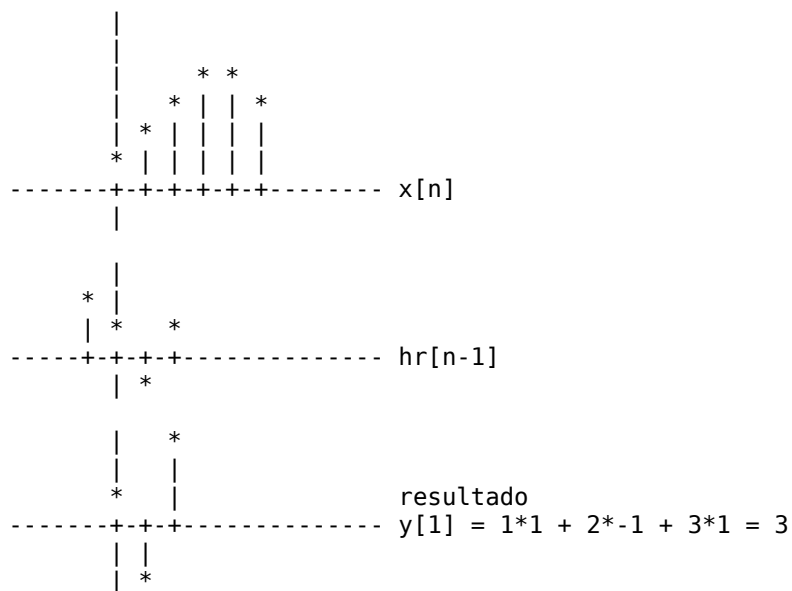
Para calcular el primer término de $y[n]$ se posiciona la señal $hr[n]$ en el punto más a la izquierda que pueda generar una multiplicación no nula. Eso supone que el último punto a la derecha de $hr[n]$ se posiciona sobre el primero punto de $x[n]$ a la izquierda; en esta posición el borde derecho de la señal $hr[]$ acaba de encontrar el borde izquierdo de la señal $x[n]$:



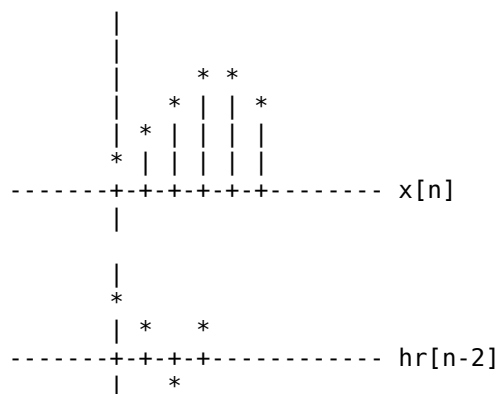
Para calcular el término $y[0]$:



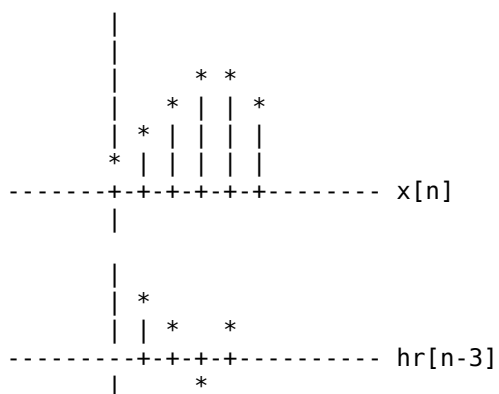
Para calcular el término $y[1]$:



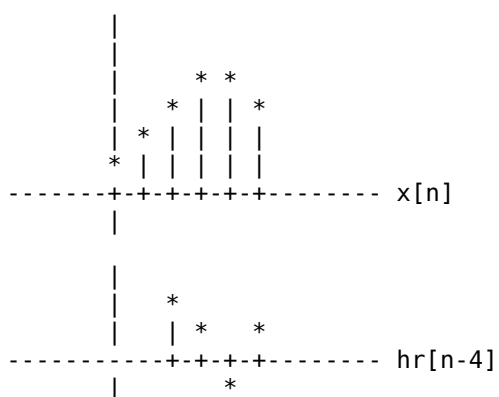
Y así sucesivamente... Para $y[2]$ multiplicamos:



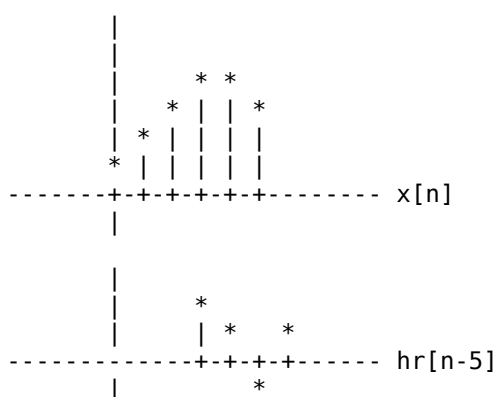
Para el término $y[3]$:



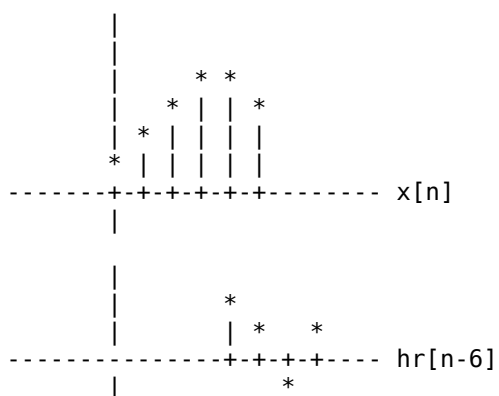
Para el término $y[4]$:



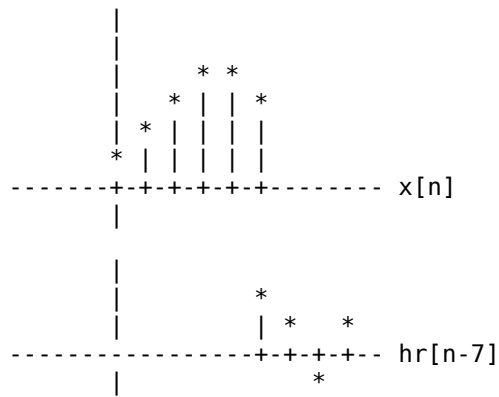
Para el término $y[5]$:



Para el término $y[6]$:



Para el término $y[7]$:



Al terminar,

$y[n] = [1, _1_, 2, 5, 7, 9, 9, 11, 6]$
 donde
 $-1 \leq n \leq 7$

Se puede observar que la señal $hr[n]$ se va deslizando sobre la señal $x[n]$ desde la izquierda de $x[n]$ hasta que desaparece por la derecha.

Se puede observar también que el valor que se está calculando en cada paso, $y[i]$ corresponde al punto donde la señal $x[n]$ está fija y $hr[n]$ está desplazado i posiciones. Es decir, que el origen de coordenadas de $hr[n]$ está desplazado a la posición i .

Comentarios

 Aunque los métodos 1 y 3 parecen bastante similares (se pueden ver gráficamente), puedes comprobar que para calcular el término i de la salida, $y[i]$, en el primer método hay que sumar los valores de múltiples gráficas; sin embargo, en el tercer método simplemente hay que desplazar $hr[n]$ a la posición i y hacer una multiplicación entre ambas señales. Decimos que en el primer caso hay una suma en "vertical" mientras que en el segundo caso hay una suma en "horizontal" (simples nombres).