# Percepción y procesado de señales

## Transformada Z

David Mera

Área de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Departamento de Electrónica y Computación

# Transformada z

- Desde el punto de vista matemático, la transformada z es simplemente **una representación alternativa de la señal**


Puntos de vista de la misma señal

# Transformada z

## La transformada z directa

- Se llama transformada z directa porque transforma la señal en el dominio del tiempo x[n] en su representación en el plano complejo
- La transformada z de una señal x[n] discreta se define como la serie de potencias:

$$\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

, donde z es una variable compleja

- El procedimiento inverso se denomina transformada z inversa
- Denotamos la transformada z de una señal: $\mathrm{X}(z) = Z\{x[n]\}$
- La relación entre x[n] y X(z) se indica como: $x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$

# Transformada z

## La transformada z directa

- La transformada z de una señal x[n] discreta se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

, donde z es una variable compleja

- Esta definición se denomina comunmente *transformada Z bilateral.*

- En contraste, la transformada Z unilateral se define como:

$$\mathbb{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Ambas coinciden si $x[n] = 0$ para $n < 0$

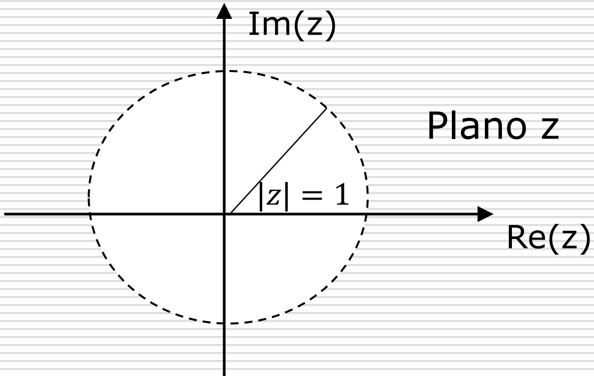
# Transformada Z

## La transformada z directa

- Es evidente que existe una estrecha relación entre la transformada de Fourier y la transformada Z

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad\qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Si sustituimos la variable compleja $z$ por la variable compleja $e^{j\omega}$, $(z = e^{j\omega})$, la transformada z se reduce a la transformada de Fourier.
  - Se restringe a la variable z para que tenga modulo la unidad ($|z| = 1$)



# Transformada z

- Si generalizamos y expresamos la variable compleja en su forma polar sin restricciones

$$z = re^{j\theta}$$

- donde $r = |z|$ es el módulo, y $\theta$ el ángulo:

$$X(z) = \mathrm{X}(re^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\theta}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}$$

- La expresión puede interpretarse como la transformada de Fourier de la secuencia original $x[n]$ por la secuencia exponencial $r^{-n}$

# Transformada z

## La transformada z directa

- Dado que la transformada z es una serie infinita de potencias, <u>solo existe para aquellos valores de z para los que la serie converge</u>

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- La región de convergencia (ROC, region of convergence) de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores de z para los que $X(z)$ toma un valor finito
- **Siempre que hablemos de una transformada z debemos indicar su ROC**
- Si $X(z)$ no converge en la región $|z| = 1$, la transformada de Fourier no existe

# Transformada z

- La transformada z directa.
  - Ejemplo: Determina la transformada z de x[n]:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n]=\{2,4,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\} \xleftrightarrow{z} X(z)=2z^{2}+4z+5+7z^{-1}+z^{-3}$$

ROC: todo el plano z excepto $z = 0$ y $z = \infty$

# Ejercicios

- Obtener la transformada z de las siguientes señales:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

1. $x_1[n]=\{\underset{\uparrow}{0},0,1,2,5,7,0,1\}$
2. $x_2[n]=\{1,2,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\}$
3. $x_3[n]=\delta[n]$
4. $x_4[n]=\delta[n-k]$, $k>0$

# Transformada Z

- En los ejemplos anteriores el exponente de z contiene la información temporal para identificar las muestras de la señal
- En otras ocasiones la transformada z proporciona una representación alternativa y compacta de la señal

# Transformada Z

- **Ejemplo:** Determinar la transformada z de la señal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\boxed{\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

La señal está formada por un número infinito de valores distintos de cero

$$x[n] = \{1, \left(\tfrac{1}{2}\right)^1, \left(\tfrac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \dots\}$$

La transformada z de x[n] es la serie infinita de potencias

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \dots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

Serie geométrica

Para converger $|\frac{1}{2} z^{-1}|<1$, o lo que es lo mismo $|z| > \frac{1}{2}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \qquad \mathrm{ROC}\text{: } |\mathrm{z}| > \frac{1}{2}$$

# Transformada z

- En la **ROC** se cumple que $|X(z)| < \infty$

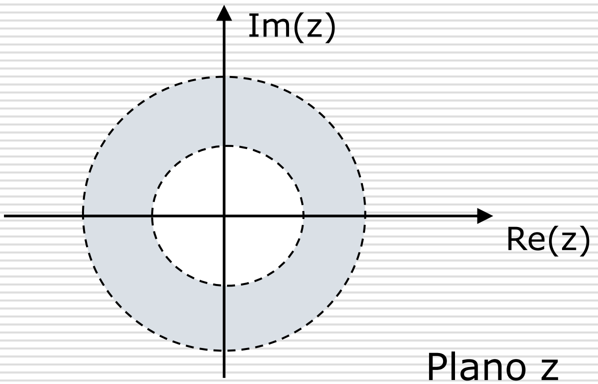
$$|X(z)| = \left|X(re^{j\theta})\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]r^{-n})e^{-j\theta n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|(x[n]r^{-n})\right|\left|e^{-j\theta n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|(x[n]r^{-n})\right|$$

- $|X(z)|$ es finita si la secuencia $x[n]r^{-n}$ es absolutamente sumable
- **La convergencia de la serie depende del módulo $|z|$**
  - Si un valor de $z$ (ej. $z = z_1$), está en la ROC, todos los valores de z de la circunferencia definida por $|z| = |z_1|$ estarán también en la ROC
- El problema de hallar la **ROC** de $X(z)$ es equivalente a encontrar **el rango de valores de r para el que la secuencia $x[n]r^{-n}$ es absolutamente sumable**

# Transformada Z

## ROC

- La región de convergencia será un anillo en el plano *z* centrado en el origen
  - En casos específicos la región interior puede extenderse hacia dentro hasta incluir el origen. La región se transformaría en un disco
  - En otros casos, la frontera exterior puede extenderse hasta el infinito



# Transformada Z

## ROC

- La región de convergencia será un anillo en el plano *z* centrado en el origen

- Separamos la expresión en dos partes:

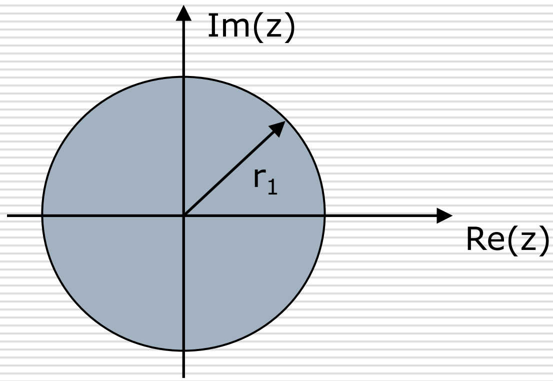
$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}|$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |x[-n]r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right|$$

- Para que $X(z)$ converja estos dos sumatorios deben ser finitos

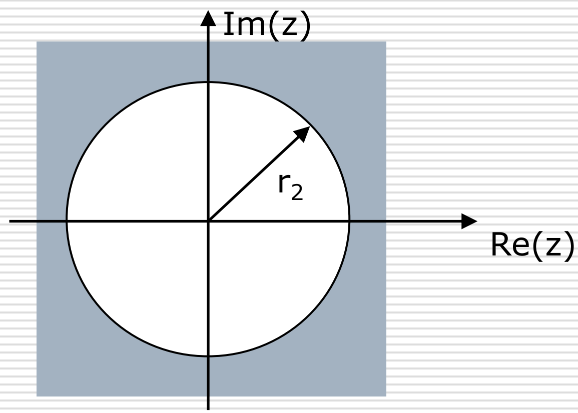
# Transformada z

- La ROC del primer sumatorio consiste en un círculo de radio $r_1$




$$ROC\ de\ \sum_{n=1}^{\infty} |x[-n]r^n|$$

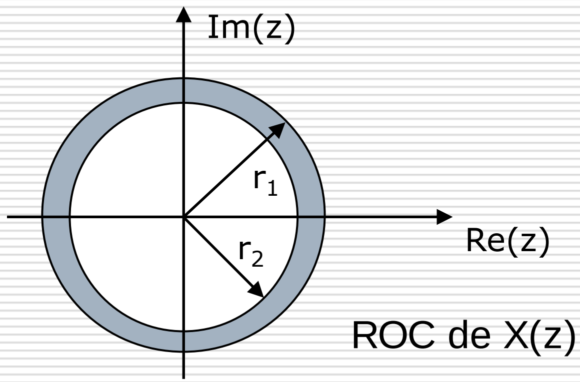
- La ROC del segundo sumatorio consiste en aquellos puntos fuera del círculo de radio $r_2$




$$ROC\ de\ \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right|$$

# Transformada z

- Como las dos sumas tienen que ser finitas, la ROC, en general, es una región anular del plano z $r_2<r<r_1$:




- Si r2>r1 entonces no existe un ROC común y $X(z)$ no existe

# Transformada z

- Ejemplo: Determinar la transformada z de la señal:

$$x[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

# Transformada z

- Ejemplo: Determinar la transformada z de la señal:

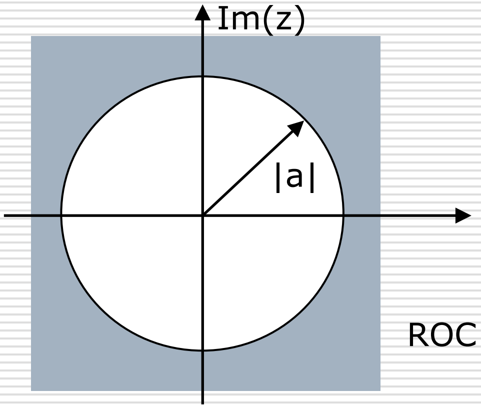
$$x[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- A partir de la definición

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

- Si |z|>|a| la suma de la serie geométrica converge

$$x(n) = a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$




ROC: |z|>|a|

# Transformada z

- Ejemplo: Determinar la transformada z de la señal:

$$x[n] = -a^n u[-n-1] = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -a^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

# Transformada z

- Ejemplo: Determinar la transformada z de la señal:

$$x[n] = -a^n u[-n-1] = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -a^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

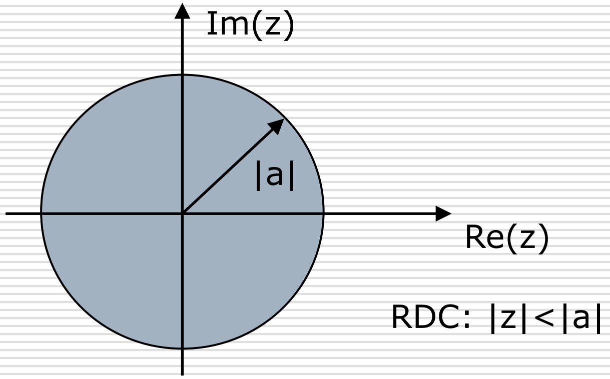
- A partir de la definición:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n) z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m$$

- Si $|a^{-1}z|<1$ la serie geométrica converge

$$X(z) = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$x(n) = -a^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$



# Transformada z

- Los ejemplos anteriores ilustran dos cuestiones importantes

1. Unicidad de la transformada z: una expresión compacta de **la transformada z no especifica de forma unívoca la señal en el dominio del tiempo**
   - La señal causal $a^n u[n]$ y la señal anticausal $-a^n u[-n-1]$ tienen expresiones idénticas para la transformada z

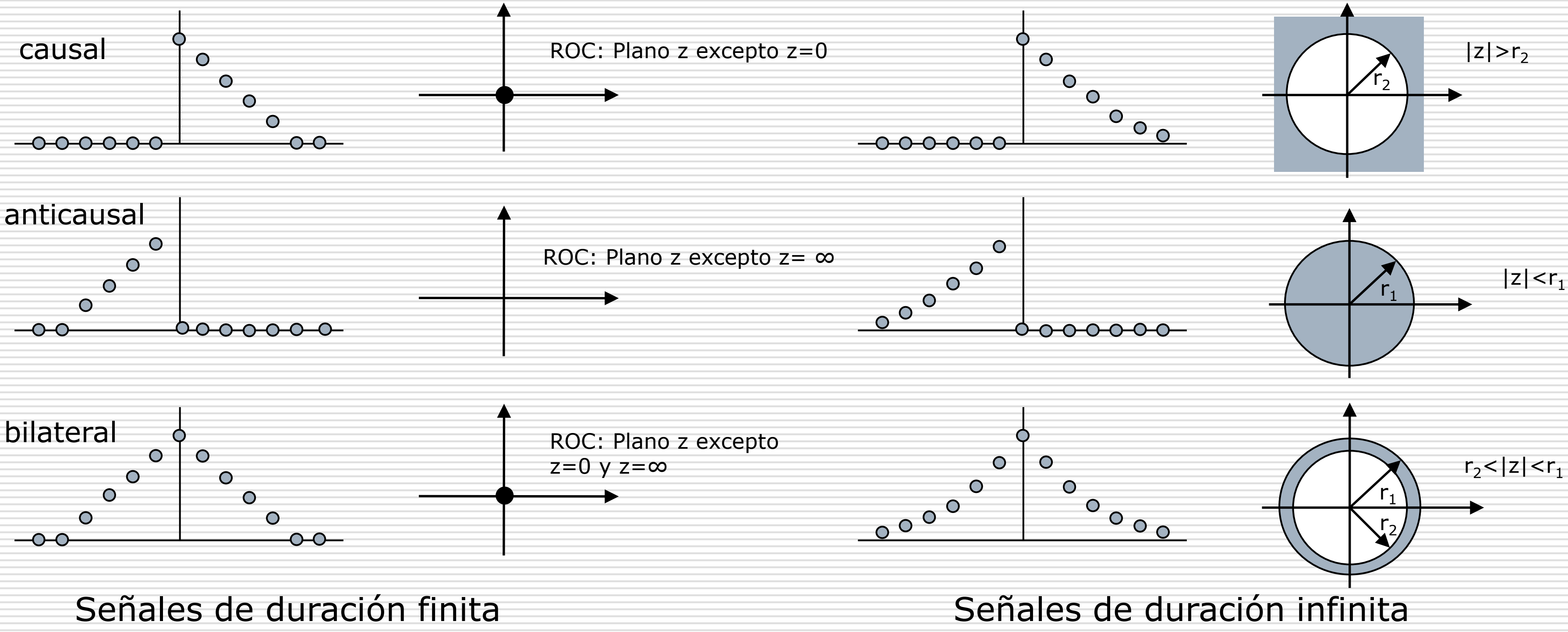
$$Z\{a^n u[n]\} = Z\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

**¿ROC?**

   - La ambigüedad solo se pudes resolver si también se especifica el ROC
   - Resumiendo: una señal discreta x[n] queda unívocamente determinada por su transformada z y su ROC

# Transformada z

2. La **ROC de una señal causal es el exterior de un círculo** de un determinado $r_2$, mientras que el de **una señal anticausal es el interior de un círculo de** un determinado $r_1$



# Transformada z

- Ejemplo: determina la transformada z

$$x[n] = a^n u[n] + (-b^n) u[-n-1]$$

# Transformada z

- Ejemplo: determina la transformada z

$$x[n] = a^n u[n] + (-b^n) u[-n-1]$$

- A partir de la definición de la transformada

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n - \sum_{m=1}^{\infty} (b^{-1}z)^m$$

- El primer sumatorio converge si |a|<|z|, mientras que el segundo si |b|>|z|

# Transformada z

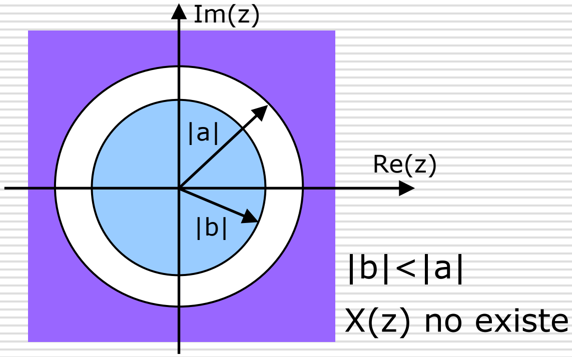
- Ejemplo: determina la transformada z

$$x[n] = a^n u[n] + (-b^n)u[-n-1]$$

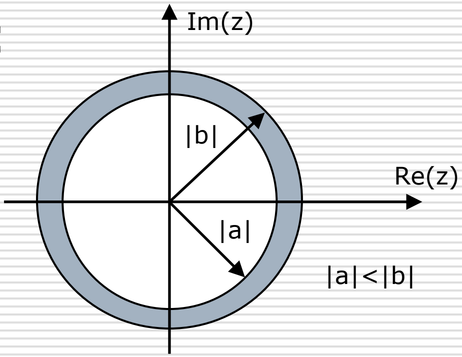
- Para obtener el ROC consideramos 2 casos

1. |b|<|a|. Las 2 regiones ROC no solapan
2. |b|>|a|. Existe un anillo en el plano z donde ambas series de potencias convergen simultáneamente

Caso 1:




Caso 2:



# Transformada z

- Ejemplo: determina la transformada z

$$x[n] = a^n u[n] + (-b^n)u[-n-1]$$

- Resultado

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n - \sum_{m=1}^{\infty} (b^{-1}z)^m$$

$$\mathrm{X}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

ROC: $|a| < |z| < |b|$

# Propiedades de la transformada z

- La potencia de la transformada z como herramienta para el análisis de las señales y sistemas discretos viene de algunas de sus propiedades:

LINEALIDAD

- Si $x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) \quad y \quad x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$

entonces $\boxed{x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)}$

- Donde $a_1$ y $a_2$ son constantes. Esta propiedad se puede generalizar para cualquier número de señales

# Ejercicio

- Determina la transformada z y la ROC de la siguiente señal:

$$x[n] = [3(2^n) - 4(3^n)]u[n]$$

# Ejercicio

- Determina la transformada z y la ROC de la siguiente señal:

$$x[n] = [3(2^n) - 4(3^n)]u[n]$$

$x_1[n] = 2^n u[n]$ $\quad$ $x_2[n] = 3^n u[n]$ $\quad$ $x[n] = 3x_1[n] - 4x_2[n]$

Recordamos que: $\alpha^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ ROC: $|z| > |\alpha|$

$$x_1[n] = 2^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X_1(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$ ROC: $|z| > 2$

$$x_2[n] = 3^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X_2(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$$ ROC: $|z| > 3$

$$X(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} - \frac{4}{1 - 3z^{-1}}, \qquad ROC: |z| > 3$$

# Ejercicio

- Determina la transformada z y la ROC de la siguiente señal:

$$x[n] = cos(\omega_0 n)\mathrm{u[n]}$$

# Ejercicio

- Determina la transformada z y la ROC de la siguiente señal:

$$x[n] = cos(\omega_0 n)\mathrm{u[n]}$$

$$x[n] = (\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n})u[n] \qquad = \frac{1}{2}\underbrace{e^{j\omega_0 n}u[n]}_{x_1[n]} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-j\omega_0 n}u[n]}_{x_2[n]}$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}}, \qquad ROC\colon |z| > 1$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad ROC\colon |z| > 1$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}} \qquad = \frac{1 - z^{-1}cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}cos\omega_0 + z^{-2}}, \qquad ROC\colon |z| > 1$$

# Ejercicio

- Determina la transformada z y la ROC de la siguiente señal:

$$x[n] = cos(\omega_0 n)\mathrm{u[n]}$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}+1-e^{j\omega_0}z^{-1}}{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})}\right) \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}+1-e^{j\omega_0}z^{-1}}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}-e^{j\omega_0}z^{-1}+z^{-2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_0}z^{-1}-\frac{1}{2}e^{j\omega_0}z^{-1}}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}-e^{j\omega_0}z^{-1}+z^{-2}}\right) \qquad = \frac{1-z^{-1}cos\omega_0}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}-e^{j\omega_0}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{1-z^{-1}cos\omega_0}{1-2z^{-1}(\frac{1}{2}e^{-j\omega_0}+\frac{1}{2}e^{j\omega_0})+z^{-2}} \qquad = \frac{1-z^{-1}cos\omega_0}{1-2z^{-1}cos\omega_0+z^{-2}}, ROC: |z| > 1$$

# Propiedades de la transformada z

DESPLAZAMIENTO TEMPORAL

- Si $x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$

  entonces $\boxed{x[n-k] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z)}$

- La ROC de $z^{-k}X(z)$ es la misma que la de $X(z)$
  - Excepto z=0 si k>0 y z=∞, si k<0 (debido al término $z^{-k}$)

# Ejercicio

- Aplicando la propiedad del desplazamiento en el tiempo, obtener la transformada z de la señal $x_2[n]$ a partir de la transformada z de la señal $x_1[n]$:

$$x_1[n]=\{\underset{\uparrow}{1},2,5,7,0,1\}$$

$$x_2[n]=\{1,2,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\}$$

# Ejercicio

- Obtener la transformada z de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

# Ejercicio

- Obtener la transformada z de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

Opción 1: Empleando la definición de transformada z directa

Importante: x[n] tiene duración finita

$$X(z) = \sum_{0}^{N-1} 1z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{(N-1)} = \begin{cases} N, & si\ z = 1 \\ \dfrac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, & si\ z \neq 1 \end{cases}$$

ROC: todo el plano z excepto z=0

# Ejercicio

- Obtener la transformada z de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

Opción 2: Empleando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo

$$x[n] = u[n] - u[n-N]$$

$$X(z) = Z\{u[n]\} - Z\{u[n-N]\} = Z\{u[n]\} - Z^{-N}Z\{u[n]\} = (1 - Z^{-N})Z\{u[n]\}$$

$$Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad ROC: |z| > 1$$

$$(1 - Z^{-N})Z\{u[n]\} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$ ROC: todo $z$ excepto $z = 0$

# Propiedades de la transformada z

ESCALADO EN EL DOMINIO Z

- Si $\quad x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad ROC: r_1 < |z| < r_2$

  entonces $\quad \boxed{a^n x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z) \quad ROC: |a|r_1 < |z| < |a|r_2}$

- Para cualquier constante a, real o compleja
- Demostraremos este resultado:

$$Z\{a^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

- La ROC de $X(z)$ es $r_1<|z|<r_2$, por lo que la de $X(a^{-1}z)$ es:

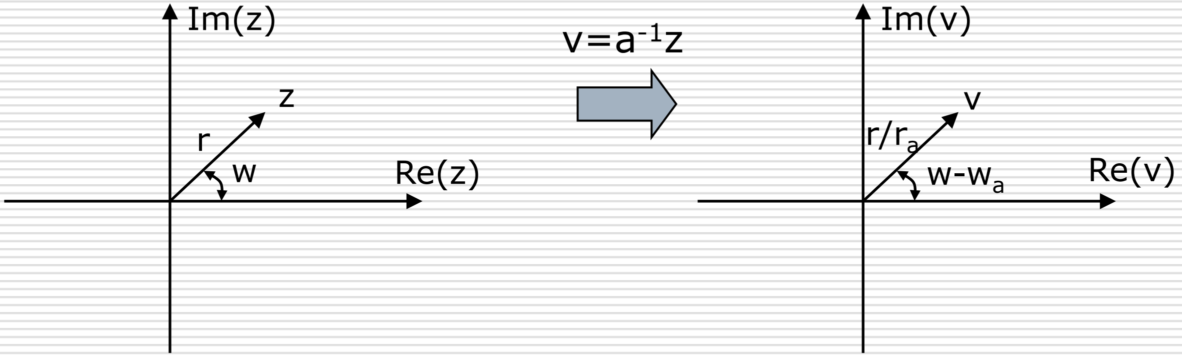
$$r_1 < \left|a^{-1}z\right| < r_2 \quad \Rightarrow \quad |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

- Si expresamos *a* y *z* en versión polar entenderemos mejor el significado de escalado en el plano z

# Propiedades de la transformada z

- Pasamos a forma polar $a = r_a e^{jw_a}$ y $z = re^{jw}$
- Además denotamos $v = a^{-1}z$ , por lo que $Z\{x[n]\} = X(z)$ y $Z\{a^n x[n]\} = X(v)$
- Podemos ver que $v = a^{-1}z \quad = \left(\frac{1}{r_a} e^{-jw_a}\right) re^{jw} \quad = \left(\frac{r}{r_a}\right) e^{j(w-w_a)}$

- Si $r_a$>1 se produce una contracción del plano z, si $r_a$<1 una expansión, junto con una rotación si $w_a \neq 2k\pi$. En el caso de que $|a| = 1$ solo se produce una rotación en el plano



# Propiedades de la transformada z

INVERSIÓN TEMPORAL

- Si $\quad x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad ROC: r_1 < |z| < r_2$

entonces $\boxed{x[-n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}) \qquad ROC: {}^{1}/_{r_2} < |z| < {}^{1}/_{r_1}}$

- Demostraremos este resultado:

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](z^{-1})^{-m} = X(z^{-1})$$

- Se hace el cambio de variable m=-n
- La ROC se calcula como:

$$r_1 < \left|z^{-1}\right| < r_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

# Propiedades de la transformada z

## INVERSIÓN TEMPORAL

- Reflejar una señal es equivalente a reemplazar $z$ por $z^{-1}$ en la fórmula de la transformada
- La ROC para $x[n]$ es la inversa de la de $x[-n]$. Si $z_0$ pertenece a la ROC de $x[n]$, entonces $\frac{1}{z_0}$ pertenece a la ROC de $x[-n]$

# Ejercicio

- Obtener la transformada z de la siguiente señal:

$$x[n] = u[-n]$$

# Propiedades de la transformada z

## DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO Z

- Si

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

entonces

$$\boxed{nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}}$$

- Demostraremos este resultado:

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-n)z^{-n-1} = -z(-z)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(nx[n])z^{-n} = Z\{nx[n]\}$$

- Las dos transformadas tienen la **misma ROC**

# Ejercicio

- Obtener la transformada z de la siguiente señal:

$$nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$x[n] = na^n u[n]$$

La señal puede expresarse como $nx_1[n]$, donde $x_1[n] = a^n u[n]$

$$nx_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX_1[z]}{dz} \qquad X_1[z] = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC: |z| > |a|$$

$$-z\frac{dX_1[z]}{dz} = \quad -z\frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \qquad ROC: |z| > |a|$$

# Propiedades de la transformada z

CONVOLUCIÓN DE DOS SECUENCIAS

- Si $x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$ $x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$

  entonces $\boxed{x[n] = x_1[n] * x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = X_1(z)X_2(z)}$

- Demostraremos este resultado. Definición de convolución:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

- La transformada z de x[n] se calcula como:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right] z^{-n}$$

continua…

# Propiedades de la transformada z

CONVOLUCIÓN DE DOS SECUENCIAS

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right] z^{-n}$$

- Intercambiando el orden de la suma (lo que se puede hacer para valores de z en la región de convergencia)

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \underbrace{\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n} \right]}_{z^{-k}X_2(z)} = X_2(z) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k}}_{X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}} = X_2(z)X_1(z)$$

Aplicando la propiedad del desplazamiento en el tiempo

$$\boxed{x[n-k] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z)}$$

# Propiedades da transformada z

- Esta propiedad es clave, ya que **convierte la convolución en una multiplicación de transformadas**. El cálculo de la convolución de 2 señales supone:

   1. Calcular las transformadas de las señales a convolucionar

$$X_1(z) = Z\{x_1[n]\}$$

$$X_2(z) = Z\{x_2[n]\}$$

   2. Multiplicar las transformadas

$$X[z] = X_1(z)X_2(z)$$

   3. Obtener la transformada z inversa de $X(z)$

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$$

- Este procedimiento es, en general, más eficiente computacionalmente que el cálculo de la convolución

# Ejercicio

- Calcula la convolución $x_1[n] * x_2[n]$ mediante la transformada z

$$x_1[\mathrm{n}] = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 1\}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

Nota: son secuencias finitas por lo que tenemos información temporal en el exponente de z para identificar las muestras de la señal y realizar la inversa

# Propiedades de la transformada z

TEOREMA DEL VALOR INICIAL

- Si x[n] es causal, es decir, si x[n]=0 para todo n<0,

  entonces $\boxed{x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)}$

- Demostraremos este resultado. Por ser causal x[n]:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \ldots$$

- Si $z \to \infty$

  entonces $z^{-k} \to 0$, para todo valor de k>0.

# Tabla de transformadas

- Algunas parejas comunes de transformadas

| Señal, x[n] | Transformada z, X[z] | ROC |
|---|---|---|
| $\delta[n]$ | 1 | Todo z |
| $u[n]$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $a^n u[n]$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $na^n u[n]$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $-a^n u[-n-1]$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$ |
| $-na^n u[-n-1]$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ | $\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$ |

# Tabla de transformadas

- Algunas parejas comunes de transformadas

| Señal, x[n] | Transformada z, X[z] | ROC |
|---|---|---|
| $(\cos\omega_0 n)u[n]$ | $\dfrac{1 - z^{-1}cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}cos\omega_0 + z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $(sen\omega_0 n)u[n]$ | $\dfrac{z^{-1}sen\omega_0}{1 - 2z^{-1}cos\omega_0 + z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $(a^n \cos\omega_0 n\, u[n]$ | $\dfrac{1 - az^{-1}cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}cos\omega_0 + a^2 z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $(a^n \mathrm{sen}\,\omega_0 n\, u[n]$ | $\dfrac{az^{-1}sen\omega_0}{1 - 2az^{-1}cos\omega_0 + a^2 z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |

# Transformadas z racionales

- Una familia importante de transformadas z es aquella para las que $X(z)$ es una función racional, es decir, una relación de dos polinomios en $z^{-1}$(o $z$)

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

## Polos y ceros

- Los polos de la transformada z son aquellos valores de $z$ para los que $X(z) = \infty$
- Los ceros son aquellos valores de z para los que $X(z) = 0$

# Transformadas z racionales

## Polos y ceros

- Si $X(z)$ es una función racional

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ , podemos sacar factor común de los términos $b_0 z^{-M}$ y $a_0 z^{-N}$ y evitar las potencias negativas

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{z^M + \frac{b_1}{b_0} z^{M-1} + \frac{b_2}{b_0} z^{M-2} + \cdots + \frac{b_M}{b_0}}{z^N + \frac{a_1}{a_0} z^{N-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{N-2} + \cdots + \frac{a_N}{a_0}}$$

- Dado que $B(z)$ y $A(z)$ son polinómios, si calculamos sus raíces podemos expresarlos en forma de factores

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{-M+N} \frac{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_N)} = G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - c_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

# Transformadas z racionales

## Polos y ceros

$$G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}, \qquad \text{Donde } G = \frac{b_0}{a_0}$$

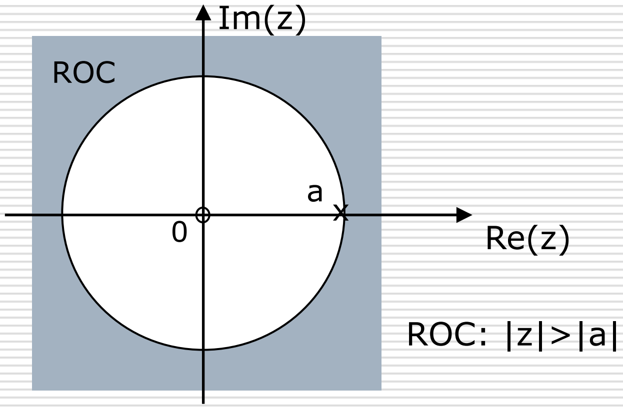
- $X(z)$ tiene M ceros en $c = c_1, c_2, \ldots, c_M$ (raíces del numerador)
- $X(z)$ tiene N polos en $\mathrm{p} = p_1, p_2, \ldots, p_M$ (raíces del denominador)
- Polos y ceros en el origen $z = 0$
  - $|N - M|$ ceros en el origen si N>M
  - $|N - M|$ polos en el origen si N<M
- Pueden producirse polos o ceros en $z = \infty$
  - Existe un cero en $z = \infty$ si $X(z) = 0$
  - Existe un polo en $z = \infty$ si $X(z) = \infty$
- Si contamos los polos y ceros del origen e infinito, comprobaremos que $X(z)$ **tiene el mismo número de polos que de ceros**

# Transformadas z racionales

- Podemos representar graficamente $X(z)$ mediante un diagrama de polos y ceros. Localizamos los polos mediante cruces (x) y los ceros mediante círculos (o).
- Ejemplo: Determinar el diagrama de polos y ceros de la señal: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad \text{ROC: } |z| > |a|$$

- $X(z)$ tiene un cero en $c_1 = 0$
- $X(z)$ tiene un polo en $p_1 = a$
  - El polo no está incluido en la ROC



# Transformadas z racionales

- Ejemplo: Determinar el diagrama de polos y ceros de la señal

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$ donde a>0

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^M}{1-az^{-1}} = \qquad \frac{1}{z^{M-1}} \frac{z^M - a^M}{z-a}$$

- La ROC estará determinada por $\sum_{n=0}^{M-1} |az^{-1}|^n < \infty$
- Como solo tenemos un número finito de términos distintos de cero, la suma será finita siempre que $az^{-1}$ sea finito
- ROC plano complejo excepto $\mathrm{z} = 0$

# Transformadas z racionales

donde a>0

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^M}{1-az^{-1}} = \qquad \frac{1}{z^{M-1}} \frac{z^M - a^M}{z-a}$$

ROC: plano completo excepto $z = 0$

$z^M = a^M$ tiene M raíces en: $c_k = ae^{\frac{j2\pi k}{M}}$ k=0, 1, …, M-1

$$X(z) = \frac{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{M-1})}{z^{M-1}}$$

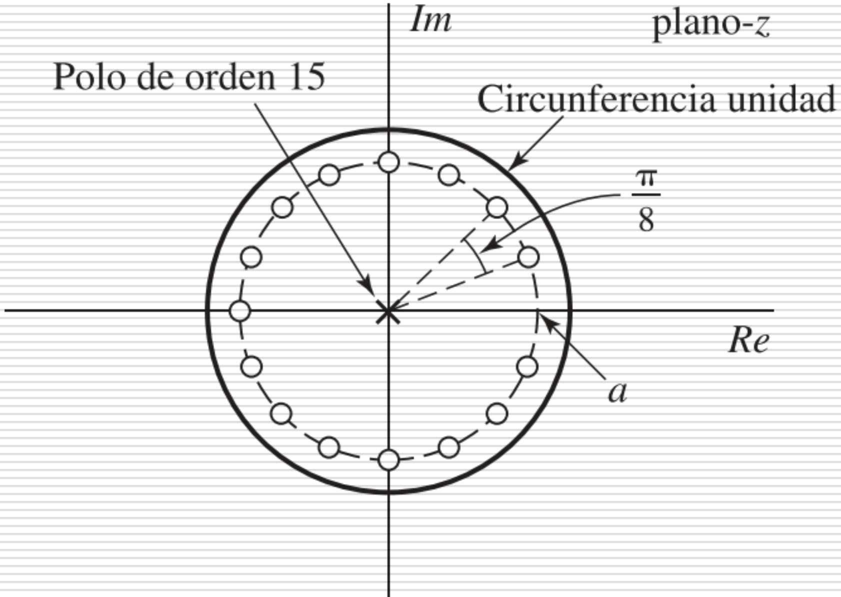
El cero $c_0 = a$ , $(k = 0)$, se anula con el polo en z=a

Los polos están en el origen

# Transformadas z racionales

$$X(z) = \frac{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{M-1})}{z^{M-1}}$$

- Los ceros están en las posiciones: $c_k = ae^{\frac{j2\pi k}{M}}$ k=1, …, M-1 (k=0 está cancelado)
- Tiene M-1 polos pero todos están en el origen z=0




Ejemplo
- N=16
- a real
- 0<a<1

# Transformadas z racionales

- Localización de los polos vs comportamiento en el dominio del tiempo de las señales causales
  - El comportamiento de las señales causales depende de si los polos de la transformada están contenidos en la región $|z|<1$, en $|z|>1$ o en la circunferencia unidad $|z|=1$
  - Si una señal real tiene una **transformada z con un polo**, este polo tiene que ser real. Tenemos entonces:

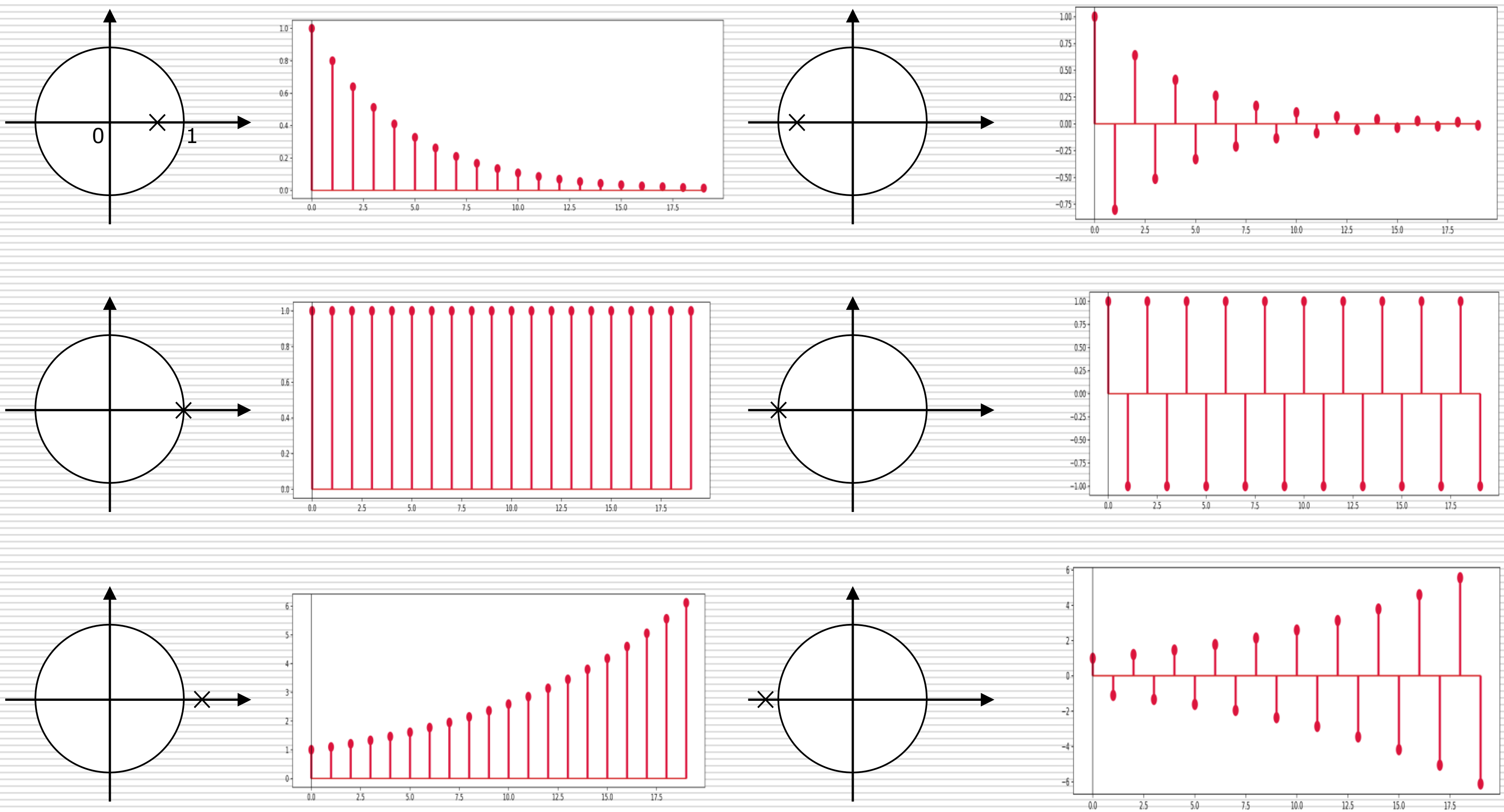
$$x[n] = a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X[z] = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad ROC: |z| > |a|$$

que tiene un cero en $c_1=0$ e un polo en $p_1=a$

  - La figura de la página siguiente enseña el comportamiento de la señal en relación a la localización del polo

# Transformadas z racionales

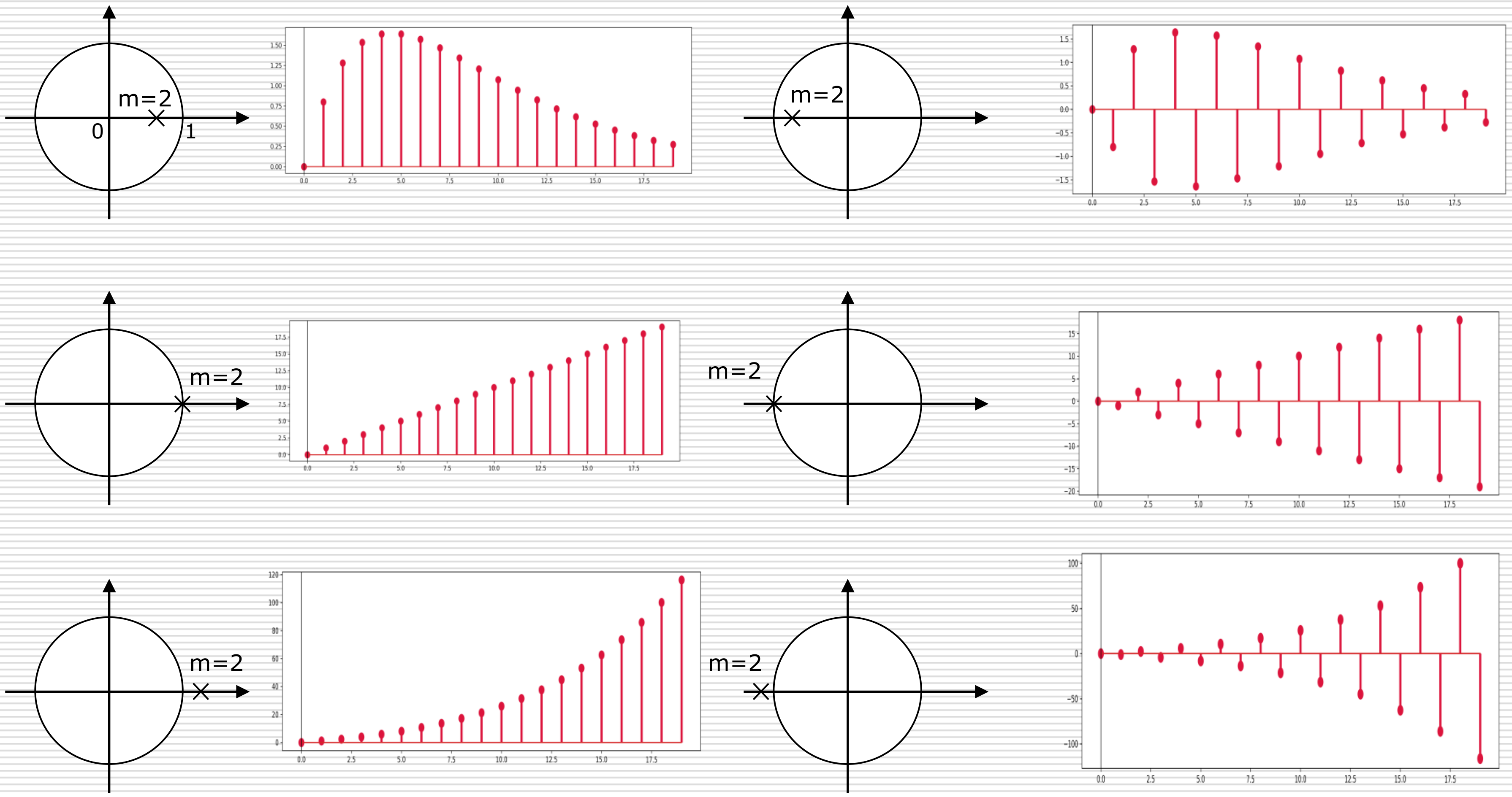
$x[n]=a^{n}u[n]$ Transformada Z con un polo



# Transformadas z racionais

$x[n]=na^nu[n]$

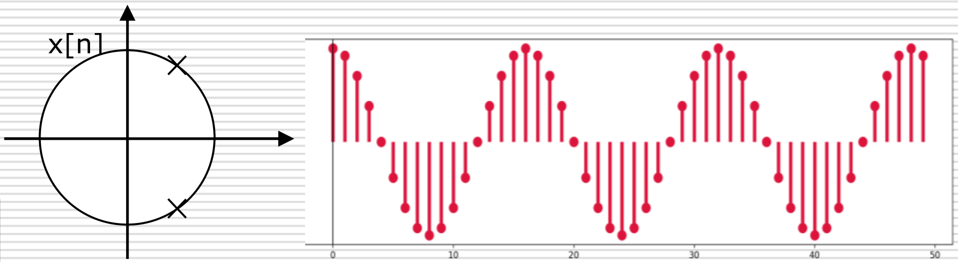
Transformada Z con un polo doble

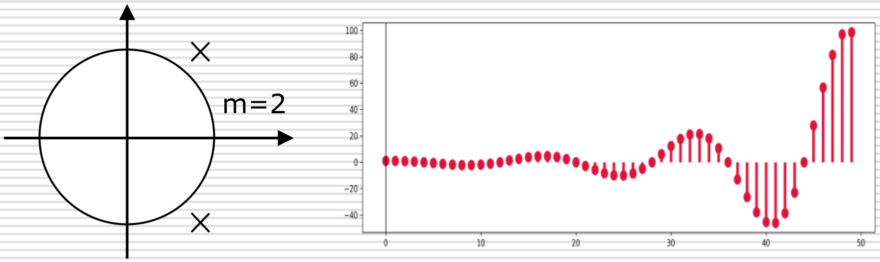


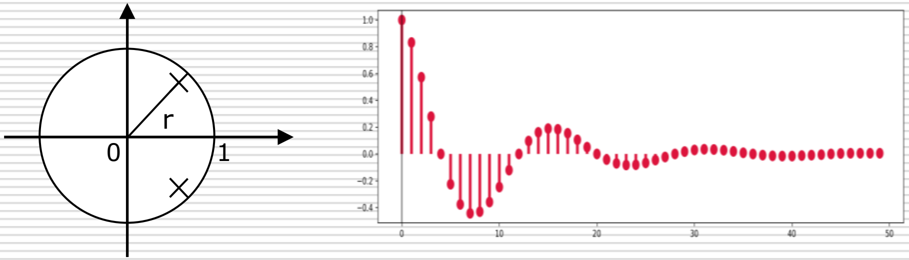
# Transformadas z racionales

- Supongamos el caso de polos conjugados
  - Se corresponden con señales causales oscilatorias.

Ej. $(\alpha^n \cos \omega_0 n) u[n]$




El resultado es una señal sinusoidal ponderado de forma exponencial

# Transformadas z racionales

1. Las señales reales causales **con polos reales simples o pares de polos conjugados dentro o sobre la circunferencia están acotados en la amplitud**
2. Una señal con **un polo (o par de polos conjugados) cerca del origen decrece más rápidamente** que con los polos cerca de la circunferencia unidad
3. **Los ceros también afectan al comportamiento pero menos**. Por ejemplo, en el caso de señales sinusoidales solo afecta a la fase
4. Todo lo anterior también **se aplica a los sistemas LIT** causales, ya que su respuesta impulsional es una señal causal. **Analizando la respuesta impulsional podemos saber lo que pasará con otras secuencias**

# Transformadas z racionales

## La función de transferencia de un sistema LIT.

- La salida de un sistema LIT para una señal de entrada x[n] se puede expresar como la convolución de esta señal y la respuesta impulsional del sistema.
- La propiedad de la convolución en el dominio z nos permite escribir la relación como :

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

- **Conocidos h[n] y x[n] podemos** calcular sus correspondientes transformadas y obtener **y[n]** como la transformada inversa de Y(z)
- **Conocidos x[n] e y[n] podemos obtener la respuesta del sistema al impulso unitario** a partir de H(z):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

# Transformadas z racionales

- Podemos escribir H(z) como:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

- h[n] describe el sistema en el dominio del tiempo, H(z) en el dominio z, recibe así el nombre de función de transferencia del sistema.

- Examinaremos un caso particular: un sistema descrito mediante una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- **Calculamos la transformada z en los 2 lados** de la igualdad

# Transformadas z racionales

- **Aplicando las propiedades del desplazamiento en el tiempo y de la linealidad**:

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

- de aquí:

$$Y(z)(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}) = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

- y así:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- El resultado es una función de transferencia racional
  - Forma general de la función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación en diferencias de coeficientes constantes

# Ejercicio

- Determinar la función de transferencia y la respuesta impulsional del sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + 2x[n]$$

Por tablas…

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$\mathrm{X}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, ROC\ |z| > |a|$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + 2X(z)$$

$$\mathrm{Y}(z) - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} = 2X(z)$$

$$\mathrm{Y}(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) = 2X(z)$$

$$H(z) = \frac{\mathrm{Y}(z)}{X(z)} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{h}[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

# Transformada z inversa

## La transformada z inversa mediante expansión en serie de potencias

- Dada una transformada z, con su ROC correspondiente, podemos expandir dicha transformada en una serie de potencias con la forma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

- Por la definición de la transformada z, $x[n]=c_n$, para todo n
- **Cuando X(z) es racional, la expansión se puede realizar mediante la división de polinomios**

# Transformada z inversa

- Ejemplo: Determinar la transformada z inversa

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \quad \textbf{ROC: |z|>1}$$

- **La señal es causal** (ROC exterior de un círculo)
  - Buscamos una expansión en serie de **potencias negativas de z**
- Dividimos el numerador de X(z) por su denominador:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = 1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\frac{31}{16}z^{-4}+\ldots$$

- Por la definición de la transformada z, deducimos:

$$x[n] = \{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots\}$$

# Transformada z inversa

- La división:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\frac{31}{16}z^{-4}+\ldots$$

La división...

$$1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\ldots$$

$$1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\;\Big|\;1$$

$$1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$$

$$\frac{3}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}$$

$$\frac{3}{2}z^{-1}-\frac{9}{4}z^{-2}+\frac{3}{4}z^{-3}$$

$$\frac{7}{4}z^{-2}-\frac{3}{4}z^{-3}$$

# Transformada z inversa

- Ejemplo: Determinar la transformada z inversa

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$ **ROC: |z|<0.5**

- **La señal es anticausal** (ROC interior de un círculo)
  - Para obtener la expansión en **serie de potencias positivas** hacemos la división escribiendo los polinómios en orden inversa
- Así:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \ldots$$

- En este caso :

$$x[n] = \{\ldots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, \underset{\uparrow}{0}\} \qquad x[n] = 0, \forall n \geq 0$$

# Transformada z inversa

- La división

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \ldots$$

La división...

$$\begin{array}{r|l} & 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + \ldots \\ \hline \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{1 - 3z + 2z^2} \\ \quad 3z - 2z^2 \\ \quad \underline{3z - 9z^2 + 6z^3} \\ \qquad 7z^2 - 21z^3 + 14z^4 \end{array}$$

# Transformada z inversa

- La transformada z inversa mediante expansión en serie de potencias
  - En general, **el método de las divisiones sucesivas no proporcionará respuestas para x[n] cuando n es grande**
    - Se vuelve **un sistema muy tedioso**
  - Con este método **obtenemos una evaluación directa de x[n]** pero, en general, no una forma cerrada
    - Excepto si el patrón resultante es muy sencillo y nos permite inferir el término general x[n]

# Transformada z inversa

- La transformada z inversa mediante expansión en fracciones simples.
  - Buscamos **expresar la función X(z) como una combinación lineal**

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \ldots + \alpha_k X_k(z)$$

*Recordamos la propiedad de linealidad

  - Donde $X_1(z),\ldots,X_k(z)$ **son expresiones cuyas transformadas inversas** $x_1[n],\ldots, x_k[n]$ **disponibles en una tabla de pares de transformadas**
  - Si esta descomposición es posible, entonces se puede encontrar x[n] mediante la propiedad de linealidad:

$$x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] + \ldots + \alpha_k x_k[n]$$

# Transformada z inversa

- Este es método **es particularmente útil con funciones racionales** de la forma

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

- Para no perder generalidad suponemos que $a_0 = 1$
  - Si $a_0 \neq 1$ podemos dividir el numerador y el denominador por $a_0$
- El método **requiere de una función racional propia**
  - Una función racional se denomina propia si $a_N \neq 0$ y M<N. Es decir, **el número de ceros es menor que el número de polos**
- **Una función racional impropia** (M≥N) siempre **se puede escribir como la suma de un polinomio y una función racional propia**

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \frac{B_1(z)}{A(z)}$$

# Transformada z inversa

- Ejemplo: Exprese la transformada racional impropia como la suma de un polinomio y una función racional propia

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

Debemos eliminar del numerador $z^{-2}$ e $z^{-3}$. Para eso, dividimos los polinomios hasta que el orden del resto sea $z^{-1}$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

La división...

$$2z^{-1} + 1$$

$$\frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \ \Big| \ \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{11}{6}z^{-2} + 3z^{-1} + 1$$

$$\frac{1}{3}z^{-3} + \frac{10}{6}z^{-2} + 2z^{-1}$$

$$\frac{1}{6}z^{-2} + z^{-1}$$

$$\frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1$$

$$\frac{1}{6}z^{-1}$$

# Transformada z inversa

- La transformada z inversa de un polinomio es fácil de encontrar (empleando los exponentes de la z)
- Nos centraremos en la transformada z inversa de la función racional propia (M<N)

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

1. Para simplificar, eliminamos las potencias negativas de z multiplicando numerador y denominador por $z^N$

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

2. Dado que N>M, si dividimos por z, la función resultante es propia:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

# Transformada z inversa

3. Queremos expresar lo anterior en forma de suma de fracciones simples. Para eso, factorizamos el polinomio del denominador en factores que contengan los polos $p_1, p_2, \ldots p_N$ de X(z). Distinguimos dos casos:

POLOS DIFERENTES

- Buscamos una expansión de la forma:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_N)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{z-p_1}} + \frac{\boldsymbol{A_2}}{\boldsymbol{z-p_2}} + \ldots + \frac{\boldsymbol{A_N}}{\boldsymbol{z-p_N}}$$

- El problema es calcular $A_1, A_2, \ldots, A_N$.

# Transformada z inversa

Ejemplo: Determinar la expansión en fracciones simples de:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

1. Eliminamos las potencias negativas multiplicando por $z^2$
2. Dividimos por z la función resultante
3. Calculamos los polos del denominador ($\mathrm{p}_1 = 1$ y $p_2 = \frac{1}{2}$)

$$X(z) = \frac{z^2}{Z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}} \qquad \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{Z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}} = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{\mathrm{A}_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{2}}$$

# Transformada z inversa

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\boldsymbol{z}}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{1})(\boldsymbol{z}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}})} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{1}} + \frac{\boldsymbol{A_2}}{\boldsymbol{z}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}$$

4. Multiplicamos la ecuación por el término del denominador

$$z = A_1\left(z - \frac{1}{2}\right) + A_2(z-1)$$

5. Si hacemos $z = p_1 = 1$ tenemos $1 = A_1\left(1 - \frac{1}{2}\right)$
   - $A_1 = 2$
6. Si hacemos $z = p_2 = \frac{1}{2}$ tenemos $\frac{1}{2} = A_2\left(\frac{1}{2} - 1\right)$
   - $A_2 = -1$

- Por tanto $$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

# Transformada z inversa

POLOS DE ORDEN MÚLTIPLE

- Si X(z) tiene un polo de multiplicidad m, $(z-p_k)^m$, entonces la forma de la expansión anterior no es válida**. Analizaremos el caso de un polo doble**
- Ejemplo: Determinar la expansión en fracciones simples de:

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

- Buscamos primero una expresión en potencias positivas:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

- X(z) tiene un polo simple en $p_1$=-1 y un polo doble en $p_2$=$p_3$=1. La expansión en fracciones simples quedaría:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2}$$

# Transformada z inversa

## POLOS DE ORDEN MÚLTIPLE

- Podemos calcular $A_1$y $A_3$ de la misma forma que con los polos diferentes

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\boldsymbol{z^2}}{(\boldsymbol{z+1})(\boldsymbol{z-1})^2} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{z+1}} + \frac{\boldsymbol{A_2}}{\boldsymbol{z-1}} + \frac{\boldsymbol{A_3}}{(\boldsymbol{z-1})^2}$$

$$z^2 = A_1(z-1)^2 + A_2(z+1)(z-1) + \mathrm{A}_3(z+1)$$

- Si hacemos $z = p_1 = -1$
  - $A_1 = \frac{1}{4}$
- Si hacemos $z = p_2 = 1$
  - $A_3 = \frac{1}{2}$

# Transformada z inversa

POLOS DE ORDEN MÚLTIPLE

- Para calcular $A_2$
- Opción 1:
  - Desarrollamos: $z^2 = A_1(z-1)^2 + A_2(z+1)(z-1) + \mathrm{A}_3(z+1)$

$$z^2 = A_1(z^2 - 2z + 1) + A_2(z^2 - z + z - 1) + A_3(z+1)$$

$$z^2 = A_1z^2 - 2A_1z + A_1 + A_2z^2 - A_2 + A_3z + A_3$$

  - Obtenemos: $z^2 = (A_1 + A_2)z^2 + (A_3 - 2A_1)z + A_1 - A_2 + A_3$
  - Para cumplir la igualdad de la ecuación podemos verlo como:

$$1z^2 + 0z + 0 = (A_1 + A_2)z^2 + (A_3 - 2A_1)z + A_1 - A_2 + A_3$$

  - Por lo tanto $1 = (A_1 + A_2) = \frac{1}{4} + A_2$
  - $A_2 = \frac{3}{4}$

# Transformada z inversa

- Una vez realizada la expansión en fracciones simples ya podemos hacer la inversión de X(z)

- Supongamos el caso en que X(z) tiene polos diferentes. La expansión en fracciones simples da como resultado:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \ \ldots + \frac{A_n}{z - p_n}$$

$$X(z) = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-2}} + \ \ldots + A_n \frac{1}{1 - p_n z^{-1}}$$

- La transformada inversa ($\mathrm{x}[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$) se obtiene invirtiendo cada uno de los términos de la expresión anterior empleando una tabla de pares de transformadas

# Transformada z inversa

- A partir de una tabla tenemos que los términos pueden invertirse usando las fórmulas correspondientes:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u[n] & ROC: |z| > |p_k| \ (señal\ causal) \\ -(p_k)^n u[-n-1] & ROC: |z| < |p_k| \ (señal\ anticausal) \end{cases}$$

- Casos particulares
  - Si x[n] es causal, la ROC es $|z|>p_{max}$
  - En este caso, tódas las fraccións simples de X(z) producen componentes de x[n] causales

$$x[n] = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \ldots + A_N p_n^N) u[n]$$

  - Una señal causal que tiene una transformada z con polos diferentes y reales es una combinación lineal de exponenciales reales

# Ejercicio

- Determinar la transformada z inversa

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- Si:
  - ROC:|z|>1
  - ROC: |z|<0.5
  - ROC: 0.5<|z|<1

# Ejercicio

- Determinar la transformada z inversa

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u[n] & causal \\ -(p_k)^n u[-n-1] & anticausal \end{cases}$$

Expansión en fracciones simples

$$X(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Si ROC: |z|>1 => causal

$$\mathrm{x[n]} = 2(1)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

# Ejercicio

- Determinar la transformada z inversa

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u[n] & causal \\ -(p_k)^n u[-n-1] & anticausal \end{cases}$$

Expansión en fracciones simples

$$X(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Si ROC: |z|<0.5 => anticausal

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}] = \left[-2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[-n-1]$$

# Ejercicio

- Determinar la transformada z inversa

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u[n] & causal \\ -(p_k)^n u[-n-1] & anticausal \end{cases}$$

Expansión en fracciones simples

$$X(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Si ROC: 0.5<|z|<1 => bilateral $\mathrm{x[n]} = -2(1)^n u[-n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

# Transformada z inversa

- En el caso de polos múltiples, reales o complejos, se necesita la transformada z inversa de términos de la forma

$$\frac{A}{(z - p_k)^n}$$

- Estos casos se resolverán con ayuda de la tabla de transformadas. Por ejemplo, en el caso de polos dobles tenemos que:

$$Z^{-1}\left\{\frac{pz^{-1}}{(1 - pz^{-1})^2}\right\} = np^n u[n]$$

- Siempre que la ROC sea |z|>|p|