Percepción y procesado de señales

Análisis de las señales en el dominio de la frecuencia

David Mera

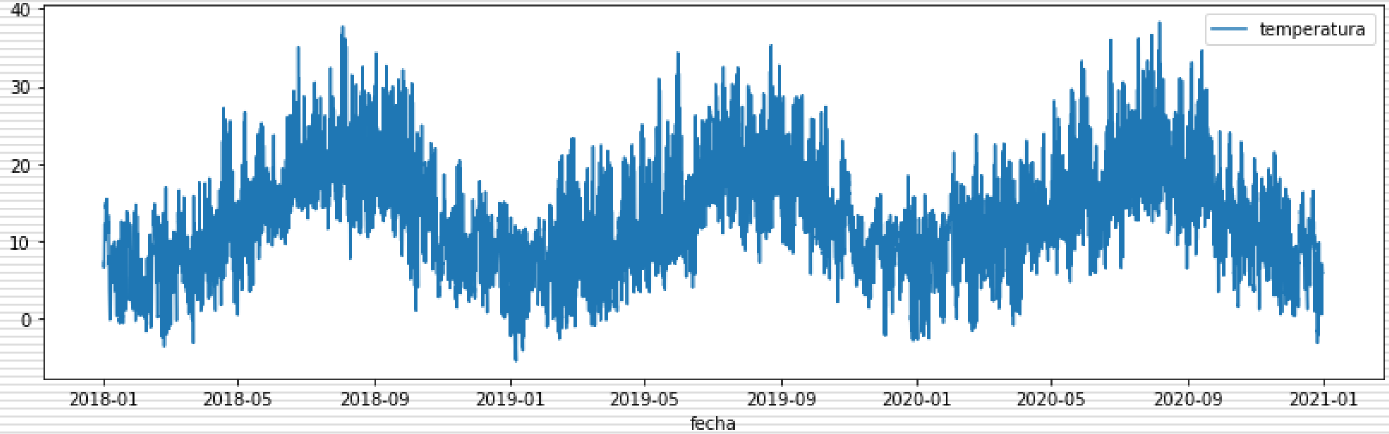
Área de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Departamento de Electrónica y Computación

Introducción

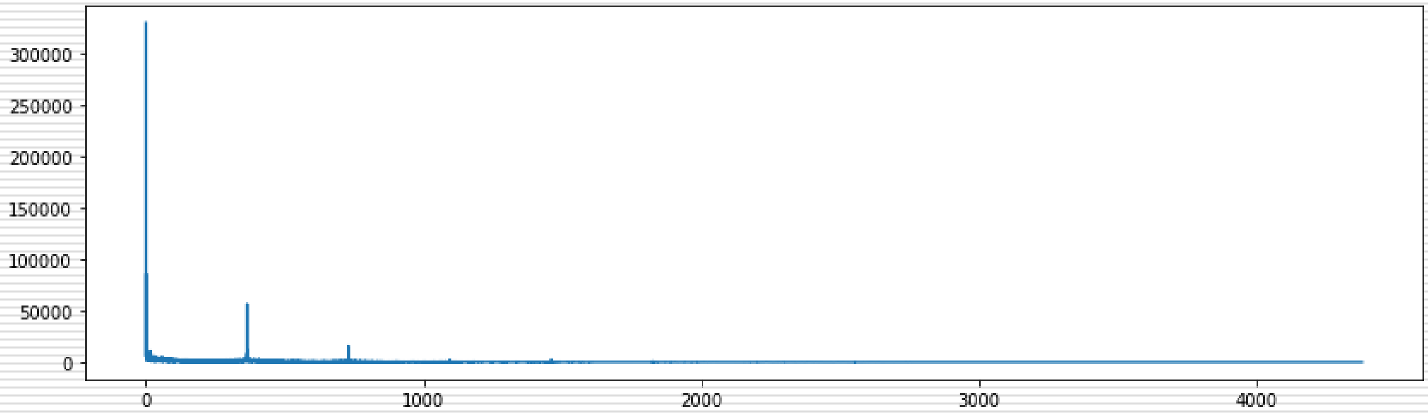
Puntos de vista de la misma señal

Introducción

Señal en el dominio del tiempo

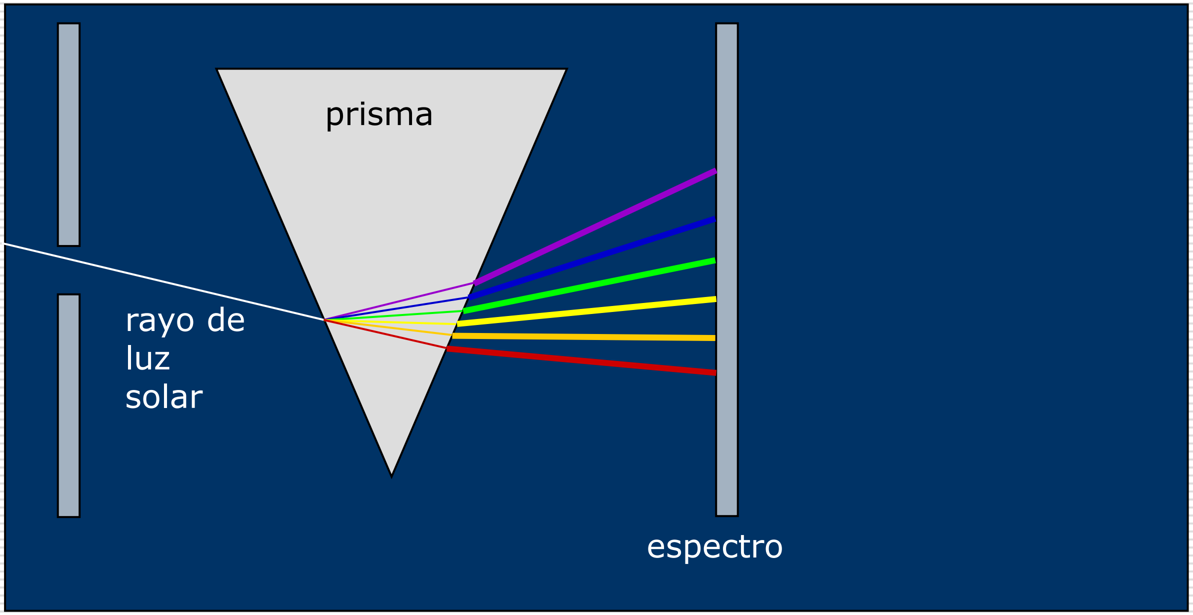


Señal en el dominio de la frecuencia



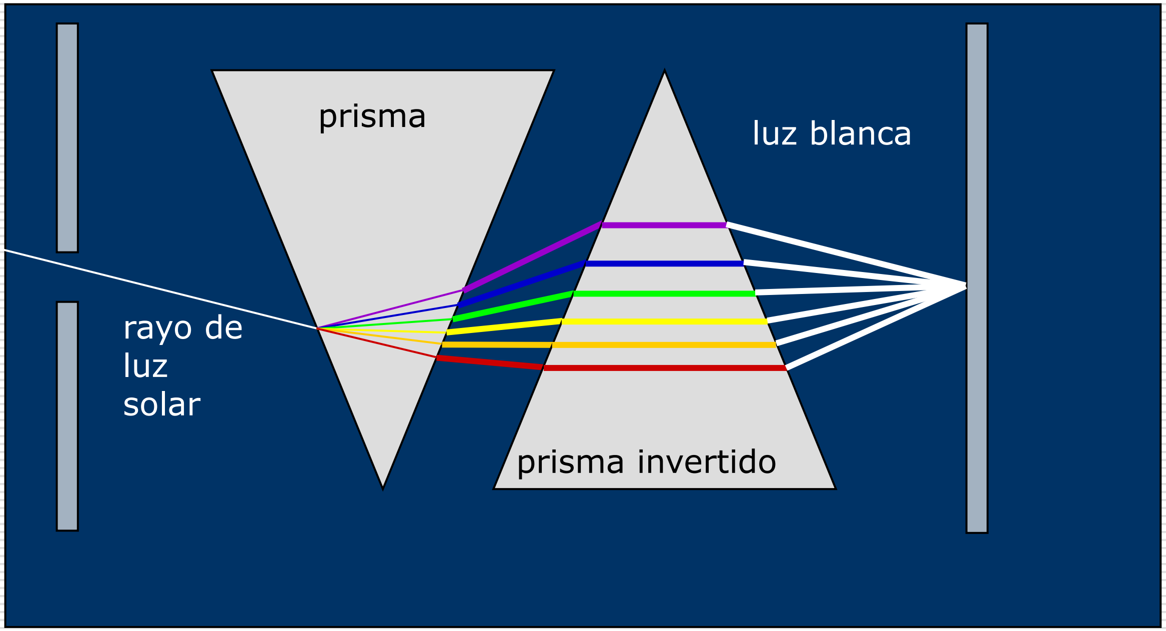
Introducción

- Se sabe que se puede utilizar un prisma para separar la luz blanca (solar) en los colores del arcoiris
- Isaac Newton fue el primero en acuñar el término ***espectro*** para describir las bandas continuas de colores producidas por el prisma de vidrio



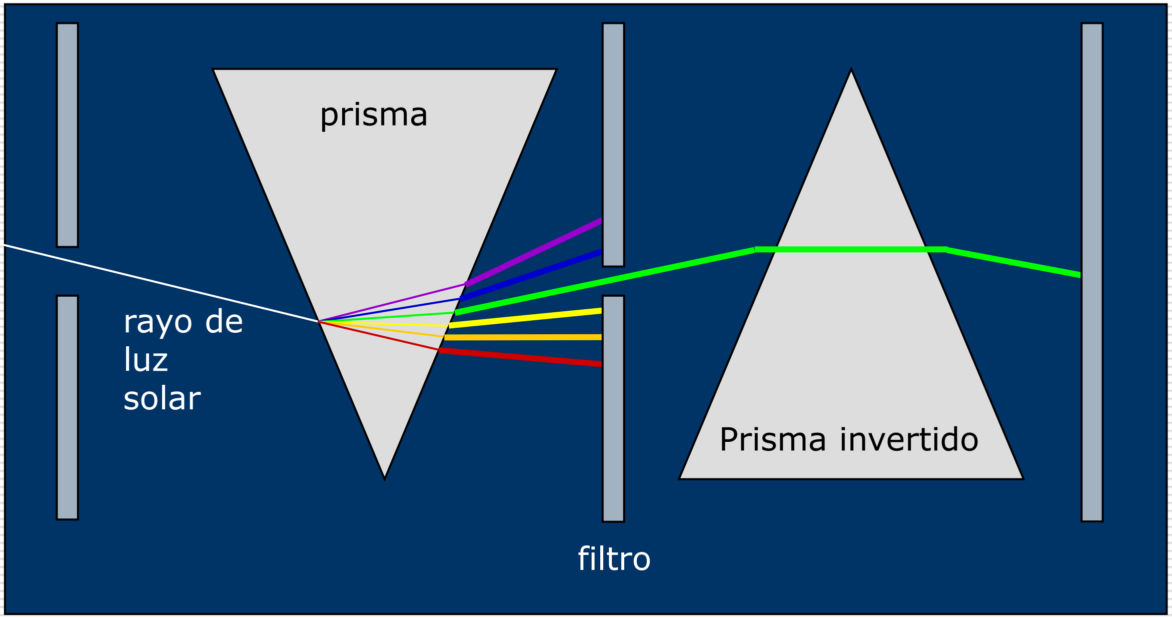
Introducción

- Newton colocó un prisma invertido respecto al primer y demostró que los colores volvían a mezclarse



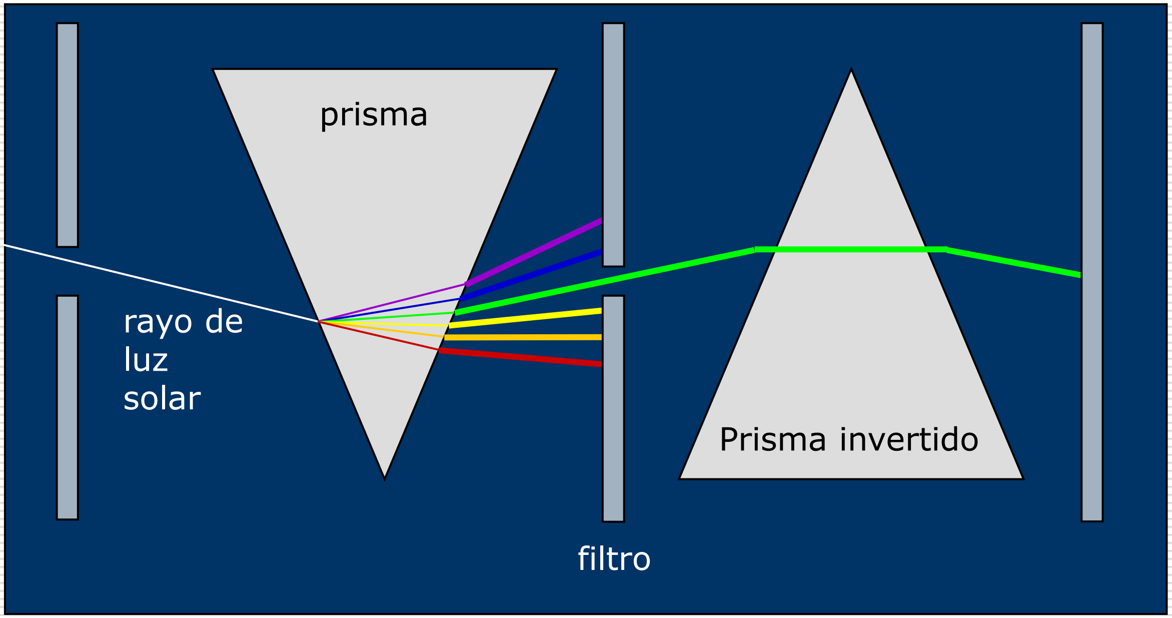
Introducción

- Newton demostró que si se impedía que alguno de los colores pasase al segundo prisma, ya no se formaba la luz blanca



Introducción

- En el **análisis en el dominio de la frecuencia**, desarrollaremos las **herramientas matemáticas** apropiadas (*prismas*) para **descomponer señales** (*luz*) en **componentes de frecuencia sinusoidales** (*colores*). Además desarrollaremos herramientas para la síntesis de señales a partir de componentes frecuenciales (*prismas invertidos*)

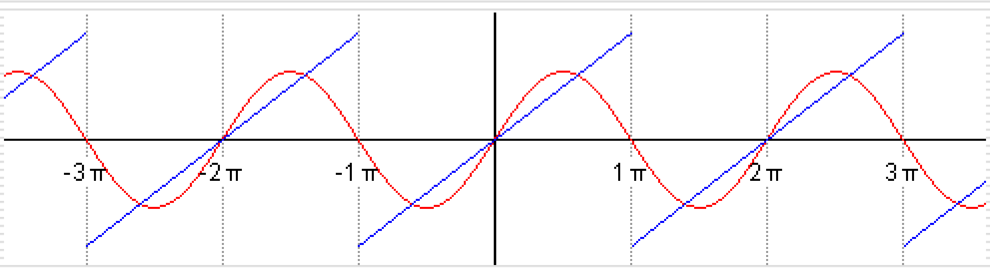


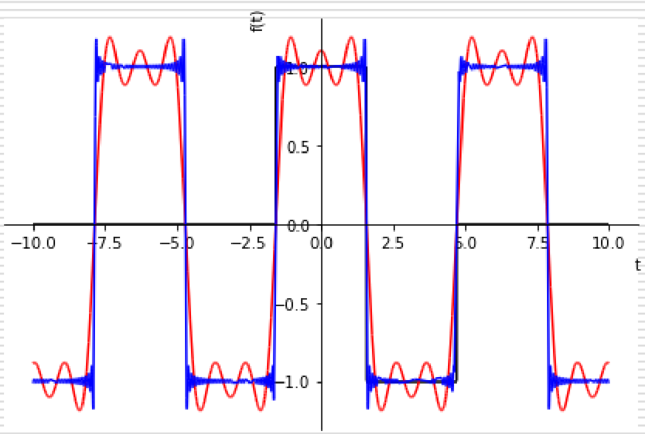
Algunas ideas

- La mayor parte de las señales de interés pueden descomponerse en una suma de componentes sinusoidales
- Se dice que la señal se representa en el dominio de la frecuencia.
- Para las señales periódicas, esta descomposición se denomina serie de Fourier.
- Para las señales de energía, la descomposición se denomina transformada de Fourier.
- La respuesta de un sistema LIT a una señal sinusoidal es otra sinusoide de la misma frecuencia pero de distinta amplitud y fase (son autofunciones)

Señales continuas

- Series de Fourier para señales periódicas en tiempo continuo
  - Fourier ideó una serie formada por **una suma lineal ponderada de exponenciales complejas o sinusoides relacionadas armónicamente**, para representar señales periódicas.
  - Ejemplos de señales periódicas de interés: señales cuadradas, rectangulares, triangulares, sinusoides y exponenciales complejas





Señales continuas

- Series de Fourier para señales periódicos en tiempo continuo

Idea intuitiva

$$F_0 = \frac{1}{T}$$

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \, cos\left(2\pi n \frac{1}{T} t\right) + b_n sen\left(2\pi n \frac{1}{T} t\right) \right]$$

  - La serie de Fourier es una suma lineal ponderada de senos y cosenos de múltiplos de la frecuencia fundamental de la función que quiero representar
  - Las constantes indican cuanto influye cada uno de los senos y cosenos en la representación

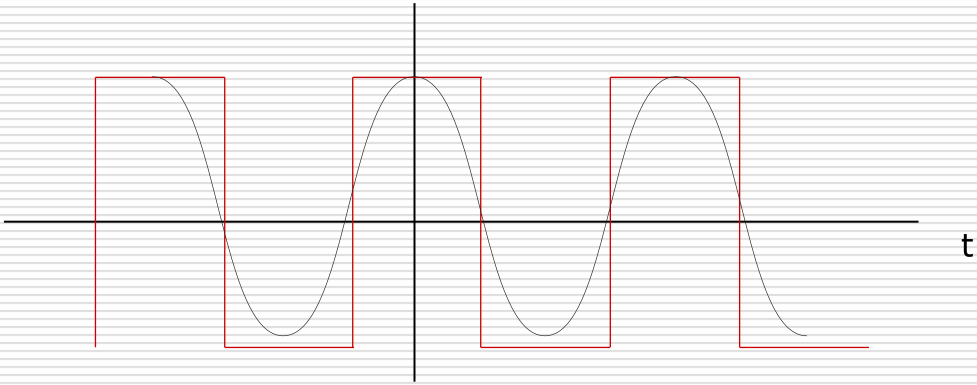
Señales continuas

- Series de Fourier para señales periódicos en tiempo continuo

Idea intuitiva

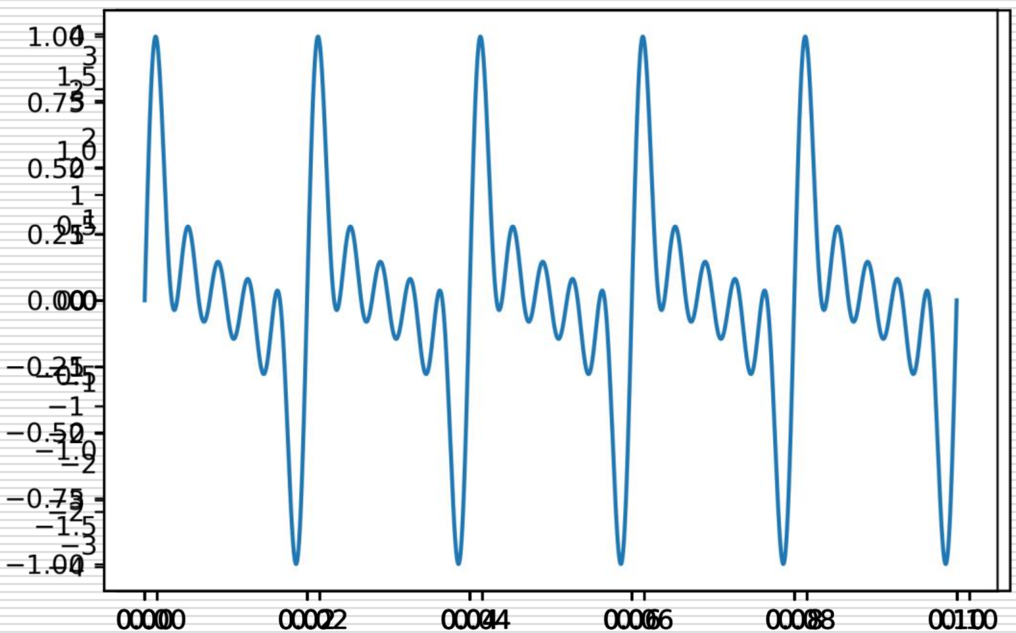
$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \, cos\left(2\pi n \frac{1}{T} t\right) + b_n sen\left(2\pi n \frac{1}{T} t\right)\right]$$

  - La suma de senos y cosenos de amplitudes y frecuencias diferentes nos permitirán representar la función



Señales continuas

- Ejemplo de suma de senos con diferentes frecuencias
- Si observamos lo que se va generando es una función periódica diferente a la función seno
- Esto nos permite ir “dibujando” otra función jugando con las frecuencias y con las amplitudes



Señales continuas

- Series de Fourier para señales periódicos en tiempo continuo

Idea intuitiva

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\, cos\left(2\pi n\frac{1}{T}t\right) + b_n sen\left(2\pi n\frac{1}{T}t\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\, cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right) + b_1 sen\left(2\pi\frac{1}{T}t\right)$$

$$+a_2\, cos\left(2\pi\frac{2}{T}t\right) + b_2 sen\left(2\pi\frac{2}{T}t\right) + \cdots +$$

$$+a_n\, cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n sen\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)$$

Señales continuas

- Series de Fourier para señales periódicos en tiempo continuo

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\, cos\left(2\pi n \frac{1}{T} t\right) + b_n sen\left(2\pi n \frac{1}{T} t\right)\right]$$

Idea intuitiva

- Los coeficientes indican lo que influye el seno y/o el coseno en la representación de la función
- De alguna forma los coeficientes son una medida de “parecido” entre la función coseno y la función a representar
- Ese “valor de parecido” lo obtenemos con el producto interno o escalar de las 2 funciones

Señales continuas

- Series de Fourier para señales periódicos en tiempo continuo

Idea intuitiva

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,cos\left(2\pi n\frac{1}{T}t\right) + b_n sen\left(2\pi n\frac{1}{T}t\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)\cos\left(2\pi n\frac{1}{T}t\right)dt$$

Integro en un período de $p(t)$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)\,sen\left(2\pi n\frac{1}{T}t\right)dt$$

- Los términos del sumatorio tienen valor medio cero (senos y cosenos)
  - a_0 nos permite “movernos” al valor medio de la función a representar

Señales continuas

- Podemos representar la serie de Fourier con exponenciales complejas pero **en esencia es lo mismo que la serie trigonométrica**

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

Ecuación de síntesis

- El sumatorio de la serie trigonomética solo tiene *n* positivos
- Las exponenciales complejas van desde el $-\infty$ al ∞
  - Esto nos permitirá agrupar pares de términos (parte negativa y parte positiva) y con ello que aparezcan senos y cosenos (Euler)

Señales continuas

- Para determinar la expresión de los coeficientes:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t} \quad \text{Ecuación de síntesis}$$

  - Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por: $e^{-j2\pi l F_0 t}$

, donde l es un entero

  - A continuación integramos la ecuación resultante en un período entre t_0 y $t_0 + T_p$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} p(t) e^{-j2\pi l F_0 t}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi l F_0 t} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t} \right) dt$$

  - Para evaluar la integral en el lado derecho intercambiamos el orden del sumatorio y la integral y combinamos las 2 exponenciales

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0 (n-l) t}\, dt$$

Señales continuas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0(n-l)t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{e^{j2\pi F_0(n-l)t}}{j2\pi F_0(n-l)}\right]_{t_0}^{t_0+T_p}$$

- Para $n \neq l$, el lado derecho evaluado para los límites inferior y superior, t_0 y $t_0 + T_p$, respectivamente, da cero
- STOP - Demostración analítica
  - Por comodidad llamamos r=n-l
  - Por comodidad integro entre $-\frac{T_p}{2}$ y $\frac{T_p}{2}$

Fórmula de Euler

$$sen\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{e^{j2\pi F_0 r t}}{j2\pi F_0 r}\right]_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{e^{j2\pi F_0 r \frac{T_p}{2}} - e^{-j2\pi F_0 r \frac{T_p}{2}}}{j2\pi F_0 r}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{sen(\pi r)}{\pi F_0 r}\right]$$

Se anula con $r \neq 0$

Señales continuas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0(n-l)t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{e^{j2\pi F_0(n-l)t}}{j2\pi F_0(n-l)}\right]_{t_0}^{t_0+T_p}$$

- Para $n \neq l$, el lado derecho evaluado para los límites inferior y superior, t_0 y $t_0 + T_p$, respectivamente, da cero
- Si $n = l$, nos queda

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = \left. t \right|_{t_0}^{t_0+T_p} = T_p$$

- Por lo tanto, la ecuación original se reduce

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} p(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi lF_0 t}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nF_0 t}\right) dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} p(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\, dt = c_l T_p \qquad \boldsymbol{c_l = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} p(t)e^{-j2\pi lF_0 t} dt}$$

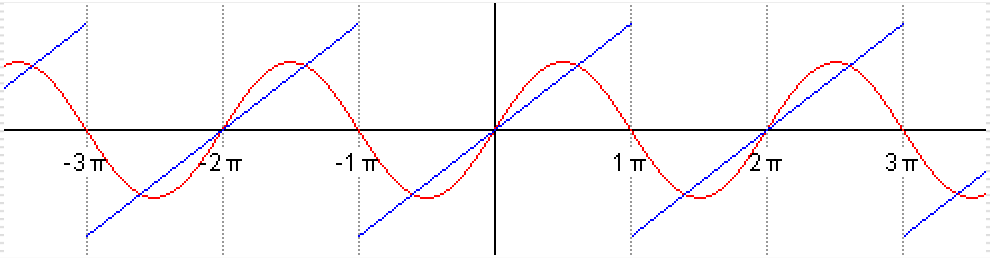
Señales continuas

- La integral resultante puede evaluarse para cualquier intervalo de longitud T_p (t_0 es arbitrario). La integral para los coeficientes de la serie de Fourier se escribirá como sigue

$$c_l = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi lF_0t}dt$$

Señales continuos

- Una cuestión importante que surge es si la señal $p(t)$ y su representación como serie de Fourier son iguales para cualquier valor de t
- Las condiciones de Dirichlet garantizan que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}$ será igual a $p(t)$ excepto para los valores de t para los que la señal es discontinua. En dichos valores, converge al valor medio de la discontinuidad



Señales continuos

- Una cuestión importante que surge es si la señal $p(t)$ y su representación como serie de Fourier son iguales para cualquier valor de t
- Las condiciones de Dirichlet garantizan que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}$ será igual a $p(t)$ excepto para los valores de t para los que la señal es discontinua. En dichos valores, converge al valor medio de la discontinuidad
- Condiciones de Dirichlet
  - La señal $p(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier período
  - La señal $p(t)$ contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier período
  - La señal $p(t)$ es absolutamente integrable en cualquier período

$$\int_{T_p} |p(t)| dt < \infty$$

Señales continuos

- Todas las señales de interés práctico satisfacen esas condiciones
- Las condiciones de Dirichlet son suficientes pero no necesarias
- En resumen, si $p(t)$ es periódica y satisface las condiciones de Dirichlet se puede representar mediante una serie de Fourier

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

Ecuación de síntesis

Donde los coeficientes están especificados como

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} p(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt$$

Ecuación de análisis

Señales continuas

- Serie trigonométrica vs Exponencial compleja

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\, cos(\Omega nt\ ) + b_n sen(\Omega nt)\ ] \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\Omega nt} \qquad \Omega = 2\pi F_0 = 2\pi \frac{1}{T_p}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{T_P} p(t)\cos(\Omega nt)\, dt \qquad c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t) e^{-j\Omega nt} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{T_p} p(t)\, sen(\Omega nt)\, dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{T_P} p(t)\cos(0)\, dt \qquad \frac{\mathrm{a}_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{T_P} p(t)\, dt$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0$$

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t) e^{0} dt \qquad c_0 = \frac{1}{T}\int_{T_P} p(t)\, dt$$

Señales continuas

- Serie trigonométrica vs Exponencial compleja

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \, cos(\Omega nt\,) + b_n sen(\Omega nt)\,] \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\Omega nt}$$

  - n=1 (primer armónico o armónico fundamental)

$$a_1 \, cos(\Omega t\,) + b_1 sen(\Omega t) \qquad c_{-1} e^{-j\Omega t} + c_1 e^{j\Omega t}$$

Fórmula de Euler

$$\mathrm{c}_{-1}[\cos(\Omega t) - jsen(\Omega t)] + c_1[\cos(\Omega t) + jsen(\Omega t)] =$$

$$c_{-1}\cos(\Omega t) + c_1\cos(\Omega t) - jc_{-1}sen(\Omega t) + jc_1 sen(\Omega t) =$$

$$(c_{-1}+c_1)\ \cos(\Omega t) + (jc_1 - jc_{-1})sen(\Omega t) =$$

$$a_1 \stackrel{?}{=} (c_{-1} + c_1)$$

$$b_1 \stackrel{?}{=} j(c_1 - c_{-1})$$

Señales continuas

- Serie trigonométrica vs Exponencial compleja

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_{T_P} p(t)\cos(\Omega n t)\,dt$$

$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j\Omega n t}dt$$

$$a_1 = (c_{-1} + c_1)$$

$$c_{-1} = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{j\Omega t}dt = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)[\cos(\Omega t) + jsen(\Omega t)]dt$$

$$c_1 = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)[\cos(\Omega t) - jsen(\Omega t)]dt$$

$$c_{-1} = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)\cos(\Omega t)\,dt + \frac{1}{T_p}j\int_{T_p} p(t)sen(\Omega t)dt$$

$$c_1 = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)\cos(\Omega t)\,dt - \frac{1}{T_p}j\int_{T_p} p(t)sen(\Omega t)dt$$

$$+ \quad \frac{2}{T_p}\int_{T_p} p(t)\cos(\Omega t)\,dt$$

Señales continuas

- Serie trigonométrica vs Exponencial compleja

  - $p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\, cos(\omega nt\ ) + b_n sen(\omega nt)\ ] =$

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 sen(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 sen(2\omega t) + \ldots$$

  - $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega nt} =$

$$\ldots + c_{-2}e^{-j2\omega t} + c_{-1}e^{-j\omega t} + c_0 + c_1 e^{j\omega t} + c_2 e^{j2\omega t} + \cdots$$

Señales continuas

- Una señal periódica $x(t)$ tiene energía infinita y una **potencia media finita** definida como:

Ecuación de síntesis

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nF_0 t}}$$

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)\underline{x^*(t)}dt \quad = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j2\pi nF_0 t}\,dt$$

Sustituimos por el complejo conjugado de la ecuación de síntesis

Ecuación de análisis

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c_n^*\left[\frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt\right]}$$

Ecuación de análisis

$$\mathrm{P}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Relación de Parseval

Señales continuas

- Espectro de densidad de potencia

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$ Relación de Parseval

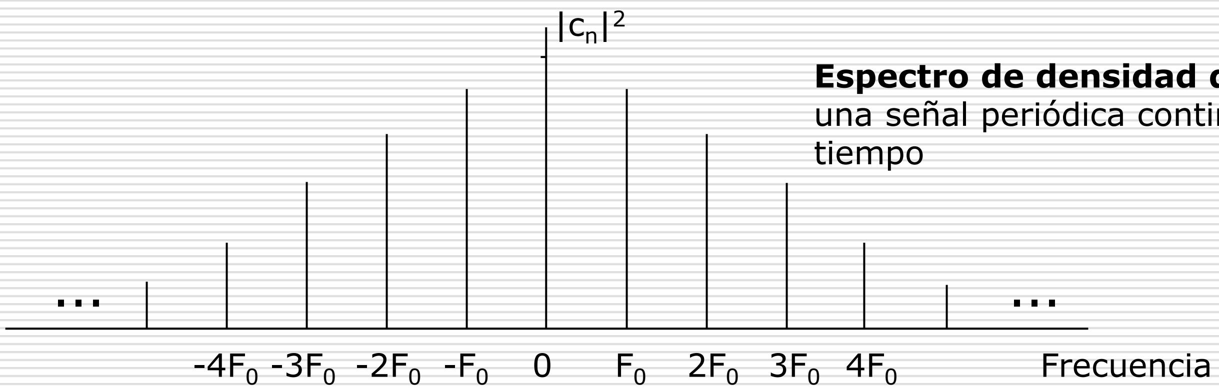
  - Demos un significado físico a esta relación
  - Supongamos que $x(t)$ consta de una única exponencial compleja

$$x(t) = c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

  - En este caso todos los coeficientes de Fourier, excepto c_n, son cero. La potencia media de la señal es: $P_x = |c_n|^2$
  - $|c_n|^2$ representa la potencia en el armónico *n-ésimo* de la señal
  - **La potencia media total** de la señal periódica es **la suma de las potencias medias de todos los armónicos**

Señales continuas

- Espectro de densidad de potencia
  - Si dibujamos en una gráfica $|c_n|^2$ como una función de las frecuencias $nF_0, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ La gráfica mostrará cómo se distribuye la potencia de la señal periódica entre las diferentes componentes de frecuencia



Espectro de densidad de potencia de una señal periódica continua en el tiempo

  - La potencia de una señal periódica sólo existe en los valores discretos de frecuencia
    - Se dice que la señal tiene un espectro de líneas

Señales continuas

- Espectro de densidad de potencia
  - Tened en cuenta que los coeficientes de Fourier son valores complejos que se pueden representar como

$$c_n = |c_n| e^{j\theta_n} \qquad \theta_n \angle\, c_n$$

  - En lugar de representar la gráfica del espectro de densidad de potencia, podemos representar el módulo ($|c_n|$) y la fase (θ_n) como funciones de la frecuencia
  - La densidad espectral de potencia es simplemente el cuadrado del módulo ($|c_n|^2$)
    - La información de fase se pierde o no aparece

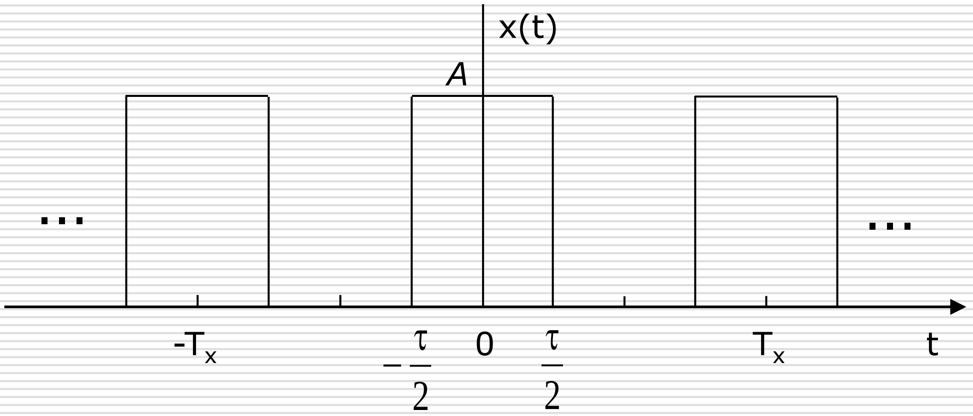
Señales continuas

- Si la señal periódica es real, los coeficientes de Fourier satisfacen la condición $c_{-n} = \mathrm{c}_n^*$
- En consecuencia $|c_n|^2 = |c_n^*|^2$
- Ya que el **espectro de densidad de potencia es una función simétrica de la frecuencia**, esta condición también implica que **el módulo es simétrico** (función par) respecto al origen y la fase es una función impar
- Gracias a esta simetría basta con especificar el espectro de potencia de la señal real periódica solo para las frecuencias positivas
- La potencia media total puede expresarse como:

$$P_x = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

Señales continuas

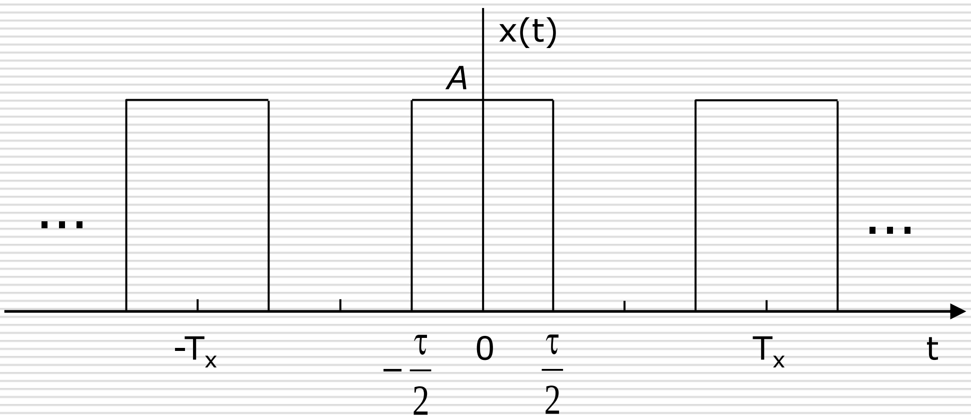
- Ejemplo: Determinar la serie de Fourier y el espectro de densidad de potencia del tren de impulsos de la figura:



- La señal es periódica con período fundamental T_x, y satisface las condiciones de Dirichlet.
- $x(t)$ es una señal par($x(t) = x(-t)$), por lo que seleccionaremos como intervalo de integración de $-\frac{T_x}{2}$ a $\frac{T_x}{2}$

Señales continuas

- Calculamos los coeficientes de la serie



Ecuación de análisis

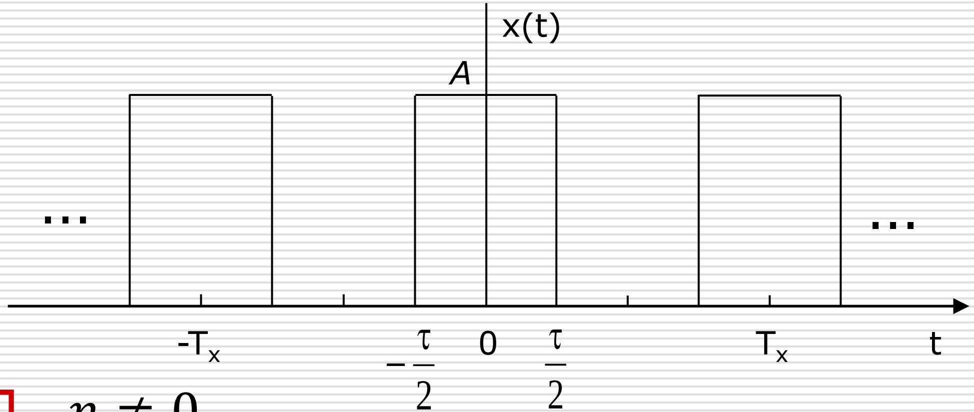
$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi n F_0 t}dt$$

- $n = 0$ (valor medio)

$$c_0 = \frac{1}{T_x}\int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} x(t)dt = \frac{1}{T_x}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\,dt = \frac{A}{T_x}t\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_x}$$

Señales continuas

- Calculamos los coeficientes de la serie



Ecuación de análisis

$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt$$

Fórmula de Euler

$$sen\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

- $n \neq 0$

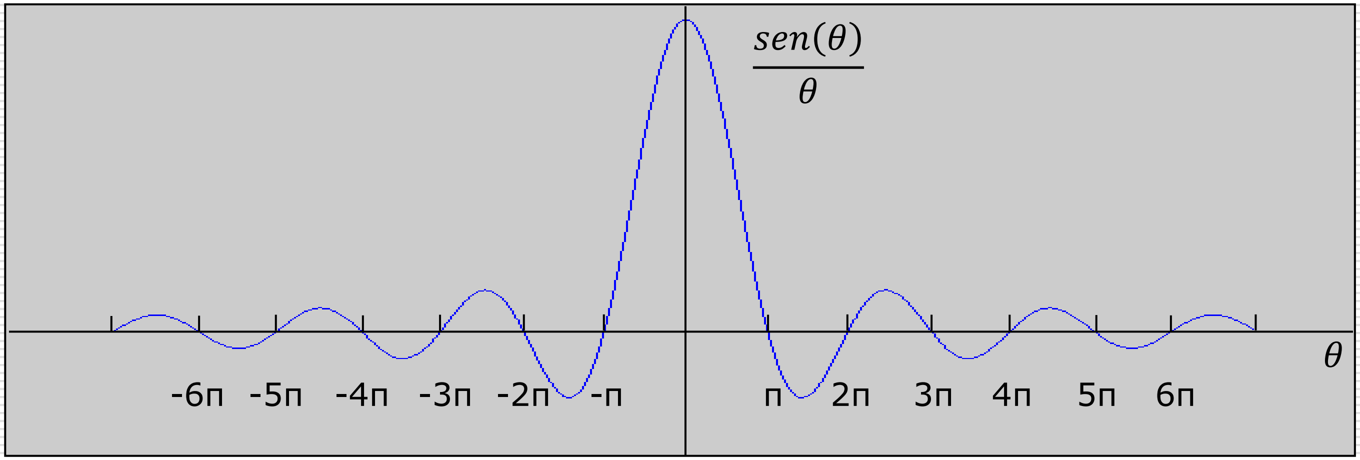
$$c_n = \frac{1}{T_x}\int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} x(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt \quad = \frac{A}{T_x}\left[\frac{e^{-j2\pi F_0 nt}}{-j2\pi nF_0}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \quad = \frac{A}{T_x}\left[\frac{e^{-j\pi F_0 n\tau}}{-j2\pi nF_0} - \frac{e^{j\pi F_0 n\tau}}{-j2\pi nF_0}\right]$$

$$= \frac{A}{T_x \pi nF_0}\frac{e^{j\pi F_0 n\tau} - e^{-j\pi F_0 n\tau}}{j2} = \frac{A}{T_x}\frac{sen(\pi F_0 n\tau)}{\pi F_0 n} = \frac{A\tau}{x}\frac{sen(\pi F_0 n\tau)}{\pi F_0 n\tau}$$

$$sinc = \frac{sen(\theta)}{\theta}$$

Señales continuas

- La función seno cardinal
  - Graficada como un continuo (NO es nuestro caso)



- **Los valores de los coeficientes** obtenidos, son una versión de la función **seno cardinal** a cuya amplitud se le ha aplicado **un factor de escala**

$$c_n = \frac{A\tau}{T_x} \frac{sen(\theta)}{\theta}$$

Señales continuas

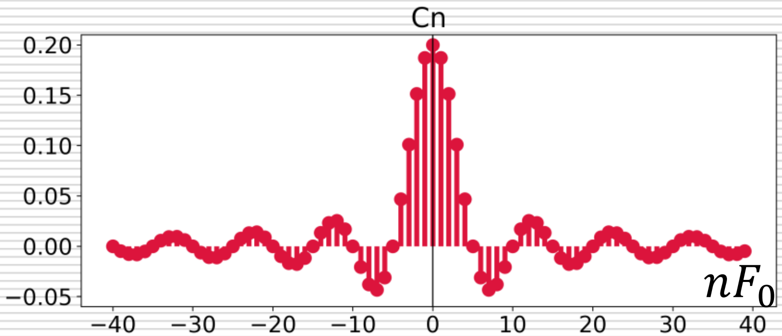
- El espectro de densidad de potencia resultante

$$|c_n|^2 = \begin{cases} \left(\frac{A\tau}{T_x}\right)^2, & n = 0 \\ \left(\frac{A\tau}{T_x}\right)^2 \left(\frac{sen(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau}\right)^2 & n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

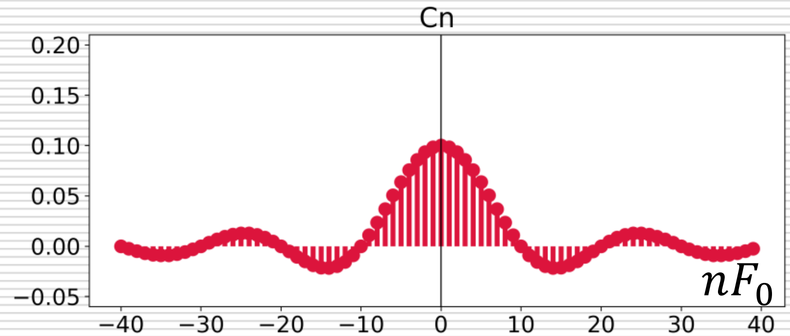
- Espectro de módulo y de fase
  - Puesto que la función es par, los coeficientes de Fourier son reales
  - Por tanto el espectro de fase es 0 para los $c_n$positivos y π para los c_n negativos
  - En este caso, en lugar de dibujar los espectros de módulo y fase por separado se suele dibujar $\{c_n\}$ en una única gráfica, indicando los valores positivos y negativos

Señales continuas

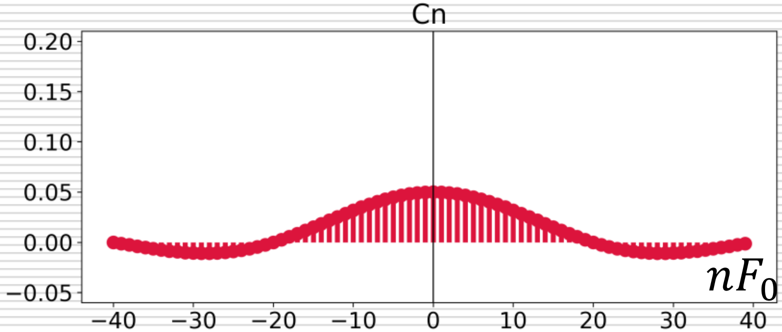
- Las siguiente figura muestra los coeficientes c_n cuando el período es fijo ($F_0 = 4hz$) y cambia la anchura del pulso (τ)



$\tau = 0.2T_x$



$\tau = 0.1T_x$

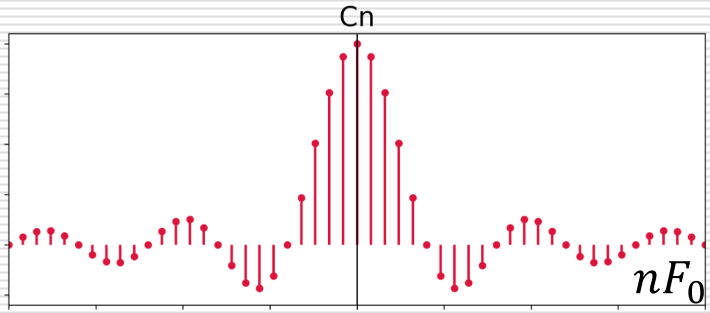


$\tau = 0.05T_x$

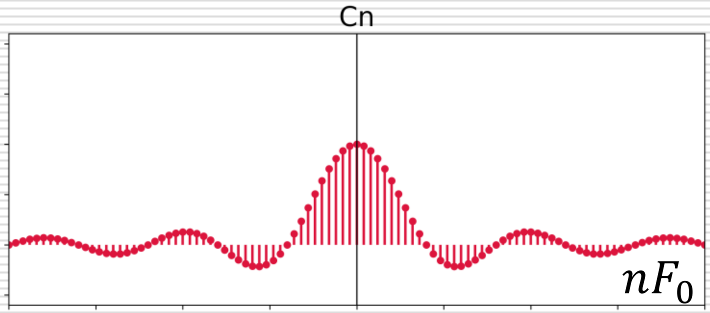
- El efecto de dejar el periodo fijo y disminuir la anchura del pulso es dispersar la potencia de la señal en el rango de frecuencias
- El espaciado entre líneas espectrales es constante ($F_0 = 4Hz$)

Señales continuas

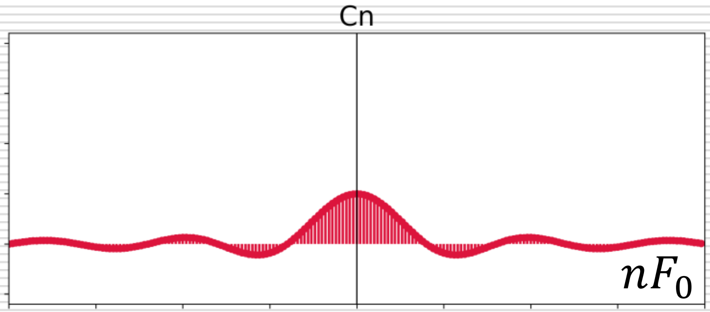
- Las siguientes figuras muestran los coeficientes c_n cuando la anchura del pulso (τ) y varía el período T_p $(T_p > \tau)$



$T_x = 5\tau$



$T_x = 10\tau$

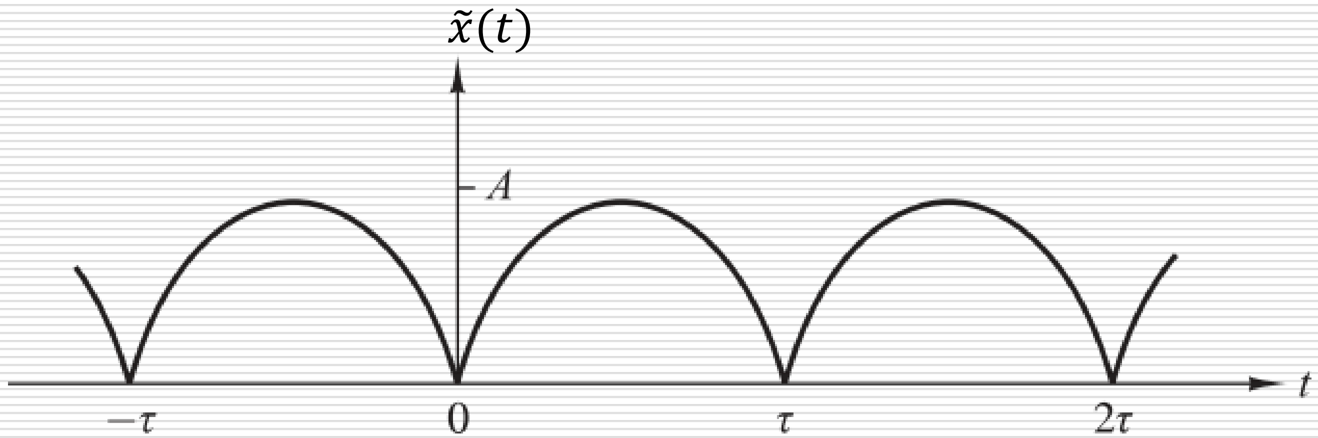


$T_x = 20\tau$

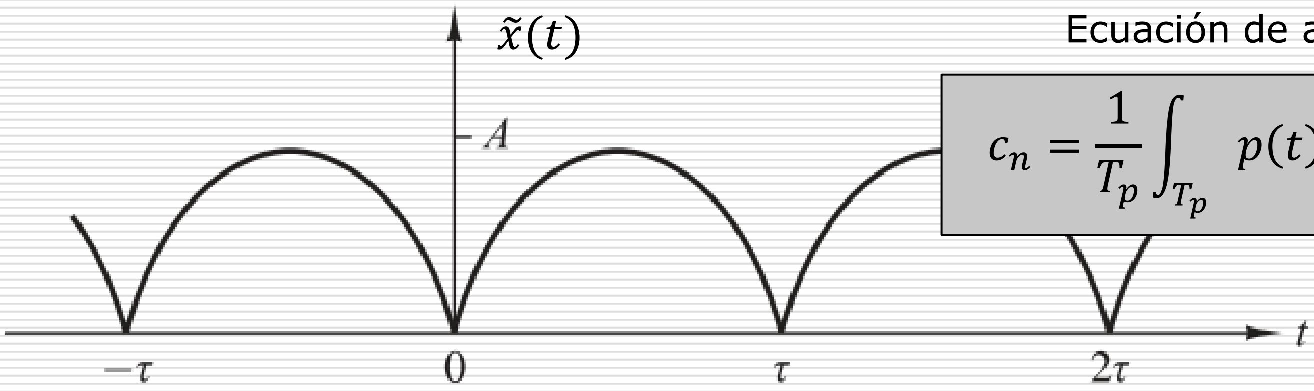
- Dejar la anchura del pulso fija y variar el período es modificar el espaciado entre las líneas espectrales. Si el período aumenta el espaciado disminuye
- En el límite $T_x \to \infty$ los coeficientes tienden a cero. La señal deja de ser una señal de potencia y pasa a ser de energía con potencia media cero

Ejercicio

- Dada la siguiente señal periódica (sinusoide rectificada):
  - Determinar la serie de Fourier



Ejercicio



Ecuación de análisis

$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt$$

$$\tilde{x}(t) = A\sin(\frac{\pi t}{\tau})$$

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} A sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)e^{-j2\pi nF_0 t}dt \quad = \frac{A}{\tau 2j}\int_0^{\tau}(e^{\frac{j\pi t}{\tau}} - e^{\frac{-j\pi t}{\tau}})e^{-\frac{j2\pi n}{\tau}t}dt$$

$$= \frac{A}{\tau 2j}\int_0^{\tau} e^{\frac{j\pi(1-2n)t}{\tau}} - e^{\frac{-j\pi(1+2n)t}{\tau}}dt \quad = \frac{A}{\tau 2j}\int_0^{\tau} e^{\frac{j\pi(1-2n)t}{\tau}}dt - \frac{A}{\tau 2j}\int_0^{\tau} e^{\frac{-j\pi(1+2n)t}{\tau}}dt$$

Ejercicio

$$= \frac{A}{\tau 2j}\int_0^{\tau} e^{\frac{j\pi(1-2n)t}{\tau}}dt - \frac{A}{\tau 2j}\int_0^{\tau} e^{\frac{-j\pi(1+2n)t}{\tau}}dt$$

$$\frac{A}{\tau 2j}\left[\frac{e^{\frac{j\pi(1-2n)t}{\tau}}}{\frac{j\pi(1-2n)}{\tau}}\right]_0^{\tau} - \frac{A}{\tau 2j}\left[-\frac{e^{-\frac{j\pi(1+2n)t}{\tau}}}{\frac{j\pi(1+2n)}{\tau}}\right]_0^{\tau} = \frac{A}{\tau 2j}\left[\frac{e^{j\pi(1-2n)}-1}{\frac{j\pi(1-2n)}{\tau}}\right] + \frac{A}{\tau 2j}\left[\frac{e^{-j\pi(1+2n)}-1}{\frac{j\pi(1+2n)}{\tau}}\right]$$

$$= -\frac{A}{2\pi(1-2n)}\left(e^{j\pi}e^{-j2\pi \mathrm{n}} - 1\right) - \frac{A}{2\pi(1+2n)}\left(e^{-j\pi}e^{-j2\pi n} - 1\right)$$

$$= -\frac{A}{2\pi(1-2n)}(-1-1) - \frac{A}{2\pi(1+2n)}(-1-1) \qquad = \frac{A}{\pi(1-2n)} + \frac{A}{\pi(1+2n)}$$

Ejercicio

$$= \frac{A}{\pi(1-2n)} + \frac{A}{\pi(1+2n)} \qquad = \frac{A}{\pi}\frac{(1+2n+1-2n)}{(1-2n)(1+2n)}$$

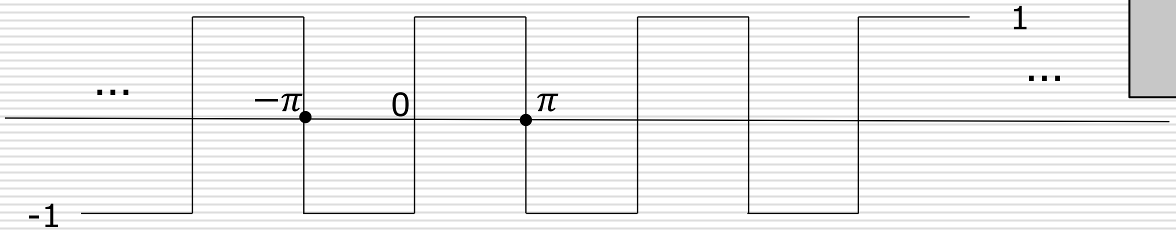
$$C_n = \frac{2A}{\pi(1-4n^2)}$$

Ejercicio

- Obtén los coeficientes de Fourier de la siguiente señal

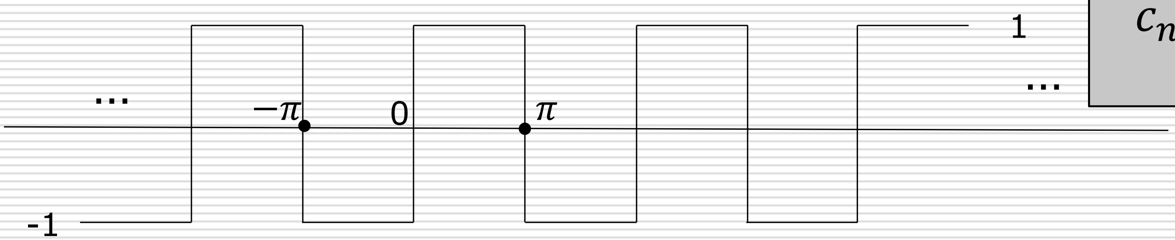
$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt$$

Ecuación de análisis



Ejercicio

- Obtén los coeficientes de Fourier de la siguiente señal



$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt$$

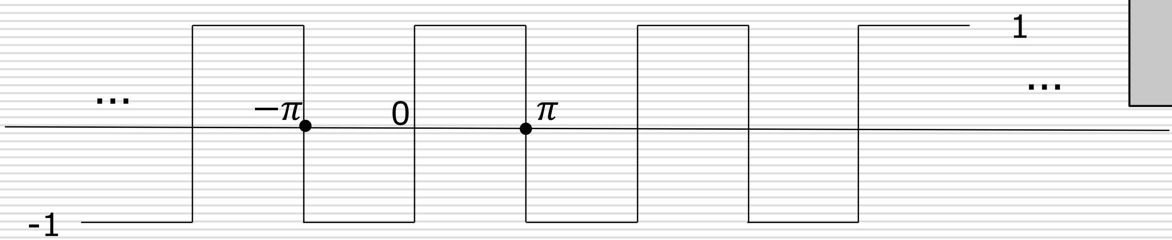
Ecuación de análisis

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1dt + \int_{0}^{\pi} 1dt\right] = \frac{1}{2\pi}\left[-t\Big|_{-\pi}^{0} + t\Big|_{0}^{\pi} \right] = \frac{1}{2\pi}[-\pi+\pi] = 0$$

Ejercicio

- Obtén los coeficientes de Fourier de la siguiente señal



$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt$$

Ecuación de análisis

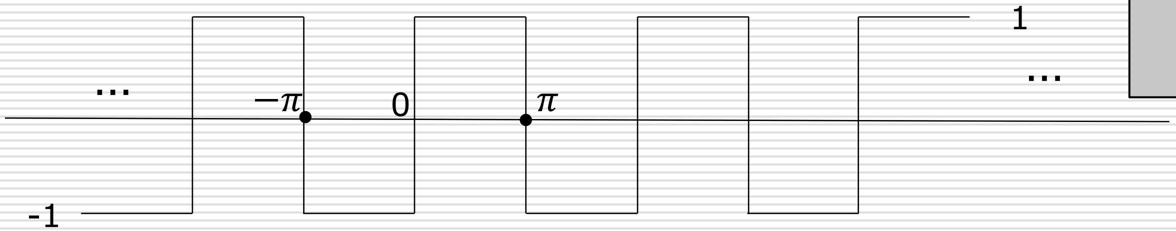
Coeficientes C_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-\frac{j2\pi nt}{2\pi}}dt \quad = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -e^{-jnt}dt + \int_{0}^{\pi} e^{-jnt}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{e^{-jnt}}{(-jn)}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{e^{-jnt}}{(-jn)}\Big|_{0}^{\pi}\right] \quad = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{(-jn)} + \frac{e^{jn\pi}}{(-jn)} + \frac{e^{-jn\pi}}{(-jn)} - \frac{1}{(-jn)}\right]$$

Ejercicio

- Obtén los coeficientes de Fourier de la siguiente señal



$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt$$

Ecuación de análisis

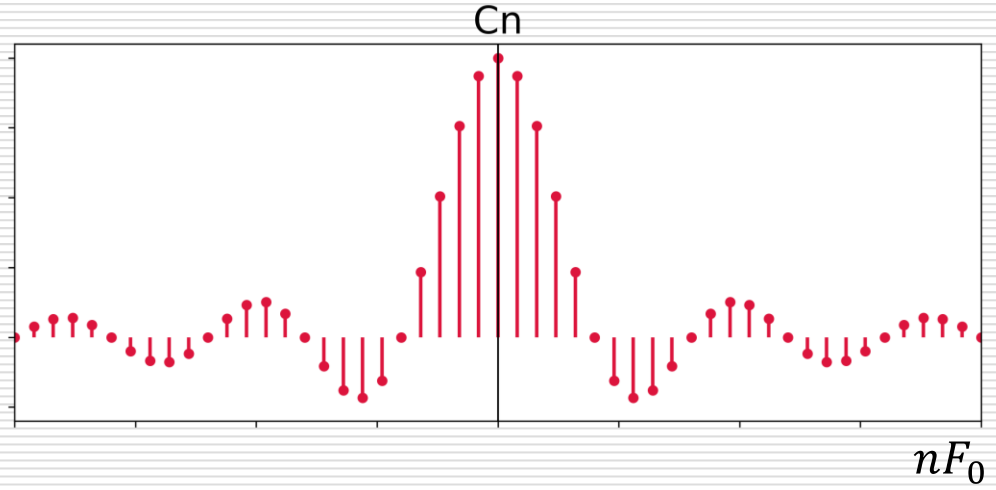
$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{(-jn)} + \frac{e^{jn\pi}}{(-jn)} + \frac{e^{-jn\pi}}{(-jn)} - \frac{1}{(-jn)}\right] = \frac{1}{2\pi(-jn)}\left[e^{j\pi n} + e^{-j\pi n} - 2\right]$$

$$= -\frac{1}{j\pi n}\left[\frac{(e^{j\pi n}+e^{-j\pi n})}{2} - 1\right] = -\frac{1}{j\pi n}[\cos(\pi n) - 1]$$

$$C_n\begin{cases} 0, n\ es\ par \\ \frac{2}{j\pi n}, n\ es\ impar \end{cases}$$

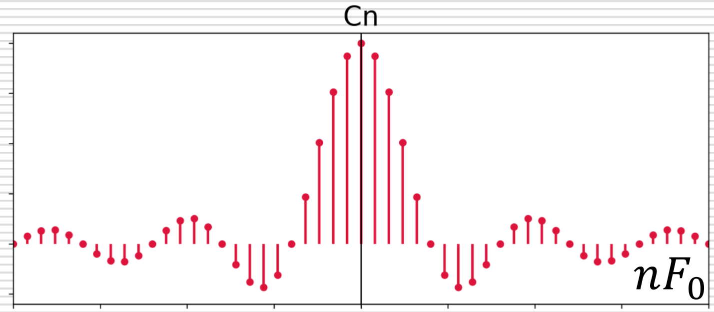
Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - Hemos desarrollado la serie de Fourier como una combinación lineal de exponenciales armónicamente relacionadas
    - Como consecuencia de la periodicidad decimos que estas señales poseen espectros de líneas



Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas



  - La distancia entre líneas es igual a la frecuencia fundamental
  - La densidad de líneas está marcada por el período de la señal
  - Si el período aumenta sin límite, la distancia entre líneas tiende a cero. En el límite, cuando el período se vuelve infinito, la señal se vuelve aperiódica y su espectro continuo. Pasamos a tener una señal de energía

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - Si tenemos una señal períodica podemos calcular su serie de Fourier como una combinación lineal de exponenciales complejas

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} p(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt$$

  - Si tenemos una señal aperiódica podemos calcular su transformada de Fourier con la siguiente definición

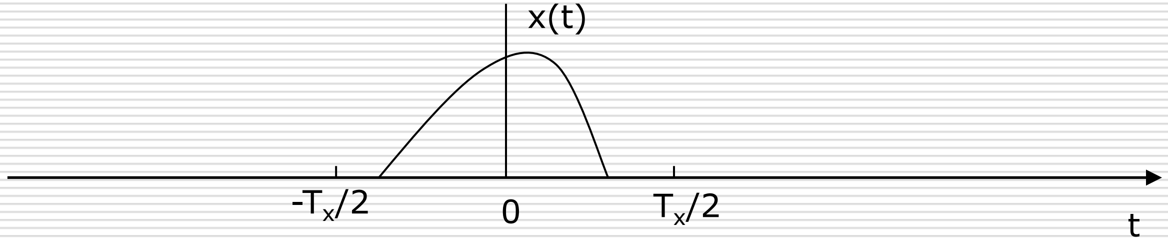
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi F t} dF$$

$$\mathrm{X}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt$$

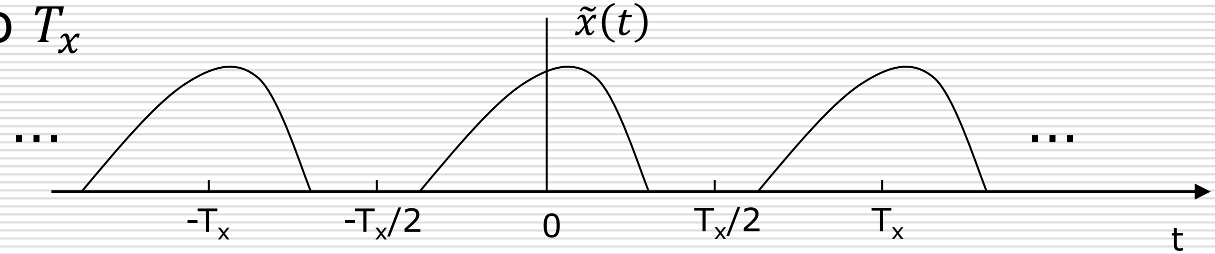
  - Tienen cierto parecido pero ¿Cómo unimos estos dos mundos? Empecemos por la ecuación de análisis

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - Consideremos una señal aperiódica $x(t)$



  - A partir $\mathrm{x}(t)$ podemos crear una señal periódica, $\tilde{x}(t)$, con período T_x



  - Si hacemos crecer el período hasta el infinito en el límite, cuando $T_{\tilde{x}} \to \infty$

$$x(t) = \lim_{T_{\tilde{x}} \to \infty} \tilde{x}(t)$$

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - Siguiendo esta idea, deberíamos de poder obtener el espectro $x(t)$ a partir del espectro de $\tilde{x}(t)$, simplemente calculando el límite cuando $T_{\tilde{x}} \rightarrow \infty$
  - Vamos a ver como podemos relacionar los dos espectros
  - Representamos la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}, \qquad F_0 = \frac{1}{T_p}$$

$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}}$$

Ecuación de síntesis

  - Donde sus coeficientes son:

$$c_n = \frac{1}{T_{\tilde{x}}} \int_{-\frac{T_{\tilde{x}}}{2}}^{\frac{T_{\tilde{x}}}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} p(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt}$$

Ecuación de análisis

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - Dado que $\tilde{x}(t) = x(t)$ para $-\frac{T_{\tilde{x}}}{2} \leq t \leq \frac{T_{\tilde{x}}}{2}$. El cálculo de los coeficientes puede expresarse como:

$$c_n = \frac{1}{T_{\tilde{x}}} \int_{-\frac{T_{\tilde{x}}}{2}}^{\frac{T_{\tilde{x}}}{2}} x(t) e^{-j2\pi nF_0 t} dt$$

  - También se cumple que $x(t) = 0$ para $|t| > \frac{T_{\tilde{x}}}{2}$. Por lo que podemos reemplazar los límites de la integral:

$$c_n = \frac{1}{T_{\tilde{x}}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi nF_0 t} dt$$

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas

  - Definimos una **función $X(F)$ como la transformada de Fourier de $x(t)$**

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt$$

  - Donde $X(F)$ es una función de la variable continua F que no depende de T_x ni de F_0
  - Si la comparamos con la ecuación para el cálculo de los coeficientes de Fourier, vemos que éstos pueden expresarse en función de $X(F)$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T_{\tilde{x}}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt} \qquad c_n = \frac{1}{T_{\tilde{x}}} X(nF_0) \qquad \boldsymbol{T_{\tilde{x}} c_n = X(nF_0) = X\left(\frac{n}{T_{\tilde{x}}}\right)}$$

$X(nF_0)$

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas

$$\boldsymbol{T_{\tilde{x}} c_n = X(nF_0) = X\left(\frac{n}{T_{\tilde{x}}}\right)}$$

  - Los coeficientes de Fourier son, por tanto, muestras de $X(F)$ tomadas en múltiplos de F_0 y escaladas por F_0 (equivalente a $\frac{1}{T_{\tilde{x}}}$)
  - Vamos a ver ahora como relacionar las ecuaciones de síntesis
  - Sustituimos la expresión anterior en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier para $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T_{\tilde{x}}} X\left(\frac{n}{T_{\tilde{x}}}\right)}_{c_n} e^{j2\pi n F_0 t}$$

Ecuación de síntesis

$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}}$$

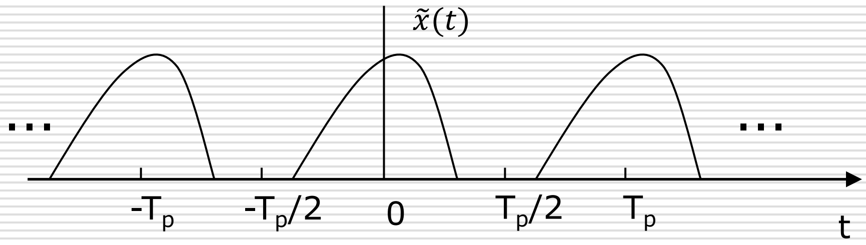
Señales continuas

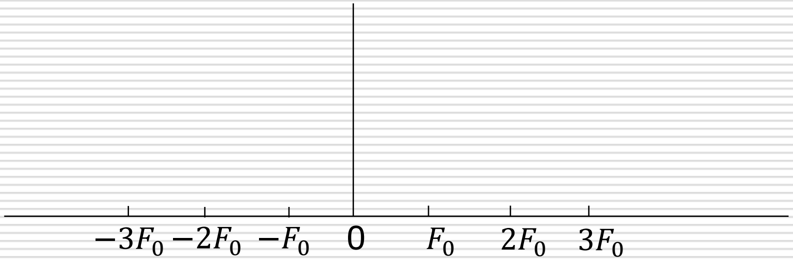
- Transformada de Fourier para señales aperiódicas

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T_{\tilde{x}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_{\tilde{x}}}\right) e^{j2\pi n F_0 t}$$

  - Vamos a tomar el límite cuando $T_{\tilde{x}}$ tiende a infinito
  - Vamos a definir $\Delta F = \frac{1}{T_{\tilde{x}}}$ y sustituirlo en la ecuación

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta \mathrm{F}) e^{j2\pi n \Delta F t}\, \Delta F$$





Frecuencias que utiliza la serie de Fourier

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\mathrm{F})e^{j2\pi n\Delta F t}\,\Delta F$$

  - Cuando $T_{\tilde{x}}$ tiende a infinito, $\tilde{x}(t)$ se reduce a $x(t)$

$$\lim_{T_{\tilde{x}}\to\infty} \tilde{x}(t) = x(t)$$

  - $n\Delta F$ se convierte en la variable de frecuencia continua F
  - El sumatorio pasa a ser una integral
  - ΔF se convierte en el diferencial dF

$$\lim_{\Delta F\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\mathrm{F})e^{j2\pi n\Delta F t}\,\Delta F \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi F t}\,dF$$

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - Esta integral proporciona $x(t)$ cuando se conoce $X(F)$ por lo que recibe el nombre de transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

  - Resumiendo:

Análisis en frecuencia de señales aperiódicas continuas en el tiempo

Ecuación de síntesis (transformada inversa)	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$
Ecuación de análisis (transformada directa)	$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - El conjunto de condiciones que garantiza (son suficientes pero no necesarias) la existencia de la transformada de Fourier son las condiciones de Dirichlet

1. La señal $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas
2. La señal $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos
3. La señal $x(t)$ es absolutamente integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - Sea $x(t)$ una señal de energía finita con la transformada de Fourier $X(F)$. Su energía es:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

  - Que puede expresarse en función de $X(F)$ como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\underline{x^*(t)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)e^{-j2\pi Ft}dF\right]$$

Ecuación de síntesis	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}dF$
Ecuación de análisis	$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt$

  - Intercambiamos las integrales

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)dF \left[\underline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt}\right]$$

Relación de Parseval

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF}$$

Señales continuas

- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
- **Espectro de densidad de energía**
  - Se define como:

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2$$

  - Representa la distribución de energía de la señal como una función de la frecuencia
  - La integral de $S_{xx}(F)$ para todas las frecuencias proporciona la energía total del sistema
  - La energía de la señal $x(t)$ en la banda de frecuencias $F_1 \leq F \leq F_1 + \Delta F$ es:

$$\int_{F_1}^{F_1+\Delta F} S_{xx}(F)df \geq 0$$

  - Lo que implica que $S_{xx}(f) \geq 0, \forall F$

Señales continuas

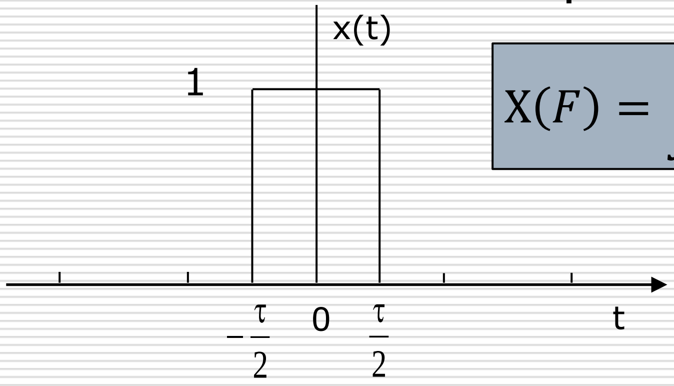
- Transformada de Fourier para señales aperiódicas
  - El espectro de $X(F)$ de una señal es, por lo general, un valor complejo

$$X(F) = |X(F)|e^{j\theta(F)}$$

  - Donde $|x(F)|$ es el módulo del espectro y $\theta(F)$ es la fase del espectro
  - El espectro de densidad de energía no contiene información sobre la fase ($S_{xx}(F)$ es puramente real y no negativa). No se puede reconstruir la señal conocida $S_{xx}(F)$
  - Como en el caso de la serie de Fourier, si la señal $x(t)$ es real entonces
    - $X^*(F) = X(-F)$
      - $|X(-F)| = |X(F)| \Rightarrow S_{xx}(-F) = S_{xx}(F)$ Simetría par
      - $\angle X(-F) = -\angle X(F)$ Simetría impar

Ejercicio

- Calcula la transformada de Fourier de un impulso rectangular

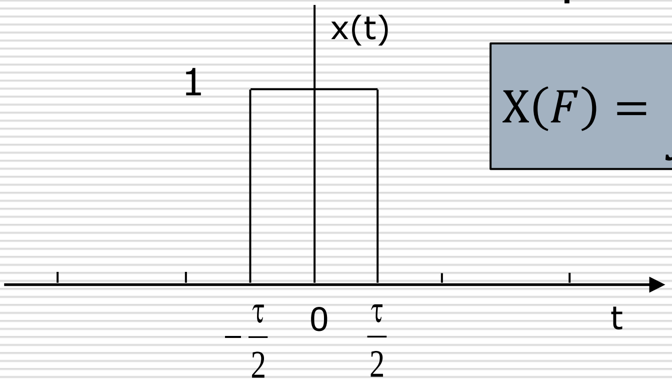


$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Ejercicio

- Calcula la transformada de Fourier de un impulso rectangular



$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

$$\mathrm{x(t)} = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$X(F) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi Ft}\,dt$$

$$\left.\frac{e^{-j2\pi Ft}}{-j2\pi F}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{e^{-j\pi F\tau}}{-j2\pi F} + \frac{e^{j\pi F\tau}}{j2\pi F} = \frac{1}{\pi F}\left[\frac{e^{j\pi F\tau} - e^{-j\pi F\tau}}{2j}\right] = \tau\frac{sen\pi F\tau}{\pi F\tau} = \boldsymbol{\tau sinc(\pi F\tau)}$$

Ejercicio

- Calcula la transformada de Fourier de la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

Ejercicio

- Calcula la transformada de Fourier de la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

$$\boxed{X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt}$$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt$$

Integral impropia

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi Ft}\,dt \quad = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{(-a-j2\pi F)t}dt$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{e^{(-a-j2\pi F)t}}{-a-j2\pi F}\Bigg]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{(-a-j2\pi F)b}}{-a-j2\pi F} + \frac{1}{a+j2\pi F}\right) =$$

$z = re^{j\theta}$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-ab}e^{-j2\pi Fb}}{-a-j2\pi F} + \frac{1}{a+j2\pi F}\right) = \qquad X(F) = \frac{1}{a+j2\pi F}$$

Ejercicio

- Calcula el módulo y la fase del espectro de la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

$$\mathrm{X}(F) = \frac{1}{a + j2\pi F}$$

$$|X(F)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+(2\pi F)^2}}$$

$$\angle X(F) = 0 - \arctan(\frac{2\pi F}{a})$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan(\frac{b}{a})$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{a+bj}{c+dj}\right| = \arctan(\frac{b}{a})\text{-}\arctan(\frac{d}{c})$$

Señales discretas

- Una representación en series de Fourier de una señal en tiempo continuo puede tener infinitas componentes de frecuencias separadas por $\frac{1}{T_p}$
- En tiempo continuos el rango de frecuencias se extiende entre -∞ y ∞
- Por el contrario, en tiempo discreto el rango de frecuencias está limitado al intervalo $(-\pi\,,\pi\,)$ o $(0,2\pi)$
- Una señal en tiempo discreto de período fundamental N puede constar de componentes en frecuencia separados por $\frac{2\pi}{N}$ radianes o $f=\frac{1}{N}$ ciclos
- **La representación en series de Fourier de una señal en tiempo discreto tiene como máximo N componentes de frecuencia**

Señales discretas

- Serie de Fourier para señales periódicas
  - Supongamos una secuencia x[n] de período N

$$x_p[n] = x_p[n+N]$$

  - Su representación en serie de Fourier consta de **N funciones exponenciales armónicamente relacionadas** $e^{j2\pi nk\frac{1}{N}}, \quad k=0,1,\dots,N-1$
  - Y se expresa como: $x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk\frac{1}{N}}$
  - Donde los coeficientes se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi nk\frac{1}{N}}$$

Nota: en señales discretas reservamos *n* está reservado para el índice de muestras y *k* es el valor entero que multiplica la frecuencia

Señales discretas

- Serie de Fourier para señales periódicas

Análisis en frecuencia de señales periódicas discretas en el tiempo

Ecuación de síntesis Serie de Fourier Discreta en el Tiempo (DTFS)	$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k \frac{1}{N} n}$
Ecuación de análisis	$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi k \frac{1}{N} n}$

- Veamos la similitud con el tiempo continuo

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t} \qquad c_n = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} p(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt$$

Señales discretas

- Serie de Fourier para señales periódicas
  - Los coeficientes de Fourier $\{c_k\}, k = 0,1, \ldots, N-1$ proporcionan la descripción de $x_p[n]$ en el dominio de la frecuencia
    - c_k representa la amplitud y la fase asociadas al componente de la frecuencia
  - Los coeficientes más allá de rango $\mathrm{k} = 0, 1, \ldots, N-1$ también satisfacen la condición de periodicidad

$$c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p[n]e^{-j2\pi(k+N)\frac{1}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p[n]e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n} = c_k$$

  - **El espectro de una señal $x[n]$ periódica de período N es una secuencia periódica de período N**
  - N cualesquiera muestras consecutivas de la señal o de su espectro proporcionan una descripción completa de la señal en los dominios del tiempo y la frecuencia respectivamente

Ejercicios

- Determina el espectro de la siguiente señal

$$x[n] = \cos\frac{\pi}{3}n$$

Ejercicios

- Determina el espectro de la siguiente señal

$$x[n] = \cos\frac{\pi}{3}n$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n}$$

$$\omega = \frac{\pi}{3} = 2\pi f_0 \qquad \mathrm{f}_0 = \frac{1}{6} \qquad \mathrm{N} = 6$$

$$c_k = \sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-j2\pi \mathrm{k}n/6}$$

Ecuación de síntesis

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k\frac{1}{N}n}$$

- Opción 2

$$x[n] = \cos\frac{\pi}{3}n = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{e^{j2\pi n/6}+e^{-j2\pi n/6}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_1}\mathrm{e}^{j2\pi n/6} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_{-1}}e^{-j2\pi n/6}$$

$$c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \qquad c_1 = c_5 = \frac{1}{2}$$

Ejercicios

- Determina el espectro de la siguiente señal

$$x[n] = \cos\sqrt{2}\,\pi n$$

Ejercicios

- Determina el espectro de la siguiente señal

  $x[n] = \cos \sqrt{2}\, \pi n$

  - $\omega_0 = \sqrt{2}\pi,\ f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
  - f_0 no es un número racional por lo que la señal no es periódica
  - No puede expandirse en una serie de Fourier
  - Tiene un espectro de una sola componente en frecuencia
    - $\omega = \omega_0 = \sqrt{2}\, \pi$

Ejercicios

- Determinar el espectro de las señales
  - $x[n]$ es periódica de período N=4 y $x[n] = \{1,1,0,0\}$

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j2\pi kn/4}$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n}$$

$$c_k = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-\frac{j\pi k}{2}}\right) + 0 + 0$$

Lo desarrollamos a través de la fórmula de Euler para cada k

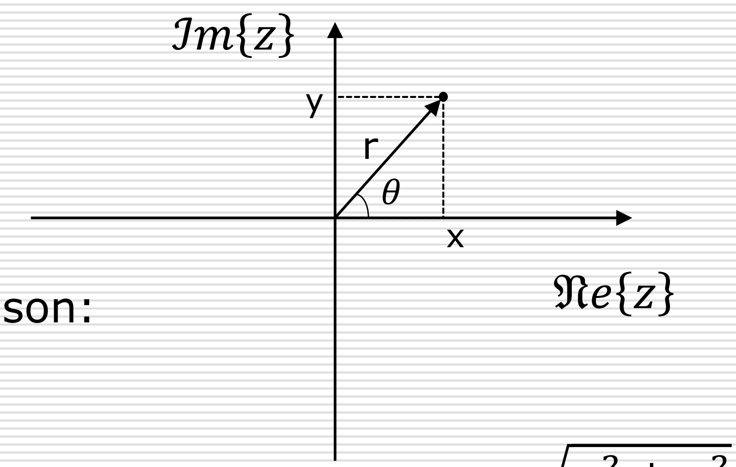
$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = \frac{1}{4}(1-j), \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = \frac{1}{4}(1+j)$$

Son números complejos en forma binómica

Ejercicios

- Determinar el espectro de las señales
  - $x[n]$ es periódica de período N=4 y $x[n] = \{1,1,0,0\}$

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = \frac{1}{4}(1-j),$$
$$c_2 = 0, \qquad c_3 = \frac{1}{4}(1+j)$$



  - El módulo y la fase de los espectros son:

$$|c_0| = \frac{1}{2}, \ |c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \ |c_2| = 0, \ |c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\angle c_0 = 0, \qquad \angle c_1 = -\frac{\pi}{4},$$
$$\angle c_2 = no\ definido, \qquad \angle c_3 = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = arctan(y/x)$$

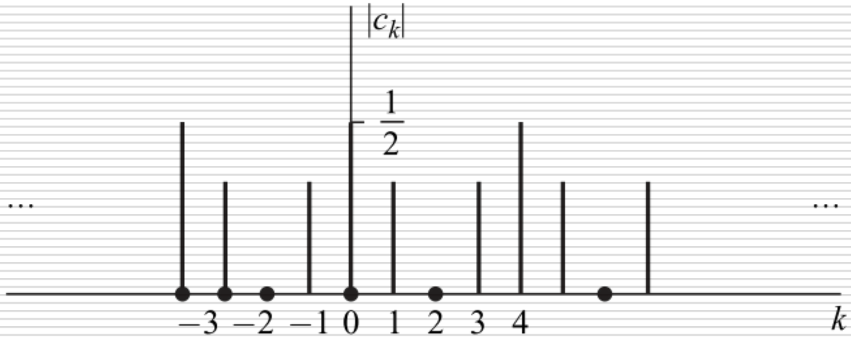
$$arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicios

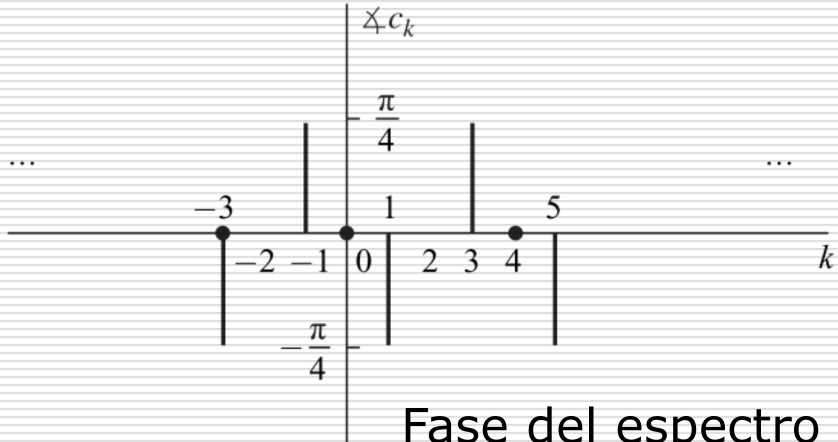
- Determinar el espectro de las señales
  - $x[n]$ es periódica de período N=4 y $x[n] = \{1,1,0,0\}$
  - El módulo y la fase de los espectros son:

$|c_0| = \frac{1}{2},\ |c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4},\ |c_2| = 0,\ |c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\angle c_0 = 0, \qquad \angle c_1 = -\frac{\pi}{4}, \qquad \angle c_2 = no\ definido, \qquad \angle c_3 = \frac{\pi}{4}$



Modulo del espectro



Fase del espectro

Señales discretas

- Espectro de densidad de potencia en señales periódicas
  - Potencia media de una señal periódica

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$$

Ecuación de síntesis

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k\frac{1}{N}n}}$$

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\overbrace{x^*[n]}^{\text{Ecuación de síntesis}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n}\right)$$

Ecuación de análisis

$$\boxed{c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \overbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n}\right)}^{\text{Ecuación de análisis}} = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$$

Relación de Parseval

Señales discretas

- Si la señal $x[n]$ es real, es decir, $x^*[n] = x[n]$, entonces:

$$c_k^* = c_{-k}$$

- Recordemos que los coeficientes son, por lo general, complejos

$$\overbrace{|c_k|e^{-j\theta}}^{c_k^*} = \overbrace{|c_{-k}|e^{-j\theta}}^{c_{-k}} \qquad\qquad c_k = |c_k|e^{j\theta}$$

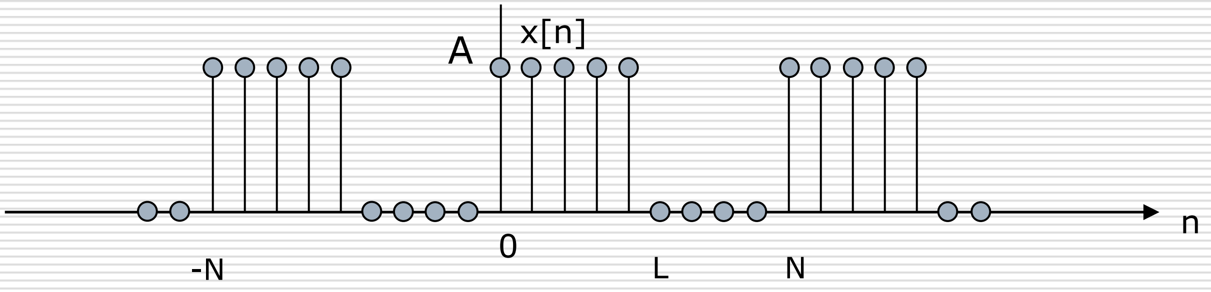
- Por lo que:

$$|c_k| = |c_{-k}| \qquad \text{(simetría par)}$$

$$\angle c_k = -\angle c_{-k} \qquad \text{(simetría impar)}$$

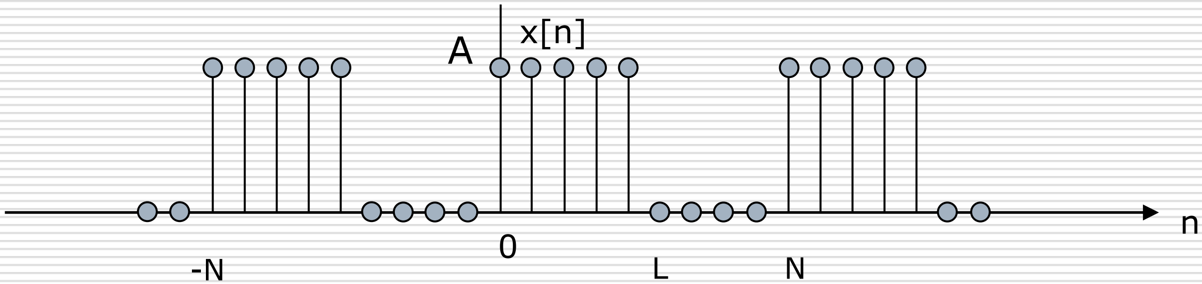
Ejercicio

- Determina los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica cuadrada discreta



Ejercicio

- Determina los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica cuadrada discreta



Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n}$$

  - k=0

$$c_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A \quad = \frac{LA}{N}$$

Ejercicio

- Determina los coeficientes de la serie de Fourier y el espectro de densidad de potencia de la señal periódica cuadrada discreta
  - k$= 1, 2, \ldots, N-1$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n} \quad = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A\, e^{-j2\pi k\frac{1}{N}n} \quad = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}\right)^n$$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N}, & k = 0 \\ \dfrac{A}{N}\dfrac{1-e^{-j2\pi k L\frac{1}{N}}}{1-e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}}, & k = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

Señales discretas

- Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo
  - Similar al desarrollo de la transformada de Fourier de señales aperiódicas en tiempo continuo
  - La transformada de Fourier de una señal de energía finita discreta en el tiempo $x[n]$ se define como:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Ecuación de análisis (transformada directa)

  - $X(\omega)$ representa el contenido en frecuencia de la señal $x[n]$
  - En otras palabras, $X(\omega)$ es una descomposición de $x[n]$ en sus componentes de frecuencia

Señales discretas

- Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

  - Dos diferencias a tener en cuenta respecto a la transformada de una señal continua en el tiempo
    1. La naturaleza discreta hace que la transformada sea una **suma de términos** en lugar de una integración
    2. Para señales continuas el rango de frecuencias es $(-\infty, \infty)$
       - Para señales discretas **el rango de frecuencias es** $(-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi})$ o el equivalente $(0, 2\pi)$. Por tanto $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})$ **es periódica de período** $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$

$$\mathrm{X}(\omega + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi k)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

Señales discretas

- Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo
  - Tenemos ahora que buscar la ecuación de síntesis (transformada inversa)
  - $X(\omega)$ es una función periódica de la variable de frecuencia ω, por lo que puede expandirse en serie de Fourier (si se cumplen las condiciones adecuadas)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

  - Si nos fijamos en la transformada de Fourier ésta ya tiene la forma de una serie de Fourier en la que los coeficientes serían los valores de la secuencia $x[n]$

Recordatorio: serie de Fourier

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

Señales discretas

- Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo
  - La expresión para el cálculo de los coeficientes es casi análoga a la de la serie de una función periódica de período 2π

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

    - Solo cambia el signo del exponente debido a la definición de la transformada de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} p(t)e^{-j2\pi nF_0 t}dt$$

Recordatorio: coeficientes serie de Fourier

Señales discretas

- Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo
  - Resumen

Ecuación de síntesis (transformada inversa)	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$
Ecuación de análisis (transformada directa)	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

  - **La transformada de Fourier está garantizada si la secuencia en el dominio del tiempo es absolutamente sumable**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \qquad |X(\omega)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Señales discretas

- Espectro de densidad de energía de señales aperiódicas
  - Recordamos que la energía de una señal discreta en el tiempo $x[n]$ se define como:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Ecuación de síntesis

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega}$$

  - Siguiendo con el desarrollo habitual para obtener la relación de Parseval

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\overbrace{x^*[n]}^{\text{Ecuación de síntesis}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(\omega)e^{-j\omega n}d\omega\right]$$

Señales discretas

- Espectro de densidad de energía de señales aperiódicas

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \right]$$

- Intercambiando el orden de aparición del sumatorio y la integral

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^*(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right] d\omega$$

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}}$$

Ecuación de análisis

- Relación de Parseval para señales aperiódicas discretas en el tiempo de energía finita

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Señales discretas

- Espectro de densidad de energía de señales aperiódicas
  - $X(\omega)$ es una función compleja de la frecuencia y se puede expresar como:

$$X(\omega) = \underbrace{|X(\omega)|}_{\text{Módulo del espectro}} e^{j\overbrace{\theta(\omega)}^{\text{Fase del espectro}}}$$

  - El espectro de densidad de energía de $x(n)$ se forma como:

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$$

  - Si la señal $x[n]$ es real, $x^*[n] = x[n]$, se puede deducir que:

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

$$|X(\omega)|e^{-j\theta(\omega)} = |X(-\omega)|e^{-j\theta(\omega)} \left\{ \begin{array}{ll} |X(\omega)| = |X(-\omega)| & \text{par} \\ -\angle X(\omega) = \angle X(-\omega) & \text{impar} \end{array} \right.$$

Ejercicio

- Determinar el espectro de densidad de energía $S_{xx(\omega)}$de la señal:

$$x[n] = a^n u[n], \qquad -1 < a < 1$$

Ecuación análisis

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Ejercicio

- Determinar el espectro de densidad de energía $S_{xx(\omega)}$de la señal:

Ecuación análisis

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = a^n u[n], \qquad -1 < a < 1$$

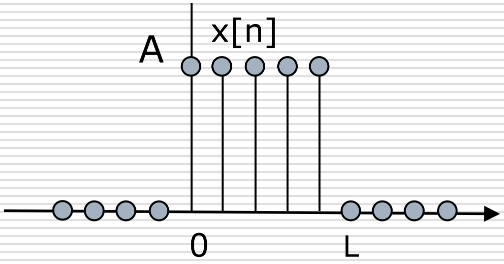
$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \quad = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \ = X(\omega)X^*(\ \omega) \quad = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})}$$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{1 - 2acos\omega + a^2}$$

Ejercicio

- Calcula la transformada de Fourier de un impulso rectangular discreto en el tiempo



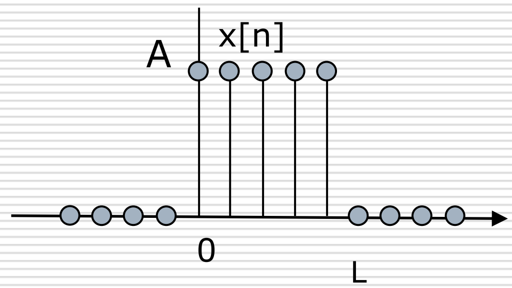
- Recordatorio: la transformada de Fourier está garantizada si la secuencia en el dominio del tiempo es absolutamente sumable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty$$

La transformada de Fourier existe

Ejercicio

- Transformada de Fourier



$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Ecuación de análisis

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n} \quad = A\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega^{n}} \quad = A(\frac{1-e^{-J\omega L}}{1-e^{-j\omega}})$$

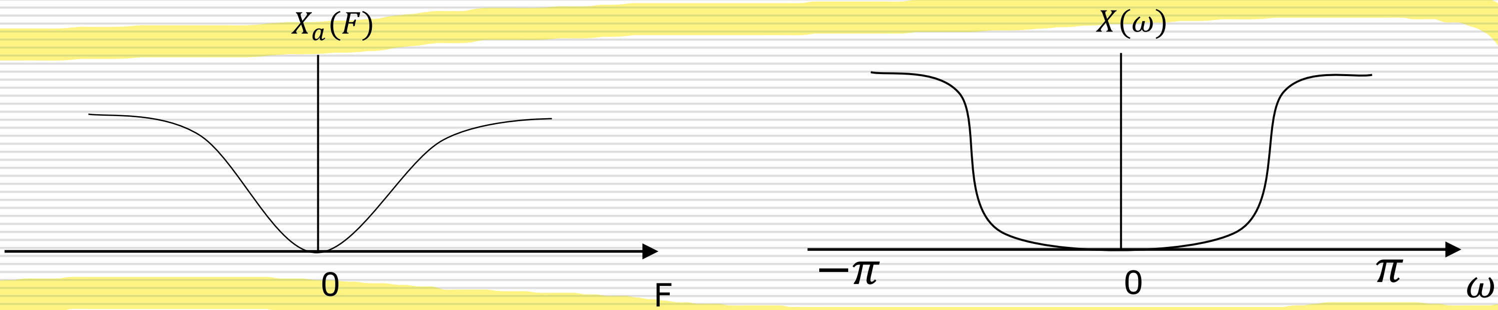
$$X(\omega) = \begin{cases} AL, \omega = 0 \\ A\left(\dfrac{1-e^{-J\omega L}}{1-e^{-j\omega}}\right), \omega \neq 0 \end{cases}$$

Análisis de frecuencia

- Clasificación de las señales en el dominio de la frecuencia: el concepto de ancho de banda
  - Si una señal de potencia (o de energía) tiene una densidad espectral de potencia (o de energía) concentrada en torno a la frecuencia cero, se denomina señal de baja frecuencia.

  - Si una señal de potencia (o de energía) tiene una densidad espectral de potencia (o de energía) concentrada en frecuencias altas, se denomina señal de alta frecuencia

Análisis de frecuencia



- Si una señal de potencia (o de energía) tiene una densidad espectral de potencia (o de energía) concentrada en alguna parte intermedia del rango de frecuencias entonces se denomina señal de frecuencias medias o señal de paso banda.

Análisis de frecuencia

- Desde un punto de vista cuantitativo, es común medir el rango de frecuencias en los que se concentra la señal, también conocido como ancho de banda
  - Ejemplo: Supongamos que una señal continua en el tiempo tiene el 95% de su espectro de densidad de de potencia (o energía) concentrado en el rango de frecuencias $F_1 \leq F \leq F_2$. Entonces se dice que el ancho de banda del 95% de la señal es $F_2 - F_1$ (en Hz)
- En el caso de una señal de *paso banda* se emplea el término banda estrecha para describir la señal si su ancho de banda $(F_2 - F_1)$ es mucho menor (un factor 10 o más) que la frecuencia media $(F_2+F_1)/2$. En caso contrario se denomina banda ancha
- Una señal se denomina de banda limitada si su espectro es nulo fuera del rango de frecuencias $|F| \geq B$

Análisis de frecuencia

- Resumen. Espectro de la señal: consideraciones a tener en cuenta
  - Las señales en tiempo continuo tienen espectros aperiódicos. El rango de frecuencias se extiende desde $F = -\infty$ hasta $F = \infty$
  - Las señales en tiempo discreto tienen un espectro periódico (período 2π). El rango de frecuencias es finito y se extiende desde $\omega = -\pi$ hasta $\omega = \pi$
  - Las señales periódicas tiene espectros discretos. Se describen mediante series de Fourier. Los coeficientes representan las líneas del espectro separadas por $1/T_p$ para señales contínuas y $1/N$ para señales en tiempo discreto

Análisis de frecuencia

- Resumen. Espectro de la señal: consideraciones a tener en cuenta
  - Las señales aperiódicas de energía finita tienen espectros continuos. Consecuencia de que tanto $X(F)$ como $X(\omega)$ son función de $e^{j2\pi F t}$ y $e^{j\omega n}$, respectivamente, funciones continuas de F y ω
  - La periodicidad con período T en un dominio implica la discretización en el otro dominio con espaciado $1/T$, y viceversa

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

- Existen una variedad de teoremas que relacionan operaciones sobre secuencias con operaciones sobre su transformada de Fourier
- **Linealidad**
  - La transformada de Fourier es una aplicación lineal
  - La transformada de Fourier de una combinación lineal de dos o más señales es igual a la misma combinación lineal de las transformadas de Fourier de las señales individuales

$$x_1[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

$$x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} a_1 X_1(\omega) + a_1 X_2(\omega)$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

- **Desplazamiento temporal**
  - Si una señal se desplaza en el dominio del tiempo k muestras, el espectro de módulo no cambia pero la fase del espectro varía en una cantidad $-\omega k$

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

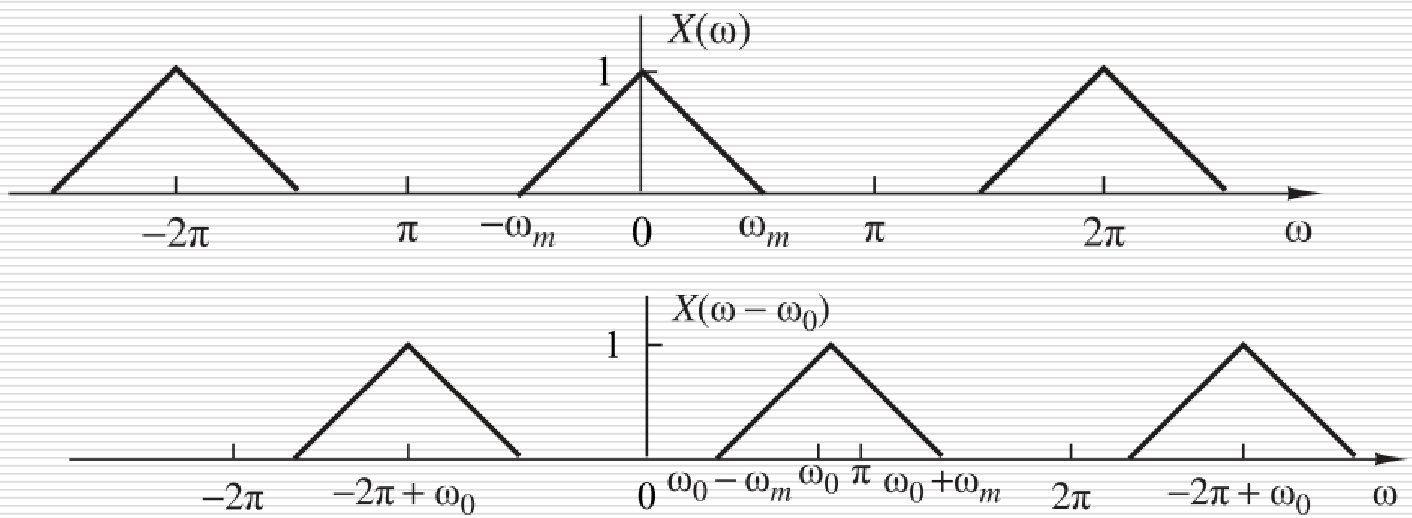
$$x[n-k] \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega k} X(\omega)$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

- **Desplazamiento en frecuencia**
  - Multiplicar una secuencia $x[n]$ por $e^{j\omega_0 n}$ es equivalente a la traslación en frecuencia del espectro $X(\omega)$ una cantidad ω_0

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$$



Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

- **Inversión temporal**

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) \qquad x[-n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(-\omega)$$

  - Si x[n] es real $X^*(\omega) = X(-\omega)$

$$F\{x[n-n]\} = X(-\omega) = |X(-\omega)|e^{j\theta_\omega} = |X(\omega)|e^{-j\theta_\omega}$$

    - Si una señal se refleja respecto al origen de los tiempos, el módulo del espectro no cambia y la fase cambia de signo

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

- **Teorema de convolución**
  - **Convolucionar 2 señales en el dominio del tiempoes equivalente a multiplicar sus espectros en el dominio de la frecuencia**

$$x_1[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

$$x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

- **Diferenciación en el dominio de la frecuencia**
  - La multiplicación de una señal en el dominio del tiempo es equivalente a la derivada de la transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

$$nx[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

Transformada Discreta de Fourier

- El análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo suele realizarse en un procesador digital de señales (ej. computador digital)
- Para realizar el análisis en frecuencia de una señal finita y discreta en el tiempo, $x[n]$, empleamos la transformada de Fourier $X(\omega)$
- $\boldsymbol{X(\omega)}$ **es una función continua** de la frecuencia y, por tanto, **no es una representación adecuada computacionalmente**
- La Transformada Discreta de Fourier (**DFT**) nos permite una **representación** de $x[n]$ en el dominio de la frecuencia **mediante muestras de su espectro** $\boldsymbol{X(\omega)}$

Nota: la sección DFT solo presenta la idea intuitiva

Transformada Discreta de Fourier

- Sabemos que podemos desarrollar la serie de Fourier en tiempo discreto sobre una señal periódica y obtener la secuencia de coeficientes de Fourier c_k
- Vimos que estos coeficientes forman también una secuencia periódica de período N
- **La idea subyacente es generar una secuencia periódica a partir de nuestra secuencia finita** y desarrollar la serie de Fourier
  - Los coeficientes de la serie van a representar una secuencia de muestras de la transformada de Fourier
- Asociaremos a la secuencia finita $x[n]$ una secuencia finita de los coeficientes c_k correspondientes a un período de $c_p[k]$
- Esta secuencia de duración finita, $X[k]$ se conoce como DFT

Transformada Discreta de Fourier

- Por lo tanto, la DFT tiene como entrada una secuencia de N números complejos y la transforma en una secuencia de N números complejos (muestras de $X(\omega)$)
- Para generar nuestra secuencia periódica, consideraremos una secuencia de entrada $x[n]$ con longitud finita de N muestras, de forma que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$

$$x_p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \qquad x[n] = \begin{cases} x_p[n], 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, en\ el\ resto \end{cases}$$

- En muchos casos será conveniente suponer una longitud de la secuencia N aunque su longitud real sea $M \leq N$
  - En esos casos se rellenará la secuencia con ceros
  - Nos permitirá obtener más muestras de $X(\omega)$

Transformada Discreta de Fourier

- Ecuaciones de análisis y síntesis para la DFT

IDFT **Ecuación de síntesis** (transformada inversa)	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \qquad 0 \leq n \leq N-1$
DFT **Ecuación de análisis** (transformada directa)	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \qquad 0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}-1$

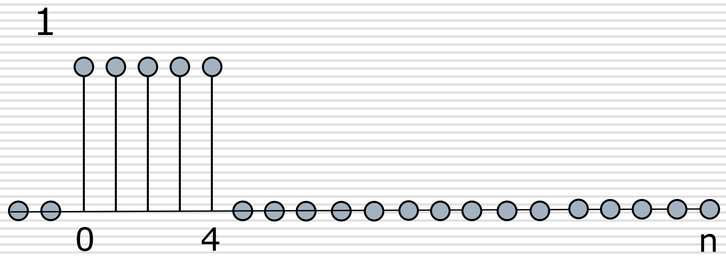
  - La similitud con las ecuaciones para la serie de Fourier es evidente
  - Es importante tener en cuenta que , aunque no se diga explícitamente, $X[k] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq k \leq N-1$ y $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$

Transformada Discreta de Fourier

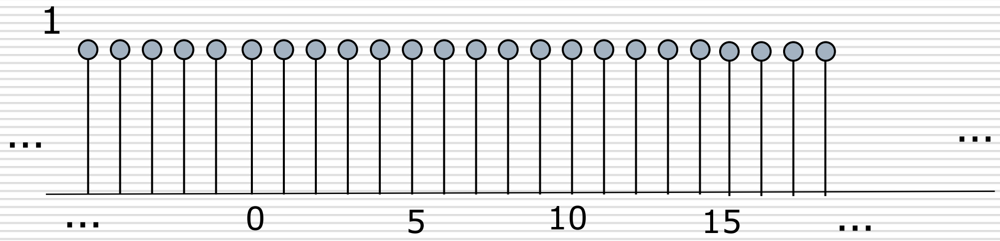
- Además de su importancia teórica, la DFT tiene un papel crucial en la realización de algoritmos de procesamiento digital de señales
  - El motivo es que existen algoritmos eficientes para su cálculo
  - **La DFT puede ser calculada eficientemente** mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT)
  - Los algoritmos FFT son tan habituales para el cálculo de la DFT que a menudo los términos se confunden o se emplean indistintamente
  - DFT hace referencia a una transformación matemática
  - **FFT hace referencia a una familia de algoritmos** para el cálculo de la DFT

Ejemplo

- Calcular la DFT para la siguiente señal



  - Para calcular la DFT podemos considerar que la secuencia $x[n]$ **tiene longitud mayor o igual** que N=5
  - Si consideramos $N = 5$, la secuencia periódica cuyo desarrollo en serie de Fourier corresponde a la DFT de $x[n]$ es:



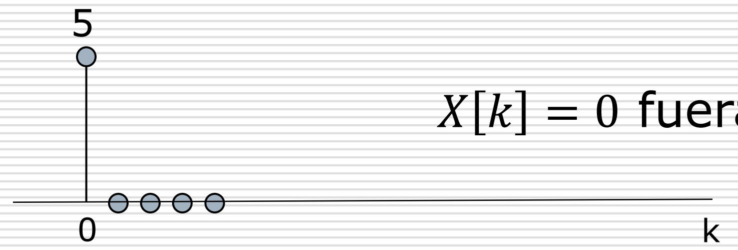
Ejemplo

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, 0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}-1$$

- Como la secuencia es constante en el intervalo $0 \leq n \leq 4$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{4} \left(e^{-j2\pi k/5}\right)^n = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j2\pi k/5}} = \begin{cases} 5, & para\; k = 0 \\ 0, & para\; k = 1{,}2{,}3{,}4 \end{cases}$$

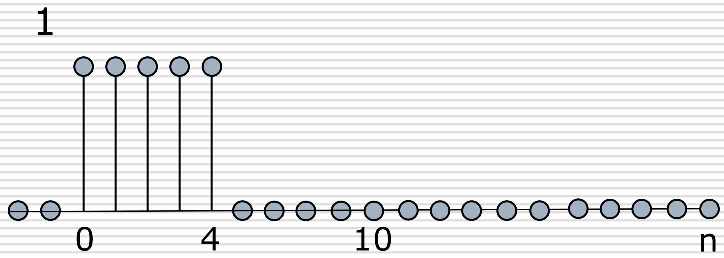
- Solo devolvemos N coeficientes (en este caso N=5)



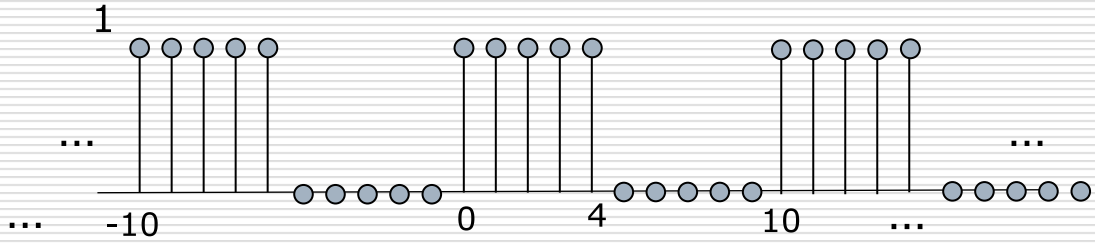
$X[k] = 0$ fuera del intervalo

Ejemplo

- Calcular la DFT para la siguiente señal



  - Consideremos ahora N=10, la secuencia periódica cuyo desarrollo en serie de Fourier corresponde a la DFT de $x[n]$ es:



Ejemplo

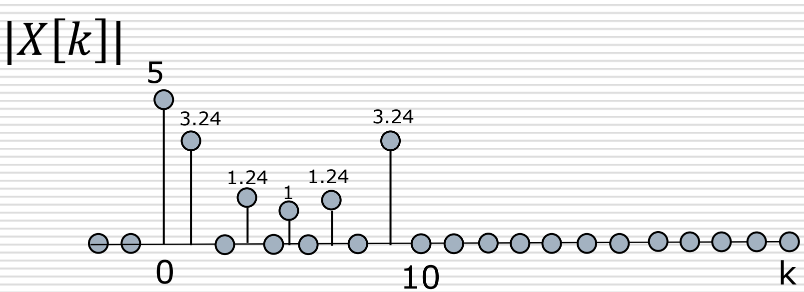
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, 0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}-1$$

Puedo restringir el índice porque el resto son ceros

$$X[k] = \sum_{n=0}^{4} \left(e^{-j2\pi k/10}\right)^n = \frac{1-e^{-j2\pi k5/10}}{1-e^{-j2\pi k/10}} = \frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j2\pi k/10}}$$

- Solo devolvemos N coeficientes

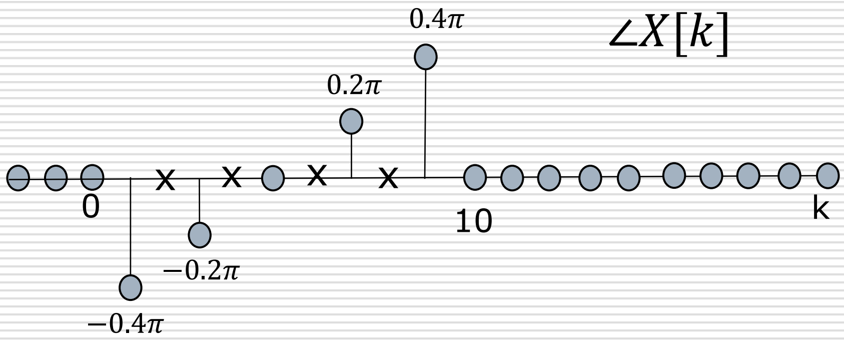
$$Para\ k = 1, \quad \frac{1+1}{1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+jsin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)}$$



$$\frac{2}{1-(0.809+j0.587)} = \frac{2}{\sqrt{(0.191^2+0.587^2}} = 3.24$$

Ejemplo

- Podemos calcular también su fase



$$Para\ k = 1, \qquad \frac{1+1}{1-(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+jsin(\frac{\pi}{5}))} = \frac{2}{1-(0{,}809+j0{,}587)}$$

$$\arctan\left(\frac{0}{2}\right) - \arctan\left(\frac{0{,}191}{0{,}587}\right) = -1{,}256 = -0{,}4\,\pi$$

Transformada Rápida de Fourier

- En esta sección solo se pretende **mostrar la idea** detrás de la familia de algoritmos FFT
- Simplificando: la DFT es un método que nos permite tomar N números (complejos) en el dominio del tiempo y crear N números (complejos) en el dominio de la frecuencia

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \qquad 0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N} - 1$$

- La evaluación de cada coeficiente X[k] implica N multiplicaciones complejas y N-1 sumas complejas
- La evaluación completa requiere de N^2multiplicaciones complejas y $N^2 - N$ sumas complejas
- **Tiene una complejidad de $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{N}^2)$**

Transformada Rápida de Fourier

- El desarrollo de algoritmos eficientes de cálculo de DFT (FFT) se basan en el método ***divide y vencerás***
  - **Descomposición de una DFT** de N puntos **en transformadas DFT sucesivamente más pequeñas**
- Los algoritmos **FFT** pueden realizar esta evaluación con **complejidad** $\mathbf{O}(\boldsymbol{Nlog_2N})$
- El aumento de N hace que la diferencia entre N^2y $Nlog_2N$ se incremente significativamente

Complejidad			
N	10^3	10^6	10^9
N^2	10^6	10^{12}	10^{18}
$Nlog_2N$	10^4	$10^6 \cdot 20$	$10^9 \cdot 30$

$10^{18}ns >$ 31años
$10^9 \cdot 30\ ns =$ 30 segundos

Nota: suponiendo un nanosegundo por operación

Transformada Rápida de Fourier

- El cálculo de a **DFT es ineficiente** principalmente porque **no aprovecha las propiedades de simetría y periocidad** del factor de fase

- Propiedad de simetría: $e^{-j2\pi\left(k+\frac{N}{2}\right)n/N} = -e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

$$\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \underbrace{jsin(\pi)}_{0}$$

$$e^{-j2\pi\left(k+\frac{N}{2}\right)n/N} = e^{-j2\pi kn/N}\ e^{-(\frac{j2\pi N}{2})/N} = e^{-j2\pi kn/N}\ e^{-j\pi} = -e^{-j2\pi kn/N}$$

- Propiedad de periocidad: $e^{-j2\pi(k+N)n/N} = e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

$$\underbrace{\cos(2\pi n)}_{1} - \underbrace{jsin(2\pi n)}_{0}$$

$$e^{-j2\pi(k+N)n/N} = e^{-j2\pi kn/N} e^{-j2\pi Nn/N} = e^{-j2\pi kn/N} e^{-j2\pi n} = e^{-j2\pi kn/N}$$

Transformada Rápida de Fourier

- Ejemplo intuitivo para N=4

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j2\pi kn/4}, \qquad 0 \leq \mathrm{k} \leq 3$$

$$X[k] = x[0]\ e^{-j2\pi k0/4} + x[1]\ e^{-j2\pi k1/4} + x[2]\ e^{-j2\pi k2/4} + x[3]\ e^{-j2\pi k3/4}$$

$$X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$$

$$-1 \qquad \overbrace{e^{-j2\pi(1+\frac{4}{2})/4} = -e^{-j2\pi/4}}^{\text{Prop. simetría}}$$

$$X[1] = x[0] + x[1]e^{-j2\pi/4} + x[2]e^{-j\pi} + x[3]\ e^{-j2\pi 3/4}$$

$$X[1] = x[0] + x[1]e^{-j2\pi/4} - x[2] - x[3]\ e^{-j2\pi/4}$$

$$X[2] = x[0] + x[1]\overset{-1}{e^{-j\pi}} + x[2]\overset{1}{e^{-j2\pi}} + x[3]\ \overset{-1}{e^{-j\pi 3}}$$

$$\overbrace{e^{-j2\pi\left(1+\frac{4}{2}\right)3/4} = -e^{-j2\pi 3/4}}^{\text{Prop. simetría}}$$

$$X[2] = x[0] - x[1] + x[2] - x[3]$$

$$X[3] = x[0] + x[1]\mathrm{e}^{-j2\pi 3/4} + x[2]\overset{-1}{e^{-j\pi 3}} + x[3]e^{-j2\pi 33/4}$$

Transformada Rápida de Fourier

- Ejemplo intuitivo para N=4

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j2\pi kn/4}, \qquad 0 \leq \mathrm{k} \leq 3$$

$$X[k] = x[0]\ e^{-j2\pi k0/4} + x[1]\ e^{-j2\pi k1/4} + x[2]\ e^{-j2\pi k2/4} + x[3]\ e^{-j2\pi k3/4}$$

$$X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$$

$$X[1] = x[0] + x[1]e^{-j2\pi/4} - x[2] - x[3]\ e^{-j2\pi/4}$$

$$X[2] = x[0] - x[1] + x[2] - x[3]$$

$$X[3] = x[0] + x[1]\mathrm{e}^{-j2\pi 3/4} - x[2] - x[3]e^{-j2\pi 3/4}$$

Transformada Rápida de Fourier

- Ejemplo intuitivo para N=4

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j2\pi kn/4}, \qquad 0 \le \mathrm{k} \le 3$$

$$X[k] = x[0]\ e^{-j2\pi k0/4} + x[1]\ e^{-j2\pi k1/4} + x[2]\ e^{-j2\pi k2/4} + x[3]\ e^{-j2\pi k3/4}$$

$$X[0] = (x[0] + x[2]) + e^{-\frac{j2\pi(0)}{4}}(x[1] + x[3])$$

$$X[1] = (x[0] - x[2]) + e^{-\frac{j2\pi(1)}{4}}(x[1] - x[3])$$

$$-1$$

$$X[2] = (x[0] + x[2]) + e^{-\frac{j2\pi(2)}{4}}(x[1] + x[3])$$

Podemos aplicar la prop. simetría

$$X[3] = (x[0] - x[2]) + e^{-\frac{j2\pi(3)}{4}}(x[1] - x[3])$$

- Tenemos que seguir modificando las expresiones en busca de repetibilidad

Transformada Rápida de Fourier

- Ejemplo intuitivo para N=4

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j2\pi kn/4}, \qquad 0 \leq \mathrm{k} \leq 3$$

$$X[k] = x[0]\ e^{-j2\pi k0/4} + x[1]\ e^{-j2\pi k1/4} + x[2]\ e^{-j2\pi k2/4} + x[3]\ e^{-j2\pi k3/4}$$

$$X[0] = \left(x[0] + e^{-j2\pi(0)/2}x[2]\right) + e^{-j2\pi(0)/4}(x[1] + e^{-j2\pi(0)/2}x[3])$$

$$X[1] = \left(x[0] - e^{-j2\pi(0)/2}x[2]\right) + e^{-j2\pi(1)/4}(x[1] - e^{-j2\pi(0)/2}x[3])$$

$$X[2] = \left(x[0] + e^{-j2\pi(0)/2}x[2]\right) - e^{-j2\pi(0)/4}(x[1] + e^{-j2\pi(0)/2}x[3])$$

$$X[3] = \left(x[0] - e^{-j2\pi(0)/2}x[2]\right) - e^{-j2\pi(1)/4}(x[1] - e^{-j2\pi(0)/2}x[3])$$

Transformada Rápida de Fourier

Nomenclatura

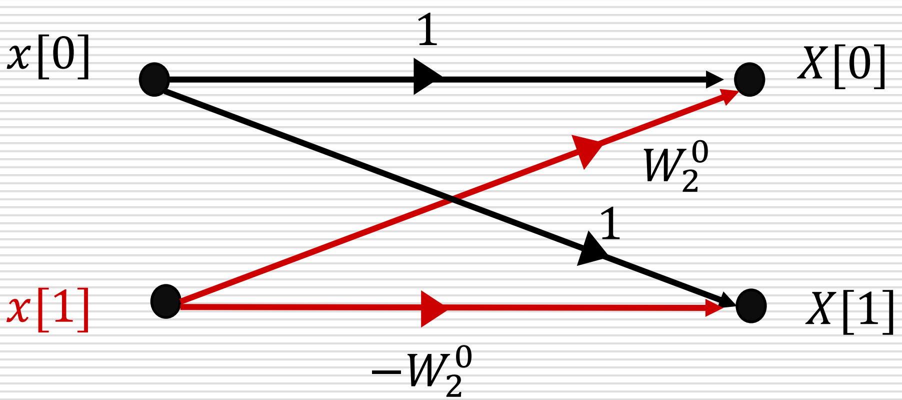
$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$W_N^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$$

- Algoritmo para N=2

$$X[0] = (x[0] + e^{-j2\pi(0)/2}x[1])$$

$$X[1] = (x[0] - e^{-j2\pi(0)/2}x[1])$$



  - Se resuelve con 2 operaciones MAD (multiply-add)

Transformada Rápida de Fourier

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$
$$W_N^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$$

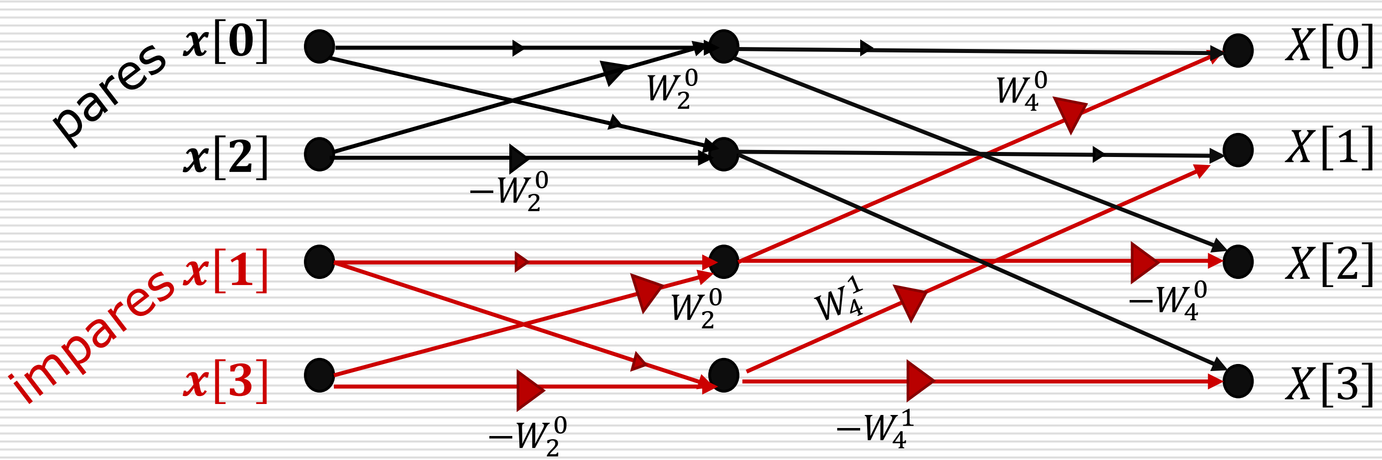
- Algoritmo para N=4

$$X[0] = \underbrace{\left(\boldsymbol{x}[\mathbf{0}] + e^{-j2\pi(0)/2}\boldsymbol{x}[\mathbf{2}]\right)}_{N=2} + e^{-j2\pi(0)/4}\underbrace{\left(x[1] + e^{-j2\pi(0)/2}x[3]\right)}_{N=2}$$

$$X[1] = \left(\boldsymbol{x}[\mathbf{0}] - e^{-j2\pi(0)/2}\boldsymbol{x}[\mathbf{2}]\right) + e^{-j2\pi(1)/4}\left(x[1] - e^{-j2\pi(0)/2}x[3]\right)$$

$$X[2] = \left(\boldsymbol{x}[\mathbf{0}] + e^{-j2\pi(0)/2}\boldsymbol{x}[\mathbf{2}]\right) - e^{-j2\pi(0)/4}\left(x[1] + e^{-j2\pi(0)/2}x[3]\right)$$

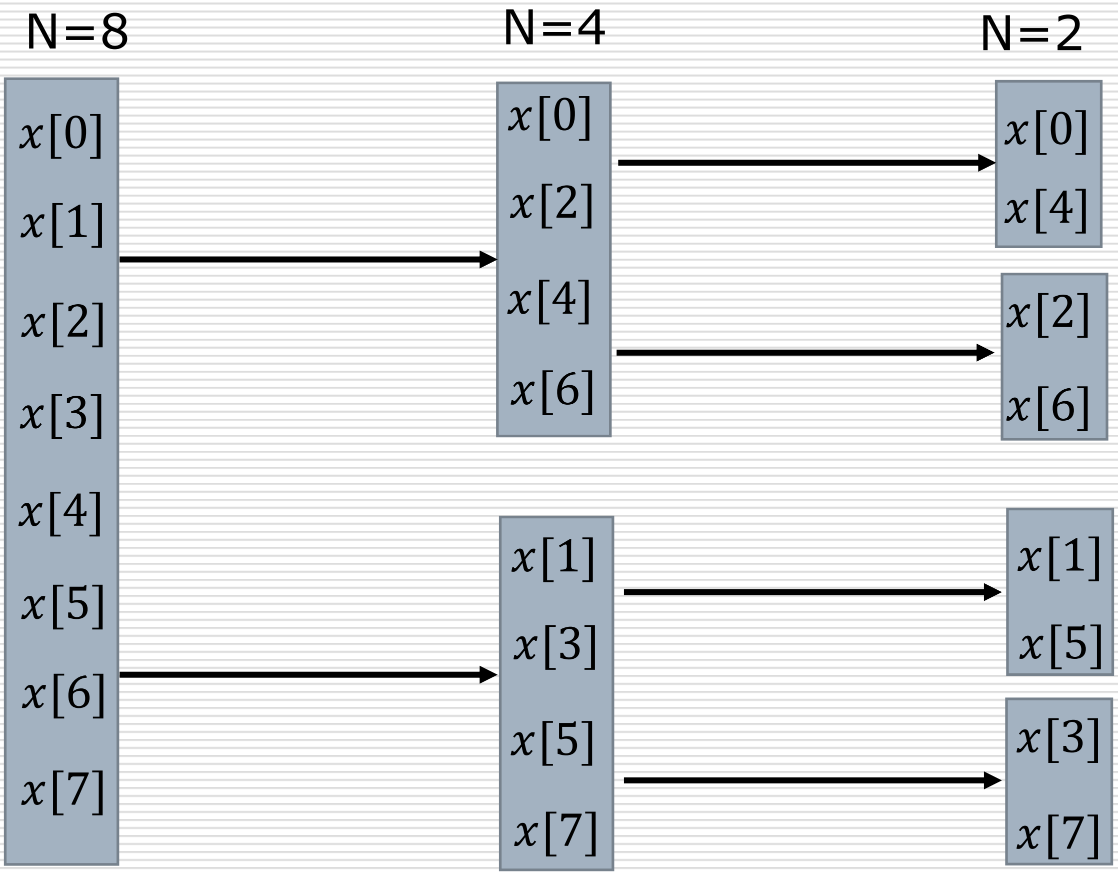
$$X[3] = \left(\boldsymbol{x}[\mathbf{0}] - e^{-j2\pi(0)/2}\boldsymbol{x}[\mathbf{2}]\right) - e^{-j2\pi(1)/4}\left(x[1] - e^{-j2\pi(0)/2}x[3]\right)$$



8 operaciones MAD

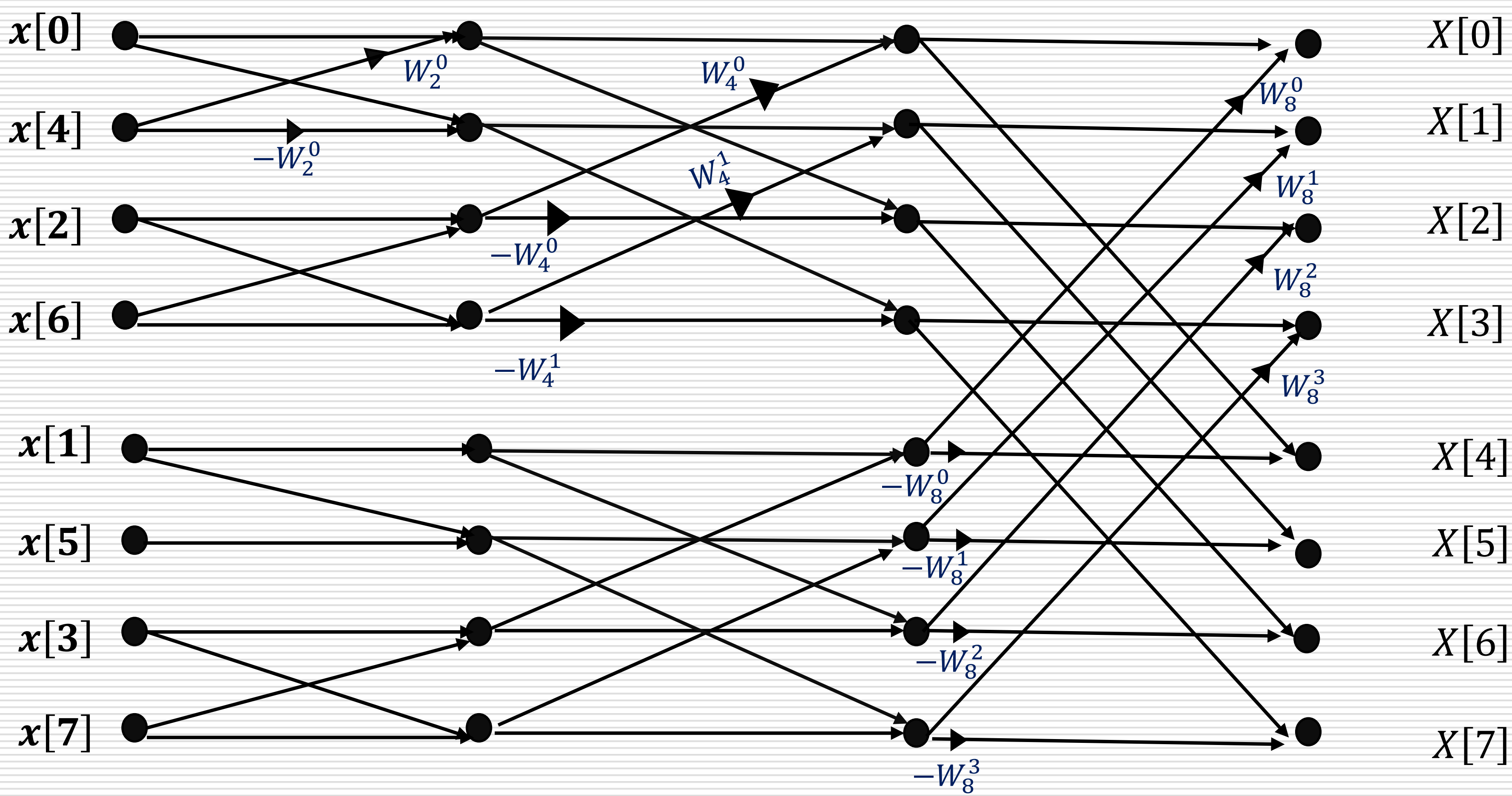
Transformada Rápida de Fourier

- Algoritmo para N=8



Transformada Rápida de Fourier

24 operaciones MAD $\boldsymbol{Nlog_2N}$



Sistemas LTI en el dominio de la frecuencia

- Hemos visto como la respuesta impulsional $h[n]$ caracteriza completamente los sistemas LTI en el dominio del tiempo
- En el dominio de la frecuencia, las características de un **sistema LTI se describen mediante una función de la variable de frecuencia ω**, denominada respuesta en frecuencia
  - **La respuesta en frecuencia es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional $h[n]$**
  - Las señales de entrada básicas son las funciones sinusoidales y exponenciales complejas
  - **La respuesta en frecuencia caracteriza por completo a un sistema LTI en el dominio de la frecuencia**
  - Esto nos permite determinar la respuesta al sistema a cualquier combinación lineal ponderada arbitraria de sinusoides o exponenciales complejas

Sistemas LTI en el dominio de la frecuencia

- Función de respuesta en frecuencia
- Hemos visto anteriormente que la respuesta de un sistema LTI en reposo a una señal arbitraria x[n] puede ser obtenida mediante la operación de la convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- Si empleamos como entrada una exponencial compleja tenemos:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\underbrace{\left[Ae^{j\omega(n-k)}\right]}_{x[n-k]} \qquad y[n] = A\underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right]}_{H(\omega)}e^{j\omega n}$$

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

Transformada de Fourier

Sistemas LTI en el dominio de la frecuencia

- Función de respuesta en frecuencia
  - La respuesta al sistema a una exponencial compleja queda caracterizado como:

$$y[n] = AH(\omega)e^{j\omega n}$$

  - El resultado es una exponencial compleja de la misma frecuencia pero modificada por el factor multiplicativo $H(\omega)$
  - La señal exponencial de entrada es una autofunción, es decir, una señal de entrada que produce una salida que difiere de la entrada en un factor multiplicativo constante (autovalor)

Ejemplo

- Determinar la secuencia de salida

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad\qquad x[n] = Ae^{j\pi n/2}$$

  - Calculamos la transformada de Fourier para $h[n]$

$$\mathrm{H}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \qquad = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\,e^{-j\omega}\right)^n \quad = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

  - Si lo evaluamos en $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$-\mathrm{atan}(-1/2)$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}j} \qquad = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6°}$$

  - Y por tanto la salida sería:

$$y[n] = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6°}\right)e^{j\pi\mathrm{n}/2}$$