CIRCUITOS MAGNÉTICOS Y CONVERSIÓN DE ENERGÍA

1

Sumario de fórmulas

1.1 CIRCUITOS MAGNÉTICOS

a) Ecuaciones de Maxwell en magnetostática y relación entre los campos magnéticos:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \ ; \ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \ ; \ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1.1}$$

B: inducción magnética (teslas); **H**: intensidad del campo magnético (A.v./m); **J**: densidad de corriente (A/m^2); μ: permeabilidad magnética; μ_0=$4\pi \cdot 10^{-7}$: permeabilidad magnética del vacío.

b) Ley de Ampère:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\,d\mathbf{s} = \sum i = Ni = \mathcal{F} \Rightarrow H\,\ell = \mathcal{F} = N\,i \tag{1.2}$$

$\mathcal{F}$: fuerza magnetomotriz (A.v.); N: espiras; i: corriente (A); ℓ: longitud magnética media (m).

c) Circuitos o recintos sin f.m.m.:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\mathbf{grad}\,U \tag{1.3}$$

U: potencial magnético (A.v./m).

d) Flujo magnético:

El flujo magnético Φ que atraviesa un área S que viene definido por:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{s} \ \Rightarrow \ \Phi = B\,S \tag{1.4}$$

Φ : flujo magnético (Wb); S: superficie (m^2).

e) Reluctancia magnética:

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu\,S} \tag{1.5}$$

La reluctancia se mide en henrios^{-1}; ℓ: longitud magnética media; S: superficie; μ: permeabilidad.

f) Permeancia magnética:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\mu S}{\ell} \tag{1.6}$$

La permeancia se mide en henrios.

g) Ley de Hopkinson:

$$\mathcal{F} = \Phi\, \mathcal{R} \tag{1.7}$$

h) Coeficiente de Hopkinson ν:

$$\nu = \frac{\Phi_t}{\Phi_u} = \frac{\Phi_u + \Phi_d}{\Phi_u} = 1 + \frac{\Phi_d}{\Phi_u} \tag{1.8}$$

Φ_t : flujo magnético total; Φ_d : flujo magnético que se dispersa por el aire; Φ_u : flujo útil.

i) Primer lema de Kirchhoff en circuitos magnéticos:

$$\sum \Phi = 0 \tag{1.9}$$

j) Segundo lema de Kirchhoff en circuitos magnéticos:

$$\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{R} \sum \Phi \quad \text{o también:} \quad \sum \mathcal{F} = \sum U = \sum H\, \ell \tag{1.10}$$

k) Asociación de reluctancias en serie:

$$\mathcal{R}_T = \sum \mathcal{R}_i \tag{1.11}$$

l) Asociación de reluctancias en paralelo:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_T} = \sum \frac{1}{\mathcal{R}_i} \tag{1.12}$$

1.2 ENERGÍA Y COENERGÍA MAGNÉTICA

a) Ecuación de tensión en una bobina de N espiras:

$$v = Ri + N\frac{d\Phi}{dt} \tag{1.13}$$

b) Balance energético en una bobina:

$$dW_e = dW_R + dW_m \tag{1.14}$$

dW_e: diferencial de energía eléctrica que entra al circuito; dW_R: diferencial de energía disipada en la resistencia R de la bobina por efecto Joule; dW_m: diferencial de energía suministrada al campo magnético.

c) Energía magnética almacenada:

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathcal{F}\, d\Phi \tag{1.15}$$

d) Coenergía magnética almacenada:

$$W_m' = \int_0^{\mathcal{F}} \Phi\, d\mathcal{F} \tag{1.16}$$

e) Energía y coenergía en sistemas magnéticos lineales:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2}\mathcal{F}\,\Phi = \frac{1}{2}\mathcal{R}\,\Phi^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \tag{1.17}$$

f) Definición de coeficiente de autoinducción de una bobina:

$$L = N\frac{\Phi}{i} \tag{1.18}$$

g) Coeficiente de autoinducción de una bobina en función de la reluctancia:

$$L = N^2\frac{\Phi}{Ni} = N^2\frac{\Phi}{\mathcal{F}} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \tag{1.19}$$

h) Energía y coenergía magnética en función del coeficiente de autoinducción:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2}L\frac{\mathcal{F}^2}{N^2} = \frac{1}{2}L\, i^2 \tag{1.20}$$

1.3 PÉRDIDAS DE ENERGÍA EN LOS NÚCLEOS FERROMAGNÉTICOS

a) Pérdidas por histéresis:

$$P_H = f\, W_H = f\,(vol)\oint H\, dB = f(\text{vol})\,(\text{área del ciclo}) \tag{1.21}$$

P_H = potencia perdida por histéresis; W_H: energía perdida por histéresis; f: frecuencia en Hz; *vol*: volumen del material.

b) Fórmula de Steinmetz de las pérdidas por histéresis:

$$P_H = k_H\, f(vol) B_m^{\alpha} \tag{1.22}$$

k_H: coeficiente de Steinmetz (varía entre 100 y 200); α: exponente de Steinmetz (varía entre 1,5 y 2,5); B_m: inducción magnética máxima.

c) Pérdidas por corrientes de Foucault (pérdidas por corrientes parásitas):

$$P_F = k_F\, f^2\, B_m^2\, a^2\, \sigma(\text{vol}) \tag{1.23}$$

k_F: coeficiente de Foucault; f: frecuencia en Hz; B_m: inducción magnética máxima; a: espesor de las chapas; vol: volumen del material.

1.4 CIRCUITOS MAGNÉTICOS EXCITADOS CON CORRIENTE ALTERNA

a) Tensión de alimentación:

$$v(t) = \sqrt{2}\, V \cos \omega t \tag{1.24}$$

V: valor eficaz de la tensión alterna aplicada; $\omega = 2\pi f$: pulsación de la c.a.; f: frecuencia en Hz.

a) Flujo magnético en el núcleo:

$$\Phi(t) = \frac{1}{N}\int v\,dt = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} V \operatorname{sen} \omega t \tag{1.25}$$

N: número de espiras de la bobina.

c) Relación entre la tensión aplicada y el flujo magnético:

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_m = 4{,}44 f N \Phi_m \tag{1.26}$$

V: tensión en valor eficaz, Φ_m: flujo máximo. El flujo magnético se retrasa 90° respecto de la tensión aplicada.

1.5 CIRCUITO ELÉCTRICO EQUIVALENTE DE UNA BOBINA CON NÚCLEO DE HIERRO ALIMENTADA CON C.A.

a) Relación entre el flujo magnético y la corriente de excitación de la bobina:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{N i_{exc}}{\dfrac{\ell}{\mu S}} = \mu \frac{N i_{exc}}{\ell} S \tag{1.27}$$

i_{exc}: corriente de excitación instantánea que circula por el devanado; N: número de espiras; ℓ: longitud magnética media, S: sección transversal del núcleo; μ: permeabilidad.

b) Relación entre la tensión y la corriente de excitación de la bobina:

$$v = N\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu N^2 S}{\ell}\frac{di_{exc}}{dt} \tag{1.28}$$

c) Coeficiente de autoinducción de la bobina:

$$L = \frac{\mu N^2 S}{\ell} \tag{1.29}$$

d) Pérdidas en el hierro en función de la tensión, la corriente de excitación y el f.d.p.:

$$P_{Fe} = V I_{ex} \cos \varphi_v \tag{1.30}$$

e) Componente de corriente de pérdidas en el hierro:

$$I_{Fe} = I_{ex} \cos \varphi_v \tag{1.31}$$

f) Componente de corriente de imanación o magnetización:

$$I_\mu = I_{ex} \operatorname{sen} \varphi_v \tag{1.32}$$

g) Parámetros del circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro:

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}};\quad X_\mu = \frac{V}{I_\mu} \tag{1.33}$$

1.6. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS CON MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

a) Fuerza de atracción cuando el movimiento se realiza a flujo constante:

$$f = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial x}\right]_{\Phi = cte} \tag{1.34}$$

W_m es la energía magnética almacenada. La fuerza mecánica sobre la armadura móvil *tiende a reducir la energía almacenada* en el circuito magnético.

b) Fuerza de atracción (cuando el movimiento se realiza a flujo constante) y en circuitos magnéticos lineales:

$$f = -\frac{1}{2}\Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} \tag{1.35}$$

La fuerza sobre la armadura móvil tendrá el sentido *de reducir la reluctancia* del circuito magnético.

c) Fuerza de atracción cuando el movimiento se realiza a corriente constante:

$$f = +\left[\frac{\partial W'_m}{\partial x}\right]_{i = cte} \tag{1.36}$$

W'_m es la coenergía magnética almacenada. La fuerza mecánica sobre la armadura móvil *tiende a aumentar la coenergía almacenada* en el circuito magnético.

d) Fuerza de atracción (cuando el movimiento se realiza a corriente constante) y en circuitos magnéticos lineales:

$$f = \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 \frac{d\mathcal{P}}{dx} \tag{1.37}$$

$\mathcal{P}$: permeancia del circuito magnético. $\mathcal{F}$: f.m.m.

e) Fuerza de atracción (cuando el movimiento se realiza a corriente constante) y en circuitos magnéticos lineales:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \tag{1.38}$$

i: corriente eléctrica; L: inductancia. La fuerza tiende a incrementar el valor de la inductancia L.

1.7. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS ROTATIVOS ALIMENTADOS POR UNA SOLA FUENTE

a) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a flujo constante):

$$T = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right]_{\Phi = cte} \tag{1.39}$$

b) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a flujo constante) y en sistemas lineales:

$$T = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{d\theta} \tag{1.40}$$

El par tiende a alinear el eje magnético de rotor con el del estátor.

c) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a corriente constante):

$$T = +\left[\frac{\partial W_m'}{\partial \theta}\right]_{i = cte} \tag{1.41}$$

d) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a corriente constante) y en sistemas lineales:

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\mathcal{P}}{d\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \tag{1.42}$$

$\mathcal{P}$ y L representan respectivamente la permeancia del circuito magnético y la inductancia de la bobina.

1.8. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS ROTATIVOS ALIMENTADOS POR VARIAS FUENTES

a) Relaciones de los flujos magnéticos con las corrientes:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\psi\} = [L]\ \{i\} \tag{1.43}$$

$\{\psi\}$: vector de flujos magnéticos totales concatenados por las bobinas; $[L]$: matriz de inductancias de los devanados; $\{i\}$: vector de las corrientes que circulan por los arrollamientos.

b) Relaciones de las tensiones con las corrientes:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{v\} = [R]\ \{i\} + \frac{d}{dt}[L]\ \{i\} \tag{1.44}$$

c) Expresiones de la energía y coenergía en sistemas lineales y en función de los flujos:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2}\mathcal{F}_1\Phi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{F}_2\Phi_2 = \frac{1}{2} i_1\psi_1 + \frac{1}{2} i_2\psi_2 \tag{1.45}$$

$$\text{donde: } \mathcal{F}_1 = N_1\, i_1 \quad ; \mathcal{F}_2 = N_2\, i_2 \tag{1.46}$$

d) Expresiones de la energía y coenergía en sistemas lineales y en función de los coeficientes de inductancia de los devanados:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2} L_{11}\, i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}\, i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 \Rightarrow W_m = W_m' = \frac{1}{2}\{i\}^t\,[L]\ \{i\} \tag{1.47}$$

e) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a flujo constante) en función de los coeficientes de inductancia:

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\{i\}^t \frac{\partial}{\partial\theta}\{\ [L]\ \{i\}\ \} \tag{1.48}$$

donde $\{i\}^t$ es el vector traspuesto de $\{i\}$.

Problemas resueltos

Problema 1.1

Calcular la intensidad que debe aplicarse a la bobina del circuito magnético de la Figura 1.1 para establecer en la columna derecha un flujo de 10^{-3} Wb. La permeabilidad relativa se supone que es constante en todos los puntos y de valor $\mu_r = 400$, y la sección $S = 10$ cm² es la misma en toda la estructura, excepto en la columna izquierda, que vale 20 cm². La longitud ℓ es igual a 10 cm. Calcular también el flujo en el brazo central.

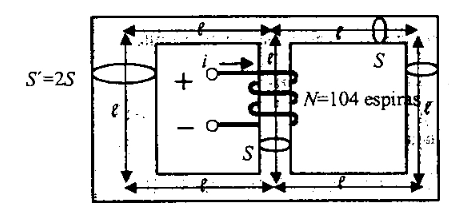


Figura 1.1

Solución

Las reluctancias en las diversas ramas del circuito magnético tienen los siguientes valores:

Reluctancia de la rama central: $\mathcal{R} = \dfrac{\ell}{\mu S} \Rightarrow \mathcal{R} = \dfrac{0{,}1}{400 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 1{,}989 \cdot 10^5 \ \ \mathrm{H}^{-1}$

Reluctancia de la rama derecha: $\mathcal{R}_1 = \dfrac{3\ell}{\mu S} = 3\mathcal{R}$

Reluctancia de la rama izquierda: $\mathcal{R}_2 = \dfrac{\ell}{\mu 2S} + \dfrac{2\ell}{\mu S} = 2{,}5\mathcal{R}$

De este modo el circuito equivalente eléctrico de la Figura 1.1 es el mostrado en la Figura 1.2. Se ha denominado Φ al flujo magnético que circula por la rama central y Φ_1 y Φ_2 a los flujos magnéticos de las ramas laterales derecha e izquierda respectivamente.

En este circuito se cumple:

1) Primer lema de Kirchhoff en el nudo superior: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

2) Segundo lema de Kirchhoff en las mallas derecha e izquierda respectivamente:

$$N\,i = \Phi\mathcal{R} + \Phi_1 3\mathcal{R} \quad ; \quad N\,i = \Phi\mathcal{R} + \Phi_2 2\mathcal{R}$$

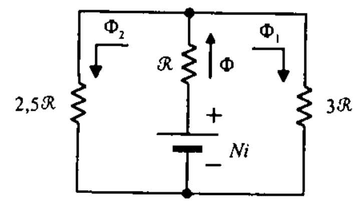


Figura 1.2

De estas ecuaciones se deduce la expresión:

$$2{,}5Ni = 13\Phi_1\mathcal{R}$$

que, al sustituir los valores numéricos, da lugar a la siguiente corriente en la bobina:

$$i = \frac{13.10^{-3}\cdot 1{,}989\cdot 10^{5}}{2{,}5\cdot 104} = 9{,}95 \text{ A}$$

y, teniendo en cuenta la primera ecuación de las mallas magnéticas resulta:

$$N\,i = \Phi\mathcal{R} + 3\Phi_1\mathcal{R}$$

lo que da lugar a un valor del flujo magnético en el brazo central:

$$\Phi = \frac{N\,i - 3\Phi_1\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \frac{104\cdot 9{,}95 - 3\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}989\cdot 10^{5}}{1{,}989\cdot 10^{5}} = 2{,}2\cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Problema 1.2

Un circuito magnético tiene una sección uniforme de 8 cm² y una longitud magnética media igual a 0,3 metros. Si la curva de magnetización del material viene expresada aproximadamente por la ecuación:

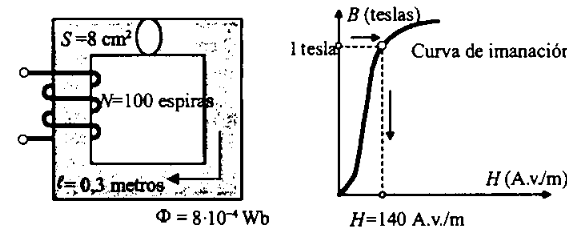
$$B = \frac{1{,}55H}{77 + H} \qquad B\text{: teslas; } H\text{: A.v./m}$$

Calcular la c.c. en amperios que debe introducirse en la bobina de excitación, que tiene 100 espiras, para producir un flujo en el núcleo de $8\cdot 10^{-4}$ Wb.

Solución

En la Figura 1.3a se muestra el circuito magnético, en el que aparecen las dimensiones principales del mismo. El valor de la inducción magnética en el núcleo es:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{8\cdot 10^{-4}}{8\cdot 10^{-4}} = 1 \text{ T}$$



a) b)

Figura 1.3

Llevando este valor de la inducción magnética a la curva de imanación o magnetización del material de la Figura 1.3b, se obtiene el siguiente valor de la intensidad del campo magnético:

$$1 = \frac{1{,}55H}{77 + H} \quad \Rightarrow \quad H = 140 \text{ A.v./m}$$

y como quiera que el valor del campo magnético es igual a:

$$H = \frac{NI}{\ell}$$

se obtiene un valor de la corriente:

$$140 = \frac{100I}{0{,}3} \quad \Rightarrow \quad I = 0{,}42 \text{ A}$$

Problema 1.3

Calcular la corriente necesaria en la bobina de la Figura 1.4 para producir una densidad de flujo en el entrehierro igual a 0,8 teslas. El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene expresada por la función:

$$B = \frac{1{,}6H}{75 + H} \qquad B\text{: teslas ; } H\text{: A.v./m}$$

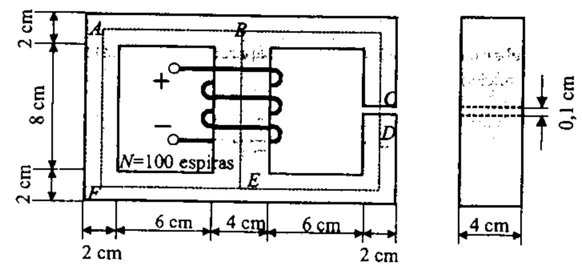


Figura 1.4

Solución

En la Figura 1.5 se muestra el circuito equivalente eléctrico. El valor de la intensidad de campo magnético en el entrehierro, teniendo en cuenta que la densidad de flujo o inducción magnética en el mismo es de 0,8 teslas, será:

$$H_e = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{0,8}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 6,366 \cdot 10^5 \text{ A.v./m}$$

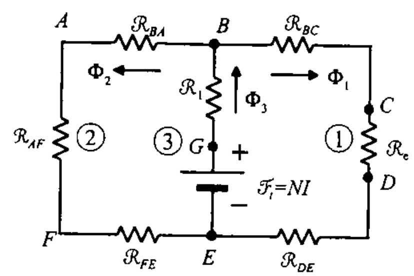


Figura 1.5

De este modo la d.d.p. magnética entre los nudos C y D es igual a:

$$U_e = U_{CD} = H_e \ell_e = 6,366 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 636,6 \text{ A.v.}$$

Por otro lado, como quiera que en la rama CD la inducción magnética es igual a 0,8 teslas, la intensidad de campo magnético correspondiente a la columna de la derecha, teniendo en cuenta la curva de magnetización del material, tendrá un valor:

$$B_1 = 0,8 = \frac{1,6H_1}{75 + H_1} \qquad \Rightarrow \qquad H_1 = 75 \text{ A.v./m}$$

en consecuencia la d.d.p. magnética entre los nudos BC y DE serán:

$$U_{BC} = U_{DE} = 75(6+2+1+4+1)10^{-2} = 10,5 \text{ A.v.}$$

y por consiguiente la d.d.p. magnética total entre los nudos B y E será igual a:

$$U_{BE} = U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} = 2 \cdot 10,5 + 636,6 = 657,6 \text{ A.v.}$$

como quiera que la longitud magnética media (o longitud geométrica media) entre A y B es la misma que entre F y E e igual a 9 cm, y que la longitud entre A y F es de 10 cm, la intensidad del campo magnético en esta zona será:

$$H_2(\text{Zona } BAFE) = \frac{657,6}{(2,9+10)10^{-2}} = 2348,6 \text{ A.v./m}$$

valor que, llevado a la curva de imanación del material, nos da una inducción magnética en esta zona de valor:

$$B_2 = \frac{1,6 \cdot 2348,6}{75 + 2348,6} = 1,55 \text{ T}$$

que corresponde a un flujo magnético $\Phi_2 = B_2 S = 1,55 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 1,24 \cdot 10^{-3}$ Wb. Además, el flujo magnético en el núcleo derecho es igual a:

$$\Phi_1 = B_1 S = 0,8 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 0,64 \text{ mWb}$$

por lo tanto, el flujo magnético en el núcleo central es igual a la suma de los dos anteriores:

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

que corresponde a un valor de la inducción magnética:

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S} = \frac{1 \cdot 88 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-4}} = 1,175 \text{ T}$$

lo que da lugar a una intensidad de campo magnético en la curva de imanación de valor: $H_3 = 207,7$ A.v./m. Es por ello que la d.d.p. magnética entre los nudos B y G es:

$$U_{BG} = H_3 \ell = 207,7 \cdot 0,1 = 20,77 \text{ A.v.}$$

y, por lo tanto, la f.m.m. necesaria en la bobina será:

$$\mathcal{F}_{total} = U_{BE} + U_{BG} = 657,6 + 20,77 = 678,37 \text{ A.v.}$$

y la corriente necesaria en la bobina será:

$$I = \frac{678,37}{100} = 6,78 \text{ A}$$

Problema 1.4

En la estructura magnética mostrada en la Figura 1.6, la densidad de flujo en el entrehierro de la derecha es de 1 Wb/m². El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene dada por:

$$B = \frac{1,5H}{1000 + H} \qquad B\text{: teslas; } H\text{: A.v./m}$$

La longitud ℓ = 10 cm y la sección transversal es uniforme y vale 5 cm². Calcular las corrientes I_1 e I_2 que deben circular por las bobinas para que el flujo en el entrehierro izquierdo sea nulo.

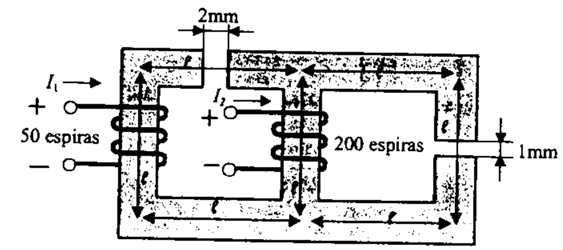


Figura 1.6

Solución

En la Figura 1.7 se muestra el circuito equivalente eléctrico del circuito magnético de la Figura 1.6. Al ser la inducción (o densidad de flujo magnético) en el núcleo de la derecha B_2 =1 tesla, el valor del campo magnético correspondiente es:

$$H_{e2} = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 7{,}96 \cdot 10^5 \text{ A.v./m}$$

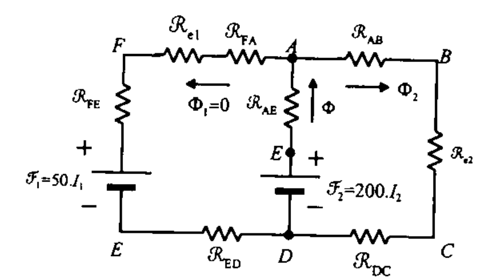


Figura 1.7

Por otro lado, la intensidad del campo magnético en los tramos AB y CD se obtiene de la curva de imanación del material, en el que se deduce:

$$1 = \frac{1{,}5 H_{Fe2}}{1000 + H_{Fe2}} \Rightarrow H_{Fe2} = 2000 \text{ A.v./m}$$

por consiguiente, la d.d.p. magnética entre los nudos A y B (que es la misma que entre C y D) vale:

$$U_{AB} = H_{Fe2}\, \ell_{AB} = 2000 \cdot 0{,}15 = 300 \text{ A.v.} = U_{CD}$$

y la d.d.p. magnética necesaria en el entrehierro de la derecha es:

$$U_{BC} = H_{e2}\, \ell_{e2} = 7{,}96 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 796 \text{ A.v.}$$

de este modo, la d.d.p. magnética entre los nudos A y D es igual a:

$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = 300 + 796 + 300 = 1396 \text{ A.v.}$$

y como quiera que el flujo magnético en el entrehierro izquierdo debe ser nulo (Φ_1 = 0), la f.m.m. de la bobina izquierda debe ser igual a la tensión magnética anterior, es decir:

$$\mathcal{F}_1 = U_{AD} \Rightarrow 50 I_1 = 1396 \Rightarrow I_1 = 27{,}92 \text{ A} \approx 28 \text{ A}$$

de donde se deduce que la corriente necesaria en la bobina 1 es de aproximadamente 28 amperios.

Además, como consecuencia de no haber flujo magnético en el núcleo izquierdo, el flujo magnético en el núcleo central será el mismo que en el núcleo derecho, es decir, $\Phi = \Phi_2$, y como la sección de la estructura magnética es uniforme, se deduce que la inducción magnética y la intensidad del campo magnético en el núcleo central son, respectivamente:

$$B = B_2 = 1 \text{ tesla} \quad H_{Fe} = H_{Fe2} = 2000 \text{ A.v./m}$$

Como consecuencia de ello, la d.d.p. magnética entre los nudos E y A vale:

$$U_{EA} = 2000 \cdot 0{,}1 = 200 \text{ A.v.}$$

por lo que la f.m.m. total de la bobina 2 debe ser:

$$\mathcal{F}_2 = U_{AD} + U_{EA} = 1396 + 200 = 1596 \text{ A.v.}$$

El valor anterior debe ser igual $N_2 I_2$, por lo que se obtiene finalmente una corriente en la bobina 2:

$$1596 = 200 I_2 \Rightarrow I_2 = 7{,}98 \text{ A} \approx 8 \text{ A}$$

Problema 1.5

La estructura magnética mostrada en la Figura 1.8 está construida con un material cuya curva de imanación se expresa por:

$$B = \frac{1{,}5H}{100 + H} \qquad B\text{: teslas ; } H\text{: A.v./m}$$

La longitud de la trayectoria magnética media en el núcleo es igual a 0,75 m. Las medidas de la sección transversal son de 6×8 cm². La longitud del entrehierro es de 2 mm y el flujo en el mismo es igual a 4 mWb (en el sentido indicado en la Figura 1.8). Determinar el número de espiras de la bobina B.

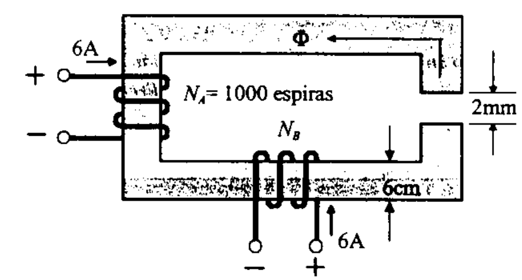


Figura 1.8

Solución

En la Figura 1.9 se muestra el circuito equivalente eléctrico del esquema de la Figura 1.8.

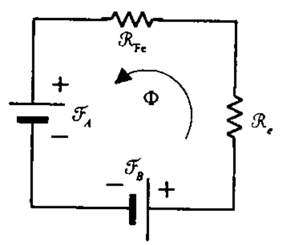


Figura 1.9

Las f.m.m.s. de las bobinas son respectivamente:

$$\mathcal{F}_A = N_A I_A = 1000\cdot 6 = 6000 \text{ A.v.} \quad ; \quad \mathcal{F}_B = N_B 6$$

y como el flujo magnético en el entrehierro es de 4 mWb, los valores de la inducción y campo magnético en el entrehierro serán:

$$\Phi_e = 4\cdot 10^{-3}\text{ Wb} \Rightarrow B_e = \frac{\Phi_e}{S_e} = \frac{4\cdot 10^{-3}}{48\cdot 10^{-4}} = 0{,}833 \text{ teslas} \Rightarrow H_e = \frac{0{,}833}{4\pi\cdot 10^{-7}} = 6{,}63\cdot 10^5 \text{ A.v./m}$$

La inducción anterior es la misma que en el material de hierro, por lo que, de acuerdo con su curva de imanación, se obtiene un valor del campo magnético:

$$B_{Fe} = B_e = 0{,}833 \text{ T};\quad 0{,}833 = \frac{1{,}5H_{Fe}}{100 + H_{Fe}} \Rightarrow H_{Fe} = 125 \text{ A.v./m}$$

y en el circuito equivalente de la Figura 1.9 se puede escribir:

$$\mathcal{F}_B - \mathcal{F}_A = \Phi_e\mathcal{R}_{Fe} + \Phi_e\mathcal{R}_e = H_{Fe}\ell_{Fe} + H_e\ell_e = 125\cdot 0{,}75 + 6{,}63\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3} = 1419{,}75 \text{ A.v.}$$

que al sustituir los valores de las f.m.m.s. da lugar a:

$$6N_B - 6000 = 1419{,}75 \quad \Rightarrow N_B = 1236{,}625 \approx 1237 \text{ espiras}$$

Problema 1.6

El núcleo magnético mostrado en la Figura 1.10 tiene una sección transversal uniforme igual a 100 cm². La bobina A tiene 1000 espiras circulando una c.c. de 0,5 A en la dirección indicada. Determinar el valor de la corriente I_B para conseguir un flujo nulo en el brazo central. La permeabilidad relativa es $\mu_r = 200$.

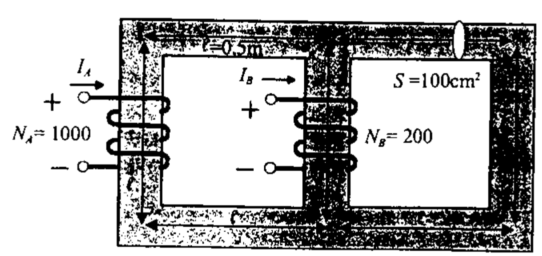


Figura 1.10

Solución

En la Figura 1.11 se muestra el circuito equivalente eléctrico del circuito magnético de la Figura 1.10. Como quiera que la permeabilidad es constante, la reluctancia magnética de cada tramo tiene un valor:

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{0{,}5}{200\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 100\cdot 10^{-4}} = 1{,}99\cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

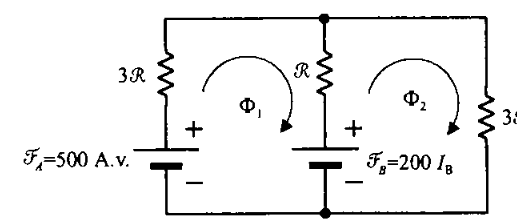


Figura 1.11

Al ser el circuito magnético lineal y conocer las reluctancias del sistema, se puede aplicar el método de las corrientes de malla para calcular los flujos correspondientes, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\text{Malla 1: } \mathcal{F}_A - \mathcal{F}_B = 4\mathcal{R}\Phi_1 - \mathcal{R}\Phi_2 \quad ; \quad \text{Malla 2: } \mathcal{F}_B = -\mathcal{R}\Phi_1 + 4\mathcal{R}\Phi_2$$

y como el flujo en el brazo central debe ser nulo, se cumple: $\Phi_{\text{rama central}} = \Phi_2 - \Phi_1 = 0$, es decir ,$\Phi_1 = \Phi_2$ y despejando los flujos de las ecuaciones anteriores e igualándolos entre sí, se llega a la conclusión de que la f.m.m. de la bobina *B* debe ser la mitad que la de la bobina *A*, y como la de esta vale $\mathcal{F}_A = N_A I_A = 1000\cdot 0{,}5 = 500$ A.v., resulta:

$$\mathcal{F}_B = \frac{\mathcal{F}_A}{2} = \frac{500}{2} = 250 = 2000\, I_B \quad \Rightarrow \quad I_B = 1{,}25 \text{ A}$$

Problema 1.7

El circuito magnético de la Figura 1.12 está construido con un material, cuya curva de magnetización viene dada por:

$$B = \frac{1{,}5H}{50 + H} \qquad B\text{: teslas ; } H\text{ : A.v./m}$$

La sección de la columna central vale 50 cm² y en el resto es uniforme y de valor 25 cm². Si $N_1 = N_2 = 360$ espiras, calcular el valor de $I_1 = I_2$ para producir un flujo de $5\cdot 10^{-3}$ Wb en el entrehierro.

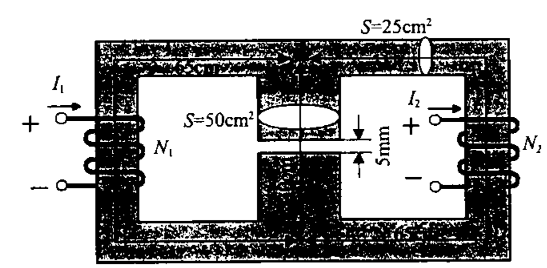


Figura 1.12

Solución

En la Figura 1.13 se muestra el esquema eléctrico equivalente. Al ser el flujo en el entrehierro central de 5 mWb, la inducción magnética correspondiente será:

$$B_e = \frac{\Phi_e}{S_e} = \frac{5\cdot 10^{-3}}{50\cdot 10^{-4}} = 1 \text{ tesla}$$

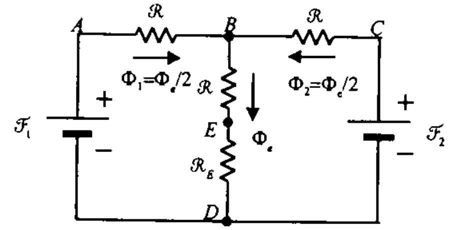


Figura 1.13

que corresponde a una intensidad de campo magnético necesaria en el entrehierro:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi 10^{-7}} \approx 7{,}96\cdot 10^5 \text{ A.v./m}$$

Para el hierro del núcleo central el campo magnético necesario, de acuerdo con la curva de imanación del material, es:

$$B_{BE} = 1 = \frac{1{,}5 H_{BE}}{50 + H_{BE}} \quad \Rightarrow \quad H_{BE} = 100 \text{ A.v./m}$$

por consiguiente, la tensión magnética necesaria en el núcleo central viene dada por:

$$U_{BD} = U_{BE} + U_{ED} = 100\cdot 0{,}3 + 7{,}96\cdot 10^5\cdot 5\cdot 10^{-3} = 30 + 3980 = 4010 \text{ A.v.}$$

Debido a la simetría geométrica del circuito y teniendo en cuenta que según el enunciado se cumple $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, resulta que:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\Phi_e}{2}$$

que corresponden a las inducciones magnéticas:

$$B_1 = B_2 = \frac{\Phi/2}{S} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-3}}{25\cdot 10^{-4}} = 1 \text{ tesla}$$

y por consiguiente, la intensidad de campo magnético correspondiente al tramo derecho CB es:

$$B_{CB} = 1 \text{ tesla} = \frac{1{,}5 H_{CB}}{50 + H_{CB}} \quad \Rightarrow \quad H_{CB} = 100 \text{ A.v./m}$$

de este modo, la f.m.m. necesaria en la bobina de la derecha del circuito de la Figura 1.12 es:

$$\mathcal{F}_2 = U_{CB} + U_{BD} = 100\cdot 0{,}65 + 4110 = 65 + 4010 = 4075 \text{ A.v.} = 360\, I_2$$

de donde se deduce el valor de la corriente:

$$I_2 = \frac{4075}{360} = 11{,}32 \text{ A}$$

Problema 1.8

La estructura magnética de la Figura 1.14 está fabricada con dos tipos de materiales, cuyas curvas de magnetización vienen expresadas por las ecuaciones:

$$B_1 = \frac{1{,}1H_1}{5000 + H_1} \quad ; \quad B_2 = \frac{2{,}1H_2}{2000 + H_2} \qquad B\text{: teslas ; } H\text{ : A.v./m}$$

Calcular la intensidad I que debe circular por la bobina para producir un flujo de $1{,}5.10^{-4}$ Wb; si la sección es uniforme y vale 15 cm².

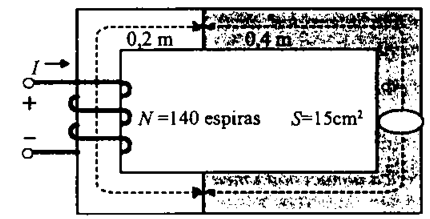


Figura 1.14

Solución

En la Figura 1.15 se muestra el esquema eléctrico correspondiente. Como quiera que el flujo magnético en el núcleo es de $1{,}5\cdot 10^{-4}$ Wb, la inducción magnética en los dos materiales de la Figura 1.14 es:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1{,}5\cdot 10^{-4}}{15\cdot 10^{-4}} = 0{,}1 \text{ T}$$

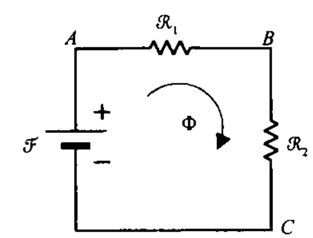


Figura 1.15

Lo que corresponde a los siguientes campos magnéticos:

$$B_1 = 0{,}1 = \frac{1{,}1H_1}{5000 + H_1} \quad \Rightarrow \quad H_1 = 500 \text{ A.v./m}$$

$$B_2 = 0{,}1 = \frac{2{,}1H_2}{2000 + H_2} \quad \Rightarrow \quad H_2 = 100 \text{ A.v./m}$$

en consecuencia, las d.d.p.s. magnéticas necesarias para cada material son:

$$U_{AB} = H_1 \ell_{AB} = 500\cdot 0{,}2 = 100 \text{ A.v.} \quad ; \quad U_{BC} = H_2 \ell_{BC} = 100\cdot 0{,}4 = 40 \text{ A.v.}$$

y por lo tanto, la f.m.m. necesaria en la bobina será:

$$\mathcal{F}=U_{AB}+U_{BC}=100+40=140=140\,I \;\Rightarrow I=1\text{ A}$$

Problema 1.9

Una estructura magnética homogénea, tiene una longitud magnética media igual a 50 cm; y tiene una sección uniforme de 10 cm². Si la bobina tiene 100 espiras y la curva de magnetización viene expresada por:

$$B=\frac{15H}{100+H} \qquad B\text{: teslas; } H\text{ : A.v./m}$$

Cuando circula por la bobina una intensidad de 0,1 A se pide el valor del coeficiente de autoinducción calculado por los tres procedimientos siguientes:

a) Empleando la fórmula: $L=N\,d\Phi/di$

b) Utilizando la expresión: $L=N\,\Phi/i$

c) Calculando la energía magnética almacenada mediante la integral: $W_m=\text{volumen}\int_0^B H\,dB$ e igualándola a $1/2\,Li^2$.

Solución

a) Teniendo en cuenta que la curva de imanación del material y la expresión del campo magnético son respectivamente de la forma:

$$B=\frac{15H}{100+H} \quad ; \; H=\frac{Ni}{\ell}$$

la expresión del flujo magnético de la bobina es:

$$\Phi=B\,S=\frac{15H}{100+H}S=\frac{15\frac{Ni}{\ell}}{100+\frac{Ni}{\ell}}S$$

y teniendo en cuenta los parámetros del circuito magnético de la bobina: $\ell=0{,}5$ m ; $S=10$ cm² $=10^{-3}$ m²; $N=100$, al sustituir en la ecuación anterior resulta:

$$\Phi=\frac{15\frac{100i}{0{,}5}}{100+\frac{100i}{0{,}5}}\,10^{-3}=\frac{3i}{100+200i}$$

y por consiguiente, se obtiene la siguiente expresión del coeficiente de autoinducción en función de la corriente en la bobina:

$$L=N\frac{d\Phi}{di}=100\frac{d}{di}\left[\frac{3i}{100+200i}\right]=100\;\frac{3(100+200i)-200\cdot 3i}{(100+200i)^2}=\frac{3\cdot 10^4}{(100+200i)^2}$$

que para $i=0{,}1$ A tiene un valor:

$$L=\frac{3\cdot 10^4}{120^2}=2{,}083\text{ H}$$

Al coeficiente de autoinducción anterior se le denomina *coeficiente de autoinducción incremental.*

b) En este caso el valor del campo magnético es:

$$H=\frac{Ni}{\ell}=\frac{100\cdot 0{,}1}{0{,}5}=20\text{ A.v./m}$$

de donde se deducen una inducción y un flujo magnético en el núcleo respectivamente:

$$B=\frac{15\cdot 20}{100+20}=2{,}5\text{ T};\;\; \Phi=B\,S=2{,}5\cdot 10^{-3}\text{ Wb}$$

y por lo tanto el coeficiente de autoinducción será:

$$L=N\frac{\Phi}{i}=100\frac{2{,}5\cdot 10^{-3}}{0{,}1}=2{,}5\text{ H}$$

c) En la Figura 1.16 se muestra la curva de imanación del material magnético, donde el área sombreada corresponde a la densidad de energía almacenada, es decir, energía almacenada por unidad de volumen. Recuérdese que la energía almacenada tiene la siguiente expresión:

$$W_m=\text{volumen}\int_0^B H\,dB=0{,}5\;10^{-3}\int_0^{2{,}5}\frac{100\,B}{15-B}\,dB$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$B=\frac{15H}{100+H} \quad\Rightarrow\quad 100B+BH=15H \quad\Rightarrow\quad H=\frac{100B}{15-B}$$

y por consiguiente se obtiene:

$$W_m=0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 10^2\int_0^{2{,}5}\frac{BdB}{15-B}=5\cdot 10^{-2}\int_0^{2{,}5}(-1+\frac{15}{15-B})\,dB=5\cdot 10^{-2}\left[-B-15\ln\,(15-B)\right]_0^{2{,}5}$$

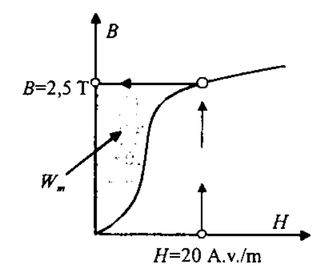


Figura 1.16

que operando da lugar a:

$$W_m=5\cdot 10^{-2}\left[-2{,}5-15\ln 12{,}5+15\ln 15\right]=0{,}011738\text{ julios}$$

y teniendo en cuenta que la energía magnética almacenada en función del coeficiente de autoinducción tiene la expresión:

$$W_m=\frac{1}{2}Li^2$$

resultará:

$$L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{2 \cdot 0,011738}{0,1^2} = 2,348 \text{ henrios}$$

Problema 1.10

Una bobina con núcleo de hierro, tiene 500 espiras, siendo su resistencia despreciable. La sección de núcleo es uniforme y vale 25 cm², siendo la longitud magnética media igual a 80 cm. La curva de imanación del material es:

$$B = \frac{2H}{150 + H} \qquad B\text{: teslas ; } H\text{: A.v./m}$$

Si la tensión aplicada es alterna y de 220 V eficaces y la frecuencia es de 50 Hz. Calcular: a) circuito equivalente de la bobina; b) corriente de excitación.

NOTA: Se conoce por la información proporcionada por el fabricante que a la tensión asignada o nominal de 220 V, las pérdidas en el núcleo son de 5 W/kg. El peso específico del material es igual a 7,8 kg/dm³.

Solución

En la Figura 1.17 se muestra el circuito magnético de la bobina y su curva de imanación.

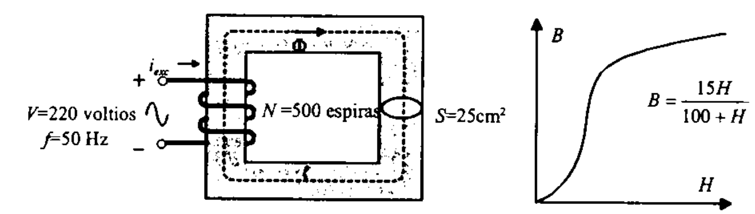


Figura 1.17

a) El peso del hierro es:

Peso hierro = volumen hierro x peso específico = $25 \cdot 10^{-2}$ (dm²) $\cdot$ 8 (dm) $\cdot$ 7,8 kg/dm³ = 15,6 kg

Por consiguiente las pérdidas en el hierro son:

$$P_{Fe} = 5 \text{ W/kg} \cdot 15,6 \text{ kg} = 78 \text{ W}$$

y la componente I_{Fe} de la corriente valdrá:

$$P_{Fe} = 78 = V\,I_{Fe} = 220\,I_{Fe} \quad \Rightarrow \quad I_{Fe} = 0,3545 \text{ A}$$

Por ello la resistencia equivalente a las pérdidas en el hierro es:

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}} = \frac{220}{0,3545} = 620,51\ \Omega$$

En una bobina alimentada con corriente alterna se cumple:

$$V = 4,44\, f\, N\, \Phi_m$$

de donde se deduce un valor del flujo máximo:

$$\Phi_m = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 500} = 1,98 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

que corresponde a una inducción máxima en el núcleo de valor:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = 0,7928 \text{ T}$$

y en consecuencia a una intensidad del campo magnético en el núcleo, de acuerdo con la curva de imanación:

$$0,7928 = \frac{2H_m}{150 + H_m} \quad \Rightarrow \quad H_m = 98,51 \text{ A.v./m}$$

y suponiendo que la corriente de imanación sea sinusoidal (es decir, sin deformación), el valor de la intensidad de campo magnético eficaz sería:

$$H_{eficaz} \approx \frac{H_m}{\sqrt{2}}$$

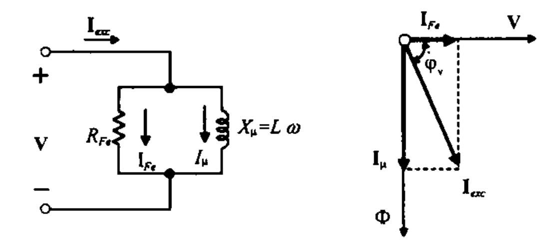
es decir:

$$H_{ef} = \frac{98,51}{\sqrt{2}} = 69,66 \text{ A.v./m} = \frac{N\,I_\mu}{\ell} = \frac{500\,I_\mu}{0,8} \quad \Rightarrow \quad I_\mu = 0,111 \text{ A}$$

de donde se deduce:

$$X_\mu = \frac{220}{0,111} = 1974\ \Omega$$

En la Figura 1.18a se muestra el circuito eléctrico equivalente y en la Figura 1.18b el diagrama fasorial correspondiente.



a) b)

Figura 1.18

b) De acuerdo con los valores calculados anteriormente y de acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 1.18b, la corriente de excitación de la bobina es de la forma:

$$\mathbf{I}_{exc} = 0,3545 - j0,111 = 0,371 \angle -17,39°$$

es decir, corresponde a una corriente de 0,371 amperios, con un f.d.p. de valor cos 17,39°=0,954.

Problema 1.11

Una bobina con núcleo de hierro, absorbe una corriente de 0,5 A cuando se aplica una tensión sinusoidal de 220 V eficaces a sus bornes. Si la potencia absorbida es de 30 W, deducir el circuito equivalente de la bobina.

Solución

Si se denomina φ_v al ángulo que forma la tensión con la corriente absorbida por la bobina y teniendo en cuenta los valores del enunciado, se puede escribir:

$$P_0 = P_{Fe} = 30 = 220 \cdot 0{,}5 \cdot \cos\varphi_v$$

de donde se deduce:

$$\cos\varphi_v = 0{,}273 \; ; \; \operatorname{sen}\varphi_v = 0{,}962$$

y por lo tanto las componentes de la corriente (ver Figura 1.18 del problema anterior) son:

$$I_{Fe} = 0{,}5 \cdot 0{,}273 = 0{,}1365 \text{ A}; \; I_\mu = 0{,}5 \cdot 0{,}962 = 0{,}481 \text{ A}$$

por lo que los valores de los parámetros del circuito equivalente son:

$$R_{Fe} = \frac{220}{0{,}1365} = 1611{,}7\ \Omega \quad ; \quad X_\mu = \frac{220}{0{,}481} = 457{,}38\ \Omega$$

Problema 1.12

Un cerrojo eléctrico consiste en una armadura fija cilíndrica hueca y un vástago cilíndrico, dispuestos como se indica en la Figura 1.19. Supuesto que la reluctancia del hierro es despreciable frente a la del entrehierro, y que la unión vástago-armadura presenta un entrehierro despreciable frente al entrehierro principal e. Calcular: a) la energía almacenada en el entrehierro en julios si e=1 cm; la superficie del entrehierro es de 0,8 cm² y la intensidad de excitación es de 1 A de c.c.; b) fuerza magnética en el caso anterior.

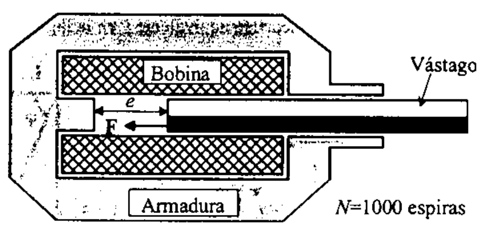


Figura 1.19

Solución

a) La energía magnética almacenada en el entrehierro en función de la f.m.m. de la bobina y de la reluctancia del circuito magnético viene expresada por:

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \quad \text{donde se cumple:} \quad \mathcal{F} = NI \quad ; \quad \mathcal{R} = \frac{x}{\mu_0 S}$$

que al sustituir valores nos da:

$$\mathcal{F} = NI = 1000 \cdot 1 = 1000 \text{ A.v.} \quad ; \quad \mathcal{R} = \frac{10^{-2}}{4\pi 10^{-7} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-4}} = 9{,}947 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \quad ; \quad W_m = \frac{1}{2}\frac{10^6}{9{,}947 \cdot 10^7} = 5{,}027 \cdot 10^{-3} \text{ julios}$$

b) La fuerza magnética de atracción del cerrojo está expresada por:

$$f = \frac{1}{2}\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

pero de acuerdo con la ley de Hopkinson, el flujo magnético es igual a:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{1000}{9{,}947 \cdot 10^7} \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

de donde se deduce una inducción magnética:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{10^{-5}}{0{,}8 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}125 \text{ T}$$

y, por consiguiente, la fuerza magnética vale:

$$f = \frac{1}{2}\frac{0{,}125^2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 0{,}497 \text{ N}$$

Problema 1.13

El núcleo magnético de la Figura 1.20 tiene una sección transversal cuadrada de 3×3 cm. El entrehierro x=5 mm. La bobina tiene 250 espiras y una resistencia de 11 Ω. La d.d.p. magnética que necesita el hierro es despreciable. Calcular la energía almacenada en el entrehierro y la fuerza total que actúa sobre la armadura cuando se aplican a la bobina 220 V de c.c.

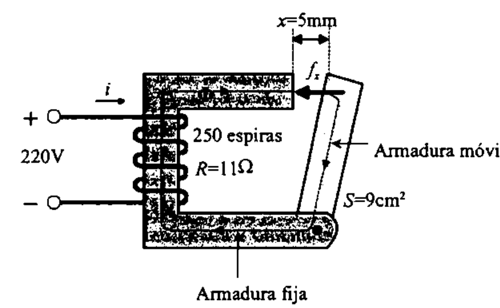


Figura 1.20

Solución

a) La corriente absorbida por la bobina vale:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{11} = 20 \text{ A}$$

por lo que la f.m.m. de la bobina es: $\mathcal{F} = N I = 250 \cdot 20 = 5000$ A.v.

El valor de la reluctancia del entrehierro es:

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu_0 S} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 4{,}42 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

y como quiera que la energía magnética almacenada viene expresada por:

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}}$$

al sustituir valores en la ecuación anterior resulta:

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{5000^2}{4,42\cdot 10^6} = 2,827 \text{ J}$$

b) La expresión de la fuerza magnética de atracción es:

$$f = \frac{1}{2}\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

donde se tiene:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{5000}{4,42\cdot 10^6} = 1,131\cdot 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1,131\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^{-4}} = 1,257 \text{ T}$$

y al sustituir el valor de la inducción magnética anterior en la expresión de la fuerza, resulta:

$$f = \frac{1}{2}\frac{1,257^2\cdot 9\cdot 10^{-4}}{4\pi\cdot 10^{-7}} = 565,8 \text{ N}$$

Problema 1.14

La estructura magnética de la Figura 1.21, tiene una permeabilidad relativa $\mu_r=100$; la longitud de la trayectoria magnética media es igual a 1 m en el hierro. El valor de la sección transversal es de 100 cm². La longitud total del entrehierro (dos partes) es de 0,2 cm. El flujo en el entrehierro es de $4\cdot 10^{-3}$ Wb y su sentido es el indicado en la figura. La bobina A tiene 1000 espiras y la B tiene N espiras, circulando por ambas bobinas una c.c. de 6 A. Se pide: a) determinar el nº de espiras de la bobina B; b) calcular la fuerza con que es atraída la armadura móvil; c) si se coloca una espira como se indica en la Figura 1.10, ¿cuál será la lectura del voltímetro?: 1) si la corriente de alimentación es de c.c.; 2) si la corriente de alimentación es sinusoidal y de tal magnitud que produzca el mismo valor eficaz de flujo en el entrehierro. La frecuencia es de 50 Hz.

NOTA: para resolver el apartado c) se supone que el entrehierro está abierto.

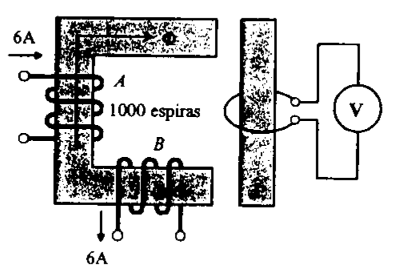


Figura 1.21

Solución

1) En al Figura 1.22 se muestra el circuito eléctrico equivalente al circuito magnético de la Figura 1.21. Los valores de las reluctancias magnéticas son:

$$\mathcal{R}_{Fe} = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{1}{100\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 100\cdot 10^{-4}} = 7,96\cdot 10^5 \text{ H}; \quad \mathcal{R}_e = \frac{\ell}{\mu_0 S} = \frac{0,2\cdot 10^{-2}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-2}} = 1,592\cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

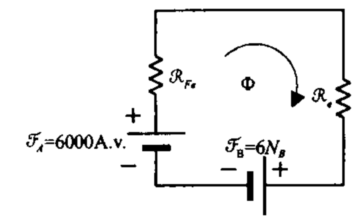


Figura 1.22

y en la malla del circuito de la Figura 1.22 se cumple:

$$\mathcal{F}_A - \mathcal{F}_B = \Phi\,(\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_e) = 4\cdot 10^{-3}\,(7,96\cdot 10^5 + 1,592\cdot 10^5) = 3820,8 \text{ A.v.}$$

Y como quiera que la f.m.m. del devanado *A* es igual a 6000 A.v. resulta:

$$\mathcal{F}_A - \mathcal{F}_B = 3820,8 = 6000 - 6N_B \quad \Rightarrow \quad N_B = 363,2 \approx 363 \text{ espiras}$$

2) El valor de la inducción magnética en los entrehierros es:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{4\cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 0,4 \text{ teslas}$$

y la fuerza de atracción de la armadura móvil, teniendo en cuenta que existen dos entrehierros vale:

$$f = 2\frac{1}{2}\frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{0,4^2\cdot 10^{-2}}{4\pi 10^{-7}} = 1273,24 \text{ N} = \frac{1273,24}{9,8} = 129,92 \text{ kg} \approx 130 \text{ kg}$$

3) En c.c. no existe variación de flujo, lo que significa que no habrá f.e.m. inducida en la espira por lo que la lectura del voltímetro será cero. Sin embargo en c.a. y con la armadura separada (entrehierro abierto) el flujo magnético será de la forma:

$$\Phi = \Phi_m \cos\omega\, t = \sqrt{2}\cdot 4\cdot 10^{-3}\cos 100\pi\, t$$

por lo que la f.e.m. inducida en la espira, de acuerdo con la ley de Faraday, será:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \sqrt{2}\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 100\pi \operatorname{sen} 100\pi\, t = 1,777 \operatorname{sen}\omega\, t$$

y el voltímetro señalará el valor eficaz de la f.e.m. anterior, es decir:

$$V_{ef} = \frac{1,777}{\sqrt{2}} = 1,257 \text{ voltios}$$

Problema 1.15

Hallar una expresión de la fuerza en el bloque deslizante A de la Figura 1.23. Despreciar la reluctancia del hierro. Las bobinas están alimentadas con c.c. y los parámetros son:

$$N_1 = 200;\ N_2 = 100;\ i_1 = 10\ A;\ i_2 = 15\ A;\ x = 3\ mm;\ a = 10\ mm;\ s = 10\ cm^2$$

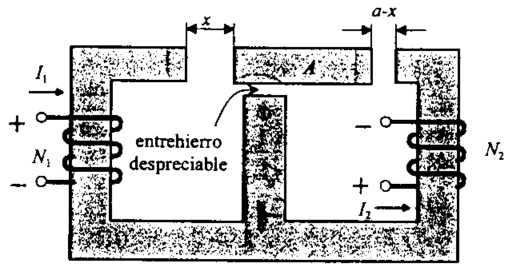


Figura 1.23

Solución

En la Figura 1.24 se ha dibujado el circuito eléctrico equivalente en el que la reluctancia del entrehierro izquierdo vale:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{3.10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-3}} = 2{,}387\cdot 10^6\ \ H^{-1}$$

Obsérvese en dicha figura que, al despreciar el entrehierro central, las dos mallas son independientes. En la malla de la izquierda se tiene una f.m.m. y un flujo correspondiente que vienen expresados por:

$$\mathcal{F}_1 = N_1\, i_1 = 200\cdot 10 = 2000\ \text{A.v.}\ ;\ \Phi_1 = \frac{2000}{2{,}387\cdot 10^6} = 8{,}378\cdot 10^{-4}\,\text{Wb}$$

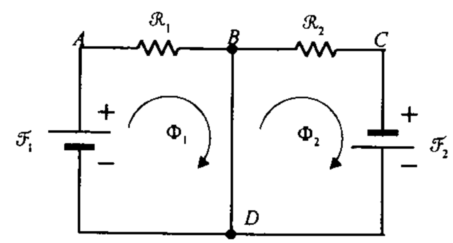


Figura 1.24

Por lo que la inducción magnética en el entrehierro izquierdo es igual a:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S} = \frac{8{,}378\cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0{,}8378\ \text{T}$$

mientras que en el entrehierro de la derecha, los valores de la reluctancia, d.d.p. magnética y flujo magnético, son respectivamente:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{7\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-3}} = 5{,}57\cdot 10^6\ \text{H}\ ;\ \mathcal{F}_2 = 100\cdot 15 = 1500\ \text{A.v.}\ ;\ \Phi_2 = \frac{1500}{5{,}57\cdot 10^6} = 2{,}693\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

que da lugar a una inducción magnética en el entrehierro de la derecha:

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S} = \frac{2{,}693\cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0{,}2693\ \text{T}$$

y, por consiguiente, las fuerzas mecánicas que tienden a reducir cada entrehierro son, respectivamente:

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{B_1^2 S}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{0{,}8378^2\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-7}} = 279{,}28\ \text{N}\ ;\ f_2 = \frac{1}{2}\frac{B_2^2 S}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{0{,}2693^2\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-7}} = 28{,}86\ \text{N}$$

La fuerza f_1 se dirige hacia la izquierda para reducir el entrehierro izquierdo, mientras que la fuerza f_2 se dirige hacia la derecha con el objeto de reducir el entrehierro derecho. Al ser la fuerza f_1 superior a f_2, la fuerza resultante sobre el bloque deslizante tiende hacia la izquierda y tiene un valor:

$$f_T = f_1 - f_2 = 279{,}28 - 28{,}86 = 250{,}42\ \text{N}$$

Problema 1.16

La Figura 1.25 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene 500 espiras. La sección transversal es uniforme en toda la estructura magnética y vale 20 cm². Se desprecia la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en el entrehierro. Si se hace circular por la bobina una corriente continua de 20 A, calcular para los siguientes valores del espesor del entrehierro: x_1 = 3 cm y x_2 = 2 cm, las siguientes magnitudes: a) flujo en el entrehierro; b) inductancia de la bobina; c) energía magnética en el entrehierro; d) fuerza que actúa sobre la armadura móvil; e) si la armadura móvil se mueve muy lentamente desde x_1 = 3 cm a x_2 = 2 cm, determinar: 1) cambio en la coenergía magnética almacenada; 2) energía eléctrica suministrada por la fuente de alimentación, suponiendo despreciable la resistencia eléctrica de la bobina y el rozamiento de la armadura móvil; 3) trabajo mecánico realizado, comprobando el balance energético del sistema.

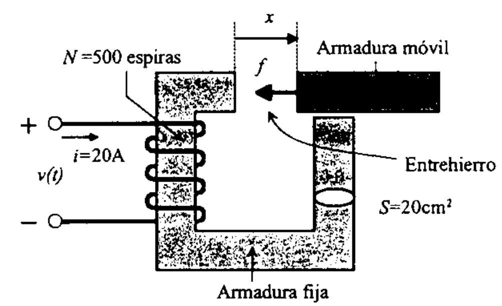


Figura 1.25

Solución

a) La reluctancia del circuito magnético se limita a la reluctancia del entrehierro, cuyo valor para cada espesor del mismo es:

$$x = 3\ \text{cm}\ \Rightarrow\ \mathcal{R}_1 = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{3\cdot 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} 2\cdot 10^{-3}} = 11{,}937\cdot 10^6\ \ H^{-1}$$

$$x = 2\ \text{cm} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_2 = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{4\pi\cdot 10^{-7} 2\cdot 10^{-3}} = 7{,}958\cdot 10^6\ \text{H}^{-1}$$

La f.m.m. aplicada a la bobina es, en ambos casos, $\mathcal{F} = Ni = 500\cdot 20 = 10^4$ A.v., por lo que los flujos correspondientes serán:

$$\Phi_1 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_1} = \frac{10^4}{11{,}94\cdot 10^6} = 0{,}8378\cdot 10^{-3}\ \text{Wb} \ ; \ \Phi_2 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_2} = \frac{10^4}{7{,}96\cdot 10^6} = 1{,}257\cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

En la Figura 1.26 se muestra un diagrama f.m.m.-flujo magnético que permite definir los puntos de funcionamiento. Obsérvese que P_1 representa el punto de trabajo inicial (para un entrehierro x = 3mm) y que tiene por coordenadas una f.m.m. de 10^4 A.v. y un flujo magnético $\Phi_1 = 0{,}8378\cdot 10^{-3}$ Wb, mientras que P_2 es el punto de trabajo final (para un entrehierro x = 2mm), que tiene por coordenadas una f.m.m. de 10^4 A.v. y un flujo magnético $\Phi_2 = 1{,}257\cdot 10^{-3}$ Wb. Si el paso de P_1 a P_2 se hace lentamente, entonces la corriente es constante y el camino seguido es la vertical que va desde P_1 hasta P_2.

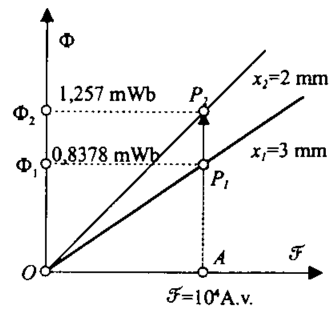


Figura 1.26

b) La inductancia de la bobina es función de la reluctancia del circuito magnético y viene expresada por:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

y al sustituir los valores de las reluctancias para los dos espesores del entrehierro señalados, da lugar a:

$$L_1 = 0{,}02094\ \text{H} \ ; \ L_2 = 0{,}03142\ \text{H}$$

c) La energía magnética está definida por:

$$W_m = \frac{1}{2} L\ i^2$$

que, teniendo en cuenta los valores de las inductancias obtenidas en el apartado anterior, corresponde a los valores:

$$W_{m1} = \frac{1}{2} L_1\ i^2 = \frac{1}{2} 0{,}02094\cdot 20^2 = 4{,}189\ \text{julios} \ ; \ W_{m2} = \frac{1}{2} L_2\ i^2 = \frac{1}{2}\ 0{,}03142\cdot 20^2 \approx 6{,}285\ \text{julios}$$

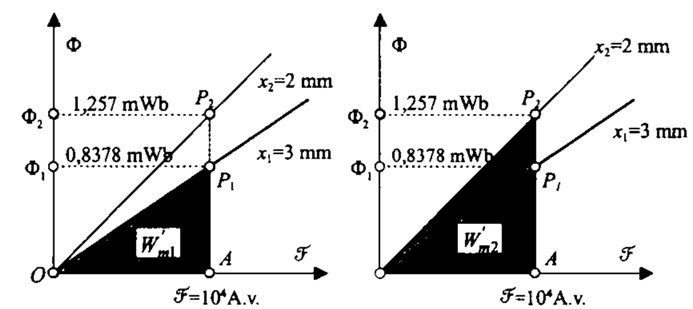
Al ser el sistema lineal, las energías magnéticas almacenadas coinciden con las coenergías. Para calcular estas vamos a utilizar el diagrama f.m.m-flujo, señalado en la Figura 1.27. Para el punto P_1, correspondiente al punto de trabajo inicial, la coenergía almacenada inicial viene definida por el área del triángulo OAP_1, cuyo valor es, según se muestra en la Figura 1.27a:

$$W'_{m1} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\,\Phi_1 = \frac{1}{2} 10^4\cdot 0{,}8378\cdot 10^{-3} = 4{,}189\ \text{julios}$$

Para el punto P_2, correspondiente al punto de trabajo final, la coenergía almacenada final viene definida por el área del triángulo OAP_2, cuyo valor es, según se muestra en la Figura 1.28 b:

$$W'_{m2} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\,\Phi_2 = \frac{1}{2} 10^4\cdot 1{,}257\cdot 10^{-3} = 6{,}285\ \text{julios}$$

valores que coinciden con los calculados a partir de la inductancia de la bobina.



a) *b)*

Figura 1.27

d) La expresión de la fuerza, si la corriente es constante y en función de la inductancia de la bobina, es:

$$f = \frac{1}{2}\ i^2\ \frac{dL}{dx}$$

y teniendo en cuenta que la inductancia se expresa en función del espesor del entrehierro por:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2\mu_0 S}{x}$$

los valores de la derivada de la inductancia y de la fuerza mecánica serán, respectivamente:

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{N^2\mu_0 S}{x^2} = -\frac{L}{x} \qquad \Rightarrow \qquad f = -\frac{1}{2} i^2 \frac{L}{x}$$

que para x = 3 cm y x = 2 cm nos da unos valores de la fuerza:

$$|f_1| = \frac{1}{2} 20^2 \frac{0{,}02094}{3\cdot 10^{-2}} = 139{,}6\ \text{newton} \ ; \ |f_2| = \frac{1}{2} 20^2 \frac{0{,}0314}{2\cdot 10^{-2}} = 314{,}2\ \text{newton}$$

e1) Si la armadura se mueve muy lentamente, la traslación se realizará a corriente constante. El cambio en la coenergía magnética almacenada, será:

$$\Delta W'_m = W'_{m2} - W'_{m1} = 6{,}285 - 4{,}189 = 2{,}096\ \text{J}$$

e2) La energía eléctrica suministrada por la fuente vendrá expresada por:

$$\Delta W_e = \mathcal{F}(\Phi_2 - \Phi_1) = 10^4\,(1{,}257\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}8378\cdot 10^{-3}) = 4{,}192\ \text{J}$$

En la Figura 1.28 se muestra el área correspondiente.

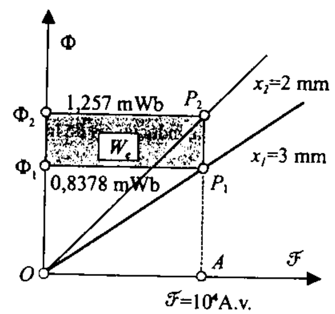


Figura 1.28

e3) El trabajo mecánico desarrollado será:

$$\Delta W_{mec} = \int f\,dx = \int -\frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dx}dx = \int_{L_1}^{L_2} -\frac{1}{2}i^2 dL = -\frac{1}{2}i^2(L_2 - L_1)$$

es decir:

$$\Delta W_{mec} = \frac{1}{2}20^2(0{,}03142 - 0{,}02094) = 2{,}096\ \text{J}$$

Para poder determinar el sentido geométrico de la energía mecánica desarrollada por el movimiento de la armadura móvil, téngase en cuenta que el principio de conservación de la energía aplicado al sistema viene expresado por:

$$\Delta W_e = \Delta W_m + \Delta W_{mec} = N\,i\,\Delta\Phi = \mathcal{F}\,\Delta\Phi \qquad (1)$$

y como quiera que además se cumple la siguiente relación entre la energía y coenergía magnética:

$$W_m + W_m' = \mathcal{F}\,\Phi$$

al diferenciar la ecuación anterior resulta:

$$\Delta W_m + \Delta W_m' = \mathcal{F}\,\Delta\Phi + \Phi\,\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}\,\Delta\Phi \qquad (2)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\Delta\mathcal{F} = 0$, debido a que la f.m.m se mantiene constante en la transición. Igualando los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$\Delta W_m + \Delta W_{mec} = \mathcal{F}\,\Delta\Phi = \Delta W_m + \Delta W_m' \quad\Rightarrow\quad \Delta W_{mec} = +\Delta W_m' \qquad (3)$$

Es decir, el trabajo mecánico se hace a costa del incremento de la coenergía magnética almacenada. En la Figura 1.29 se muestra la resta de áreas de la Figura 1.27, que es la diferencia entre las coenergías final e inicial y que de acuerdo con la ecuación (3) representa el trabajo mecánico producido. Obsérvese que el área es un triángulo de base la distancia entre P_1 y P_2 y de altura OA, por lo que el área correspondiente será:

$$\text{Área del triángulo } OP_1P_2 = \frac{1}{2}\,(1{,}257\cdot 10^{-3} - 0{,}8378\cdot 10^{-3})10^4 = 2{,}096\ \text{J}$$

que coincide, como es lógico, con el valor obtenido anteriormente.

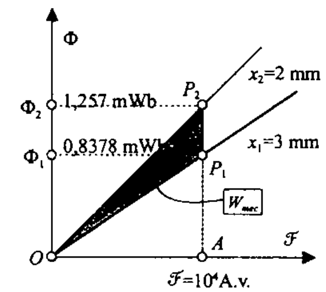


Figura 1.29

Problema 1.17

La Figura 1.30 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene N espiras. El movimiento de la armadura móvil se limita al plano horizontal (eje X). Las dimensiones son las señaladas en la figura, siendo la profundidad del electroimán de c metros. Se desprecia la resistencia eléctrica de la bobina, la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en los entrehierros. Si se aplica a la bobina una tensión sinusoidal de la forma: $v(t) = \sqrt{2}\,V\cos\omega t$, calcular la expresión de la fuerza mecánica instantánea que actuará sobre la armadura móvil.

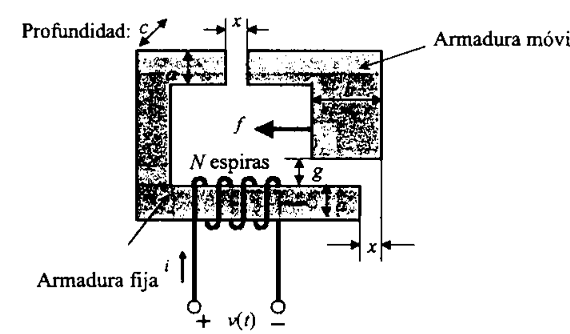


Figura 1.30

Solución

Los valores de las reluctancias de los entrehierros son:

Entrehierro superior: $\mathcal{R}_{e1} = \dfrac{x}{\mu_0 S} = \dfrac{x}{\mu_0\,a\,c}$

Entrehierro inferior: $\mathcal{R}_{e2} = \dfrac{g}{\mu_0 S'} = \dfrac{g}{\mu_0 (b-x)c}$

Al aplicar una tensión alterna a la bobina, se produce un flujo magnético alterno de amplitud constante y que se deduce de la ecuación:

$$v(t) = \sqrt{2}\ V\cos\omega t = N\frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = \frac{\sqrt{2}\ V}{N\omega}\operatorname{sen}\omega t$$

y como quiera que la fuerza para flujo constante se obtiene de la siguiente expresión:

$$f = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial x}\right]_{\Phi = cte} = -\frac{1}{2}\Phi^2\frac{d\mathcal{R}}{dx}$$

al sustituir valores se obtiene:

$$f = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}V}{N\omega}\operatorname{sen}\omega t\right)^2\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\mu_0 ac} + \frac{g}{\mu_0(b-x)c}\right]$$

y operando resulta finalmente:

$$f = -\frac{V^2}{N^2\omega^2\mu_0 c}\left[\frac{1}{a} + \frac{g}{(b-x)^2}\right]\operatorname{sen}^2\omega t$$

Problema 1.18

El circuito magnético de la Figura 1.31 está realizado con un material de permeabilidad infinita. La sección del núcleo es uniforme en toda la estructura y vale 10 cm². El entrehierro de la izquierda es de 1 mm y el de la derecha de 2 mm. La bobina tiene 500 espiras y su resistencia eléctrica es de 10 Ω. Calcular: a) tensión de corriente continua que debe aplicarse a la bobina para que la inducción en el entrehierro izquierdo sea de 1 T; b) coeficiente de autoinducción de la bobina; c) contestar a las preguntas anteriores si la bobina se coloca en la columna de la izquierda.

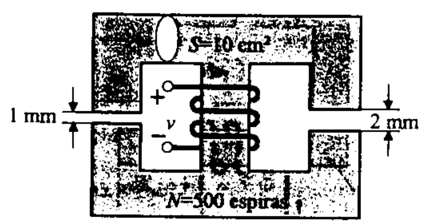


Figura 1.31

Solución

a) En la Figura 1.32 se muestra el circuito eléctrico equivalente al circuito magnético de la Figura 1.31, en el que los valores de las reluctancias de los entrehierros son:

Reluctancia entrehierro izquierdo: $\mathcal{R}_1 = \dfrac{10^{-3}}{4\pi 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 0,796\cdot 10^6\,\mathrm{H}^{-1}$

Reluctancia entrehierro derecho: $\mathcal{R}_2 = \dfrac{2\cdot 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 1,592\cdot 10^6\,\mathrm{H}^{-1} = 2\ \mathcal{R}_1$

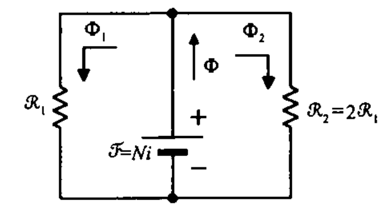


Figura 1.32

Como quiera que la inducción magnética en el entrehierro izquierdo es de 1 tesla, el flujo magnético correspondiente vale:

$$\Phi_1 = B_1 S = 1\cdot 10\cdot 10^{-4} = 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

y por lo tanto de acuerdo con la Figura 1.32, la f.m.m. necesaria en la bobina será:

$$\mathcal{F} = \Phi_1\mathcal{R}_1 = 0,796\cdot 10^6\cdot 10^{-3} = 796\ \mathrm{A.v.}$$

y de este modo se requerirá una corriente en la bobina de valor:

$$i = \frac{\mathcal{F}}{N} = \frac{796}{500} = 1,592\ \ \mathrm{A}$$

lo que corresponde a una tensión necesaria en la alimentación de c.c.:

$$v = Ri = 10\cdot 1,592 = 15,92\ \ \mathrm{V}$$

b) El flujo magnético por el entrehierro derecho vale:

$$\Phi_2 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_2} = \frac{796}{1,592\cdot 10^6} = 0,5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb}$$

por consiguiente, el flujo por la rama central en el que se ha colocado la bobina tendrá el siguiente valor:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 1\cdot 10^{-3} + 0,5\cdot 10^{-3} = 1,5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

y, por definición de coeficiente de autoinducción, se tiene:

$$L = N\frac{\Phi}{i} = 500\frac{1,5\cdot 10^{-3}}{1,592} = 0,471\ \mathrm{H}$$

El resultado anterior se puede verificar por medio de otra definición de la inductancia en función de la reluctancia equivalente del circuito magnético *que ve* la bobina y que es la resultante de la asociación en paralelo de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Como esta última es el doble de la primera, el resultado es 2/3 el valor de la primera, es decir:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{500^2}{\frac{2}{3}0,796\cdot 10^6} = 0,471\ \mathrm{H}$$

que coincide con el resultado anterior.

c) Si la bobina se coloca en la columna de la izquierda, el circuito eléctrico equivalente será el mostrado en la Figura 1.33, en el que la reluctancia del entrehierro derecho queda en cortocircuito con la rama central, es por ello que el flujo que produce ahora la bobina es el mismo que el Φ_1 de la Figura 1.32 (ya que la inducción magnética en este entrehierro sigue siendo de 1 tesla). En consecuencia la f.m.m. necesaria en la bobina seguirá siendo de 796 A.v., y la tensión de alimentación necesaria será de 15,92 voltios, igual que en caso anterior.

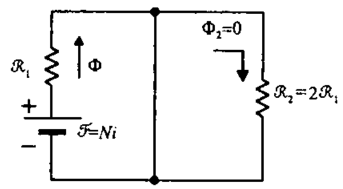


Figura 1.33

En cuanto al valor de la inductancia de la bobina, tendrá ahora una magnitud:

$$L = N\frac{\Phi}{i} = 500\frac{1.10^{-3}}{1,592} = 0,314 \text{ H}$$

Problema 1.19

El circuito magnético de la Figura 1.34 está realizado con un material de permeabilidad infinita. Las reluctancias magnéticas de los tres entrehierros señalados son respectivamente $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$. Las bobinas tienen N_1 y N_2 espiras. Calcular: a) expresiones de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua de los devanados; b) coeficiente de acoplamiento magnético de las bobinas.

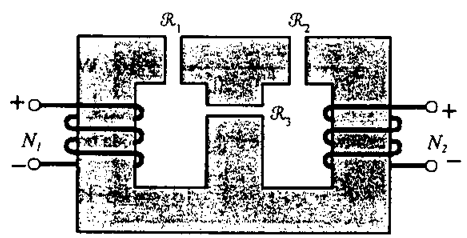


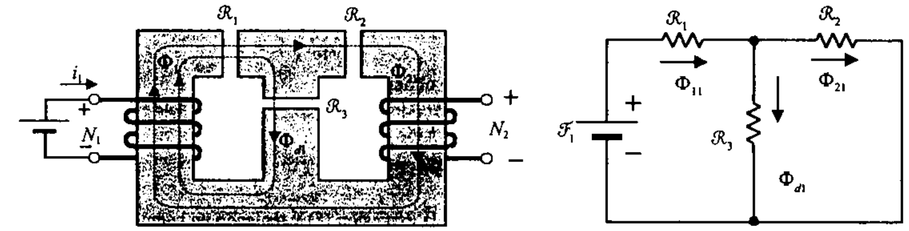
Figura 1.34

Solución

a) Vamos a considerar primeramente el esquema de la Figura 1.35a, en el que solamente se alimenta la bobina de la izquierda 1 con una corriente i_1 y se deja abierta la bobina 2 de la derecha. En la Figura 1.35b se muestra el esquema eléctrico equivalente. El flujo total que produce la bobina 1 es Φ_{11}, parte del cual, el denominado Φ_{21}, atraviesa la bobina 2 y parte se cierra por el entrehierro central en forma de flujo de dispersión Φ_{d1}.

Se observa en la Figura 1.35b, que las reluctancias $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$ están en paralelo y su resultante está en serie con $\mathcal{R}_1$. Por ello el flujo magnético Φ_{11} vendrá expresado por:

$$\Phi_{11} = \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}} = \frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1}\mathcal{F}_1 = \frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1}N_1 i_1 \qquad (1)$$



a) b)

Figura 1.35

y al aplicar la definición de coeficiente de autoinducción se puede escribir:

$$L_{11} = N_1\frac{\Phi_{11}}{i_1} = N_1^2\frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1} \qquad (2)$$

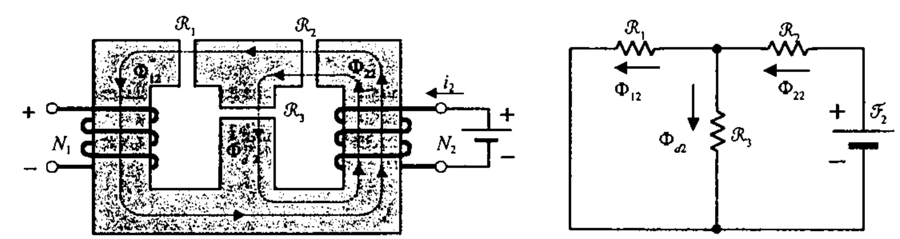
que es el valor de la inductancia de la bobina 1. A partir de la expresión (1) y teniendo en cuenta el circuito de la Figura 1.35b y la regla del divisor de corriente, se puede obtener el flujo magnético Φ_{21}, es decir, el flujo que atraviesa el devanado 2 producido por el devanado 1, resultando ser:

$$\Phi_{21} = \Phi_{11}\frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1}N_1 i_1 \qquad (3)$$

y, por consiguiente, el coeficiente de inducción mutua L_{21} vale:

$$L_{21} = N_2\frac{\Phi_{21}}{i_1} = N_1 N_2\frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1} \qquad (4)$$

b) Vamos a considerar ahora el esquema de la Figura 1.36a, en el que solamente se alimenta la bobina 2 con una corriente i_2 y se deja abierta la bobina 1 de la izquierda. En la Figura 1.36b se muestra el esquema eléctrico equivalente. El flujo total que produce la bobina 2 es Φ_{22}, parte del cual, el denominado Φ_{12}, atraviesa la bobina 1 y parte se cierra por el entrehierro central en forma de flujo de dispersión Φ_{d2}.



a) b)

Figura 1.36

Se observa en la Figura 1.36b que las reluctancias $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_3$ están en paralelo y su resultante está en serie con $\mathcal{R}_2$, es por ello que el flujo magnético Φ_{22} vendrá expresado por:

$$\Phi_{22} = \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{R}_2 + \dfrac{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}} = \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1}\mathcal{F}_2 = \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1}N_2 i_2 \tag{5}$$

y al aplicar la definición de coeficiente de autoinducción se obtiene:

$$L_{22} = N_2\frac{\Phi_{22}}{i_2} = N_2^2\frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1} \tag{6}$$

que es el valor de la inductancia de la bobina 2. A partir de la expresión (5) y teniendo en cuenta el circuito de la Figura 1.36b y la regla del divisor de corriente, se puede obtener el flujo magnético Φ_{12}, es decir el flujo que atraviesa el devanado 1 producido por el devanado 2, resultando ser:

$$\Phi_{12} = \Phi_{22}\frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1}N_2 i_2 \tag{7}$$

y, por consiguiente, el coeficiente de inducción mutua L_{12} será:

$$L_{12} = N_1\frac{\Phi_{12}}{i_2} = N_1 N_2\frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1} \tag{8}$$

si se comparan las ecuaciones (4) y (8) se observa la siguiente igualdad:

$$L_{12} = L_{21} = M = N_1 N_2\frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1} \tag{9}$$

es decir, coinciden los dos coeficientes de inducción mutua y que se designan de una forma conjunta como M.

c) Debe señalarse que si no existieran flujos de dispersión en el circuito habría un acoplamiento magnético perfecto entre las bobinas 1 y 2. Sin embargo, la existencia de estos flujos da lugar a la definición de los siguientes coeficientes de acoplamiento:

1) *Coeficiente de acoplamiento del devanado 1*, que se define del siguiente modo: $k_1 = \dfrac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$ y que, teniendo en cuenta la expresión (3), se cumple:

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} \tag{10}$$

2) *Coeficiente de acoplamiento del devanado 2*, que se define del siguiente modo: $k_2 = \dfrac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}$ y que, teniendo en cuenta la expresión (7), se cumple:

$$k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3} \tag{11}$$

3) *Coeficiente de acoplamiento total entre los devanados 1 y 2*, que se define del siguiente modo: $k = \sqrt{k_1 k_2}$ y teniendo en cuenta los resultados (10) y (11) da lugar a:

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{\mathcal{R}_3}{\sqrt{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3)(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3)}} \tag{12}$$

el lector puede comprobar que se cumple la siguiente relación:

$$M = k\sqrt{L_{11}L_{22}} \tag{13}$$

expresión que relaciona el coeficiente de inducción mutua con los coeficientes de autoinducción de cada bobina.

Problema 1.20

El circuito magnético de la Figura 1.37 está realizado con un material de permeabilidad infinita. Existen tres entrehierros con espesores de 1 mm, 2 mm y 3 mm. La sección del circuito magnético es constante y vale 10 cm². Las bobinas tienen N_1=200 y N_2=100 espiras. a) Se alimenta únicamente la bobina 1 con una c.c. de 10 A calcular los flujos magnéticos Φ_{11}, Φ_{21} y Φ_{d1} y también el coeficiente de acoplamiento del devanado 1; b) en el caso anterior determinar el coeficiente de autoinducción L_{11} y el de inducción mutua L_{21}; c) se alimenta a continuación únicamente la bobina 2 con una corriente continua de 20 A, calcular los flujos magnéticos Φ_{22}, Φ_{12} y Φ_{d2} y también el coeficiente de acoplamiento del devanado 2; d) en el caso anterior determinar el coeficiente de autoinducción L_{22} y el de inducción mutua L_{12}; e) ¿cuál es el coeficiente de acoplamiento total entre ambas bobinas?

NOTA: Aplíquense los resultados del problema anterior.

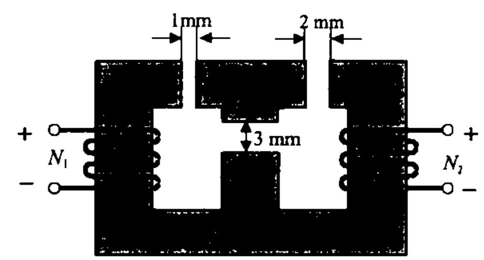


Figura 1.37

Solución

a) Las reluctancias de los tres entrehierros señalados en la Figura 1.37 son, respectivamente:

Reluctancia entrehierro izquierdo: $\mathcal{R}_1 = \dfrac{10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 0,796\cdot 10^6\ \text{H}^{-1}$

Reluctancia entrehierro derecho: $\mathcal{R}_2 = \dfrac{2\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 1,592\cdot 10^6\ \text{H}^{-1} = 2\mathcal{R}_1$

Reluctancia entrehierro central: $\mathcal{R}_3 = \dfrac{3\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 2,387\cdot 10^6\ \text{H}^{-1} = 3\mathcal{R}_1$

Al alimentar solamente la bobina 1, la f.m.m. correspondiente es $\mathcal{F}_1 = N_1\, i_1 = 200 \cdot 10 = 2000$ A.v. y, aplicando los resultados del problema anterior, se obtiene:

$$\Phi_{11} = \frac{\mathcal{R}_2+\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2+\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3+\mathcal{R}_3\mathcal{R}_1} N_1 i_1 = \frac{2\mathcal{R}_1+3\mathcal{R}_1}{2\mathcal{R}_1^2+6\mathcal{R}_1^2+3\mathcal{R}_1^2}2000 = \frac{5}{11\mathcal{R}_1}2000 = \frac{5}{11\cdot 0{,}796\cdot 10^6}2000 = 1{,}142 \text{ mWb}$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{11}\frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2+\mathcal{R}_3} = 1{,}142\frac{3\mathcal{R}_1}{2\mathcal{R}_1+3\mathcal{R}_1} = 1{,}142\frac{3}{5} = 0{,}6852 \text{ mWb} \;;\; \Phi_{d1} = \Phi_{11}-\Phi_{21} = 1{,}142-0{,}6852 = 0{,}4568 \text{ mWb}$$

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{0{,}6852}{1{,}142} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

b) Las inductancias L_{11} y L_{21} son:

$$L_{11} = N_1\frac{\Phi_{11}}{i_1} = 200\frac{1{,}142\cdot 10^{-3}}{10} = 22{,}84 \text{ mH} \;;\; L_{21} = N_2\frac{\Phi_{21}}{i_1} = 100\,\frac{0{,}6852\cdot 10^{-3}}{10} = 6{,}852 \text{ mH}$$

c) Al alimentar solamente la bobina 2, la f.m.m. correspondiente es $\mathcal{F}_2 = N_2\, i_2 = 100\cdot 20 = 2000$ A.v. y, aplicando los resultados del problema anterior, se obtiene:

$$\Phi_{22} = \frac{\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2+\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3+\mathcal{R}_3\mathcal{R}_1} N_2 i_2 = \frac{\mathcal{R}_1+3\mathcal{R}_1}{2\mathcal{R}_1^2+6\mathcal{R}_1^2+3\mathcal{R}_1^2}2000 = \frac{4}{11\mathcal{R}_1}2000 = \frac{4}{11\cdot 0{,}796\cdot 10^6}2000 = 0{,}914 \text{ mWb}$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{22}\frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_3} = 0{,}914\frac{3\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_1+3\mathcal{R}_1} = 0{,}914\frac{3}{4} = 0{,}6852 \text{ mWb} \;;\; \Phi_{d2} = \Phi_{22}-\Phi_{12} = 0{,}914-0{,}6852 = 0{,}229 \text{ mWb}$$

$$k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{0{,}6852}{0{,}914} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

d) Las inductancias L_{22} y L_{12} son:

$$L_{22} = N_2\frac{\Phi_{22}}{i_2} = 100\,\frac{0{,}914\cdot 10^{-3}}{20} = 4{,}57 \text{ mH} \;;\; L_{12} = N_1\frac{\Phi_{12}}{i_2} = 200\,\frac{0{,}6852\cdot 10^{-3}}{20} = 6{,}852 \text{ mH}$$

e) El coeficiente de acoplamiento total vale:

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{0{,}6\cdot 0{,}75} = 0{,}6708$$

podemos comprobar que se cumple la siguiente relación:

$$M = k\sqrt{L_{11}L_{22}} = 0{,}6708\sqrt{22{,}84\cdot 4{,}57} = 6{,}852 \text{ mH}$$

Problema 1.21

Las inductancias del dispositivo electromagnético mostrado en la Figura 1.38 son:

$$L_{aa}=L_1+L_2\cos 2\theta;\; L_{bb}=L_1-L_2\cos 2\theta;\; L_{a2}=L_m\cos\theta;\; L_{b2}=L_m\text{sen}\theta;\; L_{ab}=L_2\text{ sen}2\theta;\; L_{22}=\text{constante}$$

Calcular la expresión del par producido, si las corrientes son de la forma:

$$i_a = I_m\cos\omega t \;;\; i_b = I_m\text{sen}\omega t \;;\; i_2 = I_2$$

y el rotor se mueve a una velocidad angular $\omega_m = \omega$, estando definida la posición del rotor por la expresión: $\theta = \omega_m t + \delta$.

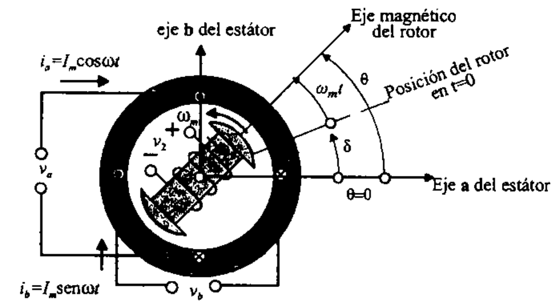


Figura 1.38

Solución

a) El par responde a la expresión genérica matricial siguiente:

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_a & i_b & i_2\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{a2}\\ L_{ba} & L_{bb} & L_{b2}\\ L_{2a} & L_{2b} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a\\ i_b\\ i_2\end{bmatrix}$$

que, al desarrollar, conduce a la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2}i_a^2\frac{dL_{aa}}{d\theta}+\frac{1}{2}i_b^2\frac{dL_{bb}}{d\theta}+\frac{1}{2}i_2^2\frac{dL_{22}}{d\theta}+i_a i_b\frac{dL_{ab}}{d\theta}+i_a i_2\frac{dL_{a2}}{d\theta}+i_b i_2\frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

Las expresiones de las derivadas de las inductancias son las siguientes:

$$\frac{dL_{aa}}{d\theta} = -2\,L_2\text{sen}2\theta \;;\; \frac{dL_{bb}}{d\theta} = +2\,L_2\text{sen}2\theta \;;\; \frac{dL_{a2}}{d\theta} = -L_m\text{sen}\theta \;;\; \frac{dL_{b2}}{d\theta} = L_m\cos\theta \;;\; \frac{dL_{ab}}{d\theta} = 2L_2\cos 2\theta \;;\; \frac{dL_{22}}{d\theta} = 0$$

Al sustituir estas derivadas en la expresión del par se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}i_a^2\left[-2L_2\text{sen}2\theta\right]+\frac{1}{2}i_b^2\left[+2L_2\text{sen}2\theta\right]+i_a i_b\left[2L_2\cos 2\theta\right]+i_a i_2\left[-L_m\text{sen}\theta\right]+i_b i_2\left[+L_m\cos\theta\right]$$

y, teniendo en cuenta las expresiones de las corrientes eléctricas, resulta:

$$T = -L_2 I_m^2\text{ sen}2\theta\cos^2\omega t + L_2 I_m^2\text{ sen}2\theta\text{ sen}^2\omega t + 2L_2 I_m^2\cos 2\theta\text{ sen}\omega t\cos\omega t - L_m I_2 I_m\text{sen}\theta\cos\omega t + L_m I_2 I_m\cos\theta\text{ sen}\omega t$$

que al simplificar conduce a la siguiente expresión:

$$T = -L_2 I_m^2\text{ sen }2(\theta-\omega t) - L_m I_2 I_m\text{sen }(\theta-\omega t)$$

y como quiera que $\theta = \omega_m t + \delta = \omega t + \delta$ se convierte en:

$$T = -L_2 I_m^2 \text{ sen } 2\delta - L_m I_2 I_m \text{ sen}\delta \qquad (1)$$

La expresión del par no depende del tiempo. Este problema explica el funcionamiento de un *motor síncrono bifásico de polos salientes*. Obsérvese que al girar el motor a la velocidad $\omega_m = \omega$ denominada *velocidad de sincronismo*, se obtiene un par instantáneo que no depende del tiempo. El primer término de (1) es el par de reluctancia y se debe a los polos salientes de rotor y el segundo término es el par propio del motor. En los motores con rotor cilíndrico (configuración de polos lisos) el par de reluctancia no existe y solamente tiene efecto el segundo sumando de (1).

Problema 1.22

Para el sistema electromecánico de la Figura 1.39, los valores de las inductancias de las bobinas son:

$$L_{11} = 5 + 2\cos 2\theta \;;\; L_{22} = 3 + \cos 2\theta \;;\; L_{12} = 10\cos\theta$$

si los devanados se alimentan con corrientes continuas de valores: $i_1 = 1$ A; $i_2 = 0,5$ A. *Calcular: a) Energía magnética almacenada en función de* θ*; b) par mecánico desarrollado en función de* θ.

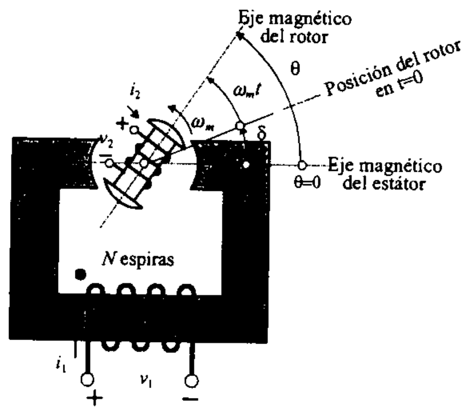


Figura 1.39

Solución

a) La expresión general de la energía magnética almacenada (que coincide con la coenergía por ser el sistema lineal) en un sistema con dos devanados es de la forma:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2} L_{11}\, i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}\, i_2^2 + L_{12} i_1 i_2$$

y al sustituir los valores de las corrientes y de las inductancias resulta:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2}\,(5 + 2\cos 2\theta)\; 1^2 \; + \frac{1}{2}(3 + \cos 2\theta)\; 0,5^2 + 10(\cos\theta)\, 1 \cdot 0,5$$

es decir:

$$W_m = W_m' = 2,5 + \cos 2\theta \; + 0,375 + 0,125\cos 2\theta + 5\cos\theta = 2,875 + 1,125\cos 2\theta + 5\cos\theta$$

b) El par mecánico desarrollado a corriente constante tiene la expresión:

$$f = +\left[\frac{\partial W_m'}{\partial \theta}\right]_{i = cte} = -2,25\,\text{sen}2\theta - 5\,\text{sen}\theta$$

Problema 1.23

El dispositivo electromagnético mostrado en la Figura 1.39 (problema anterior) tiene una inductancia máxima y mínima en el devanado del rotor de 0,6 H y 0,3 H respectivamente, los valores máximos y mínimos de la inductancia correspondiente del estátor son de 1 H y 0,5 H respectivamente. La inductancia mutua máxima es de 0,7 H. Ambos devanados llevan una corriente constante de valor $\sqrt{2}$ *A. a) Calcular el par cuando* $\theta = 45°$*; b) si el rotor se mueve lentamente desde* $\theta = 90°$ *hasta* $\theta = 0°$ *calcular: 1) trabajo mecánico realizado, 2) cambio en la energía magnética almacenada, 3) entrada eléctrica; c) si el rotor gira a una velocidad de 100 rad/s, calcular las f.e.m.* e_1 *y* e_2 *producidas en los devanados en el instante en que el rotor pasa por la posición* $\theta = 45°$.

Solución

Debido a los salientes magnéticos de las estructuras del estátor y del rotor de la máquina eléctrica de la Figura 1.39, los coeficientes de autoinducción de ambos devanados serán de la forma:

$$L_{ij} = \frac{L_{max} + L_{min}}{2} + \frac{L_{max} - L_{min}}{2}\cos 2\theta$$

y teniendo en cuenta los valores máximo y mínimo de las inductancias que señala el enunciado, se tienen las siguientes expresiones para los devanados del estátor y del rotor respectivamente:

Inductancia del estátor: $L_{11} = \dfrac{1 + 0,5}{2} + \dfrac{1 - 0,5}{2}\cos 2\theta = 0,75 + 0,25\cos 2\theta$

Inductancia del rotor: $L_{22} = \dfrac{0,6 + 0,3}{2} + \dfrac{0,6 - 0,3}{2}\cos 2\theta = 0,45 + 0,15\cos 2\theta$

Como quiera que la inductancia mutua máxima entre ambos arrollamientos es de 0,7 H y es evidente que su valor depende del coseno del ángulo que forman los ejes del estátor y el rotor, se puede escribir:

$$L_{12} = L_{21} = M = 0,7\cos\theta$$

a) La expresión general del par electromagnético entre ambos devanados es:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta}$$

y, calculando las derivadas que se incluyen en la ecuación anterior, resulta:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2(-0,5\,\text{sen}2\theta) + \frac{1}{2} i_2^2(-0,3\,\text{sen}2\theta) + i_1 i_2(-0,7\,\text{sen}\theta)$$

Como quiera que los valores de las corrientes son: $i_1 = i_2 = \sqrt{2}$, al sustituir en la ecuación anterior se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} 2(-0,5\,\text{sen}\,2\theta) + \frac{1}{2} 2(-0,3\,\text{sen}\,2\theta) + 2(-0,7\text{sen}\theta) = -0,8\text{sen}2\theta - 1,4\text{sen}\theta$$

por consiguiente, cuando $\theta = 45°$, resulta:

$$T = -0{,}8 \text{ sen } 90° - 1{,}4 \text{ sen } 45° = -0{,}8 - 1{,}4\frac{1}{\sqrt{2}} = -1{,}79 \text{ N.m.}$$

b1) El trabajo mecánico desarrollado cuando el rotor se mueve lentamente entre $\theta = 90°$ y $\theta = 0°$ es:

$$W_{mec} = \int_{90°}^{0°} T\, d\theta = \int_{90°}^{0°} (0{,}8 \text{ sen}2\theta - 1{,}4 \text{ sen}\theta)\, d\theta = \left[0{,}4 \cos 2\theta + 1{,}4 \cos\theta\right]_{90°}^{0°} = 0{,}4 + 1{,}4 - (-0{,}4) - 0 = 2{,}2$$

b2) La expresión de la energía magnética almacenada es:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2$$

y al sustituir los valores de las inductancias y de las corrientes se obtiene:

$$W_m = \frac{1}{2}(0{,}75 + 0{,}25 \cos 2\theta)\ 2 + \frac{1}{2}(0{,}45 + 0{,}15 \cos 2\theta)\ 2 + (0{,}7 \cos\theta)\ 2 = 1{,}2 + 0{,}4 \cos 2\theta + 1{,}4 \cos\theta$$

Lo que indica que la energía magnética almacenada en la situación inicial ($\theta = 90°$) vale:

$$W_{mi} = 1{,}2 + 0{,}4 \cos 180° + 1{,}4 \cos 90° = 0{,}8 \text{ julios}$$

y en la situación final ($\theta = 0°$) es:

$$W_{mf} = 1{,}2 + 0{,}4 \cos 0° + 1{,}4 \cos 0° = 3 \text{ J}$$

En consecuencia, el cambio en la energía magnética almacenada vale:

$$\Delta W_m = W_{mf} - W_{mi} = 3 - 0{,}8 = 2{,}2 \text{ J}$$

b3) La energía eléctrica que entra en los arrollamientos es de la forma:

$$dW_e = v\ i\ dt = N\frac{d\Phi}{dt} i\, dt = i\, d\Psi \quad \Rightarrow \quad \Delta W_e = i\ \Delta\Psi$$

donde se ha llamado $\Psi = N\,\Phi$ al flujo concatenado total por el devanado respectivo. De este modo, para el devanado 1 se tiene ($i_1 = i_2 = \sqrt{2}$) y el valor del flujo concatenado total es de la forma:

$$\Psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 = \sqrt{2}\ \left[0{,}75 + 0{,}25 \cos 2\theta + 0{,}7 \cos\theta\right]$$

que para $\theta = 90°$ tiene un valor inicial:

$$\Psi_{1i}(\theta = 90°) = \sqrt{2}\ \left[0{,}75 + 0{,}25 \cos 180° + 0{,}7 \cos 90°\right] = 0{,}5\sqrt{2}$$

y para $\theta = 0°$ tiene un valor final:

$$\Psi_{1f}(\theta = 0°) = \sqrt{2}\ \left[0{,}75 + 0{,}25 \cos 0° + 0{,}7 \cos 0°\right] = 1{,}7\sqrt{2}$$

por lo que el incremento de energía eléctrica que entra en el devanado 1 vale:

$$\Delta W_{e1} = i_1 \Delta\Psi = i_1(\Psi_{1f} - \Psi_{1i}) = \sqrt{2}\ (1{,}7\sqrt{2} - 0{,}5\sqrt{2}) = 2{,}4 \text{ J}$$

De un modo similar para el devanado 2 resulta:

$$\Psi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 = \sqrt{2}\ \left[0{,}75 \cos\theta + 0{,}45 + 0{,}15 \cos 2\theta\right]$$

que para $\theta = 90°$ tiene un valor inicial:

$$\Psi_{2i}(\theta = 90°) = \sqrt{2}\ \left[0{,}75 \cos 90° + 0{,}45 + 0{,}15 \cos 180°\right] = 0{,}3\sqrt{2}$$

y para $\theta = 0°$ tiene un valor final:

$$\Psi_{2i}(\theta = 0°) = \sqrt{2}\ \left[0{,}75 \cos 0° + 0{,}45 + 0{,}15 \cos 0°\right] = 1{,}3\sqrt{2}$$

por lo que el incremento de energía eléctrica que entra en el devanado 2 será:

$$\Delta W_{e2} = i_2(\Psi_{2f} - \Psi_{2i}) = \sqrt{2}(1{,}3\sqrt{2} - 0{,}3\sqrt{2}) = 2 \text{ J}$$

por lo tanto la energía que entrega la red a los devanados de la máquina en su movimiento de giro es:

$$\Delta W_e = \Delta W_{e1} + \Delta W_{e2} = 2{,}4 + 2 = 4{,}4 \text{ J}$$

Obsérvese que se cumple el balance energético del sistema, es decir, cuando el rotor se mueve lentamente, los devanados absorben de la red una energía eléctrica de 4,4 J, el rotor desarrolla un trabajo mecánico de 2,2 J y se produce un aumento de la energía magnética almacenada en el sistema de 2,2 J.

c) Las f.e.m.s. inducidas en las bobinas se obtienen de las expresiones siguientes:

$$e_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{11} i_1 + L_{12} i_2) \quad ; \quad e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{21} i_1 + L_{22} i_2)$$

que se transforman en:

$$e_1 = -\left(\frac{dL_{11}}{d\theta} i_1 + \frac{dL_{12}}{d\theta} i_2\right)\frac{d\theta}{dt} = -\left(\frac{dL_{11}}{d\theta} i_1 + \frac{dL_{12}}{d\theta} i_2\right)\omega_m$$

$$e_2 = -\left(\frac{dL_{21}}{d\theta} i_1 + \frac{dL_{22}}{d\theta} i_2\right)\frac{d\theta}{dt} = -\left(\frac{dL_{21}}{d\theta} i_1 + L_{12}\frac{dL_{22}}{d\theta} i_2\right)\omega_m$$

y, teniendo en cuenta que las inductancias y sus derivadas respectivas son:

$$L_{11} = 0{,}75 + 0{,}25 \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_{11}}{d\theta} = -0{,}5 \text{ sen}2\theta$$

$$L_{22} = 0{,}45 + 0{,}15 \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_{22}}{d\theta} = -0{,}3 \text{ sen}2\theta$$

$$L_{12} = L_{21} = M = 0{,}7 \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_{12}}{d\theta} = \frac{dL_{21}}{d\theta} = -0{,}7 \text{ sen}\theta$$

Al sustituir en las ecuaciones de las f.e.m.s. se obtiene:

$$e_1 = -\left(\frac{dL_{11}}{d\theta}i_1 + \frac{dL_{12}}{d\theta}i_2\right)\omega_m = -\left[(-0,5\,\mathrm{sen}2\theta)\,i_1 + (-0,7\,\mathrm{sen}\theta)\,i_2\right]\omega_m$$

$$e_2 = -\left(\frac{dL_{21}}{d\theta}i_1 + \frac{dL_{22}}{d\theta}i_2\right)\omega_m = -\left[(-0,7\,\mathrm{sen}\theta)\,i_1 + (-0,3\,\mathrm{sen}2\theta)\,i_2\right]\omega_m$$

Sustituyendo los valores de las corrientes $i_1 = i_2 = \sqrt{2}$ A y la velocidad angular ω_m =100 rad/s resulta finalmente:

$$e_1 = 100\sqrt{2}\,[0,5\,\mathrm{sen}2\theta + 0,7\,\mathrm{sen}\theta] \quad ; \quad e_2 = 100\sqrt{2}\,[0,7\,\mathrm{sen}\theta + 0,3\,\mathrm{sen}2\theta]$$

que para θ=45° dan lugar a:

$$e_1 = 100\sqrt{2}\,[0,5\,\mathrm{sen}90^\circ + 0,7\,\mathrm{sen}45^\circ] = 140,71 \text{ V}$$

$$e_2 = 100\sqrt{2}\,[0,7\,\mathrm{sen}45^\circ + 0,3\,\mathrm{sen}90^\circ] = 112,43 \text{ V}$$

Problema 1.24

Una máquina eléctrica tiene forma cilíndrica tanto en la estructura del estátor como la del rotor. Los valores de las inductancias son:

$$L_{11}(\textit{estátor}) = 0,1\ H;\ L_{22}\ (\textit{rotor}) = 0,04\ H;\ L_{12} = 0,05\cos\theta\ \ H$$

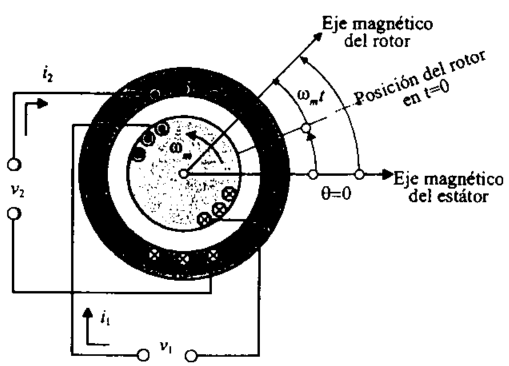
donde θ expresa el ángulo que forman los ejes de ambos devanados. a) Si la máquina gira a una velocidad ω_m *= 200 rad/s y por uno de los devanados circula una corriente 10 sen 200t. ¿Cuál será la f.e.m. máxima (de pico) inducida en la otra bobina? b) Supóngase que los devanados se conectan en serie y circula por ellos una corriente 10 sen 200t A, ¿para qué velocidades del rotor desarrollará la máquina un par medio? c) ¿Cuál es el valor máximo del par medio que puede obtenerse en el caso b)?*

NOTA: despreciar las resistencias eléctricas de los devanados.

Solución

a) En la Figura 1.40 se muestra el esquema correspondiente de la máquina. Supongamos entonces que se excita la bobina del estátor por una corriente: $i_1(t) = 10\,\mathrm{sen}200t$ A, y el devanado 2 se deja abierto (i_2=0 A), el valor de la f.e.m. inducida en el devanado 2 se obtiene de la expresión:

$$e_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt}(L_{21}i_1 + L_{22}i_2) = \frac{d}{dt}(L_{21}i_1) = \frac{d}{dt}\left[(0,05\cos\theta)\,(10\,\mathrm{sen}200t)\right]$$



y como quiera que $\theta = \omega_m t + \delta = 200\,t + \delta$, el valor de la f.e.m. será:

$$e_2 = \frac{d}{dt}\left[(0,05\cos\theta)\,(10\,\mathrm{sen}200t)\right] = \frac{d}{dt}\left[(0,05\cos(200t+\delta)\,(10\,\mathrm{sen}200t)\right] = 100\cos(200t+\delta)$$

que corresponde a una tensión máxima o de pico de 100 voltios.

b) La expresión del par mecánico producido es de la forma:

$$T = \frac{1}{2}i_1^2\frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2}i_2^2\frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2\frac{dL_{12}}{d\theta} = (-0,05\,\mathrm{sen}\theta)\,i_1 i_2$$

y teniendo en cuenta que se tiene:

$$i_1(t) = i_2(t) = 10\,\mathrm{sen}200t\ ;\ \theta = \omega_m t + \delta$$

al sustituir en la expresión del par se obtiene:

$$T = -0,05\,\mathrm{sen}\,(\omega_m t + \delta)100\,\mathrm{sen}^2 200t = -5\,\mathrm{sen}\,(\omega_m t + \delta)\frac{1-\cos400t}{2} =$$

$$= -2,5\,\mathrm{sen}\,(\omega_m t + \delta) + 2,5\cos400t\,\mathrm{sen}\,(\omega_m t + \delta)$$

Obsérvese en la expresión anterior que si el rotor está parado, el par es igual a –5 sen δ sen² 200t, cuyo valor medio es –2,5 sen δ N.m., pero también se produce un par medio distinto de cero si el rotor se mueve a la velocidad angular: ω_m = 400 rad/s. Téngase en cuenta que para esta velocidad, la expresión instantánea del par sería:

$$T = -2,5\,\mathrm{sen}\,(400t + \delta) + 2,5\cos400t\,\mathrm{sen}\,(400t + \delta)$$

cuyo valor medio, denominando $\alpha = \omega_m t = 400\,t$, sería:

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T\,d(\omega_m t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2,5\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\delta)\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2,5\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\delta)\,d\alpha$$

La primera integral es nula y la segunda vale:

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2,5\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\delta)\,d\alpha = 1,25\,\mathrm{sen}\delta$$

el par medio es por consiguiente igual a 1,25 senδ N.m., y se desarrolla cuando la velocidad es de 400 rad/s. El valor máximo del par es de 1,25 N.m.

Problema 1.25

Una máquina eléctrica con salientes magnéticos tanto en el estátor como en el rotor tiene las siguientes inductancias en henrios:

$$L_{11}(\textit{estátor}) = 0,75 + 0,35\cos2\theta;\ L_{22}\ (\textit{rotor}) = 0,5 + 0,2\cos2\theta;\ L_{12}(\textit{estátor-rotor}) = 0,8\cos\theta$$

Las resistencias de los devanados son despreciables. Si por el devanado del estátor circula una corriente $i_1(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,314\,t$*, y el rotor está en cortocircuito, calcular la corriente* $i_2(t)$ *que circulará por el rotor y el par resultante cuando θ = 135°*

Solución

a) En la Figura 1.41 se muestra el esquema correspondiente de la máquina. Al excitar la bobina del estátor por una corriente: $i_1(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}314t$, y estar el devanado 2 en cortocircuito, la tensión en el devanado 2 es nula y como quiera que esta es igual a:

$$v_2 = 0 = -e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{21}i_1 + L_{22}i_2) = -\frac{d}{dt}\left[(0{,}8\cos\theta)\sqrt{2}\,\mathrm{sen}314t + (0{,}5+0{,}2\cos 2\theta)\,i_2\right]$$

es decir:

$$v_2 = 0 = (0{,}8\cos\theta)\sqrt{2}\cdot 314\cos 314t + (0{,}5+0{,}2\cos 2\theta)\frac{di_2}{dt}$$

que para $\theta = 135°$ nos da:

$$v_2 = 0 = -0{,}8\cdot 314\cos 314t + 0{,}5\frac{di_2}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{di_2}{dt} = 1{,}6\cdot 314\cos 314t$$

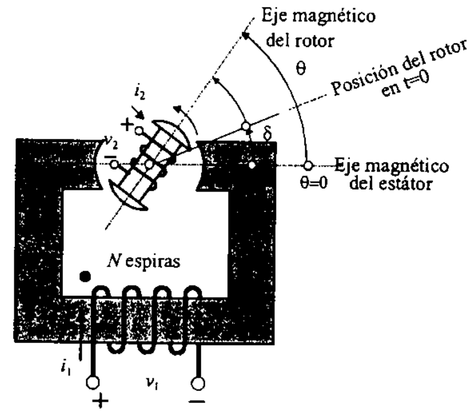


Figura 1.41

y por consiguiente:

$$i_2(t) = \int 1{,}6\cdot 314\cos 314t = 1{,}6\,\mathrm{sen}314t + C$$

Si se considera que en t=0 la corriente i_2 es cero, se tiene finalmente una corriente en el devanado del rotor:

$$i_2(t) = 1{,}6\,\mathrm{sen}314t$$

b) La expresión del par es:

$$T = \frac{1}{2}i_1^2\frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2}i_2^2\frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2\frac{dL_{12}}{d\theta}$$

cuyo resultado es:

$$T = \frac{1}{2}i_1^2(-0{,}7\,\mathrm{sen}2\theta) + \frac{1}{2}i_2^2(-0{,}4\,\mathrm{sen}2\theta) + i_1 i_2(-0{,}8\,\mathrm{sen}\theta)$$

y, que para θ=135°, da lugar al siguiente resultado:

$$T = 0{,}35\,i_1^2 + 0{,}2\,i_2^2 + i_1 i_2(-0{,}566\,\mathrm{sen}\theta)$$

que teniendo en cuenta los valores de las corrientes que circulan por los devanados: $i_1(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}314t$; $i_2(t) = 1{,}6\,\mathrm{sen}314t$ se obtiene:

$$T = 0{,}7\,\mathrm{sen}^2 314t + 0{,}512\,\mathrm{sen}^2 314t - 1{,}28\,\mathrm{sen}^2 314t = -0{,}068\,\mathrm{sen}^2 314t$$

es decir:

$$T = -0{,}068\frac{1-\cos 628t}{2} = 0{,}034(\cos 628t - 1)$$

Problemas suplementarios

Problema 1.26

La estructura magnética de la Figura 1.42 está fabricada con dos tipos de materiales, cuyas curvas de imanación están expresadas por las siguientes ecuaciones:

$$\textit{Armadura fija: } B_1 = \frac{2H_1}{150+H_1}; \quad \textit{Armadura móvil: } B_2 = \frac{2{,}3H_2}{275+H_2}$$

donde B se expresa en teslas y H en A.v./m. Calcular la corriente necesaria que debe circular por la bobina de excitación para que la inducción magnética en los entrehierros sea de 0,6 T.

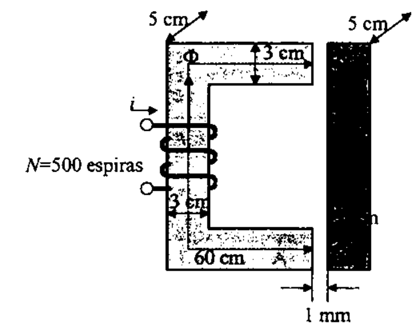


Figura 1.42

[Resp. 2,03 A]

Problema 1.27

El material del circuito magnético de la Figura 1.43 tiene una curva de magnetización expresada por:

$$B = \frac{2H}{150 + H} \quad B\text{: en teslas; } H\text{: en A.v./m}$$

La sección transversal es uniforme y vale 20 cm², la longitud media en el material magnético es de 50 cm y el entrehierro es de 2 mm. Si se aplica a la bobina una corriente de 2 A, calcular la inducción magnética resultante en el entrehierro.

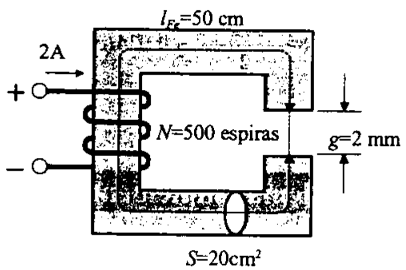


Figura 1.43

[Resp. 0,919 T]

Problema 1.28

La Figura 1.44 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene 100 espiras. La sección transversal de toda la estructura magnética es de 10 cm². Los entrehierros tienen espesores: g=1 mm; x=2 mm. Se desprecia la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en los entrehierros. Si se hace circular por la bobina una corriente continua de 10 A, calcular: a) Flujo magnético en la zona en que está situada la bobina; b) inductancia de la bobina; c) fuerza que actúa sobre la armadura móvil cuando el entrehierro central x es igual a 2 mm.

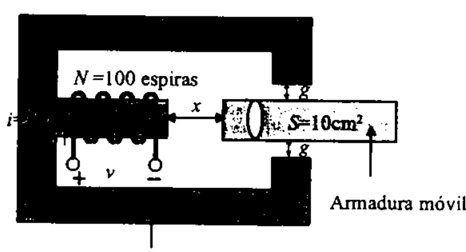


Figura 1.44

[Resp. a) Φ=0,5027 mWb; b) L= 5,027 mH; c) f = 100,53 N]

Problema 1.29

La Figura 1.45 muestra dos bobinas idénticas de coeficiente de autoinducción L e inductancia mutua M, colocadas en el núcleo central a ambos lados del entrehierro. Se sabe que al conectar las bobinas en serie, (uniendo a'con b), la inductancia total medida entre a y b' dio un valor de 20 mH.¿Cuál será la inductancia total si se conectan las bobinas en paralelo, es decir, uniendo a con b y a' con b' y midiendo la inductancia resultante entre a y a'?

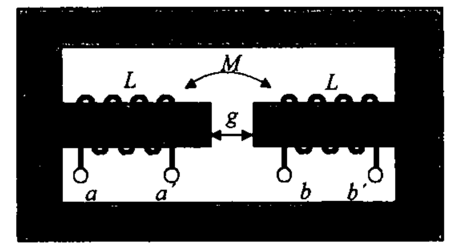


Figura 1.45

[Resp. $L_{paralelo}$ = 5 mH]

Problema 1.30

El circuito magnético de la Figura 1.46 tiene una reluctancia del hierro despreciable y dispone de dos entrehierros de espesores g_1 y g_2 y secciones S_1 y S_2 respectivamente. El devanado superior de la izquierda tiene N_1 espiras y el inferior dispone de N_2 espiras. Calcular las expresiones de los coeficientes de autoinducción de cada bobina y el de inducción mutua.

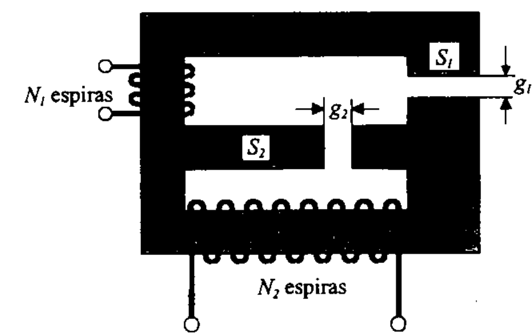


Figura 1.46

[Resp. $L_1 = \frac{N_1^2}{g_1}\mu_0 S_1$; $L_2 = N_2^2\mu_0\left(\frac{S_1}{g_1} + \frac{S_2}{g_2}\right)$; $L_{12} = L_{21} = M = \frac{N_1 N_2}{g_1}\mu_0 S_1$]

Problema 1.31

En el circuito de la Figura 1.47 la sección del núcleo magnético es uniforme y vale $S = 20\ cm^2$. La reluctancia del hierro es despreciable y los entrehierros tienen los espesores señalados. Las bobinas tienen 100 espiras y 50 espiras respectivamente. a) Se aplica una corriente $i_1 = 10\ A$ al devanado 1; calcular el flujo magnético total Φ_{11} que produce este devanado y el flujo Φ_{21} que atraviesa al devanado 2. b) Se desconecta la alimentación de la bobina 1 y se alimenta la bobina 2 con una corriente $i_2 = 10\ A$; Calcular el flujo magnético total Φ_{22} que produce este devanado y el flujo Φ_{12} que atraviesa al devanado 1. c) A partir de los resultados anteriores, calcular los coeficientes de autoinducción L_1 y L_2 de ambas bobinas y también el coeficiente de inducción mutua $L_{12} = L_{21} = M$. d) ¿Cuál es el coeficiente de acoplamiento entre ambos devanados?

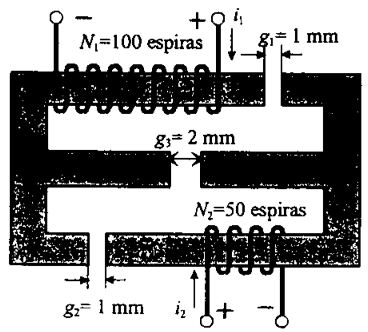


Figura 1.47

[Resp. a) Φ_{11}=1,508 mWb; Φ_{21}=1,005 mWb; b) Φ_{22}=0,754 mWb; Φ_{21}= 0,503 mWb c) L_{11} = 15,08 mH; L_{22} = 3,77 mH; L_{12} = L_{21} = M = 5,03 mH; d) k = 0,666]

Problema 1.32

El circuito de la Figura 1.48 tiene una sección transversal uniforme igual a $10\ cm^2$. La reluctancia del hierro es infinita y los entrehierros tienen todos 1 mm de espesor. La bobina 1 tiene 200 espiras y la bobina 2 tiene 100 espiras. a) Calcular los coeficientes de autoinducción L_1 y L_2 de ambas bobinas y también el coeficiente de inducción mutua $L_{12} = L_{21} = M$; b) repetir el problema si el entrehierro del núcleo derecho se aumenta hasta 3 mm.

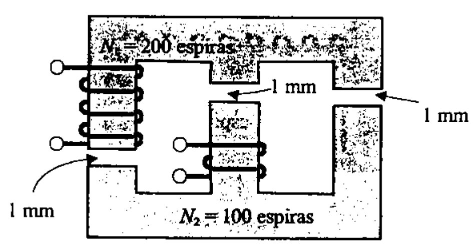


Figura 1.48

[Resp. a) L_{11} = 3,35 mH; L_{22} = 0,838 mH; L_{12} = L_{21} = M = 0,838 mH; b) L_{11} = 2,87 mH; L_{22} = 0,718 mH; L_{12} = L_{21} = M = 01,077 mH]

Problema 1.33

En la Figura 1.49 se muestra una estructura de hierro ideal (sin reluctancia magnética) y que tiene dos devanados de N_1 =100 espiras y N_2 =50 espiras. El circuito magnético tiene una sección uniforme de $10\ cm^2$ y existen tres entrehierros de espesores 1 mm, 2 mm y 3 mm respectivamente. a) Calcular: coeficientes de autoinducción e inducción mutua de los devanados b) Se aplica a la bobina 1 una tensión sinusoidal de 10 V de valor eficaz y 50 Hz, determinar la tensión inducida en la bobina 2.

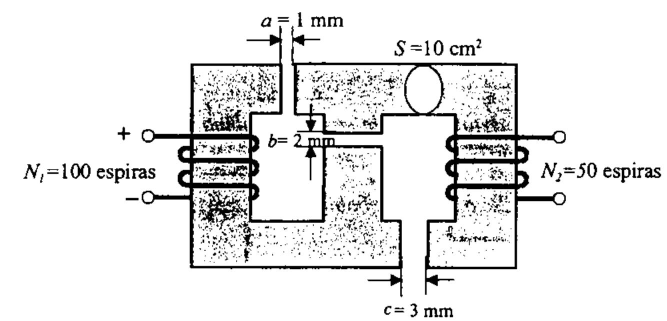


Figura 1.49

[Resp. a) L_{11} = 5,71 mH; L_{22} = 0,857 mH; L_{12} = L_{21} = M = 1,14 mH; b) 2 V]

Problema 1.34

Dos bobinas con núcleo de aire y resistencias despreciables, tienen unos coeficientes de autoinducción e inducción mutua que son funciones de un desplazamiento lineal x de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$L_{11} = 2 + 10x;\ L_{22} = 4 + 20x;\ L_{12} = L_{21} = M = 2 - 10x$$

Donde x se mide en metros y las inductancias en henrios.

a) Si se alimentan las bobinas con c.c. de valores I_1 =+20 A; I_2 = −10 A. Calcular el trabajo mecánico desarrollado cuando el desplazamiento x varía entre x = 0 y x = 0,1 m.

b) En la situación del apartado anterior, calcular el incremento de energía magnética almacenada en el sistema y las energías eléctricas suministradas por los generadores que alimentan las bobinas.

c) Calcular la fuerza mecánica media desarrollada para x = 0,1 m, cuando la bobina 1 se alimenta con una tensión sinusoidal de la forma: $v_1 = 170\sqrt{2}\ \mathrm{sen}\,10t$ V, estando la bobina 2 cortocircuitada.

[Resp. a) W_{mec} = 500 J; b) ΔW_{mag} = 500 J; W_1=600 J; W_2=400 J; c) f=250 N]

Problema 1.35

Dos bobinas con núcleo de aire y resistencias despreciables, tienen unos coeficientes de autoinducción e inducción mutua que son funciones de un desplazamiento lineal x de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$L_{11} = 1 + x;\ L_{22} = 2(1+x);\ L_{12} = L_{21} = M = 1 - x$$

Donde x se mide en metros y las inductancias en henrios.

a) Determinar la d.d.p. en circuito abierto que se obtiene en los terminales de la bobina 2, si la corriente en la bobina 1 es $i_1 = 10\,\text{sen}t$ A y el desplazamiento x varía sinusoidalmente con el tiempo de acuerdo con la expresión $x(t) = 0,5\cos t$.

b) Calcular la d.d.p. en circuito abierto que se obtiene en la bobina 2 si se aplica una tensión a la bobina 1 de la forma: $v_1 = 10\,\text{sen}t$ y $x=0,5$ m.

c) Si se cortocircuita la bobina 2 y se aplica a la bobina 1 una tensión: $v_1 = 17\,\text{sen}t$ V y con $x=0,5$ m, ¿cuál será el valor de la corriente i_2?

[Resp. a) $e_2 = 10\cos t - 5\cos 2t$ V; b) $e_2(t) = \frac{10}{3}\text{sen}t$ V; c) $i_2 = 2\cos t$ A]

Problema 1.36

El circuito magnético de la Figura 1.50 tiene una sección transversal uniforme de 5 cm × 5 cm y una longitud magnética media en el hierro de 1 m. La curva de imanación del hierro se puede aproximar por la ecuación:

$$B = \frac{2H}{200 + H}\ ;\ B \text{ en teslas y } H \text{ en A.v./m}$$

el entrehierro es de 1 mm y la bobina tiene 250 espiras. Si se aplica a la bobina una corriente de 4 amperios, calcular: a) flujo magnético en el entrehierro; b) energía magnética almacenada en el hierro; c) energía almacenada en el entrehierro; d) coeficiente de autoinducción de la bobina; e) Repetir el problema si el entrehierro se reduce a 0,5 mm.

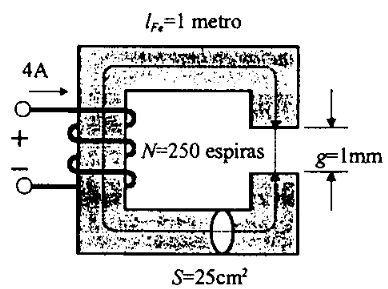


Figura 1.50

[Resp. a) Φ= 2,51 mWb; b) $W_{m(Fe)}$= 0,1952 J; c) $W_{m(ent)}$= 1,0027 J; d) 0,1569 H; e) Φ = 3,46 mWb; $W_{m(Fe)}$= 0,486 J; $W_{m(ent)}$= 0,9527 J;0,2163 H]

Problema 1.37

En la Figura 1.51 se muestran dos bobinas de coeficientes de autoinducción L_1 y L_2 respectivamente e inductancia mutua M. Al disponer las bobinas en serie como señala la Figura 1.51a, la inductancia total medida en la entrada fue de L_a = 2,5 H, mientras que con el montaje de la Figura 1.51b la inductancia equivalente fue L_b = 1,1 H. Si se sabe que la inductancia L_1 es ocho veces la inductancia L_2, calcular: a) inductancias L_1 y L_2 de las bobinas; b) inductancia mutua M; c) coeficiente de acoplamiento.

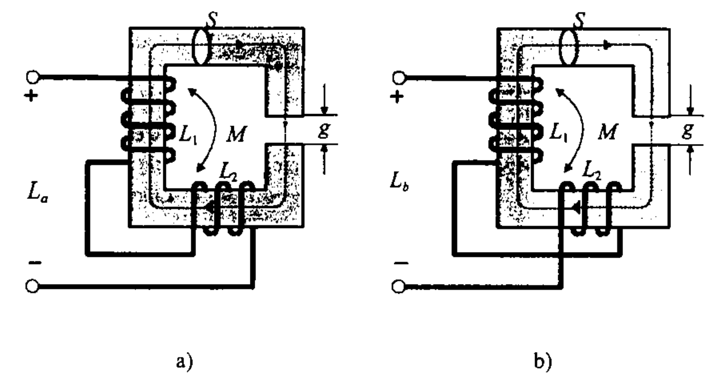


Figura 1.51

[Resp. a) L_1 = 1,60 H; L_2 = 0,20 H ; b) M = 0,35 H; c) k = 0,619]

Problema 1.38

El circuito magnético de la Figura 1.52 tiene una sección transversal uniforme de 10 cm², y las demás dimensiones son las señaladas en la figura. La bobina tiene 1000 espiras y el material ferromagnético de las armaduras fija y móvil tiene una permeabilidad relativa de 1000. La armadura móvil tiene una masa de 1 kg. a) ¿Qué corriente debe aplicarse a la bobina para mantener suspendida la armadura móvil a una distancia x = 1 cm?; b) ¿cuál es el valor de la inductancia de la bobina para esa posición de equilibrio?; c) ¿cuál es la energía magnética almacenada? NOTA: g = 9,81 m/s².

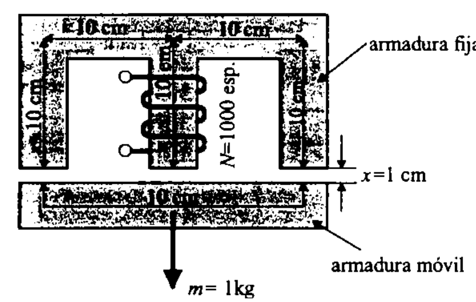


Figura 1.52

[Resp. a) 1,55 A; b) 0,0827 H; 0,1 J]

Problema 1.39

En el circuito magnético de la Figura 1.53 la permeabilidad del hiero es infinita. La bobina de excitación tiene 100 espiras. El entrehierro central tiene un espesor de 2 mm y una superficie de 20 cm² y el entrehierro derecho tiene un espesor de 1 mm y una superficie de 10 cm². Si la bobina se alimenta con una c.c. de 10 A, calcular: a) flujos magnéticos: Φ, Φ_1 y Φ_2; b) inductancia de la bobina; c) energía magnética almacenada en el sistema.

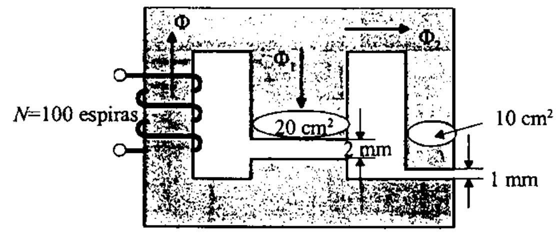


Figura 1.53

[Resp. a) 2,513 mWb; 1,256 mWb; 1,256 mWb; b) 25,13 mH; c) 1,257 J]

Problema 1.40

El material del circuito magnético de la Figura 1.54 tiene una reluctancia despreciable. Las dimensiones son las mostradas en la figura, siendo la sección de toda la estructura de 2 cm x 3 cm. La armadura móvil superior solamente se puede desplazar en el plano horizontal, permaneciendo el espesor del entrehierro central en el valor constante de 1 mm. Las bobinas tienen cada una 100 espiras. Si se supone que x = 0,5 cm, calcular para esta posición de la armadura móvil: a) coeficientes de autoinducción y de inducción mutua de las bobinas; b) si se alimentan las bobinas con unas corrientes $i_1 = 20$ A, $i_2 = 30$ A, calcular para x = 0,5 cm, la fuerza a que se ve sometida la armadura móvil; c) para los valores de las corrientes anteriores, ¿cuál será el valor del desplazamiento x para el cual la armadura móvil no está sometida a ninguna fuerza?

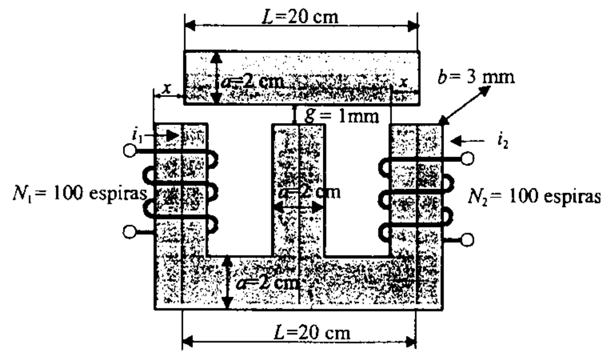


Figura 1.54

[Resp. a) L_1 = 3,53 mH; L_2 = 1,65 mH; L_1 = 0,707 mH; b) 16,49 N hacia la derecha; c) x = 1,2 cm]

Problema 1.41

El circuito magnético de la Figura 1.55 tiene una permeabilidad del hierro infinita. La bobina de excitación tiene 100 espiras recorridas por una corriente de 10 A. La armadura fija es de sección circular siendo el área de la parte izquierda de 20 cm² y la de la parte derecha de 10 cm². La armadura móvil es un tronco de cono con una sección de 20 cm² en su cara izquierda y de 10 cm² en su cara derecha. Si a = b = 10 cm, calcular: a) inductancia de la bobina en función de la posición x; b) fuerza a la que está sometida la armadura móvil en función de x; c) calcular los valores numéricos de los apartados anteriores para x = 5 cm; d) si la sección de la armadura fija fuera constante y de valor 20 cm² y la armadura móvil fuera un cilindro de sección transversal constante y también de 20 cm², ¿estaría sometida la armadura móvil a alguna fuerza para alguna posición de x?

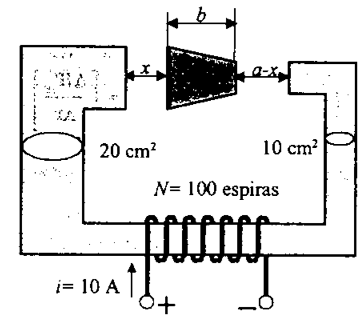


Figura 1.55

[Resp. a) L = 0,1676 mH; b) 0,0559 N hacia la derecha; c) No. La inducción sería la misma en cada base (cara) del cilindro móvil por lo que las fuerzas sobre las caras izquierda y derecha serían iguales y de sentido contrario para cualquier valor de *x* y no habría fuerza neta sobre la armadura móvil]

Problema 1.42

Un apilamiento de chapa magnética de acero al silicio de 10 kg de peso ha sido sometido a un ensayo de pérdidas en el hierro con el cuadro de Epstein excitado con una gama de inducciones sinusoidales a distintas frecuencias, dando el resultado mostrado en el siguiente cuadro:

Frecuencia (Hz)	*Inducción máxima (teslas)*	*Pérdidas totales en el hierro*
25	*1,2*	*4,7*
25	*1,6*	*8,8*
50	*1,2*	*11,1*

Si las pérdidas por histéresis y corrientes de Foucault (en W/kg) se pueden expresar respectivamente por las siguientes fórmulas:

$$P_H = K_H f B_m^{\alpha} \; ; \; P_F = K_F f^2 B_m^2$$

donde K_H y K_F son constantes para una determinada chapa y espesor, f es la frecuencia y B_m es la inducción máxima. Determinar: a) valores de las constantes K_H y K_F y del exponente de Steinmetz α; b) pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault para la muestra ensayada y para una frecuencia de 50 Hz y con una inducción máxima de 1,5 teslas.

[Resp. a) K_H = 0,0103; K_F = 9,44·10⁻⁵; α = 2,219; b) P_H = 6,332 W; P_F = 1,328 W]

Problema 1.43

El circuito magnético de la Figura 1.56 tiene una sección transversal uniforme y una relación no lineal entre el flujo magnético Φ (en Wb) en el entrehierro y la f.m.m. $\mathcal{F}$ de la bobina (en A.v.) para cada espesor x del entrehierro (en metros) que viene expresada por la ecuación:

$$\Phi = \frac{3\cdot 10^{-4}}{x^2}\sqrt{\mathcal{F}}$$

La bobina de excitación tiene 100 espiras y se alimenta con una corriente continua de 4 A. Calcular para los espesores de entrehierro x = 1 cm y x = 0,5 cm las siguientes magnitudes: a) energía magnética almacenada; b) coenergía magnética almacenada; c) inductancia de la bobina; d) fuerza media desarrollada por la armadura móvil cuando se desplaza desde x = 1 cm hasta x = 0,5 cm manteniendo constante la corriente de alimentación de 4 amperios (aplíquese la expresión: $f_{med} = \left[\frac{\Delta W'_m}{\Delta x}\right]_i$); e) responder a la pregunta anterior si el movimiento se realiza manteniendo el flujo magnético constante en el valor inicial de 6 mWb (aplíquese la expresión: $f_{med} = -\left[\frac{\Delta W_m}{\Delta x}\right]_\Phi$).

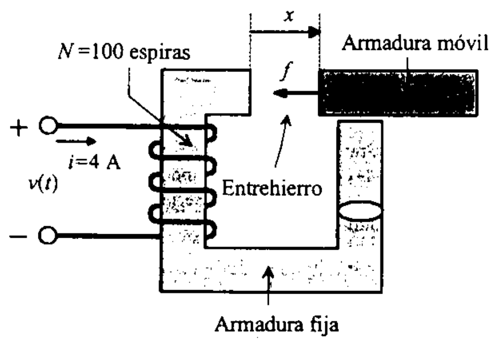


Figura 1.56

[Resp. a) W_m (x = 1 cm) = 0,8 J; W_m (x = 0,5 cm) = 3,2 J; b) W'_m (x = 1 cm) = 1,6 J; W'_m (x = 0,5 cm) = 6,4 J; c) L = 0,4 H; d) f_{med} = −960 N; e) f_{med} = −480 N]

Problema 1.44

En la Figura 1.57 se muestra un núcleo no ferromagnético sobre el que está arrollado un devanado 1 que tiene encima una espira 2 conductora cortocircuitada. Las inductancias son:

$$L_{11} = 1\ H;\ L_{22} = 1\ mH;\ L_{12} = L_{21} = M = 3\cdot 10^{-3}/x\ \ H$$

Donde x se mide en metros y las inductancias en henrios. Se suponen despreciables las resistencias del devanado 1 y de la espira 2. La espira 2 tiene una masa de 0,1 kg. a) ¿Cuál será la posición de equilibrio x si se aplica al devanado 1 una corriente alterna de la forma i_1 = 5 cost amperios?; b)calcular en el caso anterior la tensión v que debe aplicarse al devanado 1. NOTA: La aceleración de la gravedad en la zona es

g=9,81 m/s². Nota histórica: este problema se debe a Elihu Thomsom y se denomina experimento de la espira o anillo saltarín (jumping ring).

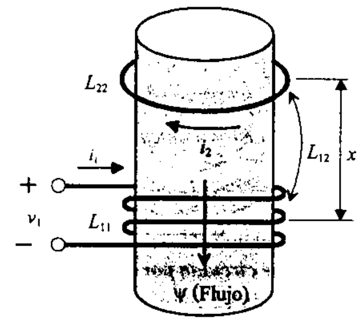


Figura 1.57

[Resp. a) x = 48,58 cm; b) v_1 (t) = −4,81 sent V]

Problema 1.45

En la Figura 1.58 se muestra un cilindro relleno de material ferromagnético que trabaja en la zona lineal de su curva de imanación. Sobre él se ha construido una bobina con gran número de espiras que tiene una resistencia eléctrica R_1 =50 Ω y una inductancia L_{11} = 0,5 H. A una distancia de x metros del centro de la bobina anterior y a su derecha se dispone de una pequeña espira construida de aluminio con una resistencia eléctrica R_2 =0,2 Ω y una inductancia cuando está en cortocircuito de valor L_{22} = 1 mH. El coeficiente de inductancia mutua entre la bobina y la espira sigue la siguiente ley: $M = \frac{5\cdot 10^{-4}}{x}$ henrios (x en metros). La espira está cerrada por un interruptor S y un condensador C= 500 μF. La bobina se conecta a una red cuya tensión instantánea es: $v_1(t) = 230\sqrt{2}\cos 314t$. Supóngase que inicialmente el interruptor S está cerrado y que por lo tanto la espira queda en cortocircuito, calcular: a) corrientes instantáneas i_1 e i_2 tanto en la bobina como en la espira; b) fuerza media a que está sometida la espira para x= 5cm; c) Contestar a las preguntas anteriores cuando se abre el interruptor S y la espira se cierra a través del condensador.

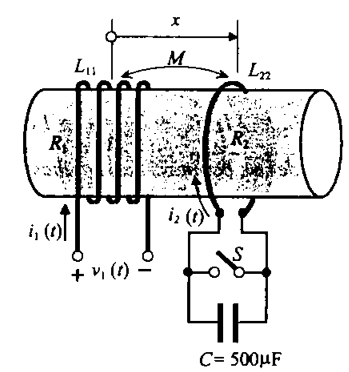


Figura 1.58

[Resp. a) $i_1(t) = 1{,}54\sqrt{2}\cos(314t - 65°)$ A; $i_2(t) = 13\sqrt{2}\cos(314t - 212°)$ A; b) $f_{med} = +3{,}41$ N (repulsión)
c) $i_1(t) = 1{,}38\sqrt{2}\cos(314t - 72{,}5°)$ A; $i_2(t) = 0{,}72\sqrt{2}\cos(314t - 74°)$ A; $f_{med} = -0{,}198$ N (atracción)]

Problema 1.46

Considérese la máquina eléctrica con simetría cilíndrica de la Figura 1.59. Los valores de las inductancias de los devanados (medidas en henrios) son las siguientes:

$$L_{11} = 5;\ L_{22} = 4;\ L_{12} = L_{21} = M = 2\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los ejes de las bobinas. Calcular el par eléctrico producido a rotor parado y para un ángulo θ=45°, cuando las corrientes que circulan por los devanados son las siguientes: a) $i_1 = i_2 = 10\ A$; b) $i_1 = 10\ A$; $i_2 = 10\sqrt{2}\cos\omega t\ A$; c) $i_1 = i_2 = 10\sqrt{2}\cos\omega t\ A$; d) $i_1 = 10\sqrt{2}\cos\omega t$ A y el devanado 2 del estátor en cortocircuito.

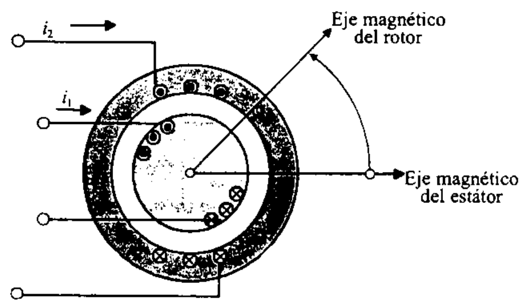


Figura 1.59

[Resp. a) $T = -200/\sqrt{2}$ N.m.; b) $T = -50\cos\omega t$ N.m.; c) $T = -(\frac{50}{\sqrt{2}}\cos^2\omega t)$ N.m.; d) $T = +25\cos^2\omega t$ N.m.]

Problema 1.47

Considérese la máquina eléctrica con simetría cilíndrica de la Figura 1.60. Los valores de las inductancias de los devanados son:

$$L_{11} = 4\ H;\ L_{22} = 2\ H;\ L_{12} = L_{21} = M = 1\cos\theta\ H$$

Donde θ es el ángulo entre los ejes de las bobinas. Las bobinas están conectadas en serie y llevan una corriente $i(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t$ A. Estando el rotor parado, calcular: a) expresión del par instantáneo que actúa sobre el rotor en función de la posición θ del mismo; b) en el caso anterior, determinar el par medio para θ = 90°; c) si se desprecian las resistencias de los devanados y la corriente del rotor es $i_1(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t$ y se cortocircuita el devanado del estátor, ¿cuál es el par medio desarrollado para θ=45°?; d) si la corriente del estátor es $i_2(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t$ y se cortocircuita el devanado del rotor, ¿cuál es el par para θ=45°?

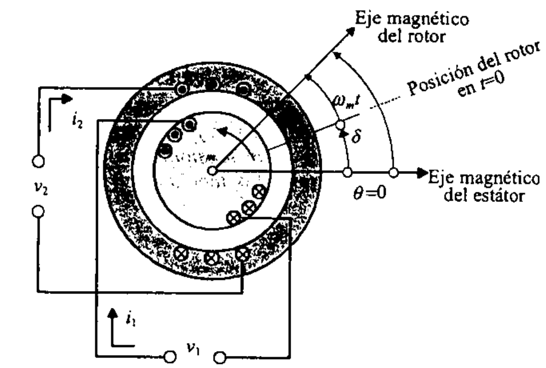


Figura 1.60

[Resp. a) T(t)= $-2\ I^2 \operatorname{sen}\theta\cos^2\omega t$; b) T = −100 N.m.; c) T = +25 N.m.; d) 12,5 N.m.]

Problema 1.48

En el esquema de la Figura 1.61, los valores de las inductancias son:

$$L_{aa} = L_{bb} = 0{,}1\ H;\ L_{22} = 0{,}2\ H;\ L_{a2} = 0{,}1\cos\theta\ H;\ L_{b2} = 0{,}1\operatorname{sen}\theta\ H;\ L_{ab} = 0$$

a) Si el rotor está en reposo y las corrientes son $i_a = 5\ A$; $i_b = 5\ A$; $I_2 = 10\ A$, calcular el par desarrollado en función de θ. b) En el caso anterior, si se deja que gire el rotor, ¿se moverá o permanecerá en reposo? Si es esto último ¿para qué valor de θ se parará?; c) Si $I_2 = 10$; $i_a(t) = 5\sqrt{2}\cos 100t\ A$; $i_b(t) = 5\sqrt{2}\operatorname{sen}100t\ A$; y se mueve el rotor a la velocidad angular ω_m, de tal manera que $\theta = \omega_m t + \delta$, ¿cuál debe ser el valor de ω_m para que la máquina desarrolle un par útil?, ¿cuál será la expresión del par producido?; d) si el par resistente es igual a 5 N.m., calcular el ángulo de carga δ; e) calcular en el caso anterior las expresiones de las tensiones aplicadas al estátor v_a y v_b si estos devanados tienen resistencias despreciables.

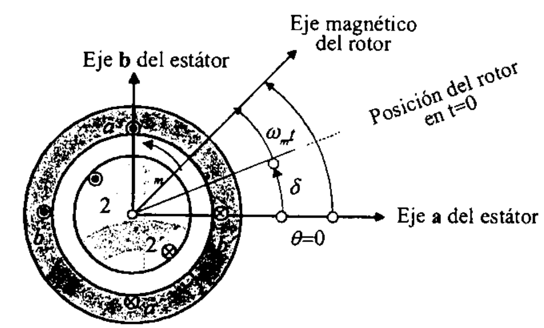


Figura 1.61

[Resp. a) $T(\theta) = 5(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$ N.μ; b) T = 0 N.m., θ = 45°; $\omega_m = 100$ rad/s; $T = 5\sqrt{2}\operatorname{sen}\delta$ N.m.; d) δ = −45°; e) $v_a(t) = 111{,}8\sqrt{2}\operatorname{sen}(100t + 153{,}43°)$ V; $v_b(t) = 111{,}8\sqrt{2}\operatorname{sen}(100t + 63{,}43°)$ V]

Problema 1.49

La máquina eléctrica mostrada en la Figura 1.62 tiene un devanado en el estátor de resistencia R_1=100 ohmios e inductancia L_{11} =0,5 H. El devanado de rotor tiene una resistencia R_1 = 1 Ω y una inductancia L_{11} = 0,2 +0,1 cos2θ H. El coeficiente de inducción mutua entre ambos devanados es L_{12} =L_{21} = M = 0,1 cosθ H. Si el rotor gira a una velocidad de 100 rad/s y se aplican a los devanados unas corrientes de valores i_1 = 1 A; i_2 = 2 A, calcular: a) expresiones de las tensiones instantáneas aplicadas a las bobinas en función de la posición del rotor; b) par en el rotor; c) potencia eléctrica total que absorben los arrollamientos de la red.

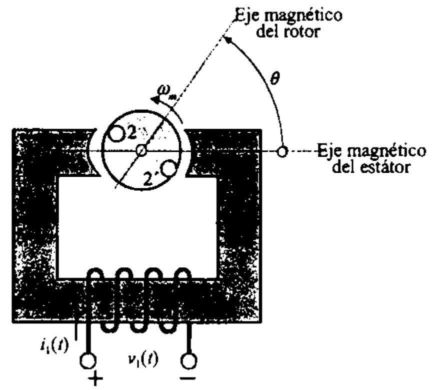


Figura 1.62

[Resp. a) v_1 = 100 − 50 senθ V; v_2 = 5 − 10 senθ − 100 sen2θ V; b) T = −2,5 sen2θ − 0,5 senθ N.m.; c) P_{e1} = 100 − 50 senθ W; P_{e2} = 25 − 50 sen θ − 500 sen 2θ W; P_e(total) =125 − 100 senθ − 500 sen2θ W]

Problema 1.50

En la Figura 1.63 se muestra un motor de reluctancia variable bifásico. Las bobinas del estátor se alimentan con las corrientes siguientes: $i_1 = \sqrt{2}\,10 sen314t$ A; $i_2 = \sqrt{2}\,10 cos314t$ A. Si las inductancias de los devanados son de la forma:

$$L_1 = 1 + 0{,}5\cos 2\theta\ H;\quad L_2 = 1 - 0{,}5\cos 2\theta\ H;\quad L_{12} = L_{12} = M = 0{,}5\ \mathrm{sen}2\theta\ H$$

Calcular el par medio producido por el rotor si este gira a una velocidad angular ω_m =314 rad/s.

NOTA: La posición genérica del rotor es: $\theta = \omega_m t + \delta$.

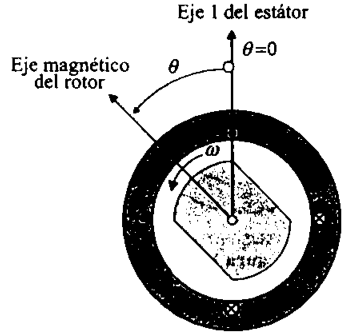


Figura 1.63

Problema 1.51

En la máquina de reluctancia variable de la Figura 1.64, la inductancia de la bobina de alimentación es de la forma: $L = L_a + L_b \cos 2\theta$ H. Calcular: a) par que actúa sobre el rotor en función de la corriente i en la bobina y la posición θ del rotor; b) el par medio si el rotor gira a una velocidad angular ω rad/s y la corriente de la bobina es de la forma: $i(t) = \sqrt{2}\, I \cos\omega t$.

NOTA: la posición del rotor para t = 0 es θ = δ.

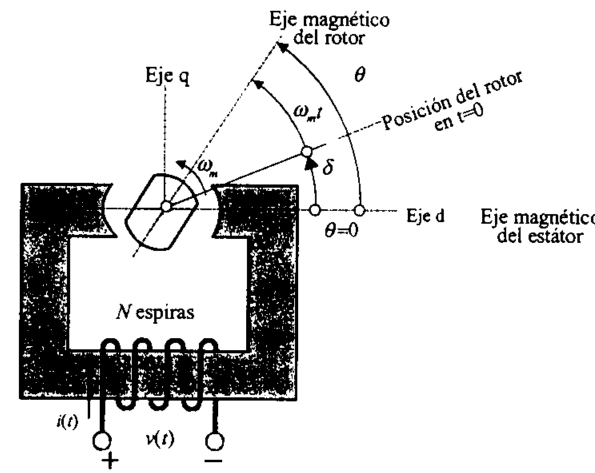


Figura 1.64

[Resp. a) T = −i² L_b sen2θ N.m.; b) $T_{med} = -\dfrac{L_b I^2}{2}$sen 2δ N.m.]

TRANSFORMADORES

3

Sumario de fórmulas

3.1 TRANSFORMADOR IDEAL

a) Expresiones instantáneas de las tensiones y de las f.e.m. en función del flujo magnético:

$$v_1 = e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \; ; \; e_2 = v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{3.1}$$

Las f.e.m. e_1 y e_2 se adelantan 90º respecto del flujo magnético Φ.

b) Valores eficaces de las tensiones y de las f.e.m.s. en función del flujo magnético máximo:

$$V_1 = E_1 = \frac{N_1 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_1 \Phi_m \; ; \; V_2 = E_2 = \frac{N_2 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_2 \Phi_m \tag{3.2}$$

V_1 y V_2: tensiones de primario y secundario respectivamente; E_1 y E_2: f.e.m. de primario y secundario; N_1 y N_2: espiras de primario y secundario: f: frecuencia; Φ_m: flujo máximo.

c) Relación de transformación ideal m:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{3.3}$$

d) Relación fasorial de corrientes:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I'}_2 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m} \tag{3.4}$$

3.2 TRANSFORMADOR REAL

a) Ecuaciones instantáneas de las tensiones:

$$v_1 = e_1 + R_1 i_1 + L_{d1} \frac{di_1}{dt} \; ; \; e_2 = v_2 + R_2 i_2 + L_{d2} \frac{di_2}{dt} \tag{3.5}$$

R_1 y R_2: resistencias de primario y secundario; L_{d1} y L_{d2}: inductancias de dispersión primario y secundario *b) Valores eficaces de las f.e.m.:*

$$E_1 = 4{,}44\, f N_1 \Phi_m \;;\; E_2 = 4{,}44\, f N_2 \Phi_m \tag{3.6}$$

E_1 y E_2: f.e.m. de primario y secundario; N_1 y N_2: espiras de primario y secundario: f: frecuencia; Φ_m: flujo máximo.

c) Ecuaciones fasoriales de las tensiones:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{R}_1\,\mathbf{I}_1 + j X_1\,\mathbf{I}_1 \;;\; \mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_2 - \mathbf{R}_2\,\mathbf{I}_2 - j X_2\,\mathbf{I}_2 \tag{3.7}$$

d) Relación de transformación:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{3.8}$$

e) Relación fasorial de las corrientes:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m} \tag{3.9}$$

3.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN TRANSFORMADOR

a) F.e.m. secundaria y tensión secundaria reducidas al primario:

$$E'_2 = m\,E_2 \;;\; V'_2 = m\,V_2 \tag{3.10}$$

b) Corriente secundaria reducida al primario:

$$I'_2 = \frac{I_2}{m} \tag{3.11}$$

c) Impedancias secundarias reducidas al primario:

$$R'_2 = m^2 R_2 \;;\; X'_2 = m^2 X_2 \;;\; \mathbf{Z}'_L = m^2 \mathbf{Z}_L \tag{3.12}$$

d) Impedancia de cortocircuito reducida al primario

$$R_{cc} = R_1 + R'_2 \;;\; X_{cc} = X_1 + X'_2 \tag{3.13}$$

e) F.e.m. primaria y tensión primaria reducida al secundario:

$$E'_1 = \frac{E_1}{m} \;;\; V'_1 = \frac{V_1}{m} \tag{3.14}$$

f) Corriente primaria y corriente de vacío reducida al secundario:

$$I'_1 = m I_1 \;;\; I'_0 = m I_0 \tag{3.15}$$

g) Impedancias primarias reducidas al secundario:

$$R'_1 = \frac{R_1}{m^2} \;;\; X'_1 = \frac{X_1}{m^2} \tag{3.16}$$

h) Impedancia de cortocircuito reducida al secundario

$$R'_{cc} = R'_1 + R_2 \;;\; X'_{cc} = X'_1 + X_2 \tag{3.17}$$

3.4 ENSAYO EN VACÍO DEL TRANSFORMADOR

a) Potencia en vacío medida en el primario:

$$P_0 = V_{1n}\, I_0 \cos\varphi_0 = P_{Fe} \tag{3.18}$$

b) Componentes de la corriente de vacío reducidas al primario:

$$I_{Fe} = I_0 \cos\varphi_0 \;;\; I_\mu = I_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \tag{3.19}$$

c) Parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente reducida al primario:

$$R_{Fe} = \frac{V_1}{I_{Fe}} \;;\; X_\mu = \frac{V_1}{I_\mu} \tag{3.20}$$

d) Relación de transformación:

$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_{1n}}{V_{20}} \tag{3.21}$$

V_{20}: tensión secundaria en vacío.

3.5 ENSAYO DE CORTOCIRCUITO DEL TRANSFORMADOR

a) Potencia de cortocircuito medida en primario:

$$P_{cc} = V_{1cc}\, I_{1n} \cos\varphi_{cc} \tag{3.22}$$

b) Componentes de la tensión de cortocircuito reducidas al primario:

$$V_{Rcc} = R_{cc}\, I_{1n} = V_{1cc} \cos\varphi_{cc} \;;\; V_{Xcc} = X_{cc}\, I_{1n} = V_{1cc} \operatorname{sen}\varphi_{cc} \tag{3.23}$$

c) Parámetros de la rama serie del circuito equivalente reducida al primario:

$$R_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \cos\varphi_{cc} \;;\; X_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \operatorname{sen}\varphi_{cc} \tag{3.24}$$

d) Valores relativos de las caídas de tensión respecto a la tensión asignada al primario:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} 100 \;;\; \varepsilon_{Rcc} = \frac{V_{Rcc}}{V_{1n}} 100 \;;\; \varepsilon_{Xcc} = \frac{V_{Xcc}}{V_{1n}} 100 \tag{3.25}$$

e) Corriente de cortocircuito de falta:

$$I_{1\,falta} = \frac{V_{1n}}{Z_{cc}} = \frac{V_{1n}}{V_{1cc}} I_{1n} = \frac{100}{\varepsilon_{cc}} I_{1n} \tag{3.26}$$

3.6 CAÍDA DE TENSIÓN EN UN TRANSFORMADOR

a) Caída de tensión absoluta:

$$\Delta V_2 = V_{20} - V_2 \tag{3.27}$$

V_{20}: tensión secundaria en vacío; V_2: tensión secundaria en carga.

b) Caída de tensión relativa o regulación:

$$\varepsilon_c = \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}} 100\% \tag{3.28}$$

c) Relación de tensiones:

$$\mathbf{V}_{1n} = \mathbf{V'}_2 + (R_{cc} + j X_{cc}) \mathbf{I'}_2 \tag{3.29}$$

d) Fórmula aproximada de Kapp:

$$V_{1n} - V'_2 = R_{cc} I'_2 \cos\varphi_2 + X_{cc} I'_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \tag{3.30}$$

e) Caída de tensión absoluta en función del índice de carga C:

$$V_{1n} - V'_2 = C R_{cc} I'_{2n} \cos\varphi_2 + C X_{cc} I'_{2n} \operatorname{sen}\varphi_2 \tag{3.31}$$

f) Caída de tensión relativa en función del índice de carga C:

$$\varepsilon_c = \frac{V_{1n} - V'_2}{V_{1n}} 100\% = C \varepsilon_{Rcc} \cos\varphi_2 + C \varepsilon_{Xcc} \operatorname{sen}\varphi_2 \tag{3.32}$$

3.7 PÉRDIDAS Y RENDIMIENTO DE UN TRANSFORMADOR

a) Pérdidas en vacío:

$$P_{Fe} = P_0 \tag{3.33}$$

b) Pérdidas en cortocircuito con corriente nominal:

$$[P_{cu}]_n = P_{cc} = R_{cc} I'^2_{2n} \tag{3.34}$$

c) Pérdidas en el cobre para un índice de carga C en función de las pérdidas en cortocircuito:

$$P_{cu} = R_{cc} I'^2_2 = C^2 P_{cc} \tag{3.35}$$

d) Rendimiento del transformador:

$$\eta = \frac{C V_2 I_{2n} \cos\varphi_2}{C V_2 I_{2n} \cos\varphi_2 + P_o + C^2 P_{cc}} \tag{3.36}$$

3.8 ACOPLAMIENTO EN PARALELO DE TRANSFORMADORES

a) Condiciones que deben cumplir:

1) Los transformadores deben tener el mismo ángulo horario.

2) Los transformadores deben tener las mismas tensiones primarias y secundarias.

3) Los transformadores deben tener idénticas tensiones relativas de cortocircuito (ε_{cc}).

3.8.1 Transformadores con la misma relación de transformación

a) Ecuaciones de las corrientes:

$$\mathbf{Z}_{ccI}\mathbf{I}_I = \mathbf{Z}_{ccII}\mathbf{I}_{II} = \mathbf{Z}_{ccIII}\mathbf{I}_{III} \;;\; \mathbf{I} = \mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} + \mathbf{I}_{III} + \ldots \tag{3.37}$$

$\mathbf{I}$: Corriente compleja total; $\mathbf{I}_I$, $\mathbf{I}_{II}$, $\mathbf{I}_{III}$ ...: corrientes complejas suministradas por cada uno de los transformadores. $\mathbf{Z}_{ccI}$, $\mathbf{Z}_{ccII}$, $\mathbf{Z}_{ccIII}$ ...: impedancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores.

b) Soluciones de las corrientes parciales:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}\frac{\mathbf{Y}_i}{\mathbf{Y}_T} \Rightarrow \mathbf{I}_I = \mathbf{I}\frac{\mathbf{Y}_I}{\mathbf{Y}_T} \;;\; \mathbf{I}_{II} = \mathbf{I}\frac{\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_T} \;;\; \mathbf{I}_{III} = \mathbf{I}\frac{\mathbf{Y}_{III}}{\mathbf{Y}_T}, \ldots \tag{3.38}$$

$\mathbf{I}_i$: Corriente compleja suministrada por el transformador i; $\mathbf{I}_I$, $\mathbf{I}_{II}$, $\mathbf{I}_{III}$ ...: corrientes complejas suministradas por cada uno de los transformadores. $\mathbf{Y}_I = 1/\mathbf{Z}_{ccI}$; $\mathbf{Y}_{II} = 1/\mathbf{Z}_{ccII}$; $\mathbf{Y}_{III} = 1/\mathbf{Z}_{ccIII}$ ...: admitancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores; $\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_{III} + \ldots$: admitancia total.

c) Potencias complejas suministradas por cada transformador:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_1\mathbf{I}^*_I \;;\; \mathbf{S}_{II} = \mathbf{V}_1\mathbf{I}^*_{II} \;;\; \mathbf{S}_{III} = \mathbf{V}_1\mathbf{I}^*_{III} \tag{3.39}$$

$\mathbf{S}_I$, $\mathbf{S}_{II}$, $\mathbf{S}_{III}$ ...: potencias complejas suministradas por el transformador *I*, *II*, *III*, etc. NOTA: en las ecuaciones (3.39) se supone que las corrientes están reducidas al primario; en el caso de que estén reducidas al secundario, entonces la tensión debe ser $\mathbf{V}_2$ y las corrientes $\mathbf{I}_I$, $\mathbf{I}_{II}$, $\mathbf{I}_{III}$ ... deben estar referidas al secundario.

d) Relación entre los índices de carga de cada transformador y las caídas de tensión relativas de cortocircuito:

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{\varepsilon_{ccII}}{\varepsilon_{ccI}} \tag{3.40}$$

3.8.2 Transformadores con distinta relación de transformación

a) Ecuaciones de las corrientes (circuitos equivalentes reducidos al secundario):

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{ccI}\mathbf{I}_I \;;\; \mathbf{E}_{II} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{ccII}\mathbf{I}_{II} \;;\; \mathbf{E}_{III} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{ccIII}\mathbf{I}_{III} \;;\; \mathbf{I} = \mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} + \mathbf{I}_{III} + \ldots \tag{3.41}$$

$\mathbf{I}$: Corriente compleja total; $\mathbf{I}_I$, $\mathbf{I}_{II}$, $\mathbf{I}_{III}$ ...: corrientes complejas suministradas por cada uno de los transformadores. $\mathbf{Z}_{ccI}$, $\mathbf{Z}_{ccII}$, $\mathbf{Z}_{ccIII}$ ...: impedancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores; $\mathbf{E}_I$, $\mathbf{E}_{II}$, $\mathbf{E}_{III}$ ...: f.e.m. reducidas al secundario de los transformadores; $\mathbf{V}_2$: tensión secundaria común. NOTA: todas las magnitudes están reducidas al secundario.

b) Tensión común secundaria en carga (caso de dos transformadores):

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Y}_I\mathbf{E}_I + \mathbf{Y}_{II}\mathbf{E}_{II} - \mathbf{I}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} \tag{3.42}$$

$\mathbf{Y}_I$, $\mathbf{Y}_{II}$, $\mathbf{Y}_{III}$ ...: admitancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores. NOTA: cuando la carga está definida por una admitancia $\mathbf{Y}_L$ (o impedancia $\mathbf{Z}_L$), entonces la corriente total $\mathbf{I}$ es igual a: $\mathbf{I}=\mathbf{Y}_L\mathbf{V}_2$. Cuando la carga está definida por una potencia compleja total $\mathbf{S}$ entonces la corriente total $\mathbf{I}$ es igual a: $\mathbf{I} = \mathbf{S}^* / \mathbf{V}_2^*$.

c) Tensión común secundaria en vacío (caso de dos transformadores):

$$\mathbf{V}_{20} = \frac{\mathbf{Y}_I\mathbf{E}_I + \mathbf{Y}_{II}\mathbf{E}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} \tag{3.43}$$

$\mathbf{Y}_I$, $\mathbf{Y}_{II}$, $\mathbf{Y}_{III}$ ...: admitancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores.

d) Soluciones de las corrientes parciales (caso de dos transformadores):

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{Y}_I \frac{\mathbf{E}_I\mathbf{Y}_L + (\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II})\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_L} \; ; \; \mathbf{I}_{II} = \mathbf{Y}_{II} \frac{\mathbf{E}_{II}\mathbf{Y}_L + (\mathbf{E}_{II} - \mathbf{E}_I)\mathbf{Y}_I}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_L} \tag{3.44}$$

$\mathbf{Y}_L$: admitancia de la carga.

e) Potencias complejas suministradas por cada transformador (caso de dos transformadores):

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2\mathbf{I}_I^* \quad ; \quad \mathbf{S}_{II} = \mathbf{V}_2\mathbf{I}_{II}^* \tag{3.45}$$

$\mathbf{S}_I$, $\mathbf{S}_{II}$: potencias complejas suministradas por los transformadores *I* y *II* respectivamente.

3.9 AUTOTRANSFORMADORES

a) Ecuaciones complejas de las tensiones (autotransformador reductor):

$$\mathbf{V}_1 = m\mathbf{V}_2 + \left[(m-1)^2\mathbf{Z}_{bc} + \mathbf{Z}_{ab}\right]\mathbf{I}_1 \quad ; \; \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_L\mathbf{I}_2 \tag{3.46}$$

$\mathbf{V}_1$: tensión primaria; $\mathbf{V}_2$: tensión secundaria; m: relación de transformación que es superior a la unidad; $\mathbf{Z}_{ab}$: impedancia de la parte del autotransformador recorrida por la corriente primaria $\mathbf{I}_1$; $\mathbf{Z}_{bc}$: impedancia de la parte del transformador recorrida por la corriente común $\mathbf{I}_2$-$\mathbf{I}_1$; $\mathbf{I}_2$: corriente secundaria. $\mathbf{Z}_L$: impedancia de la carga.

b) Ecuaciones complejas de las tensiones (autotransformador elevador):

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_{bc} + \mathbf{Z}_{bc}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \; ; \; \mathbf{E}_{ac} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{I}_2 - \mathbf{Z}_{bc}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \tag{3.47}$$

$\mathbf{V}_1$: tensión primaria; $\mathbf{V}_2$: tensión secundaria; $\mathbf{Z}_{ab}$: impedancia de la parte del autotransformador recorrida por la corriente secundaria $\mathbf{I}_2$; $\mathbf{Z}_{bc}$: impedancia de la parte común del autotransformador recorrida por la corriente común $\mathbf{I}_1$-$\mathbf{I}_2$; $\mathbf{I}_2$: corriente secundaria; $\mathbf{E}_{ac}$: f.e.m. de la parte *ab* del devanado secundario; $\mathbf{E}_{bc}$: f.e.m. de la parte *bc* del devanado común a primario y secundario. De las ecuaciones (3.47) se obtiene:

$$\mathbf{V}_1 = m\mathbf{V}_2 + \left[m^2\mathbf{Z}_{ab} + (1-m)^2\mathbf{Z}_{bc}\right]\mathbf{I}_1 \tag{3.48}$$

m: es la relación de transformación, que en el autotransformador elevador es inferior a la unidad.

c) Relación entre el peso de cobre como autotransformador G_a y como transformador G_t:

$$\frac{G_a}{G_t} = 1 - \frac{V_2}{V_1} \tag{3.49}$$

Problemas resueltos

Problema 3.1

Un transformador monofásico de 100 kVA, 3000/220 V, 50 Hz, tiene 100 espiras en el devanado secundario. Supuesto que el transformador es ideal, calcular: a) corrientes primaria y secundaria a plena carga, b) flujo máximo, c) número de espiras del arrollamiento primario.

Solución

a) Los valores de las corrientes primaria y secundaria a plena carga son, respectivamente:

$$I_1 = \frac{S_N}{V_1} = \frac{1000000}{3000} = 33,33 \text{ amperios} \qquad I_2 = \frac{S_N}{V_2} = \frac{100000}{220} = 454,55 \text{ amperios}$$

b) La tensión del secundario, que en el transformador ideal es igual a la f.e.m. secundaria viene expresada por:

$$V_2 = E_2 = 4,44 f N_2 \Phi_m$$

que al sustituir valores da lugar a un flujo máximo:

$$220 = 4,44 \cdot 50 \cdot 100 \Phi_m \Rightarrow \Phi_m = 9,91 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

c) La relación de tensiones o f.e.m. es igual a la relación de espiras, por lo que resulta:

$$\frac{3000}{220} = \frac{N_1}{100} \Rightarrow N_1 = 1364 \text{ espiras}$$

Problema 3.2

Un transformador monofásico de 10 kVA, 220/380 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 220 V; 2 A; 150 W (medidos en el lado de B.T.); cortocircuito: 10 V; 26,32 A; 75 W (medidos en el lado de A.T.). Calcular: a) parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario; b) si el primario se alimenta a 220 V, calcular la tensión secundaria cuando el transformador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

a) De los datos del ensayo de vacío (que está realizado en el lado de B.T., es decir, del primario) se puede escribir:

$$150 = 220 \cdot 2 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0,341 \; ; \; \text{sen}\varphi_0 = 0,94$$

de donde se deducen los valores de las corrientes:

$$I_{Fe} = 2 \cdot 0,341 = 0,682 \text{ A} \; ; \; I_\mu = 2 \cdot 0,94 = 1,88 \text{ A}$$

y por consiguiente los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente reducido al primario son:

$$R_{Fe} = \frac{220}{0,682} = 322,6 \,\Omega \; ; \; X_\mu = \frac{220}{1,88} = 117,02 \,\Omega$$

El ensayo de cortocircuito está realizado en el lado de A.T., que es el secundario. Por ello, previamente deben pasarse los datos medidos en este ensayo al lado primario, y así resulta:

$$m = \frac{220}{380} = 0,579 \ ; \ V_{1cc} = mV_{2cc} = 0,579 \cdot 10 = 5,79 \text{ V} \ ; \ I_{1cc} = \frac{I_{2cc}}{m} = \frac{26,32}{0,579} = 45,46 \text{ A} \ ; \ P_{corto} = 75 \text{ W}$$

A partir de los datos anteriores, ya reducidos al primario, se puede escribir:

$$75 = 5,79 \cdot 45,46 \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,285 \ ; \ \text{sen}\varphi_{cc} = 0,959$$

lo que da lugar a una impedancia de cortocircuito reducida al primario de valor:

$$Z_{cc} = \frac{5,79}{45,46} = 0,127 \ \Omega$$

La resistencia y reactancia de cortocircuito del transformador reducida al primario es:

$$R_{cc} = 0,127 \cdot 0,2850,0363 \ \Omega \ ; \ X_{cc} = 0,127 \cdot 0,959 = 0,122 \ \Omega$$

b) La relación aproximada entre las tensiones primaria y secundaria en carga viene expresada por:

$$V_1 = mV_2 + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \text{sen}\varphi$$

y como los valores conocidos son:

$$V_1 = 220 \text{ V} \ ; \ I_2 = \frac{S_N}{V_{2N}} = \frac{10000}{380} = 26,32 \text{ A} \ ; \ I_2' = \frac{I_2}{m} = \frac{26,32}{0,579} = 45,45 \text{ A}$$

se deduce finalmente una tensión secundaria de valor:

$$220 = 0,579 V_2 + 0,0363 \cdot 45,45 \cdot 0,8 + 0,122 \cdot 45,45 \cdot 0, \Rightarrow V_2 = 371,94 \text{ V}$$

Problema 3.3

Un transformador monofásico de 125 kVA, 3000/380 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 3000 V; 0,8 A; 1000 W (medidos en el primario); cortocircuito: 10 V; 300 A; 750 W (medidos en el secundario). Calcular: a) Componentes de la corriente de vacío; b) potencia de pérdidas en el hierro y de pérdidas en el cobre a plena carga; c) rendimiento a plena carga con f.d.p. unidad 0,8 inductivo y 0,8 capacitivo; d) tensión secundaria a plena carga, con f.d.p. anteriores (se supone que al primario se le aplica la tensión asignada de 3000 V).

Solución

a) Del ensayo de vacío se deduce:

$$P_0 = V_1 I_0 \cos\varphi_0 \Rightarrow 1000 = 3000 \cdot 0,8 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0,417 \ ; \ \text{sen}\varphi_0 = 0,909$$

y, por lo tanto, las componentes de la corriente de vacío son:

$$I_{Fe} = I_0 \cos\varphi_0 = 0,8 \cdot 0,417 = 0,333 \text{ A} \ ; \ I_\mu = 0,8 \cdot 0,909 = 0,727 \text{ A}$$

b) La potencia de pérdidas en el hierro es igual a la potencia absorbida en vacío, por lo que se tiene:

$$P_{Fe} = P_0 = 1000 \text{ W}$$

Por otra parte, el ensayo de cortocircuito está hecho con una corriente de 300 amperios, y las medidas han sido:

$$P_{corto} = 750 \text{ W} \ ; \ I_{2corto} = 300 \text{ A}$$

sin embargo, la corriente de plena carga tiene un valor:

$$I_{2N} = \frac{S_N}{V_{2N}} = \frac{125000}{380} = 328,95 \text{ A}$$

por consiguiente el valor de las pérdidas en cortocircuito con corriente de plena carga es igual a:

$$P_{cc} = 750\left(\frac{328,95}{300}\right)^2 = 901,72 \text{W} = P_{cu\,n} \approx 0,902 \text{ kW}$$

c) La expresión del rendimiento en función del índice de carga y de las pérdidas del transformador viene expresado por:

$$\eta = \frac{C \cdot S_N \cos\varphi}{C S_N \cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

es por ello que el rendimiento a plena carga con f.d.p. unidad vale:

$$\eta = \frac{C \cdot S_N \cos\varphi}{C S_N \cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{1 \cdot 125 \cdot 1}{125 + 1 + 0,902} = 98,5\%$$

cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo o 0,8 capacitivo el rendimiento es igual a:

$$\eta = \frac{1 \cdot 125 \cdot 0,8}{125 \cdot 0,8 + 1 + 0,902} = 98,13\%$$

d) Para resolver este apartado es preciso calcular previamente la rama serie del circuito equivalente del transformador reducido al primario, es decir, la resistencia y reactancia de cortocircuito. Estos parámetros se obtienen del ensayo de cortocircuito, que al estar realizado en el lado secundario, se deben reducir las medidas al primario y así se puede escribir:

$$m = \frac{3000}{380} = 7,895 \ ; \ V_{1corto} = 10 \cdot 7,895 = 78,95 \text{ V} \ ; \ I_{1corto} = \frac{300}{7,895} = 38 \text{A} \ ; \ P_{corto} = 750 \text{ W}$$

de donde se deduce:

$$Z_{cc} = \frac{78,95}{38} = 2,078 \ \Omega \ ; \ 750 = 78,95 \cdot 38 \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,25 \ ; \ \text{sen}\varphi_{cc} = 0,968$$

y por consiguiente:

$$R_{cc} = 2,078 \cdot 0,25 = 0,52 \ \Omega \ ; \ X_{cc} = 2,078 \cdot 0,968 = 2,01 \ \Omega$$

la ecuación que relaciona las tensiones en carga es:

$$V_1 = mV_2 + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \text{sen}\varphi$$

y teniendo en cuenta que el transformador funciona a plena carga, la corriente secundaria real y la reducida al primario valen, respectivamente:

$$I_2 = I_{2n} = 328,95 \text{ A} \ ; \ I_2' = \frac{328,95}{7,895} = 41,67 \text{ A}$$

Cuando el transformador funciona a plena carga y con f.d.p. unidad se tendrá:

$$3000 = 7,895 V_2 + 0,52 \cdot 41,67 \cdot 1 \Rightarrow V_2 = 377,25 \text{ V}$$

cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo se cumple:

$$3000 = 7,895 V_2 + 0,52 \cdot 41,67 \cdot 0,8 + 2,01 \cdot 41,67 \cdot 0,6 \Rightarrow V_2 = 371,43 \text{ V}$$

y cuando el f.d.p. es 0,8 capacitivo resulta:

$$3000 = 7,895 V_2 + 0,52 \cdot 41,67 \cdot 0,8 - 2,01 \cdot 41,67 \cdot 0,6 \Rightarrow V_2 = 384,16 \text{ V}$$

Problema 3.4

Un transformador monofásico de 75 kVA, 3000/220 V, 50 Hz, necesita 200 V aplicados al primario, para que circule la corriente asignada en cortocircuito, siendo la potencia absorbida en el ensayo de 2 kW. Determinar: a) caída de tensión relativa y tensión secundaria correspondiente cuando trabaja a plena carga con f.d.p. unidad, 0,8 inductivo y 0,8 capacitivo; b) si la potencia absorbida en vacío es de 1,5 kW, calcular el rendimiento a plena y media carga con f.d.p. 0,8.

Solución

a) El valor de la corriente asignada primaria es:

$$I_{1N} = \frac{S_N}{V_{1N}} = \frac{75000}{3000} = 25\ \text{A} = I_{1cc}$$

y al ser la corriente anterior la que circula en cortocircuito, se deduce:

$$2000 = 200 \cdot 25 \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,4 \quad ; \quad \operatorname{sen}\varphi_{cc} = 0,917$$

por consiguiente la impedancia de cortocircuito y la resistencia y reactancia correspondientes son:

$$Z_{cc} = \frac{200}{25} = 8\ \Omega \Rightarrow R_{cc} = 8 \cdot 0,4 = 3,2\ \Omega \quad ; \quad X_{cc} = 8 \cdot 0,917 = 7,336\ \Omega$$

y por lo tanto las caídas relativas en la resistencia y reactancia a plena carga son, respectivamente:

$$\varepsilon_{Rcc} = \frac{R_{cc} I_{1n}}{V_{1n}} = \frac{3,2 \cdot 25}{3000} = 2,67\% \quad ; \quad \varepsilon_{xcc} = \frac{7,336 \cdot 25}{3000} = 6,11\%$$

y teniendo en cuenta que la caída de tensión relativa en función del índice de carga y de las caídas relativas anteriores viene expresado por:

$$\varepsilon_c = C\left[\varepsilon_{Rcc}\cos\varphi + \varepsilon_{xcc}\operatorname{sen}\varphi\right] = \frac{V_1 - V_2'}{V_1}$$

de donde se deduce que cuando el transformador trabaja a plena carga con f.d.p. unidad se tiene una caída relativa de tensión:

$$C_1 = 1 \quad ; \quad \cos\varphi = 1 \quad ; \quad \varepsilon_c = 1.\left[2,67 \cdot 1\right] = 2,67\%$$

para f.d.p. 0,8 inductivo:

$$C_1 = 1 \quad ; \quad \cos\varphi = 0,8 \text{ ind.} \quad ; \quad \varepsilon_c = 1\left[2,67 \cdot 0,8 + 6,11 \cdot 0,6\right] = 5,8\%$$

Cuando el f.d.p. es 0,8 capacitivo se tiene:

$$C_1 = 1 \quad ; \quad \cos\varphi = 0,8 \text{ capac.} \quad ; \quad \varepsilon_c = 1\left[2,67 \cdot 0,8 - 6,11 \cdot 0,6\right] = -1,53\%$$

y como quiera que la caída relativa de tensión se puede expresar también por:

$$\varepsilon_c = \frac{V_1 - mV_2}{V_1} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{V_1(1-\varepsilon_c)}{m}$$

las tensiones secundarias correspondientes serán:

$$V_2 = \frac{3000(1-0,0267)}{13,636} = 214,13\ \text{V} \ ; \ V_2 = \frac{3000(1-0,058)}{13,636} = 207,25\ \text{V} \ ; \ V_2 = \frac{3000(1+0,0153)}{13,636} = 223,37\ \text{V}$$

b) Las pérdidas del transformador son:

$$P_0 = P_{Fe} = 1,5\ \text{kW} \quad ; \quad P_{cc} = 2\ \text{kW}$$

y teniendo en cuenta que la expresión del rendimiento es:

$$\eta = \frac{CS_N\cos\varphi}{CS_N\cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

el rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8 será:

$$\eta = \frac{75 \cdot 0,8}{75 \cdot 0,8 + 1,5 + 2} = \frac{60}{63,5} = 94,49\%$$

y el rendimiento a media carga con f.d.p. 0,8 será:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}75 \cdot 0,8}{\frac{1}{2}75 \cdot 0,8 + 1,5 + (\frac{1}{2})^2 2} = \frac{30}{30 + 1,5 + 0,5} = \frac{30}{32} = 93,75\%$$

Problema 3.5

Un transformador monofásico de 20 kVA, 460/200 V, 50 Hz, tiene unas pérdidas en el hierro a la tensión asignada de 360 W, y unas pérdidas en el cobre a plena carga de 500 W. Calcular: a) rendimiento a media carga con f.d.p. 0,8; b) potencia aparente de máximo rendimiento; c) rendimiento máximo cuando el f.d.p. es la unidad.

Solución

a) Las pérdidas del transformador son:

$$P_0 = P_{Fe} = 360\ \text{W} \ ; \ P_{cc} = P_{cun} = 500\ \text{W}$$

por consiguiente, el rendimiento a media carga con f.d.p. 0,8 será:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}20000 \cdot 0,8}{\frac{1}{2}20000 \cdot 0,8 + 360 + (\frac{1}{2})^2 500} = \frac{8000}{8000 + 360 + 125} = 94,28\%$$

b) El índice de carga óptimo viene definido por:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{360}{500}} = 0,8485$$

y como quiera que el índice anterior es el cociente entre la potencia de máximo rendimiento y la potencia asignada al transformador, se obtiene:

$$S_{\eta\,max} = 20 \cdot 0,8485 = 16,97\ \text{kVA}$$

c) El rendimiento máximo cuando el f.d.p. es la unidad vale:

$$\eta = \frac{0,8485 \cdot 20 \cdot 1}{0,8485 \cdot 20 \cdot 1 + 0,36 + 0,8485^2 \cdot 0,5} = \frac{16,97}{16,97 + 0,72} = 95,93\%$$

Problema 3.6

El rendimiento para un factor de potencia unidad de un transformador monofásico de 200 kVA, 3000/380 V, es de 0,98 tanto para plena carga como para media carga. El f.d.p. en vacío es de 0,2 y la caída de tensión relativa a plena carga, con un f.d.p. 0,8 inductivo es del 4%. Determinar los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario.

Solución

a) Teniendo en cuenta que la expresión del rendimiento de un transformador es:

$$\eta = \frac{CS_N\cos\varphi}{CS_N\cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

al aplicarla a las dos condiciones del problema resulta:

$$0,98 = \frac{1\cdot 200\cdot 1}{1\cdot 200\cdot 1 + P_0 + 1^2 P_{cc}} \quad ; \quad 0,98 = \frac{\frac{1}{2}200\cdot 1}{\frac{1}{2}200\cdot 1 + P_0 + (\frac{1}{2})^2 P_{cc}}$$

de donde se deducen las ecuaciones siguientes:

$$P_0 + P_{cc} = 4,082 \text{ kW} \quad ; \quad P_0 + \frac{P_{cc}}{4} = 2,041 \text{ kW}$$

que dan lugar a las siguientes potencias perdidas:

$$P_{cc} = 2,72 \text{ kW} \quad ; \quad P_0 = 1,361 \text{ kW}$$

teniendo en cuenta además que el f.d.p. en vacío es igual a 0,2; se puede escribir:

$$P_0 = V_1 I_0 \cos\varphi_0 \Rightarrow 1361 = 3000 I_0\, 0,2$$

de donde se deduce:

$$I_0 = 2,268 \text{ A} \quad ; \quad I_{Fe} = 2,268\cdot 0,2 = 0,4536 \text{ A} \quad ; \quad I_\mu = 2,268.0,98 = 2,223 \text{ A}$$

A partir de estas corrientes se obtienen los siguientes parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente del transformador reducido al primario:

$$R_{Fe} = \frac{3000}{0,4536} = 6613,7\ \Omega \approx 6,61\text{k}\ \Omega \quad ; \quad X_\mu = \frac{3000}{2,223} = 1349,5\ \Omega \approx 1,35\text{k}\ \Omega$$

además, la corriente de plena carga del secundario tiene un valor:

$$I_{2N} = \frac{S_N}{V_{2N}} = \frac{200000}{380} = 526,32 \text{ A}$$

que, teniendo en cuenta que la relación de transformación es igual a $m = \frac{3000}{380} = 7,895$, corresponde a una corriente del secundario reducida al primario:

$$I_2' = \frac{526,32}{7,895} = 66,66 \text{ A}$$

Por otro lado, al ser la potencia perdida en cortocircuito de 2720 W como se ha deducido de las ecuaciones del rendimiento, se puede escribir:

$$P_{cc} = P_{cun} = 2720 = R_{cc} I_2'^2 = R_{cc} 66,66^2 \Rightarrow R_{cc} = 0,612\ \Omega$$

como además la caída de tensión relativa a plena carga es del 4%, resulta:

$$\varepsilon_c = 4\% = \frac{V_1 - V_2'}{V_1} = \frac{3000 - 7,895V_2}{3000}$$

de donde se deduce:

$$V_2 = 364,79 \text{ V} \Rightarrow V_2' = 2880 \text{ V}$$

La reactancia de cortocircuito se despeja de la ecuación de la caída de tensión de un transformador (fórmula de Kapp):

$$V_1 - V_2' = 120 = R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \operatorname{sen}\varphi = 0,612\cdot 66,66\cdot 0,8 + X_{cc} 66,66\cdot 0,6$$

lo que da lugar a:

$$X_{cc} = 2,184\ \Omega$$

Problema 3.7

El rendimiento máximo de un transformador monofásico de 500 kVA; 3300/500 V, 50 Hz, es del 97% y ocurre para los 3/4 de la plena carga con f.d.p. unidad. Se observa en un ensayo de cortocircuito que son necesarios 330 V aplicados al primario para que circule en ese estado la corriente asignada por el transformador. Calcular la caída relativa de tensión a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

De los datos del enunciado se deduce que el índice de carga óptimo es igual a 3/4 y se puede escribir:

$$C_{opt} = \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}}$$

y como quiera que el rendimiento máximo es igual al 97%, para el cual coinciden las pérdidas fijas con las variables, se tiene:

$$0,97 = \frac{\frac{3}{4}500\cdot 1}{\frac{3}{4}500\cdot 1 + 2P_0}$$

de donde se deduce: $P_0 \approx 5,8$ kW. Llevando este valor a la ecuación del índice de carga óptimo resulta:

$$\frac{9}{16} = \frac{5,8}{P_{cc}}$$

de donde se deduce un valor $P_{cc} \approx 10,31$ kW y por consiguiente se cumple:

$$P_{cc} = 10,31 \text{ kW} = R_{cc} I_{1N}^2 = R_{cc} 151,51^2 \Rightarrow R_{cc} \approx 0,45\ \Omega$$

Como quiera que, según el enunciado, en un ensayo de cortocircuito hacen falta aplicar al primario 300 V para que circule la corriente asignada (nominal), se tiene:

$$V_{1cc} = 330 \text{ V} \quad ; \quad I_{1cc} = I_{1N} = \frac{500000}{3300} = 151,51 \text{ A}$$

de donde se deduce:

$$Z_{cc} = \frac{330}{151,51} = 2,178\ \Omega \quad ; \quad X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = \sqrt{2,178^2 - 0,45^2} = 2,13\ \Omega$$

De este modo las caídas relativas de tensión en la resistencia y reactancia de cortocircuito son respectivamente:

$$\varepsilon_{Rcc} = \frac{R_{cc} I_{1n}}{V_{1n}} = \frac{0,45 \cdot 151,51}{3300} = 2,067\% \quad ; \quad \varepsilon_{xcc} = \frac{2,13 \cdot 151,51}{3300} = 9,78\%$$

y por lo tanto la caída relativa de tensión del transformador será:

$$\varepsilon_c = C\left[\varepsilon_{Rcc}\cos\varphi + \varepsilon_{xcc}\operatorname{sen}\varphi\right] = 2,067 \cdot 0,8 + 9,78 \cdot 0,6 = 7,522\%$$

que es el resultado solicitado en el enunciado del problema.

Problema 3.8

Calcular los rendimientos de un transformador de 100 kVA, para media carga, plena carga y 1·1/4 de la plena carga, con f.d.p.: a) unidad; b) 0,8. Las pérdidas en el cobre a plena carga son de 1000 W, y las pérdidas en el hierro son de 1000 W.

Solución

Las pérdidas del transformador son:

$$P_0 = 1\text{ kW} = P_{Fe} \quad ; \quad P_{cc} = 1\text{ kW} = P_{cuN}$$

y la expresión del rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{C S_N \cos\varphi}{C S_N \cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

que al aplicarla a los valores del enunciado se tiene que para media carga con f.d.p. unidad:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}100 \cdot 1}{\frac{1}{2}100 \cdot 1 + 1 + (\frac{1}{2})^2 1} = \frac{50}{50 + 1 + 0,25} = 97,56\%$$

y a plena carga y a 5/4 de la plena carga con f.d.p. unidad se tiene:

$$\eta = \frac{1 \cdot 100 \cdot 1}{1 \cdot 100 \cdot 1 + 1 + 1^2 \cdot 1} = \frac{100}{102} = 98,04\% \quad ; \quad \eta = \frac{\frac{5}{4}100 \cdot 1}{\frac{5}{4}100 + 1 + (\frac{5}{4})^2 1} = \frac{125}{125 + 1 + 1,56} = \frac{125}{127,56} = 97,99\%$$

y cuando el f.d.p. es 0,8; resulta para los índices de carga anteriores:

$$\eta = \frac{50 \cdot 0,8}{50 \cdot 0,8 + 1 + 0,25} = \frac{40}{41,25} = 96,97\% \; ; \; \eta = \frac{100 \cdot 0,8}{100 \cdot 0,8 + 1 + 1} = \frac{80}{82} = 97,56\% \; ; \; \eta = \frac{125 \cdot 0,8}{125 \cdot 0,8 + 1 + 1,56} = \frac{100}{102,56} = 97,50\%$$

Problema 3.9

El rendimiento de un transformador monofásico de 100 kVA es de 93,02% cuando suministra la plena carga, con un f.d.p. de 0,8 y de 94,34% a media carga, con f.d.p. unidad. Calcular: a) pérdida en el hierro; b) pérdida en el cobre a plena carga.

Solución

Sabemos que la expresión del rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{C S_N \cos\varphi}{C S_N \cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

que al sustituir en las dos situaciones mencionadas da lugar a:

$$0,9302 = \frac{100 \cdot 0,8}{100 \cdot 0,8 + P_0 + P_{cc}} \quad ; \quad 0,9434 = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 1 + P_0 + 0,25 P_{cc}}$$

de donde se deducen las dos ecuaciones siguientes:

$$6 = P_0 + P_{cc} \quad ; \quad 3 = P_0 + 0,25 P_{cc}$$

que al resolverlas se obtiene:

$$P_{cc} = 4\text{ kW} \quad ; \quad P_0 = 6 - 4 = 2\text{ kW}$$

Problema 3.10

Dos transformadores monofásicos de 100 kVA, 1000/100 V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Las impedancias de cortocircuito reducidas al primario de cada uno son $Z_{ccI} = 0,3 + j\,0,4\ \Omega$ y $Z_{ccII} = 0,4 + j0,3\ \Omega$ respectivamente. Se desea alimentar a 100 V una carga de 150 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular las corrientes, potencias aparentes y activas suministradas por cada transformador.

Solución

En la Figura 3.1 se muestra el circuito equivalente reducido al primario del acoplamiento en paralelo. La tensión secundaria es de 100 voltios, y al ser la relación de transformación $m = \frac{1000}{100} = 10$, se tiene una tensión secundaria reducida al primario $V_2' = mV_2 = 1000$. De este modo la corriente que absorbe la carga reducida al primario es:

$$I_2' = \frac{150000}{1000} = 150\text{ A}$$

que al tomar como referencia la tensión $V_2' = 1000\angle 0°$, se puede escribir $\mathbf{I}_2' = 150\angle -36,87°$. Esta corriente será igual a la suma fasorial de las corrientes que entrega cada transformador (reducidas al primario), es decir:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 150\angle -36,87°$$

e igualando las caídas de tensión en los dos transformadores se puede escribir:

$$(0,3 + j0,4)\mathbf{I}_I = (0,4 + j0,3)\mathbf{I}_{II}$$

despejando de estas dos últimas ecuaciones el valor de las corrientes $\mathbf{I}_I$ e $\mathbf{I}_{II}$ se obtiene:

$$\mathbf{I}_I = 150\angle -36,87° \frac{0,4+j0,3}{0,7+j0,7} = 150\angle -36,87° \frac{0,5\angle 36,87°}{0,7\sqrt{2}\ \angle 45°} = 75,76\angle -45°$$

$$\mathbf{I}_{II} = 150\angle -36,87° - 75,76\angle -45° = (120-j90)-(53,57-j53,57) = 66,43-j36,43 = 75,76\angle -28,74°$$

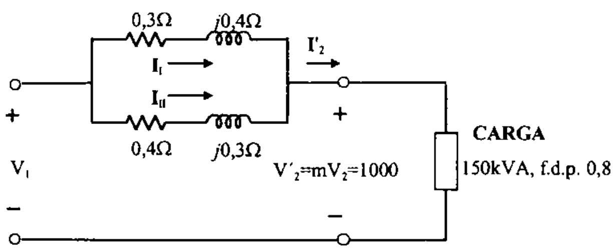


Figura 3.1

que corresponden a unas corrientes medidas en secundario:

$$I_{2I} = mI_I = 757,6 \text{ A} \ ; \ I_{2II} = mI_{II} = 757,6 \text{ A}$$

Las potencias complejas entregadas por cada transformador son:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_I^* = 1000\cdot 75,76\angle 45° = (53,57+j53,57)10^3 \Rightarrow S_I = 75,76 \text{ kVA} \ ; \ P_I = 53,57 \text{ kW} \ ; \ Q_I = 53,57 \text{ kVAr}$$

$$S_{II} = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_{II}^* = 1000\cdot 75,76\angle 28,74° = (66,43+j36,43)10^3 \Rightarrow S_{II} = 75,76 \text{ kVA} \ ; \ P_{II} = 66,43 \text{ kW} \ ; \ Q_{II} = 36,43 \text{ kVAr}$$

Se puede comprobar que se cumple el balance de potencias en el circuito:

$$\mathbf{S}_I + \mathbf{S}_{II} = (53,57+j53,57)+(66,43+j36,43) = 120+j80 = S_{carga}$$

Problema 3.11

Tres transformadores monofásicos de 100 kVA, 1000/100 V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Las impedancias de cortocircuito reducidas al primario de cada uno son, respectivamente: Z_{ccI}= 0,3 + j 0,4 Ω; Z_{ccII}= 0,4 + j0,3 Ω y Z_{ccIII}= 0,4 + j0,4 Ω. Se desea alimentar a 100 V una carga de 240 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada transformador.

Solución

La tensión secundaria es de 100 voltios, y al ser la relación de transformación $m = \frac{1000}{100} = 10$, se tiene una tensión secundaria reducida al primario $V_2' = mV_2 = 1000$. De este modo la corriente que absorbe la carga reducida al primario es:

$$I_2' = \frac{240000}{1000\cdot 0,8} = 300 \text{ A}$$

que al tomar como referencia la tensión $V_2' = 1000\angle 0°$, se puede escribir $\mathbf{I}_2' = 300\angle -36,87°$. Esta corriente será igual a la suma fasorial de las corrientes que entrega cada transformador (reducidas al primario), es decir:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} + \mathbf{I}_{III} = 300\angle -36,87° \qquad (1)$$

Al tener más de dos transformadores conectados en paralelo es conveniente expresar la ecuación anterior en función de las admitancias de cortocircuito de cada transformador. Es por ello que si se denomina $\Delta\mathbf{V}$ a la caída de tensión de los transformadores $\mathbf{Y}_I$, $\mathbf{Y}_{II}$ e $\mathbf{Y}_{III}$, la ecuación (1) se puede poner de este modo:

$$\mathbf{Y}_I\Delta\mathbf{V} + \mathbf{Y}_{II}\Delta\mathbf{V} + \mathbf{Y}_{III}\Delta\mathbf{V} = (\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_{III})\Delta\mathbf{V} = \mathbf{Y}_T\Delta\mathbf{V} = \mathbf{I}_2' = 300\angle -36,87° \qquad (2)$$

En la ecuación anterior, $\mathbf{Y}_T$ representa la admitancia total de los tres transformadores en paralelo. Por la regla del divisor de corriente estudiado en Teoría de Circuitos, la corriente suministrada por un transformador es igual a:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{Y}_i\Delta\mathbf{V} \qquad (3)$$

pero teniendo en cuenta la ecuación (2), la ecuación (3) se transforma en:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{Y}_i\Delta\mathbf{V} = \mathbf{Y}_i\frac{\mathbf{I}_2'}{\mathbf{Y}_t} \qquad (4)$$

En este caso, las admitancias de cada transformador y la admitancia total son:

$$\mathbf{Y}_I = \frac{1}{\mathbf{Z}_I} = \frac{1}{0,3+j0,4} = 2\angle -53,13° \text{ siemens} \ ; \ \mathbf{Y}_{II} = \frac{1}{0,4+j0,3} = 2\angle -36,87° \text{ siemens} \ ; \ \mathbf{Y}_{III} = \frac{1}{0,4+j0,4} = 1,7678\angle -45° \text{ siemens}$$

$$\mathbf{Y}_T = 2\angle -53,13° + 2\angle -36,87° + 1,767\angle -45° = 4,05 - j4,05 = 5,728\angle -45° \text{ siemens}$$

y al aplicar la ecuación (4) dan lugar a las siguientes corrientes suministradas por cada transformador (reducidas al primario):

$$\mathbf{I}_I = \frac{\mathbf{Y}_I}{\mathbf{Y}_t}\mathbf{I}_2' = \frac{2\angle -53,13°}{5,728\angle -45°}300\angle -36,87° = 104,76\angle -45° \ ; \ \mathbf{I}_{II} = \frac{\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_t}\mathbf{I}_2' = \frac{2\angle -36,87°}{5,728\angle -45°}300\angle -36,87° = 104,76\angle -28,74°$$

$$\mathbf{I}_{III} = \frac{\mathbf{Y}_{III}}{\mathbf{Y}_t}\mathbf{I}_2' = \frac{1,7678\angle -36,87°}{5,728\angle -45°}300\angle -36,87° = 92,59\angle -36,87°$$

En consecuencia las potencias complejas entregadas por cada transformador son:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_I^* = 1000\cdot 104,76\angle 45° = (74,08+j74,08)10^3 \Rightarrow S_I = 104,76 \text{ kVA} \ ; \ P_I = 74,08 \text{ kW} \ ; \ Q_I = 74,08 \text{ kVAr}$$

$$\mathbf{S}_{II} = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_{II}^* = 1000\cdot 104,76\angle 28,74° = (91,85+j50,37)10^3 \Rightarrow S_{II} = 104,76 \text{ kVA} \ ; \ P_{II} = 91,85 \text{ kW} \ ; \ Q_{II} = 50,37 \text{ kVAr}$$

$$\mathbf{S}_{III} = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_{III}^* = 1000\cdot 92,59\angle 36,87° = (74,07+j55,55)10^3 \Rightarrow S_{III} = 92,59 \text{ kVA} \ ; \ P_{III} = 74,07 \text{ kW} \ ; \ Q_{III} = 55,55 \text{ kVAr}$$

Se puede comprobar que se cumple el balance de potencias en el circuito:

$$\mathbf{S}_{II} + \mathbf{S}_{II} + \mathbf{S}_{III} = (74,08+j74,08) + +(91,85+j50,37) + (74,07+j55,55) = 240+j180$$

y la potencia compleja de la carga, teniendo en cuenta que la potencia activa total es de 240 kW y con un f.d.p. de 0,8 inductivo, corresponde a una potencia reactiva Q_{carga} = 240tg36,87° = 240 · 0,75 = 180 kVAr. Es decir, la potencia compleja de la carga es: $\mathbf{S}_{carga}$= 240+j180 kVA, que coincide con la potencia compleja total suministrada por los tres transformadores.

Problema 3.12

Dos transformadores de 100 kVA, 1000/100 V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Los ensayos de cortocircuito de estos transformadores cuando funcionan con corriente asignada con los devanados de B.T. en cortocircuito, dan los siguientes resultados:

Transformador	Tensión aplicada	Potencia entrada
I	30 voltios	1200 vatios
II	90 voltios	1800 vatios

Si se desea alimentar a 100 V una carga de 100 kW con f.d.p. 0,8 inductivo; a) ¿cuál será el reparto de potencias aparentes y activas en cada transformador?; b) ¿cuál es la mayor potencia con f.d.p. unidad, que pueden llevar los dos transformadores en paralelo sin sobrecargar ninguno de ellos?

Solución

a) De los datos del ensayo del transformador *I* se puede obtener la impedancia de cortocircuito de este transformador, de acuerdo con el procedimiento siguiente:

$$I_{1n} = I_{1cc} = \frac{100000}{1000} = 100\text{A} \;\; ; \;\; P_{cc} = V_{1cc} I_{1cc} \cos\varphi_{cc} \;\Rightarrow\; \cos\varphi_{cc} = \frac{1200}{30 \cdot 100} = 0,4 \;\; ; \;\; \text{sen}\varphi_{cc} = 0,917$$

de donde se deduce:

$$Z_{ccI} = \frac{30}{100} = 0,3\ \Omega \;\Rightarrow\; R_{ccI} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12\ \Omega \;\; ; \;\; X_{ccI} = 0,3 \cdot 0,917 = 0,275\ \Omega$$

de un modo similar para el transformador *II* se tiene:

$$\cos\varphi_{cc} = \frac{1800}{90 \cdot 100} = 0,2 \;\; ; \;\; \text{sen}\varphi_{cc} = 0,98 \;\Rightarrow\; Z_{ccII} = \frac{90}{100} = 0,9\ \Omega$$

y por consiguiente:

$$R_{ccII} = 0,18\ \Omega \;\; ; \;\; X_{ccII} = 0,882\ \Omega$$

Como quiera que la potencia de la carga es de 100 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, la corriente total (reducida al primario) que absorbe la carga es igual a:

$$I_2' = \frac{100000}{1000 \cdot 0,8} = 125\text{ A}$$

y tomando como referencia la tensión secundaria reducida al primario, es decir $\mathbf{V}_2' = 1000\angle 0°$, la corriente compleja correspondiente es de la forma:

$$\mathbf{I}_2' = 125\angle -36,87°$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones del paralelo:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 125\angle -36,87°$$

$$(0,12 + j0,275)\mathbf{I}_I = (0,18 + j0,882)\mathbf{I}_{II}$$

se obtienen las siguientes corrientes:

$$\mathbf{I}_I = 94,14\angle -33,87° \;\; ; \;\; \mathbf{I}_{II} = 31,38\angle -45,9°$$

que corresponden a las potencias complejas siguientes:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2' \mathbf{I}_I^* = 94,14\angle 33,87°\text{kVA} = 78,16 + j52,46 \;\Rightarrow\; S_I = 94,14\text{ kVA} \;\; ; \;\; P_I = 78,16\text{ kW} \;\; ; \;\; Q_I = 52,46\text{ kVAr}$$

$$\mathbf{S}_{II} = 31,38\angle 45,9°\text{ kVA} = 21,84 + j22,54 \;\Rightarrow\; S_{II} = 31,38\text{ kVA} \;\; ; \;\; P_{II} = 21,84\text{ kW} \;\; ; \;\; Q_{II} = 22,54\text{ kVAr}$$

La potencia compleja total suministrada por los transformadores es:

$$\mathbf{S}_I + \mathbf{S}_{II} = (78,16 + j52,46) + (21,84 + j22,54) = 100 + j75$$

y coincide con la potencia compleja de la carga, que tiene 100 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, que corresponde a:

$$\mathbf{S}_{carga} = (100 + j100tg36,87°) = 100 + j75$$

cumpliéndose el balance de potencias en el circuito.

b) Del apartado anterior se obtienen las caídas relativas de tensión de cada transformador:

$$\varepsilon_{ccI} = Z_{ccI}\frac{I_{1n}}{V_{1n}} = 0,3\frac{100}{1000} = 3\% \;\; ; \;\; \varepsilon_{ccII} = 0,9\frac{100}{1000} = 9\%$$

y como quiera que en el acoplamiento en paralelo se debe cumplir la relación:

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{\varepsilon_{ccII}}{\varepsilon_{ccI}}$$

Al sustituir valores nos da:

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{9\%}{3\%} = 3$$

y como los índices de carga vienen expresados por:

$$C_I = \frac{S_I}{S_{In}} \;\; ; \;\; C_{II} = \frac{S_{II}}{S_{IIn}}$$

al ser las potencias nominales de ambos transformadores de 100 kVA, las potencias aparentes suministradas por ambos transformadores deben cumplir la relación:

$$\frac{S_I}{S_{II}} = 3$$

es decir, la potencia aparente que suministra el primer transformador es el triple que la potencia aparente que entrega el segundo y esta relación se cumple para cualquier régimen de carga de los transformadores. De hecho, esta relación se puede corroborar los resultados del apartado anterior en los que se obtenía: S_I = 94,14 kVA; S_{II} = 31,38 kVA, cuyo cociente evidentemente es igual tres.

En consecuencia *¿cuál debe ser la mayor potencia con f.d.p. unidad, que pueden llevar los dos transformadores en paralelo sin sobrecargar ninguno de ellos?* Es evidente que para que no resulte sobrecargado ninguno de los dos transformadores, la potencia aparente que debe suministrar el primer transformador deberá ser su potencia asignada de 100 kVA, y de este modo la potencia aparente que entregará el segundo transformador será 1/3 de la anterior, es decir, de 33,33 kVA. Sin embargo debe aclararse que entre los dos transformadores no entregan la potencia aparente total de 100+33,33 = 133,33 kVA, ya que las potencias aparentes no se pueden sumar aritméticamente. Para determinar la potencia aparente total que pueden suministrar ambos transformadores es preciso hacer los cálculos en el plano complejo. Las magnitudes de las corrientes que entregan cada uno de los transformadores (reducidas al primario) son:

$$S_I = V_2' I_I \Rightarrow I_I = \frac{100000}{1000} = 100 \text{ A} \Rightarrow I_{II} = \frac{1}{3} I_I = 33,33 \text{ A}$$

pero siempre se debe cumplir la relación del paralelo siguiente:

$$\mathbf{Z}_I \mathbf{I}_I = \mathbf{Z}_{II} \mathbf{I}_{II} \Rightarrow (0,12 + j0,275)\mathbf{I}_I = (0,18 + j0,882)\mathbf{I}_{II}$$

de donde se deduce:

$$\frac{\mathbf{I}_I}{\mathbf{I}_{II}} = \frac{0,9\angle 78,46^\circ}{0,3\angle 66,42^\circ} = 3\angle 12,04^\circ = 3\angle 12^\circ$$

es decir, la corriente que entrega el primer transformador es el triple que la que suministra el segundo (lo que ya se había previsto) pero además se adelanta 12° a la corriente que entrega este último. Por consiguiente si se considera que la corriente del segundo transformador es de la forma $\mathbf{I}_{II} = 33,33\angle\alpha$, la corriente del primero será $\mathbf{I}_I = 100\angle(\alpha + 12^\circ)$ y la corriente total que entregan ambos a la carga, al tener un f.d.p. unidad, será de la forma $I\angle 0^\circ$ y deberá cumplirse la igualdad siguiente:

$$I\angle 0^\circ = \mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 100\angle(\alpha + 12^\circ) + 33,33\angle\alpha$$

que al igualar partes reales e imaginarias se obtienen los valores de I y de α siguientes:

$$I = 132,78 \text{ A} \; ; \; \alpha = -9^\circ$$

por lo que la potencia aparente compleja total es:

$$\mathbf{S}_{TOTAL} = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}^* = 1000\angle 0^\circ \cdot 132,78\angle 0^\circ = 132,78 \text{ kW} + j0 \text{ kVAr}$$

es decir, 132,78 kVA (*¡y no 133,33 kVA como parecía a primera vista!*). Las potencias que entregan cada uno de los transformadores son:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_I^* = 1000\angle 0^\circ \cdot 100\angle -3^\circ = 100\angle -3^\circ \text{kVA} = 99,86 - j5,22$$

$$\mathbf{S}_{II} = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_{II}^* = 1000\angle 0^\circ \cdot 33,33\angle 9^\circ = 33,33\angle 9^\circ \text{ kVA} = 32,92 + j5,22$$

por lo que la potencia compleja total que suministran ambos transformadores es:

$$\mathbf{S}_{TOTAL} = 132,78 + j0$$

que coincide con la absorbida por la carga, cumpliéndose el balance de potencias.

Problema 3.13

Un transformador de 40 kVA, 1000/100 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de cortocircuito: 51 V; 40 A; 400 W (medidas en el lado de A.T.). Se desea conectar en paralelo con otro transformador de 20 kVA, 1000/100 V, que en un ensayo de cortocircuito ha dado: 42 V; 20 A; 245 W (medidas en el lado de A.T.). Indicar cómo se repartirán una potencia de 60 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

De los resultados del ensayo de cortocircuito del primer transformador resulta:

$$400 = 51 \cdot 40\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,196 \; ; \; \text{sen}\varphi_{cc} = 0,98$$

por lo tanto se obtiene:

$$Z_{ccI} = \frac{51}{40} = 1,275 \; \Omega \Rightarrow R_{ccI} = 1,275 \cdot 0,196 = 0,25 \; \Omega \; ; \; X_{ccI} = 1,275 \cdot 0,98 \approx 1,25 \; \Omega$$

y para el segundo transformador se tiene:

$$245 = 42 \cdot 20\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,29166 \; ; \; \text{sen}\varphi_{cc} = 0,957$$

$$Z_{ccII} = \frac{42}{20} = 2,1 \; \Omega \Rightarrow R_{ccII} = 2,1 \cdot 0,29166 = 0,612 \; \Omega \; ; \; X_{ccII} = 2,1 \cdot 0,967 \approx 2 \; \Omega$$

Al conectar los dos transformadores en paralelo y alimentar a carga de 60 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo, la corriente total reducida al primario vale:

$$S = 60000 = mV_2 I_2' = 1000 I_2' \Rightarrow I_2' = 60 \text{ amperios}$$

que tomando la tensión secundaria reducida al primario como referencia de fases, corresponde a una corriente compleja:

$$\mathbf{I}_2' = 60\angle -36,87^\circ$$

Si se denomina $\mathbf{I}_I$ e $\mathbf{I}_{II}$ a las corrientes secundarias reducidas al primario de cada uno de los transformadores se cumplirán las siguientes ecuaciones del paralelo:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 60\angle -36,87^\circ \; ; \; (0,25 + j1,25)\mathbf{I}_I = (0,612 + j2)\mathbf{I}_{II}$$

de donde se obtiene:

$$\mathbf{I}_I = 7,33\angle -39,03^\circ \; ; \; \mathbf{I}_{II} = 22,74\angle -33,34^\circ$$

y por consiguiente, las potencias complejas suministradas por ambos transformadores serán:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_I^* = 37,33\angle 39,03^\circ \text{ kVA} = 29 + j23,5$$

$$\mathbf{S}_{II} = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_{II}^* = 22,74\angle 33,34^\circ \text{ kVA} = 19 + j12,5$$

cuya suma coincide con la potencia compleja absorbida por la carga, que vale:

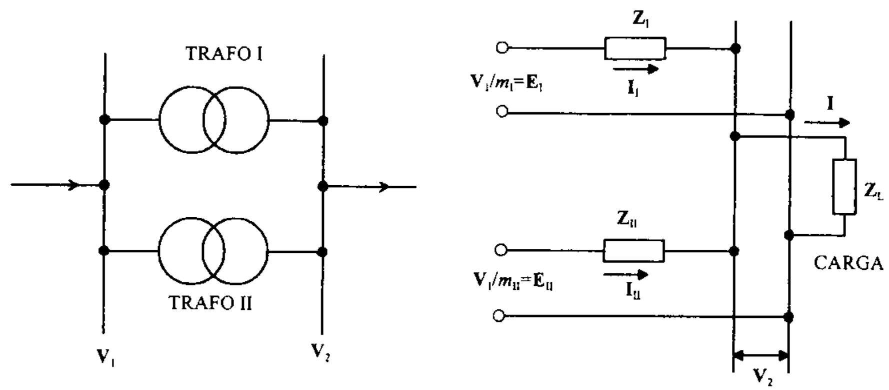
$$\mathbf{S}_{CARGA} = 60\angle 36,87^\circ \text{ kVA} = 48 + j36$$

Problema 3.14

Dos transformadores monofásicos funcionan en paralelo y alimentan una carga de impedancia $Z_L=24+j10\ \Omega$. El transformador I tiene una tensión secundaria en vacío $E_I=440$ V y una impedancia de cortocircuito reducida al secundario $Z_I=1+j3\ \Omega$; los valores correspondientes para el transformador II son: $E_{II}=450$ V y $Z_{II}=1+j4\ \Omega$. Calcular: a) tensión secundaria en vacío y corriente que circulará por los secundarios de los transformadores cuando trabajen en vacío; b) tensión secundaria cuando alimentan la carga mencionada; c) corrientes secundarias y sus factores de potencia en el caso anterior.

Solución

En este problema los transformadores tienen diferente relación de transformación, por lo que las tensiones secundarias de vacío son distintas. Debe señalarse que si esta diferencia es muy grande, debe evitarse en todo momento el acoplamiento en paralelo ya que da lugar a corrientes elevadas en los devanados con las consiguientes pérdidas de potencia. En la práctica lo que sucede es que aunque las relaciones de transformación de los transformadores son iguales, las tensiones reales difieren ligeramente. También aparece esta diferencia cuando se emplean transformadores con tomas con diferentes posiciones de regulación. Antes de resolver este problema conviene hacer un análisis teórico breve. En la Figura 3.2a se muestra el esquema del acoplamiento y en la Figura 3.2b se han dibujado los circuitos equivalentes de los transformadores *reducidos al secundario* y que alimentan la impedancia de carga señalada.



a) b)

Figura 3.2

Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff a los secundarios de los transformadores de la Figura 3.2b se obtiene:

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_I\mathbf{I}_I \quad ; \quad \mathbf{E}_{II} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{II}\mathbf{I}_{II} \tag{1}$$

y definiendo admitancias de los transformadores:

$$\mathbf{Y}_I = \frac{1}{\mathbf{Z}_I} \quad ; \quad \mathbf{Y}_{II} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{II}} \tag{2}$$

Al despejar las corrientes de (1) se obtiene:

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{Y}_I(\mathbf{E}_I - \mathbf{V}_2) \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = \mathbf{Y}_{II}(\mathbf{E}_{II} - \mathbf{V}_2) \tag{3}$$

y teniendo en cuenta que la corriente total de la carga es igual a:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} \tag{4}$$

al sustituir (4) en (3) da lugar a:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = \mathbf{Y}_I\mathbf{E}_I + \mathbf{Y}_{II}\mathbf{E}_{II} - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}) \tag{5}$$

Al despejar la tensión secundaria de la ecuación anterior resulta:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Y}_I\mathbf{E}_I + \mathbf{Y}_{II}\mathbf{E}_{II} - \mathbf{I}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} \tag{6}$$

En el caso de que la carga esté definida por una impedancia compleja $\mathbf{Z}_L$, es decir, por una admitancia $\mathbf{Y}_L=1/\mathbf{Z}_L$, entonces se cumple:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_L\mathbf{V}_2 \tag{7}$$

y que al sustituir en (6) nos da, para el valor de la tensión en la carga:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Y}_I\mathbf{E}_I + \mathbf{Y}_{II}\mathbf{E}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_L} \tag{8}$$

lo que permite, al sustituir en (3), determinar las corrientes de cada transformador:

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{Y}_I\frac{\mathbf{E}_I\mathbf{Y}_L + (\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II})\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_L} \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = \mathbf{Y}_{II}\frac{\mathbf{E}_{II}\mathbf{Y}_L + (\mathbf{E}_{II} - \mathbf{E}_I)\mathbf{Y}_I}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_L} \tag{9}$$

Cuando la carga está desconectada se tiene $\mathbf{I} = 0$, o de otro modo $\mathbf{Y}_L = 0$, y los transformadores trabajan en vacío. Existe entonces una tensión secundaria en vacío que se deduce de (8) haciendo $\mathbf{Y}_L = 0$, lo que da lugar a:

$$\mathbf{V}_{20} = \frac{\mathbf{Y}_I\mathbf{E}_I + \mathbf{Y}_{II}\mathbf{E}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} \tag{10}$$

y entonces aparece una corriente de circulación interna entre los transformadores que se obtiene haciendo $\mathbf{Y}_L= 0$ en las ecuaciones (9), lo que da lugar a:

$$\mathbf{I}_{I0} = \mathbf{Y}_I\frac{(\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II})\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} \ ; \ \mathbf{I}_{II0} = \mathbf{Y}_{II}\frac{(\mathbf{E}_{II} - \mathbf{E}_I)\mathbf{Y}_I}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} \Rightarrow \mathbf{I}_{I0} = -\mathbf{I}_{II0} = \frac{\mathbf{Y}_I\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}}(\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}) = \frac{\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}}{\mathbf{Z}_I + \mathbf{Z}_{II}} \tag{11}$$

Aplicando la teoría anterior al problema, podemos escribir:

$$\mathbf{E}_I = 440\angle 0°;\ \mathbf{E}_{II} = 450\angle 0°;\ \mathbf{Z}_L = 24 + j10 = 26\angle 22{,}62°;\ \mathbf{Z}_I = 1 + j3 = 3{,}16\angle 71{,}6°;\ \mathbf{Z}_{II} = 1 + j4 = 4{,}12\angle 76°;$$

$$\mathbf{Y}_I = 0{,}316\angle -71{,}6°;\ \mathbf{Y}_{II} = 0{,}243\angle -76°;\ \mathbf{Y}_L = 0{,}0385\angle -22{,}6°;\ \mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} = 0{,}558\angle -73{,}5°\ \mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_L = 0{,}583\angle -70,.$$

y la suma de las impedancias de los transformadores es:

$$\mathbf{Z}_I + \mathbf{Z}_{II} = 2 + j7 = 7{,}28\angle 74{,}1°$$

a) *Tensión y corriente de circulación en vacío.* De acuerdo con (10) y (11) resulta:

$$\mathbf{V}_{20} = \frac{\mathbf{E}_I\mathbf{Y}_I + \mathbf{E}_{II}\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} = \frac{440\cdot 0{,}316\angle -71{,}6° + 450\cdot 0{,}243\angle -76°}{0{,}558\angle -73{,}5°} = 444{,}82\angle 0°$$

$$\mathbf{I}_{I0} = \frac{\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}}{\mathbf{Z}_I + \mathbf{Z}_{II}} = -\mathbf{I}_{II0} = \frac{440-450}{7,28\angle 74,1^\circ} = 1,37\angle 105,9^\circ \text{ amperios}$$

b) *Tensión secundaria en carga.* Esta tensión viene expresada por (8):

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{E}_I\mathbf{Y}_I + \mathbf{E}_{II}\mathbf{Y}_{II}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} + \mathbf{Y}_L} = \frac{440\cdot 0,316\angle -71,6^\circ + 450\cdot 0,243\angle -76^\circ}{0,583\angle -70,5^\circ} = 425,7\angle -3^\circ \text{ V}$$

Obsérvese, de acuerdo con el resultado anterior, que la tensión de salida está retrasada 3° respecto a las f.e.m. secundarias de vacío. La corriente total que absorbe la carga de acuerdo con (7) es:

$$\mathbf{I} = 0,0385\angle -22,6^\circ \cdot 425,7\angle -3^\circ = 16,35\angle -25,6^\circ \text{ A}$$

c) *Corrientes suministradas por ambos transformadores.* De las ecuaciones (3) se obtiene:

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{Y}_I(\mathbf{E}_I - \mathbf{V}_2) = 0,316\angle -71,6^\circ(440\angle 0^\circ - 425,7\angle -3^\circ) = 8,45\angle -16^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{II} = \mathbf{Y}_{II}(\mathbf{E}_{II} - \mathbf{V}_2) = 0,243\angle -76^\circ(450\angle 0^\circ - 425,7\angle -3^\circ) = 8,1\angle -35^\circ \text{ A}$$

Además, los ángulos que forma la tensión secundaria en carga con cada una de las corrientes de los transformadores y los factores de potencia correspondientes son:

$$\varphi_I = 16^\circ - 3^\circ = 13^\circ \Rightarrow \cos\varphi_I = \cos 13^\circ = 0,974 \;;\; \varphi_{II} = 35^\circ - 3^\circ = 32^\circ \Rightarrow \cos\varphi_{II} = \cos 32,1^\circ = 0,848$$

Problema 3.15

Dos transformadores monofásicos trabajan en paralelo y alimentan una carga que absorbe 8 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. El transformador I tiene una potencia asignada de 6 kVA y con una impedancia de cortocircuito reducida al secundario $Z_I = 0,3 + j1,2\ \Omega$ y en vacío produce una tensión secundaria de 404 V. El transformador II tiene una potencia asignada de 4 kVA y una impedancia reducida al secundario $Z_{II} = 0,5 + j1,5\ \Omega$ y en vacío genera una tensión de 396 V. Calcular: a) tensión secundaria en carga; b) corrientes secundarias de cada transformador; c) potencias activas, reactivas y aparentes que entrega cada transformador a la carga; d) ¿resulta sobrecargado algún transformador?

Solución

Este problema tiene algo de dificultad de cálculo debido a que la carga no está definida por una impedancia (como en el caso anterior), sino por una potencia compleja. Resulta conveniente utilizar la expresión (6) del problema anterior para definir la tensión secundaria en carga, es decir:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Y}_I\mathbf{E}_I + \mathbf{Y}_{II}\mathbf{E}_{II} - \mathbf{I}}{\mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II}} \qquad \text{(a)}$$

Esta ecuación debe completarse con la expresión de la potencia compleja absorbida por la carga, que vale:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_2\mathbf{I}^* \;\Rightarrow\; \mathbf{I}^* = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{V}_2} \;\Rightarrow\; \mathbf{I} = \frac{\mathbf{S}^*}{\mathbf{V}_2^*} \qquad \text{(b)}$$

Veamos cómo se aplica esta teoría al problema propuesto:

a) Cálculo de la tensión secundaria en carga:

Los datos son:

$$\mathbf{E}_I = 404\angle 0^\circ;\; \mathbf{E}_{II} = 396\angle 0^\circ;\; \mathbf{Z}_I = 0,3 + j1,2 = 1,237\angle 76^\circ;\; \mathbf{Z}_{II} = 0,5 + j1,5 = 1,58\angle 71,6^\circ$$

por lo que se tiene:

$$\mathbf{Y}_I = \frac{1}{\mathbf{Z}_I} = 0,808\angle -76^\circ \text{ siemens};\; \mathbf{Y}_{II} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{II}} = 0,632\angle -71,6^\circ \text{siemens};\; \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} = 1,44\angle -74^\circ \text{siemens}$$

Valores que al sustituir en (a) nos dan:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{0,808\angle -76^\circ \cdot 404\angle 0^\circ + 0,632\angle -71,6^\circ \cdot 396\angle 0^\circ - \mathbf{I}}{1,44\angle -74^\circ} = 400,3 - 0,694\angle 74^\circ \cdot \mathbf{I}$$

Ahora bien, la carga absorbe una potencia de 8 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, es decir, la potencia compleja es S = 8000+j6000 y teniendo en cuenta la última expresión (b), resulta:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{S}^*}{\mathbf{V}_2^*} = \frac{8000 - j6000}{\mathbf{V}_2^*} = \frac{10000\angle -36,87^\circ}{\mathbf{V}_2^*}$$

y llevando este resultado a la expresión de la tensión secundaria, se llega a:

$$\mathbf{V}_2 = 400,3 - 0,694\angle 74^\circ \frac{10000\angle -36,87^\circ}{\mathbf{V}_2^*} = 400,3 - \frac{6944\angle 37,1^\circ}{\mathbf{V}_2^*} \qquad \text{(c)}$$

La resolución de la ecuación requiere un poco de atención. Si se expresa la tensión compleja secundaria en forma binómica o rectangular se puede escribir:

$$\mathbf{V}_2 = a + jb \;\Rightarrow\; \mathbf{V}_2^* = a - jb \;\Rightarrow\; \mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2^* = a^2 + b^2 \qquad \text{(d)}$$

y al sustituir en (c) da lugar a:

$$\mathbf{V}_2 \bullet \mathbf{V}_2^* = 400,3\mathbf{V}_2^* - 6944\angle 37,1^\circ \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = 400,3(a - jb) - 6944\angle 37,1^\circ$$

e, igualando en la ecuación anterior partes reales e imaginarias, se obtienen las expresiones siguientes:

$$a^2 + b^2 = 400,3a - 5538,4 \;\;;\;\; 400,3b = -4188,7$$

que dan lugar a los siguientes valores: $b = -10,5$; $a = 385,7$ y $a = 15,7$ voltios. Este último resultado es absurdo, por lo que la expresión compleja de la tensión secundaria de acuerdo con la primera expresión (d) es:

$$\mathbf{V}_2 = 385,7 - j10,5 = 385,8\angle -1,6^\circ \text{ voltios}$$

b) Corrientes secundarias:

Sustituyendo el valor anterior en las expresiones (3) del problema anterior, las corrientes que suministran ambos transformadores son:

$$\mathbf{I}_I = 0,808\angle -76^\circ(404\angle 0^\circ - 385,8\angle -1,6^\circ) = 17,1\angle -46^\circ \text{ amperios}$$

$$\mathbf{I}_{II}=0{,}632\angle-71{,}6°(396\angle 0°-385{,}8\angle-1{,}6°)\approx 9{,}3\angle-26° \text{ amperios}$$

c) Potencias complejas:

$$\mathbf{S}_{I}=385{,}8\angle-1{,}6°\bullet 17{,}1\angle-46° \approx 6596\angle 44{,}4°\approx 4713+j4616$$

$$\mathbf{S}_{II}=385{,}8\angle-1{,}6°\bullet 9{,}3\angle 26°\approx 3588\angle 24{,}4°\approx 3268+j1482$$

que corresponden a una potencia compleja total:

$$\mathbf{S}_{ltotal}=6596\angle 44{,}4°+3588\angle 24{,}4°=7981+j6098\approx 8000+j6000$$

cuya aproximación se debe a errores de redondeo.

d) De acuerdo con el resultado del apartado anterior, el primer transformador entrega una potencia aparente a la carga de 6596 VA≈ 6,6 kVA y al tener una potencia asignada de 6 kVA resultará sobrecargado un 10%. El segundo transformador entrega una potencia aparente a la carga de 3588 VA que es inferior a la potencia aparente asignada de 4 kVA.

Problema 3.16

Dos transformadores monofásicos funcionan en paralelo y alimentan una carga que absorbe 15 kW con f.d.p. 0,9 inductivo. El transformador I tiene los valores asignados siguientes: S_I=10 kVA; 990/500 V, Z_I=0,3+j0,4 Ω (impedancia reducida al secundario), mientras que los valores asignados del transformador II son: S_{II}=20 kVA; 1000/490 V, Z_I=0,2+j0,3 Ω (impedancia reducida al secundario). Sabiendo que la tensión en bornes de la carga es de 480 V, calcular: a) tensión necesaria en el primario de los transformadores; b) corrientes secundarias de cada transformador; c) potencias aparentes, activas y reactivas que suministran cada transformador.

Solución

Este problema es otra versión de acoplamientos en paralelo de transformadores que completa los dos problemas anteriores. Sabemos que las corrientes suministradas por dos transformadores en paralelo son de la forma:

$$\mathbf{I}_I=\mathbf{Y}_I(\mathbf{E}_I-\mathbf{V}_2)\ ;\ \mathbf{I}_{II}=\mathbf{Y}_{II}(\mathbf{E}_{II}-\mathbf{V}_2) \tag{1}$$

pero en este caso las tensiones de vacío no se expresan directamente, sino que vienen definidas por las relaciones de transformación. Si se denomina a estas por m_I y m_{II} se puede escribir:

$$\mathbf{E}_I=\frac{\mathbf{V}_1}{m_I}\ ;\ \mathbf{E}_{II}=\frac{\mathbf{V}_1}{m_{II}} \tag{2}$$

y teniendo en cuenta que la corriente total de la carga es igual a:

$$\mathbf{I}=\mathbf{I}_I+\mathbf{I}_{II} \tag{3}$$

al sustituir (1) y (2) en (3) da lugar a:

$$\mathbf{I}=\mathbf{I}_I+\mathbf{I}_{II}=\mathbf{Y}_I\frac{\mathbf{V}_1}{m_I}+\mathbf{Y}_{II}\frac{\mathbf{V}_1}{m_{II}}-\mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_I+\mathbf{Y}_{II}) \tag{4}$$

o de un modo equivalente:

$$\mathbf{I}=\mathbf{V}_1\left(\frac{\mathbf{Y}_I}{m_I}+\frac{\mathbf{Y}_{II}}{m_{II}}\right)-\mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_I+\mathbf{Y}_{II}) \tag{5}$$

expresión que permite obtener la tensión primaria necesaria en el acoplamiento:

$$\mathbf{V}_1=\frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_I+\mathbf{Y}_{II})+\mathbf{I}}{\dfrac{\mathbf{Y}_I}{m_I}+\dfrac{\mathbf{Y}_{II}}{m_{II}}} \tag{6}$$

a) En este problema se tiene:

$$m_I=\frac{990}{500}=1{,}98\ ;\ \mathbf{Z}_I=0{,}3+j0{,}4=0{,}5\angle 53{,}13°\,\Omega\ ;\ \mathbf{Y}_I=\frac{1}{\mathbf{Z}_I}=2\angle-53{,}13° \text{ siemens}$$

$$m_{II}=\frac{1000}{490}=2{,}041\ ;\ \mathbf{Z}_{II}=0{,}2+j0{,}3=0{,}361\angle 56{,}31°\,\Omega\ ;\ \mathbf{Y}_{II}=\frac{1}{\mathbf{Z}_{II}}=2{,}774\angle-56{,}31° \text{ siemens}$$

Si se toma la tensión secundaria como referencia de fases, se tiene $\mathbf{V}_2$=480∠0° y por lo tanto la corriente total que suministran los transformadores es:

$$I=\frac{P}{V_2\cos\varphi}=\frac{15000}{480\cdot 0{,}9}=34{,}72 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I}=34{,}72\angle-25{,}84° \text{ A}$$

y aplicando la ecuación (6) resulta:

$$\mathbf{V}_1=\frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_I+\mathbf{Y}_{II})+\mathbf{I}}{\dfrac{\mathbf{Y}_I}{m_I}+\dfrac{\mathbf{Y}_{II}}{m_{II}}}=\frac{480\angle 0°(2\angle-53{,}13°+2{,}774\angle-56{,}31°)+34{,}72\angle-25{,}84°}{\dfrac{2\angle-53{,}13°}{1{,}98}+\dfrac{2{,}774\angle-56{,}31°}{2{,}041}}\approx 979{,}8\angle 0{,}4° \text{ V}$$

es decir, se requiere una tensión primaria de 979,8 voltios.

b) De acuerdo con (2) se tienen unas f.e.m.s secundarias en vacío:

$$\mathbf{E}_I=\frac{\mathbf{V}_1}{m_I}=\frac{979{,}8\angle 0{,}4°}{1{,}98}\approx 494{,}85\angle 0{,}4°\ ;\ \mathbf{E}_{II}=\frac{\mathbf{V}_1}{m_{II}}=\frac{979{,}8\angle 0{,}4°}{2{,}041}\approx 480{,}06\angle 0{,}4° \text{ V}$$

y de acuerdo con (1), dan lugar a las siguientes corrientes:

$$\mathbf{I}_I=2\angle-53{,}13°(494{,}85\angle 0{,}4°-480\angle 0°)\approx 30{,}5\angle-40° \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{II}=2{,}774\angle-56{,}31°(480{,}06\angle 0{,}4°-480\angle 0°)\approx 9{,}4\angle+32° \text{ A}$$

Al comprobar el resultado se tiene:

$$\mathbf{I}=\mathbf{I}_I+\mathbf{I}_{II}\angle 30{,}5\angle-40°+9{,}4\angle+32°\approx 34{,}6\angle-25° \text{ A}$$

que es prácticamente la corriente de carga y los errores se deben a los redondeos de las operaciones.

c) Las potencias complejas que entregan cada transformador a la carga son, respectivamente:

$$\mathbf{S}_I=\mathbf{V}_2\mathbf{I}_I^*=480\angle 0°\cdot 30{,}5\angle 40°=14640\angle 40°=11215+j9410$$

$$\mathbf{S}_{II}=\mathbf{V}_2\mathbf{I}_{II}^*=480\angle 0°\cdot 9{,}4\angle-32°=4512\angle-32°\approx 3825-j2390$$

que corresponden a una potencia total S = 15040 + j7020. (En realidad la potencia compleja total debe ser S = 15000 + j7265, que corresponde a una potencia activa de 15 kW con f.d.p. 0,9 inductivo y estas diferencias se deben a errores de redondeo). Se advierte al lector que en este tipo de problemas es necesario trabajar con varios decimales para evitar errores numéricos, lo que se debe a la pequeña diferencia entre las f.e.m. y las tensiones.

Problema 3.17

Un transformador monofásico de 500 kVA, 15000/3000 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 15000 V; 1,67 A; 4000 W (medidos en el lado de A.T.); cortocircuito: 750 V; 33,33 A; 10000 W (medidos en el lado de A.T.). a) Calcular los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario; b) calcular las caídas relativas de tensión ε_{Rcc}, ε_{Xcc}, ε_{cc}; c) hallar el rendimiento del transformador, cuando funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; d) Calcular la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador y el rendimiento máximo para un f.d.p. unidad; e) si se aplican 15000 V al primario y se conecta una carga en el secundario que absorbe 100A con f.d.p. 0,8 inductivo ¿cuál será el valor de la tensión secundaria?, ¿y la caída relativa de tensión?; f) contestar a la pregunta anterior en el caso de que la carga absorba los 100 A con f.d.p. 0,8 capacitivo; g) si se produce un cortocircuito en el secundario del transformador, ¿cuál sería el valor de la corriente primaria en régimen permanente?; h) se acopla en paralelo este transformador con otro de potencia doble, con la misma relación de la transformación 15000/3000 V y la misma caída relativa ε_{cc} pero su componente resistiva ε_{Rcc} es la mitad que la del transformador original, si se desea alimentar una potencia total de 1000 kVA, con f.d.p. 0,6 inductivo, ¿cuáles serán los valores de las potencias activas y aparentes suministradas por cada transformador?, ¿cuáles serían los rendimientos de ambos transformadores en este caso, si el segundo de ellos tiene una potencia de pérdidas en el hierro de 6 kW?

Solución

a) Del ensayo en vacío del transformador, se obtienen las siguientes conclusiones:

$$4000 = 15000 \cdot 1{,}67 \cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_0 = 0{,}16 \;\; ; \;\; \operatorname{sen}\varphi_0 = 0{,}987$$

por lo que la corriente de pérdidas en el hierro y la resistencia correspondiente son:

$$I_{Fe} = 1{,}67 \cdot 0{,}16 = 0{,}267 \text{ A} \;\; ; \;\; R_{Fe} = \frac{15000}{0{,}267} = 56{,}18\text{k } \Omega$$

y la corriente de imanación y la reactancia magnetizante correspondientes son:

$$I_\mu = 1{,}67 \cdot 0{,}987 = 1{,}648 \text{ A} \;\; ; \;\; X_\mu = \frac{15000}{1{,}648} = 9{,}1\text{k } \Omega$$

además, la relación de transformación vale:

$$m = \frac{15000}{3000} = 5$$

Del ensayo de cortocircuito se obtienen las siguientes conclusiones:

$$V_{1cc} = 750 \text{ V} \;\; ; \;\; I_{1cc} = 33{,}33 \text{ A} \Rightarrow 10000 = 750 \cdot 33{,}33 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0{,}4 \;\; ; \;\; \operatorname{sen}\varphi_{cc} = 0{,}917$$

y por lo tanto, resulta:

$$Z_{cc} = \frac{750}{33{,}33} = 22{,}5 \; \Omega \Rightarrow R_{cc} = 22{,}5 \cdot 0{,}4 = 9 \; \Omega \;\; ; \;\; X_{cc} = 22{,}5 \cdot 0{,}917 = 20{,}63 \; \Omega$$

b) La corriente primaria nominal o asignada al primer transformador es igual a:

$$I_{1n} = \frac{S_N}{V_{1N}} = \frac{500000}{15000} = 33{,}33 \text{ A}$$

por lo que las caídas relativas de tensión son:

$$\varepsilon_{Rcc} = \frac{R_{cc} I_{1n}}{V_{1n}} = \frac{9 \cdot 33{,}33}{15000} = 2\% \;\; ; \;\; \varepsilon_{xcc} = \frac{20{,}63 \cdot 33{,}33}{15000} = 4{,}58\% \;\; ; \;\; \varepsilon_{cc} = \sqrt{2^2 + 4{,}58^2} = 5\%$$

c) El rendimiento del transformador en estas condiciones será:

$$\eta = \frac{500000 \cdot 0{,}8}{500000 \cdot 0{,}8 + 4000 + 10000} = \frac{400}{400 + 4 + 10} = \frac{400}{414} = 96{,}62\%$$

d) El índice de carga óptimo del transformador es:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{4}{10}} = 0{,}632$$

y por lo tanto la potencia de máximo rendimiento es:

$$S_{\eta\,max} = 0{,}632 \cdot 500 = 316{,}22 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad vale:

$$\eta = \frac{316{,}22 \cdot 1}{316{,}22 \cdot 1 + 2 \cdot 4} = 97{,}52\%$$

e) Al aplicar la aproximación de Kapp se puede escribir:

$$15000 = mV_2 + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \operatorname{sen}\varphi$$

donde se cumple: $I_2 = 100$ A, es decir $I_2' = \frac{100}{5} = 20$ A, y al ser el f.d.p. 0,8 inductivo resulta:

$$15000 = 5V_2 + 9 \cdot 20 \cdot 0{,}8 + 20{,}63 \cdot 20 \cdot 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 2921{,}7 \text{ voltios}$$

que corresponde a una caída relativa de tensión:

$$\varepsilon = \frac{V_1 - mV_2}{V_1} = \frac{15000 - 5 \cdot 2921{,}7}{15000} = 2{,}61\%$$

f) Si el f.d.p. es 0,8 capacitivo, se puede despejar el valor de V_2 a partir de la expresión de Kapp:

$$15000 = 5V_2 + 9 \cdot 20 \cdot 0{,}8 - 20{,}63 \cdot 20 \cdot 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 3020{,}71 \text{ voltios}$$

que corresponde a una caída relativa de:

$$\varepsilon = \frac{15000 - 5 \cdot 30{,}20{,}71}{15000} = -0{,}69\%$$

g) El valor de la corriente primaria de cortocircuito es:

$$I_{1cc} = \frac{V_{1n}}{Z_{cc}} = \frac{15000}{22{,}5} = 666{,}66 \text{ A}$$

h) El primer transformador tiene los siguientes parámetros:

$$\varepsilon_{ccI} = 5\% \;\; ; \;\; \varepsilon_{RccI} = 2\% \;\; ; \;\; \varepsilon_{xccI} = 4{,}58\%$$

y el segundo tiene los valores siguientes:

$$\varepsilon_{ccII} = 5\% \quad ; \quad \varepsilon_{RccII} = 1\% \quad ; \quad \varepsilon_{xccII} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 4,9\%$$

y como la potencia del segundo transformador es $S_{II} = 1000$ kVA, la corriente de plena carga primaria es:

$$\left[I_{1n}\right]_{II} = \frac{100000}{15000} = 66,66 \text{ A}$$

lo que conduce a los siguientes parámetros de cortocircuito:

$$\varepsilon_{RccII} = 0,01 = \frac{R_{ccII} \cdot 66,66}{15000} \Rightarrow R_{ccII} = 2,25\ \Omega \ ; \ \varepsilon_{xccII} = 0,049 = \frac{X_{ccII} 66,66}{15000} \Rightarrow X_{ccII} = 11,03\ \Omega$$

La potencia que deben suministrar ambos transformadores trabajando en paralelo es de 1000 kVA, por lo que la corriente correspondiente reducida a primario es:

$$I = \frac{1000000}{15000} = 66,66 \text{ A}$$

que al tomar la tensión como referencia corresponde a un valor complejo, al ser el f.d.p. 0,6 inductivo:

$$\mathbf{I} = 66,66\angle -53,13° \text{ A}$$

y al funcionar ambos transformadores en paralelo, se cumplirán las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 66,66\angle -53,13° \quad ; \quad (9 + j20,63)\mathbf{I}_I = (2,25 + j11,03)\mathbf{I}_{II}$$

cuyos resultados son:

$$\mathbf{I}_I = 22,33\angle -45,1° \text{ A} \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = 44,66\angle -57,13° \text{ A}$$

y de este modo la potencia compleja suministrada por el primer transformador es:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2'\mathbf{I}_I^* = 15000 \cdot 22,33\angle 45,1° = 334 \cdot 95\angle 45,1° \text{ kVA}$$

que corresponde a las siguientes potencias:

$$P_I = 236,43 \text{ kW} \quad ; \quad Q_I = 237,26 \text{ kVAr} \quad ; \quad S_I = 334,95 \text{ kVA}$$

y para el segundo transformador se tiene una potencia compleja:

$$\mathbf{S}_{II} = 15000 \cdot 44,66\angle 57,13° = 669,9\angle 57,13° \text{ kVA}$$

que corresponde a las potencias:

$$P_{II} = 363,57 \text{ kW} \quad ; \quad Q_{II} = 562,64 \text{ kVAr} \quad ; \quad S_{II} = 669,9 \text{ kVA}$$

y los rendimientos de los transformadores serán:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,486}{\sqrt{0,673^2 + 5,03^2}} = 0,0958 \quad ; \quad \eta_{II} = \frac{363,57}{363,57 + 6 + 2,25 \cdot 44,66^2} = 97,09\%$$

Problema 3.18

Los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador monofásico de 10 kVA, relación 2000/200 V han dado los siguientes resultados:

Vacío: Medidas realizadas en el lado de B.T. (secundario). Potencia consumida en vacío = 300 W; tensión aplicada = 200 V; corriente absorbida = 5 amperios.

Cortocircuito: medidas realizadas en el lado de A.T. (primario). Potencia absorbida = 500 W; tensión aplicada = 140 V; corriente absorbida = asignada.

Determinar: a) parámetros del circuito equivalente aproximado por fase del transformador reducido al primario; b) Si se conecta el primario del transformador a una red monofásica de 2000 V, y el secundario alimenta una carga que consume 45 amperios con f.d.p. 0,8 capacitivo, determinar la tensión secundaria que se obtiene a la salida del transformador y el rendimiento de la máquina en estas condiciones; c) calcular la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad.

Solución

a) El ensayo de vacío está realizado en el secundario, por ello, en primer lugar, se han de pasar los resultados de este ensayo al lado primario, teniendo en cuenta que la relación de transformación es: m = 2000/200 = 10. De este modo las medidas en primario serían:

$$P_0 = 300 \text{ W} \quad ; \quad V_1 = mV_2 = 10 \cdot 200 = 2000 \text{ V} \quad ; \quad I_0 = \frac{I_0'}{m} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ A}$$

y de este modo resulta:

$$300 = 2000 \cdot 0,5\cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0,3 \quad ; \quad \text{sen}\varphi_0 = 0,954$$

que corresponde a unas corrientes:

$$I_{Fe} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 \text{ A} \quad ; \quad I_\mu = 0,5 \cdot 0,954 = 0,477 \text{ A}$$

y por lo tanto la rama paralelo del circuito equivalente está formada por los elementos siguientes:

$$R_{Fe} = \frac{2000}{0,15} = 13,33 \text{ k}\Omega \quad ; \quad X_\mu = \frac{2000}{0,477} = 4,19 \text{ k}\Omega$$

El ensayo de cortocircuito está definido ya en primario, por lo que se pueden utilizar los datos medidos directamente, teniendo en cuenta que la corriente nominal del primario es I_{1n}= 10000/2000= 5 A y así resulta:

$$P_{cc} = 500 = 140 \cdot 5\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,714 \quad ; \quad \text{sen}\varphi_{cc} = 0,7$$

y por lo tanto se obtiene:

$$Z_{cc} = \frac{140}{5} = 28\ \Omega \quad ; \quad R_{cc} = 28 \cdot 0,714 = 20\ \Omega \quad ; \quad X_{cc} = 28 \cdot 0,7 = 19,6\ \Omega$$

b) Los datos en este caso son los siguientes:

$$V_1 = 2000 \text{ V} \quad ; \quad I_2 = 45 \text{ A} \quad ; \quad I_2' = \frac{45}{m} = \frac{45}{10} = 4,5 \text{ A} \quad ; \quad \cos\varphi = 0,8 \text{ capacitivo}$$

y teniendo en cuenta la aproximación de Kapp, se puede escribir:

$$V_1 = mV_2 + R_{cc}I_2'\cos\varphi + X_{cc}I_2'\text{sen}\varphi$$

que al sustituir los valores anteriores (teniendo en cuenta que al ser el f.d.p. capacitivo el seno es negativo) da lugar a:

$$2000 = 10V_2 + 20 \cdot 4,5 \cdot 0,8 - 19,6 \cdot 4,5 \cdot 0,6 \Rightarrow V_2 = 198,09 \text{ V} \Rightarrow V_2' = 19809 \text{ voltios}$$

El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

donde P_2 es la potencia que entrega el secundario y P_1 la potencia que recibe el primario y cuyos valores son:

$$P_2 = V_2' I_2' \cos\varphi = 19809 \cdot 4,5 \cdot 0,8 = 7131,2 \text{ W}$$

$$P_1 = P_2 + P_{Fe} + P_m = 7131,2 + 300 + 20 \cdot 4,5^2 = 7836,2 \text{ W}$$

lo que conduce a un rendimiento:

$$\eta = \frac{7131,2}{9836,2} = 91\%$$

c) El índice de carga óptimo vale:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{300}{500}} = 0,775$$

por lo que la potencia aparente de máximo rendimiento es:

$$S_{\eta_{max}} = 0,775 \cdot 10 = 7,75 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad es:

$$\eta = \frac{7,75}{7,75 + 0,3 \cdot 2} = \frac{7,75}{8,35} = 92,81\%$$

ya que cuando el transformador trabaja con la potencia de máximo rendimiento las pérdidas en el cobre para esa carga coinciden con las del hierro o de vacío.

Problema 3.19

Un transformador monofásico de 200 kVA, relación 2000/200 V, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y cortocircuito: vacío: 200 V; 100 A; 5000 W (medidos en el lado de B.T.); cortocircuito: 200 V; 100 A; 7000 W (medidos en el lado de A.T.). Calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; b) si se alimenta el primario con una red de 2000 V y el secundario lleva una corriente de 800 A, con f.d.p. 0,8 inductivo, ¿cuál será la tensión en bornes del secundario y el rendimiento del transformador en estas condiciones?; c) si estando alimentado el primario con una red de 2.000 V, se conecta en el secundario una carga constituida por una resistencia de 0,3 ohmios en serie con una reactancia capacitiva de 0,4 ohmios (es decir, una impedancia compleja Z = 0,3–j 0,4 ohmios), ¿cuál será el valor de la tensión en bornes del secundario (efecto Ferranti)?, ¿cuál será el valor de la corriente primaria? Téngase en cuenta la rama en paralelo del circuito equivalente del transformador, para contestar a esta última pregunta.

Solución

a) La relación de transformación es:

$$m = \frac{2000}{200} = 10$$

y pasando las medidas del ensayo de vacío al lado primario se tiene:

$$V_1 = mV_2 = 10 \cdot 200 = 2000 \text{ V} \; ; \; I_0 = \frac{100}{m} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A} \; ; \; P_0 = 5000 \text{ W}$$

por lo que resulta:

$$5000 = 2000 \cdot 10 \cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0,25 \; ; \; \operatorname{sen}\varphi_0 = 0,968$$

de donde se deducen las corrientes de la rama paralelo:

$$I_{Fe} = 10 \cdot 0,25 = 2,5 \text{ A} \; ; \; I_\mu = 10 \cdot 0,968 = 9,68 \text{ A}$$

y los parámetros correspondientes:

$$R_{Fe} = \frac{2000}{2,5} = 800 \; \Omega \; ; \; X_\mu = \frac{2000}{9,68} = 206,61 \; \Omega$$

El ensayo en cortocircuito está realizado en el lado de A.T, que es el lado primario y los valores medidos son:

$$V_{1corto} = 200 \text{ V} \; ; \; I_{1corto} = 100 \text{ A} \; ; \; P_{corto} = 7000 \text{ W}$$

Se observa que la corriente de cortocircuito es la nominal:

$$I_{1n} = \frac{S_N}{V_{1n}} = \frac{200000}{2000} = 100 \text{ A}$$

por lo que resulta:

$$7000 = 200 \cdot 100 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,35 \; ; \; \operatorname{sen}\varphi_{cc} = 0,937$$

de donde se obtienen las impedancias de la rama serie del circuito equivalente:

$$Z_{cc} = \frac{200}{100} = 2 \; \Omega \; ; \; R_{cc} = 2 \cdot 0,35 = 0,7 \; \Omega \; ; \; X_{cc} = 2 \cdot 0,937 = 1,873 \; \Omega$$

b) Los datos de funcionamiento son:

$$I_2 = 800 \text{ A} \; ; \; \cos\varphi = 0,8 \text{ inductivo} \Rightarrow I_2' = \frac{I_2}{m} = \frac{800}{10} = 80 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta la fórmula aproximada de Kapp:

$$V_1 = V_2' + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \operatorname{sen}\varphi$$

resulta:

$$2000 = V_2' + 0,7 \cdot 80 \cdot 0,8 + 1,873 \cdot 80 \cdot 0,6 \Rightarrow V_2' = 1865,3 \text{ V} \Rightarrow V_2 = \frac{V_2'}{m} = \frac{1865,3}{10} = 186,53 \text{ V}$$

El rendimiento en esta situación será:

$$\eta = \frac{V_2' I_2' \cos\varphi}{V_2' I_2' \cos\varphi + P_{Fe} + P_{cu}} = \frac{1865,3 \cdot 80 \cdot 0,8}{1865,3 \cdot 80 \cdot 0,8 + 5000 + 0,7 \cdot 80^2} = 92,64\%$$

c) La impedancia compleja de la carga transferida al lado primario es:

$$m^2 Z_L = 10^2(0,3 - j0,4) = 30 - j40 = Z_L' = 50\angle -53,13^\circ\ \Omega$$

y tomando la tensión del primario como referencia de fases, se obtiene una corriente secundaria reducida al primario de valor:

$$\mathbf{I}_2' = \frac{2000\angle 0^\circ}{(0,7 + j1,873) + (30 - j40)} = \frac{2000\angle 0^\circ}{30,7 - j38,127} = \frac{2000\angle 0^\circ}{48,95\angle -51,16^\circ} = 40,86\angle 51,16^\circ \text{ amperios}$$

y de este modo se tiene:

$$\mathbf{V}_2' = m^2 Z_L I_2' = 50\angle -53,13^\circ \cdot 40,86\angle 51,16^\circ = 2043\angle -1,97^\circ \;\Rightarrow\; V_2' = 2043 = mV_2 = 10V_2 \;\Rightarrow\; V_2 = 204,3 \text{ V}$$

y la corriente primaria será:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2' = (2,5 - j9,68) + (25,63 + j31,83) = 28,13 + j22,15 = 35,8\angle 38,22^\circ \;\Rightarrow\; I_1 = 35,8 \text{ A}$$

Problema 3.20

Un transformador monofásico de 160 kVA, relación 2000/200 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 2000 V; 1 A; 1000 W (medidos en el lado de alta tensión); cortocircuito: 8 V ; $I_{corto} = I_{asignada}$; 2560 W (medidos en el lado de B.T.). Calcular: a) Circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (indicando los valores de los parámetros de este circuito que se obtienen de los ensayos); b) si se aplica la tensión asignada al primario, ¿cuál será la tensión secundaria, cuando el transformador suministre una corriente secundaria de 400 A con f.d.p. 0,8 inductivo, ¿cuánto vale el rendimiento del transformador en este caso?; c) ¿cuánto vale la potencia aparente de máximo rendimiento y el rendimiento máximo con f.d.p. 0,8 capacitivo?; d) ¿cuál será la regulación o caida de tensión relativa del transformador en el caso anterior?

Solución

a) El ensayo de vacio está realizado en el lado de A.T., que es el lado primario, y los resultados de las medidas son:

$$V_1 = 2000 \text{ V} \;;\; I_0 = 1\text{A} \;;\; P_0 = 1000 \text{ W}$$

por lo que resulta:

$$1000 = 2000 \cdot 1 \cdot \cos\varphi_0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi_0 = 0,5 \;;\; \text{sen}\varphi_0 = 0,866$$

que da lugar a las corrientes:

$$I_{Fe} = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ A} \;;\; I_\mu = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ A}$$

y las impedancias de la rama paralelo:

$$R_{Fe} = \frac{2000}{0,5} = 4000\ \Omega \;;\; X_\mu = \frac{2000}{0,866} = 2309,5\ \Omega$$

El ensayo de cortocircuito está realizado en el lado de B.T. que es el secundario, por lo que teniendo en cuenta que la relación de transformación es m = 2000/200 = 10, al pasar los resultados del ensayo al lado primario se obtiene:

$$V_{1cc} = mV_{2cc} = 8 \cdot 10 = 80 \text{ V} \;;\; I_{1corto} = I_{1n} = \frac{S_N}{V_{1n}} = \frac{160000}{2000} = 80 \text{ A} \;;\; P_{cc} = 2560 \text{ W}$$

lo que da lugar a los siguientes resultados:

$$2560 = 80 \cdot 80 \cos\varphi_{cc} \;\Rightarrow\; \cos\varphi_{cc} = 0,4 \;;\; \text{sen}\varphi_{cc} = 0,9165 = 0,917$$

y a las impedancias:

$$Z_{cc} = \frac{80}{80} = 1\ \Omega \;;\; R_{cc} = Z_{cc}\cos\varphi_{cc} = 0,4\ \Omega \;;\; X_{cc} = Z_{cc}\text{sen}\varphi_{cc} = 0,917\ \Omega$$

b) En este caso, los datos de partida son:

$$V_1 = 2000 \text{ V} \;;\; I_2 = 400 \text{ A} \;\Rightarrow\; I_2' = \frac{400}{10} = 40 \;;\; \text{f.d.p. } 0,8 \text{ inductivo}$$

y al sustituir estos datos en la fórmula de Kapp se obtiene:

$$2000 = V_2' + 0,4 \cdot 40 \cdot 0,8 + 0,917 \cdot 40 \cdot 0,6 \;\Rightarrow\; V_2' = 1965,2\text{V} \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{V_2'}{m} = 196,52 \text{ V}$$

y el rendimiento correspondiente es:

$$\eta = \frac{V_2' I_2' \cos\varphi}{V_2' I_2' \cos\varphi + P_0 + R_{cc} I_2'^2} = \frac{1965,2 \cdot 4 \cdot 0,8}{1965,2 \cdot 40 \cdot 0,8 + 1000 + 0,4 \cdot 40^2} = 97,46\%$$

c) El índice de carga óptimo es:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{1000}{2560}} = 0,625$$

por lo que la potencia aparente de máximo rendimiento será:

$$S_{\eta\,max} = 0,625 \cdot 160 = 100 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. 0,8 capacitivo:

$$\eta_{max} = \frac{CS_N \cos\varphi}{CS_N \cos\varphi + 2P_0} = \frac{100 \cdot 0,8}{100 \cdot 0,8 + 2 \cdot 1} = \frac{80}{82} = 97,56\%$$

d) La corriente secundaria cuando el transformador trabaja con máximo rendimiento es:

$$I_2 = \frac{S_{\eta\,max}}{V_{2n}} = \frac{100000}{200} = 500\text{A} \;\Rightarrow\; I_2' = 50 \text{ A}$$

por lo que la caída de tensión que se tiene viene expresada por:

$$V_1 - V_2' = R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \text{sen}\varphi = 0,4 \cdot 50 \cdot 0,8 - 0,917 \cdot 50 \cdot 0,6 = -11,51 \text{ voltios}$$

y es por ello que la caída de tensión relativa vale:

$$\varepsilon_c = \frac{V_1 - V_2'}{V_1} = \frac{-11,56}{2000} = -0,5755\%$$

Problema 3.21

Un transformador trifásico de 2000 kVA, 6600/33000 V tiene un primario conectado en triángulo y un secundario en estrella. La impedancia de cada fase del primario es 0,5 + j 2,6 Ω y la correspondiente del secundario es de 4,3 + j 21,7 Ω. Calcular la tensión en bornes del secundario a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo cuando el primario se conecta a la tensión asignada de 6600 V.

Solución

a) Primer método: utilización de las conexiones reales del transformador (Figura 3.3).

Los problemas de transformadores trifásicos se pueden resolver atendiendo a su estructura física calculando todos los valores por fase, es decir, atendiendo a lo que sucede en una columna magnética de la máquina. La relación de transformación es el cociente de las f.e.m. por fase del primario y secundario, lo que en este caso da lugar a:

$$m = \frac{E_{1fase}}{E_{2fase}} = \frac{V_{1fase}(\text{vacío})}{V_{2fase}(\text{vacío})} = \frac{6600}{33000/\sqrt{3}} = 0,3564$$

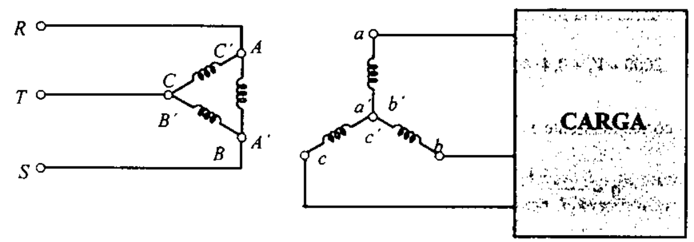


Figura 3.3

y de este modo la impedancia de cortocircuito por fase del transformador es:

$$Z_{cc} = Z_1 + m^2 Z_2 = (0,5 + j2,6) + 0,3464^2(4,3 + j21,7) = 1,016 + j5,204\ \Omega$$

y al aplicar la expresión aproximada de Kapp por fase resulta:

$$V_{1fase} = 6600 = V_2' + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \operatorname{sen}\varphi$$

La corriente de plena carga por fase del secundario del transformador es igual a:

$$I_{2fase} = I_{2línea} = \frac{S_N}{\sqrt{3}V_{2lin}} = \frac{2000000}{\sqrt{3}33000} = 35 \text{ amperios}$$

que corresponde a una corriente reducida al primario:

$$I_2' = I_{2fase}' = \frac{I_{2fase}}{m} = \frac{35}{0,3464} = 101 \text{ A}$$

que al sustituir en la fórmula de Kapp nos da:

$$V_{1fase} = 6600 = 0,4464 \cdot V_{2fase} + 1,016 \cdot 101 \cdot 0,8 + 5,204 \cdot 101 \cdot 0,6$$

dando lugar a una tensión $V_{2fase} = 17905,73$ V

que, al estar conectado el secundario en estrella corresponde a una tensión de línea:

$$V_{2línea} = 17905,73\sqrt{3} = 31013,6 \text{ V} = 31014 \text{ V}$$

b) Segundo método: utilización de un transformador estrella-estrella equivalente (Figura 3.4).

Se puede resolver también este problema haciendo los cálculos por fase, transformando los devanados reales del transformador a conexiones en estrella equivalente y teniendo en cuenta la reglas de cambio de triángulo a estrella que se utilizan en el estudio de los circuitos trifásicos. En nuestro caso el primario está conectado en triángulo y la impedancia equivalente es, por consiguiente:

$$Z_{1Y} = \frac{Z_{1\Delta}}{3} = \frac{0,5 + j2,6}{3} = 0,167 + j0,867\ \Omega$$

mientras que la impedancia del devanado secundario, al estar conectado en estrella, es:

$$Z_{2Y} = 4,3 + j21,7\ \Omega$$

La relación de transformación de este *transformador equivalente estrella-estrella*, al tener las mismas conexiones de primario y secundario, es el cociente tanto de las f.e.m. simples de primario y secundario como de las tensiones compuestas, y vale:

$$m' = \frac{E_{1fase}}{E_{2fase}} = \frac{6600/\sqrt{3}}{33000/\sqrt{3}} = 0,2$$

por consiguiente la impedancia de cortocircuito de este transformador equivalente vale:

$$Z_{cc} = Z_1 + m^2 Z_2 = (0,167 + j0,867) + 0,2^2(4,3 + j21,7) = 0,34 + j1,735\ \Omega$$

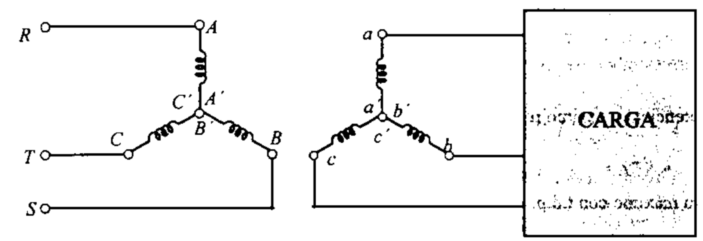


Figura 3.4

y los datos de funcionamiento eran:

$$V_{1fase} = 6600/\sqrt{3} \ ; \ I_{2fase} = 35 \text{ amperios} \Rightarrow I_2' = I_{2fase}' = \frac{I_{2fase}}{m'} = \frac{35}{0,2} = 175 \text{ A}$$

y al aplicar la expresión aproximada de Kapp resulta:

$$V_{1fase} = 6600/\sqrt{3} = 0,2 \cdot V_{2fase} + 0,34 \cdot 175 \cdot 0,8 + 1,735 \cdot 175 \cdot 0,6$$

que da lugar a: $V_{2fase} = 17903,7$ V $\Rightarrow V_{2línea} = 17903,7\sqrt{3} = 31010$ V, que salvo errores de redondeo coincide con el procedimiento anterior.

Obsérvese que el primer procedimiento analiza cada columna magnética (fases o bobinas del transformador real) lo que requiere seguir el proceso de cálculo con sumo cuidado pues las relaciones de tensiones y corrientes dependen de estas conexiones reales. El segundo método que utiliza la conexión estrella-estrella equivalente suele ser motivo de menor confusión por los estudiantes y se acerca más al procedimiento que se sigue en el análisis de los sistemas eléctricos de potencia, cuando se trabaja en valores de las magnitudes eléctricas por unidad y es por ello que será el procedimiento que a partir de ahora se segiga en la resolución de problemas de transformadores trifásicos.

Problema 3.22

Se han realizado unos ensayos en un transformador trifásico de 100 kVA, 400/6600 V, 50 Hz, conexión estrella-triángulo, dando los siguientes resultados: vacío: 400 V, 1250 W (datos medidos en el lado de B.T.); cortocircuito: 314 V, corriente de plena carga, 1600 W (datos medidos en el lado de A.T.). Calcular: a) rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; b) rendimiento a media carga con f.d.p. unidad c) potencia aparente de máximo rendimiento y rendimiento máximo con f.d.p. unidad; d) tensión necesaria en el primario para el caso a) si la tensión secundaria se mantiene en 6600 V.

Solución

a) De los ensayos del transformador se concluye que las pérdidas son:

$$P_0 = 1250 \text{ W};\ P_{cc} = 1600 \text{ W}$$

es por ello que el rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo vale:

$$\eta = \frac{C S_N \cos\varphi}{C S_N \cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 0,8}{1 \cdot 100 \cdot 0,8 + 1,25 + 1,6} = 96,56\%$$

b) El rendimiento a media carga con f.d.p. unidad vale:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} 100 \cdot 1}{\frac{1}{2} 100 \cdot 1 + 1,25 + (\frac{1}{2})^2 1,6} = \frac{50}{50 + 1,25 + 0,4} = \frac{50}{51,65} = 96,81\%$$

c) El índice de carga óptimo es igual a:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{1250}{1600}} = 0,884$$

por lo que la potencia de máximo rendimiento es:

$$S_{\eta max} = 0,884 \cdot 100 = 88,4 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad vale:

$$\eta_{max} = \frac{0,884 \cdot 100 \cdot 1}{0,884 \cdot 100 \cdot 1 + 2 \cdot 1,25} = \frac{88,4}{90,9} = 97,25\%$$

d) Para realizar este apartado es preciso calcular la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario. Como se ha indicado en el problema anterior, vamos a trabajar por sencillez con un *transformador estrella-estrella equivalente*. La relación de transformación es entonces la relación de tensiones compuestas:

$$m = \frac{400}{6600} = 0,0606$$

El ensayo de vacío está realizado en el lado de B.T. y con tensión nominal, lo que permite identificar a la potencia de 1250W como pérdidas en el hierro. El ensayo de cortocircuito se ha realizado en el lado de A.T. que es el secundario, por lo que requiere pasar los datos al primario, y así resulta:

$$V_{2línea} = 314 \text{ V} \ ;\ I_{2línea} = I_{2nom} = \frac{100000}{\sqrt{3}.6600} = 8,748 \text{ A} \ ;\ P_{cc} = 1600 \text{ W}$$

$$V_{1fase} = V_{1cc} = 0,0606 \frac{314}{\sqrt{3}} = 10,99 \text{ V} \ ;\ I_{1cc} = \frac{8,748}{0,0606} = 144,36 \text{ A}$$

y se obtiene:

$$1600 = 3 \cdot 10,99 \cdot 144,36 \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,336 \ ;\ \text{sen}\varphi_{cc} = 0,942$$

que da lugar a los siguientes valores:

$$Z_{cc} = \frac{10,99}{144,3} = 0,0762\ \Omega \ ;\ R_{cc} = 0,0256\ \Omega \ ;\ X_{cc} = 0,0717\ \Omega$$

Para determinar la tensión primaria, de forma que la tensión de línea secundaria sea de 6600 V, a plena carga y con f.d.p. 0,8 inductivo se tiene:

$$V_{2fase}(\text{transformador en estrella equivalente}) = \frac{6600}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_2' = mV_2 = 0,0606 \frac{6600}{\sqrt{3}} = 231 \text{ V}$$

$$I_{2fase\ plena\ carga} = \frac{100000}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 8,75 \text{ A} \ ;\ I_2' = \frac{8,75}{0,0606} = 144,3\ 9 \text{ A}$$

y la aproximación de Kapp es:

$$V_{1fase} = V_2' + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \text{sen}\varphi$$

que al sustituir valores nos da:

$$V_{1fase} = 231 + 0,0256 \cdot 144,39 \cdot 0,8 + 0,0717 \cdot 144,39 \cdot 0,6 = 240,17 \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea: $V_{1línea} = \sqrt{3} \cdot 240,17 = 416$ V

Problema 3.23

En la Figura 3.5 se muestra el esquema de conexiones y las lecturas de los aparatos de medida para la realización de los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador trifásico Yd de 10 kVA, relación de tensiones compuestas 1000V/100 V. Determinar: a) parámetros del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario; b) ángulo horario del transformador (alimentación con sistema de secuencia directa).

Lecturas en vacío: $P_1 = 265,2$ *W;* $P_2 = -65,2$*W;* $V_{1(línea)} = 1000$ *V;* $V_{2(línea)} = 100$*V;* $I_{0(línea)} = 0,35$ *A*

Lecturas en cortocircuito: $P_1 = 360,2$ *W;* $P_2 = -210,2$ *W;* $V_{1cc(línea)} = 10$ *V;* $I_{2cc(línea)} = 57,7$ *A*

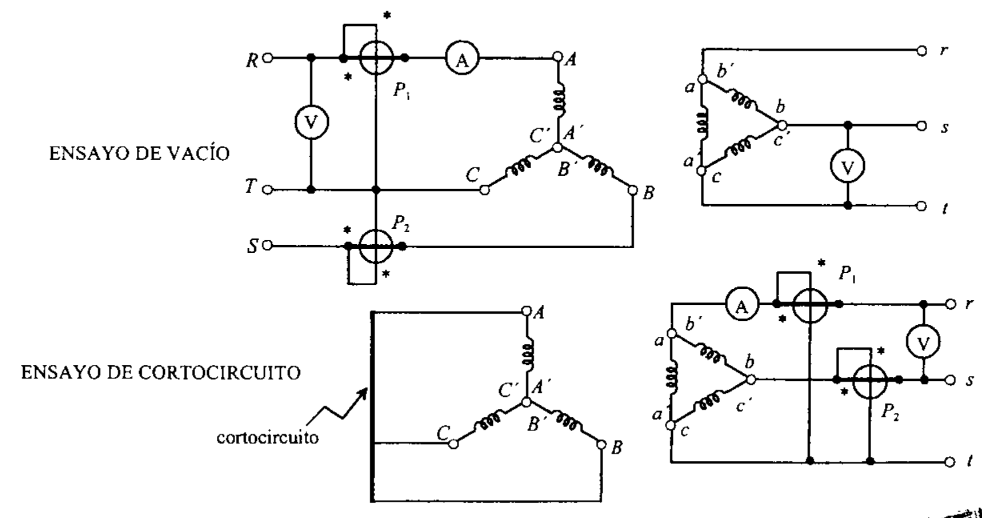


Figura 3.5

Solución

a) Se va a trabajar con un transformador estrella-estrella equivalente tal como muestra la Figura 3.6. Del ensayo de vacío se obtiene la potencia total trifásica:

$$P_0 = P_1 + P_2 = 256,2 - 65,2 = 200 \text{ W}$$

y de las medidas de las tensiones se calcula la relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente:

$$m = \frac{V_{1\text{fase}}}{V_{2\text{fase}}} = \frac{V_{1\text{linea}}}{V_{2\text{linea}}} = \frac{1000}{100} = 10$$

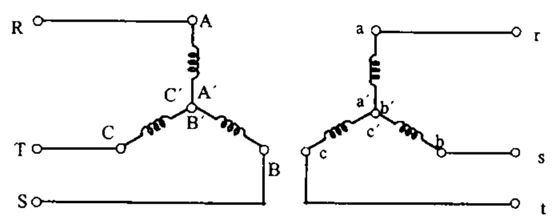


Figura 3.6

Teniendo en cuenta que la corriente de vacío de primario es de 0,35 A resulta:

$$P_0 = 3V_{1f} I_{0f} \cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{200}{3\frac{1000}{\sqrt{3}}0,35} = 0,33 \ ; \ \text{sen}\varphi_0 = 0,944$$

de donde se deducen las corrientes de la rama paralelo:

$$I_{Fe} = 0,35 \cdot 0,33 = 0,1155 \text{ A} \ ; \ I_\mu = 0,35 \cdot 0,944 = 0,3304 \text{ A}$$

y las impedancias de la rama paralelo:

$$R_{Fe} = \frac{\frac{1000}{\sqrt{3}}}{0,1155} = 5000 \ \Omega \ ; \ X_\mu = \frac{\frac{1000}{\sqrt{3}}}{0,3304} = 1747 \ \Omega$$

Por otra parte el ensayo de cortocircuito está realizado en el lado secundario, por lo que habrán de transformarse las medidas al lado primario y de este modo para el transformador equivalente Yy resulta:

$$P_{\text{corto}} = P_1 + P_2 = 360,2 - 210,2 = 150 \text{ W}$$

$$I_{2\text{corto lin}} = I_{2\text{corto fase}} = 57,7 \text{A} \Rightarrow I_{1\text{corto fase}} = \frac{I_{2\text{corto fase}}}{m} = \frac{57,7}{10} = 5,77 \text{ A}$$

$$V_{2\text{corto lin}} = 10 \text{ V} \Rightarrow V_{2\text{corto fase}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{1\text{corto fase}} = mV_{2\text{corto fase}} = 10\frac{10}{\sqrt{3}} = 57,74 \text{ V}$$

y de este modo se obtiene:

$$150 = 3 \cdot 57,74 \cdot 5,77 \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,15 \ ; \ \text{sen}\varphi_{cc} = 0,989$$

que da lugar a los siguientes parámetros reducidos al primario:

$$Z_{cc} = \frac{57,74}{5,77} = 10 \ \Omega \ ; \ R_{cc} = 10 \cdot 0,15 = 1,5 \ \Omega \ ; \ X_{cc} = 10.0,989 = 9,89 \ \Omega$$

b) En la Figura 3.7 se muestra, a la izquierda, la disposición de las bobinas reales del transformador vistas desde la caja de bornes, en la que se han abatido las bobinas 90°. Las uniones correspondientes se han preparado teniendo en cuenta las conexiones de la Figura 3.5.

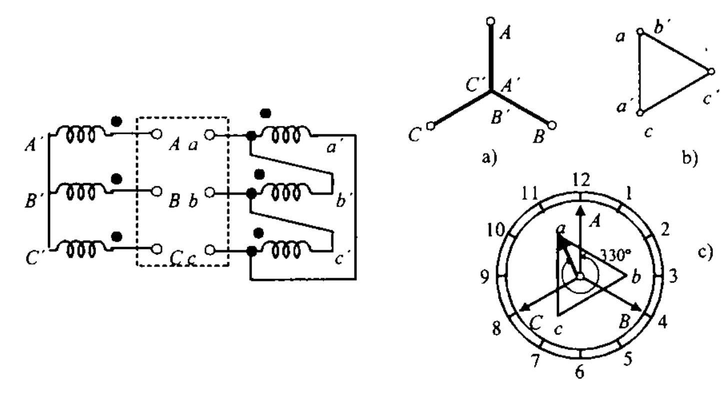


Figura 3.7

En la Figura 3.7a se ha dibujado la estrella de tensiones primaria, en la que se ha tomado la fase A como referencia vertical; en la Figura 3.7b se ha dibujado el triángulo de tensiones secundarias en las que las tensiones de fase son paralelas (misma fase) a las tensiones primarias correspondientes. En la Figura 3.7c se han superpuesto ambos diagramas fasoriales de tensiones encima de un reloj para determinar de este modo el índice horario; obsérvese que entre a y A el reloj señala las 11 horas, es decir, el transformador es de la forma Yd11.

Problema 3.24

La Figura 3.8 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica de un grupo de bombeo utilizado para un sistema de riego por aspersión. Se dispone de una red de distribución de 15 kV, 50 Hz, que por medio de un transformador Dy11, 100 kVA, relación compuesta: 15 kV/380 V, suministra energía eléctrica al grupo motobomba a través de una linea resistiva de 0,2 ohmios por hilo. El grupo motobomba está representado por una impedancia en triángulo de 6∠36,87° ohmios por fase. Las características del transformador que se leen en su placa de características son las siguientes:

100 kVA, Dy11; 15 kV/380 V ; ε_{cc} = 10% ; ε_{Xcc} = 8%

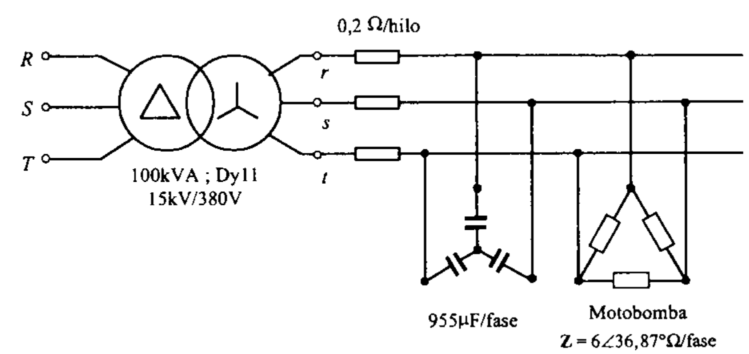


Figura 3.8

Calcular: a) parámetros R_{cc}, X_{cc} y Z_{cc} del circuito equivalente del transformador reducido al primario (se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente); b) tensión secundaria de línea en bornes del secundario del transformador y tensión en bornes del grupo motobomba, si la red de distribución en A.T. tiene una tensión constante de línea de 15 kV; c) rendimiento del transformador en estas condiciones; d) si para corregir el f.d.p. del grupo motobomba se conecta una batería de condensadores en estrella de 955 µF/fase (como se indica en la figura), ¿cuál será la nueva tensión de línea en bornes del grupo motobomba?

Solución

a) En la Figura 3.9 se muestra el esquema estrella-estrella equivalente de la red de la Figura 3.8. En este sistema se tiene:

$$S_N = \sqrt{3}V_{1n}I_{1n} \Rightarrow 1000000 = \sqrt{3}\cdot 15000\cdot I_{1n} \qquad I_{1n} = 3{,}85 \text{ A}$$

$$\varepsilon_{cc} = 10\% = \frac{Z_{cc}I_{1n}}{V_{1fase}} \Rightarrow 0{,}1 = \frac{Z_{cc}3{,}85}{15000/\sqrt{3}} \Rightarrow Z_{cc} = 225\ \Omega$$

$$\varepsilon_{xcc} = 8\% = \frac{X_{cc}I_{1n}}{V_{1fase}} \Rightarrow 0{,}08 = \frac{X_{cc}3{,}85}{15000/\sqrt{3}} \Rightarrow X_{cc} = 180\ \Omega$$

y de este modo el valor de la resistencia de cortocircuito reducida al primario de la estrella equivalente será:

$$R_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - X_{cc}^2} = \sqrt{225^2 - 180^2} = 135\ \Omega$$

Los parámetros anteriores se refieren al transformador estrella-estrella equivalente y son las resistencia, reactancia e impedancia de cortocircuito referida al primario (estrella). En realidad, al estar conectado el primario del transformador en triángulo, la impedancia de cortocircuito en este lado será tres veces mayor, de acuerdo con el cambio de impedancias de estrella a triángulo. Es decir:

$$R_{cc\Delta} = 135\cdot 3 = 405\ \Omega \quad ; \quad X_{cc\Delta} = 180\cdot 3 = 540\ \Omega \quad ; \quad Z_{cc\Delta} = 225\cdot 3 = 675\ \Omega$$

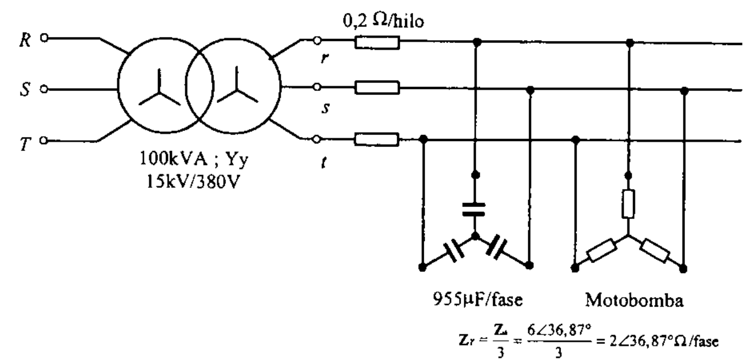


Figura 3.9

b) El circuito equivalente por fase de la Figura 3.9 reducido al primario es el mostrado en la Figura 3.10. Obsérvese en este esquema que se tienen los siguientes valores:

$$m = \frac{15000}{380} = 39{,}47 \quad ; \quad \mathbf{Z}_\lambda = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} = \frac{6\angle 36{,}87°}{3} = 2\angle 36{,}87° = 1{,}6 + j1{,}2\ \Omega$$

y al pasar la impedancia de carga y la impedancia de la línea al primario (los condensadores no están conectados) resulta:

$$m^2 2\angle 36{,}87° = 39{,}47^2\cdot 2\angle 36{,}87°\ \angle 3116{,}3\angle 36{,}87° = 2493 + j1869{,}8\ \Omega \quad ; \quad m^2 0{,}2 = 39{,}47^2\cdot 0{,}2\angle 311{,}6\ \Omega$$

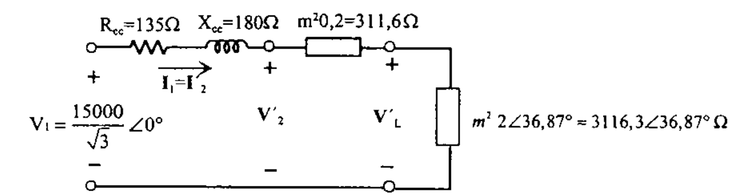


Figura 3.10

Eligiendo la tensión de fase del primario como referencia se obtiene una corriente primaria expresada por:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(15000/\sqrt{3})\angle 0°}{(135 + j180) + (311{,}6) + (2493 + j1869{,}8)} = \frac{(15000/\sqrt{3})\angle 0°}{2939{,}6 + j2049{,}8} = \frac{(15000/\sqrt{3})\angle 0°}{3583{,}7\angle 34{,}89°} = \mathbf{I}_1 = 2{,}417\angle -34{,}89° = \mathbf{I}'_2$$

y de este modo la tensión $\mathbf{V}'_2$ es igual a:

$$\mathbf{V}'_2 = (311{,}6 + 2493 + j1869{,}8)2{,}417\angle -34{,}89° = 3370{,}7\angle 33{,}69°\cdot 2{,}417\angle -34{,}89° = 8147{,}1\angle -1{,}2°\ \text{V}$$

que corresponde a un módulo de 8147,1 voltios. La tensión de fase V_2 valdrá de este modo:

$$V'_2 = 8147{,}1 = mV_2 \Rightarrow V_2 = \frac{8147{,}1}{39{,}47} = 206{,}4\text{V} \Rightarrow V_{2\text{línea}} = \sqrt{3}\cdot 206{,}4 = 357{,}5\ \text{V}$$

y la tensión reducida en bornes del grupo motobomba será:

$$\mathbf{V}'_L = 3116{,}3\angle 36{,}87°\cdot 2{,}417\angle -34{,}89° = 7532{,}1\angle 1{,}98°$$

que corresponde a un módulo de 7532,1 voltios. La tensión compuesta será:

$$V'_L = 7532{,}1 = mV_L \Rightarrow V_L = \frac{7532{,}1}{39{,}47} = 190{,}8\ \text{V} \Rightarrow V_{L(\text{línea})} = \sqrt{3}\cdot 190{,}8 = 330{,}5\ \text{V}$$

c) El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{3V'_2 I'_2\cos\varphi_2}{3V'_2 I'_2\cos\varphi_2 + 3R_{cc}I'^2_2} = \frac{8147{,}1\cdot 2{,}417\cos(34{,}89° - 1{,}2°)}{8147{,}1\cdot 2{,}417\cos(34{,}89° - 1{,}2°) + 135\cdot 2{,}417^2} = \frac{1638{,}4}{17173} = 95{,}4\%$$

d) La impedancia por fase de la batería de condensadores vale:

$$Z_c = -j\frac{1}{C_\lambda\omega} = -j\frac{10^6}{955\cdot 2\pi 50} = -j3{,}33\ \Omega$$

que al estar en paralelo con la impedancia del grupo motobomba, da un valor equivalente de:

$$\mathbf{Z}_{\text{paralelo}} = \frac{2\angle 36{,}87°(-j3{,}33)}{1{,}6 + j1{,}2 - j3{,}33} = \frac{6{,}66\angle -53{,}13}{2{,}66\angle -53{,}13} = 2{,}5\angle 0°\ \Omega$$

Pasando esta impedancia al lado primario nos da:

$$\mathbf{Z}'_{paralelo} = m^2 \mathbf{Z}_{paralelo} = 39,47^2 \cdot 2,5\angle 0° = 3894,7\angle 0°\ \Omega$$

en la Figura 3.11 se muestra el equivalente por fase correspondiente del nuevo circuito reducido al primario. En esta Figura 3.11 la nueva corriente por fase del primario del transformador será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(15000/\sqrt{3})\angle 0°}{(135 + j180) + 311,6 + (3894,7)} = \frac{(15000/\sqrt{3})\angle 0°}{4345\angle 2,37°} = 1,993\angle -2,37° = \mathbf{I}'_2$$

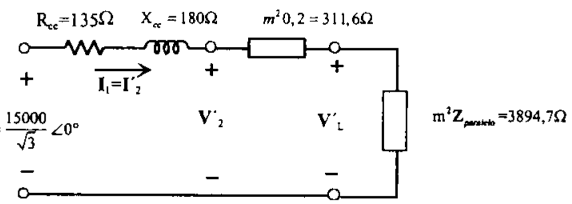


Figura 3.11

y la tensión $\mathbf{V}'_L$ vale ahora:

$$\mathbf{V}'_L = 3894,7\angle 0° \cdot 1,993\angle -2,37° = 7762,1\angle -2,37°\ \mathrm{V}$$

que es un módulo de 7762,1 voltios y de este modo resulta una tensión de línea:

$$V'_L = 7762,1 = mV_L \Rightarrow V_L = \frac{7762,1}{39,47} = 196,6\ \mathrm{V} \Rightarrow V_{L(línea)} = \sqrt{3} \cdot 196,6 = 340,6\ \mathrm{V}$$

Problema 3.25

Se tiene un transformador trifásico de 250 kVA, conexión Yy0, con una relación de tensiones compuestas de 15000/380 V. De los datos del fabricante, se conocen los siguientes parámetros: ε_{cc}=10%; ε_{xcc}= 8% y se considera despreciable el efecto de la rama paralelo del circuito equivalente del transformador. Calcular: a) parámetros R_{cc} y X_{cc} del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario y corriente que circularía por el secundario si por una falta se produce un cortocircuito franco en los bornes del secundario (se supone para resolver esta última cuestión que la tensión de alimentación del primario es la asignada de 15000 V); b) si la tensión compuesta de línea en el secundario es de 380 V y se conecta al transformador una carga en estrella de 15 ∠ 60° ohmios por fase, ¿cuál será la tensión compuesta que debe aplicarse al primario para que la tensión secundaria siga permaneciendo constante en 380 V de línea?, ¿cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?; c) si se conecta este transformador en paralelo con otro de 350 kVA, conexión Yy0, con la misma relación de tensiones y con las caídas de tensión relativas ε_{cc}= 10% y ε_{Xcc}= 9%, ¿cómo se repartirán una potencia de 400 kW con f.d.p. 0,8 inductivo si se supone que la tensión en la carga es de 380 voltios? (Es decir, calcular las potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por cada transformador).

Solución

a) De los datos suministrados por el fabricante obtenemos:

$$\varepsilon_{Rcc} = \sqrt{\varepsilon_{cc}^2 - \varepsilon_{xcc}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\% \quad ; \quad m = \frac{\frac{15000}{\sqrt{3}}}{\frac{380}{\sqrt{3}}} = 39,47$$

y como quiera que la corriente de plena carga y la tensión asignada del primario del transformador valen respectivamente:

$$I_{1n} = I_{1fase} = I_{1línea} = \frac{250000}{\sqrt{3}\ 15000} = 9,622\ \mathrm{A} \quad ; \quad V_{1n} = V_{1fase} = \frac{15000}{\sqrt{3}} = 8660,25\ \mathrm{V}$$

podemos obtener los valores de la resistencia y reactancia de cortocircuito del transformador reducidos al primario:

$$\varepsilon_{Rcc} = \frac{R_{cc} I_{1n}}{V_{1n}} \Rightarrow 0,06 = \frac{R_{cc} 9,622}{8660,25} \Rightarrow R_{cc} = 54\ \Omega$$

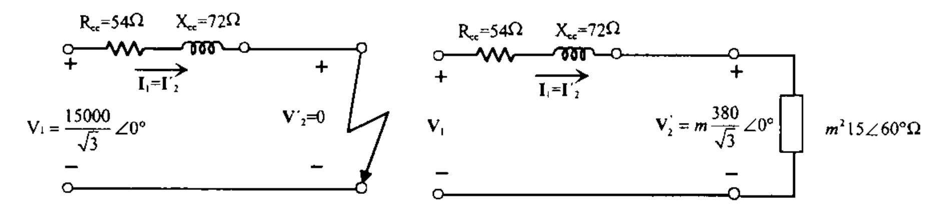
$$\varepsilon_{xcc} = 0,08 = \frac{X_{cc} 9,622}{8660,25} \Rightarrow X_{cc} = 72\ \Omega$$

Si se produce un cortocircuito en el secundario la corriente primaria por fase se puede obtener del circuito equivalente de la Figura 3.12a. En este circuito, si se toma la tensión primaria como referencia de fases, resulta:

$$\mathbf{I}_{1fase} = \frac{\frac{15000}{\sqrt{3}}\angle 0°}{54 + j72} = 96,22\angle -53,13°\ \mathrm{A}$$

que corresponde a un módulo de 96,22A y a una corriente secundaria de fase:

$$I_{2fase} = mI_{1fase} = 39,47 \cdot 96,22 = 3798\ \mathrm{A} = I_{2línea} = I_{falta\ secund}$$



a) b)

Figura 3.12

b) En este caso el circuito equivalente por fase reducido al primario es el mostrado en la Figura 3.12b, en el que se puede calcular la corriente secundaria reducida:

$$\mathbf{I}_{2fase} = \mathbf{I}'_2 = \frac{(m.380/\sqrt{3})\angle 0°}{m^2 15\angle 60°} = \frac{(380/\sqrt{3})\angle 0°}{m 15\angle 60°} = \frac{219,39\angle 0°}{39,47 \cdot 15\angle 60°} = 0,371\angle -60°\ \mathrm{A}$$

$$\mathbf{I}_2 = m\mathbf{I}'_2 = 39,47 \cdot 0,371\angle -60° = 14,64\angle -60°\ \mathrm{A}$$

y como quiera que:

$$V'_{2fase} = V'_2 = mV_{2fase} = 39,47 \cdot 219 \cdot 39\angle 0° = 8660\angle 0°\ \mathrm{V}$$

Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 3.11b resulta una tensión primaria:

$$\mathbf{V}_1 = 8660\angle 0° + (54 + j72) \cdot 0,371\angle -60° = 8660 + 33,39\angle -6,87 = 8693,15 - j4\angle\ 8693,15\angle -0,026°\ \mathrm{V}$$

que corresponde a un módulo de 8693,1 voltios y a una tensión compuesta o de línea necesaria en el primario de valor:

$$V_{1línea} = \sqrt{3} \cdot 8693,15 = 15057\ \mathrm{V}$$

y el rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{3V_2 I_2 \cos\varphi}{3V_2 I_2 \cos\varphi + P_0 + 3R_{cc} I_2^2} = \frac{3 \cdot 219,39 \cdot 14,64 \cos 60°}{3 \cdot 219,39 \cdot 14,64 \cos 60° + 3 \cdot 54 \cdot 0,371^2} = 99,54\%$$

c) Los parámetros del segundo transformador son:

$$\varepsilon_{cc} = 10\% \quad ; \quad \varepsilon_{xcc} = 9\% \;\Rightarrow\; \varepsilon_{Rcc} = \sqrt{10^2 - 1^2} = 4,36\%$$

y como la corriente y tensión asignadas de primario de este transformador son, respectivamente:

$$I_{1n} = I_{1fase} = I_{1lin} = \frac{S_N}{\sqrt{3}V_{1n}} = \frac{350000}{\sqrt{3}\;15000} = 13,47\ \text{A} \quad ; \quad V_{1n} = V_{1fase} = \frac{15000}{\sqrt{3}} = 8660,25\ \text{V}$$

los valores de resistencia y reactancia de cortocircuito son:

$$0,0436 = \frac{R_{cc} I_{1n}}{V_{1n}} = \frac{R_{cc} 13,47}{8660,25} \;\Rightarrow\; R_{cc} = 28,03\ \Omega \quad ; \quad 0,09 = \frac{X_{cc} 13,47}{8660,25} \;\Rightarrow\; X_{cc} = 57,86\ \Omega$$

Por otro lado la corriente que deben suministrar ambos transformadores a la carga vale:

$$I_{2lin} = \frac{400000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,8} = 759,67\text{A} = I_{2fase} \;\Rightarrow\; I'_{2fase} = \frac{759,67}{39,47} = 19,25\ \text{A}$$

Al tomar como referencia de fases la tensión secundaria por fase, la expresión compleja de la corriente de carga reducida al primario vale:

$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}'_{2\,fase} = 19,25\angle -36,87°\ \text{A}$$

En la Figura 3.13 se muestra el circuito equivalente por fase del acoplamiento (reducido al primario) en el que la tensión reducida del secundario vale:

$$\mathbf{V}'_2 = m\mathbf{V}_{2fase} = 39,47 \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0° = 8660,25\angle 0°\ \text{V}$$

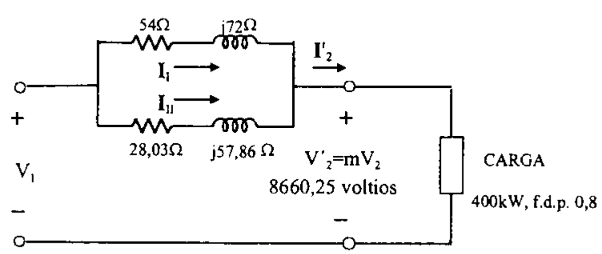


Figura 3.13

De las reglas de un circuito en paralelo se puede escribir:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 19,25\angle -36,87° \quad ; \quad (54 + j72)\mathbf{I}_I = (28,03 + j57,86)\mathbf{I}_{II}$$

y al calcular las corrientes complejas suministradas por cada transformador se obtienen los siguientes resultados:

$$\mathbf{I}_I = 8,05\angle -30,4°\ \text{A} \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = 11,32\angle -41,45°\ \text{A}$$

De acuerdo con los valores anteriores, las potencias complejas suministradas por los transformadores son, respectivamente:

$$\mathbf{S}_I = 3\mathbf{V}'_2\mathbf{I}^*_I = 3 \cdot 8660,25\angle 0° \cdot 8,05\angle 30,4° \angle 180\ \text{kW} + j106\ \text{kVAr}$$

$$\mathbf{S}_{II} = 3\mathbf{V}'_2\mathbf{I}_{II} = 3 \cdot 8660,25\angle 0° \cdot 11,32\angle 41,44° \angle 220\ \text{kW} + j194\ \text{kVAr}$$

cuya suma es 400 kW + j 300 kVAr, que es la potencia entregada a la carga.

Problema 3.26

Un transformador trifásico tiene las siguientes características asignadas: conexión: Yy0, potencia aparente asignada: 100 kVA; relación de tensiones compuestas: 3000 V/380 V. Los resultados de unos ensayos de vacío y cortocircuito han dado los siguientes valores: vacío: 3000 V, P_0= 5 kW, medidos en el lado de A.T. (primario); cortocircuito: 300 V, I_{1cc}= corriente asignada; P_{cc}= 6 kW (medidos en el primario). NOTA: las potencias anteriores son totales trifásicas y las tensiones son compuestas o de línea. Si la tensión secundaria de línea se mantiene constante en 380 V se pide: a) la tensión compuesta necesaria en el primario cuando el transformador alimenta una carga trifásica equilibrada de 50 kW con f.d.p. 0,6 capacitivo; b) potencia aparente de máximo rendimiento y rendimiento máximo del transformador para un f.d.p. unidad; c) se desea ampliar la instalación para alimentar una carga trifásica de 120 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que se acopla en paralelo este transformador con otro cuyas características asignadas son las siguientes: conexión Yy0, potencia asignada: 50 kVA, relación: 3000 V/380 V; ε_{Rcc}= 8% ε_{Xcc}= 6%; P_0= 2 kW. Calcular los valores de las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada transformador y los rendimientos correspondientes si se supone que la tensión en la carga es de 380 voltios.

Solución

a) Del ensayo de vacío del transformador se deduce que las pérdidas en el hierro son de 5 kW. Por otro lado, del ensayo de cortocircuito se tienen las siguientes medidas:

$$V_{1cc}(\text{línea}) = 300\text{V} \;\Rightarrow\; V_{1cc} = \frac{300}{\sqrt{3}} = 173,21\ \text{V} \quad ; \quad I_{1cc} = I_{1n} = \frac{100000}{\sqrt{3}\;3000} = 19,245\ \text{A} \quad ; \quad P_{cc} = 6000\ \text{W}$$

por lo que se obtiene:

$$\cos\varphi_{cc} = \frac{6000}{3 \cdot 173,21 \cdot 19 \cdot 245} = 0,6 \quad ; \quad \text{sen}\varphi_{cc} = 0,8$$

y las impedancias de cortocircuito son:

$$Z_{cc} = \frac{173,21}{19,245} = 9\ \Omega \quad ; \quad R_{cc} = 9 \cdot 0,6 = 5,4\ \Omega \quad ; \quad X_{cc} = 9 \cdot 0,8 = 7,2\ \Omega$$

Además de los datos asignados por el fabricante, la relación de transformación es:

$$m = \frac{3000}{380} = 7,895$$

por lo tanto cuando la tensión secundaria de línea se mantiene en un valor compuesto de 380 V y alimenta una carga de 50 kW con f.d.p. 0,8 capacitivo, se tiene:

$$V_{2línea} = 380\ \text{V} \;\Rightarrow\; V_{2fase} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219,39\ \text{V} \;\Rightarrow\; V'_{2fase} = m219,39 = 1732,1\ \text{V}$$

$$I_{2fase} = \frac{50000}{3 \cdot 219,39 \cdot 0,6} = 126,61\ \text{A} \;\Rightarrow\; I'_{2fase} = \frac{126,61}{7,895} = 16,04\ \text{A}$$

y aplicando el 2º lema de Kirchhoff al circuito equivalente aproximado reducido al primario se obtiene:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2' + Z_{cc}\mathbf{I}_2' = 1732{,}1\angle 0° + (5{,}4 + j7{,}2)1604\angle 53{,}13° = 1697{,}3\angle 4{,}6° \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de fase del primario de 1697,3 voltios y a un valor de línea:

$$V_{1(\text{línea})} = \sqrt{3} \cdot 1697{,}3 = 2939{,}9 \text{ V}$$

b) El índice de carga óptimo se calcula de la relación:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0{,}91287$$

por lo que la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador es igual a:

$$S_{\eta\max} = 0{,}91287 \cdot 100 = 91{,}29 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad será:

$$\eta_{\max} = \frac{0{,}91287 \cdot 100 \cdot 1}{0{,}91287 \cdot 100 \cdot 1 + 5 + 5} = 90{,}13\%$$

c) El segundo transformador tiene 50 kVA y la misma relación de transformación, y la corriente asignada por fase de primario y la tensión asignada por fase de primario son, respectivamente:

$$I_{1n} = \frac{50000}{\sqrt{3} \cdot 3000} = 9{,}623 \text{ A} \quad ; \quad V_{1n} = \frac{3000}{\sqrt{3}} = 1732{,}1 \text{ V}$$

y a partir de estos valores y de las caídas de tensión relativas de cortocircuito, se obtiene:

$$\varepsilon_{Rcc} = 0{,}08 = \frac{R_{ccII} \cdot 9{,}623}{1732{,}1} \Rightarrow R_{ccII} = 14{,}4\ \Omega \quad ; \quad \varepsilon_{xcc} = 0{,}06 = \frac{X_{ccII} \cdot 9{,}623}{1732{,}1} \Rightarrow X_{ccII} = 10{,}8\ \Omega$$

Por otro lado, ambos transformadores alimentan una carga trifásica equilibrada de 120 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que las corrientes secundaria y secundaria reducida que absorbe la carga son, respectivamente:

$$I_2 = \frac{120000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}8} = 227{,}9 \text{ A} \Rightarrow I_2' = \frac{227{,}9}{7{,}895} = 28{,}87 \text{ A}$$

y tomando la tensión secundaria como referencia, la corriente de carga reducida al primario tiene la expresión compleja siguiente:

$$\mathbf{I}_2' = 28{,}87\angle -36{,}87° \text{ A}$$

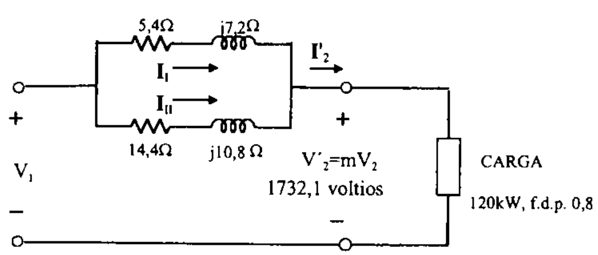


Figura 3.14

En la Figura 3.14 se muestra el esquema por fase del acoplamiento en que la tensión secundaria por fase reducida al primario es $V_2' = mV_2 = 1732{,}1\angle 0°$. De las reglas de un circuito en paralelo se puede escribir:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 28{,}87\angle -36{,}87° \quad ; \quad (5{,}5 + j7{,}2)\mathbf{I}_I = (14{,}4 + j10{,}8)\mathbf{I}_{II}$$

y de estas ecuaciones se obtienen los valores siguientes de las corrientes:

$$\mathbf{I}_I = 19{,}42\angle -42{,}27° \text{ A} \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = 9{,}71\angle -26{,}01° \text{ A}$$

y por consiguiente las potencias complejas suministradas por cada transformador son:

$$\mathbf{S}_I = 3\mathbf{V}_2'\mathbf{I}_I^* = 3 \cdot 1732{,}1\angle 0° \cdot 19{,}42\angle 42{,}27° = 100912\angle 42{,}27° = 74673 + j67876$$

$$\mathbf{S}_{II} = 3\mathbf{V}_2'\mathbf{I}_{II}^* = 3 \cdot 1732{,}1\angle 0° \cdot 9{,}1\angle +26{,}01° = 50456\angle 26{,}01° = 45346 + j22126$$

De este modo el primer transformador entrega a la carga las potencias siguientes:

$$S_I = 100{,}912 \text{ kVA} \quad ; \quad P_I = 74{,}673 \text{ kW} \quad ; \quad Q_I = 67{,}876 \text{ kVAr}$$

mientras que el segundo transformador entrega las potencias siguientes:

$$S_{II} = 50{,}456 \text{ kVA} \quad ; \quad P_{II} = 45{,}346 \text{ kW} \quad ; \quad Q_{II} = 22{,}126 \text{ kVAr}$$

El rendimiento del primer transformador será:

$$\eta_I = \frac{P_I}{P_I + P_{Fe} + P_{cu}} = \frac{74{,}673}{74{,}673 + 5 + 3 \cdot 5{,}4 \cdot 19{,}42^2} = 87{,}1\%$$

y el del segundo:

$$\eta_{II} = \frac{P_{II}}{P_I + P_{Fe} + P_{cu}} = \frac{45{,}346}{45{,}346 + 2 + 3 \cdot 14{,}4 \cdot 9{,}71^2} = 88{,}2\%$$

Problema 3.27

Un transformador trifásico de distribución de 800 kVA; conexión Dyll y tensiones 20000/400 V; 50 Hz, tiene unas pérdidas en vacío de 2 kW y unas pérdidas en cortocircuito de 8 kW (con corriente de plena carga). Calcular el rendimiento diario del transformador si trabaja con el ciclo de carga siguiente:

1) 6 horas suministrando una potencia de 400 kW con f.d.p. 0,8 inductivo.

2) 4 horas suministrando una potencia de 720 kW con f.d.p. 0,9 inductivo.

3) 4 horas suministrando una potencia de 228 kW con f.d.p. 0,95 inductivo.

4) 10 horas sin carga (en vacío).

Solución

El rendimiento diario de un transformador es el cociente entre la energía que entrega diariamente por su secundario W_2 y la energía absorbida por el primario W_1. Si el transformador trabaja con un ciclo de carga de P_1 kW durante t_1 horas, P_2 kW durante t_2 horas, P_3 kW durante t_3 horas, etc... ($t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + ... = T =$ 24 horas), la energía total W_2 entregada por el secundario será de la forma:

$$W_2 = P_1 t_1 + P_2 t_2 + P_3 t_3 + ...$$

mientras que la energía que absorbe el primario será el valor anterior más las pérdidas internas de la máquina, es decir, las pérdidas en el hierro más las pérdidas en el cobre. Ahora bien las pérdidas en el hierro son las pérdidas en vacío y son constantes para todos los regímenes de trabajo del transformador, mientras que las pérdidas en el cobre dependen del régimen de carga y son proporcionales al cuadrado de la corriente, que al considerar la tensión de trabajo constante, son directamente proporcionales al cuadrado de la potencia aparente que suministra en cada momento. Si se denomina P_{Fe}= P_0 a las pérdidas en el hierro que se disipan durante el tiempo total T (T = 24 horas), P_{cu1} a las pérdidas en el cobre cuando desarrolla una potencia aparente S_1 durante un tiempo t_1, P_{cu2} a las pérdidas en el cobre cuando desarrolla una potencia aparente S_2 durante un tiempo t_2, P_{cu3} a las pérdidas en el cobre cuando desarrolla una potencia aparente S_3 durante un tiempo t_3, etc., la energía de entrada será:

$$W_1 = (P_1t_1 + P_2t_2 + P_3t_3 + ...) + P_0T + P_{cu1}t_1 + P_{cu2}t_2 + P_{cu3}t_3 + ...$$

y el rendimiento diario será por consiguiente el cociente:

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{(P_1t_1 + P_2t_2 + P_3t_3 + ...)}{(P_1t_1 + P_2t_2 + P_3t_3 + ...) + P_0T + P_{cu1}t_1 + P_{cu2}t_2 + P_{cu3}t_3 + ...}$$

En nuestro caso, las pérdidas en el hierro del transformador son P_{Fe}= P_0= 2kW, mientras que las pérdidas en el cobre P_{cui} cuando suministra una potencia aparente S_i se pueden calcular en función de las pérdidas en cortocircuito P_{cc} con la potencia asignada del transformador S_N , y si se denomina R_{cc} a la resistencia de cortocircuito del transformador, se puede escribir:

$$P_{cui} = R_{cc}I_i^2 = R_{cc}I_i^2(\frac{I_N}{I_N})^2 = R_{cc}I_N^2(\frac{I_i}{I_N})^2 = P_{cc}(\frac{S_i}{S_N})^2 = P_{cc}C_i^2$$

donde se ha denominado C_i al índice de carga del transformador. En nuestro caso, de acuerdo con el ciclo de carga, se tiene:

1) t_1= 6 horas con una potencia de P_1= 400 kW con cos φ_1 = 0,8, es decir, la potencia aparente correspondiente es S_1 = P_1/cosφ_1= 400/0,8 = 500 kVA , por lo que el índice de carga es C_1 = 500/800 = 0,625. Las pérdidas en el hierro son P_0= 2 kW y las pérdidas en el cobre son P_{cu1} =8 · 0,625² = 3,125 kW.

2) t_2= 4 horas con una potencia de P_2= 720 kW con cos φ_2 = 0,9, es decir, la potencia aparente correspondiente es S_2 = P_2/cosφ_2 = 720/0,9=800kVA , por lo que el índice de carga es C_2 =800/800=1. Las pérdidas en el hierro son P_0=2kW y las pérdidas en el cobre son P_{cu2} =8 · 1² =8 kW.

3) t_3= 4 horas con una potencia de P_3= 228 kW con cos φ_3 = 0,95, es decir, la potencia aparente correspondiente es S_3 = P_3/cosφ_3 = 228/0,95 = 240 kVA , por lo que el índice de carga es C_3 = 240/800 = 0,3. Las pérdidas en el hierro son P_0= 2 kW y las pérdidas en el cobre son P_{cu3}= 8 · 0,3² = 0,72 kW.

4) t_4= 10 horas con una potencia de P_4= 0 kW (funcionamiento sin carga). Las pérdidas en el hierro son P_0= 2 kW y las pérdidas en el cobre son P_{cu1}= 0.

Por consiguiente el rendimiento diario será:

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{400 \cdot 6 + 720 \cdot 4 + 228 \cdot 0,95}{(400 \cdot 6 + 720 \cdot 4 + 228 \cdot 0,95) + 2 \cdot 24 + 3,125 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 0,72 \cdot 4} = \frac{5496,6}{5598,23} = 98,18\%$$

Problema 3.28

Un transformador monofásico de 50 kVA; 6600/220 V; 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 1000 W; 220 V; 25 A (datos leidos en el lado de B.T.); cortocircuito: 1200 W; 300 V; 7,575 A (datos leídos en el lado A.T.). Calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; b) se dispone de tres transformadores monofásicos idénticos al citado, que se conectan en triángulo en la parte de A.T. (primario) y en estrella la parte de B.T. (secundario); si se alimenta el primario de esta combinación a una red trifásica a 6600 V, determinar la tensión secundaria de línea, si la corriente secundaria de línea es de 200 A con un f.d.p. 0,8 inductivo; c) la combinación señalada en el apartado anterior (conexión Dy) se conecta nuevamente a una red trifásica de 6600 V y en el secundario se coloca una carga trifásica equilibrada en triángulo de impedancia: 2,16 + j 1,62 ohmios/fase, calcular la tensión secundaria de línea y el rendimiento del transformador en estas condiciones.

Solución

a) El ensayo de vacío está realizado en el lado de B.T., que es el secundario, por consiguiente para utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario, deberán pasarse las medidas a este lado. La relación de transformación es:

$$m = \frac{6600}{220} = 30$$

y los resultados del ensayo de vacío transferidos al lado primario son:

$$P_0 = 1000 \text{ W} \ ; \ V_1 = 6600 \text{ V} \ ; \ I_0 = \frac{25}{m} = \frac{25}{30} = 0,833 \text{ A}$$

Por consiguiente resulta:

$$1000 = 6600 \cdot 0,83 \cos\varphi_0 \ ; \ \cos\varphi_0 = 0,1818 \ ; \ \text{sen}\varphi_0 = 0,983$$

y las componentes de la corriente de vacío son:

$$I_{Fe} = 0,83 \cdot 0,1818 = 0,151 \text{ A} \ ; \ I_\mu = 0,83 \cdot 0,983 = 0,819 \text{ A}$$

Las impedancias de la rama paralelo correspondientes son:

$$R_{Fe} = \frac{6600}{0,151} = 43,71 \text{ k}\Omega \ ; \ X_\mu = \frac{6600}{0,819} = 8,06 \text{ k}\Omega$$

El ensayo de cortocircuito está medido en el lado de A.T. que es el primario, y las medidas son:

$$P_{corto} = 1200 \text{ W} \ ; \ V_{1corto} = 300 \text{ V} \ ; \ I_{1corto} = 7,575 \text{ A} = I_{1n} = \frac{50000}{6600} I_{1corto} = I_{1cc}$$

de donde se deduce:

$$\cos\varphi_{cc} = \frac{1200}{300 \cdot 7,575} = 0,528 \ ; \ \text{sen}\varphi_{cc} = 0,850$$

y la impedancia de cortocircuito es:

$$Z_{cc} = \frac{300}{7,575} = 39,6 \ \Omega \ ; \ R_{cc} = 39,6 \cdot 0,528 = 20,91 \ \Omega \ ; \ X_{cc} = 39,6 \cdot 0,850 = 33,66 \ \Omega$$

b) Vamos a realizar el problema utilizando el esquema real trifásico de la asociación de transformadores resultante que es triángulo-estrella, y así la relación de transformación de cada transformador monofásico sigue siendo m = 20, y la corriente de línea del secundario, que es de 200 A, coincidirá con la de fase (por estar conectado los secundarios en estrella) y la corriente secundaria reducida será:

$$I_2' = \frac{200}{30} = 6,66 \text{ A}$$

Al aplicar la fórmula aproximada de Kapp resulta:

$$V_{1fase} = mV_{2fase} + R_{cc}I_2'\cos\varphi + X_{cc}I_2'\text{sen}\varphi$$

que al sustituir los valores da lugar a:

$$6600 = 30V_{2fase} + 20,91\cdot 6,6\cdot 0,8 + 33,66\cdot 6,6\cdot 0,6$$

de donde se deduce que la tensión secundaria de fase es $V_{2fase} = 211,8$ V y que corresponde a un valor de línea:

$$V_{2l} = \sqrt{3}\cdot 211,8 = 366,84 \text{ V}$$

c) El circuito eléctrico equivalente por fase en este caso es el representado en la Figura 3.15. La carga en triángulo de impedancia Z_{Δ}=2,16+j1,62 Ω/fase, al transformarla en estrella, da un valor por fase de la impedancia de carga:

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_L = \frac{2,16 + j1,62}{3}\ \Omega/\text{fase}$$

que al pasar a primario se convierte en:

$$\mathbf{Z}'_L = m^2\mathbf{Z}_L = \frac{30^2}{3}(2,16 + j1,62) = 648 + j486\ \Omega$$

que es el valor mostrado en la Figura 3.15. Al elegir la tensión primaria como referencia se obtiene una corriente primaria:

$$\mathbf{I}'_2 = \frac{6600\angle 0^\circ}{(20,91 + j33,66) + (648 + j48)} = \frac{6600\angle 0^\circ}{847\angle 37,84} = 7,79\angle -37,84^\circ \text{ A}$$

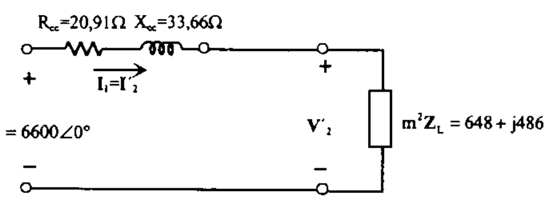


Figura 3.15

Por consiguiente la tensión secundaria reducida será:

$$\mathbf{V}'_2 = (648 + j486)\cdot 7,79\angle -37,84^\circ = 810\angle 36,87^\circ\cdot 7,79\angle -37,84^\circ = 6311,5\angle -0,97^\circ$$

es decir, el módulo de la tensión secundaria reducida es de 6311,52 voltios, que corresponde a una tensión secundaria real:

$$V_2 = \frac{6311,5}{m} = \frac{6311,5}{30} = 210,38 \text{ V}$$

y como el secundario está en estrella representa una tensión de línea: $V_{2línea} = \sqrt{3}\ \cdot 210,38 = 364,4$V

El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{3V'_2 I'_2 \cos\varphi}{3V'_2 I'_2 \cos\varphi + P_0 + P_{cu}} = \frac{3\cdot 6311,5\cdot 7,79\cos 36,87^\circ}{3\cdot 6311,5\cdot 7,79\cos 36,87^\circ + 3000 + 3\cdot 20,91\cdot 7,79^2} = 94,6\%$$

Problema 3.29

La Figura 3.16 muestra un transformador trifásico triángulo-estrella de relación de tensiones compuestas: 10000/380V, que alimenta en el lado de baja tensión una carga trifásica equilibrada conectada en estrella. Para medir la potencia absorbida por la carga se utilizaron dos vatímetros P_1 y P_2 cuyas lecturas fueron: P_1=1000 kW; P_2=500 kW. Suponiendo que en estas condiciones el transformador trabaja a plena carga y que la tensión secundaria compuesta es de 380 V, calcular: a) potencia aparente o de plena carga del transformador (kVA); b) si las impedancias de los devanados primario y secundario son: $\mathbf{Z}_1$ = 2,9 + j 5,1 ohmios; $\mathbf{Z}_2$ = 1,5 · 10^{-3} + j 2,36 · 10^{-3} ohmios, calcular la tensión primaria V_1 necesaria en el primario para alimentar la carga a 380V de línea; c) calcular el rendimiento del transformador a plena carga si el índice de carga óptimo o de máximo rendimiento del transformador es igual a 0,75; d) ¿cuál es el valor del ángulo horario del transformador si la sucesión de fases es RST? NOTA: utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.

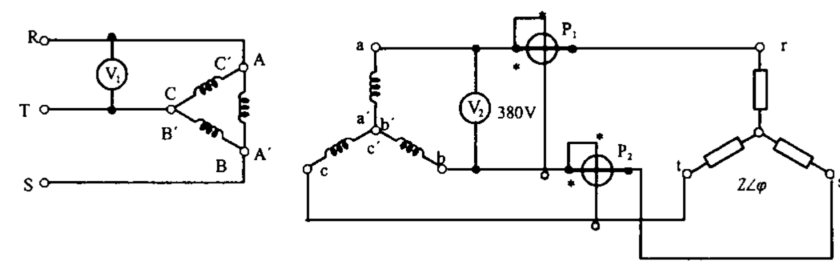


Figura 3.16

Solución

a) La conexión real del transformador es triángulo-estrella. Vamos a resolver el problema utilizando el *transformador estrella-estrella equivalente* tal como se muestra en la Figura 3.17.

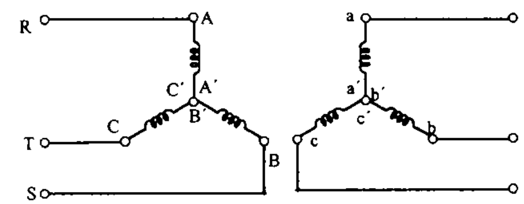


Figura 3.17

De acuerdo con las medidas efectuadas, la potencia absorbida por la carga y que, según el enunciado, constituye la plena carga del transformador es:

$$P_T = P_1 + P_2 = 1000 + 500 = 1500 \text{ kW}$$

y de los datos de los vatímetros se obtiene el f.d.p. de la carga:

$$\text{tg}\varphi = \sqrt{3}\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ \Rightarrow \cos\varphi = \cos 30^\circ = 0,866$$

por consiguiente, la potencia aparente del transformador vale:

$$S_T = \frac{P_T}{\cos\varphi_T} = \frac{1500}{\cos 30°} = 1732{,}1 \text{ kVA}$$

b) La relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente vale:

$$m = \frac{10000}{380} = 26{,}32$$

La impedancia equivalente del devanado primario es:

$$\mathbf{Z}_{1Y} = \frac{\mathbf{Z}_{1\Delta}}{3} = \frac{2{,}9 + j5{,}1}{3} = 0{,}967 + j1{,}7\ \Omega$$

y la del devanado secundario es $\mathbf{Z}_{2Y} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} + j\ 2{,}36 \cdot 10^{-3}\ \Omega$. En consecuencia, la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario es igual a:

$$Z_{cc} = Z_1 + m^2 Z_2 = (0{,}967 + j1{,}7) + 26{,}32^2(1{,}5 \cdot 10^{-3} + j2{,}36 \cdot 10^{-3}) \approx 2 + j3{,}33\ \Omega$$

Además, la corriente secundaria es:

$$I_2 = \frac{1500000}{\sqrt{3} \cdot 380\cos 30°} = 2631{,}58 \text{ A}$$

por lo que se tiene:

$$I_2' = \frac{2631{,}58}{26{,}32} \approx 100 \text{ A}$$

y tomando como referencia la tensión secundaria de fase se puede escribir:

$$\mathrm{V}_2(\text{fase}) = \frac{380\angle 0°}{\sqrt{3}} = 219{,}39\angle 0° \Rightarrow \mathbf{V}_2' = m\mathbf{V}_2 \approx 5773{,}4\angle 0° \text{ V} \quad ; \quad \mathbf{I}_2' = 100\angle -30° \text{ A}$$

La relación fasorial entre la tensión primaria y secundaria es:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2' + \mathbf{Z}_{cc}\mathbf{I}_2' = 5773{,}4\angle 0° + (2 + j3{,}33) \cdot 100\angle -30° \approx 6116\angle 1{,}76° \text{ V}$$

es decir, la tensión simple del primario equivalente es de 6116 voltios, lo que corresponde a una tensión compuesta o también a la tensión entre fases del primario en triángulo del transformador real:

$$V_{1L} = \sqrt{3}\,V_1 = \sqrt{3} \cdot 6116 \approx 10593{,}2 \text{ voltios}$$

Si se llega a aplicar la fórmula aproximada de Kapp, el resultado sería:

$$V_1 = V_2' + R_{cc}I_2'\cos\varphi + X_{cc}I_2'\operatorname{sen}\varphi = 5773{,}4 + 2 \cdot 100 \cdot 0{,}866 + 3{,}33 \cdot 100 \cdot 0{,}5 = 6113{,}1 \text{ voltios}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$V_{1L} = \sqrt{3}\,V_1 = \sqrt{3} \cdot 6113{,}1 \approx 10588{,}2 \text{ voltios}$$

que prácticamente coincide con el valor exacto.

c) El índice de carga óptimo del transformador es igual a:

$$C_{opt} = 0{,}75 = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}}$$

y como las pérdidas en el cobre a plena carga son:

$$P_{cc} = P_{cu}(\text{Plena carga}) = 3R_{cc}I_2'^2 = 3 \cdot 2 \cdot 100^2 = 60 \text{ kW}$$

el valor de las pérdidas en el hierro o de vacío serán:

$$P_0 = P_{Fe} = C_{opt}^2 P_{cc} = 0{,}75^2 \cdot 60 = 33{,}75 \text{ kW}$$

y por lo tanto el rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1500}{1500 + 33{,}75 + 60} = 94{,}12\%$$

d) En la Figura 3.18 se muestra, a la izquierda, la disposición de las bobinas reales del transformador, vistas desde la caja de bornes en la que se han abatido las bobinas 90°. Las uniones correspondientes se han preparado teniendo en cuenta las conexiones de la Figura 3.16. En la Figura 3.18a se ha dibujado el triángulo de tensiones primarias, en las que se ha colocado el terminal A en las 12horas. En la Figura 3.18b se ha dibujado la estrella de tensiones secundarias, en las que las tensiones de fase son paralelas a las tensiones primarias correspondientes. En la Figura 3.18c se han superpuesto ambos diagramas fasoriales de tensiones encima de un reloj para determinar de este modo el índice horario; obsérvese que entre a y A el reloj señala las 11 horas, es decir, el transformador es de la forma Dy11.

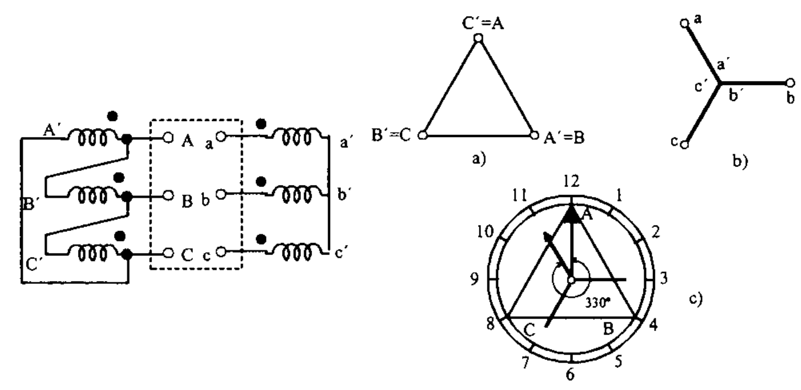


Figura 3.18

Problema 3.30

La Figura 3.19 muestra un transformador trifásico estrella-triángulo de relación de tensiones compuestas 15000/380 V, que alimenta en el lado de baja tensión una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo de 0,3∠+36,87° ohmios/fase. Suponiendo que en estas condiciones el transformador trabaja a plena carga y que la tensión secundaria es de 380 V, calcular: a) potencia aparente o de plena carga del transformador en kVA; b) si las impedancias de los devanados primario y secundario por fase son respectivamente: $\mathbf{Z}_1 = 2 + j4$ *ohmios;* $\mathbf{Z}_2 = 1 \cdot 10^{-3} + j\ 2 \cdot 10^{-3}$ *ohmio; calcular la tensión* V_1 *de línea para alimentar la carga a 380 V; c) calcular el rendimiento del transformador si el índice de carga óptimo o de máximo rendimiento es igual a 0,8; d) ¿cuál es el valor del ángulo horario del transformador si la sucesión de fases es RST. NOTA: utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.*

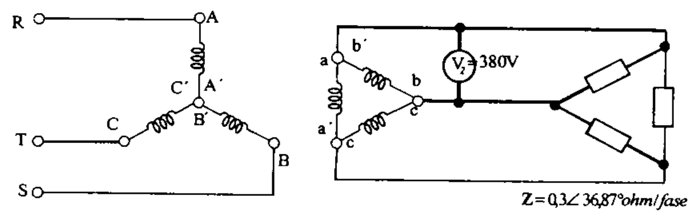


Figura 3.19

Solución

a) La conexión real del transformador es estrella-triángulo. Vamos a resolver el problema utilizando el *transformador estrella-estrella equivalente*. En la Figura 3.20 se muestra el esquema correspondiente. La impedancia por fase de la carga en estrella equivalente es igual a:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} = \frac{0,3\angle 36,87^\circ}{3} = 0,1\angle 36,87^\circ\ \Omega$$

De este modo, al tomar la tensión simple de secundario como referencia de fases da lugar a una corriente secundaria:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{380/\sqrt{3}}{0,1\angle 36,87^\circ} = 2193,93\angle -36,87^\circ\ \text{A}$$

por consiguiente la potencia aparente secundaria a plena carga con la que trabaja el transformador es igual a:

$$S = \sqrt{3}\cdot V_2\ I_2 = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 2193,93 = 1444\ \text{kVA}$$

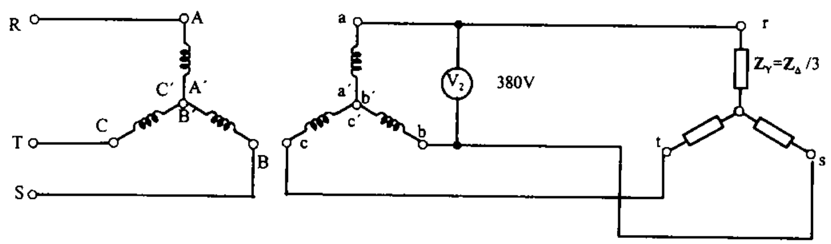


Figura 3.20

b) La relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente vale:

$$m = \frac{15000}{380} = 39,47$$

y las impedancias de los devanados son:

$$\mathbf{Z}_1 = 2 + j4\Omega \ ;\ \mathbf{Z}_{2\Delta} = 1\cdot 10^{-3} + j2\cdot 0^{-3}\Omega \Rightarrow \mathbf{Z}_{2Y} = \frac{\mathbf{Z}_{2\Delta}}{3} = \frac{1\cdot 10^{-3} + j2\cdot 10^{-3}}{3} = 0,333\cdot 10^{-3} + j0,666\cdot 10^{-3}\Omega$$

por lo que la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario será igual a:

$$\mathbf{Z}_{cc} = \mathbf{Z}_1 + m^2\mathbf{Z}_{2Y} = (2 + j4) + 39,47^2(0,333\cdot 10^{-3} + j0,666\cdot 10^{-3}) = 2,52 + j5,04\ \Omega$$

La relación entre la tensión primaria y secundaria es:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2' + \mathbf{Z}_{cc}\mathbf{I}_2'$$

y al tomar como referencia de fases la tensión secundaria de fase, las expresiones de $\mathbf{V}_2'$ e $\mathbf{I}_2'$ son:

$$\mathbf{V}_2' = m\mathbf{V}_2 = 39,47\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 8660\angle 0^\circ\ \text{V} \quad ;\quad \mathbf{I}_2' = \frac{\mathbf{I}_2}{m} = \frac{2193,93\angle -36,87^\circ}{38,47} = 57,03\angle -36,87^\circ\ \text{A}$$

por lo que se obtiene una tensión primaria:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2' + \mathbf{Z}_{cc}\mathbf{I}_2' = 8660\angle 0^\circ + (2,52 + j5,04)\cdot 57,03\angle -36,87^\circ = 8949\angle 0,9^\circ\ \text{V}$$

que corresponde a una tensión primaria de línea:

$$V_{1\,\text{línea}} = \sqrt{3}\cdot 8949 = 15500\ \text{V}$$

b) El índice de carga óptimo viene expresado por:

$$C_{opt} = 0,8 = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{P_{cc}}}$$

y como las pérdidas en el cobre a plena carga son:

$$P_{cc} = P_{cu}(\text{Plena carga}) = 3R_{cc}I_2'^2 = 3\cdot 2,52\cdot 57,03^2 = 24,6\ \text{kW}$$

el valor de las pérdidas en el hierro o de vacío serán:

$$P_0 = P_{Fe} = C_{opt}^2 P_{cc} = 0,8^2\cdot 24,6 = 15,7\ \text{kW}$$

y por lo tanto el rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 2193,93\cdot 0,8}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 2193,93\cdot 0,8 + 15,7 + 24,6} = 96,62\%$$

c) En la Figura 3.21 se muestra a la izquierda la disposición de las bobinas reales del transformador vistas desde la caja de bornes, en la que se han abatido las bobinas 90°. Las uniones correspondientes se han preparado teniendo en cuenta las conexiones de la Figura 3.19.

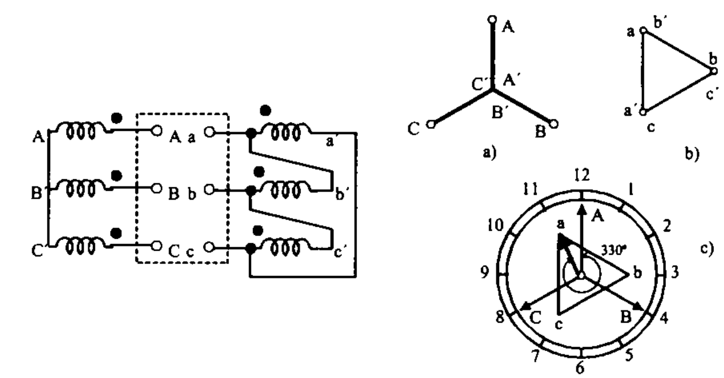


Figura 3.21

En la Figura 3.21a se ha dibujado la estrella de tensiones primaria, en la que se ha tomado la fase A como referencia vertical; en la Figura 3.21b se ha dibujado el triángulo de tensiones secundarias en las que las tensiones de fase son paralelas (misma fase) a las tensiones primarias correspondientes. En la Figura 3.21c se han superpuesto ambos diagramas fasoriales de tensiones encima de un reloj para determinar de este modo el índice horario; obsérvese que entre a y A el reloj señala las 11 horas, es decir, el transformador es de la forma Yd11.

Problema 3.31

Se dispone de un transformador trifásico de 50 MVA, 380 kV/60 kV (tensiones compuestas), conexión Yy0, que ha sido sometido a un ensayo de cortocircuito, alimentado por el lado de B.T. Las medidas fueron las siguientes: V_{2cc}= 4,2 kV de línea; I_{2cc}= 420,5 A; P_{cc}(total)= 184 kW. El transformador está conectado a una red de 370 kV de tensión compuesta, 50 Hz, a través de una línea trifásica de 50 km de longitud, de resistencia despreciable y reactancia 0,4 ohmios por kilómetro. El transformador alimenta por su secundario una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo constituida por una resistencia de 220 ohmios en serie con un condensador de 15 microfaradios. Calcular: a) tensión secundaria de línea V_2; b) corriente secundaria I_2; c) rendimiento del transformador en esas condiciones si las pérdidas en el hierro son de 150 kW. NOTA: para realizar el problema se considera despreciable la impedancia en paralelo del circuito equivalente.

Solución

a) En la Figura 3.22 se muestra el esquema eléctrico. La relación de transformación es igual a:

$$m = \frac{380000}{60000} = 6,333$$

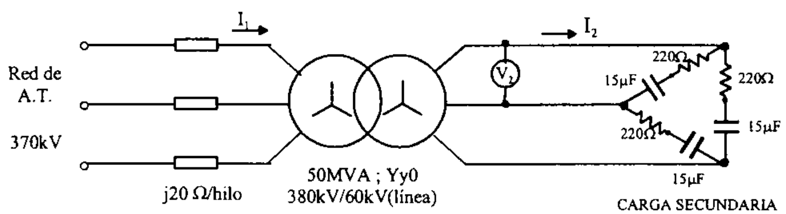


Figura 3.22

Los valores de la tensión simple secundaria de cortocircuito y la corriente de cortocircuito son, respectivamente:

$$V_{2cc}(\text{fase}) = \frac{4200}{\sqrt{3}} = 2424,87 \text{ V} \quad ; \quad I_{2cc}(\text{fase}) = 420,5 \text{ A}$$

por lo que resulta:

$$184000 = 3 \cdot 2424,87 \cdot 420,5 \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,06 \; ; \; \text{sen}\varphi_{cc} = 0,998$$

por lo que la impedancia de cortocircuito reducida al secundario y al primario valen, respectivamente:

$$Z_{cc2} = \frac{2424,87}{420,5} = 5,77 \; \Omega \Rightarrow Z_{cc} = m^2 Z_{cc2} = 6,333^2 \cdot 5,77 = 231,3 \; \Omega$$

de donde se deduce:

$$R_{cc} = 231,3 \cdot 0,06 = 13,88 \; \Omega \qquad X_{cc} = 231,3 \cdot 0,998 = 230,85 \; \Omega$$

Por otro lado, la carga en triángulo tiene una impedancia por fase:

$$\mathbf{Z}_\Delta = R - j\frac{1}{C\omega} = 220 - j\frac{10^6}{15 \cdot 2\pi \cdot 50} = 220 - j212,2 \; \Omega$$

que corresponde a una impedancia en estrella equivalente:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} = \frac{220 - j212,2}{3} = 73,3 - j70,73 = 101,89\angle -43,97° \; \Omega$$

que al pasar al primario vale:

$$\mathbf{Z}'_Y = m^2 \mathbf{Z}_Y = 6,333^2 \cdot 101,89\angle -43,97° = 4086,92\angle -43,97° \; \Omega$$

En la Figura 3.23 se muestra el circuito equivalente por fase de la instalación reducido al primario del transformador. Al tomar como referencia la tensión simple de primario da lugar a una corriente primaria:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{370000}{\sqrt{3}}\angle 0°}{j20 + (13,88 + j230,85) + 4086,92\angle -43,97°} = \frac{213619,6\angle 0°}{3927,35\angle -41,19°} = 54,4\angle 41,19° \text{ A}$$

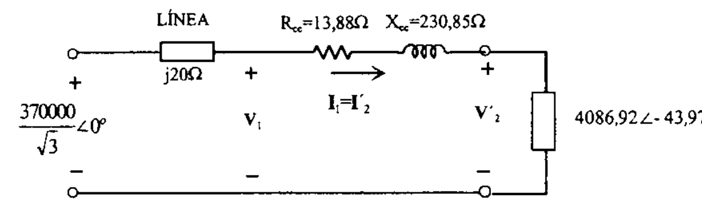


Figura 3.23

y en consecuencia la tensión simple del secundario reducida al primario será:

$$\mathbf{V}'_2 = m^2 \mathbf{Z}_L \mathbf{I}_1 = 4086,92\angle -43,97° \cdot 54,4\angle 41,19° = 222328,5\angle -2,8° \text{ V}$$

que corresponde a una tensión secundaria:

$$V_{2\text{fase}} = \frac{V'_2}{m} = \frac{222328,5}{6,333} = 35104,5 \text{ V} \Rightarrow V_{2\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 35104,5 = 60802,8 \text{ V}$$

b) El valor de la corriente primaria es de 54,4 amperios, y al no existir corriente de vacío se cumple:

$$I_1 = I'_2 = \frac{I_2}{m} \Rightarrow I_2 = 54,4 \cdot 6,33 = 344,5 \text{ A}$$

c) El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{3V'_2 I'_2 \cos\varphi_2}{3V'_2 I'_2 \cos\varphi_2 + P_{Fe} + 3R'_2 I'^2_2} = \frac{3 \cdot 222328,5 \cdot 54,4 \cos 43,97}{3 \cdot 222328,5 \cdot 54,4 \cos 43,97° + 150000 + 3 \cdot 13,88 \cdot 54,4^2} = \frac{27,3 \text{MW}}{27,58 \text{MW}} = 99\%$$

Problema 3.32

La Figura 3.24 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica para la alimentación de un grupo de bombeo y su aplicación en regadíos. Se dispone de una red de distribución trifásica alimentada por una pequeña minicentral hidráulica situada en un área cercana a la estación de bombeo. La minicentral consiste en un grupo turbina-alternador que genera una tensión asignada de 3000 V, y que a través de una red de media tensión de impedancia despreciable alimenta un transformador reductor de tensión para la alimentación de la estación de bombeo. Las características asignadas del transformador son: S_N= 100 kVA; Conexión Dy 11; relación de tensiones compuestas: 3000/380 V; caídas relativas de tensión: ε_{cc}=10%; ε_{Xcc}= 8%. La red de distribución que une el transformador con el grupo de bombeo tiene una impedancia Z = 0,05 + j 0,1 ohmios por hilo. La estación de bombeo se puede representar por una carga trifásica equilibrada conectada en estrella de impedancia 2 ∠ 36,87° ohmios por fase. Calcular: a) parámetros R_{cc}, X_{cc} del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario; b) tensión compuesta en el primario del transformador (y que debe generar el alternador) para que la tensión en la carga (grupo de bombeo) sea de 380 V de línea; determinar en esta situación el rendimiento del transformador si las pérdidas en el hierro son de 2 kW; c) si la tensión en el primario del transformador es de 3000 V (tensión compuesta) ¿cuál será el valor de la tensión de línea que se tendrá en el grupo de bombeo?; determinar en este caso la caída relativa de tensión (regulación) del transformador.

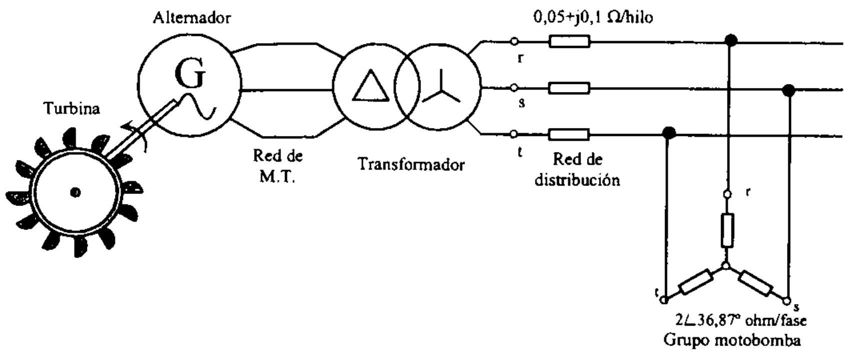


Figura 3.24

Solución

a) En la Figura 3.25 se muestra el esquema eléctrico utilizando un transformador estrella-estrella equivalente. La corriente primaria de plena carga vale:

$$I_{1n} = \frac{100000}{\sqrt{3}\cdot 3000} = 19,25 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta que la tensión primaria de fase es de $\frac{3000}{\sqrt{3}}$, se deducen los valores de la impedancia de cortocircuito y sus componentes respectivas:

$$\varepsilon_{cc} = 0,1 = \frac{Z_{cc}19,25}{\frac{3000}{\sqrt{3}}} \Rightarrow Z_{cc} = 9\ \Omega \ ; \ \varepsilon_{Xcc} = 0,08 = \frac{X_{cc}19,25}{\frac{3000}{\sqrt{3}}} \Rightarrow X_{cc} = 7,2\ \Omega$$

$$R_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - X_{cc}^2} = \sqrt{9^2 - 7,2^2} = 5,4\ \Omega$$

En consecuencia la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario es de la forma compleja:

$$\mathbf{Z}_{ccY} = 5,4 + j,7,2 = 9\angle 53,13° \Rightarrow \mathbf{Z}_{cc\Delta} = 3\mathbf{Z}_{ccY} = 16,2 + j,21,6 = 27\angle 53,13°\ \Omega$$

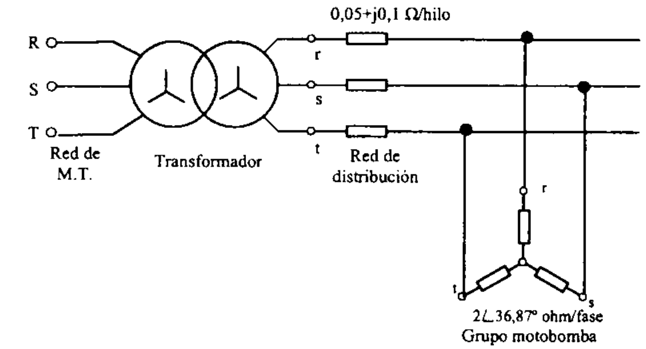


Figura 3.25

b) El circuito equivalente por fase de la instalación reducido al primario es el mostrado en la Figura 3.26. La relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente es igual a:

$$m = \frac{3000}{380} = 7,895$$

por lo que la impedancia de la línea de B.T. y de la carga pasada al lado primario tendrán los valores siguientes:

$$m^2\mathbf{Z}_{\text{línea}} = 7,895^2(0,05 + j0,1) = 3,12 + j6,23\ \Omega \ ; \ m^2\mathbf{Z}_L = 7,895^2 \cdot 2\angle 36,87° = 124,66\angle 36,87°\ \Omega$$

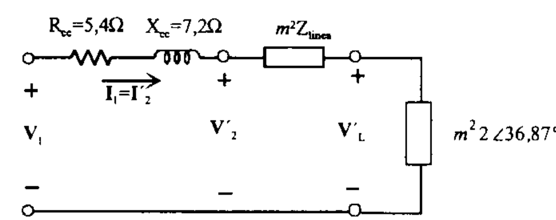


Figura 3.26

Ahora bien, la tensión compuesta en la carga, que es el grupo de bombeo, es de 380 voltios, lo que corresponde a:

$$\mathbf{V}_L = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0° \Rightarrow \mathbf{V}_L' = m\mathbf{V}_L = \frac{3000}{\sqrt{3}}\angle 0°$$

y por lo tanto, de acuerdo con el circuito equivalente de la Figura 3.26, la corriente de la carga reducida al primario, que será la propia corriente primaria del transformador, tendrá un valor:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{3000}{\sqrt{3}}\angle 0°}{124,66\angle 36,87°} = 13,9\angle -36,87°\ \text{A}$$

y por lo tanto la tensión necesaria en el primario será:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{3000}{\sqrt{3}}\angle 0° + \left[(5,4 + j7,2) + 3,12 + j6,23\right] 13,9\angle -36,87° = 1940,32\angle 2,3° \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de la tensión de línea en el primario de valor:

$$V_{1\text{Línea}} = 1940,32\sqrt{3} = 3360,7 \text{ V}$$

Por otro lado la tensión secundaria por fase en carga reducida al primario del transformador, se obtiene del circuito de la Figura 3.27 resultando ser:

$$\mathbf{V}_2' = (3,12 + j6,23 + 124,66\angle 36,87°)\cdot 13,9\angle -36,87° = 1820,1°\angle 1,36° \text{ V}$$

y de este modo la potencia activa secundaria del transformador vale:

$$P_2 = 3V_2'I_2'\cos\varphi_2 = 3\cdot 1820,1\cdot 13,9\cos(36,87° + 1,36°) = 59621 \text{ W}$$

y la potencia en el primario del transformador es igual a:

$$P_1 = P_2 + P_p = 59621 + 2000 + 3\cdot 5,4\cdot 13,9^2 = 64751 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{59621}{64751} = 92,1\%$$

c) El circuito eléctrico equivalente en esta situación es el señalado en la Figura 3.27, en el que se conoce ahora la tensión primaria del transformador. Si se toma como referencia de fases esta tensión, la corriente en el primario del transformador será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{3000}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(5,4 + j7,2) + (3,12 + j6,23) + 124,66\angle 36,87°} = \frac{\frac{3000}{\sqrt{3}}\angle 0°}{139,6\angle 39,2°} = 12,4\angle -39,2° \text{ A}$$

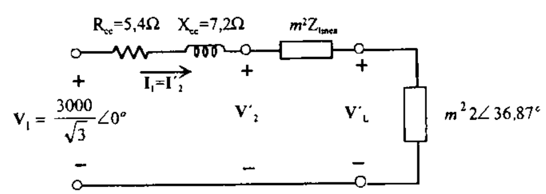


Figura 3.27

Y por consiguiente la tensión reducida de la carga por fase será:

$$\mathbf{V}_L' = 124,66\angle 36,87°\cdot 12,4\angle -39,2° = 1546,7\angle -2,33° \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de tensión de fase en la carga:

$$V_L = \frac{V_L'}{m} = \frac{1546,7}{7,895} = 195,9 \text{ V}$$

y a una tensión de línea:

$$V_L(\text{línea}) = \sqrt{3}\cdot 195,9 = 339,3 \text{ V}$$

y de un modo similar, la tensión secundaria reducida al primario del transformador vale:

$$\mathbf{V}_2' = (3,12 + j6,23 + 124,66\angle 36,87°)\cdot 12,4\angle -38,24° = 1623,3\angle -1,4° \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de tensión de fase en el secundario:

$$V_2 = \frac{V_2'}{m} = \frac{1623,3}{7,895} = 205,6 \text{ V}$$

y a una tensión de línea:

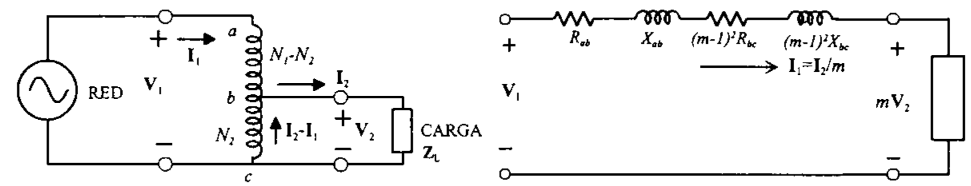
$$V_2(\text{línea}) = \sqrt{3}\cdot 205,6 = 356,1 \text{ V}$$

y de este modo el valor de la caída relativa de tensión del transformador es:

$$\varepsilon = \frac{V_2(\text{vacío}) V_2(\text{carga})}{V_2(\text{vacío})} = \frac{380 - 356,1}{380} = 6,29\%$$

Problema 3.33

La Figura 3.28a muestra un autotransformador de relación 3/1. La impedancia de la parte ab del devanado es de 0,2+j0,3 ohmios y la impedancia de la parte común bc es de 0,05+j 0,1 ohmios. a) Si se desprecia la corriente de vacío ¿cuánto valdrá la corriente de entrada si se aplican 30 voltios al devanado primario cuando el secundario está cortocircuitado?; b) si la impedancia de carga es $\mathbf{Z}_L$=0,6+j0,8 ohmios, calcular la tensión necesaria en el primario para que la tensión secundaria en la carga sea V_2= 120 voltios.



a) b)

Figura 3.28

Solución

Teoría previa: En el circuito de la Figura 3.28a se muestra un autotransformador genérico. El número de espiras totales de la entrada es N_1 y el de salida N_2 ; la corriente absorbida de la red es $\mathbf{I}_1$ y la corriente que se entrega a la carga es $\mathbf{I}_2$. En la figura se muestra la distribución de corrientes en los devanados. Se observa que hay $N_1 - N_2$ espiras recorridas por una corriente $\mathbf{I}_1$ y N_2 espiras recorridas por una corriente $\mathbf{I}_2$–$\mathbf{I}_1$ en el sentido señalado en la Figura 3.28a. Si el autotransformador es ideal se cumple la denominada relación de transformación m:

$$m = \frac{N_{ac}}{N_{bc}} = \frac{E_{ac}}{E_{bc}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \frac{I_{cb}}{I_{ac}} = \frac{I_2 - I_1}{I_1} = m - 1 \qquad (1)$$

Si se denomina $\mathbf{Z}_{ab} = R_{ab} + j\,X_{ab}$ a la impedancia del devanado situado en el tramo *ab* por el que solo circula la corriente $\mathbf{I}_1$, y se denomina $\mathbf{Z}_{bc} = R_{bc} + j\,X_{bc}$ La impedancia del devanado que existe en la zona *bc* y por el que circula la corriente $\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1$ y se denomina $\mathbf{E}_{bc}$ a la f.e.m. inducida en el tramo *bc* del devanado, se cumple en el secundario:

$$\mathbf{E}_{bc} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{bc}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) \qquad (2)$$

y si se denomina $\mathbf{E}_{ab}$ a la f.e.m. inducida en el tramo *ab* del devanado, se cumple en el primario:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_{ac} + \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_{bc}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) \qquad (3)$$

y teniendo en cuenta las relaciones (1) y llevándolas a (3), resulta:

$$\mathbf{V}_1 = m\mathbf{E}_{bc} + \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_{bc}(m-1)\mathbf{I}_1 \qquad (4)$$

Sustituyendo $\mathbf{E}_{bc}$ de la relación (2) y llevando a (4) queda:

$$\mathbf{V}_1 = m\left[\mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{bc}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)\right] + \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_{bc}(m-1)\mathbf{I}_1 = m\mathbf{V}_2 + \left[(m-1)^2\mathbf{Z}_{bc} + \mathbf{Z}_{ab}\right]\mathbf{I}_1 \qquad (5)$$

Como la tensión secundaria $\mathbf{V}_2$ se puede escribir en función de la impedancia de carga por:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_L\mathbf{I}_2 = m\mathbf{Z}_L\mathbf{I}_1 \qquad (6)$$

al llevar este valor a (5) resulta:

$$\mathbf{V}_1 = \left[m^2\mathbf{Z}_L + (m-1)^2\mathbf{Z}_{bc} + \mathbf{Z}_{ab}\right]\mathbf{I}_1 \qquad (7)$$

que corresponde al circuito equivalente reducido al primario mostrado en la Figura 3.28b. Obsérvese en este circuito equivalente que la impedancia de carga se transfiere al primario con la misma ley que en los transformadores clásicos de dos devanados separados, es decir, $m^2\mathbf{Z}_L$; sin embargo la impedancia de la parte común *bc* del autotransformador se pasa al primario con la relación $(m-1)^2$.

En el caso de que el autotransformador fuera elevador tal como se muestra en la Figura 3.29a, entonces $N_2 > N_1$ y las corrientes se distribuyen como se señala en esta figura, de tal modo que en el caso ideal se cumple:

$$m = \frac{N_{bc}}{N_{ac}} = \frac{E_{bc}}{E_{ac}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} \qquad (8)$$

y las ecuaciones de primario y secundario son, respectivamente:

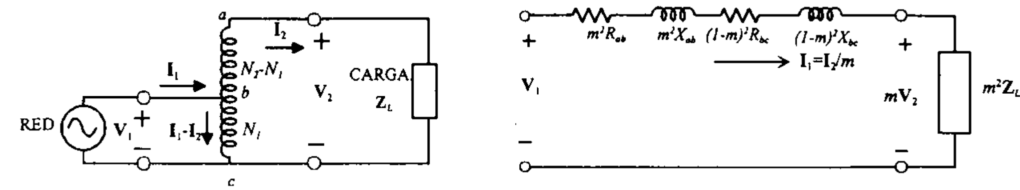
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_{bc} + \mathbf{Z}_{bc}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \qquad (9)$$

$$\mathbf{E}_{ac} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{I}_2 - \mathbf{Z}_{bc}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \qquad (10)$$

y que operando da lugar a:

$$\mathbf{V}_1 = m\mathbf{V}_2 + \left[m^2\mathbf{Z}_{ab} + (1-\mathrm{m})^2\mathbf{Z}_{bc}\right]\mathbf{I}_1 \qquad (11)$$

que corresponde al circuito equivalente reducido al primario mostrado en la Figura 3.29b.



a) b)

Figura 3.29

a) El problema propuesto pertenece al primer caso estudiado, es decir, es un autotransformador reductor (Figura 3.28a) en el que la relación de transformación es igual a:

$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = 3$$

Al emplear el circuito equivalente de la Figura 3.28b resulta:

$$R_{ab} + (m-1)^2 R_{bc} = 0{,}2 + (3-1)^2 0{,}05 = 0{,}4\ \Omega \quad ; \quad X_{ab} + (m-1)^2 X_{bc} = 0{,}3 + (3-1)^2 0{,}1 = 0{,}7\ \Omega$$

y al estar en cortocircuito la carga y aplicar una tensión al primario de 30 voltios, se obtiene una corriente de entrada $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{ab}$ de valor:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{30\angle 0^\circ}{0{,}4 + j0{,}7} = 37{,}2\angle 60{,}26^\circ \text{ A}$$

b) La impedancia de carga referida al primario vale $m^2\,\mathbf{Z}_L = 3^2\,(0{,}6 + j\,0{,}8) = 5{,}4 + j\,7{,}2\ \Omega$. Al tomar la tensión secundaria como referencia de fases, es decir: $\mathbf{V}_2 = 120\angle 0^\circ$, en el circuito de la Figura 3.28b se cumple:

$$m\mathbf{V}_2 = 360\angle 0^\circ \Rightarrow \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}_2}{m} = \frac{m\mathbf{V}_2}{m^2\mathbf{Z}_L} = \frac{360\angle 0^\circ}{5{,}4 + j7{,}2} = 40\angle -53{,}13^\circ \text{ A}$$

y por lo tanto al aplicar (5) resulta:

$$\mathbf{V}_1 = m\mathbf{V}_2 + \left[\mathbf{Z}_{ab} + (m-1)^2\mathbf{Z}_{bc}\right]\mathbf{I}_1 = 360\angle 0^\circ + (0{,}4 + j0{,}7)40\angle -53{,}13^\circ = 392\angle 0{,}6^\circ \text{ voltios}$$

Problema 3.34

Un transformador monofásico de dos devanados con valores asignados de 12 kVA, 300/100 V, tiene una impedancia de cortocircuito reducida al primario de 0,9+j1,2 Ω siendo la corriente de vacío despreciable. Se conectan las bobinas del transformador en serie para formar un autotransformador reductor de tensión de relación 400/100 V; a) calcular la potencia de plena carga que puede asignarse a este autotransformador; b) si el autotransformador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo y la tensión secundaria es de 100 V ¿cuál será la tensión necesaria en el primario?; c) repetir el problema si las bobinas del transformador se unen para construir un autotransformador elevador de tensión de relación 300/400 V funcionando a la plena carga correspondiente con una tensión secundaria de 400 V y un f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

a) En la Figura 3.30a se muestra el transformador de dos devanados separados y en la Figura 3.30b se aprecia la unión de las bobinas para conseguir un autotransformador reductor de tensión. Los terminales de las bobinas de primario y secundario se han designado respectivamente por las letras *ab* y *bc* para identificar esta figura con la señalada en la Figura 3.28 del problema anterior. Como quiera que las tensiones asignadas en el transformador son de 300 V y 100 V y la potencia asignada es de 12 kVA, las corrientes de plena carga del primario y secundario del transformador convencional (dos devanados separados) es:

$$I_1 = \frac{S}{V_1} = \frac{12000}{300} = 40 \text{ A} \;;\; I_2 = \frac{S}{V_2} = \frac{12000}{100} = 120 \text{ A}$$

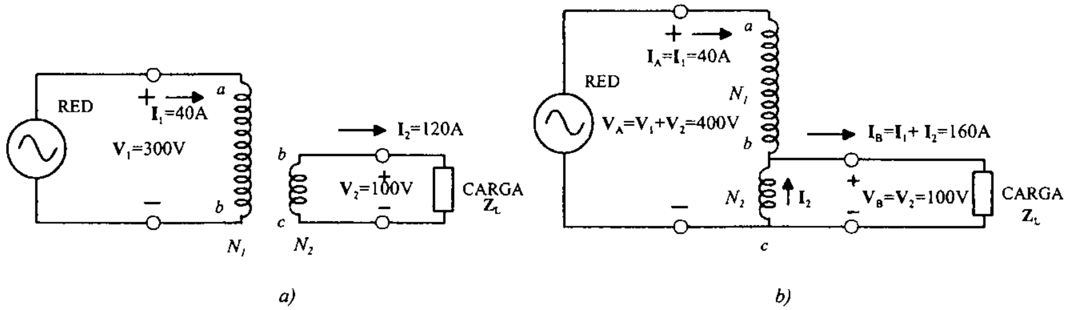


Figura 3.30

Cuando se unen las bobinas para formar el autotransformador mostrado en la Figura 3.30b, la tensión del primario es $V_A = V_1 + V_2 = 300 + 100 = 400$ V y la secundaria $V_B = V_2 = 100$ V; además la distribución de corrientes es la que señala la figura para no superar los valores asignados del transformador. Por ello que la potencia aparente que puede asignarse al autotransformador, sin que se superen los valores asignados de las corrientes internas, es:

$$S_{autotransf} = V_A I_1 = V_B(I_1 + I_2) = 400 \cdot 40 = 100(120 + 40) = 16 \text{ kVA}$$

b) Antes de calcular las tensiones reales solicitadas, es preciso determinar la impedancia reducida al primario que ve el autotransformador, conociendo la impedancia reducida al primario del transformador de dos devanados. Observando la Figura 3.30a se puede escribir:

$$\mathbf{Z}_{cc1}(\text{transformador}) = \mathbf{Z}_{ab} + m^2 \mathbf{Z}_{bc} = \mathbf{Z}_{ab} + 3^2 \mathbf{Z}_{bc} = 0{,}9 + j1{,}2\ \Omega$$

ya que la relación de transformación del transformador vale $m = N_1/N_2 = 300/100 = 3$. Pero al comparar la Figura 3.30b con la Figura 3.28b y teniendo en cuenta la expresión (7) del problema anterior, la impedancia equivalente reducida al primario del autotransformador vale:

$$\mathbf{Z}_{cc1}(\text{autotransformador}) = \mathbf{Z}_{ab} + (m_a - 1)^2 \mathbf{Z}_{bc} = \mathbf{Z}_{ab} + (4-1)^2 \mathbf{Z}_{bc} = \mathbf{Z}_{ab} + 3^2 \mathbf{Z}_{bc} = \mathbf{Z}_{cc1}(\text{tranformador}) = 0{,}9 + j1{,}2\ \Omega$$

ya que la relación de transformación como autotransformador es ahora $m_a = (N_1+N_2)/N_2 = 400/100 = 4$. De acuerdo con este resultado, la impedancia reducida al primario como autotransformador en este montaje específico *coincide con la impedancia reducida al primario del transformador real.* Si la tensión secundaria como autotransformador es de 100 voltios y se toma esta como referencia de fases, la corriente de plena carga reducida al primario como autotransformador es de 40 amperios y está retrasada un ángulo de 36,87° (que es el arco coseno de 0,8). Si se denomina $\mathbf{V}_1$ a la tensión que se requiere en el primario del autotransformador, se puede escribir:

$$\mathbf{V}_1 = m_a \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{cc1}(\text{autotransfomador})\mathbf{I}_1 = 4 \cdot 100\angle 0° + (0{,}9 + j1{,}2) 40\angle -36{,}87° = 457{,}6 + 16{,}8 = 457{,}91\angle 2{,}1°\ \text{V}$$

es decir, la tensión necesaria en el primario debe ser de 457,91 voltios.

c1) Cuando las bobinas del transformador se unen para formar un autotransformador elevador de tensión de relación 300/400 V, los esquemas correspondientes se muestran en la Figura 3.31.Obsérvese que los terminales de las bobinas de primario

y secundario se han designado ahora por las letras *bc* y *ab* respectivamente, para identificar esta figura con la señalada en la Figura 3.29 del problema anterior. La tensión del primario es ahora $V_A = V_1 = 300$ V y la secundaria $V_B = V_1 + V_2 = 300 + 100 = 400$ V. Además la distribución de corrientes es la que se señala en la figura para que no se superen los valores asignados al transformador. Por ello que la potencia aparente que puede asignarse al autotransformador ahora es:

$$S_{autotransf} = V_A(I_1 + I_2) = V_B I_2 = 300(120 + 40) = 400 \cdot 120 = 48 \text{ kVA}$$

c2) Antes de calcular las tensiones reales solicitadas es preciso determinar la impedancia reducida al primario que ve el autotransformador, conociendo la impedancia reducida al primario del transformador de dos devanados. Observando la Figura 3.31a se puede escribir:

$$\mathbf{Z}_{cc1}(\text{transformador}) = \mathbf{Z}_{bc} + m^2 \mathbf{Z}_{ab} = \mathbf{Z}_{bc} + 3^2 \mathbf{Z}_{ab} = 0{,}9 + j1{,}2\ \Omega$$

ya que la relación de transformación del transformador vale $m = N_1/N_2 = 300/100 = 3$. Pero al comparar la Figura 3.31b con la Figura 3.29 y teniendo en cuenta la expresión (11) del problema anterior, la impedancia equivalente reducida al primario del autotransformador vale ahora:

$$\mathbf{Z}_{cc1}(\text{autotransformador}) = m_a^2 \mathbf{Z}_{ab} + (1 - m_a)^2 \mathbf{Z}_{bc} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \mathbf{Z}_{ab} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \mathbf{Z}_{bc} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \mathbf{Z}_{ab} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathbf{Z}_{bc}$$

es decir:

$$\mathbf{Z}_{cc1}(\text{autotransformador}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \mathbf{Z}_{ab} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathbf{Z}_{bc} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left[3^2 \mathbf{Z}_{ab} + \mathbf{Z}_{bc}\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathbf{Z}_{cc1}(\text{trafos real}) = \frac{0{,}9 + j1{,}2}{16}\ \Omega$$

ya que la relación de transformación como autotransformador es ahora $m_a = N_1/(N_1+N_2)/ = 300/400 = 1/4$. De acuerdo con este resultado, la impedancia reducida al primario como autotransformador en esete montaje específico es *1/16 veces la impedancia reducida al primario del transformador real.* Si la tensión secundaria como autotransformador es de 400 voltios y se toma esta como referencia de fases, la corriente de plena carga reducida al primario como autotransformador es de 160 amperios retrasado un ángulo de 36,87° (que es el arco coseno de 0,8) y si se denomina $\mathbf{V}_1$ a la tensión que se requiere en el primario del autotransformador, se puede escribir:

$$\mathbf{V}_1 = m_a \mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{cc1}(\text{autotransfomador})\mathbf{I}_1 = \left(\frac{3}{4}\right) 400\angle 0° + \frac{(0{,}9 + j1{,}2)}{16} 160\angle -36{,}87° = 314{,}4 + j4{,}2 = 314{,}43\angle 0{,}8°\ \text{V}$$

es decir, la tensión necesaria en el primario debe ser de 314,43 voltios.

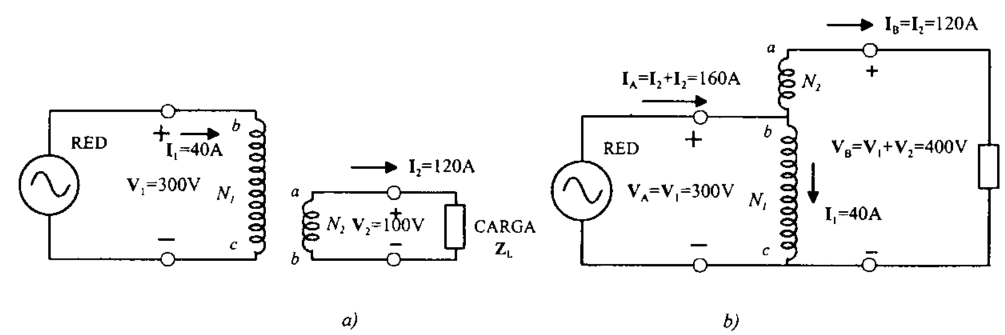


Figura 3.31

Problema 3.35

En la Figura 3.32 se muestra un circuito de c.a. monofásico que dispone de un transformador de medida de corriente para medir la intensidad del circuito y que tiene una relación K_i= 1/100. La impedancia del secundario del transformador de corriente es de 0,2+j0,3 Ω y alimenta un amperímetro de impedancia interna 0,5 +j 0,3 Ω.

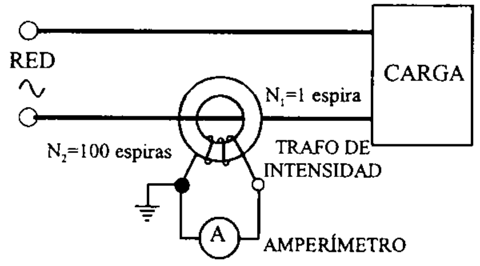


Figura 3.32

Se sabe que el núcleo requiere una f.m.m. de 20 A.v. para vencer las perdidas en el hierro y de 40 A.v. para la magnetización del núcleo. Si el amperímetro señala una corriente de 4 amperios, calcular: a) corriente del primario del transformador de medida; b) error de relación de corriente ε_i; c) error de fase δ; d) ¿en cuántas espiras se podrá reducir el devanado secundario del transformador de medida para eliminar el error de intensidad?

Solución

a) En la Figura 3.33 se muestra el circuito equivalente del transformador de medida reducido al secundario. En el transformador de corriente se debe cumplir la siguiente igualdad entre las f.m.m.:

$$N_1\mathbf{I}_1 = N_1\mathbf{I}_0 + N_2\mathbf{I}_2 \text{ (donde } N_1 = 1 \text{ espira; } N_2 = 100 \text{ espiras)}$$

Si se toma la tensión primaria como referencia de fases, la f.m.m. necesaria para vencer las pérdidas en el hierro es de $20\angle 0°$ A.v., mientras que para la imanación del núcleo se requiere una f.m.m. de $40\angle -90°$, es decir la f..m.m. de vacío del transformador de corriente vale:

$$\mathbf{F}_0 = N_1\mathbf{I}_0 = 20 - j40 \text{ A.v.}$$

La f.m.m. secundaria tiene una magnitud N_2I_2= 100 · 4 = 400 A.v., pero hay que determinar su desfase respecto a la tensión primaria tomada como origen de fases. Para ello se observa en el circuito equivalente de la Figura 3.33 que la impedancia total del secundario vale:

$$\mathbf{Z}_{2t} = (0{,}2 + j0{,}3) + (0{,}5 + j0{,}3) = 0{,}7 + j0{,}6 = 0{,}922\angle 40{,}60° \ \Omega$$

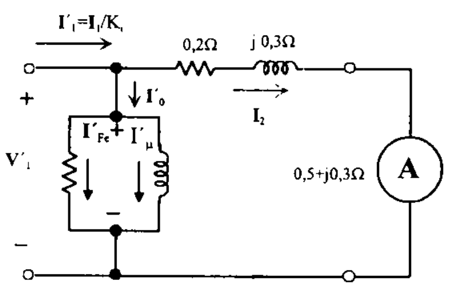


Figura 3.33

y por lo tanto la forma fasorial de la f.m.m. secundaria irá retrasada 40,6° de la tensión primaria, es decir, se tiene:

$$\mathbf{F}_2 = 4000\angle -40{,}60° \text{ A.v.}$$

En consecuencia al aplicar la igualdad de f.m.m. se cumple:

$$N_1\mathbf{I}_1 = (20 - j40) + 400\angle -40{,}6° = 441{,}56\angle -42{,}85°$$

y de este modo el error de relación será:

$$\varepsilon_i = \frac{441{,}56 - 400}{400}100 = 10{,}39\%$$

b) El error de fase es la diferencia de fases entre la corriente medida y la que realmente circula por el primario y que es la diferencia:

$$\delta = 42{,}85° - 40{,}60° = 2{,}25° = 2°15'$$

c) Si la f.m.m. real en el primario debiera ser 400 A.v. (es decir, igual que la del secundario) se debería cumplir:

$$(20 - j40) + 4N_2\angle -40{,}6° = (20 - j40) + N_2(3{,}037 - j2{,}603) = 400\angle\alpha$$

es decir:

$$\sqrt{(20 + 3{,}037N_2)^2 + (40 + 2{,}603N_2)^2} = 400$$

de donde se obtiene N_2 = 89,6 espiras ≈ 90 espiras, es decir, habrá que eliminar del devanado secundario 10 espiras.

Problemas suplementarios

Problema 3.36

Un transformador monofásico de 10 kVA, 200/100 V; alimentado por la tensión asignada de 200 voltios absorbe en vacío una corriente de 2,5 amperios, siendo las pérdidas en esta situación de 300 W. Se conecta una carga en el secundario que absorbe una potencia de 9 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo, siendo la tensión secundaria de 90 voltios. En estas condiciones el primario señala una potencia absorbida de 7,80 kW y una potencia reactiva de 6,2 kVAr. a) Calcular las caídas relativas de tensión del transformador ε_{Rcc} y ε_{Xcc}; b) determinar la tensión primaria del transformador. NOTA: se puede aplicar la aproximación de Kapp. Supóngase que la corriente de vacío y las pérdidas de vacío son constantes.

[Resp. a) ε_{Rcc}= 3%;ε_{Xcc}= 4%; b) 189,6 V]

Problema 3.37

Se dispone de un transformador monofásico de 20 kVA, 400/200 V, ε_{cc}=10%. Al alimentar el primario con una tensión de 371,2 voltios y conectando en el secundario una carga que absorbe 100 amperios con f.d.p. unidad, se registra en el secundario una tensión de 180 voltios. Calcular la tensión necesaria en el primario para que la tensión secundaria sea de 150 voltios cuando el transformador alimenta una carga de 12 kW con f.d.p. 0,8 inductivo.

[Resp. 332 V]

Problema 3.38

Un transformador monofásico de 50 kVA dispone de un primario con 1200 espiras e impedancia 0,2 + j 1 Ω; el secundario tiene 600 espiras y una impedancia de 0,04 + j0,3 Ω. Las pérdidas en el hierro son despreciables y la reactancia magnetizante reducida al primario es de 200 ohmios. Si se alimenta el primario con una tensión de 1000 voltios, calcular utilizando el circuito equivalente exacto del transformador: a) tensión secundaria en vacío; b) tensión secundaria cuando este devanado alimenta una carga que absorbe una corriente de 100 amperios con f.d.p. 0,8 inductivo; c) ¿cuál es la reducción en % en la inducción magnética del transformador entre el funcionamiento en vacío y con la carga considerada en el apartado anterior?

[Resp. a) 497,5 V; b) 456 V; c) 4%]

Problema 3.39

Se dispone de un transformador monofásico de 50 kVA, relación 1000/100 V, cuyos parámetros son:

$$\varepsilon_{Rcc} = 6\ \% \ ; \ \varepsilon_{Xcc} = 8\ \% \ ; \ P_{Fe} = 1000\ W$$

Si el transformador consume en vacío (con tensión nominal aplicada al primario) una corriente de 5 A, calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; b) ¿cuál será la tensión que deberá aplicarse al primario cuando el transformador alimenta una carga con f.d.p. 0,8 inductivo y sabiendo que en estas condiciones se trabaja con un índice de carga para el cual se tiene máximo rendimiento, siendo la tensión secundaria la nominal de 100 V?, ¿cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?, c) si el transformador alimenta una impedancia inductiva de $1\angle 36,87°$ ohmios, estando alimentado el primario por su tensión nominal de 1000 V ¿cuál será la tensión que aparecerá en bornes del secundario?, ¿cuál será la caída relativa de tensión o regulación del transformador en estas condiciones?; d) si se conecta en paralelo este transformador con otro de 100 kVA, relación 1000/100 V y con parámetros $\varepsilon_{Rcc} = 7\%$; $\varepsilon_{Xcc} = 7\%$ ¿cómo se repartirán una potencia de 100 kW con f.d.p. 0,707 inductivo, si se supone que la tensión secundaria es la nominal de 100 V? (Es decir, calcular las potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por cada transformador).

[Resp. a) R_{cc} = 1,2 Ω; X_{cc} = 1,6 Ω; R_{Fe} = 1000 Ω; X_μ = 204,1 Ω; b) 1055,4 V; 92%; c) 98,1 V; 1,9%; d) 29,9 kW; 36,2 kVAr; 46,9 kVA; 70,1 kW; 63,8 kVAr; 94,8 kVA]

Problema 3.40

Se dispone de un transformador monofásico de 100 kVA, relación 1000/100 V, cuyos parámetros son:

$$\varepsilon_{Rcc} = 3\ \%; \ \varepsilon_{Xcc} = 4\ \%; \ P_{Fe} = \text{desconocida}$$

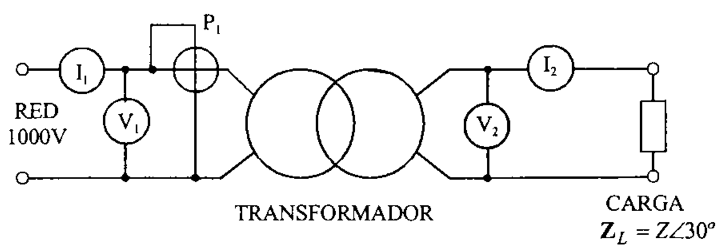


Figura 3.34

El transformador anterior se conecta, tal como se muestra en la Figura 3.34, alimentando a una carga en el secundario de valor: $Z\angle 30°$ Ω, dando lugar a las siguientes lecturas de los aparatos de medida:

$$P_1 = 70150\ W;\ V_1 = 1000\ V;\ I_1 = 85\ A;\ I_2 = 800\ A$$

Calcular: a) lectura que señalará el voltímetro V_2 y rendimiento del transformador; b) pérdidas en el hierro del transformador y corriente de vacío; c) si el transformador trabaja con un índice de carga óptimo y alimentando una carga resistiva, ¿cuál será el rendimiento máximo del transformador en estas condiciones? NOTA: se puede utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador y la aproximación de Kapp.

[Resp. a) 96,31 V; 95,1%; c) 1504,5 W; 7,09 A; c) 95,92%]

Problema 3.41

En la Figura 3.35 se muestra un transformador monofásico que alimenta una carga $\mathbf{Z}_L = Z\angle\varphi$ y que dispone de diversos aparatos de medida eléctricos. En la placa de características del transformador figuran los siguientes datos: S_N = 10 kVA; 1000/100 V; ε_{cc} = 12,42%; P_{cc} = 555 W; P_0 = 400 W; I_0 = 20% (de la corriente nominal primaria).

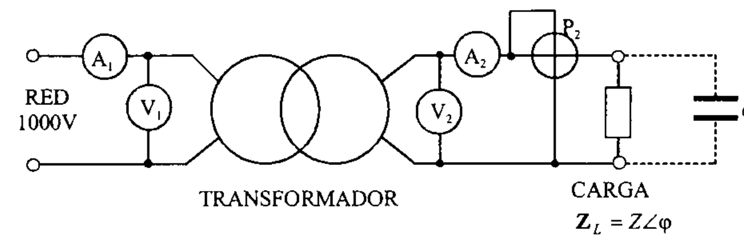


Figura 3.35

Calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; b) el transformador alimenta la impedancia inductiva $\mathbf{Z}_L = Z\angle\varphi$, habiéndose registrado las siguientes lecturas de los aparatos de medida: V_1 = 1000 V; V_2 = 90 V; P_2 = 6480 W, calcular las lecturas que señalarán los amperímetros A_1 y A_2 (se puede aplicar la aproximación de Kapp); c) valor de la impedancia $Z\angle\varphi$ y rendimiento del transformador; d) se desea elevar la tensión secundaria V_2 a su valor nominal de 100 V, para ello se conecta una batería de condensadores en paralelo con la carga, ¿cuál debe ser el valor de la capacidad necesaria si la tensión primaria es siempre de 1000 V? (Se obtiene una solución lo suficientemente correcta aplicando la aproximación de Kapp).

[Resp. a) R_{Fe} = 2500 Ω; X_μ = 510 Ω; R_{cc} = 5,55Ω; X_{cc} = 11,11 Ω; b) A_1 = 10,58 A; A_2 = 90 A; c) 0,8+j0,6 Ω; 85,14%; d) 3183 μF]

Problema 3.42

Se dispone de un transformador monofásico de 100 kVA, relación 1000/100 V, que ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

Vacío: 100 V; 50 A; 2000 W (medidos en el lado de B.T.).

Cortocircuito: 100 V; 100 A; 5000 W (medidos en el lado de A.T.).

Calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (lado *de A.T.); b) ¿cuál será la tensión que deberá aplicarse al primario cuando el transformador alimenta una carga con f.d.p. 0,9 inductivo, sabiendo que en estas condiciones la máquina trabaja con un índice de carga para el cual el rendimiento es máximo (la tensión secundaria se considera que es igual a 100 V)? ¿cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?; c) al conectar al transformador una impedancia inductiva Z∠53,13° ohmios, estando alimentado el transformador por su tensión nominal primaria (1000 V), se observa que la tensión secundaria es de 95,27 V, determinar la magnitud Z de la impedancia; d) con el fin de limitar la corriente de cortocircuito franco en el secundario (falta de cortocircuito) a un valor de 5000 A, siendo la tensión de la red de 1000 V, se intercalan entre la misma y el primario del transformador una reactancia inductiva X_L ohmios, calcular el valor de esta reactancia para que se cumpla la especificación mencionada.*

[Resp. a) R_{Fe} = 500 Ω; X_μ = 218,1 Ω; R_{cc} = 0,5 Ω; X_{cc} = 0,866 Ω; b) 1052,3 V; 93,43%; c) Z = 0,2 Ω; d) 1,07 Ω]

Problema 3.43

Dos transformadores monofásicos de 10 kVA, relación 1000/100 V se conectan en paralelo para alimentar una carga inductiva de impedancia 80+j60 ohmios. La impedancia de cortocircuito del primer transformador reducida al secundario es de 5+j20 ohmios y la correspondiente del segundo vale 5+j10 ohmios. a) Si la tensión secundaria en carga es de 100 V ¿cuáles serán los valores de las corrientes suministradas por cada transformador?; b) si el segundo transformador tiene un cambiador de tomas en el secundario, calcular la reducción en tanto por ciento en la posición del cambiador de tomas para conseguir que las corrientes suministradas por ambos transformadores sean iguales. NOTA: supóngase que el cambio en el cambiador de tomas no modifica sensiblemente la impedancia de cortocircuito del transformador sobre el que actúa.

[Resp. a) $\mathbf{I}_I \approx$ 0,354∠–45° A; $\mathbf{I}_{II} \approx$ 0,652∠–32,5° A; b) 5,1% de reducción]

Problema 3.44

Un transformador monofásico de 5 kVA tiene una impedancia reducida al secundario de 0,3+j1,5 ohmios y se conecta en paralelo con un transformador de 4 kVA y de impedancia reducida al secundario de 0,6 +j 1,6 ohmios. Ambos transformadores alimentan una carga de 6 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular las potencias aparentes, activas y reactivas que suministra cada transformador: a) cuando la tensión secundaria en carga sea de 400 voltios; b) cuando la tensión en vacío del primer transformador es de 405 V y la del segundo es de 415 voltios.

[Resp. a) $\mathbf{S}_I \approx$ 3972∠41,2° $\approx$ 2990 W+j2615 VAr; $\mathbf{S}_{II} \approx$ 3560∠32° $\approx$ 3010 W+j1885 VAr; b) $\mathbf{S}_I \approx$ 3050∠28° $\approx$ 2693 W+j1432 VAr; $\mathbf{S}_{II} \approx$ 4570∠40° $\approx$ 3500 W+j2938 VAr]

Problema 3.45

Dos transformadores trifásicos de 350 kVA, Yy0, relación 20000/400 V, se conectan en paralelo para alimentar una carga que consume 1000 amperios con f.d.p. 0,8 inductivo. Las caídas relativas de tensión del primer transformador son: ε_{Rcc} = 3%; ε_{Xcc} = 6% y las correspondientes del segundo son: ε_{Rcc} = 2%; ε_{Xcc} = 4%. Calcular la potencias aparentes, activas y reactivas que suministra cada transformador: a) cuando la tensión secundaria de carga sea de 400 voltios de línea; b) cuando se modifica el cambiador de tomas del primer transformador para que suministre en vacío una tensión secundaria de línea de 410 voltios; c) ¿cuál será en el caso anterior la tensión de línea de la carga?

[Resp. a) $\mathbf{S}_I \approx$ 278 kVA∠36,87° $\approx$ 222,3 kW+j166,7 kVAr; $\mathbf{S}_{II} \approx$ 415 kVA∠36,87° $\approx$ 331,7 kW+j248,9 kVAr; b) $\mathbf{S}_I \approx$ 345 kVA∠42° $\approx$ 257 kW+j232 kVAr; $\mathbf{S}_{II} \approx$ 347∠32° $\approx$ 294 kW+j184 kVAr; c) 384,1 voltios]

Problema 3.46

Un trasformador monofásico de 50 kVA tiene una impedancia de cortocircuito reducida al secundario de 0,05+j0,2 ohmios y se conecta en paralelo con un transformador de 25 kVA, cuya impedancia reducida al secundario es de 0,15+j0,6 ohmios. La tensión terminal en vacío del trasformador de 50 kVA es de 510 voltios y la del transformador de 25 kVA es de 500 voltios. Calcular: a) corriente que circula por los devanados secundarios con los transformadores conectados en vacío; b) corrientes secundarias que suministran cada transformador a una carga que absorbe 70 kW con f.d.p. unidad; c) tensión terminal en la carga en el caso anterior.

[Resp. a) 12,13 A; b) 104 A; y 33,6 A; c) 501,8 V]

Problema 3.47

Se dispone de un transformador monofásico de 10 kVA, relación 500/100 V, que ha sido sometido a unos ensayos de vacío y cortocircuito, dando lugar a los siguientes resultados:

Vacío (medidas realizadas en el lado de baja tensión): potencia absorbida: 200 W, tensión aplicada: 100 V, Corriente absorbida: 8 A.

Cortocircuito (medidas realizadas en el lado de alta tensión). potencia absorbida: 400 W, tensión aplicada: 25 V, corriente absorbida: 20 A.

a) Calcular los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; b) si el transformador alimenta a una carga con f.d.p. 0,8 capacitivo con una potencia para la cual se consigue el máximo rendimiento del transformador (índice de carga óptimo) y si la tensión secundaria es la nominal de 100 V ¿cuál será el valor de la tensión primaria necesaria V_1 y el rendimiento del transformador en estas condiciones?; c) el transformador alimenta ahora una carga de impedancia 2+j4 ohmios (ver Figura 3.36) a través de una línea de resistencia 0,5 ohmios/hilo, calcular las lecturas de los aparatos de medida: A_1, V_2 y V_3, (la tensión primaria aplicada es la nominal de 500 V); d) se desea ampliar la instalación para alimentar una carga de 20 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que se acopla este transformador en paralelo con otro de 20 kVA, 500/100 V y parámetros: ε_{Rcc} = 3%; ε_{Xcc} = 4%, calcular los valores de las potencias aparentes, activas y reactivas, suministradas por cada transformador, si la tensión secundaria se supone la nominal de 100 V, ¿qué tensión primaria se requerirá para alimentar el conjunto?

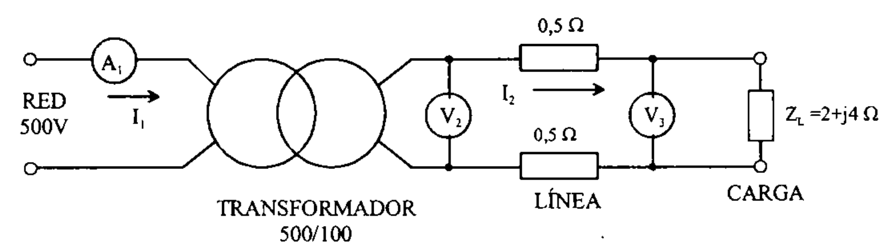


Figura 3.36

[Resp. a) R_{Fe} = 1250 Ω; X_μ = 322,8 Ω; R_{cc} = 1 Ω; X_{cc} = 0,75 Ω; b) 505,2 V; 93,4%; c) A_1 = 5,47 A; V_2 = 99,1 V; V_3 = 88,6 V; d) $\mathbf{S}_I \approx$ 8409∠26° $\approx$ 7557 W+j3687 VAr; $\mathbf{S}_{II} \approx$ 16817∠42° $\approx$ 1243 W+j11311 VAr]

Problema 3.48

La Figura 3.37 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica de un grupo de bombeo para el suministro de agua a una pequeña finca. Se dispone de una red de distribución de 10.000 V, 50 Hz, que por medio de un transformador monofásico de 20 kVA, relación 10.000/250 V suministra energía eléctrica a un grupo motobomba a través de una línea resistiva de 0,1 ohmios por hilo. El motor eléctrico del grupo motobomba se ha representado por una impedancia de 4+j3 Ω. Las características del transformador las ha suministrado el fabricante por medio de los siguientes ensayos:

Vacío: 250 V; 10 A; 1000 W (medidos en el lado de B.T.).

Cortocircuito: 800 V; 2 A; 800 W (medidos en el lado de A.T.).

a) Calcular los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; b) tensión secundaria del transformador y tensión en bornes del grupo motobomba, si la red de distribución tiene una tensión constante de 10 kV; c) corriente primaria absorbida por el transformador y rendimiento del mismo en las condiciones anteriores; d) si para corregir el f.d.p. del motor eléctrico del grupo motobomba se conecta en paralelo con el mismo una batería de condensadores de 382 μF, ¿cuáles serán las nuevas tensiones en el secundario del transformador y en bornes del motor?

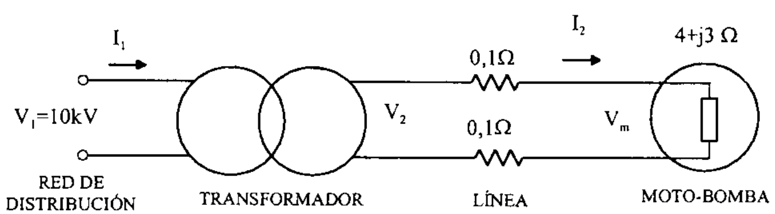


Figura 3.37

[Resp. a) R_{Fe}= 100 kΩ; X_{μ}= 43,7 kΩ; R_{cc}= 200 Ω; X_{cc}= 346,4 Ω; b) 505,2 V; 93,4%; c) V_2= 239,5 V; V_m= 232 V; d) 1,38 A; 87,7%; d V_2= 245,1 V; V_m= 237,5 V]

Problema 3.49

El rendimiento para un f.d.p. unidad de un transformador monofásico de 100 kVA; 1000/200 V, 50 Hz, es del 95,7% tanto para la plena carga como para la media carga. Se sabe además que la caída de tensión relativa a plena carga con f.d.p. 0,8 capacitivo es nula. a) Calcular las pérdidas en vacío P_0 y las pérdidas en cortocircuito P_{cc} del transformador; calcular también las caídas de tensiones relativas ε_{Rcc} y ε_{Xcc}. b) El transformador alimenta un grupo motobomba que en régimen permanente absorbe una potencia de 40kW con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular la tensión primaria necesaria en el transformador y el rendimiento correspondiente si la tensión secundaria del transformador es la nominal: V_2= 200 V. c) El motor asíncrono del grupo motobomba del apartado anterior tiene conectado en paralelo un condensador de 3000 μF, calcular la corriente secundaria suministrada por el transformador y su f.d.p. y también la tensión necesaria en el primario para mantener la tensión secundaria en 200 V.

NOTA: 1) La red es de 50 Hz y la potencia eléctrica absorbida por el grupo motobomba sigue siendo de 40kW con f.d.p. 0,8 inductivo. 2) Se puede aplicar la fórmula aproximada de Kapp.

[Resp. a) P_0= 1,5 kW; P_{cc}= 3 kW; ε_{Rcc}= 3%; kΩ; ε_{Xcc}= 4%; b) 1024 V; 94,5%; c) I_2= 203,7 A; 0,982 capacitivo; V_1= 1008,9 V]

Problema 3.50

Se dispone de tres transformadores de 400 kVA, 24 kV/400 V, conexión Dy11 con los siguientes parámetros:

Transformador I: P_{ccI}= 5,8 kW; ε_{ccI}= 4%
Transformador II: P_{ccII}= 6 kW; ε_{ccII}= 4,5%
Transformador III: P_{ccIII}= 5 kW; ε_{ccIII}= 3,8%

Se acoplan en paralelo los tres transformadores, ¿cuáles serán las potencias complejas que suministrarán cada uno cuando alimentan una carga trifásica de 1000 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo?

[Resp. S_I= 340 kVA∠38,13°; S_{II}= 302,6∠36,5°; S_{III}= 357,4∠36°]

Problema 3.51

Un transformador trifásico con devanado terciario y conexiones estrella/estrella/triángulo tienen una relación de tensiones compuestas en vacío de 6600/660/220 V y absorbe en vacío una potencia de 10 kW con f.d.p. 0,2 inductivo. Calcular la potencia aparente del primario y su f.d.p. cuando el secundario alimenta una carga trifásica equilibrada de 800 amperios con f.d.p. 0,8 inductivo y el terciario absorbe una corriente trifásica equilibrada de 300 amperios con f.d.p. unidad.

[Resp.: 1044 kVA, f.d.p. 0,82 inductivo]

Problema 3.52

Un transformador trifásico con devanado terciario y conexiones estrella/estrella/triángulo tiene una relación de tensiones compuestas en vacío de 10000/1000/500 V y absorbe en vacío una corriente magnetizante de 5 amperios. El devanado secundario tiene una carga equilibrada de 500 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo y el devanado terciario tiene una carga equilibrada de 180 kW. Prescindiendo de las pérdidas, calcular las corrientes en las fases de los devanados primario y terciario, si el f.d.p. del primario es de 0,775 inductivo.

[Resp.: 43,2 A; 133,33 A]

Problema 3.53

Se dispone de un transformador monofásico de 100 kVA, relación 1000/100 V que ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

Vacío: 100 V; 50 A; 3000 W (medidos en el lado de B.T.).

Cortocircuito: 100 V; 100 A; 6000 W (medidos en el lado de A.T.).

Calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (lado de A.T.); b) ¿cuál será la tensión que deberá aplicarse al primario cuando el transformador alimenta una carga con f.d.p. 0,8 inductivo sabiendo que en estas condiciones la máquina trabaja con un índice de carga para el cual el rendimiento es máximo (la tensión secundaria se considera que es igual a 100 V)?, ¿cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones; c) el transformador anterior se acopla en paralelo con otro de 200 kVA, 1000/100 V y con parámetros ε_{RccII} y ε_{XccII} ilegibles en su placa de características. Se observa que cuando ambos transformadores alimentan una carga conjunta de 200 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, siendo la tensión secundaria la nominal de 100 V, el nuevo transformador suministra a la carga una potencia activa de 155 kW y una potencia reactiva inductiva de 85 kVAr. Calcular los parámetros ε_{RccII} y ε_{XccII} del segundo transformador.

[Resp. a) R_{Fe}= 333,33 Ω; X_{μ}= 250 kΩ; R_{cc}=0,6 Ω; X_{cc}= 0,8 Ω; b) 1068 V; 90%; c) ε_{Rcc}= 8%; ε_{Xcc}=4%]

Problema 3.54

Un transformador monofásico de 50 kVA, 1000/200 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

Vacío: 2000 W; 200 V; 25 A, medidos en el lado de baja tensión.

Cortocircuito: 2500 W; 100 V, 50 A, medidos en el lado de alta tensión.

a) Calcular parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario. b) Se conecta una carga en el secundario que absorbe 20 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. Si la tensión secundaria es la nominal de 200 V, calcular la tensión primaria necesaria en el transformador y el rendimiento del transformador en estas condiciones. c) Se disponen de tres transformadores iguales al citado, que se conectan en estrella en la parte de A.T. (primario) y en estrella en la parte de baja tensión (secundario). Si se alimenta el primario de esta combinación a una red trifásica de $1000\sqrt{3}$ voltios de línea, y se coloca en el secundario una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo de impedancia 1,8+j 2,4 ohmios/fase, calcular la tensión secundaria de línea y el rendimiento del transformador en estas condiciones.

[Resp. a) R_{Fe}= 500 Ω; X_μ= 43,7 kΩ; R_{cc}= 1 Ω; X_{cc}= 1,73 Ω; b) 1046 V; 87,7%; c) V_2(línea)= 185 V; 85,9%]

Problema 3.55

Un transformador tiene un rendimiento máximo del 98% cuando trabaja dando 15 kVA con f.d.p. unidad. Durante el día está cargado del modo siguiente:

1) 12 horas suministrando una potencia activa de 2 kW con f.d.p. 0,5 inductivo.

2) 6 horas suministrando una potencia aparente de 15 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo.

3) 6 horas suministrando una potencia activa de 18 kW con f.d.p. 0,9 inductivo.

Calcular el rendimiento del transformador en un día completo.

[Resp. 97%]

Problema 3.56

En el circuito de la Figura 3.38 se muestra el esquema unifilar de una red de distribución trifásica alimentada por un transformador Yd11 de relación 10 kV/4000 V, en el que se consideran despreciables la corriente de magnetización y las pérdidas en el hierro. Al realizar un ensayo de cortocircuito del transformador (cortocircuitando el secundario), se aplicó al primario una tensión de línea de $800\sqrt{3}$ V, resultando una corriente primaria de 2000 amperios con f.d.p. 0,60. La impedancia por hilo de la línea trifásica desde D hasta E es de 0,1 + j0,2 Ω y la de E hasta F es de 0,3 + j 0,4 Ω. En el nudo E hay una carga conectada en estrella que absorbe 1000 amperios con f.d.p. 0,6 inductivo y en el nudo F existe una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo de impedancia $5\sqrt{3}\angle 36{,}87°$ Ω/fase. Calcular: a) tensión que debe tener el primario del transformador para que en el nudo F la tensión compuesta sea de 2500 V; b) si manteniendo la tensión primaria constante en el valor calculado en el apartado anterior se desconecta la carga conectada en el nudo E ¿cuál será el valor que alcanzará la tensión en el nudo F?

[Resp. a) V_1(línea)= 9730 V; b) V_F(línea)= 3089 V]

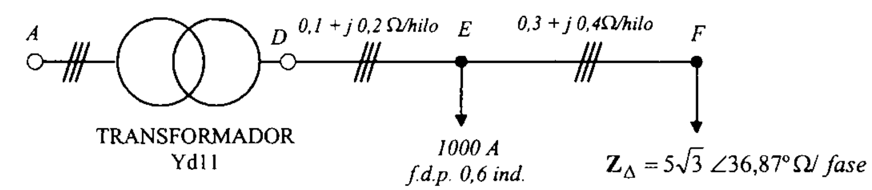


Figura 3.38

Problema 3.57

En la Figura 3.39 se muestra el esquema unifilar de un sistema eléctrico de potencia, que está formado por un generador trifásico de 750 kVA, 3 kV, 50 Hz, que alimenta dos cargas a través de una red de transporte y que tiene dos transformadores triángulo-estrella en cada extremo con los parámetros señalados en la figura (se desprecia la corriente de vacío de los transformadores). La carga 1 es trifásica y equilibrada y consume 150 kW con f.d.p. 0,8 inductivo y la carga 2 es una batería de condensadores puestos en triángulo de 100 kVAr. Inicialmente el interruptor S está abierto, calcular: a) la tensión que debe producir el generador de principio de línea para que en la carga 1 la tensión compuesta sea de 3 kV; b) potencia activa y reactiva que debe suministrar el generador; c) rendimiento de la instalación, definido como cociente entre la potencia activa al final de la línea (en la carga) y la potencia activa al principio de línea (generador); d) repetir los apartados anteriores cuando se cierra el interruptor S y se incluye la batería de condensadores en la instalación.

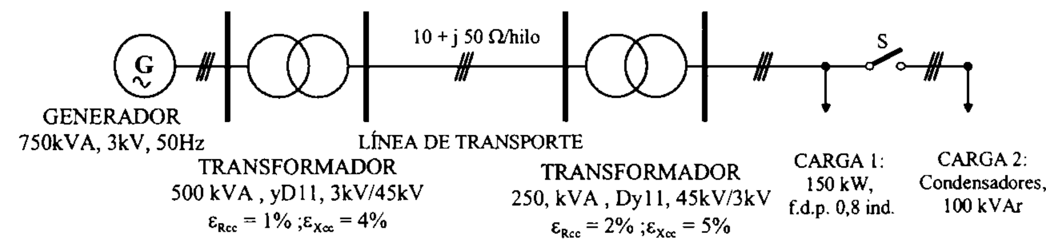


Figura 3.39

[Resp. a) 3151,7 V; b) 153,7 kW; 123,2 kVAr; c) 97,6%; d) 3061,6 V; 152,4 kW; 19,4 kVAr; 98,4%]

Problema 3.58

Un transformador monofásico con valores asignados de 10 kVA, 400/100 V tiene una impedancia de cortocircuito referida al primario de 0,6 + j0,8 Ω. Las pérdidas en el hierro de 250 W y puede prescindirse de la corriente de magnetización. Se conectan las bobinas del transformador en serie para construir un autotransformador elevador de tensión de relación 400/500 V. a) Calcular la potencia de plena carga que puede asignarse a este autotransformador; b) si el autotransformador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo y la tensión secundaria es de 500 V, ¿cuál será la tensión necesaria en el primario?; c) calcular el rendimiento en el caso anterior; d) repetir el problema si las bobinas se unen del modo adecuado para construir un autotransformador reductor de tensión de relación 500/100 V funcionando a la plena carga correspondiente con V_2= 100 V y f.d.p. 0,8 inductivo.

[Resp. a) 50 kVA; b) 404,8 V; c) 98,46%; c) 12,5 kVA; 524,05 V; 94,12%]

Problema 3.59

Se han realizado unos ensayos en un autotransformador monofásico de 25 kVA, 440/220 V, 50 Hz, dando los siguientes resultados:

Vacío: 264 W; 440 voltios; 1,5 amperios (medidos en el primario).

Cortocircuito: 568 W; 20 voltios; 56,8 amperios (medidos en el primario).

a) Si el secundario alimenta a 220 V una carga que consume 100 amperios con f.d.p. 0,8 inductivo, calcular la tensión primaria necesaria en el autotransformador; b) determinar el rendimiento del autotransformador en el caso anterior.

[Resp. a) 456,2 V; b) 96%]

Problema 3.60

Un transformador de corriente de relación 500/5 tiene una impedancia del devanado secundario $\mathbf{Z}_2 = 0{,}02 + j\,0{,}03\ \Omega$. *La corriente de imanación y la componente de pérdidas en el hierro en función de la f.e.m. inducida en secundario* E_2 *se pueden expresar respectivamente por las ecuaciones siguientes:*

$$I_\mu = \frac{16E_2}{6+E_2} \quad ; \quad I_{Fe} = \frac{10E_2}{2{,}3+E_2}$$

El devanado primario tiene una sola espira y el devanado secundario tiene 100 espiras y se carga con un montaje en serie de un amperímetro de impedancia $0{,}08 + j\,0{,}09\ \Omega$, *la bobina de intensidad de un vatímetro de impedancia* $0{,}10 + j0{,}07\ \Omega$ *y un relé de máxima corriente de impedancia* $0{,}14 + j0{,}08\ \Omega$. *Si la corriente que circula por estos aparatos de medida y protección es de 4 amperios, calcular el error de corriente y de fase del transformador de intensidad: a) cuando todos los instrumentos están en el circuito; b) cuando esté en el circuito únicamente el vatímetro; c) calcular en los casos anteriores los VA de carga del transformador de corriente.*

[Resp. a) $\varepsilon_i = -1{,}36\%$; $\delta = -0{,}17^\circ = -10'12''$; b) $\varepsilon_i = -0{,}62\%$; $\delta = -6'36''$; c) 6,4 VA; 1,95 VA]

MÁQUINAS ASÍNCRONAS 4

Sumario de fórmulas

4.1 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR ASÍNCRONO

a) Velocidad de sincronismo del campo magnético giratorio:

$$n_1 = \frac{60\,f_1}{p} \ \text{(r.p.m.)} \tag{4.1}$$

n_1: velocidad de sincronismo; f_1: frecuencia del estátor; p: pares de polos.

b) Deslizamiento del motor:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{4.2}$$

n_1: velocidad de sincronismo; n: velocidad del rotor.

c) Frecuencia del rotor:

$$f_2 = s\,f_1 \tag{4.3}$$

f_2: frecuencia de las corrientes del rotor; f_1: frecuencia de las corrientes del estátor.

d) F.e.m. por fase del estátor y del rotor (a rotor parado):

$$E_1 = 4{,}44\ K_{w1} f_1 N_1 \Phi_m \quad ; \quad E_2 = 4{,}44\ K_{w2} f_1 N_2 \Phi_m \tag{4.4}$$

E_1: valor eficaz de la f.e.m. por fase del estátor, N_1: número de espiras por fase; Φ_m: flujo máximo; $K_{w1} = K_{d1}K_{a1}$: coeficiente del devanado del estátor (K_{d1}: coeficiente de distribución; K_{a1}: coeficiente de acortamiento); E_2: valor eficaz de la f.e.m. por fase del rotor, N_2: número de espiras por fase; $K_{w2} = K_{d2}K_{a2}$: coeficiente del devanado del rotor.

e) F.e.m. por fase del rotor (con rotor móvil):

$$E_{2s} = 4{,}44\ K_{w2} f_2 N_2 \Phi_m \tag{4.5}$$

f) Relación entre las f.e.m. por fase del rotor en reposo y en movimiento:

$$E_{2s} = s\,E_2 \tag{4.6}$$

E_{2s}: f.e.m. por fase del rotor en movimiento; E_2: f.e.m. por fase del rotor parado.

Problema 3.59

Se han realizado unos ensayos en un autotransformador monofásico de 25 kVA, 440/220 V, 50 Hz, dando los siguientes resultados:

Vacío: 264 W; 440 voltios; 1,5 amperios (medidos en el primario).

Cortocircuito: 568 W; 20 voltios; 56,8 amperios (medidos en el primario).

a) Si el secundario alimenta a 220 V una carga que consume 100 amperios con f.d.p. 0,8 inductivo, calcular la tensión primaria necesaria en el autotransformador; b) determinar el rendimiento del autotransformador en el caso anterior.

[Resp. a) 456,2 V; b) 96%]

Problema 3.60

Un transformador de corriente de relación 500/5 tiene una impedancia del devanado secundario $\mathbf{Z}_2 = 0,02 + j\,0,03\ \Omega$. *La corriente de imanación y la componente de pérdidas en el hierro en función de la f.e.m. inducida en secundario* E_2 *se pueden expresar respectivamente por las ecuaciones siguientes:*

$$I_\mu = \frac{16E_2}{6+E_2} \quad ; \quad I_{Fe} = \frac{10E_2}{2,3+E_2}$$

El devanado primario tiene una sola espira y el devanado secundario tiene 100 espiras y se carga con un montaje en serie de un amperímetro de impedancia 0,08 +j 0,09 Ω, la bobina de intensidad de un vatímetro de impedancia 0,10+j0,07 Ω y un relé de máxima corriente de impedancia 0,14 + j0,08 Ω. Si la corriente que circula por estos aparatos de medida y protección es de 4 amperios, calcular el error de corriente y de fase del transformador de intensidad: a) cuando todos los instrumentos están en el circuito; b) cuando esté en el circuito únicamente el vatímetro; c) calcular en los casos anteriores los VA de carga del transformador de corriente.

[Resp. a) $\varepsilon_i = -1,36\%$; $\delta = -0,17° = -10'12''$; b) $\varepsilon_i = -0,62\%$; $\delta = -6'36''$; c) 6,4 VA; 1,95 VA]

MÁQUINAS ASÍNCRONAS 4

Sumario de fórmulas

4.1 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR ASÍNCRONO

a) Velocidad de sincronismo del campo magnético giratorio:

$$n_1 = \frac{60\,f_1}{p} \text{ (r.p.m.)} \tag{4.1}$$

n_1: velocidad de sincronismo; f_1: frecuencia del estátor; p: pares de polos.

b) Deslizamiento del motor:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{4.2}$$

n_1: velocidad de sincronismo; n: velocidad del rotor.

c) Frecuencia del rotor:

$$f_2 = s\,f_1 \tag{4.3}$$

f_2: frecuencia de las corrientes del rotor; f_1: frecuencia de las corrientes del estátor.

d) F.e.m. por fase del estátor y del rotor (a rotor parado):

$$E_1 = 4,44\ K_{w1} f_1 N_1 \Phi_m \quad ; \quad E_2 = 4,44\ K_{w2} f_1 N_2 \Phi_m \tag{4.4}$$

E_1: valor eficaz de la f.e.m. por fase del estátor, N_1: número de espiras por fase; Φ_m: flujo máximo; $K_{w1} = K_{d1} K_{a1}$: coeficiente del devanado del estátor (K_{d1}: coeficiente de distribución; K_{a1}: coeficiente de acortamiento); E_2: valor eficaz de la f.e.m. por fase del rotor, N_2: número de espiras por fase; $K_{w2} = K_{d2} K_{a2}$: coeficiente del devanado del rotor.

e) F.e.m. por fase del rotor (con rotor móvil):

$$E_{2s} = 4,44\ K_{w2} f_2 N_2 \Phi_m \tag{4.5}$$

f) Relación entre las f.e.m. por fase del rotor en reposo y en movimiento:

$$E_{2s} = s\,E_2 \tag{4.6}$$

E_{2s}: f.e.m. por fase del rotor en movimiento; E_2: f.e.m. por fase del rotor parado.

g) Velocidad de sincronismo del campo magnético del rotor respecto a sí mismo:

$$n_2 = \frac{60 f_2}{p} \tag{4.7}$$

f_2: frecuencia del rotor en movimiento; n_2: velocidad del campo magnético del rotor en r.p.m.

h) Ecuaciones de tensión en el estátor y en el rotor:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\,\mathbf{I}_1 + j\,X_1\,\mathbf{I}_1\ ;\quad \mathbf{E}_{2s} = R_2\,\mathbf{I}_2 + j\,X_{2s}\,\mathbf{I}_2 \tag{4.8}$$

$\mathbf{V}_1$: tensión aplicada al estátor por fase; $\mathbf{E}_1$: f.e.m. inducida en el estátor por fase; $\mathbf{I}_1$: corriente que circula en el estátor por fase; R_1: resistencia por fase del estátor; X_1: reactancia por fase del estátor; $\mathbf{E}_{2s}$: f.e.m. inducida en el rotor por fase (rotor móvil); $\mathbf{I}_2$: corriente que circula por el rotor por fase; R_2: resistencia por fase del rotor; X_{2s}: reactancia por fase del rotor (rotor móvil).

4.2 CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR ASÍNCRONO

a) Corriente del rotor (rotor móvil):

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_{2s}}{R_2 + j\,X_{2s}} \tag{4.9}$$

$\mathbf{E}_{2s}$: f.e.m. inducida en el rotor por fase (rotor móvil); $\mathbf{I}_2$: corriente que circula por el rotor por fase; R_2: resistencia por fase del rotor; X_{2s}: reactancia por fase del rotor (rotor móvil);

b) Corriente del rotor (rotor móvil):

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{R_2 + jX_2 + R_2(\frac{1}{s} - 1)} \tag{4.10}$$

c) Resistencia de carga del rotor:

$$R_c = R_2(\frac{1}{s} - 1) \tag{4.11}$$

d) Relación de transformación de tensiones:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{K_{w1}N_1}{K_{w2}N_2} = m_v \tag{4.12}$$

E_1: f.e.m. inducida en el estátor por fase; E_2: f.e.m. inducida en el rotor por fase (a rotor parado); K_{w1}: coeficiente de devanado del estátor; K_{w2}: coeficiente de devanado del rotor; N_1: número de espiras por fase del estátor; N_2: número de espiras por fase del rotor.

e) F.e.m. del rotor en reposo reducida al estátor:

$$E'_2 = m_V\,E_2 \tag{4.13}$$

E'_2: f.e.m. del rotor en reposo por fase reducida al estátor; E_2: f.e.m. del rotor en reposo por fase; m_v: relación de transformación de tensiones.

f) Relación de transformación de corrientes:

$$m_i = \frac{m_1 K_1 N_1}{m_2 K_2 N_2} = \frac{m_1}{m_2} m_v \tag{4.14}$$

m_1: número de fases del estátor (generalmente $m_1 = 3$); m_2: número de fases del rotor.

g) Corriente del rotor reducida al estátor:

$$I'_2 = \frac{I_2}{m_i} \tag{4.15}$$

I'_2: corriente del rotor reducida al estátor; I_2: corriente del rotor.

h) Impedancias del rotor reducidas al estátor:

$$R'_2 = m_v\,m_i\,R_2\ ;\ X'_2 = m_v\,m_i\,X_2\ ;\ R'_c = m_v\,m_i\,R_c \tag{4.16}$$

R'_2: resistencia del rotor por fase reducida al estátor; R_2: resistencia del rotor por fase; X'_2: reactancia del rotor en reposo por fase reducida al estátor; X_2: reactancia del rotor en reposo por fase; m_v: relación m_v: relación de transformación de tensiones; m_i: relación de transformación de corrientes.

i) Relación fasorial entre las corrientes del estátor y del rotor:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m_i} \tag{4.17}$$

$\mathbf{I}_0$: corriente de vacío.

j) Ecuaciones fasoriales de tensiones del estátor y del rotor:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{E}_i + R_i\,\mathbf{I}_i + j\,X_i\,\mathbf{I}_i;\ \mathbf{E}'_2 = R'_2\,\mathbf{I}'_2 + R'_c\,\mathbf{I}'_2 + j\,X'_2\,\mathbf{I}'_2 \tag{4.18}$$

4.3. ENSAYO DE VACÍO O DE ROTOR LIBRE DEL MOTOR ASÍNCRONO

a) Potencia en vacío absorbida por el motor:

$$P_0 = P_{Fe} + P_m + P_{cu1} \tag{4.19}$$

P_0: potencia absorbida en vacío; P_{Fe}: pérdidas en el hierro; P_m: pérdidas mecánicas; P_{cu1}: pérdidas en el cobre del estátor en vacío.

b) Relación de potencias en vacío:

$$P_{Fe} + P_m = P_0 - P_{cu1} = P_0 - m_1 R_1 I_0^2 \tag{4.20}$$

m_1: número de fases del estátor (generalmente $m_1 = 3$).

c) F.d.p. en vacío:

$$\cos\varphi_0 = \frac{P_{Fe}}{m_1 V_{1n} I_0} \tag{4.21}$$

d) Componentes de la corriente de vacío:

$$I_{Fe} = I_0 \cos\varphi_0 \quad ; \quad I_\mu = I_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \tag{4.22}$$

e) Componentes de la rama paralelo del circuito equivalente reducido al estátor:

$$R_{Fe} = \frac{V_{1n}}{I_{Fe}} \quad ; \quad X_\mu = \frac{V_{1n}}{I_\mu} \tag{4.23}$$

4.4 ENSAYO DE ROTOR BLOQUEADO DEL MOTOR ASÍNCRONO

a) Potencia absorbida por el motor con el rotor bloqueado:

$$P_{cc} = m_1 V_{1cc} I_{1n} \cos\varphi_{cc} \tag{4.24}$$

P_{cc}: potencia absorbida en cortocircuito con corriente nominal asignada; V_{1cc}: tensión aplicada por fase al estátor; I_{1n}: corriente de cortocircuito igual a la nominal; cos φ_{cc}: f.d.p. en cortocircuito.

b) Factor de potencia del motor con el rotor bloqueado:

$$\cos\varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{m_1 V_{1cc} I_{1n}} \tag{4.25}$$

c) Impedancia de la rama serie del motor asíncrono:

$$R_{cc} = R_1 + R_2' = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \cos\varphi_{cc} \quad ; \quad X_{cc} = X_1 + X_2' = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \operatorname{sen}\varphi_{cc} \tag{4.26}$$

4.5 BALANCE DE POTENCIAS

a) Potencia eléctrica de entrada al estátor:

$$P_1 = m_1 V_1 I_1 \cos\varphi_1 \tag{4.27}$$

P_1: potencia de entrada al estátor (potencia eléctrica absorbida de la red); m_1: número de fases del estátor; V_1: tensión del estátor por fase; I_1: corriente del estátor por fase; cos φ_1: f.d.p. del motor (f.d.p. del estátor).

b) Pérdidas en el cobre del estátor:

$$P_{cu1} = m_1 R_1 I_1^2 \tag{4.28}$$

P_{cu1}: pérdidas en el cobre del estátor; R_1: resistencia por fase del estátor; I_1: corriente del estátor por fase; m_1: número de fases del estátor.

c) Pérdidas en el estátor:

$$P_{p1} = P_{cu1} + P_{Fe1} \tag{4.29}$$

P_{p1}: pérdidas en el estátor; P_{cu1}: pérdidas en el cobre del estátor; P_{Fe1}: pérdidas en el hierro del estátor.

d) Pérdidas en el hierro del estátor:

$$P_{Fe} = P_{Fe1} = m_1 E_1 I_{Fe} \approx m_1 V_1 I_{Fe} \tag{4.30}$$

P_{Fe1}: pérdidas en el hierro del estátor (son las únicas pérdidas en el hierro del motor); m_1: número de fases del estátor; E_1: f.e.m. del estátor por fase; I_{Fe}: corriente de pérdidas en el hierro; V_1: tensión del estátor por fase.

e) Potencia que atraviesa el entrehierro:

$$P_a = P_1 - P_{p1} = P_1 - P_{cu1} - P_{Fe1} \tag{4.31}$$

P_a: potencia en el entrehierro; P_1: potencia de entrada al estátor; P_{p1}: pérdidas en el estátor; P_{cu1}: pérdidas en el cobre del estátor; P_{Fe1}: pérdidas en el hierro del estátor.

f) Pérdidas en el cobre del rotor:

$$P_{cu2} = m_2 R_2 I_2^2 = m_1 R_2' I_2'^2 \tag{4.32}$$

P_{cu2}: pérdidas en el cobre del rotor; R_2: resistencia por fase del rotor; I_2: corriente del rotor por fase; m_2: número de fases del rotor; m_1: número de fases del estátor; R'_2: resistencia por fase del rotor reducida al estátor; I'_2: corriente del rotor por fase reducida al estátor.

g) Potencia mecánica interna del motor:

$$P_{mi} = P_a - P_{cu2} \tag{4.33}$$

P_{mi}: potencia mecánica interna del motor; P_a: potencia de entrehierro; P_{cu2}: pérdidas en el cobre del rotor.

h) Expresión de la potencia mecánica interna del motor:

$$P_{mi} = m_1 R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_2'^2 \tag{4.34}$$

P_{mi}: potencia mecánica interna del motor; m_1: número de fases del estátor; R'_2: resistencia por fase del rotor reducida al estátor; I'_2: corriente del rotor por fase reducida al estátor; s: deslizamiento del motor.

i) Potencia mecánica útil del motor:

$$P_u = P_{mi} - P_m \tag{4.35}$$

P_u: potencia mecánica útil; P_{mi}: potencia mecánica interna; P_m: pérdidas mecánicas del motor.

j) Rendimiento del motor:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{P_u}{P_u + P_m + P_{cu2} + P_{Fe} + P_{cu1}} \tag{4.36}$$

k) Relación entre la potencia de pérdidas en el cobre del rotor y la potencia mecánica interna:

$$\frac{P_{cu2}}{P_{mi}} = \frac{s}{1-s} \tag{4.37}$$

P_{cu2}: pérdidas en el cobre del rotor; P_{mi}: potencia mecánica interna; s: deslizamiento del motor.

l) Relación entre la potencia de entrehierro, la potencia de pérdidas en el cobre del rotor y la potencia mecánica útil:

$$P_a = P_{mi} + P_{cu2} = m_1 \frac{R_2'}{s} I_2'^2 = \frac{P_{cu2}}{s} = \frac{P_{mi}}{1-s} \tag{4.38}$$

P_a: potencia en el entrehierro; P_{cu2}: pérdidas en el cobre del rotor; P_{mi}: potencia mecánica interna; s: deslizamiento del motor.

4.6 PAR DE ROTACIÓN

a) Expresión del par motor útil:

$$T = \frac{P_u}{\omega} = \frac{P_u}{2\pi \frac{n}{60}} \tag{4.39}$$

T: par motor en N.m.; P_u: potencia útil del motor; ω: velocidad angular mecánica en rad/s; n: velocidad del rotor en r.p.m.

b) Expresión del par motor (sin pérdidas mecánicas):

$$T = \frac{P_{mi}}{2\pi \frac{n}{60}} \tag{4.40}$$

T: par motor en N.m.; P_{mi}: potencia mecánica interna del motor; n: velocidad del rotor en r.p.m.

c) Expresión del par motor (sin pérdidas mecánicas):

$$T = \frac{P_{mi}}{2\pi \frac{n_1}{60}(1-s)} \tag{4.41}$$

T: par motor en N.m.; P_{mi}: potencia mecánica interna del motor; n_1: velocidad de sincronismo en r.p.m.; s: deslizamiento del motor.

d) Expresión del par motor en función de la potencia de entrehierro:

$$T = \frac{P_a}{2\pi \frac{n_1}{60}} \tag{4.42}$$

T: par motor en N.m.; P_a: potencia de entrehierro; n_1: velocidad de sincronismo en r.p.m.

e) Expresión del par motor en función de los parámetros de la máquina:

$$T = \frac{m_1 \frac{R_2'}{s} V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}\left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2\right]} \tag{4.43}$$

T: par motor en N.m.; m_1: número de fases del estátor; R'_2: resistencia por fase del rotor reducida al estátor; I'_2: corriente del rotor por fase reducida al estátor; V_1: tension del estátor por fase; n_1: velocidad de sincronismo en r.p.m.; s: deslizamiento del motor.

f) Deslizamiento del motor para par máximo:

$$s_m = \pm \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{4.44}$$

s_m: deslizamiento del motor para par máximo; R'_2: resistencia por fase del rotor reducida al estátor; X_{cc}: reactancia de cortocircuito del motor. NOTA: el signo más se utiliza para funcionamiento como motor y el signo menos para el funcionamiento como generador.

g) Expresión del par máximo del motor:

$$T_{max} = \pm \frac{m_1 V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}\, 2\left[\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}\right]} \tag{4.45}$$

h) Relación entre los deslizamientos para par máximo con diversas resistencias en el circuito del rotor:

$$\frac{s_m'}{s_m} = \frac{R_{T2}'}{R_2'} \tag{4.46}$$

s_m: deslizamiento del motor para par máximo y resistencia R'_2 por fase del rotor reducida al estátor; s'_m: deslizamiento del motor para par máximo y resistencia R'_{T2} por fase del rotor reducida al estátor;

i) Fórmula de Kloss:

$$\frac{T}{T_{max}} = \frac{2\,(1 + a\, s_m)}{\frac{s}{s_m} + 2\, a\, s_m + \frac{s_m}{s}} \tag{4.47}$$

s_m: deslizamiento del motor para T_{max}; $a = R_1 / R'_2$; s: deslizamiento del motor para el par T.

j) Relación de deslizamientos para el mismo par y diversas resistencias en el circuito del rotor:

$$\frac{s'}{s} = \frac{R_{T2}'}{R'_2} \tag{4.48}$$

Significado geométrico: a igualdad de pares en las curvas características artificiales y natural de un motor asíncrono, el deslizamiento en la característica artificial respecto a la natural, coincide con el cociente de resistencias totales en el rotor correspondientes a cada curva.

k) Expresión de la curva del par de un motor asíncrono para bajos deslizamientos:

$$\frac{T}{T_{max}} = \frac{2s}{s_m} \tag{4.49}$$

NOTA: es la ecuación de una recta.

l) Expresión de la curva del par de un motor asíncrono para grandes deslizamientos:

$$\frac{T}{T_{max}} = \frac{2s_m}{s} \tag{4.50}$$

NOTA: es la ecuación de una hipérbola.

4.7 ARRANQUE DE LOS MOTORES ASÍNCRONOS

a) Relación del par de arranque con autotransformador y el par de arranque en directo:

$$T_{a.aut} = x^2\, T_a \tag{4.51}$$

$T_{a.aut}$: par de arranque con autotransformador; T_a: par de arranque directo (con tensión nominal); x: relación de tensiones entre la tensión por fase del autotransformador y la tensión por fase en directo que llega al motor.

b) Corriente de arranque en directo:

$$I_{cc} = \frac{V_{1red}}{Z_{cc}} \quad ; \quad Z_{cc} = \sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2} \tag{4.52}$$

V_{1red}: tensión por fase de la red; I_{cc}: corriente de arranque en directo; Z_{cc}: impedancia de cortocircuito del motor.

c) Corriente de arranque con tensión reducida:

$$I_{a\ motor} = \frac{xV_{1red}}{Z_{cc}} = xI_{cc} \tag{4.53}$$

d) Relación del par de arranque con la conmutación estrella-triángulo y el par de arranque en directo:

$$T_{a\lambda} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 T_a = \frac{1}{3} T_a \tag{4.54}$$

e) Relación de la corriente de arranque con la conmutación estrella-triángulo y la corriente de arranque en directo:

$$I_{a\lambda} = \frac{1}{3} I_{cc} \tag{4.55}$$

f) Resistencia reducida al estátor, necesaria para obtener el par máximo en el arranque (motores con rotor devanado):

$$R'_{adic} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R'_2 \tag{4.56}$$

4.8 DINÁMICA DEL MOTOR ASÍNCRONO

a) Par de aceleración:

$$T - T_r = J\frac{d\omega}{dt} \quad (N.m.) \tag{4.57}$$

T: par motor; T_r: par resistente; J: momento de inercia del rotor; ω: velocidad angular en rad/s.

b) Par de aceleración en función del deslizamiento:

$$T - T_r = -J\omega_1 \frac{ds}{dt} \tag{4.58}$$

T: par motor; T_r: par resistente; J: momento de inercia del rotor; ω_1: velocidad angular del campo magnético giratorio en rad/s: s: deslizamiento.

c) Tiempo de arranque:

$$t_A = -\frac{J\omega_1}{2T_{max}}\left[\frac{s_1^2 - s_2^2}{2s_m} + s_m \ln\frac{s_1}{s_2}\right] \tag{4.59}$$

d) Pérdidas de energía en el arranque y en el frenado de un motor asíncrono:

$$\Delta W_a = \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2}\frac{R_1}{R'_2} \; ; \; \Delta W_f = 3\frac{J\omega_1^2}{2}\left[1 + \frac{R_1}{R'_2}\right] \tag{4.60}$$

ΔW_a: pérdida de energía en el arranque; ΔW_f: pérdida de energía en el frenado.

4.9 MOTOR DE INDUCCIÓN MONOFÁSICO

a) Deslizamiento del campo giratorio directo:

$$s_d = s = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \tag{4.61}$$

s_d: deslizamiento del campo giratorio directo; n: velocidad de giro del motor (en r.p.m.); n_1: velocidad de sincronismo del campo giratorio (en r.p.m.).

b) Deslizamiento del campo giratorio inverso:

$$s_i = \frac{n_1 - (-n)}{n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \tag{4.62}$$

s_i: deslizamiento del campo giratorio inverso; n: velocidad de giro del motor (en r.p.m.); n_1: velocidad de sincronismo del campo giratorio (en r.p.m.); s: deslizamiento directo.

c) Resistencia de carga del circuito equivalente para el campo directo e inverso, respectivamente:

$$R_{cd}=\frac{R_2'}{2}\left(\frac{1}{s}-1\right)=\frac{R_2'}{2}\frac{1-s}{s}\ ;\ R_{ci}'=\frac{R_2'}{2}\left(\frac{1}{2-s}-1\right)=-\frac{R_2'}{2}\frac{1-s}{2-s} \qquad (4.63)$$

R'_{cd}: resistencia de carga del campo directo; R'_2: resistencia del rotor reducida al estátor; R'_{ci}: resistencia de carga del campo inverso; s: deslizamiento.

d) Potencia mecánica interna del motor asíncrono monofásico:

$$P_{mi}=(P_{mi})_d+(P_{mi})_i=\frac{R_2'}{2}(1-s)\left[\frac{I_{2d}'^2}{s}-\frac{I_{2i}'^2}{2-s}\right] \qquad (4.64)$$

P_{mi}: potencia mecánica interna; I'_{2d}: corriente del rotor reducida al estátor del campo directo; I'_{2i}: corriente del rotor reducida al estátor del campo inverso; s:deslizamiento.

e) Par del motor asíncrono monofásico:

$$T=\frac{P_{mi}}{\omega_1(1-s)}=\frac{1}{\omega_1}\cdot\frac{R_2'}{2}\left[\frac{I_{2d}'^2}{s}-\frac{I_{2i}'^2}{2-s}\right] \qquad (4.65)$$

Problemas resueltos

Problema 4.1

La potencia absorbida por un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 50 Hz, es de 4,76 kW cuando gira a 1435 r.p.m. Las pérdidas totales en el estátor son de 265 W y las de rozamiento y ventilación son de 300 W. Calcular: a) el deslizamiento; b) las pérdidas en el cobre del rotor; c) potencia útil en el árbol del motor. d) rendimiento.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del campo giratorio del motor vale:

$$n_1=\frac{60f_1}{p}=\frac{60\cdot 50}{2}=1500 \text{ r.p.m.}$$

y teniendo en cuenta que el rotor gira a 1435 r.p.m., el deslizamiento es igual a:

$$s=\frac{n_1-n}{n_1}=\frac{1500-1435}{1500}=4,33\%$$

b) La potencia que atraviesa el entrehierro es:

$$P_a=P_1-P_{p1}=4760-265=4495 \text{ W}$$

y por lo tanto, las pérdidas en el cobre del rotor son:

$$P_{cu2}=sP_a=0,0433\cdot 4495=194,78 \text{ W}$$

c) En consecuencia, la potencia mecánica útil en el eje o árbol del motor es:

$$P_u=P_a-P_m-P_{cu2}=4495-300-194,78=4000,2 \text{ W}$$

d) El rendimiento del motor es el cociente entre la potencia mecánica útil y la potencia eléctrica absorbida de la red, es decir:

$$\eta=\frac{P_u}{P_1}=\frac{4000,2}{4760}=84,04\%$$

Problema 4.2

Un motor de inducción trifásico, de 8 polos, 10 CV, 380 V, gira a 720 r.p.m. a plena carga. Si el rendimiento y f.d.p. a esta carga es del 83% y 0,75 respectivamente. Calcular: a) velocidad de sincronismo del campo giratorio; b) deslizamiento a plena carga; c) corriente de línea; d) par en el árbol de la máquina.

NOTA: f_1= 50 Hz.

Solución

a) La velocidad de sincronismo es:

$$n_1=\frac{60f_1}{p}=\frac{60\cdot 50}{4}=750 \text{ r.p.m.}$$

b) Al girar el motor a 720 r.p.m., el deslizamiento vale:

$$s=\frac{n_1-n}{n_1}=\frac{750-720}{750}=\frac{30}{750}=4\%$$

c) La potencia mecánica útil es de 10CV y como 1CV = 736W, la potencia mecánica en vatios es:

$$P_u=10 \text{ CV}=10\cdot 736=7360 \text{ W}$$

y como el rendimiento del motor es del 83%, se tiene una potencia eléctrica absorbida de la red:

$$P_1=\frac{P_u}{\eta}=\frac{7360}{0,83}=8867,47 \text{ W}$$

La potencia anterior es igual a:

$$P_1=8867,47 \text{ W}=\sqrt{3}V_LI_1\cos\varphi=\sqrt{3}\cdot 380I_1\cdot 0,75$$

de donde se deduce una corriente de línea:

$$I_1=17,96 \text{ A}$$

d) El par mecánico es igual a:

$$T=\frac{P_u}{\omega}=\frac{7360}{2\pi\frac{720}{60}}=97,62 \text{ N.m.}$$

Problema 4.3

Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, conectado en estrella se alimenta por una red de 380 V, 50 Hz. La impedancia del estátor es igual a 0,1+j 0,4 Ω/fase y la del rotor en reposo reducida al estátor vale 0,1 + j0,3 Ω/fase. Calcular: a) intensidad absorbida en el arranque; b) corriente a plena carga, si el deslizamiento es del 4%; c) potencia y par nominal si se desprecian las pérdidas mecánicas; d) rendimiento en el caso anterior si las pérdidas en el hierro son iguales a 1200 W.

Solución

a) La velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y velocidad real de la máquina es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \Rightarrow n = n_1(1-s) = 1500(1-0,04) = 1440 \text{ r.p.m.}$$

En la Figura 4.1 se muestra el circuito equivalente aproximado del motor reducido al estátor o primario, en el que despreciamos la rama paralelo ya que en el enunciado no se dan datos para poder determinarla.

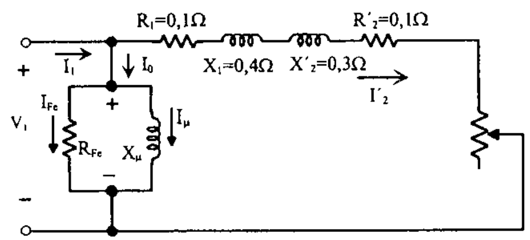


Figura 4.1

Si en este circuito se toma como referencia la tensión del estátor, entonces la corriente de arranque (cuando el deslizamiento es la unidad), se obtiene de la ecuación:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{(0,1+j0,4)+(0,1+j0,3)} = \frac{219,39\angle 0^\circ}{0,2+j0,7} = \frac{219,39\angle 0^\circ}{0,728\angle 74,05^\circ} = 301,36\angle -74,05^\circ \text{ A}$$

donde se ha tenido en cuenta que el estátor está conectado en estrella. La magnitud de la corriente de arranque es igual a 301,36 amperios.

b) La corriente de plena carga, se obtiene del circuito de la Figura 4.1, tomando el deslizamiento de plena carga, que a su vez es igual al 4% y de este modo se obtiene:

$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}_1 = \frac{219,39\angle 0^\circ}{(0,1+j0,4)+(0,1+j0,3)+0,1(\frac{1}{0,04}-1)} = \frac{219,39\angle 0^\circ}{2,6+j0,7} = \frac{219,39\angle 0^\circ}{2,693\angle 15,07^\circ} = 81,48\angle -15,07^\circ$$

es decir, el motor absorbe a plena carga una corriente de 81,48 amperios, con un f.d.p. igual al cos 15,07° = 0,966.

c) La potencia mecánica interna del motor, que al despreciar las pérdidas mecánicas coincide con la potencia mecánica útil, es igual a la potencia disipada en la resistencia de carga de la máquina, es decir:

$$P_u = 3R'_2(\frac{1}{s}-1)I_1^2 = 3 \cdot 2,4 \cdot 81,48^2 = 47,8 \text{ kW}$$

y por consiguiente el par de plena carga o par asignado es:

$$T = \frac{P_u}{\omega} = \frac{47800}{2\pi\frac{1440}{60}} = 317 \text{ N.m.}$$

d) Al ser las pérdidas en el hierro de 1200 W, la potencia eléctrica absorbida de la red es:

$$P_1 = P_u + P_m + P_{cu2} + P_{cu1} + P_{Fe} = 47800 + 0 + 3 \cdot 0,1 \cdot 81,48^2 + 3 \cdot 0,1 \cdot 81,48^2 + 1200 = 52983,4 \text{ W}$$

y por lo tanto el rendimiento del motor a plena carga vale:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{47800}{52983,4} = 90,21\%$$

Problema 4.4

Un motor trifásico de 4 polos, conectado en triángulo, se alimenta por una red de 220 V, 50 Hz. La impedancia del rotor en reposo es igual a 0,2 + j 1,6 Ω, siendo la impedancia del estátor despreciable. La relación de transformación es igual a 2 ($m_v = m_i$). Calcular: a) intensidad absorbida de la red y su f.d.p. para un deslizamiento del 5%; b) potencia y par en el eje en el caso anterior; c) velocidad a la cual se obtiene el par máximo y par máximo correspondiente; d) rendimiento del motor cuando trabaja con par máximo.

NOTA: se desprecian las pérdidas mecánicas y en el hierro.

Solución

a) La impedancia del rotor en reposo es la impedancia propia del rotor a la frecuencia asignada de 50 Hz. Como quiera que la relación de transformación es igual a 2, la impedancia del rotor reducida al estátor es:

$$Z_2 = 0,2 + j1,6\Omega \Rightarrow Z'_2 = m^2 Z_2 = 2^2 Z_2 = 0,8 + j6,4\Omega$$

y la impedancia de carga cuando el deslizamiento es el 5% tiene un valor:

$$R'_c = R'_2(\frac{1}{s}-1) = 0,8(\frac{1}{0,05}-1) = 15,2\Omega$$

En la Figura 4.2 se muestra el circuito equivalente aproximado del motor reducido al estátor.

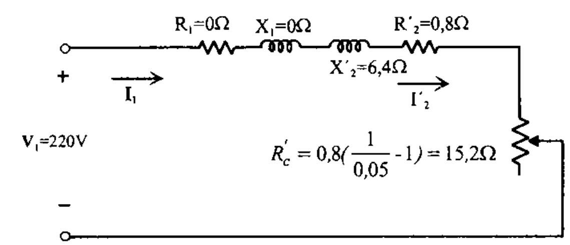


Figura 4.2

Tomando la tensión simple aplicada al motor como referencia de fases, se obtiene una corriente absorbida por fase:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{220\angle 0^\circ}{(0,8+j6,4)+15,2} = \frac{220\angle 0^\circ}{16+j6,4} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = \frac{220\angle 0^\circ}{17,23\angle 21,8} = 12,77\angle -21,8^\circ \text{ A}$$

Es decir, la corriente de fase es 12,77 amperios, con un f.d.p. igual al cos 21,8°=0,929. El módulo de la corriente de línea, al estar conectado el estátor en triángulo, es $I_1(\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 12,77 = 22,11$ A.

b) La potencia mecánica útil del motor, al despreciar las pérdidas mecánicas, es igual a la potencia disipada en la resistencia de carga cuyo valor es:

$$P_u = P_{mi} = 3 \cdot 15,2 \cdot 12,77^2 = 7,436 \text{ kW}$$

y como quiera que la velocidad de sincronismo del motor y la velocidad real de giro son respectivamente:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.} \Rightarrow n = n_1(1-s) = 1500(1-0,05) = 1425 \text{ r.p.m.}$$

el valor del par desarrollado por el motor en estas condiciones es:

$$T = \frac{7436}{2\pi \frac{1425}{60}} = 49,83 \text{ N.m.}$$

c) El deslizamiento para el cual se produce el par máximo viene definido por:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,8}{6,4} = 0,125$$

y por consiguiente la velocidad correspondiente es:

$$n = 1500(1-0,125) = 1312,5 \text{ r.p.m.}$$

Para este deslizamiento, la corriente que absorbe el motor por fase es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{220\angle 0^\circ}{0,8 + j6,4 + 0,8(\frac{1}{0,125} - 1)} = \frac{220\angle 0^\circ}{6,4\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 24,306\angle -45^\circ \text{ A}$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada es:

$$P_{mu} = 3 \cdot 5,6 \cdot 24,306^2 = 9925,8 \text{ W}$$

lo que da lugar a un par máximo:

$$T = \frac{9925,8}{2\pi \frac{1312,5}{60}} = 72,22 \text{ N.m.}$$

d) En la situación del apartado anterior, la potencia eléctrica absorbida de la red es igual a la potencia mecánica más las pérdidas en el cobre del rotor (ya que el estátor tiene una resistencia despreciable), es decir:

$$P_1 = 9925,8 + 3 \cdot 0,8 \cdot 24,306^2 = 11343,7 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento correspondiente es igual a:

$$\eta = \frac{P_{mu}}{P_1} = \frac{9925,8}{11343,7} = 87,5\%$$

Problema 4.5

Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 10 CV, 220/380 V, 50 Hz, 4 polos, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = R'_2 = 0,5\ \Omega$; $X_1 = X'_2 = 3\ \Omega$; $P_{Fe} = P_m = 0$. El rotor está conectado en estrella y el número de espiras del rotor es igual al del estátor, con idénticos factores de devanado.

a) Si la red es de 220 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el estátor del motor?; dibujar la placa de bornes con la disposición de los terminales, indicando sus letras de identificación. b) Conectado el motor correctamente, de acuerdo con el apartado anterior, ¿cuál será el par de arranque del motor con tensión asignada?, ¿qué corriente absorberá el motor de la red en el arranque?; c) ¿cuál será la velocidad del motor a plena carga, es decir, cuando desarrolla 10 CV?; d) determinar el par de plena carga y la capacidad de sobrecarga del motor; e) calcular el valor de la resistencia que debe añadirse en serie con cada fase del rotor, para obtener el par máximo de arranque.

Solución

a) El motor de 220/380 V se debe conectar en triángulo a una red de 220 V. En la Figura 4.3 se muestra la placa de bornes con las letras de identificación de terminales.

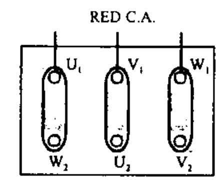


Figura 4.3

b) En la Figura 4.4 se muestra el circuito equivalente por fase del motor cuya velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

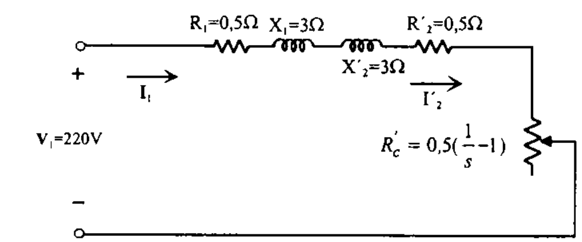


Figura 4.4

La expresión del par en función de los parámetros del motor es:

$$T = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[(R_1 + \frac{R_2'}{s})^2 + X_{cc}^2 \right]}$$

y por consiguiente el par de arranque se obtiene de la ecuación anterior haciendo $s = 1$, resultando:

$$T_a = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 220^2}{2\pi \frac{1500}{60} \left[1^2 + 6^2 \right]} = 12,49 \text{ N.m.}$$

y la magnitud de la corriente de arranque se deduce del circuito de la Figura 4.4, tomando $s = 1$, lo que da lugar a un valor por fase:

$$I_a = \frac{220}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = 36,168 \text{ A}$$

que corresponde a una corriente de línea:

$$I_o \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 36,168 = 62,64 \text{ A}$$

c) La potencia mecánica del motor es la potencia disipada en la resistencia de carga y, teniendo en cuenta que 1 CV= 736 W y denominando s al deslizamiento a plena carga, se puede escribir:

$$P_{mi} = 10 \cdot 736 = 7360 \text{W} = 3 \cdot R_c' I_1'^2 = 3 \cdot 0,5(\frac{1}{s} - 1)\frac{220^2}{(0,5 + \frac{0,5}{s})^2 + 6^2}$$

que simplificando y ordenando, da lugar a la ecuación de segundo grado en s siguiente:

$$46,114s^2 - 9,364s + 0,25 = 0$$

de donde se deducen los siguientes deslizamientos: s_1= 0,1714; s_2= 0,036. Ambos resultados son soluciones matemáticas de la ecuación anterior, sin embargo, si calculamos el deslizamiento para par máximo del motor, se obtiene:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,5^2 + 6^2}} = 0,083$$

lo que significa que los deslizamientos s_1 y s_2 calculados en la curva par-velocidad del motor están situados a cada lado del pico de la curva (valor del par máximo) como se señala en la Figura 4.5. De este modo el punto *B* corresponde a un funcionamiento en la zona inestable y el punto *A* a un comportamiento estable. Por consiguiente la solución física correcta es:

$$s_2 = 0,036 \Rightarrow n = n_1(1 - s) = 1500(1 - 0,0316) = 1452,6 \text{ r.p.m.}$$

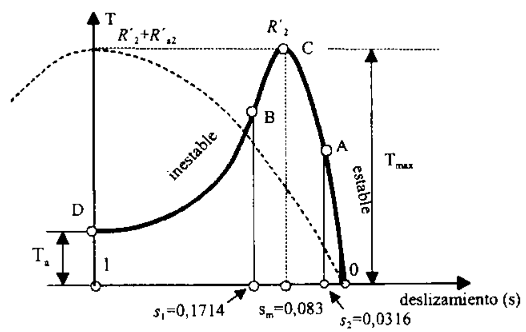


Figura 4.5

d) El par de plena carga correspondiente a la solución anterior (es decir para el punto *A*) es por lo tanto:

$$T_n = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{7360}{2\pi \frac{1452,6}{60}} = 48,38 \text{ N.m.}$$

y el valor del par máximo, para el deslizamiento s_m= 0,083 vale:

$$T_{max} = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 220^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 0,083 \left[(0,5 + \frac{0,5}{0,083})^2 + 6^2\right]} = 70,88 \text{ N.m.}$$

de este modo el factor de sobrecarga del motor es:

$$C = \frac{T_{max}}{T_n} = \frac{70,88}{48,38} = 1,465$$

e) Esta situación se muestra en la línea de puntos de la Figura 4.5. La resistencia adicional que debe añadirse en el reóstato de arranque, teniendo en cuenta que s_m debe ser igual a la unidad, es:

$$s_m = 1 = \frac{R_2' + R_{a2}'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \Rightarrow R_{a2}' = \sqrt{0,5^2 + 6^2} - 0,5 = 5,521 \ \Omega$$

y como quiera que la relación de transformación es igual a la unidad, porque el número de espiras por fase del estátor y del rotor son iguales y con idénticos factores de devanado, es decir:

$$m_v = m_i = m = \frac{N_1 k_{w1}}{N_2 k_{w2}} = 1$$

en consecuencia la resistencia real adicional necesaria en el rotor será:

$$R_{a2}' = m^2 R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = \frac{R_{a2}'}{m^2} = 5,521 \ \Omega$$

Problema 4.6

Un motor asíncrono trifásico, con los datos asignados por el fabricantes siguientes: 9 kW, 4 polos, 220/380 V, 50 Hz, conectado en estrella para una red de 380 V de línea, tiene una resistencia en corriente continua entre dos terminales del estátor de 1 ohmio. Se ha realizado un ensayo de vacío (rotor libre) a tensión variable dando lugar a la siguiente tabla de valores:

V(línea) en voltios	*400*	*380*	*350*	*300*	*250*
I_0 en amperios	*4*	*3,8*	*3,4*	*3*	*2,5*
P_0 total en vatios	*445*	*420*	*384*	*330*	*285*

A continuación se ha bloqueado el rotor y se ha procedido a aplicar una tensión trifásica regulable y creciente desde cero voltios hasta obtener aproximadamente la corriente asignada al mismo, y en ese instante se han efectuado las siguientes lecturas de los aparatos de medida: tensión de línea aplicada= 107 voltios; corriente=15 amperios; potencia total trifásica= 670 vatios. a) Determinar las pérdidas mecánicas del motor (rozamiento y ventilación) y las pérdidas en el hierro a la tensión asignada de 380 V; b) circuito equivalente por fase exacto del motor reducido al primario (estátor) si se considera que la reactancia de cortocircuito se reparte por igual entre los devanados del estátor y del rotor (es decir, $X_1 = X_2'$).

NOTA: tómese la resistencia en c.c. como la resistencia efectiva de los devanados.

Solución

a) En la Figura 4.6 se muestra la medida de la resistencia del motor, que se realiza en la práctica aplicando una fuente de c.c. a dos terminales cualesquiera del motor y midiendo tanto la tensión aplicada como la corriente dentro de un rango de tensiones. La ley de Ohm nos da la resistencia entre terminales, que en el caso de este problema ha sido de 1 ohmio. Esta resistencia es el doble que la de una bobina del estátor del motor (ya que hay dos bobinas en serie), por lo que el valor de la resistencia por fase del estátor es $R_1 = ½R_{total}$= 0,5 ohmios.

A continuación es importante completar la tabla del ensayo de vacío. Téngase en cuenta que la potencia total absorbida por el motor en vacío es la suma de las pérdidas en el cobre del estátor (que dependen de la corriente que circula por los devanados del estátor), las pérdidas en el hierro (que dependen del flujo magnético en el entrehierro y por lo tanto de la tensión aplicada) y las pérdidas mecánicas que dependen de la velocidad. Es por ello que en la Tabla nº1 se recogen las medidas del ensayo de vacío y se completa la tabla calculando las pérdidas en el cobre del estátor para cada punto ensayado, y la diferencia entre las pérdidas en vacío y las pérdidas en el cobre del estátor. Para que el lector comprenda cómo se han confeccionado las dos últimas filas de la Tabla nº1, se va a explicar a continuación cómo se ha realizado con la columna correspondiente a la tensión aplicada de 380 voltios. Para esta tensión la corriente del estátor es de 3,8 amperios y por lo tanto las pérdidas correspondientes en el cobre son:

$$P_{cu1} = 3R_1I_1^2 = 3\cdot 0,5\cdot 3,8^2 \approx 21,7 \text{ vatios}$$

y por lo tanto la diferencia entre la potencia absorbida en vacío y las pérdidas anteriores son:

$$P_0 - P_{cu1} = 420 - 21,7 = 398,3 \text{ vatios} = P_{Fe} + P_m$$

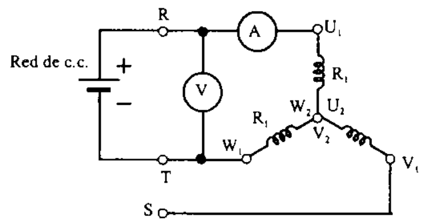


Figura 4.6

La diferencia anterior es también la suma de las pérdidas mecánicas y en el hierro y de este modo se ha preparado la Tabla nº1 para las distintas tensiones de ensayo aplicadas al motor.

Tabla nº1

[illegible]	400	[illegible]	350	300	250
[illegible]	4	[illegible]	3,4	3	2,5
[illegible]	445	[illegible]	384	330	285
[illegible]	24	[illegible]	17,3	13,5	9,4
[illegible]	421	[illegible]	366,7	316,5	275,6

A continuación se deben dibujar en un gráfico las pérdidas de la última fila de la Tabla nº1 en función de la tensión aplicada al motor. Esto da como resultado el gráfico de la Figura 4.7a. En esta figura se han representado con pequeños círculos los puntos ensayados. La ordenada en cada punto indica el valor de la suma de las pérdidas en el hierro más las pérdidas mecánicas del motor. Si se supone que en este pequeño rango de tensiones, no se han observado cambios en la velocidad de giro del motor, entonces las pérdidas mecánicas han sido constantes en este rango de funcionamiento. Por otro lado, ,las perdidas en el hierro dependen prácticamente de la inducción magnética al cuadrado (en definitiva del cuadrado de la tensión aplicada), y es por este motivo que la curva de la Figura 4.7a tiene forma parabólica. Si se extrapola esta parábola de la Figura 4.7a hasta llegar al eje vertical, se obtiene el punto A, cuya ordenada representa la pérdida mecánica del motor (ya que en ausencia de tensión las pérdidas en el hierro son nulas) y que en este caso son del orden de 180 vatios. El lector puede comprender que no es fácil realizar esta extrapolación ya que es muy imprecisa, es por ello que en la práctica resulta más útil representar las pérdidas en el hierro más las pérdidas mecánicas en función del cuadrado de la tensión aplicada, tal como se ha hecho en la Figura 4.7b, puesto que entonces la curva parabólica se transforma en una recta que facilita enormemente la extrapolación para determinar el punto *A* con mayor exactitud y cuya ordenada determina la pérdida mecánica del motor que corresponde aquí a 180 W. A continuación y utilizando mejor la

Figura 4.7b, se observa que si el motor funciona a la tensión asignada de 380 voltios de línea, las pérdidas totales (hierro y mecánicas) son de 398,3 vatios (ver Tabla nº1), por lo que las pérdidas en el hierro con esta tensión son de 398,3−180 = 218,3 ≈ 218vatios, como se indica claramente en la Figura 4.7b.

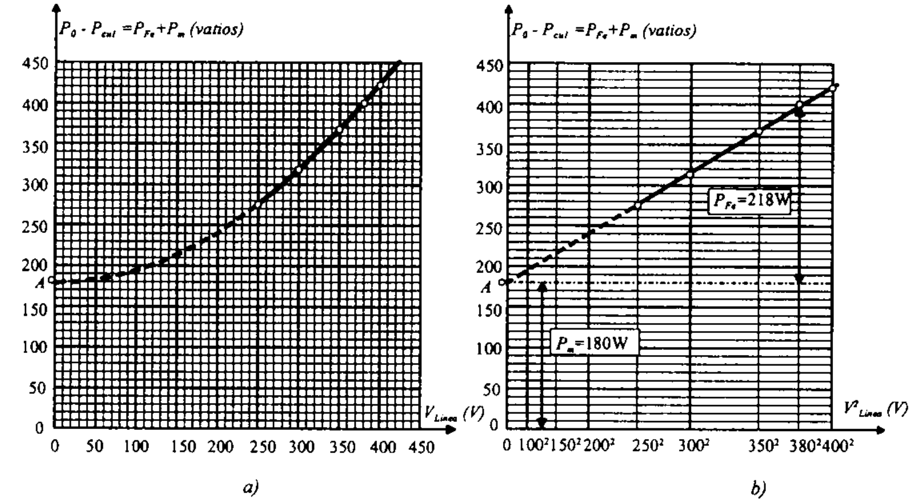


Figura 4.7

En definitiva, en vacío se han calculado las siguientes magnitudes:

$$R_1 = 0,5\ \Omega;\ P_{Fe}\ (\text{a } 380 \text{ V}) = 218 \text{ W};\ P_m = 180 \text{ W};\ I_0 = 3,8 \text{ A}$$

b) A partir de los resultados anteriores se pueden determinar los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente por fase del motor reducido al estátor. En la Figura 4.8a se muestra el esquema eléctrico correspondiente. En este circuito se cumple:

$$P_{Fe} = 3V_1(\text{fase})I_1(\text{fase})\cos\varphi_0$$

que al sustituir valores nos da:

$$P_{Fe} = 218 = 3\frac{380}{\sqrt{3}}3,8\cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{218}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 3,8} = 0,087 \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_0 = 0,996$$

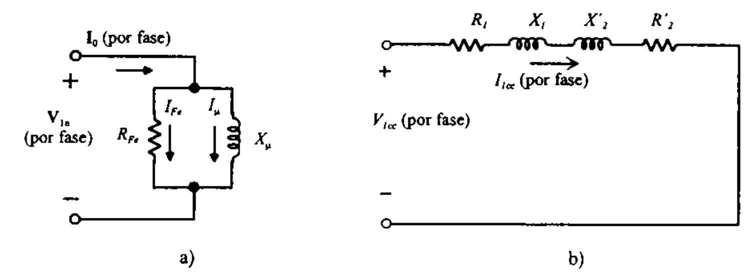


Figura 4.8

y por consiguiente de la Figura 4.8a se tiene:

$$I_{Fe} = I_0\cos\varphi_0 = 3,8\cdot 0,087 = 0,33 \text{ A} \quad ; \quad I_\mu = I_0\operatorname{sen}\varphi_0 = 3,8\cdot 0,996 = 3,78 \text{ A}$$

de donde se deduce:

$$R_{Fe} = \frac{380/\sqrt{3}}{0,33} = 676,3 \approx 676\ \Omega \quad ; \quad X_\mu = \frac{380/\sqrt{3}}{3,78} = 58\ \Omega$$

Por otra parte, del ensayo de cortocircuito se obtiene el esquema eléctrico de la Figura 4.8b (se ha despreciado la rama paralelo del circuito equivalente) y de acuerdo con los datos del enunciado se puede escribir:

$$P_{cc} = \sqrt{3}V_{1cc}(\text{línea})I_{1cc}(\text{línea})\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = \frac{670}{\sqrt{3}\cdot 107\cdot 15} = 0,241 \Rightarrow \text{sen}\varphi_{cc} = 0,971$$

de donde se obtiene:

$$Z_{cc} = \frac{107/\sqrt{3}}{15} = 4,12\Omega \Rightarrow R_{cc} = Z_{cc}\cos\varphi_{cc} = 4,12\cdot 0,241 = 1\ \Omega \Rightarrow X_{cc} = Z_{cc}\text{sen}\varphi_{cc} = 4,12\cdot 0,971 \approx 4\ \Omega$$

y como quiera que $R_1 = 0,5\Omega$, y la reactancia $X_1 = X'_2$, se tendrá finalmente:

$$R_{cc} = 1\ \Omega = R_1 + R'_2 = 0,5 + R'_2 \quad \Rightarrow \quad R'_2 = 0,5\ \Omega$$

$$X_{cc} = 4\ \Omega = X_1 + X'_2 \quad \Rightarrow \quad X_1 = X'_2 = \frac{4}{2} = 2\ \Omega$$

En la Figura 4.9 se muestra el circuito equivalente exacto del motor de acuerdo con los resultados anteriores.

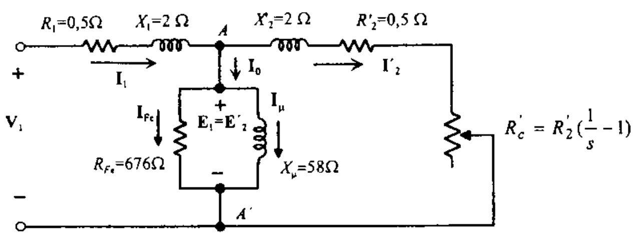


Figura 4.9

Problema 4.7

Utilizando los resultados del circuito equivalente exacto del Problema 4.6, determinar: a) corriente que absorbe el motor de la red de 380 voltios (motor conectado en estrella) y su f.d.p. cuando funciona a plena carga con un deslizamiento del 4%; b) potencia mecánica desarrollada por el motor en el caso anterior; c) par de plena carga correspondiente; d) rendimiento a plena carga.

Solución

a) En la Figura 4.10 se ha repetido el circuito de la Figura 4.9, pero determinando la resistencia de carga para un deslizamiento del 4%. Si se denomina $\mathbf{Z}_p$ la impedancia de la rama de vacío del motor, su valor es:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{676\cdot j58}{676 + j58} = 4,94 + j57,58 = 57,79\angle 85,1°\ \Omega$$

La impedancia que se observa entre los terminales AA' hacia la derecha es la asociación en paralelo de la impedancia de la rama de vacío anterior y de la impedancia total del circuito del rotor: $12,5+j2\ \Omega$ y cuya resultante algunos autores la denominan *impedancia de campo* Z_f y su valor es:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_f} = \frac{1}{12,5 + j2} + \frac{1}{57,79\angle 85,1°} \Rightarrow \mathbf{Z}_f \approx 11,78\angle 20,5° \approx 11,04 + j4,12\ \Omega$$

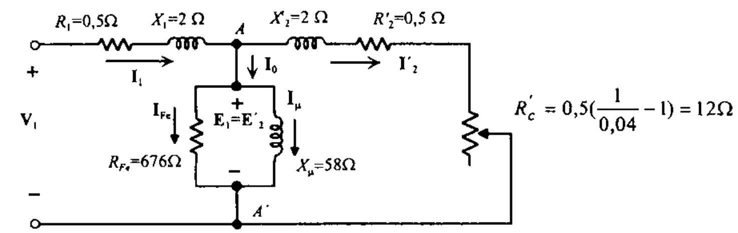


Figura 4.10

La impedancia anterior está en serie con la impedancia del estátor, dando lugar a una impedancia total del motor:

$$\mathbf{Z}_{total} = 0,5 + j2 + 11,04 + j4,12 = 11,54 + j6,12 = 13,06\angle 27,9°\ \Omega$$

De este modo la corriente absorbida por el motor cuando se alimenta a la tensión asignada de 380 voltios es, según el circuito de la Figura 4.10:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{13,06\angle 27,9°} = 16,8\angle -27,9°\ \text{A}$$

es decir, el motor absorbe a plena carga una corriente de 16,8 amperios con un f.d.p. igual al cos27,9° = 0,884, lo que corresponde a una potencia eléctrica absorbida de la red:

$$P_1 = \sqrt{3}V_1(\text{línea})I_1(\text{línea})\cos\varphi_1 = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 16,8\cdot 0,884 = 9775\ \text{W}$$

b) Si se conoce la corriente absorbida por el motor de la red $\mathbf{I}_1$, se puede calcular la corriente del rotor reducida al estátor, teniendo en cuenta que la impedancia $\mathbf{Z}_p$ de la rama de vacío del motor está en paralelo con la impedancia total del circuito del rotor. Es por ello que aplicando la regla del divisor de corriente resulta:

$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}_p}{\mathbf{Z}_p + 12,5 + j2} = 16,8\angle -27,9°\frac{57,79\angle 85,1°}{62,08\angle 73,7°} \approx 15,63\angle -16,5°\ \text{A}$$

La potencia mecánica interna desarrollada por el motor es, de este modo:

$$P_{mi} = 3\cdot R'_c\cdot I'^2_2 = 3\cdot 12\cdot 15,63^2 \approx 8795\ \text{W}$$

y como las pérdidas mecánicas son de 180 vatios corresponde a una potencia mecánica útil:

$$P_u = 8795 - 180 = 8615\ \text{W}$$

Se pueden obtener los mismos resultados de la potencia mecánica interna y por ende de la potencia mecánica útil (salvo errores de redondeo) de una forma más simple, sin tener que calcular la corriente del rotor. Téngase en cuenta para ello que la potencia que atraviesa el entrehierro P_a tiene un valor:

$$P_a = P_1 - 3\cdot R_1\cdot I_1^2 - P_{Fe} = 9775 - 3\cdot 0,5\cdot 16,8^2 - 218 \approx 9134\ \text{W}$$

y a partir de la potencia anterior se pueden calcular las pérdidas en el cobre del rotor sin necesidad de determinar la corriente en el mismo, ya que se cumple:

$$P_{cu2} = sP_a = 0,04\cdot 9134 \approx 365\ \text{W}$$

y por consiguiente la potencia mecánica interna será:

$$P_{mi} = P_a - P_{cu2} = 9134 - 365 = 8769 \approx 8795 \text{ W (salvo errores de redondeo)}$$

c) Como el motor tiene 4 polos y la frecuencia es de 50 Hz, la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y teniendo en cuenta que el deslizamiento es del 4%, la velocidad de giro del motor es:

$$n = n_1(1 - s) = 1500(1 - 0,04) = 1440 \text{ r.p.m.}$$

el par motor vale:

$$T = \frac{P_u}{\omega} = \frac{8615}{2\pi \frac{1440}{60}} = 57,1 \text{ N.m.}$$

d) El rendimiento del motor es el cociente:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{8615}{9775} = 88,1\%$$

Problema 4.8

Un motor asíncrono trifásico conectado en estrella de 3000 V, 24 polos, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros: $R_1 = 0$; $X_1 = 0$; $R'_2 = 0,016\ \Omega$; $X'_2 = 0,265\ \Omega$. Se obtiene el par de plena carga a la velocidad de 247 r.p.m. Calcular: a) velocidad para par máximo; b) capacidad de sobrecarga del motor definida por el cociente T_{max}/T_n.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{12} = 250 \text{ r.p.m.}$$

y como quiera que la velocidad del motor a plena carga es de 247 r.p.m., el deslizamiento a plena carga o nominal s_n tiene un valor:

$$s_n = \frac{250 - 247}{250} = 0,012$$

Además el deslizamiento para el que se obtiene el par máximo se obtiene de la siguiente expresión:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R'_2}{X'_2} = \frac{0,016}{0,265} = 0,0604$$

por lo que el valor de la velocidad del motor para par máximo es:

$$n = n_1(1 - s_m) = 250(1 - 0,0604) = 234,9 \text{ r.p.m.}$$

b) Para determinar la capacidad de sobrecarga del motor es necesario escribir la expresión del par motor en función del deslizamiento:

$$T = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s\left[(R_1 + \frac{R'_2}{s})^2 + X_{cc}^2\right]} = \frac{K}{s\left[(\frac{R'_2}{s})^2 + X_2'^2\right]}$$

donde, por simplicidad, se ha llamado constante K a la siguiente expresión:

$$K = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}}$$

El cociente entre el par máximo y el par nominal o de plena carga define la capacidad de sobrecarga del motor y vale:

$$C = \frac{M_{max}}{M_n} = \frac{s_n\left[(\frac{R'_2}{s_n})^2 + X_2'^2\right]}{s_m\left[(\frac{R'_2}{s_m})^2 + X_2'^2\right]} = \frac{0,012\left[(\frac{0,016}{0,012})^2 + 0,265^2\right]}{0,0604\left[(\frac{0,016}{0,0604})^2 + 0,265^2\right]} = \frac{0,022176}{8,48 \cdot 10^{-3}} = 2,615$$

Problema 4.9

Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 25 CV, 380 V, 50 Hz, tiene un par de arranque de 322 N.m. y un par de plena carga igual a 124 N.m. Determinar: a) el par de arranque cuando la tensión del estátor se reduce a 220 V; b) tensión que debe aplicarse al estátor para obtener un par de arranque igual al par de plena carga.

Solución

a) La expresión general del par motor en función de los parámetros de la máquina es:

$$T = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s\left[(R_1 + \frac{R'_2}{s})^2 + X_{cc}^2\right]}$$

que en el caso del arranque ($s = 1$) se transforma en:

$$T_a = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}\left[(R_1 + R'_2)^2 + X_{cc}^2\right]}$$

En definitiva, la expresión anterior indica que si no se modifica la impedancia del motor, el par de arranque es proporcional al cuadrado de la tensión aplicada. Por ello, si el par de arranque a 380 voltios vale 322 N.m., el par de arranque del motor con una tensión aplicada de 220 voltios se obtendrá de la relación siguiente:

$$\frac{322}{T'_a} = (\frac{380}{220})^2 \Rightarrow T'_a = 107,93 \text{ N.m.}$$

b) En el caso de que el par de arranque tenga que ser igual al de plena carga, que vale 124 N.m., la tensión necesaria se obtiene de la relación:

$$\frac{124}{322} = \frac{V_1^2}{380^2} \Rightarrow V_1 = 380\sqrt{\frac{124}{322}} = 235,81 \text{ V}$$

Problema 4.10

Los parámetros de la rama serie de un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes conectado en estrella, 380 V, 4 polos, 50 Hz, son: $R_1 = R'_2 = 1\ \Omega$; $X_{cc} = 4\ \Omega$. Calcular: a) par de plena carga si el deslizamiento es el 4%; b) resistencia que debe añadirse a cada fase del rotor, para obtener el par nominal, a la mitad de la velocidad de plena carga con los anillos cortocircuitados. La relación de transformación es $m_v = m_i = 2$, y las pérdidas mecánicas son despreciables.

Solución

a) Si el estátor se conecta en estrella a una red de 380 voltios de línea, la tensión de fase correspondiente es:

$$V_1 = \frac{380}{\sqrt{3}} \text{ voltios}$$

como quiera que además la frecuencia de alimentación es de 50 Hz y la máquina tiene 4 polos, la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60.f_1}{p} = \frac{60.50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y de este modo el par de plena carga del motor para un deslizamiento del 4% vale:

$$T = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s\left[(R_1 + \frac{R_2'}{s})^2 + X_{cc}^2\right]} = \frac{3\cdot 1(380/\sqrt{3})^2}{2\pi \frac{1500}{60} 0,04\left[(1+\frac{1}{0,04})^2 + 4^2\right]} = 33,21 \text{ N.m.}$$

b) La velocidad del motor a plena carga es:

$$n = n_1(1-s) = 1500(1-0,04) = 1440 \text{ r.p.m.}$$

por lo que la velocidad mitad de la plena carga es $n' = 1440/2 = 720$ r.p.m. El deslizamiento correspondiente es:

$$s' = \frac{1500-720}{1500} = 0,52$$

y si se denomina $R_{t2}' = R_2' + R_{ad2}'$ a la resistencia total del circuito del rotor (reducida al estátor), para obtener el par asignado (nominal) a la mitad de la velocidad de plena carga se deberá cumplir:

$$T = 33,21 = \frac{R_{T2}'\, 380^2}{2\pi \frac{1500}{60} 0,52\left[(1+\frac{R_{T2}'}{0,52})^2 + 4^2\right]}$$

de donde se deduce la siguiente ecuación de 2° grado:

$$3,7R_{T2}'^2 - 49,386\ R_{T2}' + 17 = 0$$

cuyos resultados son:

$$R_{T2}' = 13\ \Omega \quad ; \quad R_{T2}' = 0,3536\ \Omega$$

que corresponden a las siguientes resistencias adicionales reducidas al estátor:

$$R_2' + R_{a2}' \Rightarrow R_{a2}' = 13 - 1 = 12\ \Omega \quad ; \quad R_{a2}' = 0,3536 - 1 = -0,6464\ \Omega \text{ (no tiene sentido físico)}$$

por consiguiente la resistencia adicional real medida en el circuito del rotor será:

$$R_{a2}' = 12 = m^2 R_{a2} = 4R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 3\ \Omega$$

Problema 4.11

Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 15 kW, 380 V, 50 Hz, 6 polos tiene los siguientes parámetros (con los anillos deslizantes cortocircuitados): $R_1 = R'_2 = 0,8\ \Omega$; $X_1 = X'_2 = 2\ \Omega$. Los devanados del estátor y rotor están conectados en estrella y $m_v = m_i = 2$. Calcular: a) par de arranque; b) par máximo y velocidad correspondiente; c) resistencia que debe conectarse en serie, por fase, en el rotor para obtener en el arranque los 2/3 del par máximo.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60\cdot 50}{3} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

y el valor del par de arranque se obtiene de la expresión general del par para un deslizamiento igual a la unidad, es decir:

$$T_a = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s\left[(R_1+\frac{R_2'}{s})^2 + X_{cc}^2\right]} = \frac{3\cdot 0,8(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{2\pi \frac{1000}{60} 1\left[(0,8+\frac{0,8}{1})^2 + 4^2\right]} = 59,44 \text{ N.m.}$$

b) El deslizamiento para par máximo se obtiene de la expresión:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,8}{\sqrt{0,8^2+4^2}} = 0,196$$

por lo que la velocidad para par máximo vale:

$$n = 1000(1-0,196) = 80,39 \text{ r.p.m.}$$

y el valor del par máximo se obtiene de la expresión general del par en la que debe tomarse el deslizamiento igual a 0,196, lo que da lugar a:

$$T_{max} = \frac{0,8\cdot 380^2}{2\pi \frac{1000}{60} 0,196\left[(0,8+\frac{0,8}{0,196})^2 + 4^2\right]} = 141,3 \text{ N.m.}$$

c) Para obtener un par en el arranque igual a 2/3 del de plena carga, será necesario incluir una resistencia adicional en el reóstato de arranque. Si se denomina $R_{t2}' = R_2' + R_{ad2}'$ a la resistencia total del circuito del rotor (reducida al estátor), se deberá cumplir:

$$T_a = \frac{2}{3}141,3 = 94,2 = \frac{R_{T2}'\, 380^2}{2\pi \frac{1000}{60} 1\left[(0,8+\frac{R_{T2}'}{1})^2 + 4^2\right]}$$

Expresión que da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$R_{T2}'^2 - 13.038 R_{T2}' + 16,64 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$R_{T2}' = 11,6\ \Omega \quad ; \quad R_{T2}' = 1,434\ \Omega$$

de donde se deducen las siguientes resistencias adicionales posibles:

$$11,6 = 0,8 + R_{a2}' \Rightarrow R_{a2}' = 10,8 = m^2 R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 2,7\ \Omega$$

$$1,434 = 0,8 + R_{a2}' \Rightarrow R_{a2}' = 0,634 = 4R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 0,158\ \Omega$$

Es fácil darse cuenta que la solución físicamente aceptable es la segunda. Para comprenderlo se ha preparado la Figura 4.11, que muestra tres curvas par-velocidad. La situada más a la derecha es la curva propia del motor que no tiene ninguna resistencia adicional en el rotor; en ella se observa que el par máximo vale 141,3 N.m. y el par de arranque, representado por el punto *A* tiene un valor de 59,4 N.m., además el par máximo se produce para un deslizamiento de 0,196

La curva central muestra la característica par-velocidad del motor con una resistencia total del rotor $R'_{T2} = 11,6\ \Omega$ que tiene un par de arranque para $s = 1$ definido por el punto B y que vale 2/3 del par máximo, es decir 94,2 N.m. Esta curva tendrá un valor máximo para un deslizamiento:

$$s_m = \frac{R'_{T2}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{11,6}{\sqrt{0,8^2 + 4^2}} = 0,352$$

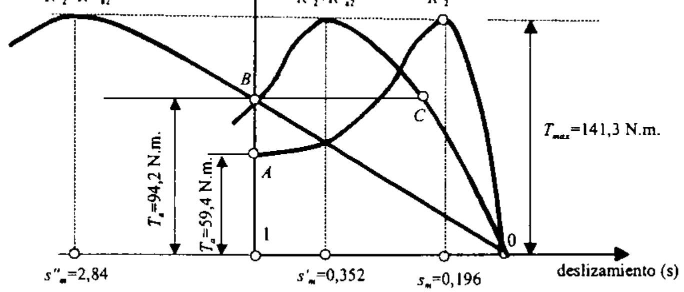


Figura 4.11

Mientras que la curva situada más a la izquierda, tiene la característica par-velocidad del motor con una resistencia total del rotor $R'_{T2} = 1,434\Omega$ que tiene un par para $s = 1$ definido por el punto B y que vale 2/3 del par máximo, es decir 94,2 N.m. Esta curva tendrá un máximo para un deslizamiento:

$$s_m = \frac{R'_{T2}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{1,434}{\sqrt{0,8^2 + 4^2}} = 2,84$$

que se sitúa en la zona de comportamiento del motor como freno. Es por ello que esta situación no es aceptable físicamente, ya que aunque arrancase el motor con un par resistente de 94,2 N.m., la máquina no se movería, mientras que para la curva central el motor arrancaría y continuaría girando hasta llegar al punto C.

Problema 4.12

Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del rotor por fase de 0,2 Ω y un par máximo de 162 N.m. a 875 r.p.m. Calcular: a) el par cuando el deslizamiento es el 4%; b) la resistencia adicional que debe añadirse en el circuito del rotor para obtener los 2/3 del par máximo en el arranque. NOTA: prescindir de la impedancia del estátor.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

y por lo tanto el deslizamiento para par máximo vale:

$$s_m = \frac{1000 - 875}{1000} = 0,125$$

El deslizamiento anterior, en función de las resistencias y reactancias del motor es igual a:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R'_2}{X'_2} = \frac{m^2 R_2}{m^2 X_2} = \frac{R_2}{X_2} = \frac{0,2}{X_2} = 0,125$$

resulta una reactancia del rotor: $X_2 = 1,6\Omega$. Además el par motor viene expresado por:

$$T = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[(\frac{R'_2}{s})^2 + X'^2_2 \right]} = \frac{3m^2 R_2 V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s m^4 \left[(\frac{R_2}{s})^2 + X_2^2 \right]}$$

que se puede poner de la forma siguiente:

$$T = \frac{KR_2}{s\left[(\frac{R_2}{s})^2 + X_2^2 \right]} \quad \text{donde} \quad K = \frac{3m^2 V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} m^4}$$

y por lo tanto, los pares máximo y de plena carga (este para un deslizamiento en este caso del 4%) se pueden escribir del siguiente modo:

$$T_{máx} = 162 = \frac{K \cdot 0,2}{0,125\left[(\frac{0,2}{0,125})^2 + 1,6^2 \right]} \quad ; \quad T_n = \frac{K \cdot 0,2}{0,04\left[(\frac{0,2}{0,04})^2 + 1,6^2 \right]}$$

y al dividir ambas ecuaciones entre sí resulta la fórmula de Kloss:

$$\frac{T_n}{T_{máx}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \Rightarrow \frac{T_n}{162} = \frac{2}{\frac{0,04}{0,1225} + \frac{0,125}{0,04}} \Rightarrow T_n = 94,05 \text{ N.m.}$$

b) Si se denomina R_{T2} a la resistencia total del circuito del rotor (propia + adicional) y teniendo en cuenta que el par de arranque en esta situación debe ser 2/3 del par máximo, resulta:

$$\frac{2}{3} 162 = \frac{KR_{T2}}{1\left[(\frac{R_{T2}}{1})^2 + 1,6^2 \right]} = 108 = \frac{KR_{T2}}{R_{T2}^2 + 2,56}$$

expresión que al desarrollar da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$R_{T2}^2 - 4,8 R_{T2} + 2,56 = 0$$

cuyos resultados son:

$$R_{T2} = 4,19\ \Omega \quad ; \quad R_{T2} = 0,611\ \Omega$$

y como la resistencia del rotor es de 0,2 ohmios, las resistencias adicionales posibles son:

$$R_{a2} = 3,99\ \Omega \quad ; \quad R_{a2} = 0,411\ \Omega$$

y de una forma análoga al problema anterior, la solución físicamente aceptable es la segunda, es decir: $R_{a2} = 0,411\ \Omega$.

Problema 4.13

Un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla, conectado en estrella, de 3,5 kW, 220 V, seis polos, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: ensayo de vacío o de rotor libre: tensión compuesta aplicada: 220 V; corriente de línea del estátor: 3,16 A; potencia absorbida en el ensayo: 590 W. Se sabe también que las pérdidas mecánicas (rozamiento+ventilación) a velocidades cercanas a la asignada son de 312 W. (Se pueden despreciar en este ensayo las pérdidas en el cobre del estátor. El lector puede comprobar que representa una potencia de 7,2 W que se puede considerar despreciable). Ensayo de cortocircuito o de rotor bloqueado: Tensión compuesta aplicada: 34,3 V; corriente de línea: 14,5 A; potencia absorbida: 710 W. A la temperatura de funcionamiento, la resistencia entre dos terminales cualesquiera del estátor es de

0,48 ohmios. Si se conecta el motor a una red trifásica de 220 V de línea y se considera aceptable utilizar el circuito equivalente aproximado del motor, calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del motor reducido al primario (estátor); b) si el motor gira a 960 r.p.m., determinar: 1) potencia mecánica útil en el eje suministrada por el motor; 2) corriente de línea absorbida por el motor de la red y f.d.p. correspondiente; 3) potencia eléctrica absorbida por el motor de la red; 4) rendimiento del motor; 5) par mecánico útil en el eje.

Solución

a) Del ensayo de vacío se obtienen los siguientes resultados:

$$P_{Fe} = 590 - 312 = 278 = \sqrt{3}\cdot 220\cdot 3,16\cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0,231 \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_0 = 0,973$$

por lo que las componentes de la corriente de vacío son:

$$I_{Fe} = 3,16\cdot 0,231 = 0,73\,\text{A}\ ;\ I_\mu = 3,16\cdot 0,973 = 3,075\,\text{A}$$

y los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente valen:

$$R_{Fe} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}}{0,73} = 174\ \Omega\ ;\ X_\mu = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}}{3,075} = 41,31\ \Omega$$

Del ensayo de cortocircuito se obtiene:

$$710 = \sqrt{3}\cdot 34,3\cdot 14,5\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,824 \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_{cc} = 0,566$$

por lo que la impedancia de cortocircuito del motor vale:

$$Z_{cc} = \frac{\frac{34,3}{\sqrt{3}}}{14,5} = 1,366\ \Omega$$

y en consecuencia la resistencia y reactancia de cortocircuito son, respectivamente:

$$R_{cc} = 1,366\cdot 0,824 = 1,126\ \Omega\ ;\ X_{cc} = 1,366\cdot 0,566 = 0,773\ \Omega$$

Como quiera además que la resistencia entre dos terminales del estátor es de 0,48 ohmios (dos devanados en serie), la resistencia por fase del estátor y la reducida del rotor son, respectivamente:

$$R_1 = \frac{0,48}{2} = 0,24\ \Omega\ ;\ R_{cc} = 1,126 = R_1 + R_2' = 0,24 + R_2' \Rightarrow R_2' = 0,886\ \Omega$$

en consecuencia el circuito equivalente aproximado del motor reducido al estátor es el mostrado en la Figura 4.12.

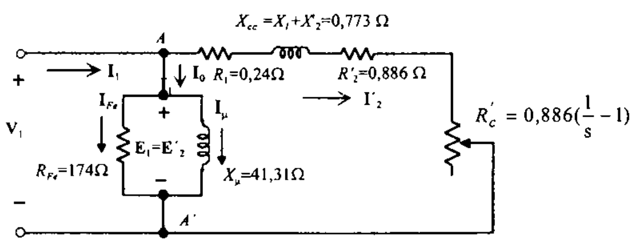


Figura 4.12

b) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60\cdot 50}{3} = 1000\ \text{r.p.m.}$$

y al girar a 960 r.p.m., el deslizamiento correspondiente es:

$$s = \frac{1000 - 960}{1000} = 4\%$$

b1) La corriente reducida del rotor, tomando la tensión primaria del circuito equivalente de la Figura 4.12 como referencia, tiene un valor:

$$\mathbf{I}_2' = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{0,24 + 0,886 + j0,773 + 21,264} = \frac{127,02\angle 0^\circ}{22,39 + j0,773} = \frac{127,02\angle 0^\circ}{22,4\angle 1,98^\circ} = 5,67\angle -1,98^\circ\ \text{A}$$

por consiguiente la potencia mecánica interna del motor, que es la potencia disipada en la resistencia de carga, vale:

$$P_{mi} = 3\cdot 21,264\cdot 5,67^2 = 2050,84\ \text{W}$$

y como quiera que las pérdidas mecánicas son de 312 vatios, la potencia mecánica útil es igual a:

$$P_u = P_{mi} - P_m = 2050,84 - 312 = 1738,84\ \text{W}$$

b2) La corriente que el motor absorbe de la red vale:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2' = (0,73 - j3,075) + 5,67\angle -1,98^\circ = 7,185\angle -27,08^\circ$$

que corresponde a una magnitud de 7,185 amperios con un f.d.p. igual a cos 27,08°= 0,89.

b3) La potencia eléctrica que absorbe el motor de la red es de este modo:

$$P_1 = \sqrt{3}\cdot 220\cdot 7,185\cdot 0,89 = 2436,7\ \text{W}$$

b4) El rendimiento del motor es:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{1738,84}{2436,7} = 71,36\%$$

b5) El par mecánico útil en el eje es:

$$T = \frac{P_u}{\omega} = \frac{1738,84}{2\pi\frac{960}{60}} = 17,3\ \text{N.m.}$$

Problema 4.14

Un motor de inducción trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del rotor por fase de 0,25 Ω, siendo la impedancia del estátor despreciable. El par máximo se obtiene para una velocidad de 1200 r.p.m. Si la capacidad de sobrecarga es igual a 2,1. Calcular: a) velocidad a plena carga o asignada; b) relación par de arranque a par asignado o nominal.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500\ \text{r.p.m.}$$

y como quiera que la velocidad del motor para par máximo es de 1200 r.p.m., el deslizamiento correspondiente vale:

$$s_m = \frac{1500 - 1200}{1500} = 0,2$$

que sustituyendo en la expresión analítica del deslizamiento al cual se produce el par máximo resulta:

$$0,2 = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_2'}{X_2'} = \frac{R_2}{X_2} = \frac{0,25}{X_2}$$

de donde se deduce:

$$X_2 = \frac{0,25}{0,2} = 1,25\ \Omega$$

La expresión del par motor es de la forma:

$$T = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[(R_1 + \frac{R_2'}{s})^2 + X_{cc}^2\right]} = \frac{3V_1^2 m^2 R_2}{2\pi \frac{n_1}{60} m^4 s \left[(\frac{R_2}{s})^2 + X_2^2\right]}$$

que denominando K a:

$$K = \frac{3V_1^2 m^2}{2\pi \frac{n_1}{60} m^4}$$

permite escribir el par de la forma siguiente:

$$T = \frac{KR_2}{s\left[(\frac{R_2}{s})^2 + X_2^2\right]} \qquad \text{(a)}$$

que para $s_m = 0,2$, da lugar al par máximo y para un valor específico s se obtiene el par de plena carga, es decir:

$$T_{max} = \frac{K\,0,25}{0,2\left[(\frac{0,25}{0,2})^2 + 1,25^2\right]} \quad ; \quad T_n = \frac{K\,0,25}{s\left[(\frac{0,25}{s})^2 + 1,25^2\right]}$$

y como quiera que la capacidad de sobrecarga del motor (que es el cociente de los pares anteriores) es igual a 2,1, resulta la fórmula de Kloss:

$$\frac{T_n}{T_{max}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \Rightarrow \frac{1}{2,1} = \frac{2}{\frac{s}{0,2} + \frac{0,2}{s}}$$

Esta expresión da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$s^2 - 0,84s + 0,04 = 0$$

que al resolver se obtienen los siguientes valores del deslizamiento a plena carga posibles:

$$s_1 = 0,789 \quad ; \quad s_2 = 0,0507$$

El primer deslizamiento se sitúa en la zona inestable del motor, por lo que no es válido. El segundo deslizamiento es cercano a la velocidad de sincronismo y por lo tanto es el correcto. La velocidad correspondiente del motor es:

$$n = 1500(1 - 0,0507) = 1424 \text{ r.p.m.}$$

b) El par de arranque se obtiene de la expresión general (a) para $s = 1$, lo que da lugar a:

$$T_a = \frac{K\,0,25}{1(0,25^2 + 1,25^2)}$$

y por consiguiente, el cociente par de arranque a nominal será:

$$\frac{T_a}{T_n} = \frac{0,0507\left[(\frac{0,25}{0,0507})^2 + 1,25^2\right]}{0,25^2 + 1,25^2} = 0,8073$$

Problema 4.15

El circuito equivalente de un motor de inducción trifásico de 4 polos, conectado en estrella, presenta los siguientes valores: $R_1 = R'_2 = 0,85\ \Omega$; $X_{cc} = 5\ \Omega$. Si la red tiene una tensión de 380 V, 50 Hz. Calcular: a) corriente de arranque y de plena carga, si el deslizamiento en este último régimen es del 4%. b) par de arranque y de plena carga; c) velocidad del motor cuando consume una corriente mitad de la de arranque y par electromagnético desarrollado por la máquina en ese instante. Prescíndase de la rama paralelo del circuito equivalente.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60.50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

En la Figura 4.13 se muestra el circuito equivalente del motor reducido al estátor. Si se toma la tensión de la red como referencia de fase, la corriente absorbida por el motor de la red en el arranque (para $s = 1$) es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{1,7 + j5} = \frac{219,39\angle 0°}{5,281\angle 71,22°} = 41,54\angle -71,22° \text{ A}$$

que corresponde a una magnitud de 41,54 amperios.

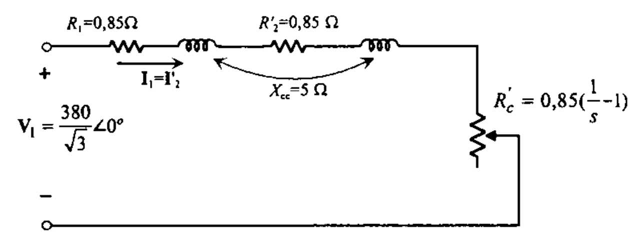


Figura 4.13

Cuando el motor funciona a plena carga con un deslizamiento del 4%, la resistencia de carga tiene un valor:

$$R_c' = 0,85(\frac{1}{0,04} - 1) = 20,4\ \Omega$$

por lo que la corriente absorbida de la red vale:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{219,39\angle 0°}{22,1 + j5} = \frac{219,39\angle 0°}{22,66\angle 12,75°} = 9,68\angle -12,75° \text{ A}$$

es decir, la corriente de plena carga vale 9,68 amperios.

b) El par se puede escribir del modo siguiente:

$$T = \frac{P_a}{\omega_1} = \frac{P_{cu2}}{s\omega_1} = \frac{3R_2' I_1^2}{s\omega_1}$$

por lo que el par de arranque se obtiene de la expresión anterior haciendo $s = 1$, resultando:

$$T_a = \frac{3 \cdot 0{,}85 \cdot 41{,}54^2}{1 \cdot 2\pi \dfrac{1500}{60}} = 28{,}01 \text{ N.m.}$$

y el par de plena carga, es decir (con $s = 0{,}04$) vale:

$$T_{pc} = \frac{3 \cdot 0{,}85 \cdot 9{,}68^2}{0{,}04 \cdot 2\pi \dfrac{1500}{60}} = 38{,}03 \text{ N.m.}$$

c) Si la corriente que consume el motor es mitad que la de plena carga, al escribir la ecuación que define su magnitud en función de los parámetros del circuito equivalente del motor se tiene:

$$I_1 = \frac{41{,}54}{2} = \frac{219{,}39}{\sqrt{(0{,}85 + \dfrac{0{,}85}{s})^2 + 5^2}}$$

lo que da lugar a la siguiente ecuación:

$$\sqrt{(0{,}85 + \frac{0{,}85}{s})^2 + 25} = 10{,}56$$

cuya solución es $s \approx 0{,}10$, por lo que la velocidad correspondiente será:

$$n = 1500(1 - 0{,}1) = 1350 \text{ r.p.m.}$$

Problema 4.16

La Figura 4.14 muestra el circuito equivalente exacto reducido al primario de un motor trifásico de 4 polos, 50 Hz, en el que pueden despreciarse tanto las pérdidas en el hierro como las pérdidas mecánicas. El motor está conectado en estrella a una red de 380 V de línea. a) Calcular la velocidad del motor para obtener el par máximo; b) valor del par máximo y potencia mecánica desarrollada por el motor en esta situación; c) calcular la velocidad del motor para que funcione con potencia mecánica máxima; d) determinar en el caso anterior el valor de la potencia mecánica desarrollada y el par correspondiente en el árbol del motor.

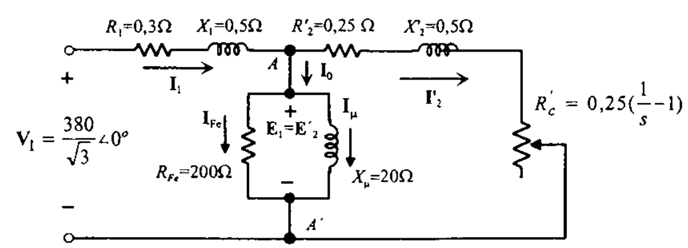


Figura 4.14

Solución

Teoría previa:

En este problema se trabaja con el circuito equivalente exacto del motor asíncrono, por lo que es preciso transformar el circuito equivalente para simplificarlo de una forma conveniente y demostrar a continuación las relaciones que se solicitan en el motor real. En primer lugar, una forma de trabajar con el circuito de la Figura 4.14 es transformar la parte de la red situada a la izquierda de los nudos A y A' aplicando el teorema de Thévenin, y sustituyendo esta zona del circuito por un generador de Thévenin en serie con una impedancia de Thévenin. El circuito correspondiente es el mostrado en la Figura 4.15, en el que la tensión del generador de Thévenin se obtiene, de acuerdo con la teoría de circuitos, como la tensión que aparece entre los nudos A y A' al abrir la parte derecha del circuito de la Figura 4.14, lo que lugar a la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}_{Th} = \mathbf{V}_1 \frac{\mathbf{Z}_p}{R_1 + jX_1 + \mathbf{Z}_p} \qquad (1)$$

En la que se ha denominado $\mathbf{Z}_p$ a la impedancia equivalente del paralelo entre R_{Fe} y X_μ.

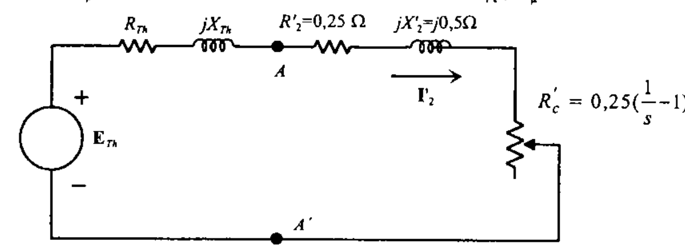


Figura 4.15

Por otro lado, la impedancia de Thévenin es la impedancia que se observa entre los terminales A y A' al cortocircuitar el generador (red), lo que da lugar a una conexión en paralelo de la rama del primario R_1 +j X_1 y la rama de vacío del motor, por lo que se cumple:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{Th}} = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_p} \Rightarrow \mathbf{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \qquad (2)$$

Para determinar en esta situación el valor del deslizamiento para el cual se obtiene un par máximo, es evidente que el par motor (se supone una máquina sin pérdidas mecánicas) se puede expresar de la forma siguiente:

$$T = \frac{P_a}{\omega_1} = \frac{P_{cu2}}{s\omega_1} = \frac{3R_2' I_2'^2}{s\omega_1} \qquad (3)$$

donde ω_1 es la velocidad de sincronismo del motor. Pero del circuito de la Figura 4.15 se obtiene la corriente reducida del rotor:

$$I_2' = \frac{E_{Th}}{\sqrt{(R_{Th} + \dfrac{R_2'}{s})^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} \qquad (4)$$

por lo que al sustituir (4) en (3) nos da:

$$T = \frac{3R_2'}{s\omega_1} \frac{E_{Th}^2}{(R_{Th} + \dfrac{R_2'}{s})^2 + (X_{Th} + X_2')^2} \qquad (5)$$

El par anterior será máximo cuando $dT/ds = 0$, lo cual se cumple, como puede comprobar fácilmente el lector, cuando el deslizamiento es igual a:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} \tag{6}$$

Otro aspecto que incluye este problema (y que también se puede aplicar a los motores en los que se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente) es determinar el deslizamiento para el cual se obtiene la máxima potencia mecánica. Para ello es conveniente preparar una introducción teórica utilizando la red de la Figura 4.16. Este circuito que forma una sola malla, está formado por un generador de tensión **E** con una impedancia en serie $\mathbf{Z}_a=R_a+jX_a$ que está cargado por una resistencia R_L. Se trata de determinar cual debe ser el valor de esta resistencia de carga R_L para que sea máxima la potencia activa disipada en la misma.

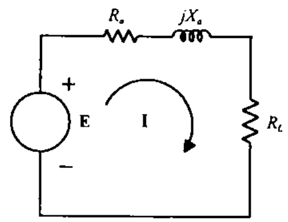


Figura 4.16

Es evidente que la magnitud de la corriente que circula en la red de la Figura 4.16 vale:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_a + R_L)^2 + X_a^2}} \tag{7}$$

y la potencia disipada en la carga es:

$$P_L = R_L I^2 = R_L \frac{E^2}{(R_a + R_L)^2 + X_a^2} \tag{8}$$

que será máxima cuando $dP_L/dR_L=0$, lo cual puede verificar el lector que se cumple cuando:

$$R_a^2 + X_a^2 = R_L^2 \Rightarrow R_L = \sqrt{R_a^2 + X_a^2} = Z_a \tag{9}$$

es decir, la potencia máxima se produce cuando *la resistencia de carga coincide con la impedancia en serie del generador.*

Si se extiende este resultado al circuito equivalente del motor de la Figura 4.15, en el que la resistencia de carga es la resistencia variable del motor y en el que la impedancia Z_a es toda la impedancia en serie que tiene el generador de Thévenin hasta la resistencia de carga, se tendrá la potencia máxima en el motor cuando se cumpla la siguiente igualdad:

$$R_c' = R_2'(\frac{1}{s} - 1) = \sqrt{(R_{Th} + R_2')^2 + (X_{Th} + X_2')^2} \tag{10}$$

es decir, el deslizamiento para potencia mecánica máxima será:

$$s = \frac{R_2'}{R_2' + \sqrt{(R_{Th} + R_2')^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} \tag{11}$$

que al comparar con la expresión (6) indica que el deslizamiento para el que se obtiene la potencia mecánica máxima es menor que el correspondiente al funcionamiento con par máximo, lo que significa que la *velocidad de un motor asíncrono para potencia mecánica máxima es algo superior a la velocidad con par máximo.* A continuación vamos a aplicar estos resultados al problema propuesto.

a) De acuerdo con el circuito de la Figura 4.14, la impedancia $\mathbf{Z}_p$ de la rama de vacío del motor vale:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{200(j20)}{200 + j20} = 19{,}9\angle 84{,}3^\circ = 1{,}98 + j19{,}8\ \Omega$$

en consecuencia la f.e.m. del generador de Thévenin es según la expresión (1) igual a:

$$\mathbf{E}_{Th} = \mathbf{V}_1 \frac{\mathbf{Z}_p}{R_1 + jX_1 + \mathbf{Z}_p} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \frac{19{,}9\angle 84{,}3^\circ}{0{,}3 + j0{,}5 + 19{,}9\angle 84{,}3^\circ} = 213{,}7\angle 0{,}7^\circ\ \text{V}$$

Por otro lado la impedancia de Thévenin es, de acuerdo con (2):

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{Th}} = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_p} = \frac{1}{0{,}3 + j0{,}5} + \frac{1}{19{,}9\angle 84{,}3^\circ} = 1{,}76\angle -59{,}73^\circ\ \text{siemens}$$

que corresponde a una impedancia de Thévenin:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{1}{1{,}76\angle 59{,}73^\circ} = 0{,}568\angle +59{,}73^\circ\,\Omega = 0{,}286 + j0{,}491\,\Omega = R_{Th} + jX_{Th}$$

y en consecuencia el deslizamiento para par máximo es según (6):

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} = \frac{0{,}25}{\sqrt{0{,}286^2 + (0{,}491 + 0{,}5)^2}} = 0{,}2423$$

que corresponde a una velocidad:

$$n = n_1(1 - s_m) = 1500(1 - 0{,}2423) = 1136{,}4\ \text{r.p.m.}$$

b) La corriente reducida del rotor que absorbe el motor cuando gira con el deslizamiento anterior de par máximo es según (4):

$$I_2' = \frac{E_{Th}}{\sqrt{(R_{Th} + \frac{R_2'}{s})^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} = \frac{213{,}7}{\sqrt{(0{,}286 + \frac{0{,}25}{0{,}2423})^2 + (0{,}491 + 0{,}5)^2}} = 129{,}61\ \text{A}$$

por lo que el valor del par máximo desarrollado por el motor es según (3):

$$T_{max} = \frac{3R_2' I_2'^2}{s_m \omega_1} = \frac{3 \cdot 0{,}25 \cdot 129{,}61^2}{0{,}2423 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} \approx 331\ \text{N.m.}$$

y la potencia mecánica desarrollada por el motor en esta situación vale:

$$P_{mi} = 3R_2'(\frac{1}{s} - 1)I_2'^2 = 3 \cdot 0{,}25(\frac{1}{0{,}2423} - 1)129{,}61^2 \approx 39{,}4\ \text{kW}$$

que se puede obtener también de este modo:

$$P_{mi} = T_{max}\omega = 331 \cdot 2\pi \frac{1136{,}4}{60} \approx 39{,}4\ \text{kW}$$

c) El deslizamiento del motor para potencia mecánica máxima viene definido por (11):

$$s = \frac{R_2'}{R_2' + \sqrt{(R_{Th} + R_2')^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} = \frac{0{,}25}{0{,}25 + \sqrt{(0{,}286 + 0{,}25)^2 + (0{,}491 + 0{,}5)^2}} = 0{,}1816$$

que corresponde a una velocidad del motor:

$$n = n_1(1-s) = 1500(1-0{,}1816) = 1227{,}6 \text{ r.p.m.}$$

d) El valor de la corriente reducida del rotor para el deslizamiento anterior vale:

$$I_2' = \frac{E_{Th}}{\sqrt{(R_{Th} + \frac{R_2'}{s})^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} = \frac{213{,}7}{\sqrt{(0{,}286 + \frac{0{,}25}{0{,}1816})^2 + (0{,}491 + 0{,}5)^2}} = 110{,}41 \text{ A}$$

que corresponde a una potencia máxima desarrollada:

$$P_{mi} = 3R_2'(\frac{1}{s} - 1)I_2'^2 = 3\cdot 0{,}25(\frac{1}{0{,}1816} - 1)110{,}41^2 = 41{,}2 \text{ kW}$$

y el par correspondiente es:

$$T = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{41200}{2\pi \frac{1227{,}6}{60}} = 320{,}5 \text{ N.m.}$$

Problema 4.17

Se tiene una estación de bombeo de agua, que lleva una bomba centrífuga que tiene incorporado un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla de 15 CV, 220/380 V, 50 Hz, 6 polos y que tiene los siguientes parámetros: $R_1=R'_2= 0{,}8$ ohmios; $X_1= X'_2= 2$ ohmios; $P_{Fe}=P_m=0$, (se puede prescindir de la rama paralelo del circuito equivalente). a) Si la red es de 380 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el motor? Dibuje el cuadro de bornes e indique el nombre correcto de los terminales. b) Conectado el motor correctamente, de acuerdo con el apartado a), ¿cuál será el par de arranque del motor con tensión asignada? Si el par resistente por la bomba en el arranque es de 50 N.m. ¿arrancará el motor?. c) Si en régimen permanente, el par resistente es igual a 100 N.m. ¿cuál será la velocidad a la cual girará el motor? (De las dos soluciones obtenidas tómese la más lógica). d) ¿Qué corriente absorberá el motor en el caso anterior?, ¿cuánto valdrá la potencia desarrollada por el motor en el eje? e) Si el motor se alimenta por medio de un transformador ideal de relación 15 kV / 380V ± 5%, conexión Dy11, a través de una línea trifásica de impedancia 0,1 + j0,5 ohmios/fase ¿arrancará el motor? (Recuérdese que el par resistente en el arranque es de 50 N.m.). En caso negativo ¿qué procedimiento sería el más adecuado para que pueda arrancar el motor?

NOTA: la línea está en el lado de B.T. del transformador y se conecta a la toma de 380 V del mismo.

Solución

a) El motor se conectará en estrella. En la Figura 4.17 se muestra la placa de bornes con las letras de identificación de terminales.

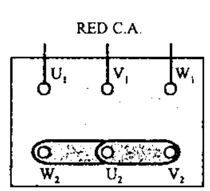


Figura 4.17

b) En la Figura 4.18 se muestra el circuito equivalente por fase del motor donde se desprecia la rama paralelo. El motor gira a una velocidad de sincronismo:

$$n_1 = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

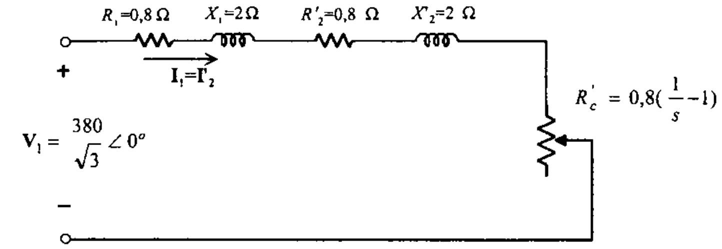


Figura 4.18

La expresión del par en función de los parámetros del motor es:

$$T = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s\left[(R_1 + \frac{R_2'}{s})^2 + X_{cc}^2\right]}$$

que para $s = 1$ nos da el par de arranque:

$$T_a = \frac{0{,}8\cdot 380^2}{2\pi \frac{1000}{60}\left[1{,}6^2 + 4^2\right]} = 59{,}44 \text{ N.m.}$$

y como quiera que el par resistente de la bomba en el arranque es de 50 N.m., el motor arrancará al ser superior el par de arranque del motor al par resistente.

c) Si el par resistente en régimen permanente es de 100 N.m., el deslizamiento correspondiente se obtiene de la ecuación del par siguiente:

$$100 = \frac{3\cdot 0{,}8(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{2\pi \frac{1000}{60} s\left[(0{,}8 + \frac{0{,}8}{s})^2 + 4^2\right]}$$

lo que da lugar a la siguiente ecuación de segundo grado en s:

$$16{,}64s^2 - 9{,}751s + 0{,}64 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0{,}5107 \quad ; \quad s = 0{,}0753$$

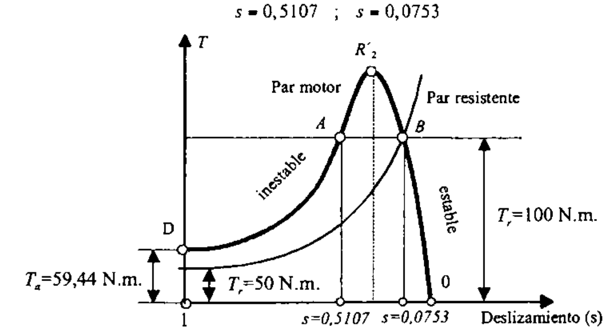


Figura 4.19

En la Figura 4.19 se muestran las curvas del par motor y del par resistente, la primera de las soluciones anteriores corresponde al punto A (zona inestable del motor) y la segunda solución corresponde al punto B (zona estable). El punto de funcionamiento real es, por consiguiente, el punto B, que corresponde a un deslizamiento de 0,0753, que supone una velocidad de giro del rotor:

$$n = n_1(1-s) = 1000(1-0,0753) = 924,7 \text{ r.p.m.}$$

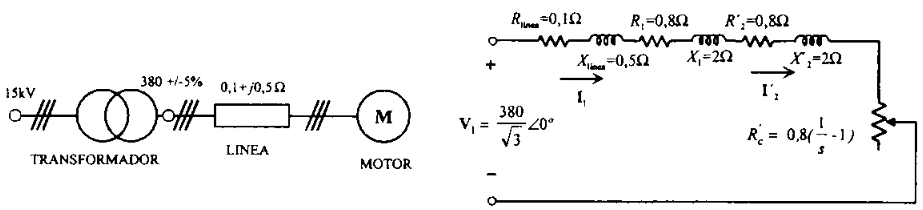
d) En el caso anterior, la corriente absorbida por el motor de la red es:

$$I_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,8+\frac{0,8}{0,0753})^2+4^2}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{12,104} = 18,12\text{A}$$

y la potencia mecánica interna desarrollada por el motor vale:

$$P_{mi} = 3R'_2(\frac{1}{s}-1)I_1^2 = 3\cdot 0,8(\frac{1}{0,0753}-1)18,12^2 \approx 9683 \text{ W}$$

e) En la Figura 4.20a se muestra el esquema unifilar de la instalación. En la Figura 4.20b se ha dibujado el circuito equivalente del motor desde el secundario del transformador.



a) b)

Figura 4.20

En el circuito equivalente de la Figura 4.20b se puede obtener el nuevo par de arranque del motor:

$$T_a = \frac{0,8\cdot 380^2}{2\pi\frac{1000}{60}\left[1,7^2+4,5^2\right]} = 47,67 \text{ N.m.} < 50 \text{ N.m.}$$

es decir, el motor no arrancará, puesto que el par motor en el arranque es inferior al resistente. Sin embargo, se puede arrancar el motor actuando sobre las tomas de regulación del transformador de alimentación, ya que si se elige la toma de +5%, la tensión en el secundario sería de 380+5% 380 = 399 voltios, y con esta tensión el par de arranque del motor será:

$$T_a = \frac{0,8\cdot 399^2}{2\pi\frac{1000}{60}\left[1,7^2+4,5^2\right]} = 52,56 \text{ N.m.} > 50 \text{ N.m.}$$

que al ser superior al par resistente hará que arranque el motor. En muchos casos prácticos es suficiente con esta solución, en otras situaciones se pueden conectar condensadores en bornes del motor para mejorar el f.d.p. de la instalación y al reducir las corrientes en la línea disminuyen las caídas de tensión y de este modo se eleva la tensión que llega al motor. Otra solución más cara es poner otra línea en paralelo para reducir la impedancia del cable de alimentación y disminuir de este modo la caída de tensión de la línea.

Problema 4.18

Un motor asíncrono trifásico 380/660 V, de 4 polos y rotor devanado, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente por fase: R_1=0,1 ohm; X_1= 0,5 ohm; R'_2=0,2 ohm; X'_2=1 ohm; m_v=m_i=m=2. Se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y también las pérdidas mecánicas. El motor está conectado en triángulo y la tensión de la red es de 380 V, 50 Hz. Calcular: a) si la potencia mecánica desarrollada a plena carga por el motor es de 86 kW ¿cuál será la velocidad del rotor?; b) ¿cuál es la corriente que absorbe el motor de línea de alimentación y su f.d.p. cuando desarrolla la plena carga?; c) ¿qué resistencia debe añadirse al rotor por fase, para que la corriente de arranque no sea superior a dos veces la de plena carga?; d) si estando el motor girando a plena carga (a la velocidad calculada en el apartado a) se conmutan entre sí dos fases de la alimentación, ¿cuál será el par de frenado desarrollado en ese instante? (Se supone para la resolución de este apartado, que no existe resistencia adicional en el rotor).

Solución

a) En la Figura 4.21 se muestra el circuito equivalente por fase del motor. Como quiera que la potencia mecánica desarrollada por el motor es de 86 kW, y que esta potencia corresponde a la disipada en la resistencia de carga, si se denomina s al deslizamiento correspondiente se puede escribir:

$$P_{mi} = 3R'_2(\frac{1}{s}-1)I_1^2 = 3\cdot 0,2(\frac{1}{s}-1)\frac{380^2}{\left[(0,1+\frac{0,2}{s})^2+1,5^2\right]} = 86000$$

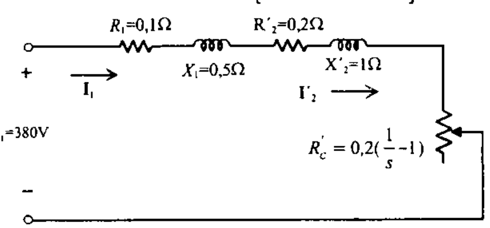


Figura 4.21

La ecuación anterior da lugar a:

$$1,007(\frac{1}{s}-1) = 0,01+\frac{0,04}{s^2}+\frac{0,04}{s}+2,25 = \frac{1,007}{s}-1,007$$

que corresponde a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3,267s^2-0,967s+0,04 = 0$$

cuyos resultados son:

$$s = 0,246 \text{ (inestable)} \quad ; \quad s = 0,0497 \approx 0,05 \text{ (estable)}$$

El deslizamiento menor es la solución correcta, por lo que la velocidad de giro del motor cuando desarrolla la potencia mecánica de 86kW es:

$$n_1 = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.} \Rightarrow n = n_1(1-s) = 1500(1-0,05) = 1425 \text{ r.p.m.}$$

b) Con el circuito de la Figura 4.21, tomando la tensión de la red como referencia de fases, la corriente absorbida por el motor tiene un valor:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{380\angle 0°}{(0,1+\frac{0,2}{0,05})+j1,5} = \frac{380\angle 0°}{4,1+j1,5} = \frac{380\angle 0°}{4,366\angle 20,1} = 87,04\angle -20,1° \text{ A}$$

es decir, la corriente de fase del motor es 87,04 amperios, y al estar conectado en triángulo corresponde a una corriente de línea y a un f.d.p.:

$$I_{1\ell} = \sqrt{3}\cdot 87,04 = 150,76 \text{ A} \quad ; \quad \cos\varphi = \cos 20,1° = 0,939$$

c) Si se denomina R'_{a2} a la resistencia que se añade por fase (reducida al primario) y la corriente del motor no debe superar dos veces la corriente de plena carga calculada en el apartado anterior, se tiene:

$$I_a = 2.87,04 = \frac{380}{\sqrt{(0,1+0,2+R'_{a2})^2+1,5^2}}$$

es decir:

$$\sqrt{(0,3+R'_{a2})^2+2,25} = 2,183\ \Omega \Rightarrow 0,3+R'_{a2} = 1,586\ \Omega \Rightarrow R'_{a2} = 1,286\ \Omega$$

y por consiguiente la resistencia adicional real es:

$$R'_{a2} = 1,286 = m^2 R_{a2} = 4R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 0,321\ \Omega$$

d) En el momento de la conmutación, el deslizamiento correspondiente es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1500-(-1425)}{1500} = 1,95$$

y el par de frenado que ejerce el motor vale entonces:

$$T = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi\frac{n_1}{60}s\left[(R_1+\frac{R'_2}{s})^2+X_{cc}^2\right]} = \frac{3\cdot 0,2\cdot 380^2}{2\pi\frac{1500}{60}1,95\left[(0,1+\frac{0,2}{1,95})^2+1,5^2\right]} = 123,46 \text{ N.m.}$$

Problema 4.19

Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 6 polos, 50 Hz, está conectado en estrella a una red de 380 V. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $R_1=R'_2=0,5$ ohmios; $X_1=X'_2=2$ ohmios; $P_m=0$; $I_0=0$ (despréciese la rama paralelo del circuito equivalente del motor). El par resistente de la carga se supone que sigue una ley lineal de la forma:

$$T_r = 35 + 0,06\,n \quad (\text{Par en N.m.; } n\text{: velocidad en r.p.m.})$$

Calcular: a) par de arranque y corriente de arranque del motor; b) si la tensión de la red se reduce un 10% ¿podrá arrancar el motor? (Justificar la respuesta); c) con la tensión asignada de 380 V aplicada al motor ¿a qué velocidad girará el motor con el par resistente señalado; d) ¿qué potencia desarrolla el motor en el eje en el caso anterior? NOTA: para realizar el apartado c) es preciso resolver una ecuación de tercer grado en función del deslizamiento s.

Solución

a) En la Figura 4.22 se muestra el circuito equivalente por fase del motor cuya velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60\cdot 50}{3} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

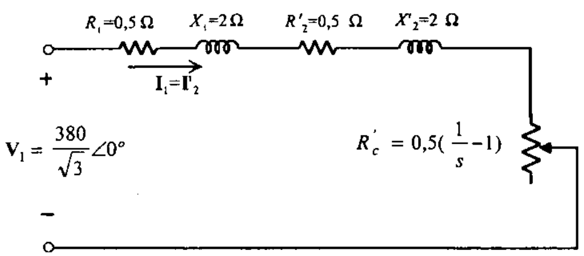


Figura 4.22

La corriente de arranque se deduce del circuito de la Figura 4.22, tomando el deslizamiento unidad, resultando ser:

$$I_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,5+\frac{0,5}{1})^2+4^2}} = 53,21 \text{ A}$$

El par de arranque correspondiente es:

$$T_a = \frac{P_a}{\omega_1} = \frac{3R'_2I_1^2}{s\omega_1} = \frac{3\cdot 0,5\cdot 53,21^2}{1\cdot 2\pi\frac{1000}{60}} = 40,56 \text{ N.m.}$$

b) Si la tensión se reduce un 10 por ciento, es decir, es el 90% de la tensión anterior de 380 voltios, al ser el par proporcional al cuadrado de la tensión aplicada, resulta un par de arranque:

$$T'_a = 40,56\cdot 0,9^2 = 32,85 \text{ N.m.}$$

y teniendo en cuenta que el par resistente en el arranque (es decir para $n = 0$) es de 35 N.m., el motor no podrá arrancar.

c) Si se vuelve a aplicar la tensión de 380 voltios al motor, al alcanzar el estado de equilibrio permanente, el par motor producido debe ser igual al par resistente y se cumple la igualdad:

$$T = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi\frac{n_1}{60}s\left[(R_1+\frac{R'_2}{s})^2+X_{cc}^2\right]} = 35+0,06n = 35+0,06\cdot 1000\cdot(1-s)$$

Téngase en cuenta para entender la ecuación anterior que la velocidad de giro real del motor es $n = n_1\,(1-s)$. Operando la expresión anterior se llega a la siguiente ecuación de tercer grado:

$$s^3 - 1,553s^2 + 0,674s - 0,024 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,039 \quad ; \quad s = 0,757 \pm j0,2047$$

es decir, la única solución válida es la primera:

$$n = 1000(1-0,039) = 961 \text{ r.p.m.}$$

d) Para el deslizamiento anterior se tiene una corriente:

$$I_1 = \frac{\dfrac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,5 + \dfrac{0,5}{0,039})^2 + 4^2}} = 15,8 \text{ A}$$

y por consiguiente la potencia mecánica desarrollada es:

$$P_{mi} = 3R_2'(\frac{1}{s} - 1)\, I_1^2 = 3 \cdot 0,5(\frac{1}{0,039} - 1)15,8^2 = 9227 \text{ vatios}$$

Problema 4.20

Se dispone de un motor asíncrono trifásico de rotor devanado (con anillos), de 10 kW, 220/380 V, 4 polos, 50 Hz. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $I_{Fe}=I_\mu=0$; $P_m= 0$ (pérdidas mecánicas); $R_1 = R'_2$; $X_1 + X'_2=1,5$ ohm, $m_v= m_i= m= 2$; se sabe además que el motor da el par máximo (con los anillos cortocircuitados) a una velocidad de 1200 r.p.m. La tensión de alimentación de la red trifásica es de 220 V, 50 Hz. a) ¿Cómo se deberá conectar el motor? b) calcular la resistencia R_1 por fase del estátor. c) Conectado el motor correctamente como se indica en el apartado a) calcular la intensidad de línea que absorbe el motor en el momento del arranque con los anillos deslizantes cortocircuitados y par de arranque correspondiente. d) Si el motor desarrolla una potencia mecánica en el eje de 10 kW (plena carga o asignada) ¿cuál será la velocidad de rotación correspondiente? (Los anillos están cortocircuitados). e) Determinar en el caso anterior la corriente de línea que absorbe el motor y el f.d.p. con el que trabaja la máquina. f) Si el rotor se conecta en estrella ¿cuál será la resistencia adicional que debe añadirse al rotor por fase en el arranque, para que la intensidad de arranque sea como máximo tres veces la asignada determinada en el apartado e)?, ¿qué par de arranque tendrá la máquina entonces?

Solución

a) El motor se debe conectar en triángulo a una red de 220 voltios.

b) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y por consiguiente el deslizamiento para par máximo vale:

$$s_m = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1500 - 1200}{1500} = 0,2$$

y teniendo en cuenta que la expresión del deslizamiento en función de los parámetros del motor es igual a:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + 1,5^2}} = 0,2$$

ya que la resistencia del estátor del motor coincide con la reducida del rotor. De la expresión anterior se obtiene la ecuación:

$$R_1^2 = 0,04(R_1^2 + 2,25) \Rightarrow 0,96R_1^2 = 0,09 \Rightarrow R_1 = 0,306\ \Omega$$

c) En la Figura 4.23 se muestra el circuito equivalente por fase del motor, que al tomar la tensión de la red como referencia de fase da lugar a una corriente de arranque ($s = 1$):

$$\mathbf{I}_1 = \frac{220\angle 0°}{(0,306 + 0,306) + j1,5} = \frac{220\angle 0°}{0,612 + j1,5} = \frac{220\angle 0°}{1,62\angle 67,8} = 135,8\angle -67,8° \text{ A}$$

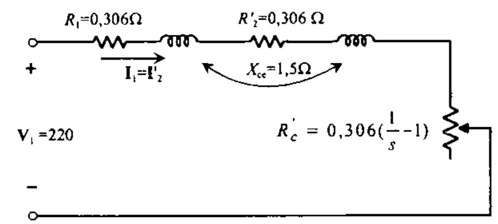


Figura 4.23

Es decir, la corriente por fase del motor es de 135,8 amperios, y como está conectado en triángulo, supone una corriente de línea:

$$I_{1línea} = \sqrt{3}\ 135,8 = 235,2 \text{ A}$$

y el par de arranque correspondiente es:

$$T_a = \frac{3R_2' I_1^2}{\omega_1} = \frac{3 \cdot 0,306 \cdot 135,8^2}{2\pi \dfrac{1500}{60}} = 107,78 \text{ N.m.}$$

d) Cuando el motor desarrolla una potencia mecánica de 10kW, si el deslizamiento es, la potencia anterior será la disipada en la resistencia de carga y se cumplirá por lo tanto:

$$P_{mi} = 10000 = 3 \cdot 0,306(\frac{1}{s} - 1)\frac{220^2}{\left[(0,306 + \dfrac{0,306}{s})^2 + 1,5^2\right]}$$

que operando conduce a la ecuación de segundo grado:

$$6,787s^2 - 4,256s + 0,0936 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,604 \text{ (inestable)} ;\ s = 0,0228 \text{ (estable)}$$

La segunda solución es la correcta y la velocidad del motor es:

$$n = n_1(1 - s) = 15000(1 - 0,0228) = 1465,76 \text{ r.p.m.}$$

e) En el caso anterior la corriente por fase que absorbe el estátor es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{220\angle 0°}{(0,306 + \dfrac{0,306}{0,0228}) + j1,5} = \frac{220\angle 0°}{13,727 + j1,5} = \frac{220\angle 0°}{13,809\angle 6,24°} = 15,93\angle -6,24° \text{ A}$$

que representa una corriente de línea $I_{1\ell} = \sqrt{3}\ 15,93 = 27,59\text{A}$ y un f.d.p. $\cos\varphi = \cos 6,24° = 0,994$.

f) La corriente de arranque se limita a tres veces la de plena carga calculada en el apartado anterior y para ello será necesario incluir una resistencia adicional en el reóstato de arranque de tal modo que se debe cumplir:

$$I_a = 3 \cdot 15,93 = 47,79 = \frac{220}{\sqrt{(0,306 + \frac{0,306 + R'_{a2}}{1})^2 + 1,5^2}}$$

de donde se deduce una resistencia adicional reducida al estátor $R'_{a2} = 3,74\ \Omega$, que representa un valor real:

$$R'_{a2} = m^2 R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = \frac{3,74}{4} = 0,935\ \Omega$$

y el par de arranque del motor será en estas condiciones:

$$T_a = \frac{3(0,306 + 3,74)47,79^2}{2\pi \frac{1500}{60}} = 176,48 \text{ N.m.}$$

Problema 4.21

Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V; 4 polos, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente aproximado: $R_1 = R'_2 = 0,2\ \Omega$; $X_{cc} = 0,3\ \Omega$. se consideran despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. Si se conecta el motor a una red trifásica de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, a) ¿cómo se conectará el motor?; b) potencia mecánica útil y par mecánico desarrollado para la velocidad asignada de 1425 r.p.m.; c) calcular, en las condiciones nominales del apartado anterior la corriente absorbida por el motor de la línea, f.d.p. con el que trabaja y rendimiento; d) estando girando el motor con el par nominal, ¿hasta que % se podrá reducir la tensión de alimentación sin que se pare el motor?; e) ¿cuál debe ser la tensión mínima pueda arrancar el motor si mueve un par resistente igual al nominal?

Solución

a) El motor debe conectarse en estrella a una red de 380 voltios.

b) La velocidad de sincronismo del motor es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y por consiguiente el deslizamiento de la máquina cuando gira a 1425 r.p.m. será:

$$s = \frac{1500 - 1425}{1500} = 0,05$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada es:

$$P_{mi} = 3 \cdot 0,2(\frac{1}{0,05} - 1)\frac{(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{\left[(0,2 + \frac{0,2}{0,05})^2 + 0,3^2\right]} = 30948 \text{ W} = 30,95 \text{ kW}$$

y en consecuencia el par en el eje es:

$$T = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{30950}{2\pi \frac{1425}{60}} = 207,4 \text{ N.m.}$$

c) Para el deslizamiento anterior la corriente del estátor es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(0,2 + \frac{0,2}{0,05}) + j0,3} = \frac{219,39\angle 0°}{4,2 + j0,3} = \frac{219,39\angle 0°}{4,21\angle 4,09°} = 52,1\angle -4,09° \text{ A}$$

y como el motor está conectado en estrella, la corriente en la línea es la misma, es decir de 52,1 amperios, siendo el f.d.p. igual a cos 4,09°=0,997. En consecuencia, la potencia eléctrica que el motor absorbe de la red es:

$$P_1 = \sqrt{3}\ 380 \cdot 52,1 \cdot 0,997 = 34203,8 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor en estas condiciones vale:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{30948}{34203,8} = 90,48\%$$

d) En la Figura 4.24 se muestra en trazo grueso la curva par-velocidad del motor a la tensión asignada de 380 voltios. Cuando el motor mueve el par de 207,4 N.m. está funcionado en el punto de trabajo *A*. Si en esta situación se va reduciendo la tensión de alimentación, la curva de par se irá reduciendo en proporción cuadrática, ya que el par depende del cuadrado de la tensión aplicada. La situación límite se tendrá cuando la tensión aplicada dé lugar a una curva en el que su máximo coincida con el par resistente de 207,4 N.m., puesto que una reducción posterior de la tensión llevará al motor a un colapso y se parará porque no existirá un punto de equilibrio de la máquina. Esta situación se ha representado por la curva par-velocidad de trazo fino correspondiente a una tensión aplicada de línea V_{1a}. El punto de funcionamiento del motor será el *B* y en él se cumple:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,2^2 + 93^2}} = 0,5547$$

e igualando el par máximo producido con esta tensión al par resistente de 207,4 N.m. resulta:

$$T_{max} = 207,4 = \frac{3 \cdot 0,2(\frac{V_{1a}}{\sqrt{3}})^2}{2\pi \frac{1500}{60} 0,5547\left[(0,2 + \frac{0,2}{0,5547})^2 + 0,3^2\right]}$$

que operando de lugar a una tensión V_{1a}= 191,1 voltios. El tanto por ciento de reducción de la tensión de red posible es:

$$\varepsilon = \frac{380 - 191,1}{380} = 49,71\%$$

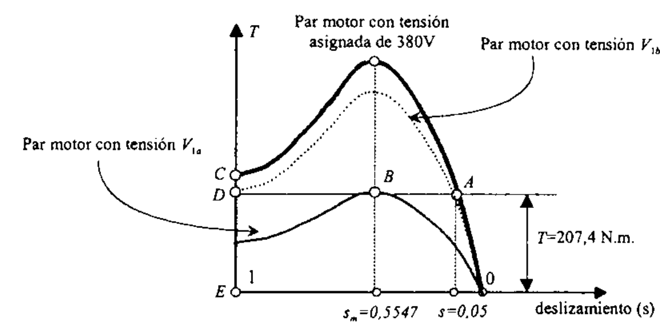


Figura 4.24

e) Debe señalarse que el par de arranque que produce el motor con la tensión de 380 voltios está definido por la distancia *CE* en la Figura 4.24. Si se reduce la tensión de alimentación el motor podrá arrancar siempre que el par de arranque a esa tensión sea superior al resistente. La situación límite será cuando el par de arranque coincida con el par resistente de 207,4 N.m. En la Figura 4.24 se ha mostrado la curva par-velocidad correspondiente, que es la mostrada por trazo discontinuo y que corresponde a una tensión de línea V_{1b}. Al igualar el par de arranque para esta tensión al par resistente de 207,4 N.m. se tiene:

$$T_a = 207,4 = \frac{3\cdot 0,2(\frac{V_{1b}}{\sqrt{3}})^2}{2\pi\frac{1500}{60}1\left[(0,2+0,2)^2+0,3^2\right]}$$

de donde se deduce una tensión V_{1b}= 201,8 voltios.

Problema 4.22

Un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 220/380 V, 4 polos, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 220 V de línea, 50 Hz. La corriente de línea de plena carga es de 90 A y se observa que si se realiza el arranque cortocircuitando los anillos, la corriente de arranque es 6,6 veces la asignada o de plena carga, desarrollando un par en esas condiciones que es 2,2 veces el nominal. La resistencia por fase del estátor R_1 es igual a la reducida del rotor R'_2. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. Se pide: a) conexión del motor; b) velocidad del motor a plena carga y valores de los parámetros del circuito equivalente: R_1, R'_2 y X_{cc}; c) potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga, par producido y rendimiento correspondiente; d) par máximo desarrollado por el motor con los anillos cortocircuitados y corriente absorbida de la red con su factor de potencia en esas condiciones; e) ¿qué resistencia habrá que añadir en el rotor por fase para limitar la corriente de arranque a un valor de 300 A de línea? ¿Qué par de arranque producirá el motor en esta situación? NOTA: $m_v = m_i = 2$.

Solución

a) El motor se debe conectar en triángulo a una red de 220 voltios.

b) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

La expresión del par en función de la corriente que absorbe el motor es:

$$T = \frac{3R'_2 I_1^2}{s\omega_1}$$

y como quiera que cuando funciona a plena carga la corriente de línea es de 90 amperios (es decir $90/\sqrt{3}$ por fase), el par correspondiente, si en estas condiciones el deslizamiento es s, vale:

$$T_n = \frac{3R'_2 I_1^2}{s\omega_1} = \frac{3R'_2(\frac{90}{\sqrt{3}})^2}{s\omega_1} \tag{1}$$

Además la corriente de arranque es 6,6 veces la de plena carga, por lo que se puede escribir:

$$T_a = \frac{3R'_2 I_1^2}{s\omega_1} = \frac{3R'_2(\frac{6,6\cdot 90}{\sqrt{3}})^2}{\omega_1} \tag{2}$$

y teniendo en cuenta que el par de arranque es 2,2 veces el de plena carga, de las expresiones (1) y (2) al dividirlas entre sí resulta:

$$\frac{T_a}{T_n} = 2,2 = \frac{\frac{3R'_2(\frac{6,6\cdot 90}{\sqrt{3}})^2}{\omega_1}}{\frac{3R'_2(\frac{90}{\sqrt{3}})^2}{s\omega_1}} = 6^2 s \Rightarrow 2,2 = 6,6^2 s \Rightarrow s = \frac{2,2}{6,6^2} = 0,0505$$

y por lo tanto la velocidad del motor a plena carga es:

$$n = 1500(1-0,0505) = 1424,24 \text{ r.p.m.}$$

Para determinar ahora los parámetros solicitados del motor, es necesario tener en cuenta que la corriente absorbida por fase vale:

$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1+\frac{R'_2}{s})^2 + X_{cc}^2}}$$

por lo que las expresiones correspondientes a la situación de plena carga y de arranque son respectivamente:

$$\frac{90}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{(R_1+\frac{R_1}{0,0505})^2 + X_{cc}^2}} \qquad 6,6\frac{90}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{(R_1+R_1)^2 + X_{cc}^2}}$$

donde se ha tenido en cuenta que $R_1 = R'_2$. De estas dos ecuaciones se obtienen los siguientes resultados:

$$R'_2 = R_1 = 0,202\ \Omega \quad X_{cc} = 0,499\ \Omega$$

c) La potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga se obtiene fácilmente de la expresión:

$$P_{mi} = 3R'_2(\frac{1}{s}-1)I_1^2$$

y teniendo en cuenta que a plena carga s = 0,0505 e $I_1 = 90/\sqrt{3}$, se tiene un valor:

$$P_{mi} = 3\cdot 0,202(\frac{1}{0,0505}-1)(\frac{90}{\sqrt{3}})^2 = 30,81 \text{ kW}$$

y el par correspondiente es:

$$T = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{30810}{2\pi\frac{1424,24}{60}} = 206,58 \text{ N.m.}$$

Como quiera que la impedancia del motor a plena carga es de la forma:

$$\mathbf{Z} = (R_1+\frac{R'_2}{s}) + jX_{cc} = (0,202+\frac{0,202}{0,0505}) + j0,499 = 4,23\angle 6,77°\ \Omega$$

el factor de potencia del motor será el cos 6,77º=0,993 y la potencia eléctrica absorbida por el motor de la red será:

$$P_1 = \sqrt{3}V_1 I_1 \cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 220\cdot 90\cdot 0,993 = 34079,8 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{30810}{34079,8} = 90,4\%$$

d) El deslizamiento para par máximo vale:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,202}{\sqrt{0,202^2 + 0,499^2}} = 0,375$$

y la corriente del estátor por fase en estas condiciones es igual a:

$$I_1 = \frac{220\angle 0°}{(0,202 + \frac{0,202}{0,375}) + j0,499} = \frac{220\angle 0°}{0,741 + j0,499} = \frac{220\angle 0°}{0,893\angle 33,97°} = 246,34\angle -33,97° \text{ A}$$

que corresponde a una corriente de línea de $I_{1línea} = \sqrt{3} \cdot 246,34 = 426,67\text{A}$ y a un f.d.p. cos 33,97° = 0,829. En esta situación el valor del par máximo es:

$$T_{max} = \frac{P_a}{s\omega_1} = \frac{3R_2' I_1^2}{s\omega 1} = \frac{3 \cdot 0,202 \cdot 246,34^2}{0,375 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} = 624,3 \text{ N.m.}$$

e) Si se limita la corriente de arranque de línea a 300 amperios, es preciso incluir una resistencia adicional en el reóstato de valor reducido R'_{a2} e imponiendo el valor de esta corriente en el motor resulta:

$$\frac{300}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{(0,202 + \frac{0,202 + R_{a2}'}{1})^2 + 0,499^2}}$$

de donde se obtiene:

$$R_{a2}' = 0,764 = 2^2 R_{a2} \quad \Rightarrow \quad R_{a2} = 0,191\ \Omega$$

y el par de arranque correspondiente es:

$$T_a = \frac{P_a}{\omega_1} = \frac{3(R_2' + R_{a2}')I_1^2}{\omega_1} = \frac{3(0,202 + 0,764)(\frac{300}{\sqrt{3}})^2}{1 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} = 553,48 \text{ N.m.}$$

Problema 4.23

Un motor asíncrono con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V, 50 Hz, 6 polos, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente aproximado: R_1=0,5 Ω; R'_2=1,5 Ω; X_1=X'_2= 2 Ω y se consideran despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. El motor se conecta correctamente para trabajar en una red de 380 V de línea. a) Si el motor lleva acoplado una caja de engranajes o convertidor de par (ver Figura 4.25), con una desmultiplicación de relación 10:1 (es decir la velocidad se reduce 10 veces, o de otro modo, el par aumenta 10 veces) y mueve un tambor de 50 cm de diámetro sobre el que va arrollando un cable que levanta un peso de 250 kg, ¿cuál será el valor de la velocidad lineal con la que sube el peso de 250 kg? (Supóngase que la caja de engranajes no ofrece par resistente alguno, sino que únicamente adapta el par del tambor al par en el eje del motor). b) ¿Cuál es el rendimiento del motor en el caso anterior?

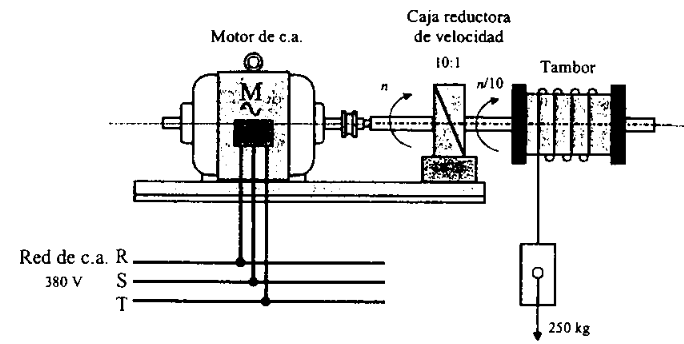


Figura 4.25

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60.50}{3} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

El par resistente que ofrece la carga en el tambor se calcula del siguiente modo:

$$T_{resistente\ tambor} = Fr = 250 \cdot 0,25 = 62,5 \text{ kg.m} = 62,5 \cdot 9,8 = 612,5 \text{ N.m.}$$

que en el eje del motor supone una reducción de diez veces debido a la caja de velocidad:

$$T_r(\text{eje motor}) = \frac{612,5}{10} = 61,25 \text{ N.m.}$$

Aplicando la expresión del par del motor e igualándola al valor anterior se obtiene la siguiente ecuación:

$$T_{motor} = \frac{3 \cdot 1,5(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{2\pi \frac{1000}{60} s \left[(0,5 + \frac{1,5}{s})^2 + 4^2\right]} = 61,25$$

que da lugar a la siguiente ecuación de segundo grado del deslizamiento del motor:

$$6,25s^2 - 32,27s + 2,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,0725(\text{motor})\ ;\ s = 1,909(\text{freno})$$

por consiguiente la velocidad de giro del motor asíncrono es:

$$n = n_1(1 - s) = 1000(1 - 0,0725) = 927,5 \text{ r.p.m. (eje motor)}$$

que supone una velocidad diez veces menor a la salida de la caja de engranajes, es decir, la velocidad del tambor es de 92,75 r.p.m. y se corresponde con una velocidad angular de valor:

$$\omega = 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{92,75}{60} = 9,71 \text{ rad/s}$$

Por consiguiente la velocidad tangencial o velocidad de traslación de la carga es:

$$v = \omega r = 9,71 \cdot 0,25 = 2,428 \text{ m/s}$$

b) Para el caso anterior (cuando el motor gira con un deslizamiento de 0,0725), la corriente que absorbe el motor de la red es:

$$I_1 = I_2' = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + \frac{R_2'}{s})^2 + X_{cc}^2}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,5 + \frac{1,5}{0,0725})^2 + 4^2}} = 10,174 \text{ A}$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada por el motor es:

$$P_{mi} = 3R_c' I_2'^2 = 3 \cdot 1,5(\frac{1}{0,0725} - 1)10,174^2 = 5959 \text{ W}$$

y la potencia eléctrica que el motor absorbe de la red es:

$$P_1 = P_{mi} + P_{cu1} + P_{cu2} = 5959 + 3 \cdot 0,5 \cdot 10,174^2 + 3 \cdot 1,5 \cdot 10,174^2 = 6580 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{5959}{6580} = 90,56\%$$

Problema 4.24

Un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 19 kW, 220/380 V, 4 polos, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 380 V, 50 Hz. Se consideran despreciables: la impedancia del estátor ($R_1 = X_1 = 0$), las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío (no considerar la rama paralelo del circuito equivalente). Se sabe que cuando el motor tiene cortocircuitados los anillos, es decir, la resistencia del reóstato de arranque es nula, las pérdidas en el cobre del rotor con par máximo son 8 veces las que tiene con par nominal (plena carga) con un deslizamiento del 3%. Calcular: a) velocidad del motor para par máximo; b) corriente que absorbe el motor de la red cuando trabaja a plena carga, par de plena carga y rendimiento del motor en estas condiciones; c) resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que la corriente de arranque sea como mucho igual a dos veces la asignada o nominal. Se sabe que $m_v = m_i = 2$; d) si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque, ¿a qué velocidad girará el motor con un par resistente igual al nominal?, ¿qué corriente absorberá el motor de la red en estas condiciones?

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

El deslizamiento del motor para par máximo (teniendo en cuenta que se desprecia la impedancia del estátor) viene expresado por:

$$s_m = \frac{R_2'}{X_2'} \qquad (1)$$

y la corriente absorbida por el motor es:

$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{(\frac{R_2'}{s}) + X_2'^2}}$$

Ahora bien, el motor a plena carga produce una potencia mecánica de 19kW, y si se denomina $s = 0,03$ al deslizamiento correspondiente, se puede escribir:

$$P_{mi} = 19000 = 3R_2'(\frac{1}{s} - 1)\frac{V_1^2}{(\frac{R_2'}{s})^2 + X_2'^2} = 3R_2'(\frac{1}{0,03} - 1)\frac{(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{(\frac{R_2'}{0,03})^2 + X_2'^2} \qquad (2)$$

y como quiera que las pérdidas en el cobre del rotor con par máximo son ocho veces las pérdidas en el cobre a plena carga se cumple:

$$3R_2'\frac{V_1^2}{(\frac{R_2'}{s_m})^2 + X_2'^2} = 8\left[3R_2'\frac{V_1^2}{(\frac{R_2'}{s})^2 + X_2'^2}\right] = 8\left[3R_2'\frac{V_1^2}{(\frac{R_2'}{0,03})^2 + X_2'^2}\right]$$

ecuación que, teniendo en cuenta (1) y simplificando, se transforma en:

$$(\frac{R_2'}{0,03})^2 + X_2'^2 = 8\left[(\frac{R_2'}{s_m})^2 + X_2'^2\right] = 16X_2'^2 \Rightarrow (\frac{R_2'}{0,03})^2 = 15X_2'^2 \Rightarrow \frac{R_2'}{X_2'} = 0,03\sqrt{15} = 0,1162 \qquad (3)$$

lo que indica que el deslizamiento para par máximo es $s_m = 0,1162$, por lo que la velocidad correspondiente es:

$$n = n_1(1 - s_m) = 1500(1 - 0,1162) = 1325,72 \text{ r.p.m.}$$

b) Al llevar el resultado (3) a (2) se obtiene:

$$19000 = 3R_2'(\frac{1}{0,03} - 1)\frac{(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{(\frac{R_2'}{0,03})^2 + (\frac{R_2}{0,1162})^2} \Rightarrow 19000 = (\frac{1}{0,03} - 1)\frac{380^2}{1185,2R_2'} \qquad (4)$$

y de la última ecuación (4) y teniendo en cuenta (3) resulta:

$$R_2' = \frac{380^2(\frac{1}{0,03} - 1)}{1185,2 \cdot 19000} = 0,207 \ \Omega \Rightarrow X_2' = \frac{R_2'}{0,1162} = \frac{0,207}{0,1162} = 1,784 \ \Omega$$

Determinada de este modo la impedancia del motor, la corriente que absorbe a plena carga vale:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{\frac{0,207}{0,03} + j1,784} = \frac{219,39\angle 0°}{6,91 + j1,784} = \frac{219,39\angle 0°}{7,137\angle 14,48°} = 30,74\angle -14,48° \text{ A}$$

y la potencia eléctrica absorbida de la red a plena carga es:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 30,74\cos 14,48° \approx 19590 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor cuando funciona a plena carga es:

$$\eta = \frac{19000}{19590} = 96,99\%$$

y como el motor se mueve a plena carga a la velocidad:

$$n = n_1(1-s) = 1500(1-0,03) = 1455 \text{ r.p.m.}$$

el par de plena carga será:

$$T = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{19000}{2\pi\frac{1455}{60}} = 124,7 \text{ N.m.}$$

c) Si se añade una resistencia adicional en el reóstato de arranque que limite la corriente a un valor doble que la correspondiente a plena carga, se deberá cumplir:

$$I_a = 2\cdot 30,74 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,207+R'_{a2})^2+1,784^2}}$$

de donde se deduce:

$$R'_{a2} = 2,884 = 2^2 R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 0,721\ \Omega$$

d) La resistencia del rotor con la resistencia adicional conectada vale:

$$R'_2 + R'_{a2} = 0,207 + 2,884 = 3,091\ \Omega$$

al girar el motor con el par resistente de plena carga se cumple:

$$124,7 = \frac{3\cdot 3,091(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{2\pi\frac{1500}{60}s\left[(\frac{3,091}{s})^2+1,784^2\right]}$$

Expresión que da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3,183s^2 - 22,787s + 9,554 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 6,712 \text{ (freno)} \quad ; \quad s = 0,4472 \text{ (motor)}$$

por lo que el motor girará a una velocidad:

$$n = 1500(1-0,4472) = 829,2 \text{ r.p.m.}$$

y la corriente que absorberá el motor de la red en esas condiciones será:

$$I_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(\frac{3,091}{0,4472})^2+1,784^2}} = 30,73 \text{ A}$$

Problema 4.25

Un motor de inducción trifásico de rotor devanado de 35 kW, 380/220 V, 4 polos, 50 Hz, desarrolla su potencia de salida asignada a 1455 r.p.m. cuando trabaja a la tensión y frecuencia asignadas, estando cortocircuitados sus anillos rozantes. El par máximo que puede desarrollar a la tensión y frecuencia citadas es del 200% del de plena carga. La resistencia del devanado del rotor por fase es de 0,1 ohmios. La impedancia del estátor es despreciable (R_1=X_1=0). Se suponen nulas las pérdidas mecánicas y se puede omitir en los cálculos la rama paralelo del circuito equivalente. Las relaciones de transformación cumplen la igualdad $m_v = m_i = m$. El rotor está conectado en estrella. La red de alimentación es de 380 V, 50 Hz, estando el estátor conectado en estrella. a) Calcular la relación de transformación m (tómese la más alta de las dos que se obtienen) y la reactancia del rotor a 50 Hz. b) Calcular la velocidad del motor para par máximo. c) resistencia que debe añadirse en serie con cada fase del rotor para obtener el par máximo en el arranque. d) Si ahora se alimenta el motor a la frecuencia de 60 Hz, ajustando la tensión aplicada de tal forma que el flujo en el entrehierro tenga el mismo valor que a 50 Hz, calcular la tensión que debe aplicarse a 60 Hz. e) Calcular en el caso anterior, la velocidad a la que el motor desarrolla un par de valor igual al de plena carga a 50 Hz, estando los anillos en cortocircuito.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y el deslizamiento a plena carga vale:

$$s = \frac{1500-1455}{1500} = 3\%$$

El par de plena carga asignado (nominal) vale:

$$T_n = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{35000}{2\pi\frac{1455}{60}} = 229,71 \text{ N.m.}$$

Al prescindir de la impedancia del estátor, el par máximo se produce para un deslizamiento que viene definido por el cociente:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2+X_{cc}^2}} = \frac{R'_2}{X'_2} = \frac{R_2}{X_2} \qquad \text{(a)}$$

y teniendo en cuenta que el par máximo es el doble que el de plena carga, se puede poner:

$$T_m = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi\frac{1500}{60}s_m\left[(\frac{R'_2}{s_m})^2+X'^2_2\right]} = 2\frac{3R'_2V_1^2}{2\pi\frac{1500}{60}0,03\left[(\frac{R'_2}{0,03})^2+X'^2_2\right]}$$

que simplificando y teniendo en cuenta (a) resulta:

$$2s_m\left[(\frac{R'_2}{s_m})^2+X'^2_2\right] = 0,03\left[(\frac{R'_2}{0,03})^2+X'^2_2\right] \Rightarrow 4s_m = 0,03\left[(\frac{s_m}{0,03})^2+1\right]$$

que en definitiva es la ecuación de segundo grado siguiente:

$$33,33s_m^2 - 4s_m + 0,03 = 0$$

cuyos resultados son:

$$s_m = 0,112 \quad ; \quad s_m = 0,00804$$

Evidentemente el resultado válido es el primero, ya que el segundo supone un deslizamiento inferior al de plena carga que es igual a 0,03. Al sustituir este valor en (a) y teniendo en cuenta que la resistencia del rotor es de 0,1 ohmio, resulta:

$$0,112 = \frac{0,1}{X_2} \Rightarrow X_2 = 0,893\ \Omega$$

y como la potencia mecánica del motor es de 35 kW se puede escribir:

$$P_{mi} = 3m^2 0,1\left(\frac{1}{0,03}-1\right)\frac{\left(\frac{380}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left[\left(\frac{m^2 0,1}{0,03}\right)^2 + (m^2 0,893)^2\right]} = 3500 \Rightarrow \frac{39202,5}{m^2} = 35000$$

que da lugar a una relación de transformación:

$$m = 1,058$$

b) De acuerdo con los resultados del apartado anterior, la velocidad del motor para par máximo es:

$$n = n_1(1-s) = 1500(1-0,112) = 1332 \text{ r.p.m.}$$

c) Para obtener el par máximo en el arranque es preciso incluir una resistencia en el reóstato de arranque que cumpla la siguiente igualdad:

$$s = 1 = \frac{R_2' + R_{a2}'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_2 + R_{a2}}{X_2} = \frac{0,1 + R_{a2}}{0,893}$$

lo que da lugar a:

$$R_{a2} = 0,793\ \Omega$$

d) La relación entre la tensión aplicada y el flujo magnético de un motor viene expresada por la ecuación:

$$V = E = 4,44 K_1 f N \Phi$$

donde K_1 expresa el factor de devanado del estátor. Es por ello que si se alimenta el motor a una frecuencia de 60Hz, para que exista el mismo flujo magnético se deberá cumplir la proporcionalidad:

$$\frac{380}{V_1} = \frac{50}{60}$$

de donde se deduce una tensión de línea V_1= 456 voltios.

e) Al ser ahora la alimentación de 456 voltios de línea y de 60 Hz, las reactancias en reposo del motor se modifican puesto que son proporcionales a la frecuencia de la alimentación (ya que $X=L\omega_1=L2\pi f$) y así se tiene que los parámetros del motor a 60 Hz son:

$$R_2 = 0,1\ \Omega \quad ; \quad X_2(\text{a } 50Hz) = 0,893\ \Omega \Rightarrow X_2(\text{a } 60Hz) = \frac{60}{50}0,893 = 1,0716\ \Omega$$

también hay que tener en cuenta que la nueva frecuencia de alimentación modifica la velocidad de sincronismo del motor que ahora valdrá:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 60}{2} = 1800 \text{ r.p.m.}$$

y teniendo en cuenta que el par de carga no varía, se puede escribir:

$$T = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi\frac{n_1}{60}s\left[\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2\right]} = \frac{3(1,058^2 \cdot 0,1)\left(\frac{456}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi\frac{1800}{60}s\left[\left(\frac{1,058^2 \cdot 0,1}{0,03}\right)^2 + (1,058^2 \cdot 1,0716)^2\right]}$$

que da lugar a la siguiente ecuación:

$$1,44s^2 - 0,538s + 0,0125 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = ,3486 \text{ (inestable)} \quad ; \quad s = 0,025 \text{ (zona estable)}$$

y tomando el deslizamiento correspondiente a la zona estable del motor, la velocidad a la que se moverá el rotor será:

$$n = n_1(1-s) = 1800(1-0,025) = 1755 \text{ r.p.m.}$$

Problema 4.26

Se tiene un motor asíncrono trifásico con un rotor en jaula de ardilla, que tiene los siguientes datos en su placa de características: 10 kW; 220/380 V; 50 Hz; 19 A; 1425 r.p.m.; cos φ= 0,90. Se conecta a una red de 380 V, 50Hz. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y no es necesario considerar la rama paralelo del circuito equivalente. Calcular: a) parámetros R_1, R'_2 y X_{cc} del motor; b) par de arranque y par de plena carga del motor, ¿qué tipo de par resistente debe tener el motor para que pueda arrancar?; c) Rendimiento del motor con par máximo; d) velocidad que deberá darse al motor por medio de un motor primario externo para que la máquina asíncrona funcione como generador entregando su potencia asignada a la red. (Tomar la velocidad más pequeña de las dos posibles).

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y el deslizamiento a plena carga vale:

$$s = \frac{1500 - 1425}{1500} = 5\%$$

Teniendo en cuenta que la potencia mecánica es de 10 kW y la corriente es de 19 A, se puede poner:

$$P_{mi} = 10000 = 3R_2'\left(\frac{1}{0,05} - 1\right)19^2$$

de la ecuación anterior se obtiene: $R_2' = 0,486\ \Omega$ y como el motor se debe conectar en estrella a una red de 380 voltios de línea, la corriente absorbida por la máquina de la red es:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2' = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{\left(R_1 + \frac{0,486}{0,05}\right) + jX_{cc}}$$

pero de la expresión anterior se conoce que el módulo es de 19 amperios y que el f.d.p. del motor es 0,9, por lo que se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = 19 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(R_1+9,72)^2+X_{cc}^2}} \ ; \ \cos\varphi = 0,9 \ \Rightarrow \ \operatorname{tg}\varphi = 0,484 = \frac{X_{cc}}{R_1+9,72}$$

que son dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son:

$$R_1 = 0,673\ \Omega \ ; \ X_{cc} = 5,03\ \Omega$$

b) El par de plena carga se obtiene de la placa de características del motor y que asigna el fabricante y es igual a:

$$T_n = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{10000}{2\pi\frac{1425}{60}} = 67,01 \text{ N.m.}$$

Mientras que para determinar el par de arranque es preciso utilizar los parámetros internos del circuito equivalente del motor calculados en el apartado anterior y de este modo se puede escribir:

$$T_a = \frac{3\cdot 0,486(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{2\pi\frac{1500}{60}1\left[(0,673+0,486)^2+5,03^2\right]} = 16,78 \text{ N.m.}$$

Se observa con estos resultados que el par de arranque es inferior al de plena carga. Si se consideran esencialmente dos tipos de pares resistentes como son: par constante (grúas, montacargas ...) y pares cuadráticos (ventiladores, bombas centrífugas), el tipo de par resistente que puede tener el motor debe ser del *tipo cuadrático,* ya que en este caso el par resistente en el arranque sería inferior al par motor y de este modo la máquina puede arrancar.

c) El deslizamiento del motor para par máximo es igual a:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2+X_{cc}^2}} = \frac{0,486}{\sqrt{0,673^2+5,03^2}} = 0,0958$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada por el motor cuando trabaja con par máximo es:

$$P_{mi}(T_{max}) = 3\cdot 0,486(\frac{1}{0,0958}-1)\frac{(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{\left[(0,673+\frac{0,486}{0,0958})^2+5,03^2\right]} = 11358 \text{ kW}$$

La corriente que absorbe el motor de la red para las condiciones anteriores es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(0,673+\frac{0,486}{0,0958})+j5.0} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{5,746+j5,03} = \frac{219,39\angle 0°}{7,637\angle 41,2°} = 28,73\angle -41,2° \text{ A}$$

por lo que la potencia eléctrica que absorbe el motor de la red es:

$$P_1 = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 28,73\cos 41,2° = 14227,8 \text{ kW}$$

y de este modo el rendimiento vale:

$$\eta = \frac{11358}{14227,8} = 79,83\%$$

d) El circuito equivalente del motor es el mostrado en la Figura 4.26. La potencia que *entrega la máquina asíncrona a la red* es de 10 kW, o de otro modo el circuito de la Figura 4.26 *absorbe de la red* una potencia de −10 kW. Si se plantea esta condición a la red de la Figura 4.26 resulta:

$$-10000 = 3\left[0,673+\frac{0,486}{s}\right]\frac{(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{\left[(0,673+\frac{0,486}{s})^2+5,03^2\right]}$$

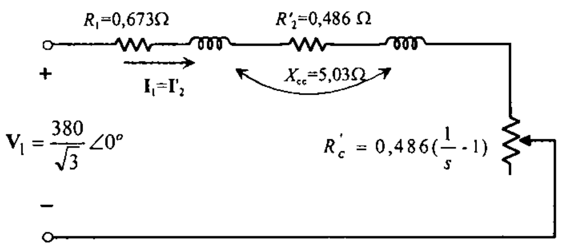


Figura 4.26

y simplificando la ecuación anterior se llega a:

$$35,473s^2+7,672s+0,236 = 0$$

que da lugar a los siguientes deslizamientos:

$$s = -0,0371 \ ; \ s = -0,179$$

Para analizar cuál de los dos deslizamientos es el válido, hay que tener en cuenta que el deslizamiento, para par máximo como generador sería igual y contrario al de motor, es decir, de acuerdo con el apartado c), sería s_m= −0,0958, por lo que la segunda solución anterior cae en la zona inestable del funcionamiento como generador y solamente es válida físicamente la primera. Por consiguiente el generador debe moverse a la velocidad:

$$n = n_1(1-s) = 1500(1+0,0371) = 1555,6 \text{ r.p.m.}$$

Puede comprobarse en el circuito de la Figura 4.26 que la *corriente absorbida de la red* en esta situación es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\left[\mathrm{R}_1+R_2'+R_2'(\frac{1}{s}-1)\right]+jX_{cc}}$$

y que al sustituir valores, se observa que la resistencia de carga es negativa y que vale −13,586 ohmios. De este modo, al sustituir valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(0,673+0,486-13,586)+j5,03} = \frac{219,39\angle 0°}{13,406\angle 158°} = 16,36\angle -158° \text{ A}$$

es decir, la máquina, al funcionar como generador, *entrega* a la red una corriente de 16,36 amperios y está *adelantada* respecto de la tensión un ángulo de 180°−158°= 22°. Se comprueba que la potencia que este *generador entrega a la red* vale:

$$P_{1g} = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 16,36\cos 22° = +9984 \text{ W} \approx 10000 \text{ W}$$

o, de otro modo, que el motor absorbe de la red una potencia:

$$P_{1m} = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 16,36\cos 158° = -9984 \text{ W} \approx -10000 \text{ W}$$

Podemos comprobar que la potencia mecánica interna producida por el motor es:

$$P_{mi} = 3(-13,586)16,36^2 = -10910 \text{ W}$$

que en definitiva significa que el generador asíncrono absorbe una potencia mecánica de 10910 vatios, por lo que el rendimiento de la máquina como generador es:

$$\eta = \frac{P_1}{P_{mi}} = \frac{10000}{10910} = 91,66\%$$

Problema 4.27

Un motor asíncrono trifásico de rotor en jaula de ardilla, tiene una placa de características en la que se leen únicamente los datos siguientes: 380/660 V; 50 Hz; 585 r.p.m. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $I_{Fe} = I_\mu = 0$; $P_m = 0$ (perdidas mecánicas); $R_1 = 0,5\ \Omega$; $R'_2 = 0,7\ \Omega$; $X_1 = X'_2 = 3\ \Omega$. Si se conecta el motor a una red de 380 V trifásica, 50 Hz, indicar: a) forma de conexión del estátor del motor; b) conectado el motor correctamente, de acuerdo con el apartado anterior, calcular: si el motor gira a plena carga a 585 r.p.m., el valor de la corriente absorbida por el motor en la línea, factor de potencia del motor en estas condiciones y la potencia absorbida por el motor de la red; c) potencia desarrollada por el motor en las condiciones del apartado anterior, par mecánico en el eje y rendimiento del motor; d) si girando la máquina como motor a 585 r.p.m., se intercambian súbitamente dos fases de la red de alimentación ¿cuál será en esos momentos el par de frenado desarrollado por la máquina?; e) si la máquina se hace girar a 615 r.p.m. movida por un motor diesel acoplado a su eje, en el mismo sentido que funcionaba como motor y sin cambiar la secuencia de fases, calcular la potencia mecánica absorbida y la potencia eléctrica que la máquina entrega a la red (Funcionamiento como generador asíncrono).

Solución

a) Como la tensión de la red es de 380 voltios, que es la inferior de las dos tensiones que figuran en la placa de características del motor de 380/660 V, este se conectará en triángulo.

b) Como quiera que no se conoce el número de polos del motor, debe tomarse la velocidad de sincronismo más cercana por exceso de la velocidad de giro real de la máquina, lo que se justifica en base a que los motores asíncronos tienen un deslizamiento muy pequeño y cercano a cero. Al ser la frecuencia de la red 50Hz y aplicando la expresión clásica siguiente:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p}$$

es inmediato comprobar que si el número de polos es 4 la velocidad de sincronismo es de 1500 r.p.m.; si es de 6 polos la velocidad correspondiente es de 1000 r.p.m.; si es de 8 polos la velocidad es de 750 r.p.m.; si es de 10 polos, la velocidad es de 600 r.p.m., si es de 12 polos, entonces la velocidad es de 500 r.p.m. Como quiera que la velocidad de giro del motor es de 585 r.p.m., se observa que la de sincronismo más cercana es de 600 r.p.m. que corresponde a 10 polos. De este modo se tiene:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{5} = 600 \text{ r.p.m.}$$

y el deslizamiento a plena carga vale:

$$s = \frac{600 - 585}{600} = 2,5\%$$

El circuito equivalente del motor es el mostrado en la Figura 4.27. Al tomar la tensión de la red como referencia de fase, la corriente que absorbe un devanado del estátor es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{380\angle 0^\circ}{(0,5 + \frac{0,7}{0,025}) + j6} = \frac{380\angle 0^\circ}{28,5 + j6} = \frac{380\angle 0^\circ}{29,125\angle 11,89^\circ} = 13,05\angle -11,89^\circ \text{ A}$$

es decir, la corriente de fase es de 13,05 amperios, que corresponde a una corriente de línea $I_{1línea} = \sqrt{3}.13,05 = 22,6$A y el f.d.p. es el cos11,89° = 0,979. Por consiguiente la potencia eléctrica que absorbe de la red es:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 22,6 \cdot 0,979 = 14562 \text{ W}$$

c) La potencia mecánica que desarrolla el motor es:

$$P_{mi} = 3 \cdot 0,7(\frac{1}{0,025} - 1)13,05^2 = 13947,8 \text{ W}$$

y por lo tanto el par vale:

$$T = \frac{P_{mi}}{\omega} = \frac{13947,8}{2\pi \frac{585}{60}} = 227,68 \text{ N.m.}$$

y el rendimiento del motor en estas condiciones es:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{13947,8}{14562} = 95,78\%$$

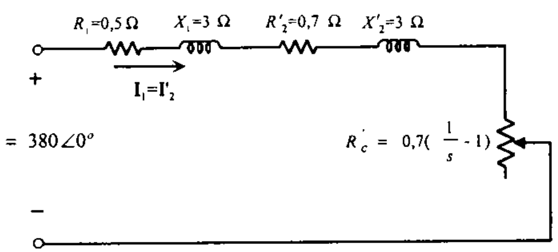


Figura 4.27

d) Si se intercambian de repente dos fases de la red, el campo magnético giratorio del estátor se moverá a 600 r.p.m. mientras que el motor en ese instante girará a una velocidad de 585 r.p.m. en sentido contrario al campo, es por ello que el deslizamiento del motor en ese momento vale:

$$s = \frac{n_1 - n}{n} = \frac{600 - (585)}{600} = 1,975$$

y el par de frenado que producirá en el eje es:

$$T = \frac{3 \cdot 0,7 \cdot 380^2}{2\pi \frac{600}{60} 1,975\left[(0,5 + \frac{0,7}{1,975})^2 + 6^2\right]} = 66,53 \text{ N.m.}$$

e) Si ahora se hace mover el rotor en sentido positivo a una velocidad por encima del sincronismo, el deslizamiento se hace negativo y tiene un valor:

$$s = \frac{600 - 615}{600} = -0,025$$

es por ello que la resistencia de carga de la Figura 4.27 toma un valor negativo:

$$R_c' = 0,7(\frac{1}{\angle 0,025} - 1) = -28,7\Omega$$

y el valor de la *corriente absorbida* por fase, de acuerdo con el circuito anterior, es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{380\angle 0°}{(0,5+0,7-28,7)+j6} = 13,5\angle -167,7° \text{ A}$$

y la potencia mecánica interna que desarrolla como motor es:

$$P_{mi} = 3(-28,7)13,5^2 = -15692 \text{ W}$$

lo que significa que *recibe potencia mecánica* por el eje. La potencia eléctrica que ***absorbe de la red*** es:

$$P_1 = 3V_{1fase}I_{1fase}\cos\varphi = 3 \cdot 380 \cdot 13,5\cos 167,7° = -15037 \text{ W}$$

es decir, la máquina *entrega a la red* una potencia eléctrica de 15037 vatios.

Problema 4.28

Los parámetros del circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla, utilizado en una bomba centrífuga para suministro de agua a una fábrica, son los siguientes: $R_1 = R'_2 = 0,5$ ohmios; $X_1 = X'_2 = 0,75$ ohmios (se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y las pérdidas mecánicas). La placa de características del motor señala los siguientes datos: 220/380 V; 8 CV; 975 r.p.m. El motor se alimenta por medio de una línea de cobre de 10 mm² de sección de una red de 380 V de línea y 50 Hz situada a 3 km de distancia (la resistividad del cobre es de 0,01730 ohmios-mm²/m.) a) ¿Cómo deberá conectarse el motor? b) Si el par resistente de la bomba es igual a 55 N.m. y se supone constante en un amplio margen de velocidad, calcular la velocidad de giro del motor (tómese la más elevada de las dos posibles). c) En las condiciones del apartado anterior, calcular la corriente absorbida por el motor de la red y la tensión de línea en bornes del motor. d) Se observa que durante el funcionamiento expresado en los apartados 2 y 3 el motor absorbe una corriente superior a la esperada, mientras que la cantidad de agua suministrada (caudal) era menor a la prevista. Para corregir este defecto se decide plantear una solución práctica para compensar la caída de tensión en la línea de 3 km. Para ello se decide alimentar el motor a principio de línea por medio de un transformador ideal de modo que la tensión de alimentación sea ahora de 450 V. Si el par de la bomba sigue siendo de 55 N.m., determinar la nueva velocidad del motor, la corriente absorbida y la tensión de línea que llegará al motor.

NOTA: despréciese la reactancia de la línea.

Solución

a) Como la tensión de la red es de 380 voltios, que es la superior de las dos tensiones que figuran en la placa de características del motor de 220/380 V, este se conectará en estrella.

b) Como quiera que no se conoce el número de polos del motor, la velocidad de sincronismo debe tomarse la más cercana por exceso de la velocidad de giro real de la máquina, lo que se justifica en base a que los motores asíncronos tienen un deslizamiento muy pequeño y cercano a cero. Al ser la frecuencia de la red 50 Hz y si se aplica la expresión clásica siguiente:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p}$$

es inmediato comprobar que si el número de polos es 4 la velocidad de sincronismo es de 1500 r.p.m.; si es de 6 polos la velocidad correspondiente es de 1000 r.p.m.; si es de 8 polos la velocidad es de 750 r.p.m., etc. Como quiera que

la velocidad asignada del motor es de 975 r.p.m., se observa que la de sincronismo más cercana es de 1000 r.p.m. que corresponde a 6 polos. De este modo se tiene:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

En la Figura 4.28 se muestra el circuito equivalente de la instalación (motor-línea). El valor de la resistencia de cada fase de la línea vale:

$$R = \rho\frac{L}{S} = 0,0173\frac{3000}{10} = 5,19\ \Omega$$

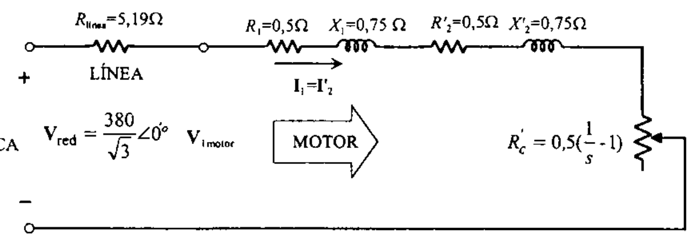


Figura 4.28

y si el par resistente que ofrece la bomba es de 55 N.m. se cumplirá:

$$T = 55 = \frac{3 \cdot 0,5(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{2\pi\frac{1000}{60}s\left[(5,19+0,5+\frac{0,5}{s})^2 + 1,5^2\right]}$$

Expresión en la que s es el deslizamiento con el que trabaja el motor de la bomba. Simplificando se obtiene la ecuación de segundo grado siguiente:

$$34,63s^2 - 6,85s + 0,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,1496\text{(inestable)} \ ; \ s = 0,048\text{(estable)}$$

y por lo tanto el motor se moverá a una velocidad:

$$n = n_1(1-s) = 1000(1-0,048) = 952 \text{ r.p.m.}$$

c) La corriente absorbida por el motor en el caso anterior, tomando la tensión simple de la red como referencia de fases y utilizando la Figura 4.28, nos da:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(5,69+\frac{0,5}{0,048})+j1,5} = \frac{219,39\angle 0°}{16,11+j1,5} = \frac{219,39\angle 0°}{16,18\angle 5,32°} = 13,56\angle -5,32° \text{ A}$$

y la tensión simple en bornes del motor es:

$$\mathbf{V}_1 = \left[(0,5+\frac{0,5}{0,048})+j1,5\right]13,56\angle -5,32° = (10,92+j1,5)13,56\angle -5,32° = 149,46\angle -5,32° \text{ voltios}$$

La tensión compuesta en el motor es:

$$V_{1lin} = \sqrt{3} \cdot 149,46 = 258,87 \text{ V}$$

d) Si la tensión compuesta de la red es ahora de 450 voltios y el par resistente de la bomba sigue siendo de 55 N.m., se cumplirá:

$$T = 55 = \frac{3 \cdot 0,5(\frac{450}{\sqrt{3}})^2}{2\pi \frac{1000}{60} s \left[(5,69 + \frac{0,5}{s})^2 + 1,5^2 \right]}$$

que al simplificar se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$34,63s^2 - 11,89s + 0,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,3208 \text{ (inestable)} \;\; ; \;\; s = 0,0225 \text{ (estable)}$$

y es por ello que el grupo motobomba girará a una velocidad:

$$n = 1000(1 - 0,0225) = 977,5 \text{ r.p.m.}$$

y la corriente absorbida por fase del motor será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{450}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{(5,69 + \frac{0,5}{0,0225}) + j1,5} = \frac{259,81\angle 0^\circ}{27,91 + j1,5} = 9,30\angle -3,08^\circ \text{ A}$$

siendo la tensión simple en bornes del motor:

$$V_1 = \left[(0,5 + \frac{0,5}{0,0225}) + j1,5 \right] 9,3\angle -3,08^\circ = 22,77\angle 3,78^\circ \cdot 9,3\angle -3,08^\circ = 211,78\angle 0,7^\circ \text{ voltios}$$

que corresponde a una magnitud de la tensión compuesta:

$$V_{1lin} = \sqrt{3} \cdot 211,78 = 366,8 \text{ V}$$

Problema 4.29

Se dispone de un motor asíncrono trifásico en rotor de la jaula de ardilla de 4 polos, 220/380 V, 50 Hz, que tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = 2$ ohmios; $X_1 = 5$ ohmios; $R'_2 = 1,5$ ohmios; $X'_2 = 6$ ohmios; se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralela del circuito equivalente. El motor mueve una carga cuyo par resistente es constante y vale 10 N.m. a) Si la red es de 220 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el motor? b) ¿A qué velocidad girará el motor con el par resistente de 10 N.m.?, ¿cuál será el rendimiento del motor en estas condiciones? c) Si el motor funciona en régimen permanente en las condiciones del apartado anterior y se va reduciendo progresivamente la tensión de alimentación ¿cuál será la mínima tensión necesaria en la alimentación antes de que se pare el motor? d) Si se pretende arrancar el motor con el par resistente de 10 N.m., ¿cuál será la mínima tensión necesaria en la red para que pueda arrancar la máquina?

Solución

a) Como la tensión de la red es de 220 voltios, que es la inferior de las dos tensiones que figuran en la placa de características del motor de 220/380 V, este se conectará en triángulo.

b) Como el motor tiene 4 polos y la frecuencia de la red es de 50Hz, la velocidad de sincronismo será:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y teniendo en cuenta que el par resistente es de 10 N.m., al plantear la igualdad entre el par motor (Figura 4.29) y el par resistente resulta:

$$10 = \frac{3 \cdot 1,5 \cdot 220^2}{2\pi \frac{1500}{60} s \left[(2 + \frac{1,5}{s})^2 + 11^2 \right]}$$

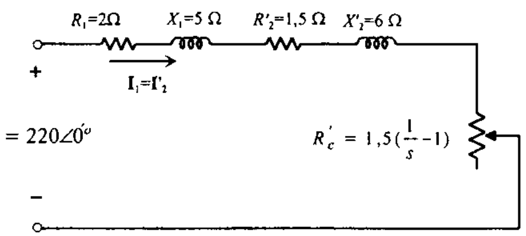


Figura 4.29

De la expresión anterior se llega a la ecuación de segundo grado:

$$125s^2 - 132,66s + 2,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 1,044 \text{(freno)} \;\; ; \;\; s = 0,0172 \text{ (motor)}$$

y por consiguiente la máquina se moverá a una velocidad:

$$n = n_1(1 - s) = 1500(1 - 0,0172) = 1474,2 \text{ r.p.m.}$$

En la Figura 4.29 se muestra el circuito equivalente del motor reducido al estátor. Tomando la tensión de una fase como referencia, la corriente absorbida por una fase del motor de la red es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{220\angle 0^\circ}{(2 + \frac{1,5}{0,0172}) + j11} = \frac{220\angle 0^\circ}{89,21 + j11} = \frac{220\angle 0^\circ}{89,89\angle 7,03^\circ} = 2,448\angle -7,03^\circ \text{ A}$$

y por consiguiente la potencia mecánica interna del motor, que es la potencia disipada en la resistencia de carga, vale:

$$P_{mi} = 3 \cdot 1,5(\frac{1}{0,0172} - 1)2,448^2 = 1541 \text{ W}$$

y la potencia eléctrica que el motor absorbe de la red es:

$$P_1 = 3V_{1fase} I_{1fase} \cos\varphi = 3 \cdot 220 \cdot 2,448 \cos 7,03^\circ = 1604 \text{ W}$$

por consiguiente el rendimiento del motor vale:

$$\eta = \frac{1541}{1604} = 96,07\%$$

c) En la Figura 4.30 se muestra, en trazo grueso, la curva par-velocidad del motor a la tensión asignada de 220 voltios. Cuando el motor mueve el par de 10 N.m. está funcionado en el punto de trabajo A. Si en esta situación se va reduciendo la tensión de alimentación, la curva de par se irá reduciendo en proporción cuadrática, ya que el par depende del cuadrado de la tensión aplicada. La situación límite se tendrá cuando la tensión aplicada dé lugar a una curva en el que su máximo coincida con el par resistente de 10 N.m., puesto que una reducción posterior de la tensión llevará al motor a un colapso y se parará porque no existirá un punto de equilibrio de la máquina. Esta situación se ha representado por la curva par-velocidad de trazo fino correspondiente a una tensión aplicada de línea V_{1a}. El punto de funcionamiento del motor será el B y en él se cumple:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{1,5}{\sqrt{2^2 + 11^2}} = 0,134$$

e igualando el par máximo producido con esta tensión al par resistente de 10 N.m. resulta:

$$T = 10 = \frac{3 \cdot 1,5 V_1'^2}{2\pi \frac{1500}{60} 0,134 \left[(2 + \frac{1,5}{0,134})^2 + 11^2 \right]} = 7,245 \cdot 10^{-4} V_{1a}^2$$

de donde se obtiene: V_{1a} = 117,48 voltios.

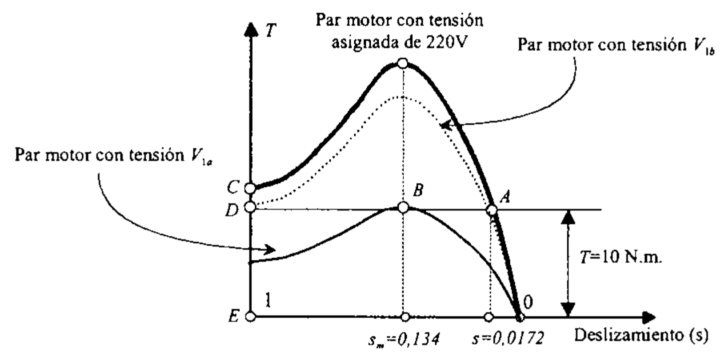


Figura 4.30

d) Debe señalarse que el par de arranque que produce el motor con la tensión de 380 voltios está definido por la distancia CE en la Figura 4.30. Si se reduce la tensión de alimentación, el motor podrá arrancar siempre que el par de arranque a esa tensión sea superior al resistente. La situación límite será cuando el par de arranque coincida con el par resistente de 10 N.m. En la Figura 4.30 se ha mostrado la curva par-velocidad correspondiente, que es la mostrada por trazo discontinuo y que corresponde a una tensión de línea V_{1b}. Al igualar el par de arranque para esta tensión al par resistente de 10 N.m. se tiene:

$$T_a = 10 = \frac{3 \cdot 1,5 V_{1b}^2}{2\pi \frac{1500}{60} 1 \left[(2 + \frac{1,5}{1})^2 + 11^2 \right]}$$

de donde se deduce una tensión V_{1b} = 215,67 voltios.

Problema 4.30

La Figura 4.31 muestra el esquema de una red de alimentación a dos grúas idénticas de un puerto, representadas por un único motor (el de elevación de carga). Los motores empleados son asíncronos trifásicos, con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V, 6 polos, 50 Hz conectados en estrella, cuyos parámetros del circuito equivalente (despreciando las pérdidas mecánicas y la rama paralelo) son: $R_1 = R'_2 = 0,2$ ohmios, $X_1 = X'_2 = 0,6$ ohmios. Se indican también en la figura las impedancias de las redes de distribución de las grúas. La alimentación se hace al principio de la línea por medio de una red trifásica de 380 V, 50 Hz.

a) Inicialmente arranca la grúa nº1, ¿qué par de arranque dará el motor? Si mueve una carga cuyo par resistente es de 100 N.m. ¿cuál será la velocidad final a la que girará el motor?, ¿qué tensión de línea tendrá en bornes el motor? b) Estimando que el motor de la grúa nº1 gira a velocidad constante (en el valor calculado en el apartado anterior, se arranca el motor de la grúa nº2, moviendo un par de 80 N.m.) en el momento del arranque, ¿cuáles serán las tensiones en bornes de ambos motores?, ¿arranca el motor de esta grúa? c) Una vez que ha arrancado la grúa nº2 (debe demostrarlo en el apartado anterior), ¿cuál será la velocidad final de régimen permanente que tomará el motor nº2, suponiendo que el par resistente sigue siendo de 80 N.m. y que la grúa nº1 sigue girando a la velocidad calculada en el apartado a)?, ¿cuál será la tensión compuesta en bornes del motor nº2?

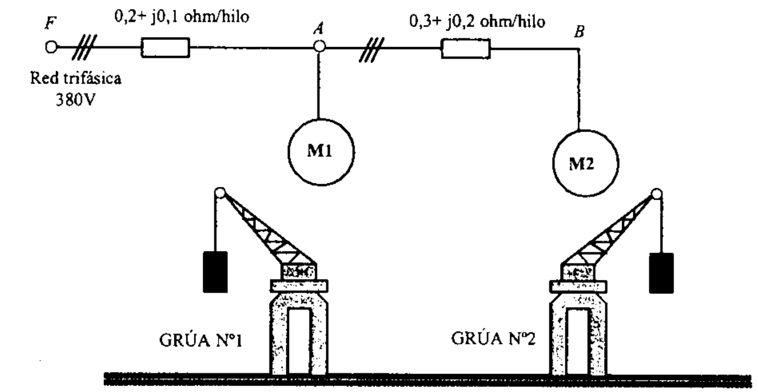


Figura 4.31

Solución

a) Si inicialmente solo funciona la grúa nº1, el circuito equivalente correspondiente es el que se muestra en la Figura 4.32.

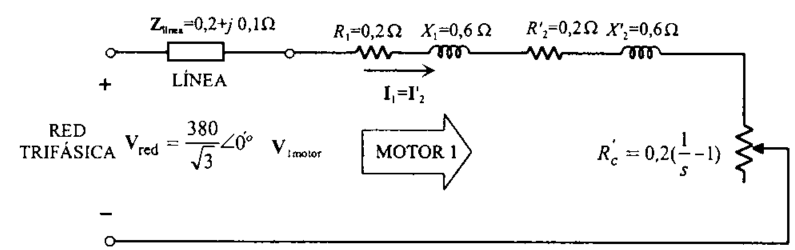


Figura 4.32

Como los motores de las grúas tienen 6 polos y la frecuencia de la red es de 50 Hz, la velocidad de sincronismo de ambos motores será:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

Al arrancar la primera grúa, la correspondiente corriente de arranque se obtiene de la Figura 4.32 haciendo el deslizamiento igual a la unidad, lo que da lugar a:

$$I_a = \frac{V_1}{\sqrt{(R_{línea} + R_1 + R_2')^2 + (X_{línea} + X_1 + X_2')^2}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,2 + 0,4)^2 + (0,1 + 1,2)^2}} = 153,231 \text{ A}$$

y el par de arranque correspondiente es:

$$T_a = \frac{3R_2'}{2\pi\frac{n_1}{60}} I_a'^2 = \frac{3\cdot 0,2}{2\pi\frac{1000}{60}} 153,23^2 = 134,53 \text{ N.m.}$$

Si una vez que arranca el motor, el par resistente de la carga que mueve la grúa es de 100 N.m., el motor irá elevando gradualmente su velocidad hasta encontrar un deslizamiento para el cual se iguale el par producido por el motor al par resistente. Este equilibrio de pares se define por la igualdad siguiente:

$$T = 100 = \frac{3\cdot 0,2}{2\pi\frac{1000}{60}} \frac{1}{s} \frac{(\frac{380}{\sqrt{3}})^2}{\left[(0,2+0,2+\frac{0,2}{s})^2 + 1,3^2\right]}$$

dando lugar a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\frac{0,04}{s^2} - \frac{2,6}{s} + 1,85 = 0 \Rightarrow 1,85s^2 - 2,65s + 0,04 = 0$$

cuyas soluciones son: $s_1 = 1,39$ (freno) ; $s_2 = 0,0156$ (motor), y por lo tanto, el motor de la grúa nº1 se moverá a una velocidad:

$$n = n_1(1-s) = 1000(1-0,0156) = 984,4 \text{ r.p.m.}$$

En las condiciones anteriores, la corriente que absorberá el motor de la grúa nº1 de la red será:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_1}{(R_{\text{línea}} + R_1 + \frac{R_2'}{s}) + j(X_{\text{línea}} + X_1 + X_2')} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{(0,2+0,2+\frac{0,2}{0,0156}) + j(0,1+0,6+0,6)}$$

es decir:

$$\mathbf{I} = \frac{219,39\angle 0^\circ}{13,22 + j1,3} = 16,52\angle -5,6^\circ \text{ A}$$

y, por lo tanto, la tensión simple en bornes del motor de la grúa nº1 es:

$$\mathbf{V}_1 = \left[(0,2 + \frac{0,2}{0,0156}) + j1,2\right] 16,52\angle -5,6^\circ = 216\angle -0,33^\circ \text{ voltios}$$

que corresponde a una magnitud de la tensión compuesta en bornes del motor 1 de $V_{1\text{línea}} = \sqrt{3}\cdot 216 = 374$ V.

b) En la Figura 4. 33 se muestra el circuito equivalente de la instalación, en el que se han sustituido los motores por sus impedancias equivalentes. El motor de la grúa nº2, al iniciar su arranque (s = 1), tiene una impedancia en ese momento que vale:

$$Z_{\text{motor 2}}(\text{arranque}) = (0,2 + \frac{0,2}{1}) + j1,2 = 0,4 + j1,2 = 1,265\angle 71,57^\circ\ \Omega$$

y el motor 1, si se supone que gira a la misma velocidad calculada en el apartado anterior, tiene una impedancia equivalente:

$$Z_{\text{motor 1}} = (0,2 + \frac{0,2}{0,0156}) + j1,2 = 13,02 + j1,2 = 13,076\angle 5,27^\circ\ \Omega$$

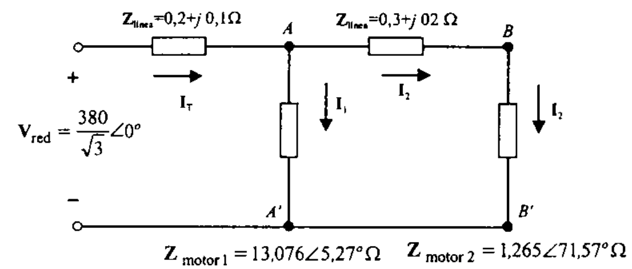


Figura 4.33

La impedancia total de la rama derecha de la Figura 4.33 vale:

$$\mathbf{Z}_{\text{Total rama 2}} = (0,3 + j0,2) + (0,4 + j1,2) = 0,7 + j1,4\ \Omega = 1,565\angle 63,43^\circ\ \Omega$$

La impedancia anterior está en paralelo con la impedancia equivalente del motor 1, dando una resultante:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{13,076\angle 5,27^\circ \cdot 1,56,5\angle 63,43^\circ}{13,076\angle 5,27^\circ + 1,56,5\angle 63,43^\circ} = \frac{20,464\angle 68,7^\circ}{13,964\angle 10,73^\circ} = 1,465\angle 57,97^\circ\ \Omega$$

Por consiguiente la corriente total de la red de la Figura 4.33 será:

$$\mathbf{I}_T = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{(0,2+j0,1) + 1,465\angle 57,97^\circ} = \frac{219,39\angle 0^\circ}{1,66\angle 53,94} = 132,17\angle -53,94^\circ \text{ A}$$

y las corrientes de cada rama, al aplicar la regla del divisor de corriente, son respectivamente:

$$\mathbf{I}_1 = 132,17\angle -53,94^\circ \frac{1,565\angle 63,43^\circ}{13,964\angle 10,73^\circ} = 14,81\angle -1,24^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = 132,17\angle -53,94^\circ \frac{13,076\angle 5,27^\circ}{13,964\angle 10,73^\circ} = 123,76\angle -59,4^\circ \text{ A}$$

Conocidas las corriente anteriores, se pueden obtener las tensiones en bornes de cada motor. Así se tiene para el motor nº2:

$$\mathbf{V}_{m2} = 1,265\angle 71,57^\circ \cdot 123,76\angle -59,4^\circ = 156,55\angle 12,17^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea: $V_{\text{línea}}(\text{motor 2}) = \sqrt{3}\cdot 156,55 = 271,15$ V.

y para el motor nº1:

$$\mathbf{V}_{m1} = 13,076\angle 5,27^\circ \cdot 14,81\angle -1,24^\circ = 193,66\angle 4,03^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea: $V_{\text{línea}}(\text{motor 1}) = \sqrt{3}\cdot 193,66 = 335,43$ V.

El par de arranque que produce el motor 2 tiene un valor:

$$T_{a2} = \frac{3R_2'}{2\pi\frac{n_1}{60}} I_2^2 = \frac{3\cdot 0,2}{2\pi\frac{1000}{60}} 123,76^2 = 87,76 \text{ N.m.}$$

que, al ser superior al par resistente de 80 N.m., indica que el motor de la grúa nº2 podrá arrancar.

c) En la Figura 4.34 se muestra el circuito equivalente de esta situación en el que la impedancia del motor n°2 se expresa en función del deslizamiento s que tenga en ese momento:

$$\mathbf{Z}_{motor\,2} = (0,2+\frac{0,2}{s}) + j1,2\Omega$$

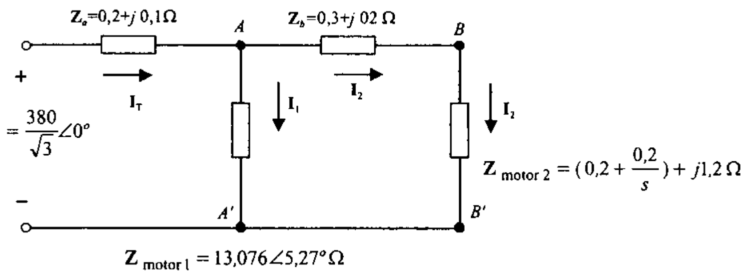


Figura 4.34

y denominando $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ a las impedancias totales de las dos ramas de la Figura 4.34, se tiene:

$$\mathbf{Z}_1 = 13,0 + j1,2 = 13,076\angle 5,27°\ \Omega \quad ; \quad \mathbf{Z}_2 = (0,5+\frac{0,2}{s}) + j1,4\ \Omega$$

por lo que la corriente total que absorben ambos motores de la red y la correspondiente al motor n°2 son respectivamente:

$$\mathbf{I}_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_a + \dfrac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}} \quad ; \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_T \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_a(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2)+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}$$

siendo los valores parciales:

$$\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2 = (13,52+\frac{0,2}{s}) + j2,6 \quad ; \quad \mathbf{Z}_a(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2) = (2,44+\frac{0,04}{s}) + j(1,87+\frac{0,02}{s})$$

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = (4,83+\frac{2,6}{s}) + j(18,83+\frac{0,24}{s}) \quad ; \quad \mathbf{Z}_a(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2)+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = (7,27+\frac{2,64}{s}) + j(20,7+\frac{0,26}{s})$$

por lo que resulta un módulo de la corriente en el motor n°2:

$$I_2 = V\frac{|\mathbf{Z}_1|}{|\mathbf{Z}_a(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2)+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2|} = \frac{380}{\sqrt{3}}\frac{13,076}{\sqrt{(7,27+\frac{2,64}{s})^2+(20,7+\frac{0,26}{s})^2}}$$

y que, incluyendo el valor anterior en la ecuación del par del motor n°2, se llega a:

$$T = 80 = \frac{3\cdot 0,2}{2\pi\dfrac{1000}{60}}\frac{1}{s}\frac{(\frac{380}{\sqrt{3}})^2 13,076^2}{(7,27+\frac{2,64}{s})^2+(20,7+\frac{0,26}{s})^2}$$

que da lugar a la ecuación:

$$\frac{7,038}{s^2} - \frac{540,64}{s} + 481,34 = 0$$

cuyas soluciones son: $s_1 = 1,11$ (freno) $s_2 = 0,0132$ (motor) y, por lo tanto, el motor 2 se moverá a la velocidad:

$$n = 1000(1-0,0132) = 986,8 \text{ r.p.m.}$$

y la corriente del motor 2 tendrá un valor complejo:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0°\cdot 13,076\angle 5,27°}{(7,27+\frac{2,64}{0,0132}) + j(20,7+\frac{0,26}{0,0132})} = 13,59\angle -57,58° \text{ A}$$

por lo que la tensión en bornes del motor n°2 será:

$$\mathbf{V}_{motor\,2} = \left[(0,2+\frac{0,2}{0,0132}) + j1,2\right] 13,59\angle -57,58° = 209,28\angle -1,29° \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea $V_{línea\,2} = 209,28\sqrt{3} = 362,49$ V

Problema 4.31

Un motor asíncrono trifásico de doble jaula de ardilla de 4 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor $R_1 = 1\ \Omega$; $X_1 = 3\ \Omega$. La jaula interna tiene una impedancia reducida al estátor de valor: $0,6+j5\ \Omega$, mientras que la impedancia de la jaula externa es $3+j1\ \Omega$. El estátor se conecta en estrella a una red de 380 voltios, 50 Hz. Si se desprecia la corriente de vacío, calcular: a) par de arranque; b) par de plena carga para un deslizamiento del 4%.

Solución

a) En la Figura 4.35 se muestra el circuito equivalente del motor. Los valores de la impedancias de cada jaula del rotor en el momento del arranque, es decir, para un deslizamiento unidad, son:

$$\mathbf{Z}'_2 = \frac{R'_2}{s} + jX'_2 = 0,6 + j5\ \Omega \quad ; \quad \mathbf{Z}'_3 = \frac{R'_3}{s} + jX'_3 = 3 + j1\ \Omega$$

Las impedancias anteriores están en paralelo y dan una resultante:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{\mathbf{Z}'_2\cdot\mathbf{Z}'_3}{\mathbf{Z}'_2+\mathbf{Z}'_3} = \frac{(0,6+j5)(3+j1)}{3,6+j6} = \frac{5,036\angle 83,16°\cdot 3,16\angle 18,43°}{7\angle 59,04°} = 2,273\angle 42,55° = 1,674 + j1,537\ \Omega$$

y la impedancia anterior está en serie con la impedancia del estátor, lo que da lugar a una impedancia total del motor:

$$\mathbf{Z}_{total} = (1+j3) + (1,674+j1,537) = 2,674 + j4,537 = 5,266\angle 59,5°\ \Omega$$

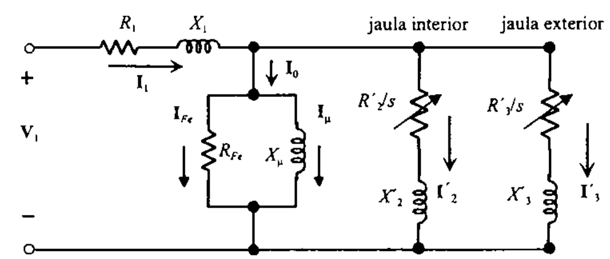


Figura 4.35

La corriente primaria absorbida por el motor, si se toma como referencia la tensión de alimentación, es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{total}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{5,266\angle 59,5^\circ} = 41,66\angle -59,5^\circ \text{ A}$$

A partir de la corriente anterior y de la parte resistiva de la impedancia del rotor se puede determinar la potencia de entrehierro que pasa del estátor al rotor y cuyo valor es, para $s = 1$:

$$P_a = 3\frac{R'_{r2}}{s}I_1^2 = 3\cdot 1,674\cdot 41,66^2 = 8716 \text{ W}$$

Se puede comprobar cómo está repartida la potencia anterior entre las dos jaulas del rotor. Para ello es preciso calcular las corrientes que circulan por cada jaula del rotor (reducidas al estátor):

$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}'_3}{\mathbf{Z}'_2+\mathbf{Z}'_3} = 41,66\angle -59,5^\circ\frac{3,16\angle 18,43^\circ}{7\angle 59,04^\circ} = 18,81\angle -100,11^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}'_3 = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}'_2}{\mathbf{Z}'_2+\mathbf{Z}'_3} = 41,66\angle -59,5^\circ\frac{5,036\angle 83,16^\circ}{7\angle 59,04^\circ} = 29,97\angle -35,38^\circ \text{ A}$$

Por lo tanto las potencias de entrehierro de cada jaula son:

$$P_2 = 3\frac{R'_2}{s}I_2'^2 = 3\cdot 0,6\cdot 18,81^2 = 636,9 \text{ W} \quad ; \quad P_3 = 3\frac{R'_3}{s}I_3'^2 = 3\cdot 3\cdot 29,97^2 = 8083,8 \text{ W}$$

lo que corresponde a una potencia total de 8720,7 W (prácticamente el mismo valor obtenido anteriormente, salvo errores de redondeo). Para calcular el par del motor se requiere calcular la velocidad de sincronismo que vale:

$$n_1 = \frac{60\cdot f_1}{p} = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

y por consiguiente el par de arranque es:

$$T_a = \frac{P_a}{\omega_1} = \frac{8720,7}{2\pi\frac{1500}{60}} = 55,52 \text{ N.m.}$$

b) Los valores de las impedancias de cada jaula del rotor para un deslizamiento del 4%, son:

$$\mathbf{Z}'_2 = \frac{R'_2}{s} + jX'_2 = \frac{0,6}{0,04} + j5 = 15 + j5\ \Omega \quad ; \quad \mathbf{Z}'_3 = \frac{R'_3}{s} + jX'_3 = \frac{3}{0,04} + j1 = 75 + j1\ \Omega$$

Las impedancias anteriores están en paralelo y dan una impedancia resultante:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{\mathbf{Z}'_2\mathbf{Z}'_3}{\mathbf{Z}'_2+\mathbf{Z}'_3} = \frac{(15+j5)(75+j1)}{90+j6} = \frac{15,81\angle 18,43^\circ\cdot 75,007\angle 0,76^\circ}{90,2\angle 3,81^\circ} = 13,15\angle 15,38^\circ = 12,68 + j3,49\ \Omega$$

La impedancia anterior está en serie con la impedancia del estátor, lo que da lugar a una impedancia total del motor:

$$\mathbf{Z}_{total} = 1 + j3 + 12,68 + j3,49 = 13,68 + j6,49^\circ = 15,14\angle 25,38^\circ\ \Omega$$

y por lo tanto la corriente primaria absorbida por el motor, si se toma como referencia la tensión de alimentación, es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{total}} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{15,14\angle 25,38^\circ} = 14,49\angle -25,38^\circ \text{ A}$$

Las corrientes que circulan por cada jaula del rotor (reducidas al estátor) son:

$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}'_3}{\mathbf{Z}'_2+\mathbf{Z}'_3} = 14,49\angle -25,38^\circ\frac{75,007^\circ\angle 0,76^\circ}{90,2\angle 3,81^\circ} = 12,05\angle -28,43^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}'_3 = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}'_2}{\mathbf{Z}'_2+\mathbf{Z}'_3} = 14,49\angle -25,38^\circ\frac{15,81\angle 18,43^\circ}{90,2\angle 3,81^\circ} = 2,54\angle -10,76^\circ \text{ A}$$

por tanto, las potencias de entrehierro de cada jaula son:

$$P_2 = 3\frac{R'_2}{s}I_2'^2 = 3\cdot 15\cdot 12,05^2 = 6534,1 \text{ W} \quad ; \quad P_3 = 3\frac{R'_3}{s}I_3'^2 = 3\cdot 75\cdot 2,54^2 = 1451,6 \text{ W}$$

lo que corresponde a una potencia total de P_a= 7985,7 W, y como quiera que la velocidad de sincronismo del motor vale 1500 r.p.m., el valor del par de plena carga será:

$$T_{pc} = \frac{P_a}{\omega_1} = \frac{7985,7}{2\pi\frac{1500}{60}} = 50,84 \text{ N.m.}$$

Problema 4.32

Un motor asíncrono monofásico de 220 V, 4 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor $\mathbf{Z}_1=1,8+j2,5\ \Omega$ y una impedancia del rotor reducida al estátor $\mathbf{Z}'_2=3,5+j2,5\ \Omega$. La reactancia magnetizante es $X_\mu = 50\ \Omega$. Se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas. Calcular para un deslizamiento del 5%: a) la potencia mecánica útil; b) rendimiento.

Solución

1) En la Figura 4.36 se muestra el circuito equivalente del motor monofásico, en el que los valores de las resistencias totales del rotor (propia + carga) para cada campo para un deslizamiento del 5% son:

$$\frac{R'_2}{2s} = \frac{3,5}{2\cdot 0,05} = 35\ \Omega \quad ; \quad \frac{R'_2}{2(2-s)} = \frac{3,5}{2(2-0,05)} = 0,897\ \Omega$$

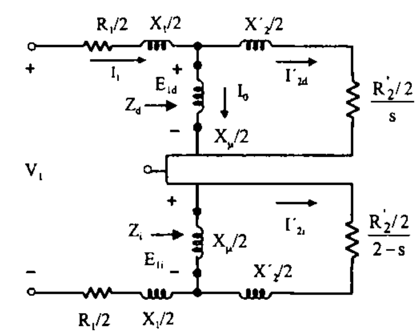


Figura 4.36

De este modo, las impedancias Z_d y Z_i son respectivamente (el símbolo || significa conexión en paralelo):

$$\mathbf{Z}_d = j\frac{X_\mu}{2} \parallel \left(\frac{R'_2}{2s} + j\frac{X'_2}{2}\right) = \frac{j25(35+j1,25)}{35+j26,25} = 20\angle 55,2^\circ\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_i = j\frac{X_\mu}{2} \| (\frac{R_2'}{2(2-s)} + j\frac{X_2'}{2}) = \frac{j25(0,897 + j1,25)}{0,897 + j26,25} = 1,47\angle 56,3^\circ \ \Omega$$

Si se toma la tensión como referencia, la corriente absorbida por el motor será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{R_1 + jX_1 + \mathbf{Z}_d + \mathbf{Z}_i} = \frac{220\angle 0^\circ}{1,8 + j2,5 + 20\angle 55,2^\circ + 1,47\angle 56,3^\circ} = 8,96\angle -55,14^\circ \text{ A}$$

por lo tanto el motor absorbe una corriente de 8,96 A con un f.d.p. de cos 55,14°= 0,572. Las corrientes del rotor se obtienen por la regla del divisor de corriente, lo que da lugar a los siguientes resultados:

$$\mathbf{I}_{2d}' = 8,96\angle -55,14^\circ \frac{j25}{35 + j26,25} = 5,12\angle -2^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{2i}' = 8,96\angle -55,14^\circ \frac{j25}{0,897 + j26,25} = 8,53\angle -53,2^\circ \text{ A}$$

por consiguiente, se obtiene una potencia mecánica interna total:

$$P_{mi} = \frac{R_2'}{2}(1-s) \left[\frac{I_{2d}'^2}{s} - \frac{I_{2i}'^2}{2-s}\right] = \frac{3}{2}(1-0,05) \left[\frac{5,12^2}{0,05} - \frac{8,53^2}{2-0,05}\right] = 747,1 - 53,2 = 693,9 \text{ W}$$

b) La potencia eléctrica absorbida por el motor de la red será: P_1= 220·8,96·0,572= 1127,5 W, lo que da lugar a un rendimiento:

$$\eta = \frac{693,9}{1127,5} = 61,5\%$$

que es claramente inferior al que poseen los motores trifásicos. En la práctica el rendimiento de los motores monofásicos oscila entre el 60 y el 80%.

Problema 4.33

Un grupo motobomba está formado por un motor asíncrono acoplado mecánicamente a una bomba centrífuga. La instalación mostrada en la Figura 4.37 representa un grupo de bombeo empleado en regadíos. La admisión de agua se realiza a través de un canal de entrada y el bombeo se realiza hasta un embalse superior, a partir del cual se distribuye la distribución por tuberías para que los agricultores efectúen el regadío por gravedad. La placa de características del motor trifásico en jaula de ardilla del grupo motobomba señala los siguientes valores asignados por el fabricante: 250 kW; 380/660 V; 50 Hz; η=95,5%; cosφ=0,89; 1485 r.p.m. La red eléctrica de alimentación es trifásica de 380 V de línea, 50 Hz. Si se supone que el motor funciona a plena carga y que la altura total del bombeo (*) es de 50 metros. a) Calcular el caudal en m³/hora que se bombea, si se supone que en el punto de trabajo correspondiente, la bomba centrífuga tiene un rendimiento del 70%. b) La estación de bombeo dispone de 4 grupos motobomba idénticos al señalado en la figura y, debido a unas obras en el canal de entrada, no se han efectuado medidas del consumo de agua en el último mes. La comunidad de regantes propietaria de la estación de bombeo estima que puede ser una cantidad cercana a los 300 000 m³. El ingeniero de la Confederación Hidrográfica a la que pertenece el canal, desconfía de esta cifra y para confirmarla opta por dirigirse a la Compañía eléctrica suministradora de la zona, para que le indiquen el consumo de energía eléctrica de la estación de bombeo en ese periodo de tiempo y que resulta ser de 80.000 kWh. Determinar a partir de este dato, el valor aproximado del caudal real bombeado en ese mes, para comprobar la cantidad señalada por la comunidad de regantes.

(*) NOTA: 1) en realidad la altura total H es la suma de la altura de aspiración de la bomba, más la altura de impulsión, más una altura adicional que representa las pérdidas de rozamiento en la tubería y que se denomina pérdida de carga; 2) se supone que los grupos motobomba trabajan siempre a plena carga y en el mismo punto de trabajo de las bombas centrífugas.

Solución

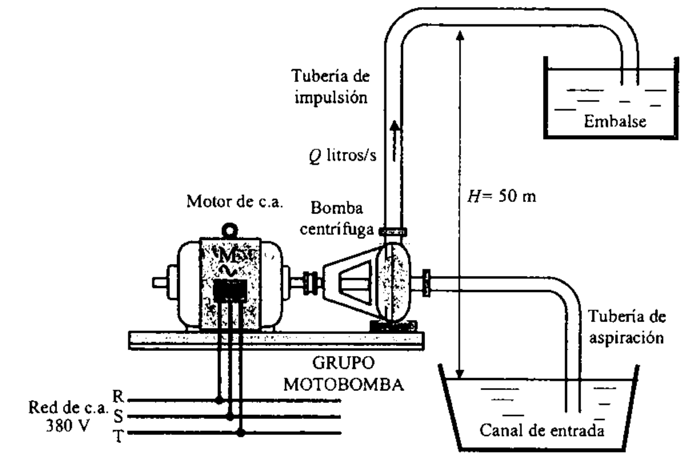


Figura 4.37

a) A plena carga la potencia mecánica útil del motor eléctrico es de 250 kW. Esta potencia se transfiere a la bomba centrífuga, que en el punto de funcionamiento tiene un rendimiento del 70%, lo que significa que la potencia efectiva disponible para bombear el agua es de 250·0,7 = 175 kW. Por otra parte, para bombear un caudal de agua Q (en litros por segundo), a una altura de H metros se requiere una potencia en vatios:

$$P_{\text{bombeo}} = QH \cdot 9,81$$

Téngase en cuenta, para comprender la ecuación anterior, que 1 litro de agua pesa 1kg, por lo que para bombear Q kg/s de agua, a una altura H se requieren QH kgm y como 1kgm= 9,81 vatios, la potencia en vatios es 9,81QH. Si la altura H es de 50 metros, el caudal que bombea el grupo motobomba, si funciona a plena carga es:

$$Q = \frac{P_{\text{bombeo}}}{9,81H} = \frac{175000}{9,81 \cdot 50} \approx 357 \text{ litros/s}$$

lo que corresponde a:

$$Q = 357 \text{ litros/s} = 357 \cdot 60 \cdot 60 = 1285200 \text{ litros/hora} \approx 1285 \text{m}^3\text{/hora}$$

b) Para bombear el caudal anterior, el motor eléctrico ha absorbido de la red eléctrica una potencia:

$$P_1 = \frac{P_u}{\eta} = \frac{250}{0,955} \approx 262 \text{ kW}$$

lo que representa una energía activa en una hora de 262 kWh. Es decir, el bombeo de 1285 m³ requiere un consumo aproximado de electricidad del orden de 262 kWh. Es por ello que si el consumo de energía eléctrica ha sido de 80000 kWh, el tiempo total de funcionamiento de las cuatro motobombas ha debido ser del orden de:

$$\text{Tiempo} = \frac{80000}{262} \approx 305 \text{ horas}$$

lo que corresponde a un consumo total de agua en ese período de tiempo de:

$$305 \text{ horas} \cdot 1285 \text{ m}^3\text{/hora} = 391925 \text{ m}^3$$

que es una cantidad superior a la de 300000 m³ estimados por la comunidad de regantes. En realidad, la cantidad de agua consumida es inferior a los 391925 metros cúbicos calculados, ya que existen servicios auxiliares en la estación de bombeo que consumen electricidad: alumbrado interior y del camino de acceso, maquinaria auxiliar de reparación, polipastos, equipos de soldadura, etc. Si se estima que estos servicios tienen un consumo eléctrico de un 5% del total, el caudal bombeado sería un 5% inferior al calculado, es decir, sería del orden de 95%·391925 = 372329 m³ que es casi un 24% superior al estimado por la comunidad de regantes. En la práctica resulta difícil predecir el resultado con gran exactitud debido a los cambios en los rendimientos, tanto del motor eléctrico como de la bomba centrífuga en regímenes de funcionamiento variables, lo cual aquí no se ha tenido en cuenta.

Problema 4.34

Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor despreciable. Se sabe que el par máximo es de 500 N.m. y se produce para una velocidad de 1200 r.p.m. Si el motor mueve un par resistente constante de 100 N.m. y el momento de inercia del rotor más la carga mecánica es de 10 kg·m², calcular el tiempo que requiere el motor para pasar de la posición de paro hasta alcanzar una velocidad de 1425 r.p.m.

Solución

Teoría previa:

Si se denomina T al par motor que ejerce la máquina y T_r al par resistente, el par que tiende a acelerar el rotor es $T - T_r$, y si se denomina J al momento de inercia total y ω a la velocidad angular del rotor, se cumple la ecuación dinámica siguiente:

$$T - T_r = J\frac{d\omega}{dt} \qquad \text{(a)}$$

pero si se denomina ω_1 a la velocidad angular de sincronismo y s al deslizamiento se cumple:

$$\omega = \omega_1(1-s) \qquad \text{(b)}$$

que al sustituir en (a) nos da:

$$T - T_r = -J\omega_1\frac{ds}{dt} \qquad \text{(c)}$$

y por consiguiente, el tiempo necesario para que el rotor pase de un deslizamiento s_1 hasta otro s_2 es:

$$t = -J\omega_1\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{T-T_r} \qquad \text{(d)}$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta que la impedancia del estátor es despreciable, se cumple la fórmula de Kloss que relaciona el par motor genérico T para un deslizamiento s en función del par máximo T_{max} para el deslizamiento de par máximo s_m y que es:

$$\frac{T}{T_{max}} = \frac{2}{\dfrac{s}{s_m}+\dfrac{s_m}{s}} \Rightarrow T = \frac{2ss_mT_{max}}{s^2+s_m^2} \qquad \text{(e)}$$

y que al sustituir en (d) nos da:

$$t = -J\omega_1\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\dfrac{2ss_mT_{max}}{s^2+s_m^2}-T_r} \qquad \text{(f)}$$

En este problema la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60\cdot f_1}{p} = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

que corresponde a una velocidad angular en rad/s:

$$\omega_1 = 2\pi\frac{n_1}{60} = 2\pi\frac{1500}{60} = 157{,}08 \text{ rad/s}$$

Por otra parte, la velocidad para par máximo es de 1200 r.p.m., que corresponde a un deslizamiento:

$$s_m = \frac{1500-1200}{1500} = 0{,}2$$

Además el par máximo es de 500 N.m., el par resistente es de 100 N.m. y el momento de inercia es de 10 kg.m². Por otro lado el deslizamiento inicial (arranque) es $s_1 = 1$ y como la velocidad final que se señala es de 1425 r.p.m., que corresponde a un deslizamiento:

$$s_2 = \frac{1500-1425}{1500} = 0{,}05$$

al sustituir todos los valores anteriores en la expresión (f) resulta:

$$t = -1570{,}8\int_1^{0{,}05}\frac{ds}{\dfrac{200s}{s^2+0{,}2^2}-100} = +15{,}708\int_1^{0{,}05}\frac{(s^2+0{,}2^2)ds}{s^2-2s+0{,}2^2}$$

y descomponiendo en fracciones simples:

$$I = \int_1^{0{,}05}\frac{(s^2+0{,}2^2)ds}{s^2-2s+0{,}2^2} = \int_1^{0{,}05}\left[1+\frac{2s}{s^2-2s+0{,}2^2}\right]ds = \int_1^{0{,}05}\left[1+\frac{2{,}02}{s-1{,}98}-\frac{0{,}02}{s-0{,}02}\right]ds$$

e integrando se obtiene el siguiente resultado:

$$I = \int_1^{0{,}05}\left[1+\frac{2{,}02}{s-1{,}98}-\frac{0{,}02}{s-0{,}02}\right]ds = \left[s+2{,}02\ln(s-1{,}98)-0{,}02\ln(s-0{,}02)\right]_1^{0{,}05} = 0{,}49$$

por lo que finalmente el tiempo de arranque del motor entre 0 y 1475 r.p.m. es t = 15,708·0,49 = 7,7 segundos.

Problema 4.35

Se dispone de un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla conectado en triángulo de 400/700 V, 8 polos, 50 Hz. En un ensayo a rotor bloqueado ha dado los siguientes resultados: V_1 (línea) = 200 V; I_1 (línea) = 120 A, P_{cc}(total) = 15 kW. Se sabe además que las pérdidas en el hierro son de 22 kW y que las pérdidas mecánicas son despreciables. La resistencia medida entre dos terminales del estátor, conectado en triángulo, fue de 0,347 Ω. Si el motor se conecta inicialmente a una red de trifásica de 400 V de línea calcular: a) par de arranque del motor; b) potencia mecánica útil cuando funciona con par máximo; c) el motor se alimenta a continuación por medio de una línea trifásica de impedancia 0,5+j0,8 ohmios por hilo, que procede del secundario de un transformador de 50 kVA, 15000/400 V, conexión Yd11, 50 Hz, que tiene una impedancia total reducida al secundario de 1+j1,5 ohmios/fase; determinar la tensión que debe aplicarse al primario del transformador para que la tensión en el motor sea la asignada de 400 V cuando funciona con un deslizamiento del 5%; d) se desea que el motor funcione dando el máximo rendimiento, para ello, como el transformador es de una potencia insuficiente, se necesita acoplarlo en paralelo con otro transformador de 100 kVA, 15000/400 V, conexión Yd11, 50 Hz, y que tiene una impedancia total reducida al secundario de 0,5+j1 ohmios/fase; Si la *tensión en bornes del motor permanece constante en 400 voltios, calcular la potencia activa que dará este nuevo transformador y la tensión que deberá aplicarse a los primarios de los transformadores; e) hallar el rendimiento total de la instalación, si se desprecian las pérdidas en el hierro de los transformadores.*

Solución

En la Figura 4.38 se muestra el esquema unifilar de la instalación que se requiere para resolver el problema a partir del apartado c) (ya que las dos primeras preguntas se refieren al motor conectado directamente a una red trifásica de 400V de línea). Como quiera que el motor asíncrono está conectado en triángulo, al medir entre dos terminales externos la resistencia del estátor, tal como se señala en la parte derecha de la Figura 4.38, si se denomina $R_{1\Delta}$ a la resistencia de cada bobina conectada en triángulo y R_{medida} a la resistencia medida entre dos terminales (que consiste en dos bobinas en serie y su resultante en paralelo con la tercera bobina), se puede escribir:

$$R_{medida} = \frac{2}{3}R_{1\Delta} \Rightarrow R_{1\Delta} = \frac{3}{2}R_{medida} = \frac{3}{2}0,347 = 0,52\ \Omega$$

Por otro lado, del ensayo de cortocircuito del motor se obtiene:

$$15000 = \sqrt{3}\cdot 200\cdot 120\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,361\ ;\ \ \mathrm{sen}\varphi_{cc} = 0,933$$

y la impedancia de cortocircuito por fase del motor conectado en triángulo y sus elementos componentes son:

$$Z_{cc\Delta} = \frac{200}{120/\sqrt{3}} = 2,887\ \Omega \Rightarrow R_{cc\Delta} = 2,887\cdot 0,361 = 1,042\ \Omega\ ;\ X_{cc\Delta} = 2,887\cdot 0,933 = 2,693\ \Omega$$

y como quiera que la resistencia de una fase del motor conectado en triángulo es de 0,52Ω, el valor de la resistencia reducida del rotor es:

$$R'_{2\Delta} = 10,042 - 0,52 = 0,522\ \Omega$$

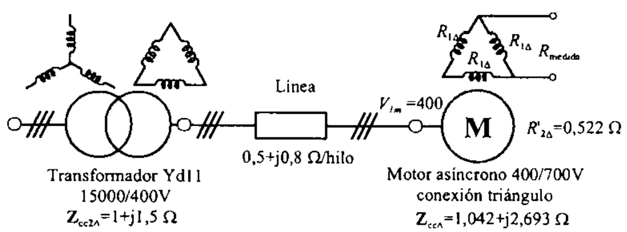


Figura 4.38

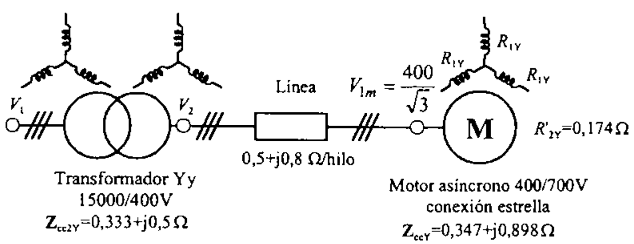


Figura 4.39

Una vez determinados los parámetros del motor asíncrono, es conveniente preparar toda la instalación modificando todas las conexiones de las máquinas en un sistema en estrella equivalente. En la Figura 4.39 se muestra el circuito unifilar resultante. La impedancia de cortocircuito del motor equivalente conectado en estrella vale:

$$\mathbf{Z}_{ccY} = \frac{1,042 + j2,693}{3} = 0,347 + j0,898\ \Omega$$

Por otro lado la impedancia del transformador referida al secundario, que está conectado en triángulo, es $\mathbf{Z}_{cc2\Delta} = 1 + j1,5\ \Omega$. Por lo tanto, la impedancia referida al secundario de un transformador equivalente con el secundario en estrella, es:

$$\mathbf{Z}_{cc2Y} = \frac{1 + j1,5}{3} = 0,333 + j0,5\ \Omega \qquad \text{(a)}$$

y la tensión simple, o de fase, que tiene en los terminales el motor equivalente en estrella es:

$$V_{1m} = \frac{400}{\sqrt{3}}\ \mathrm{V}$$

a) El par de arranque del motor viene expresado por:

$$T = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi\frac{n_1}{60}s\left[(R_1 + \frac{R'_2}{s})^2 + X_{cc}^2\right]} = \frac{3\cdot 0,174(\frac{400}{\sqrt{3}})^2}{2\pi\frac{750}{60}1\left[(0,173 + \frac{0,174}{1})^2 + 0,898^2\right]} = 382,5\ \mathrm{N.m.}$$

b) El deslizamiento para par máximo vale:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,174}{\sqrt{0,173^2 + 0,898^2}} = 0,190$$

por lo que la corriente que absorbe el motor en las condiciones de par máximo es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(0,173 + \frac{0,174}{0,190}) + j0,898} = 163,6\angle -39,5°\ \mathrm{A}$$

y, en consecuencia, la potencia mecánica interna o potencia mecánica útil (ya que no hay pérdidas mecánicas) que desarrolla el motor es:

$$P_{mi} = 3R'_2(\frac{1}{s} - 1)I_2'^2 = 3\cdot 0,174(\frac{1}{0,190} - 1)163,6^2 = 59,6\ \mathrm{kW}$$

c) Si se toma la tensión simple en el motor como referencia de fases y el deslizamiento es igual al 5%, la corriente absorbida por el motor es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(0,173 + \frac{0,174}{0,05}) + j0,898} = 61,4\angle -13,8°\ \mathrm{A}$$

y si se tiene en cuenta el esquema unifilar de la Figura 4.39, la tensión simple que deberá tener el secundario del transformador para que llegue la tensión de 400 voltios al motor será:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0,5 + j0,8)61,4\angle -13,8° = 275,45\angle 8,43°\ \text{voltios}$$

El transformador estrella-estrella equivalente tiene una relación de transformación:

$$m = \frac{15000}{400} = 37,5$$

y, teniendo en cuenta el valor de la impedancia reducida al secundario del transformador estrella-estrella equivalente señalado en (a), y trasladando al primario las magnitudes anteriores, se tiene:

$$m\mathbf{V}_2 = 37,5 \cdot 275,45\angle 8,43° = 10329,4\angle 8,43° \text{ voltios} \quad ; \quad \frac{\mathbf{I}_2}{m} = \frac{61,4\angle -13,8°}{37,5} = 1,64\angle -13,8° \text{ A}$$

$$\mathbf{Z}_{cc1Y} = m^2 \mathbf{Z}_{cc2Y} = 37,5^2(0,333 + j0,5) = 468,3 + j703,1\ \Omega$$

por lo que, entonces, la tensión primaria necesaria en el transformador será:

$$\mathbf{V}_1 = m\mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{cc1Y}\frac{\mathbf{I}_2}{m} = 10329,4\angle 8,43° + (468,3 + j703,1)1,64\angle -13,8° = 11608\angle 11,22° \text{ voltios}$$

Es decir, la tensión fase-neutro en el primario del transformador debe ser de 11608 voltios, que corresponde a un valor compuesto o de línea:

$$V_{1\,\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 11608 = 20106 \text{ voltios}$$

d) Cuando una máquina eléctrica funciona con máximo rendimiento, se cumple la igualdad entre las pérdidas fijas y variables. Teniendo en cuenta que el motor tiene unas pérdidas mecánicas despreciables, la única potencia perdida fija es la del hierro y que según el enunciado del problema es de 22 kW, cantidad que al igualar con las pérdidas en el cobre (variables) da lugar a:

$$22000 = 3(R_1 + R_2')I_{1m}^2 = 3 \cdot 0,347 I_{1m}^2 \Rightarrow I_{1m} = 145,37 \text{ A}$$

El valor anterior corresponde a la magnitud de la corriente en el estátor del motor. En la Figura 4.40 se muestra el circuito equivalente del motor reducido al estátor.

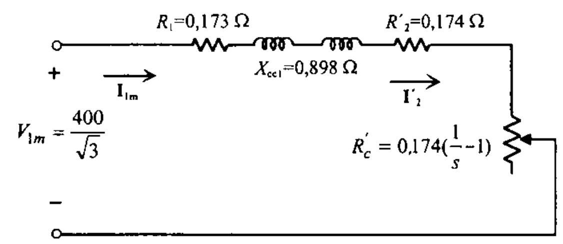


Figura 4.40

De acuerdo con el resultado anterior, el módulo de la impedancia del motor es:

$$Z_{1m} = \frac{400/\sqrt{3}}{145,37} = 1,589\ \Omega$$

y como quiera que la impedancia compleja del motor es de la forma:

$$\mathbf{Z}_{1m} = (0,173 + \frac{0,174}{s}) + j0,898$$

al igualar el módulo de la impedancia anterior a la magnitud calculada antes, resulta un deslizamiento del motor para máximo rendimiento: s = 0,153. Llevando este valor a la expresión anterior de la impedancia compleja se tiene:

$$\mathbf{Z}_{1m} = (0,173 + \frac{0,174}{0,153}) + j0,898 = 1,589\angle 34,42°\ \Omega$$

En definitiva, la potencia eléctrica activa que el motor absorbe de la red en las condiciones de máximo rendimiento es:

$$P_{1m} = 3V_{1m}I_{1m}\cos\varphi_{1m} = 3\frac{400}{\sqrt{3}}145,37\cos 34,42° = 83082 \text{ W} \qquad \text{(b)}$$

De acuerdo con el enunciado, para alimentar ahora el motor se conecta un nuevo transformador en paralelo con el existente, según el esquema unifilar de la Figura 4.41. La impedancia reducida al secundario (conectado en triángulo) de este transformador II es de 0,5+j1 ohmios que corresponde a un equivalente en estrella:

$$\mathbf{Z}_{cc2Y} = \frac{0,5 + j1}{3} = 0,167 + j0,333\ \Omega$$

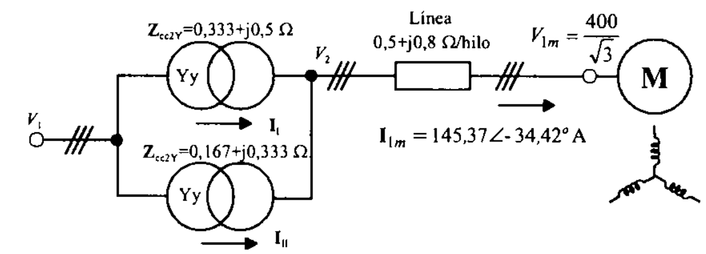


Figura 4.41

La nueva tensión secundaria de los transformadores se obtiene sumando al voltaje del motor la caída de tensión en la línea con la nueva corriente que aquel lleva, y así se obtiene:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0,5 + j0,8)145,37\angle -34,42° = 360,8\angle 8,74° \text{ voltios}$$

A continuación es necesario ver cómo se reparte la corriente de la línea (en definitiva del motor) entre los dos transformadores. Si se denomina $\mathbf{I}_I$ e $\mathbf{I}_{II}$ a las corrientes que entregan los secundarios de cada transformador (ver Figura 4.41), se cumplirán las ecuaciones siguientes de paralelo:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 145,37\angle -34,42° \quad ; \quad (0,333 + j0,5)\mathbf{I}_I = (0,167 + j0,333)\mathbf{I}_{II}$$

de donde se deducen las corrientes secundarias de ambos transformadores:

$$\mathbf{I}_I\angle 55,8\angle -30° \text{ A} \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = 89,8\angle -37° \text{ A}$$

por lo tanto, las potencias complejas que suministrará cada transformador serán:

$$\mathbf{S}_I = 3\mathbf{V}_2\mathbf{I}_I^*\angle 3 \cdot 360,8\angle 8,74° \cdot 55,8\angle 30° = 60,4\angle 38,74° \text{kVA} = 47,11 + j37,8$$

$$\mathbf{S}_{II} = 3\mathbf{V}_2\mathbf{I}_I^*\angle 3 \cdot 360,8\angle 8,74° \cdot 89,8\angle 37° = 97,2\angle 45,74° \text{kVA} = 67,8 + j69,6$$

es decir, el segundo transformador suministra una potencia activa de 67,8 kW. Para obtener la tensión que se requiere en los primarios de los transformadores, se puede utilizar, por ejemplo, los resultados del primer transformador y al reducir las magnitudes correspondientes al primario resulta:

$$m\mathbf{V}_2 = 37,5 \cdot 360,8\angle 8,74° = 13530\angle 8,74° \text{ voltios} \quad ; \quad \frac{\mathbf{I}_I}{m} = \frac{55,8\angle -30°}{37,5} = 1,488\angle -30° \text{ A}$$

$$\mathbf{Z}_{cc1Y} = m^2\mathbf{Z}_{cc2Y} = 37,5^2(0,333 + j0,5) = 468,3 + j703,1\ \Omega$$

por lo que entonces la tensión primaria necesaria en los transformadores será:

$$\mathbf{V}_1 = m\mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_{cc1Y}\frac{\mathbf{I}_I}{m} = 13530\angle 8,74° + (468,3 + j703,1)1,488\angle -30° = 14733\angle 10,2° \text{ voltios}$$

es decir, la tensión fase-neutro en el primario de los transformadores debe ser de 14733 voltios, que corresponde a un valor compuesto o de línea:

$$V_{1\,\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 14733 = 25518 \text{ voltios}$$

e) El rendimiento de la instalación se obtiene mediante el cociente entre la potencia mecánica del motor y la potencia eléctrica a la entrada (primario) de los transformadores, es decir:

$$\eta = \frac{P_{motor}}{P_{primario}}$$

La potencia mecánica útil que entrega el motor en su eje, teniendo en cuenta que trabaja con un deslizamiento de 0,153 y absorbiendo una corriente de 145,37 amperios, es:

$$P_{motor} = 3R_2'(\frac{1}{s}-1)I_2'^2 = 3\cdot 0,174(\frac{1}{0,153}-1)145,37^2 \approx 61,1 \text{ kW}$$

Para calcular la potencia eléctrica que absorbe la instalación en la entrada de alta tensión (primarios de los transformadores) es necesario recordar que se tiene:

$$\mathbf{V}_1 = 14733 \angle 10,2° \text{ voltios} \; ; \; \mathbf{I}_1 = \frac{145,37\angle -34,42°}{37,5} = 3,88\angle -34,42° \text{ amperios}$$

por lo que la potencia compleja de entrada a la instalación será:

$$\mathbf{S}_{primario} = 3\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = 3\cdot 14733\angle 10,2°\cdot 3,88\angle +34,42° = 171,5\angle 44,62° \text{ kVA} = 122,1 + j120,5$$

lo que significa que la potencia activa de entrada es de 122,1 kW, y de este modo el rendimiento de la instalación será:

$$\eta = \frac{P_{motor}}{P_{primario}} = \frac{61,1}{122,1} \approx 50\%$$

El lector puede comprobar, como ejercicio adicional, la potencia eléctrica al principio de la instalación mediante la suma de la potencia mecánica del motor y de todas las pérdidas intermedias, a saber: hierro del motor, efecto Joule en los devanados del motor, efecto Joule de la línea, y también de los arrollamientos de ambos transformadores.

Problemas suplementarios

Problema 4.36

Un motor trifásico de jaula de ardilla, tiene una impedancia del estátor despreciable. La capacidad de sobrecarga, $T_{max}/T_{plena\,carga}$ vale 2,5 y el cociente par de arranque a par de plena carga es igual a 1,5. Calcular el deslizamiento a plena carga y el deslizamiento para el que se obtiene el par máximo.

[Resp.: 6,96%; 33,33%]

Problema 4.37

Un motor de inducción trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una capacidad de sobrecarga de 2,5 y desarrolla su par máximo a 900 r.p.m. Calcular: a) deslizamiento a plena carga; b) ¿cuál será la tensión mínima que debe aplicarse a la máquina, expresada en tanto por ciento de la asignada, para obtener el par de plena carga en el arranque? NOTA: despreciar la impedancia del estátor.

[Resp.: a) 8,34%; 76,15%]

Problema 4.38

Los parámetros del circuito equivalente por fase de un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 50 Hz, son: $R_1=0,3\ \Omega$; $R_2'=0,25\ \Omega$; $X_1=0,5\ \Omega$; $X_2'=0,5\ \Omega$; se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y las pérdidas mecánicas del motor. Si se conecta este motor en estrella a una red trifásica de 380 V de línea, calcular: a) la velocidad del motor para obtener el par máximo; b) valor del par máximo y potencia mecánica desarrollada por el motor en esta situación; c) velocidad del motor para que funcione con potencia mecánica máxima; d) determinar en el caso anterior el valor de la potencia mecánica desarrollada y el par correspondiente en el árbol del motor.

[Resp.: a) 1140,8 r.p.m.; b) 342 N.m.; 40,9 kW; c) 1230,5 r.p.m.; d) 42,7 kW; 331,4 N.m.]

Problema 4.39

Un motor asíncrono trifásico conectado en estrella de 6 polos, 50 Hz, tiene las siguientes impedancias por fase: $\mathbf{Z}_1=0,1+j0,3\ \Omega$; $\mathbf{Z}_2'=0,1+j0,2\ \Omega$. La corriente de imanación es de 15 amperios y se sabe que las pérdidas en el hierro son de 1200 W, y las de rozamiento y ventilación, de 800 W. El motor se alimenta de una red de 380 V de línea, y gira a plena carga a 960 r.p.m., calcular utilizando el circuito equivalente aproximado por fase reducido al estátor: a) potencia mecánica útil desarrollada; b) par útil en el eje; c) corriente absorbida de la red y su factor de potencia; d)rendimiento del motor.

[Resp.: a) 48,6 kW; b) 483,8 N.m.; c) 88,7 A; f.d.p.= 0,938; d) 88,8%]

Problema 4.40

Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado de 6 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor despreciable. Los devanados del estátor y del rotor están conectados en estrella y la impedancia del rotor en reposo es $\mathbf{Z}_2= 0,2+j0,8\ \Omega$/fase. Al conectar el estátor a una red trifásica y estar abierto el circuito del rotor, se ha medido entre dos anillos del mismo una tensión de 100 voltios. a) Calcular la corriente de arranque del rotor con los anillos deslizantes cortocircuitados; b) si el motor gira a plena carga a 960 r.p.m., determinar la f.e.m. inducida por fase en el rotor y la frecuencia correspondiente; c) corriente en el rotor y par desarrollado en el caso anterior si están los anillos cortocircuitados; d) si con el par resistente calculado en el caso anterior se ha incluido en el rotor una resistencia en el reóstato de arranque para hacer que el par del motor sea máximo en el arranque, ¿a qué velocidad se moverá el motor?

[Resp.: a) 70A; b) 2,31 voltios; 2 Hz; c) 11,4 A; 18,6 N.m.; d) 840 r.p.m.]

Problema 4.41

Se dispone de un motor asincrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 6 polos, 220/380 V, 50 Hz, del cual se conocen los siguientes parámetros suministrados por el fabricante:

$$\frac{I_{arranque}}{I_{plena\ carga}} = 6,88 \; ; \; \frac{T_{arranque}}{T_{plena\ carga}} = 2,37.$$ *Corriente de línea para par máximo= 62,87 A ; $R_2'= 3\ R_1$*

Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 220 V de línea, 50 Hz. Calcular: a) parámetros del circuito equivalente aproximado del motor, es decir, valores de R_1, R'_2 y $X_{cc}= X_1+X_2'$; b) velocidad de giro a plena carga, potencia mecánica desarrollada por el motor y par correspondiente; c) rendimiento del motor cuando trabaja con par máximo.

[Resp.: a) $R_1 = 0,5\ \Omega$; $R_2' = 1,5\ \Omega$; $X_{cc} = 4\ \Omega$; b) 950 r.p.m.; 4373 W; 44 N.m.; c) 93,44%]

Problema 4.42

Se dispone de un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 220/380 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla que tiene los siguientes valores de los parámetros del circuito equivalente: impedancia por fase del estátor: R_1 = 0,3 Ω; X_1 = 0,8 Ω ; impedancia por fase reducida del rotor: R'_2 = 0,5 Ω; X'_2 = 1 Ω, se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 220 V de línea, 50 Hz. Calcular: a) Conexión del estátor; b) potencia mecánica desarrollada por el motor y rendimiento del mismo cuando la máquina gira con un deslizamiento del 5%; c) par máximo del motor y potencia mecánica desarrollada en estas condiciones; d) el motor tiene acoplado a su eje una caja reductora de velocidad de relación 20/1 y rendimiento unidad (esto significa que la velocidad a la salida de la caja se reduce veinte veces y que el par aumenta en la misma proporción). El eje de salida de la caja de velocidad tiene acoplado un polipasto o torno de un diámetro de 40 cm que mediante un cable de acero levanta una carga de 500 kg. Calcular la velocidad de traslación a la que ascenderá la carga y la corriente que absorberá el motor de la red en estas circunstancias.

[Resp.: a) Conexión triángulo; b) 12,6 kW; 92,23%; c) 326 N.m.; 24,8 kW; d) 1,028 m/s; 13,54 A]

Problema 4.43

Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado o con anillos rozantes de 6 polos, está conectado en estrella a una red de 380 V de línea, 50 Hz. El motor gira a plena carga (sin resistencia adicional en el rotor) a 950 r.p.m., consumiendo en estas condiciones una corriente de 52 A de línea con f.d.p. 0,971. Sabiendo que el cociente T_a/T_n (par de arranque a par de plena carga) es igual a 0,817 que se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente, calcular: a) parámetros R_1, R'_2 y X_{cc}; b) potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga y rendimiento de la máquina en estas condiciones; c) si se cumple la siguiente igualdad entre las relaciones de transformación: $m_v = m_i = m = 2$, calcular la resistencia adicional mínima que es necesario añadir a cada fase del rotor para que pueda arrancar el motor, si este mueve un par resistente constante igual al de plena carga o nominal; d) ¿a qué velocidad final giraría el motor si no se eliminara la resistencia adicional del apartado anterior? NOTA: se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío del motor.

[Resp.: a) R_1 = 0,1 Ω; R'_2 = 0,2 Ω; X_{cc} = 1 Ω ; b) 30,8 kW; 92,8%; c) 0,0138 Ω; d) 936 r.p.m.]

Problema 4.44

Se dispone de un motor asíncrono trifásico de 2 polos, 380/660 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla, que se conecta correctamente a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz. En estas condiciones se observa que la corriente de arranque que absorbe el motor de la red es de 630,42 A con f.d.p. 0,287; se sabe además que el par máximo del motor se consigue cuando gira a una velocidad de 2403 r.p.m. Suponiendo que se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente: a) Calcular parámetros R_1, R'_2 y X_{cc} por fase del motor; b) determinar la velocidad a que girará el motor cuando arrastre un par resistente constante de 80 N.m.; c) calcular en el caso anterior la potencia desarrollada por el motor y su rendimiento; d)¿podría arrancar el motor con el par resistente de 80 N.m. si se aplicara el método de arranque estrella-triángulo ? Justificar la respuesta.

[Resp.: a) R_1 = 0,1 Ω; R'_2 = 0,2 Ω; X_{cc} = 1 Ω ; b) 2964,6 r.p.m.; c) 24,9 kW; 98,24%; d) T_a(triángulo)=253 N.m.; T_a(estrella)= 84,33 N.m. que es mayor de 80 N.m., por lo que el motor arrancará]

Problema 4.45

Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 220/380 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = R'_2$ = 0,2 Ω; $X_1 = X'_2$ = 0,6 Ω; se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y se consideran nulas las pérdidas mecánicas. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz. a) Determinar el par de arranque del motor y calcular la velocidad a la que girará finalmente la máquina si arrastra una carga cuyo par resistente es constante y de valor 150 N.m. b) Calcular, en el caso anterior, la corriente absorbida de la red y su factor de potencia, la potencia mecánica desarrollada por el motor, y también el rendimiento de la máquina. c) Estando el motor trabajando en las condiciones del apartado a), se produce una reducción brusca de tensión en la red de alimentación, comprobándose que, en ese instante, la velocidad del motor cae a 950 r.p.m.: 1) ¿cuál es el valor de la tensión compuesta que llega al motor?, 2) ¿hasta qué valor puede bajar la tensión de la red antes de que se pare el motor?; d) si se dispone de un arrancador electrónico de tal modo que la tensión y la frecuencia que produce es la mitad que la nominal (es decir V_1(línea)= 190 V, f_1= 25 Hz.), ¿cuál será el valor del par de arranque de la máquina?

[Resp.: a) 172,4 N.m.; 976,4 r.p.m.; b) 25,1 A; f.d.p.=0,991; 15,6 kW; 95,4%; c1) 273,7 V; c2) 211V; d) 265 N.m.]

Problema 4.46

Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 380/660 V, 50 Hz, con rotor devanado o con anillos deslizantes tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: R_1 = 0,4 Ω; R'_2 = 0,6 Ω; $X_{cc} = X_1 + X'_2$ = 5 Ω; $m_v = m_i$ = 1. La red de alimentación tiene 380 V de línea y 50 Hz. a) El motor se conecta en triángulo y se arranca en directo (con los anillos en cortocircuito) moviendo un par resistente constante de 90 N.m. Calcular la velocidad a la que girará el motor, la potencia mecánica desarrollada y el rendimiento en estas condiciones. b) Con el par resistente anterior, ¿es posible arrancar el motor si se conecta en estrella? Justificar la respuesta. ¿Qué resistencia mínima es necesario añadir por fase mediante los anillos deslizantes para que pueda arrancar el motor en estrella? Calcular la intensidad que absorberá el motor de la red una vez que se estabilice la velocidad del motor. c) El motor se conecta nuevamente en triángulo y se arranca con los anillos cortocircuitados moviendo una bomba centrífuga (par cuadrático). Cuando se alcanza el régimen permanente, se observa que la máquina desarrolla una potencia mecánica de 27,63 kW, ¿a qué velocidad estará girando el motor?, ¿cuál es la potencia activa que absorbe el motor de la red en estas condiciones? NOTA: se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío del motor.

[Resp.: a) 986,5 r.p.m.; 9,3 kW; 97,8%; b) T_a=31,8 N.m.<90 N.m. (no arranca); 1,41 ohmios; 15,9 A; c) 950 r.p.m.; 30,2 kW]

Problema 4.47

Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 220/380 V, 50 Hz, con rotor en jaula de ardilla, se conecta correctamente a una red trifásica de 220 V de línea, 50 Hz. La corriente de línea a plena carga es de 100 A y se observa que en el arranque la corriente absorbida es 5 veces la de plena carga, desarrollando un par que es 1,2 veces el nominal. La resistencia por fase del estátor es igual a la reducida del rotor (es decir, se cumple que $R_1 = R'_2$) y se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío del motor. Se pide: a) velocidad del rotor a plena carga y valores de los parámetros R_1, R'_2 y $X_{cc} = X_1 + X'_2$ del motor; b) potencia mecánica, par y rendimiento del motor a plena carga; c) al estar el motor en condiciones nominales, se produce, de repente, una caída de tensión en la red de un 15%, ¿cuál será la nueva velocidad que adquirirá el motor y cuánta la corriente absorbida de la red, si el par resistente es constante?; d) si el motor se hace funcionar como generador asíncrono a una velocidad de 1040 r.p.m., determinar la potencia activa suministrada a la red, si V_{red} = 220 V.

[Resp.: a) 952 r.p.m.; $R_1 = R'_2$ = 0,172 Ω; X_{cc} = 0,68 Ω ; b) 34,1 kW; 342,2 N.m.; 90,8%; c) 934 r.p.m.; 113,3 A; d) 34,2 kW]

Problema 4.48

Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 220/380 V, 50 Hz, con rotor devanado o con anillos, se conecta correctamente a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz. La resistencia por fase del estátor es igual a la reducida del rotor (es decir, $R_1 = R'_2$), y también se cumple que la reactancia por fase del estátor es igual a la reducida del rotor (es decir, $X_1 = X'_2$), se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío. Si el motor arranca, partiendo del reposo y con el rotor en cortocircuito (sin resistencia adicional en el rotor) moviendo un par resistente constante de 100 N.m., alcanza una velocidad final de 960 r.p.m. y se comprueba que absorbe de la red una corriente de 16,7 A. Calcular: a) parámetros R_1, R'_2 y $X_{cc} = X_1 + X'_2$ del motor; b) se coloca una resistencia adicional en los anillos en serie con el devanado rotórico, de forma que el motor arranque con par máximo: calcular la velocidad final de giro si mueve un par resistente constante igual a 150 N.m. y no se desconecta la resistencia adicional; c) si, girando el motor estabilizado en la situación del apartado anterior, se cortocircuita el devanado rotórico, eliminando bruscamente la resistencia adicional que se incluía en el arranque, calcular la nueva velocidad a la que girará el motor en régimen permanente con el par indicado de 150 N.m.; d) calcular la potencia eléctrica absorbida por el motor en el caso anterior y el rendimiento del mismo.

[Resp.: a) $R_1 = R'_2 = 0,5\ \Omega$; $X_{cc} = 1,91\ \Omega$; b) 744 r.p.m.; c) 935 r.p.m.; d) 16,7 kW; 87,8%]

Problema 4.49

Se dispone de un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 220/380 V, 50 Hz, con rotor devanado o con anillos. Se consideran despreciables la impedancia del estátor ($R_1 = X_1 = 0$), las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío del motor. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz. Se sabe que, estando los anillos cortocircuitados (es decir, la resistencia del reóstato de arranque en ese momento es cero), la corriente de arranque de línea es de 140 A. El par máximo se obtiene para una velocidad de 700 r.p.m. Calcular: a) conexión del estátor; b) valores R'_2 y X'_2 del circuito equivalente; c) velocidad del motor cuando desarrolla una potencia mecánica en el eje de 15 kW y rendimiento del motor en estas condiciones; d) par de arranque del motor con los anillos deslizantes cortocircuitados y resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que pueda arrancar una carga con un par resistente constante de 300 N.m., se sabe que $m_v = m_i = 1$; e) si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque ¿a qué velocidad girará el motor con el par resistente anterior de 300 N.m?

[Resp.: a) Conexión estrella; b) $R'_2 = 0,45\ \Omega$; $X'_2 = 1,5\ \Omega$; c) 949 r.p.m.; 94,9%; d) 0,11 ohmios; e) 833 r.p.m.]

Problema 4.50

Se dispone de un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 4 polos, 220/380 V, 50 Hz, que se conecta correctamente a una red trifásica de 380 V de línea y 50 Hz. Los parámetros por fase del motor son: $R_1 = R'_2 = 0,2$ ohmios; $X_{cc} = X_1 + X'_2 = 0,5$ ohmios; se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y se considera que a efectos prácticos no existe la rama paralelo del circuito equivalente. a) Cuando el motor mueve un par resistente constante igual al de plena carga, se observa que absorbe una corriente de línea de 52 A estando los anillos deslizantes cortocircuitados. ¿A qué velocidad gira el motor? ¿Qué par mecánico desarrolla en el eje? ¿Cuál es el rendimiento correspondiente?. b) Calcular la velocidad del motor cuando trabaja en las condiciones de par máximo con los anillos deslizantes en cortocircuito, ¿cuánto vale el par máximo del motor? c) ¿Qué resistencia debe añadirse al rotor por fase para limitar la corriente de arranque a 150 A de línea? ¿Cuál es el par de arranque en estas condiciones? (NOTA: se cumple la igualdad en las relaciones de transformación de corrientes y tensiones: $m_v = m_i = 2$). d) Si el motor gira con los anillos deslizantes en cortocircuito y se arrastra el rotor por encima de la velocidad de sincronismo mediante un motor diesel a una velocidad de 1530 r.p.m. ¿qué potencia activa entrega la máquina asíncrona (trabajando como generador) a la red?

[Resp.: a) 1425 r.p.m.; 206,6 N.m.; 90,52%; b) 942,9 r.p.m.; 622,4 N.m.; c) 0,244 ohmios; 504,9 N.m.; d) 14,7 kW]

Problema 4.51

Un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 19 kW, 1455 r.p.m., 4 polos, 220/380 V, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 380 V, 50 Hz. Se consideran despreciables: la impedancia del estátor ($R_1 = X_1 = 0$), las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío. Se sabe que cuando el motor tiene los anillos cortocircuitados (es decir, cuando la resistencia del reóstato de arranque es nula), las pérdidas en el cobre del rotor con par máximo son ocho veces las que tiene con par nominal o de plena carga. Calcular: a) velocidad del motor para par máximo; b) corriente que absorbe el motor de la red cuando trabaja a plena carga, par de plena carga y rendimiento del motor en estas condiciones; c) resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que la corriente de arranque sea como mucho igual a dos veces la nominal, sabiendo que $m_v = m_i = 2$; d) si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque ¿a qué velocidad girará el motor con un par resistente igual al nominal? NOTA aclaratoria: la potencia mecánica nominal o de plena carga del motor según el enunciado es de 19 kW girando entonces a 1455 r.p.m.

[Resp.: a) 1325,7 r.p.m.; b) 30,8 A; 124,7 N.m.; 97%; c) 0,72 ohmios; d) 830,4 r.p.m.]

Problema 4.52

Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado o con anillos rozantes de 4 polos está conectado en estrella a una red de 380 V de línea, 50 Hz. El motor gira a plena carga (sin resistencia adicional en el rotor) a 1425 r.p.m. consumiendo en estas condiciones una corriente de 52 A de línea con f.d.p. 0,972. Si el motor arranca directamente de la red, sin resistencia adicional en el rotor, la corriente absorbida de la red es de 210,14 A. Si se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente, calcular: a) parámetros R_1, R'_2 y X_{cc}; b) potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga y rendimiento de la máquina en estas condiciones; c) la resistencia adicional mínima que es necesario añadir a cada fase del rotor para que la corriente de arranque no supere los 150 A (se cumple la igualdad entre las relaciones de transformación: $m_v = m_i = m = 2$); d) si la resistencia adicional calculada en apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque ¿a qué velocidad final girará el motor si mueve un par resistente igual al de plena carga?, ¿qué corriente absorberá de la red en ese momento?

[Resp.: a) $R_1 = 0,1\ \Omega$; $R'_2 = 0,2\ \Omega$; $X_{cc} = 1\ \Omega$; b) 30,8 kW; 92,7%; c) 0,192 ohmios; d) 1137 r.p.m.; 52 A]

Problema 4.53

Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado o con anillos de 220/380 V, 50 Hz, tiene 4 polos y gira a plena carga a 1440 r.p.m. Se suponen despreciables la rama paralelo del circuito equivalente y las pérdidas mecánicas del motor. Se conecta el motor en estrella y se alimenta con una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz. El devanado del rotor también está conectado en estrella y se han medido las resistencias por fase de los devanados del estátor y del rotor dando los siguientes resultados: $R_1 = 0,02\ \Omega$; $R_2 = 0,005\ \Omega$. Al aplicar al estátor la tensión nominal de 380 V de línea y tener abiertos los anillos del rotor, se midió entre dos de ellos una tensión en vacío de 245 V. Se sabe, además, que estando los anillos cortocircuitados (es decir, la resistencia del reóstato de arranque en ese momento es cero), la corriente de arranque de línea es de 1083 amperios. Calcular: a) corriente absorbida por el motor de la red y potencia mecánica desarrollada cuando trabaja a plena carga (es decir, cuando gira a 1440 r.p.m. y con los anillos cortocircuitados, sin resistencia adicional en el reóstato de arranque); b) par de plena carga correspondiente y rendimiento del motor en estas condiciones; c) resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para obtener el par máximo en el arranque, calculando, además, la corriente de arranque y su f.d.p.; d) si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque ¿a qué velocidad girará el motor con un par resistente igual al de plena carga?, ¿qué corriente absorberá el motor de la red?

[Resp.: a) 582 A; 292,6 kW; b) 1940,4 N.m.; 90,1%; c) 0,0787 ohmios; 736 A; 0,742; d) 483,7 r.p.m.; 586 A; 0,845]

Problema 4.54

Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 380/660 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1=R'_2=0{,}5\ \Omega$; $X_1=X'_2=2{,}5\ \Omega$. *Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente del motor. Al conectar el motor correctamente a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz y arrastrar la máquina un par resistente igual al de plena carga o nominal, la corriente absorbida de la red de 47,25 A. Calcular en estas condiciones: a) velocidad a la que girará el motor y par nominal; b) potencia mecánica desarrollada por el motor y rendimiento del mismo; c) par máximo y velocidad del motor en estas condiciones. d) Si el motor mueve una bomba centrífuga que eleva el agua de un pozo hasta un depósito situado a una altura de 50 m (respecto del nivel del pozo) con un caudal de 30 litros/segundo y se considera que el rendimiento de la bomba es del 60%, calcular la velocidad a la que girará el motor, la corriente absorbida de la red y su f.d.p.*

[Resp. a) 1440 r.p.m.; 177,7 N.m.; b) 26,8kW; 92,3%; c) 249,6 N.m.; 1350,8 r.p.m.; d) 1447,5 r.p.m.; 42,17 A; 0,947]

Problema 4.55

Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 50 Hz tiene una potencia mecánica asignada de 40 kW a la velocidad de 1425 r.p.m. La impedancia del estátor es despreciable y también la pérdida mecánica y en el hierro. Tanto el estátor como el rotor están conectados en estrella siendo la resistencia por fase de este 0,05 ohmios y la capacidad de sobrecarga del motor de 2,5. Calcular la resistencia por fase que es necesario añadir en el reóstato de arranque del rotor en las hipótesis siguientes: a) para obtener el par máximo en el arranque; b) cuando el motor mueve una carga tipo ventilador a una velocidad de 1375 r.p.m. y cuyo par resistente es de la forma: $T_r=6{,}4\cdot 10^{-5}n^2$ *(donde n se mide en r.p.m.); c) cuando el motor realiza un frenado a contracorriente al descender un peso de 100 kg que pende del extremo de un cable arrollado alrededor de una polea de 0,50 m de diámetro con una velocidad de descenso de 1,2 m/s, teniendo en cuenta que entre el motor y la polea existe una caja de engranajes con una desmultiplicación de velocidad de relación 10:1 y se supone que la caja tiene un rendimiento unidad.*

[Resp. a) $R_{a2}=0{,}159\ \Omega$; b) $R_{a2}=0{,}105\ \Omega$; c) $R_{a2}=1{,}39\ \Omega$]

Problema 4.56

Un motor asíncrono trifásico de 6 polos tiene una impedancia del estátor despreciable. La impedancia por fase de rotor en reposo es $\mathbf{Z}_2=1+j4\ \Omega$. *Cuando se conecta en estrella a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz, y girando a una velocidad de 950 r.p.m. desarrolla un par de 30 N.m. Calcular el par del motor cuando funcione a la misma velocidad y esté alimentado con las tensiones desequilibradas siguientes:* $V_{RN}=220\angle 0°$; $V_{SN}=171\angle 230°$; $V_{TN}=171\angle 130°$. *Prescindir de las pérdidas del motor.*

[Resp. a) 21,3 N.m.]

Problema 4.57

Un motor asíncrono monofásico con rotor en jaula de ardilla de 220 V, 50 Hz, 2 polos, tiene una impedancia del devanado principal del estátor $\mathbf{Z}_1=2{,}5+j3\ \Omega$. *y una impedancia reducida del rotor* $\mathbf{Z}'_2=4+j5\ \Omega$. *Las pérdidas en el hierro y mecánicas son despreciables y la reactancia magnetizante es de 100 ohmios. Calcular, para un deslizamiento del 5%: a) potencia eléctrica absorbida de la red y su f.d.p.; b) par desarrollado en el eje; c) rendimiento del motor.*

[Resp. a) 957 W; 0,722; b) 2,54 N.m.; c) 83,4%]

Problema 4.58

Un motor asíncrono monofásico con rotor en jaula de ardilla de 220 V, 50 Hz, tiene una resistencia del devanado principal del estátor de 2 ohmios y al girar en vacío (una vez desconectado el devanado auxiliar) alimentado con la tensión asignada de 220 V, absorbe una corriente de 5 amperios y una potencia de 120 W. Se bloquea más tarde el rotor y al aplicar una tensión de 12 voltios, absorbe una corriente de 1,4 A con una potencia de 12 W. Si la reactancia del estátor se estima en un 4% de la reactancia magnetizante, calcular con las aproximaciones que estime convenientes: a) reactancia magnetizante del motor; b) reactancia del devanado principal del estátor; c) impedancia reducida del rotor.

[Resp. a) 82 Ω; b) 3,3 Ω; c) $R'_2=4{,}4\ \Omega$; $X'_2=2{,}6\ \Omega$]

Problema 4.59

En una industria se dispone de un motor asíncrono trifásico de 1000/1730 V conectado en estrella, de 10 polos, 50 Hz, que tiene una velocidad asignada de régimen de 588 r.p.m. Se ha realizado un ensayo del motor anterior a rotor libre (vacío) dando los siguientes valores: V_1*(línea)=1730 V;* I_0*(línea)=100 A;* P_0*(total)= 40kW. Se sabe, además, que las pérdidas mecánicas son despreciables y que la resistencia medida entre dos terminales del estátor, estando el tercero desconectado, es de 0,16Ω. En un ensayo con el rotor bloqueado se han obtenido los siguientes resultados:* V_{1cc}*(línea)=346 V;* I_{1cc}*(línea)=350 A;* P_{cc}*(total)= 50 kW. Este motor está alimentado por un transformador trifásico Yy0, 17300/1730 V, que tiene una impedancia total por fase reducida al secundario de 0,044+j0,456 Ω, siendo despreciable la corriente de vacío. Se desea saber: a) circuito equivalente aproximado por fase reducido al estátor del motor asíncrono; b) si se aplica al primario del transformador una tensión de 17300 voltios, determinar la potencia mecánica desarrollada por el motor cuando funciona a la velocidad asignada de 588 r.p.m.; c) en el caso anterior, la tensión compuesta en bornes del motor, el f.d.p. con el que trabaja y su rendimiento; d) la potencia activa absorbida por el conjunto transformador-motor y el rendimiento de la instalación.*

NOTA: espréciense las pérdidas en el cobre del estátor en el ensayo de vacío del motor.

[Resp. a) $R_{Fe}=74{,}8\ \Omega$; $X_\mu=10{,}1\ \Omega$; $R_1=0{,}08\ \Omega$; $R'_2=0{,}056\ \Omega$; $X_{cc}=X_1+X'_2$ 0,554 Ω; b) $P_{mi}=788{,}1$ kW; c) $V_{1motor}=1571{,}8$ V; f.d.p.=0,905; η= 91,6%; d) $P_1=876{,}7$ kW; η= 89,9%]

Problema 4.60

Se dispone de un motor asíncrono trifásico de jaula de ardilla conectado en estrella de 2 polos, 50 Hz, que tiene una velocidad de 2940 r.p.m. cuando se alimenta por su tensión compuesta asignada de 3050 voltios. Los ensayos con rotor libre han dado las siguientes medidas: V_1*(línea)= 3050 V;* I_0*(línea)= 20,5 A,* P_0*(total)=30,6 kW; además los ensayos a rotor bloqueado han dado los siguientes valores:* V_{1cc}*(línea)= 1780 V;* I_{1cc}*(línea)=140 A,* P_{cc} *(total)=36 kW. Las pérdidas mecánicas a la velocidad de régimen asignada son de 2,8 kW y la resistencia medida entre dos terminales del estátor, con el tercero abierto, es 0,8Ω. Calcular: a) el circuito equivalente aproximado por fase del motor reducido al estátor; b) el par nominal del motor cuando se alimenta con la tensión asignada de 3050 voltios de línea y el rotor se mueve a la velocidad asignada de 2940 r.p.m.; c) corriente total absorbida por el motor en el caso anterior, su factor de potencia y su rendimiento (téngase en cuenta el consumo de la rama paralelo del circuito equivalente del motor). d) se alimenta este motor por medio de una red de media tensión de 34600 voltios, a través de un transformador Yy0, cuya relación de transformación es igual a 10. El transformador tiene una reactancia de cortocircuito que es cinco veces la resistencia de cortocircuito y ha sido diseñado de tal modo que debe suministrar al motor su tensión asignada de 3050 V en el momento del arranque; calcular el valor de la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al secundario (en definitiva, la impedancia serie de su circuito equivalente) para que se cumplan estas especificaciones. e) Determinar la rama paralelo del circuito equivalente del* *transformador reducida al secundario, si se sabe que su rendimiento es máximo cuando alimenta al motor a su tensión asignada de 3050 voltios y moviéndose a la velocidad asignada de 2940 r.p.m. y que el f.d.p. de la instalación en estas condiciones es de 0,673 inductivo. f) Calcular la tensión necesaria en el primario del transformador en el caso anterior y el rendimiento de la instalación.*

SUGERENCIAS: a) para simplificar el problema, se pueden despreciar las pérdidas en el cobre del estátor y las pérdidas mecánicas en el ensayo de vacío del motor; b) para resolver el apartado d) se puede aplicar la aproximación de Kapp.

[Resp. a) R_{Fe}= 304,1 Ω; X_μ= 89,6 Ω; R_1= 0,4 Ω; R'_2= 0,212 Ω; X_{cc}= $X_1+X'_2$= 7,32 Ω; b) T= 1789 N.m.; c) 149,6A; f.d.p.= 0,781; η= 89,2%; d) R_{cc2}= 0,180 Ω; X_{cc2}= 0,90 Ω; e) R_{Fe2}= 866,5 Ω; X_μ= 72,9 Ω; f) V_1= 3235,8 voltios; η= 85,9 %]

MÁQUINAS SÍNCRONAS 5

Sumario de fórmulas

5.1 F.E.M. DE UN ALTERNADOR

a) F.e.m. media generada por una bobina de N espiras:

$$E_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} edt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} edt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}(-N\frac{d\Phi}{dt})dt \qquad (5.1)$$

E_{med}: f.e.m. media; T: periodo; N: número de espiras; Φ: flujo magnético.

b) F.e.m. eficaz generada por una bobina de N espiras:

$$E = 4\,K_f K_d K_a f N \Phi_m \qquad (5.2)$$

E: f.e.m. eficaz; K_f: factor de forma; K_d: factor de distribución; K_a: factor de acortamiento; N: número de espiras; Φ_m: flujo magnético máximo.

5.2 REGULACIÓN DE TENSIÓN DE UN ALTERNADOR

a) Ecuación de la f.e.m.:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + R\,\mathbf{I} + j\,X_\sigma \mathbf{I} \qquad (5.3)$$

$\mathbf{E}_r$: f.e.m. resultante por fase; **V**: tensión por fase en los bornes del generador; R: resistencia por fase; X_σ: reactancia de dispersión por fase; **I**: corriente del inducido por fase.

b) Ecuación de las f.m.m. del alternador:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i \qquad (5.4)$$

$\mathbf{F}_r$: f.m.m. resultante; $\mathbf{F}_e$: f.m.m. total de excitación; $\mathbf{F}_i$: f.m.m. de reacción del inducido.

c) Regulación de tensión del alternador:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V}100\% \qquad (5.5)$$

E_0: f.e.m. en vacío producida por la f.m.m. total de excitación F_e; V: tensión en los bornes del generador.

transformador reducida al secundario, si se sabe que su rendimiento es máximo cuando alimenta al motor a su tensión asignada de 3050 voltios y moviéndose a la velocidad asignada de 2940 r.p.m. y que el f.d.p. de la instalación en estas condiciones es de 0,673 inductivo. f) Calcular la tensión necesaria en el primario del transformador en el caso anterior y el rendimiento de la instalación.

SUGERENCIAS: a) para simplificar el problema, se pueden despreciar las pérdidas en el cobre del estátor y las pérdidas mecánicas en el ensayo de vacío del motor; b) para resolver el apartado d) se puede aplicar la aproximación de Kapp.

[Resp. a) R_{Fe}= 304,1 Ω; X_μ= 89,6 Ω; R_1= 0,4 Ω; R'_2= 0,212 Ω; X_{cc}= X_1+X'_2= 7,32 Ω; b) T= 1789 N.m.; c) 149,6A; f.d.p.= 0,781; η= 89,2%; d) R_{cc2}= 0,180 Ω; X_{cc2}= 0,90 Ω; e) R_{Fe2}= 866,5 Ω; X_μ= 72,9 Ω; f) V_1= 3235,8 voltios; η= 85,9 %]

MÁQUINAS SÍNCRONAS 5

Sumario de fórmulas

5.1 F.E.M. DE UN ALTERNADOR

a) F.e.m. media generada por una bobina de N espiras:

$$E_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} edt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} edt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} (-N\frac{d\Phi}{dt})dt \qquad (5.1)$$

E_{med}: f.e.m. media; T: periodo; N: número de espiras; Φ: flujo magnético.

b) F.e.m. eficaz generada por una bobina de N espiras:

$$E = 4\, K_f K_d K_a f N \Phi_m \qquad (5.2)$$

E: f.e.m. eficaz; K_f: factor de forma; K_d: factor de distribución; K_a: factor de acortamiento; N: número de espiras; Φ_m: flujo magnético máximo.

5.2 REGULACIÓN DE TENSIÓN DE UN ALTERNADOR

a) Ecuación de la f.e.m.:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + R\,\mathbf{I} + j\,X_\sigma \mathbf{I} \qquad (5.3)$$

$\mathbf{E}_r$: f.e.m. resultante por fase; $\mathbf{V}$: tensión por fase en los bornes del generador; R: resistencia por fase; X_σ: reactancia de dispersión por fase; $\mathbf{I}$: corriente del inducido por fase.

b) Ecuación de las f.m.m. del alternador:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i \qquad (5.4)$$

$\mathbf{F}_r$: f.m.m. resultante; $\mathbf{F}_e$: f.m.m. total de excitación; $\mathbf{F}_i$: f.m.m. de reacción del inducido.

c) Regulación de tensión del alternador:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} 100\% \qquad (5.5)$$

E_0: f.e.m. en vacío producida por la f.m.m. total de excitación F_e; V: tensión en los bornes del generador.

5.3 ANÁLISIS LINEAL DE LA MÁQUINA SÍNCRONA. MÉTODO DE LA IMPEDANCIA SÍNCRONA

a) Ecuación de la f.e.m. resultante:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 - \mathrm{j}\, X_p\, \mathbf{I} \tag{5.6}$$

$\mathbf{E}_r$: f.e.m. resultante por fase; $\mathbf{E}_0$: f.e.m. total por fase; $\mathbf{E}_p$: f.e.m. de reacción de inducido; X_p: reactancia de reacción de inducido; $\mathbf{I}$: corriente del inducido. NOTA: la f.m.m. de reacción de inducido se sustituye por la caída de tensión en la reactancia X_p.

b) Ecuación de la f.e.m. de vacío:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + R\,\mathbf{I} + \mathrm{j}\, X_\sigma \mathbf{I} + \mathrm{j}\, X_p \mathbf{I} \tag{5.7}$$

$\mathbf{E}_0$: f.e.m. en vacío por fase; $\mathbf{V}$: tensión por fase en los bornes del generador; R: resistencia del inducido por fase; X_σ: reactancia de dispersión por fase; X_p: reactancia de reacción de inducido por fase; $\mathbf{I}$: corriente del inducido por fase.

c) Reactancia síncrona. Impedancia síncrona:

$$X_s = X_p + X_\sigma \;;\; \mathbf{Z}_s = R + j\, X_s \tag{5.8}$$

R: resistencia del inducido por fase; X_s: reactancia síncrona por fase; X_σ: reactancia de dispersión por fase; X_p: reactancia de reacción de inducido por fase.

d) Impedancia base:

$$Z_b = \frac{V_n}{I_n} \tag{5.9}$$

V_n: tensión asignada por fase; I_n: corriente asignada por fase.

e) Valores por unidad:

$$R\,(p\cdot u) = \frac{R}{Z_b} \;;\; X_s\,(p\cdot u) = \frac{X_s}{Z_b} \tag{5.10}$$

f) Determinación de la impedancia síncrona saturada:

$$Z_s = \frac{E_0}{I_{corto}} \tag{5.11}$$

Z_s: impedancia síncrona por fase; E_0: f.e.m. por fase del ensayo de vacío; I_{corto}: corriente de cortocircuito por fase. NOTA: se toma $E_0 = V_n$(tensión asignada) en la curva de vacío y se señala la corriente de excitación necesaria. A continuación con esta corriente de excitación se observa la corriente de cortocircuito que origina utilizando la característica de cortocircuito.

g) Determinación de la reactancia síncrona:

$$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R^2} \tag{5.12}$$

Z_s: impedancia síncrona por fase; R: resistencia del inducido por fase; X_s: reactancia síncrona por fase.

5.4 ANÁLISIS NO LINEAL DE LA MÁQUINA SÍNCRONA: MÉTODO DE POTIER

a) Ecuación de la f.e.m.:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + R\,\mathbf{I} + j\, X_\sigma\, \mathbf{I} \tag{5.13}$$

$\mathbf{E}_r$: f.e.m. resultante por fase; $\mathbf{V}$: tensión por fase en los bornes del generador; R: resistencia por fase; X_σ: reactancia de dispersión por fase; $\mathbf{I}$: corriente del inducido.

NOTA: la caída de tensión en la reactancia de dispersión $X_\sigma \mathbf{I}$ se determina construyendo el triángulo de Potier a la tensión de funcionamiento; la base del triángulo se obtiene del ensayo de cortocircuito como f.m.m. necesaria para producir la corriente asignada en cortocircuito, el vértice derecho del triángulo se debe apoyar en la curva reactiva a la tensión de funcionamiento. Al trazar una paralela desde el vértice del triángulo de Potier a la recta de entrehierro se obtiene un punto de corte con la curva de vacío; la distancia desde este punto de corte a la base del triángulo de Potier nos da el valor de la caída de tensión en la reactancia de dispersión del alternador, teniendo en cuenta la saturación de la máquina.

b) Ecuación de las f.m.m. del alternador:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i \tag{5.14}$$

$\mathbf{F}_r$: f.m.m. resultante; $\mathbf{F}_e$: f.m.m. total de excitación; $\mathbf{F}_i$: f.m.m. de reacción del inducido.

NOTA: La f.m.m. de reacción de inducido se determina construyendo el triángulo de Potier a la tensión de funcionamiento; la base del triángulo se obtiene del ensayo de cortocircuito como f.m.m. necesaria para producir la corriente asignada en cortocircuito, el vértice derecho del triángulo se debe apoyar en la curva reactiva a la tensión de funcionamiento. Al trazar una paralela desde el vértice del triángulo de Potier a la recta de entrehierro se obtiene un punto de corte con la curva de vacío; trazando a continuación desde este punto una perpendicular a la base del triángulo de Potier, se obtiene un punto cuya distancia horizontal a la curva reactiva nos da el valor de la f.m.m. de reacción de inducido $\mathbf{F}_i$.

c) Regulación de tensión del alternador:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} 100\% \tag{5.15}$$

E_0: f.e.m. en vacío producida por la f.m.m. total de excitación F_e; V: tensión en los bornes del generador.

5.5. REGULACIÓN DE TENSIÓN EN LAS MÁQUINAS SÍNCRONAS DE POLOS SALIENTES. TEORÍA DE LAS DOS REACCIONES

a) Ecuación de la f.e.m. y de las corrientes:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + R\,\mathbf{I} + \mathrm{j}\, X_\sigma \mathbf{I} + j\, X_{pd} \mathbf{I}_d + j\, X_{pq} \mathbf{I}_q \;;\; \mathbf{I} = \mathbf{I}_d + \mathbf{I}_q \tag{5.16}$$

$\mathbf{E}_0$: f.e.m. de vacío por fase; $\mathbf{V}$: tensión por fase en los bornes del generador; R: resistencia por fase; X_σ: reactancia de dispersión por fase; $\mathbf{I}$: corriente del inducido; $\mathbf{I}_d$: corriente en el eje directo; $\mathbf{I}_q$: corriente en el eje cuadratura; X_{pd}: reactancia de reacción de inducido en el eje directo; X_{pq}: reactancia de reacción de inducido en el eje cuadratura.

b) Reactancias síncronas de eje directo y cuadratura:

$$X_d = X_\sigma + X_{pd} \;;\; X_q = X_\sigma + X_{pq} \tag{5.17}$$

X_d: reactancia síncrona de eje directo; X_q: reactancia síncrona de eje cuadratura.

c) Ecuación de la f.e.m. en función de las reactancias síncronas de eje directo y cuadratura (resistencia del inducido despreciable):

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + j\,X_d\,\mathbf{I}_d + j\,X_q\,\mathbf{I}_q \qquad (5.18)$$

$\mathbf{E}_0$: f.e.m. de vacío por fase; **V**: tensión por fase en los bornes del generador; $\mathbf{I}_d$: corriente en el eje directo; $\mathbf{I}_q$: corriente en el eje cuadratura; X_d: reactancia síncrona en el eje directo; X_q: reactancia síncrona en el eje cuadratura.

d) Ecuación de la f.e.m. para determinar la alineación de la f.e.m. de vacío:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + j\,X_q\,\mathbf{I} + j\,(X_d - X_q)\,\mathbf{I}_d \qquad (5.19)$$

$\mathbf{E}_0$: f.e.m. de vacío por fase; **V**: tensión por fase en los bornes del generador; $\mathbf{I}_d$: corriente en el eje directo; $\mathbf{I}_q$: corriente en el eje cuadratura; X_d: reactancia síncrona en el eje directo; X_q: reactancia síncrona en el eje cuadratura.

5.6 MÁQUINA SÍNCRONA CONECTADA A UNA RED DE POTENCIA INFINITA

a) Ecuación de la f.e.m. para máquinas de polos lisos:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + \mathbf{Z}_s\,\mathbf{I} \qquad (5.20)$$

$\mathbf{E}_0$: f.e.m. de vacío por fase; **V**: tensión por fase en los bornes del generador; **I**: corriente del inducido; $\mathbf{Z}_s = R + j\,X_s$: impedancia síncrona.

b) Potencia activa suministrada por un generador de polos lisos:

$$P = 3VI\cos\varphi = 3\frac{(E_0V\cos\delta - V^2)R + E_0VX_s\operatorname{sen}\delta}{Z_s^2} = 3\left[\frac{E_0V}{Z_s}\operatorname{sen}(\delta+\alpha) - \frac{V^2}{Z_s}\operatorname{sen}\alpha\right] \qquad (5.21)$$

E_0: f.e.m. de vacío por fase; V: tensión por fase en los bornes del generador; I: corriente del inducido; cos φ: f.d.p.; $\mathbf{Z}_s = R + j\,X_s$: impedancia síncrona; $\alpha = \operatorname{arctg}(R/X_s)$; δ: ángulo de carga (ángulo que forman E_0 con V);

NOTA: En el caso en que se desprecie la resistencia del inducido, la ecuación equivalente a (5.21) es la siguiente.

$$P = 3VI\cos\varphi = 3\frac{E_0V}{X_s}\operatorname{sen}\delta \qquad (5.22)$$

c) Potencia reactiva suministrada por un generador de polos lisos:

$$Q = 3VI\operatorname{sen}\varphi = 3\frac{(E_0V\cos\delta - V^2)X_s - E_0VR\operatorname{sen}\delta}{Z_s^2} = 3\left[\frac{E_0V}{Z_s}\cos(\delta+\alpha) - \frac{V^2}{Z_s}\cos\alpha\right] \qquad (5.23)$$

NOTA: en el caso en que se desprecie la resistencia del inducido, la ecuación equivalente a (5.23) es la siguiente:

$$Q = 3VI\operatorname{sen}\varphi = 3\frac{E_0V\cos\delta - V^2}{X_s} \qquad (5.24)$$

c) Ecuación de la f.e.m. para un alternador de polos salientes (resistencia del inducido despreciable):

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + j\,X_d\,\mathbf{I}_d + j\,X_q\,\mathbf{I}_q \qquad (5.25)$$

$\mathbf{E}_0$: f.e.m. de vacío por fase; **V**: tensión por fase en los bornes del generador; $\mathbf{I}_d$: corriente en el eje directo; $\mathbf{I}_q$: corriente en el eje cuadratura; X_d: reactancia síncrona en el eje directo; X_q: reactancia síncrona en el eje cuadratura.

d) Potencia activa suministrada por un generador de polos salientes:

$$P = 3\left[\frac{E_0V}{X_d}\operatorname{sen}\delta + \frac{V^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\operatorname{sen}2\delta\right] \qquad (5.26)$$

E_0: f.e.m. de vacío por fase; V: tensión por fase en los bornes del generador; δ: ángulo de carga (ángulo que forman E_0 con V); X_d: reactancia síncrona en el eje directo; X_q: reactancia síncrona en el eje cuadratura.

e) Potencia reactiva suministrada por un generador de polos salientes:

$$Q = 3\left[\frac{E_0V}{X_d}\operatorname{sen}\delta - V^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\delta}{X_q} + \frac{\cos^2\delta}{X_d}\right)\right] \qquad (5.27)$$

5.7 FUNCIONAMIENTO EN PARALELO DE ALTERNADORES ALIMENTANDO UNA IMPEDANCIA DE CARGA

a) Corrientes suministradas:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\mathbf{Z}_L + \mathbf{E}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_L(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2} \;;\; \mathbf{I}_2 = \frac{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)\mathbf{Z}_L + \mathbf{E}_2\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_L(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2} \qquad (5.28)$$

$\mathbf{E}_1$: f.e.m. de vacío del primer alternador; $\mathbf{E}_2$: f.e.m. de vacío del segundo alternador; $\mathbf{Z}_1$: impedancia síncrona del primer generador; $\mathbf{Z}_2$: impedancia síncrona del segundo generador; $\mathbf{Z}_L$: impedancia de la carga.

b) Tensión en la barra común:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_L(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = \mathbf{Z}_L\frac{\mathbf{E}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{E}_2\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_L(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2} \qquad (5.29)$$

c) Corriente de sincronización:

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{Z}_L\frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_L(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2} \qquad (5.30)$$

5.8 MOTOR SÍNCRONO

a) Velocidad de sincronismo:

$$n = n_s = \frac{60f}{p} \qquad (5.31)$$

b) Ecuación de la f.e.m. para motores de polos lisos:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{Z}_s\,\mathbf{I} \tag{5.32}$$

c) Ecuación de la f.e.m. para un motor de polos salientes:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}_0 + R\,\mathbf{I} + j\,X_d\,\mathbf{I}_d + j\,X_q\,\mathbf{I}_q \tag{5.33}$$

d) Par motor para máquinas de polos lisos:

$$T = \frac{3E_0V}{\omega_s X_s}\operatorname{sen}\delta \tag{5.34}$$

T: par; E_0: f.e.m. de vacío por fase; V: tensión por fase en los bornes del generador; δ: ángulo de carga (ángulo que forma E_0 con V); X_s: reactancia síncrona; ω_s: velocidad angular de sincronismo.

e) Par motor para máquinas de polos salientes:

$$T = 3\left[\frac{E_0V}{\omega_s X_d}\operatorname{sen}\delta + \frac{V^2}{2\omega_s}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\operatorname{sen}2\delta\right] \tag{5.35}$$

T: par; E_0: f.e.m. de vacío por fase; V: tensión por fase en los bornes del generador; δ: ángulo de carga (ángulo que forman E_0 con V); X_d: reactancia síncrona en el eje directo; X_q: reactancia síncrona en el eje cuadratura; ω_s: velocidad angular de sincronismo.

5.9 TRANSITORIO DE CORTOCIRCUITO DE UNA MÁQUINA SÍNCRONA

a) Corriente instantánea de cortocircuito:

$$i_{corto}(t) = (I'' - I')\,e^{-t/T''} + (I - I_{corto})e^{-t/T'} + I_{corto} \tag{5.36}$$

I_{corto}: corriente permanente de cortocircuito; I': corriente transitoria de cortocircuito; I'': corriente subtransitoria de cortocircuito.

b) Componentes de la corriente instantánea de cortocircuito:

$$I_{corto} = \frac{E_o}{X_s}\ ;\ I' = \frac{E_o}{X'_s}\ ;\ I'' = \frac{E_o}{X''_s} \tag{5.37}$$

X_s: reactancia síncrona; X'_s: reactancia síncrona transitoria; X''_s: reactancia síncrona subtransitoria.

Problemas resueltos

Problema 5.1

Un alternador trifásico de 6 polos, 1000 r.p.m. tiene un estátor de 54 ranuras sobre el que se sitúa un devanado de paso diametral que contiene 10 conductores/ranura. Si el flujo por polo es de 0,02 Wb y su forma senoidal, determinar la f.e.m. inducida por fase.

Solución

La f.e.m. inducida por fase en un alternador, que tiene un número de espiras por fase N, un flujo máximo por polo Φ_m, y una frecuencia f, siendo los factores de forma, distribución y acortamiento o de paso, respectivamente: K_f, K_d y K_a, responde a la siguiente expresión:

$$E = 4K_f K_d K_a f N \Phi_m$$

Como quiera que la f.e.m. es senoidal, el factor de forma es $K_f = 1{,}11$. Por otro lado, al tener las bobinas paso diametral, el coeficiente de acortamiento es $K_a = 1$. El coeficiente de distribución viene expresado por:

$$K_d = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{qp\gamma}{2}}{q\operatorname{sen}\dfrac{p\gamma}{2}}$$

donde γ es el ángulo geométrico entre ranuras consecutivas, que en este caso vale:

$$\gamma = \frac{360}{54} = 6{,}6°$$

Como quiera que el alternador tiene seis polos ($p=3$), y es trifásico ($m=3$), el número q de ranuras por polo y fase es:

$$q = \frac{\text{Número de ranuras}}{\text{polo y fase}} = \frac{K}{2pm} = \frac{54}{6\cdot 3} = \frac{54}{18} = 3$$

por lo que el coeficiente de distribución vale:

$$K_d = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{3\cdot 3\cdot 6{,}6°}{2}}{3\operatorname{sen}\dfrac{3\cdot 6{,}6°}{2}} = \frac{0{,}5}{3\cdot 0{,}1736} = 0{,}960$$

y teniendo en cuenta que hay 54 ranuras con 10 conductores por ranura y que cada dos conductores se forma una espira, el número total de espiras por fase es:

$$N = \frac{54\cdot 10}{2\cdot 3} = 90$$

por lo que el valor de la f.e.m. inducida por fase es:

$$E = 4{,}44\cdot 0{,}96\cdot 50\cdot 90\cdot 2\cdot 10^{-2} = 383{,}6 \text{ voltios}$$

Problema 5.2

Un alternador trifásico de 750 r.p.m., 50 Hz, está diseñado para generar una f.e.m. de 3500 V/fase. El devanado del estátor tiene 120 ranuras con 24 conductores/ranura y la anchura de las bobinas es de 12 ranuras. Calcular el flujo máximo por polo si su distribución es senoidal.

Solución

La f.e.m. inducida es:

$$E = 4K_f K_a K_d N f \Phi_m$$

y como quiera que el alternador gira a 750 r.p.m. y que la frecuencia es de 50 Hz, el número de polos se obtiene de la expresión:

$$n = \frac{60f}{p} \Rightarrow p = \frac{60\cdot 50}{750} = 4 \ \Rightarrow\ 2p = 8$$

El número total de ranuras del inducido es $K=120$ y al tener la máquina 8 polos, el paso polar vale:

$$\text{paso polar} = \frac{K}{2p} = \frac{120}{8} = 15$$

por lo tanto, si una bobina tiene una anchura de 12 ranuras, existe un acortamiento de paso de tres ranuras. Además, el ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas es igual a:

$$\gamma = \frac{360°}{K} = \frac{360}{120} = 3°$$

y teniendo en cuenta que las bobinas están acortadas 3 ranuras, el ángulo geométrico de acortamiento es $\alpha = 9°$ y el factor de acortamiento de las bobinas vale, por consiguiente:

$$K_a = \cos\frac{p\alpha}{2} = \cos\frac{4\cdot 9°}{2} = 0{,}951$$

Al mismo tiempo, las bobinas están distribuidas en ranuras a lo largo del inducido, siendo el coeficiente de distribución:

$$K_d = \frac{\operatorname{sen}\frac{qp\gamma}{2}}{q\operatorname{sen}\frac{p\gamma}{2}}$$

en el que el número de ranuras por polo y fase es igual a:

$$q = \frac{K}{2pm} = \frac{120}{8\cdot 3} = 5$$

por lo que el coeficiente de distribución es, finalmente:

$$K_d = \frac{\operatorname{sen}\frac{5\cdot 4\cdot 3}{2}}{5\operatorname{sen}\frac{4\cdot 3}{2}} = \frac{\operatorname{sen}30°}{5\operatorname{sen}6°} = \frac{0{,}5}{5\cdot 0{,}105} \approx 0{,}957$$

y como quiera que el número N de espiras por fase es:

$$N = \frac{120 \text{ ranuras}\cdot 24 \text{ conductores/ranura}}{2 \text{ conductores/espira}\cdot 3 \text{ fases}} = 480$$

llevando los valores anteriores a la expresión de la f.e.m. inducida por fase resulta:

$$E = 4{,}44\cdot 0{,}951\cdot 0{,}957\cdot 480\cdot 50\cdot \Phi_m = 3500 \text{ voltios}$$

de donde se obtiene un flujo máximo por polo:

$$\Phi_m = 0{,}0361 \text{ Wb}$$

Problema 5.3

Un alternador trifásico de 1500 kVA, 6600 V, conectado en estrella, tiene una curva de vacío definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{12210F_e}{4250 + F_e}$$

donde E_0 se expresa en tensión de línea y F_e representa la f.m.m. de excitación en A.v./polo. La resistencia y reactancia de dispersión del inducido por fase son 0,6 Ω y 2,3 Ω respectivamente. La f.m.m. de reacción del inducido a plena carga es de 2500 A.v./polo. Determinar: a) F.e.m. E_r de línea a plena carga y con f.d.p. 0,8 inductivo; b) corriente de excitación necesaria en el inductor cuando la máquina está girando a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo, si se sabe además que la máquina tiene polos salientes devanados con 190 espiras cada uno; c) si en la situación del apartado anterior se desconecta repentinamente la carga ¿cuál será el valor de la tensión de línea que aparecerá en bornes de la máquina?; d) ¿Cuánto vale la regulación de tensión de la máquina?

Solución

a) La f.e.m. E_r inducida por fase se obtiene sumando a la tensión terminal por fase la caída de tensión en la resistencia del devanado y en la reactancia de dispersión del mismo, lo que da lugar a:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + (R + jX_\sigma)\mathbf{I} = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0{,}6 + j2{,}3)131{,}22\angle -36{,}87° = 4059{,}83\angle 2{,}74° \text{ voltios}$$

donde se ha tenido en cuenta que la corriente de línea de plena carga es:

$$I = \frac{1500000}{\sqrt{3}\cdot 6600} = 131{,}22\text{A} \text{ con f.d.p. 0,8 inductivo}$$

La f.e.m de línea es por consiguiente: $E_r(\text{línea}) = \sqrt{3}\cdot 4059{,}23 = 7030{,}8$ V.

b) De la curva de vacío del alternador se obtiene la f.m.m. resultante:

$$E = 7030{,}8 = \frac{12210F_r}{4250 + F_r} \Rightarrow F_r = 5769{,}4 \text{ A.v./polo}$$

La f.m.m. anterior se adelanta 90° a la f.e.m. resultante E_r tal como se muestra en composición fasorial de la Figura 5.1. La expresión fasorial de esta f.m.m. es:

$$\mathbf{F}_r = 5769{,}4\angle(90° + 2{,}74°) = 5769{,}4\angle 92{,}74° \text{ A.v./polo}$$

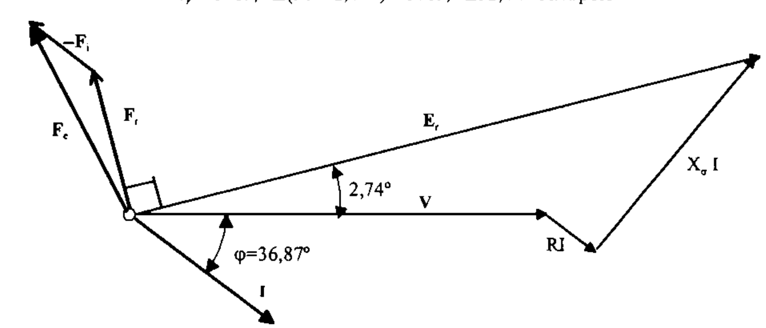


Figura 5.1

y como quiera que la f.m.m. de reacción de inducido es de 2500 A.v./polo y que debe ir en fase con la corriente del inducido, se tiene:

$$\mathbf{F}_i = 2500\angle -36{,}87° \text{ A.v./polo}$$

La f.m.m. de excitación es:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 5769{,}4\angle 92{,}74° - 2500\angle -36{,}87° = 7611\angle 107{,}4° \text{ A.v./polo}$$

y teniendo en cuenta que cada polo tiene 190 espiras, corresponde a una corriente de excitación:

$$I_e = \frac{F_e}{N_e} = \frac{7611}{190} = 40 \text{ A}$$

c) Si con la corriente anterior se desconecta repentinamente la carga, la f.e.m. de línea que se obtendrá en los terminales se deduce de la curva de vacío, lo que da lugar a:

$$E_0 = \frac{12210 \cdot 7611}{4250 + 7611} = 7834{,}95 \approx 7835 \text{ V}$$

d) Y la regulación de tensión del alternador será:

$$\varepsilon = \frac{E_o - V}{V} = \frac{7835 - 6600}{6600} = 18{,}71\%$$

Problema 5.4

Un alternador trifásico de 5000 kVA, 6600 V, conectado en estrella, tiene una curva de vacío definida por la ecuación:

$$E_o = \frac{7400 I_e}{85 + I_e}$$

donde E_0 se expresa en voltios por fase e I_e representa la corriente la corriente de excitación. La resistencia y reactancia de dispersión del inducido por fase son 0,2 Ω y 1 Ω respectivamente. La f.m.m. de reacción del inducido es equivalente a una corriente de excitación de 20 A. Calcular a) rango de excitación necesario para dar la tensión asignada de 6600 V desde vacío a la plena carga con f.d.p. 0,6 inductivo. b) Si las pérdidas en el hierro, por fricción y rozamiento con el aire ascienden a un total de 100 kW y las bobinas de campo están alimentadas con una excitatriz a 200 V, calcular el rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,6.

Solución

a) La tensión entre terminales en vacío es la f.e.m.:

$$E_o = V \text{ (por fase)} = \frac{6600}{\sqrt{3}} = 3810{,}5 \text{ voltios} = \frac{7400 I_e}{85 + I_e}$$

lo que requiere una corriente de excitación $I_e = 90{,}23$ A. En carga la corriente asignada vale:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\, V} = \frac{5000000}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 437{,}39 \text{ A}$$

y por consiguiente para producir la tensión asignada con la corriente de plena carga anterior con f.d.p. 0,6 inductivo, se requiere una f.e.m. resultante:

$$\mathbf{E}_r = \frac{6600}{\sqrt{3}} \angle 0° + (0{,}2 + j1) 437{,}39 \angle -53{,}13° = 4217{,}3 \angle 2{,}62° \text{ voltios}$$

por lo que al llevar a la curva de vacío del alternador, se necesita una corriente:

$$4217{,}3 = \frac{7400 I_r}{85 + I_r} \Rightarrow I_r = 112{,}63 \text{ A}$$

La corriente anterior (realmente la f.m.m. correspondiente) está adelantada 90° respecto de la f.e.m. E_r y por lo tanto su expresión fasorial es:

$$\mathbf{I}_r = 112{,}63 \angle (2{,}62° + 90°) = 112{,}63 \angle 92{,}62° \text{ A}$$

De este modo la corriente total de excitación del inductor será:

$$\mathbf{I}_e = \mathbf{I}_r - \mathbf{I}_i = 112{,}63 \angle 92{,}62° - 20 \angle -53{,}13° = 129{,}64 \angle 97{,}6° \text{ A}$$

es decir, el rango de excitación necesario oscila entre 90,23 A en vacío hasta 129,64 A a plena carga.

b) La potencia útil del alternador es:

$$P_u = S_N \cos\varphi = 5000 \cdot 0{,}6 = 3000 \text{ kW}$$

Las pérdidas fijas (las del hierro más las mecánicas) y de la excitación (cobre de inductor) son respectivamente:

$$P_{Fe} + P_m = 100 \text{ kW} \; ; \; P_{exc} = V I_e = 200 \cdot 129{,}6 = 25{,}92 \text{ kW}$$

y las pérdidas en el cobre del inducido a plena carga con la corriente I calculada anteriormente valen:

$$P_{cu} = 3RI^2 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 437{,}39^2 = 114{,}8 \text{ kW}$$

por consiguiente la potencia total requerida es:

$$P_T = 3000 + 100 + 25{,}92 + 114{,}8 = 3240{,}72 \text{ kW}$$

y por lo tanto el rendimiento vale:

$$\eta = \frac{3000}{3240{,}72} = 92{,}57\% \approx 92{,}6\%$$

Problema 5.5

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1000 kVA, 4600 V, tiene una impedancia síncrona de 2+j20 Ω/fase. Determinar la regulación a plena carga con factores de potencia: a) unidad; b) 0,75 inductivo.

Solución

a) La corriente de plena carga del alternador vale:

$$I = \frac{1000000}{\sqrt{3} \cdot 4600} = 125{,}5 \text{ A}$$

por lo que la f.e.m. necesaria por fase para un f.d.p. unidad es:

$$E_0 = \frac{4600}{\sqrt{3}} \angle 0° + (2 + j20) 125{,}5 \angle 0° = 3840{,}51 \angle 40{,}81° \text{ voltios}$$

que corresponde a un valor de línea E_0 (línea) $= \sqrt{3} \cdot 3840{,}51 = 6651{,}95$ voltios y a una regulación:

$$\varepsilon = \frac{6651{,}95 - 4600}{4600} = 44{,}61\%$$

b) De un modo similar, cuando el f.d.p. es 0,75 inductivo, se tiene:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0,4 + j6)101,01\angle -30° = 4179,12\angle 6,94° \text{ voltios}$$

que corresponde a un valor de línea E_0 (línea) $= 4820,24\sqrt{3} = 8348,9$ voltios, y a una regulación:

$$\varepsilon = \frac{8348,9 - 4600}{4600} = 81,5\%$$

Problema 5.6

Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 6600 V, tiene una impedancia síncrona de 0,4 + j 6 Ω/fase. Calcular la regulación de la máquina cuando suministra una potencia de 1000 kW a la tensión asignada con f.d.p.: a) 0,866 inductivo, b) unidad, c) 0,866 capacitivo.

Solución

a) La corriente de plena carga es igual a:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}V\cos\varphi} = \frac{1000000}{\sqrt{3}\cdot 6600\cdot 0,866} = 101,01 \text{ A}$$

y, tomando la tensión de fase como referencia, se requiere una f.e.m. en vacío cuando el f.d.p. es 0,866 inductivo:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{4600}{\sqrt{3}}\angle 0° + (2 + j20)125,5\angle -41,41° = 4820,24\angle 20,86° \text{ voltios}$$

Teniendo en cuenta que la tensión por fase es:

$$V = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0° = 3810,51\angle 0° \text{ voltios}$$

la regulación correspondiente es:

$$\varepsilon = \frac{4179,62 - 3810,51}{3810,51} = 9,67\%$$

b) Cuando el factor de potencia es la unidad. La corriente vale entonces:

$$I = \frac{1000000}{\sqrt{3}\cdot 6600\cdot 1} = 87,48 \text{ A} \Rightarrow \mathbf{I} = 87,48\angle 0° \text{ A}$$

y la f.e.m. es ahora:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{6600}{\sqrt{3}} + (0,4 + j6)87,48\angle 0° = 3881,17\ \angle 7,8° \text{ voltios}$$

que corresponde a una regulación:

$$\varepsilon = \frac{3881,17 - 3810,51}{3810,51} = 1,85\%$$

c) Cuando el f.d.p. es 0,866 capacitivo, la magnitud de la corriente es la misma que en el caso a), pero su expresión fasorial es ahora:

$$\mathbf{I} = 101,01\angle 30° \text{ A}$$

y la f.e.m. vale:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0,4 + j6)101,01\angle 30° = 3584,16\angle 8,75° \text{ voltios}$$

por lo que la regulación es ahora negativa:

$$\varepsilon = \frac{3584,16 - 3810,51}{3810,51} = -5,94\%$$

Problema 5.7

Un alternador trifásico conectado en estrella de 4000 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y cortocircuito:

I_e (A)	10	20	30	40	60	80	100
E fase (V)	960	1920	2800	3440	4220	4600	4800
I_{sc} (A)	232	464	-	-	-	-	-

La resistencia del inducido es despreciable. Calcular: a) regulación a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; b) corriente de excitación necesaria en el caso anterior. NOTA: tómese como reactancia síncrona la primera aproximación obtenida de los ensayos, es decir la que corresponde a la excitación necesaria para obtener la tensión asignada en vacío.

Solución

a) En la Figura 5.2 se han dibujado tanto la curva de vacío o de f.e.m. del alternador como la recta de cortocircuito. La tensión por fase del alternador es:

$$V = \frac{6600}{\sqrt{3}} = 3810,5 \text{ voltios}$$

que corresponde, en la curva de vacío, a una corriente de excitación de aproximadamente I_e = 50 amperios, y con esta excitación la corriente del inducido en cortocircuito se observa que es de 1120 amperios. De este modo la impedancia síncrona saturada de la máquina síncrona vale:

$$Z_S = X_S = \frac{3810,5}{1120} = 3,40\ \Omega$$

Además la corriente de plena carga es:

$$I = \frac{4000000}{\sqrt{3}\cdot 6600} = 350 \text{ A}$$

y tomando la tensión simple como referencia de fases, los valores fasoriales de la tensión y la corriente son, respectivamente:

$$\mathbf{V} = 3810{,}5\angle 0° \text{ voltios} \; ; \; \mathbf{I} = 350\angle -36{,}87° \text{ amperios}$$

y la f.e.m. en vacío que debe producir el alternador es:

$$\mathbf{E}_0 = 3810{,}5 + j3{,}4 \cdot 350\angle -36{,}87° = 4623{,}6\angle 11{,}9° \text{ voltios}$$

que corresponde a una regulación:

$$\varepsilon = \frac{4623{,}6 - 3810{,}5}{3810{,}5} = 21{,}33\%$$

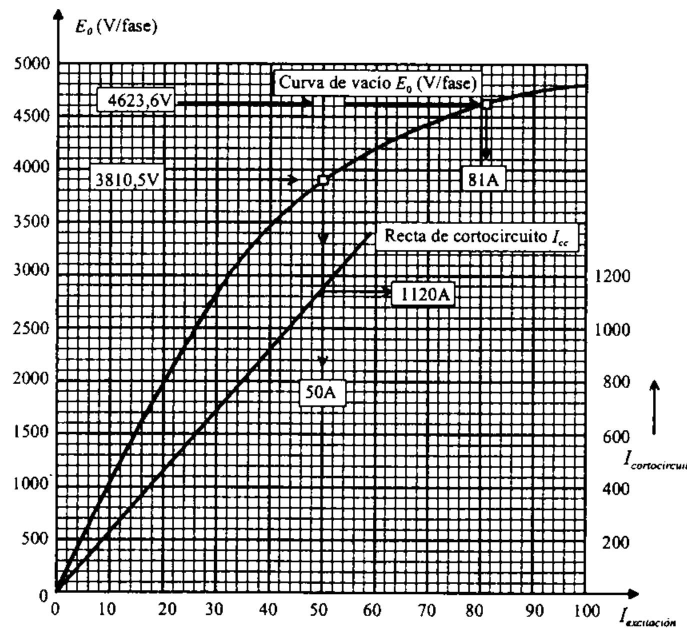


Figura 5.2

b) Para producir la f.e.m. anterior se requiere, de acuerdo con la curva de vacío mostrada en la Figura 5.2, una corriente de excitación de aproximadamente 81 amperios.

Problema 5.8

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1000 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

Excitación (A.v./polo)	*2000*	*3250*	*4025*	*5200*	*6500*
E_0 línea [illegible]	*4300*	*6600*	*7250*	*7920*	*8580*

Por el método de Potier se ha determinado el valor de la reactancia de dispersión y la f.m.m. de reacción de inducido a plena carga, resultando los valores: $X_\sigma = 3{,}1\ \Omega$; $F_i = 2000$ A.v./polo. Calcular: a) f.m.m. de excitación necesaria a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivos; b) regulación de tensión.

Solución

a) La corriente de inducido de plena carga es:

$$I = \frac{1000000}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 87{,}5 \text{ A}$$

y tomando la tensión simple como referencia, los valores fasoriales de la tensión y de la corriente son:

$$\mathbf{V} = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0° = 3810{,}5\angle 0° \text{ amperios} \; ; \; \mathbf{I} = 87{,}5\angle -36{,}87° \text{ amperios}$$

Teniendo en cuenta el valor de la reactancia de dispersión obtenida por el método de Potier, la f.e.m. resultante es:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + jX_\sigma \mathbf{I} = 3810{,}5 + j3{,}1 \cdot 87{,}5\angle -36{,}87° = 3979{,}2\angle 3{,}1° \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea E_r (línea) $= 3979{,}2\sqrt{3} \approx 6892$ voltios, y con este valor de f.e.m., la curva de vacío del alternador que se ha representado en la Figura 5.3 nos señala una f.m.m. resultante:

$$F_r = 3600 \text{ A.v./polo}$$

La f.m.m. anterior va adelantada 90° respecto a la f.e.m. E_r, por lo que su expresión fasorial es:

$$\mathbf{F}_r = 3600\angle(3{,}1° + 90°) = 3600\angle 93{,}1° \text{ A.v./polo}$$

y teniendo en cuenta que la f.m.m. de reacción de inducido es de 2000 A.v./polo y va en fase con la corriente del inducido, la f.m.m. de excitación será:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 3600\angle 93{,}1° - 2000\angle -36{,}87° = 5120\angle 110{,}52° \text{ A.v/polo}$$

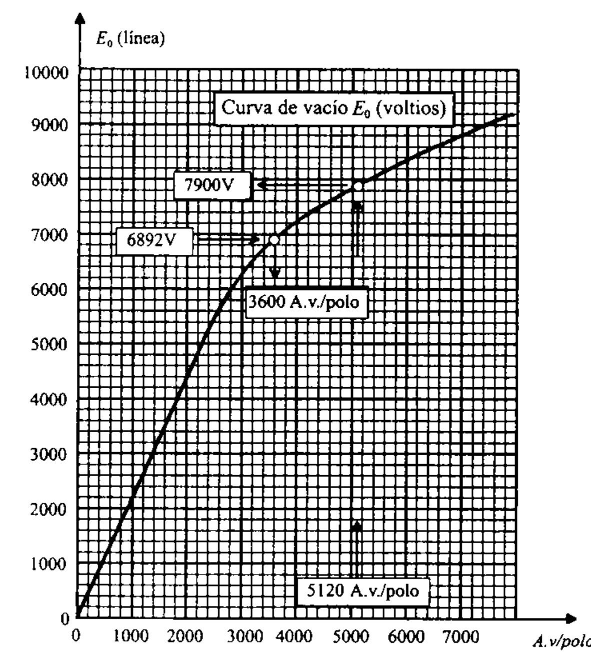


Figura 5.3

b) La f.m.m. anterior produce, de acuerdo con la curva de vacío del alternador, una f.e.m. de línea de 7900 voltios, por lo que la regulación de tensión es:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} = \frac{7900 - 6600}{6600} = 19,7\%$$

Problema 5.9

Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultando en un ensayo de vacío:

E_0 (V) línea	*1848*	*3696*	*5511*	*6600*	*7128*	*7590*	*7986*
F (A.v/polo)	*1000*	*2000*	*3500*	*5000*	*6000*	*7000*	*8000*

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga para una excitación de 2500 A.v./polo. En un ensayo con carga reactiva se necesitan 8250 A.v./polo para que circule la corriente asignada a la tensión de régimen de 6600 V. Calcular: a) f.m.m. de excitación necesaria en los polos cuando el generador suministra la plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; b) f.e.m. correspondiente en vacío; c) regulación de tensión del alternador en este régimen.

Solución

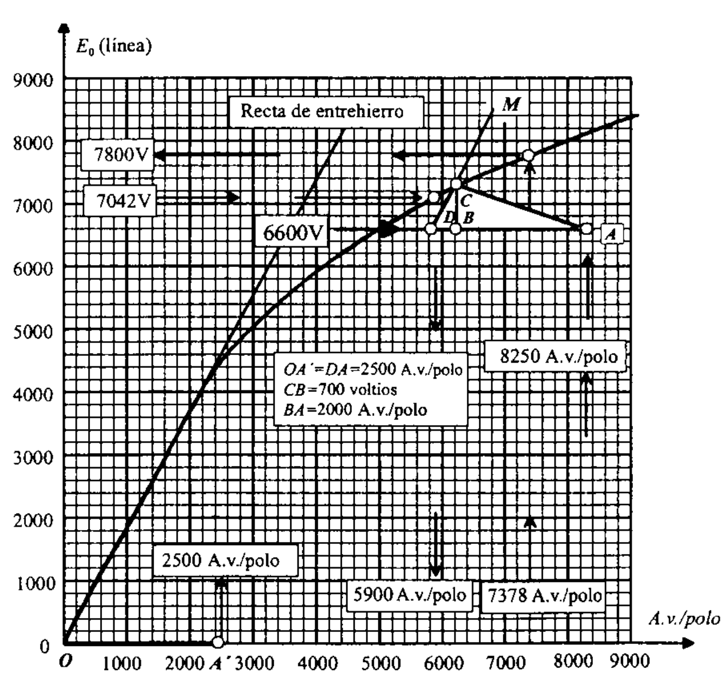


Figura 5.4

a) En la Figura 5.4 se ha representado la curva de vacío, de acuerdo con la tabla numérica del enunciado. En este gráfico, el punto A' (situado abajo en el eje de abscisas) corresponde a una f.m.m. de 2500 A.v./polo, que es el valor de la f.m.m. necesaria para que circule la corriente de plena carga en cortocircuito. El punto A del triángulo de Potier, que se muestra en la parte superior, se obtiene del ensayo con carga inductiva pura, para la corriente de plena carga y con la tensión nominal asignada) en los terminales del alternador y que según el enunciado vale 8250 A.v./polo. Partiendo de este punto A, se toma la distancia $AD = A'O$, lo que define el punto D. A continuación por este punto se traza una paralela a la recta de entrehierro que da lugar a DM. Esta recta corta a la curva de vacío en el punto C. La distancia CB, expresada en valor simple o de fase representa la caída de tensión en la reactancia de Potier (reactancia de dispersión), mientras que el segmento BA nos da la f.m.m. F_i de reacción de inducido. Los valores medidos en esta Figura son, aproximadamente:

$$|CB| = 700 \text{ voltios de línea} \Rightarrow X_\sigma I = \frac{700}{\sqrt{3}} = 404 \text{ voltios de fase} \;;\; |BA| = F_i = 2000 \text{ A.v./polo}$$

Tomando, a continuación, la tensión simple del alternador como referencia y teniendo en cuenta que la corriente de plena carga vale:

$$I = \frac{1500000}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 131,2 \text{ A}$$

se tiene:

$$\mathbf{V} = \frac{6600}{\sqrt{3}} = 3810,5\angle 0° \text{ voltios/fase} \;;\; \mathbf{I} = 131,2\angle -36,87° \text{ amperios}$$

y por consiguiente la f.e.m. resultante es:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + jX_\sigma\mathbf{I} = 3810,5\angle 0° + 404\angle 53,13° \approx 4066\angle 4,6° \text{ voltios}$$

que corresponde a un valor de línea E_r (línea) $= 4066\sqrt{3} = 7042$ voltios y, llevando a la curva de vacío, se observa que para producir esta f.e.m. se requiere una f.m.m. de F_r= 5900 A.v./polo cuya fase se adelanta 90° a la f.e.m., por lo que su expresión fasorial es:

$$\mathbf{F}_r = 5900\angle +94,6° \text{ A.v./polo}$$

Como la f.m.m. de reacción de inducido va en fase con la corriente, su valor es:

$$\mathbf{F}_i = 2000\angle -36,87° \text{ A.v./polo}$$

y, por consiguiente, la f.m.m. total de excitación es:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 5900\angle 94,6° - 2000\angle -36,87° = 7378\angle 106,3° \text{ A.v./polo}$$

b) Con el valor de la f.m.m. de 7378 A.v./polo, la curva de vacío señala una f.e.m. compuesta de valor: $E_0 \approx 7800$ voltios.

c) En consecuencia, la regulación de tensión del alternador será:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} = \frac{7800 - 6600}{6600} \approx 18,2\%$$

Problema 5.10

Un alternador trifásico de 1000 kVA, 11000 V, conectado en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable. Los ensayos de vacío y con carga reactiva pura a la intensidad asignada han dado los siguientes resultados:

I_e (A)	*20*	*25*	*55*	*70*	*90*
E_0 (V) (línea)	*5800*	*7000*	*12500*	*13750*	*15000*
V (f.d.p. = 0)	*0*	*1400*	*8500*	*10500*	*12400*

Determinar por el método de Potier: a) caída de tensión en la reactancia de dispersión a plena carga; b) f.m.m. de reacción de inducido con corriente asignada; c) f.e.m resultante E_r cuando la máquina funciona *a plena carga con la tensión asignada de 11000 V y f.d.p. 0,8 inductivo; d) f.m.m. necesaria en la excitación en el caso anterior; e) f.e.m. E_0 que producirá en vacío la excitación anterior; f) regulación de tensión de la máquina en las condiciones anteriores.*

Solución

a) En la Figura 5.5 se muestran las construcciones de la curva de vacío del alternador y la del f.d.p. nulo, o ensayo con carga reactiva pura. De esta figura se deducen las siguientes magnitudes:

$$X_\sigma I = \frac{2200}{\sqrt{3}} = 1270 \text{ voltios/fase} \; ; \; F_i = 11 \text{ amperios}$$

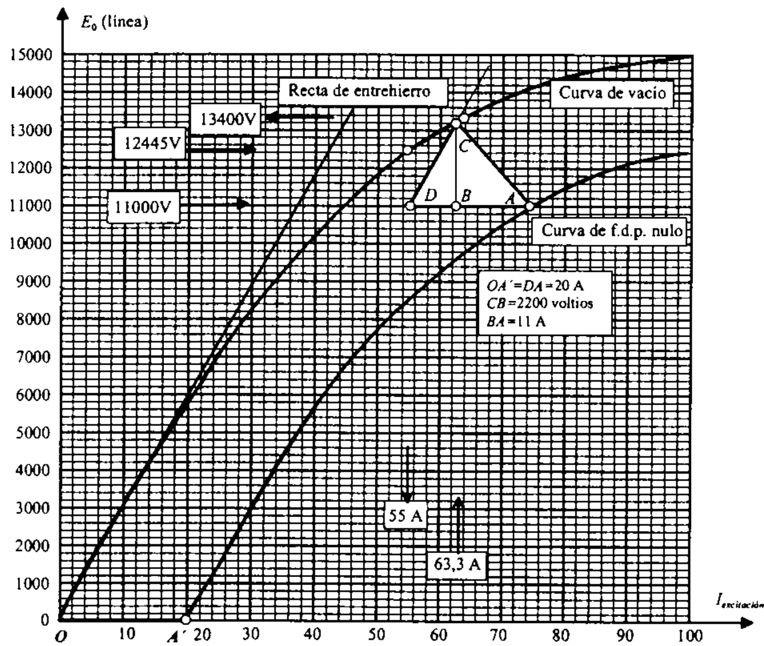


Figura 5.5

b) Tomando la tensión simple del alternador como referencia de fase, se tienen las magnitudes fasoriales siguientes:

$$\mathbf{V} = \frac{11000}{\sqrt{3}} \angle 0° = 6350,8 \angle 0° \text{ voltios} \; ; \; \mathbf{F}_i = 11 \angle -36,87° \text{ amperios} \; ; \; \mathbf{I} = I \angle -36,87°$$

y la f.e.m. resultante es:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + jX_\sigma \mathbf{I} = 6350,8\angle 0° + j1270\angle -36,87° = 7185\angle 8,1° \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea: E_r (línea) $= 7185\sqrt{3} = 12445$ V.

c) Para la f.e.m. anterior se obtiene, en la curva de vacío, una f.m.m. resultante de 55 amperios, y su valor fasorial correspondiente que está adelantado 90° respecto a la f.e.m. resultante vale:

$$\mathbf{F}_r = 55\angle 98,1° \text{ amperios}$$

d) Es por ello que la f.m.m. de excitación, medida en amperios vale:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 55\angle 98,1° - 11\angle -36,87° = 63,3\angle 105,2° \text{ amperios}$$

es decir, la corriente total de excitación debe ser de 63,3 amperios.

e) La f.m.m. anterior da lugar, en la curva de vacío del alternador, a una f.e.m. de vacío:

$$E_0 = 13400 \text{ voltios}$$

f) Y la regulación será por tanto:

$$\varepsilon = \frac{13400 - 11000}{11000} = 21,8\%$$

Problema 5.11

Un alternador trifásico de 5000 kVA, 6600 V, conectado en estrella, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y f.d.p. nulo con corriente de plena carga:

F_e (A.v/polo)	3200	5000	7500	10000	14000
E_0 (V) (Línea)	3100	4900	6600	7500	8300
V (f.d.p.=0) [illegible]	0	1850	4250	5800	7000

La resistencia del inducido es despreciable. Determinar por el método de Potier: a) caída de tensión a plena carga en la reactancia de dispersión del inducido; b) f.m.m. de reacción de inducido con corriente asignada; c) repetir los apartados anteriores para una corriente de carga de 500 A. d) Determinar las f.m.m.s. de excitación necesarias en el inductor cuando la máquina suministra una corriente de 500 A a la tensión asignada, con factores de potencia: unidad, 0,9 capacitivo, 0,71 inductivo. e) Calcular en las condiciones del apartado anterior las f.e.m.s. producidas en vacío.

Solución

a) y b) En la Figura 5.6 se muestran las curvas de vacío y de f.d.p. nulo del mismo. Al construir el triángulo de Potier se obtienen los siguientes resultados:

$$X_\sigma I = \frac{900}{\sqrt{3}} = 519,6 \text{ voltios} \; ; \; F_i = 2200 \text{ A.v./polo}$$

c) La corriente asignada de plena carga del alternador es:

$$I = \frac{5000000}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 437,4 \text{ amperios}$$

y como quiera que las caídas de tensión en la reactancia de Potier y la f.m.m. de reacción de inducido son proporcionales a la corriente, con una intensidad de 500 amperios, se tendrán los siguientes resultados:

$$X_\sigma I' = 519,6\frac{500}{437,4} \text{ voltios} \; ; \; F_i' = F_i\frac{500}{437,4} = 2200\frac{500}{437,4} = 2515 \text{ A.v./polo}$$

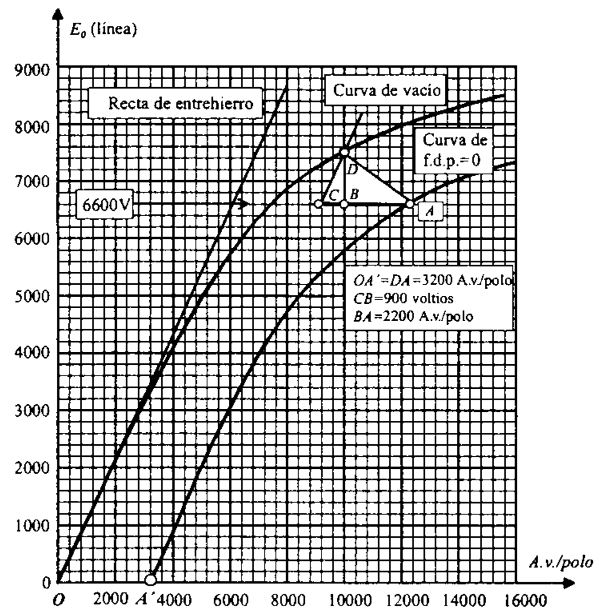


Figura 5.6

d1) Tomando la tensión simple de la red como referencia de fases, se tienen los siguientes valores fasoriales de tensión y corriente:

$$\mathbf{V} = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0° = 3810,5\angle 0° \text{ voltios} \;;\; \mathbf{I}' = 500\angle 0° \text{ amperios}$$

y la f.e.m. resultante es:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + jX_\sigma\mathbf{I}' = 3810,5\angle 0° + j594\angle 0° = 3856,5\angle 8,9° \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea: E_r (línea) $= 3856,5\sqrt{3} = 6680$ V. Al llevar este valor a la curva de vacío se obtiene un valor de la f.m.m. de 7700 A.v./polo, que está adelantada 90° respecto de la f.e.m. por lo que su valor fasorial es:

$$\mathbf{F}_r = 7700\angle 98,9° \text{ A.v./polo}$$

de este modo, la f.m.m. de excitación es, finalmente:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{'} = 7700\angle +98,9° - 2515\angle 0° = 8462\angle 116° \text{ A.v./polo}$$

d2) En el caso de que el f.d.p. sea 0,9 capacitivo, la corriente de inducido y la f.m.m. de reacción de inducido tienen las formas fasoriales siguientes:

$$\mathbf{I}' = 500\angle 25,84° \text{ amperios} \Rightarrow \mathbf{F}_i^{'} = 2515\angle 25,84° \text{ A.v./polo}$$

y al tomar la tensión simple de la red como referencia, se tiene una f.e.m. resultante:

$$\mathbf{E}_r = 3810,5\angle 0° + j594\angle 25,84° = 3591,6\angle 8,6° \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea E_r(línea) $= 3591,6\sqrt{3} = 6220,8$ voltios y, al llevar este valor a la curva de vacío, la f.m.m. necesaria es $F_r = 6800$ A.v./polo, que en forma fasorial es:

$$\mathbf{F}_r = 6800\angle 98,6° \text{ A.v./polo}$$

y a una f.m.m. de excitación:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{'} = 6800\angle 98,6 - 2515\angle 25,84° = 6514\angle 120,2 \text{ A.v./polo}$$

es decir, se requiere una f.m.m. de 6514 A.v./polo.

d3) Cuando el f.d.p. es 0,71 inductivo se tiene de una forma similar:

$$\mathbf{I}' = 500\angle -44,77° \text{ amperios} \;;\; \mathbf{F}_i^{'} = 2515\angle -44,77° \text{ A.v./polo}$$

y la f.e.m. resultante es:

$$\mathbf{E}_r = 3810,5\angle 0° + j594\angle -44,77° = 4249,8\angle 5,7° \text{ voltios}$$

que es una f.e.m. de línea E_r(línea) $= 4249,6\sqrt{3} = 7360,8$ voltios y la f.m.m. necesaria resultante, de acuerdo con la curva de vacío de 9600 A.v./polo, vale en forma fasorial:

$$\mathbf{F}_i^{'} = 2515\angle 25,84° \text{ A.v./polo}$$

siendo la f.m.m. de excitación

$$\mathbf{E}_r = 3810,5\angle 0° + j594\angle 25,84° = 3591,6\angle 8,6° \text{ voltios}$$

e) Las f.e.m. que se generan en vacío en los casos anteriores se obtienen directamente de las curvas de vacío, entrando con las f.m.m. de excitación. Así resulta:

1) Para $\cos\varphi = 1$, resulta una f.m.m. de 8462 A.v./polo que da lugar a una f.e.m. en vacío de 7000 voltios de línea.

2) Para $\cos\varphi = 0,9$ capacitivo, resulta una f.m.m. de 6514 A.v./polo que da lugar a una f.e.m. en vacío de 6000 voltios de línea.

3) Para $\cos\varphi = 0,7$ inductivo, resulta una f.m.m. de 11650 A.v./polo que da lugar a una f.e.m. en vacío de 7900 voltios de línea.

Problema 5.12

Un alternador trifásico conectado en estrella de 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

I_e (A)	*10*	*15*	*21*	*31*	*39*	*50*	*65*
E_0 (línea)	*3000*	*4200*	*5400*	*6600*	*7200*	*7700*	*8100*

En cortocircuito se necesita una excitación de 24 A para que circule la corriente de plena carga. En un ensayo con carga reactiva se obtienen 6100 V con una corriente de 125% de la asignada, para una excitación de 66 A. La resistencia del inducido es despreciable. Calcular: a) Caída de tensión a plena carga en la reactancia de dispersión del inducido; b) f.m.m. del inducido con corriente asignada de plena carga; c) f.m.m. necesaria en la excitación cuando el generador suministra la plena carga con f.d.p. unidad y 0,8 inductivo; d) f.e.m. producidas en vacío en las condiciones del apartado anterior; e) regulaciones de tensión correspondientes.

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, se necesitan 24 amperios en la excitación para que circule la corriente nominal asignada en cortocircuito. Por consiguiente, cuando la corriente de cortocircuito sea 1,25 veces la asignada, la intensidad correspondiente necesaria en la excitación debe ser de $1{,}25 \cdot 24 = 30$ amperios. En la Figura 5.7 se muestra la curva de vacío de acuerdo con la tabla presentada en el enunciado y en la que se ha dibujado el triángulo de Potier en base a los datos del problema. Si se introduce en este gráfico la corriente de excitación $I_e = 30$ A, se obtiene el punto A' del eje de abscisas. Tomando $V = 6100$ voltios e $I_e = 66$ A se obtiene el punto A. Llevando la distancia $AD = A'O = 30$ se obtiene el punto D. Por este punto se traza una paralela a la recta de entrehierro que corta a la curva de vacío en el punto C. El segmento CB da la caída de tensión en la reactancia de dispersión cuando la corriente que circula por el inducido es 1,25 veces la nominal (asignada). La medida CB corresponde a 120 voltios de tensión compuesta. Por consiguiente resulta:

$$X_\sigma I_{nom} = \frac{1200}{\sqrt{3}} \frac{1}{1{,}25} = 554 \text{ V/fase}$$

Debe recordarse la propiedad de mantenerse constante el triángulo de Potier del diagrama. Por eso se puede construir con V=6100 voltios y no es necesario en la característica reactiva hacerlo con $V_{nominal}$= 6600 voltios.

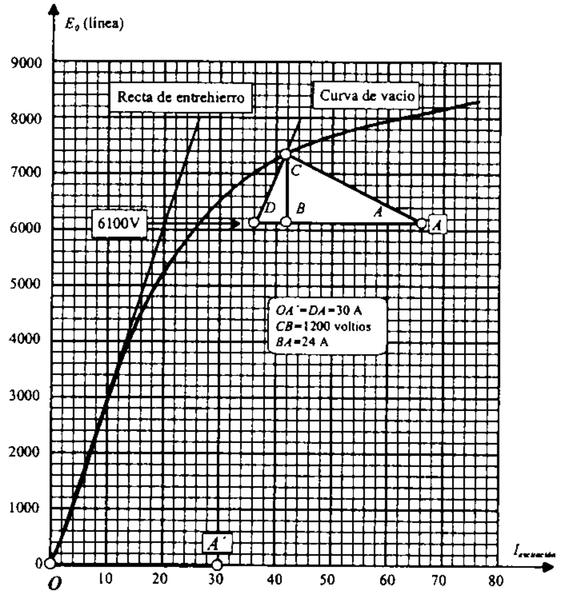


Figura 5.7

b) La distancia AB nos proporciona la f.m.m de reacción del inducido con una intensidad 1,25 veces la nominal. Su valor es de 24 amperios y, por consiguiente, la f.m.m. de reacción de inducido con corriente nominal es:

$$\frac{24}{1{,}25} = 19{,}2 \approx 19 \text{ A}$$

c1) Para $\cos\varphi = 1$, al tomar la tensión en bornes del alternador como referencia, se tienen las expresiones fasoriales siguientes:

$$\mathbf{V} = \frac{6600}{\sqrt{3}} \angle 0° = 3810{,}5\angle 0° \text{ voltios} \;;\; \mathbf{I} = I_{nom}\angle 0° \text{ amperios} \;;\; \mathbf{F}_i = 19\angle 0° \text{ amperios}$$

y teniendo en cuenta el valor de la caída de tensión en la reactancia de dispersión de 554 voltios, obtenido en el apartado anterior mediante el triángulo de Potier, la f.e.m. por fase resultante del alternador es:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + jX_\sigma \mathbf{I} = 3810{,}5\angle 0° + j554\angle 0° = 3850{,}6\angle 8{,}3° \text{ voltios}$$

que corresponde a una valor de línea E_r (línea) $= \sqrt{3} \cdot 3850{,}6 = 6669{,}4$ voltios. Si con esta f.e.m. se va a la curva de vacío de la Figura 5.7, la f.m.m. resultante (medida en amperios de excitación) es de 32 amperios. Esta f.m.m. va adelantada 90° respecto a la f.e.m. anterior, por lo que su expresión fasorial es:

$$\mathbf{F}_r = 32\angle 98{,}3° \text{ amperios}$$

y, de este modo, la f.m.m. de excitación es:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 32\angle 98{,}3° - 19\angle 0° = 39{,}5\angle 127° \text{ amperios}$$

c2) Cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo, de un modo similar al anterior, resulta:

Expresiones fasoriales de tensión y corriente:

$$\mathbf{V} = 3810{,}5\angle 0° \text{ voltios} \;;\; \mathbf{I} = I_{nom}\angle -36{,}8° \text{ amperios} \;;\; \mathbf{F}_i = 19\angle -36{,}87° \text{ amperios}$$

y el valor de la f.e.m. resultante por fase vale:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + jX_\sigma \mathbf{I} = 3810{,}5\angle 0° + j554\angle -36{,}87° = 4166{,}54\angle 6{,}1° \text{ voltios}$$

que corresponde a una valor de línea E_r (línea) $= \sqrt{3}.4166{,}54 = 7216{,}6$ voltios. Si con esta f.e.m. se va a la curva de vacío de la Figura 5.6, la f.m.m. resultante (medida en amperios de excitación) es de 38 amperios. Esta f.m.m. va adelantada 90° respecto a la f.e.m. anterior, por lo que su expresión fasorial es:

$$\mathbf{F}_r = 38\angle 96{,}1° \text{ amperios}$$

y de este modo la f.m.m. de excitación es:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 38\angle 96{,}1° - 19\angle -36{,}87° = 52{,}8\angle 111{,}4° \text{ amperios}$$

d) Llevando las corrientes de excitación calculadas en el apartado anterior a la curva de vacío, se obtienen las siguientes f.e.m. de vacío de línea siguientes: 7300 voltios cuando el f.d.p. es la unidad, y 7800 voltios cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo.

e) De este modo las regulaciones de tensión respectivas son:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} = \frac{7300 - 6600}{6600} = 10\% \;;\; \varepsilon = \frac{7800 - 6600}{6600} = 18{,}2\%$$

Problema 5.13

Un alternador trifásico conectado en estrella de 5000 kVA, 6600 V, tiene una resistencia del inducido despreciable. El ensayo de vacío a la velocidad de sincronismo ha dado los siguientes resultados:

I_e (A)	24	35	50	71	90	120	140
E_0 (Línea)	3000	4200	5400	6600	7300	8000	8300

En cortocircuito es necesaria una corriente de excitación de 37 A para que circule una corriente de 300 A en el inducido. En un ensayo con carga reactiva y corriente asignada, se obtiene una tensión de 6000 V para una excitación de 130 A. Cuando la máquina suministra los 3/4 de la plena carga a la tensión asignada con f.d.p. 0,8 inductivo, se pide: a) caída de tensión en la reactancia de dispersión. b) f.m.m. de reacción de inducido; c) excitación necesaria en el inductor; d) f.e.m. que producirá la excitación anterior al dejar la máquina en circuito abierto; e) regulación de tensión correspondiente.

Solución

a) En la Figura 5.8 se muestra la curva de vacío correspondiente. La corriente nominal es:

$$I = \frac{5000000}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 437,4 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta que en el ensayo de cortocircuito se sabe que es necesaria una corriente de excitación de 37 amperios para que circule una corriente de inducido de 300 amperios, al ser la característica de cortocircuito lineal, para una corriente de cortocircuito igual a la nominal, será necesaria una corriente de excitación:

$$I'_{exc} = 37\frac{437,4}{300} = 54 \text{ A}$$

Por otro lado la característica reactiva indica que para una tensión de 6000 voltios y corriente nominal, se tiene una corriente de excitación de 130 amperios, lo que da lugar al punto A del triángulo de Potier señalado en la Figura 5.7. Tomando $AD=A'O$ se fija el punto D. Trazando ahora desde este punto una paralela a la recta de entrehierro se obtiene el punto C y en su vertical el punto B. Midiendo la distancia CB se obtiene la caída de tensión en la reactancia de dispersión con *corriente nominal* y que vale:

$$|CB| = X_\sigma I(\text{valor compuesto}) = 1100 \text{ voltios} \Rightarrow X_\sigma I = \frac{1100}{\sqrt{3}} = 635 \text{ voltios}$$

El segmento BA señala la reacción de inducido correspondiente, que midiendo vale 45 amperios, es decir: f.m.m. de reacción de inducido con corriente nominal: $F_i = 45$ A.

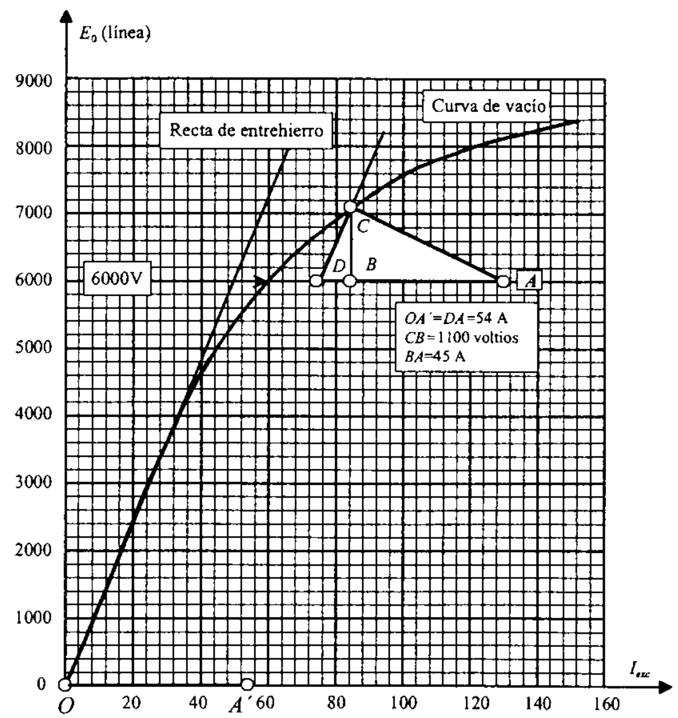


Figura 5.8

a) y b) Por lo tanto, los valores correspondientes, cuando la corriente de inducido es ¾ de la corriente nominal, serán respectivamente:

$$X_\sigma I = \frac{3}{4}635 = 476 \text{ voltios} \; ; \; F_i = \frac{3}{4}45 = 33,75 \text{ amperios}$$

c) La intensidad del inducido ¾ veces la nominal vale:

$$I = \frac{3}{4}437,4 = 328 \text{ A}$$

y tomando la tensión simple del alternador como referencia de fases, resulta:

$$\mathbf{V} = \frac{6600}{\sqrt{3}} = 3810,5\angle 0° \text{ voltios} \; ; \; \mathbf{I} = 328\angle -36,87° \text{ amperios}$$

y, además, se tiene de acuerdo con los apartados anteriores:

$$\mathbf{F}_i = 33,75\angle -36,87° \text{ amperios} \; ; \; X_\sigma I = 476 \text{ voltios}$$

por lo que la f.e.m. resultante es:

$$\mathbf{E}_r = 3810,5\angle 0° + j476\angle -36,87° = 4113,76\angle 5,3° \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea E_r (línea) $= \sqrt{3} \cdot 4113,76 = 7125,25$ voltios. Llevando este valor a la curva de vacío, le corresponde una f.m.m. resultante de 84 amperios, que al estar adelantada 90° respecto a la f.e.m., tiene la expresión fasorial siguiente:

$$\mathbf{F}_r = 84\angle +95,3° \text{ amperios}$$

La f.m.m. de excitación será:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 84\angle 95,3° - 33,75\angle -36,87° = 108,5\angle 108,5° \text{ amperios}$$

d) Al llevar la f.m.m. anterior a la curva de vacío se obtiene una f.e.m. de E_0= 7800 voltios.

e) En consecuencia, la regulación de tensión del alternador es:

$$\varepsilon = \frac{7800 - 6600}{6600} = 18,2\%$$

Problema 5.14

Un alternador trifásico tiene una impedancia síncrona de 0 + j 5 Ω y está conectado a una red de potencia infinita de 6600 V. La excitación es tal que la f.e.m. inducida en vacío es de 6000 V. Determinar la potencia activa máxima que en estas condiciones podrá suministrar la máquina, sin que exista pérdida de estabilidad. Hallar también la corriente de inducido y el f.d.p. para dicha carga.

Solución

Los valores de la tensión y f.e.m. generada por fase del alternador son respectivamente:

$$V_f = \frac{6600}{\sqrt{3}} = 3810,51 \text{ voltios} \; ; \; E_{of} = \frac{6000}{\sqrt{3}} = 3464,1 \text{ voltios}$$

La potencia activa que suministra el generador en función del ángulo de carga δ, que forman la f.e.m. E_0 y la tensión terminal V, es:

$$P = \frac{3E_0V}{X_s}\operatorname{sen}\delta$$

por consiguiente, el valor anterior será máximo cuando el ángulo de carga sea de 90°, lo que corresponde a una potencia activa:

$$P_{max} = \frac{3E_0V}{X_s}$$

En la Figura 5.9 se muestra el diagrama fasorial correspondiente en el que se cumple:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \Rightarrow 3464,1\angle 90° = 3810,51\angle 0° + j5.I\angle\varphi$$

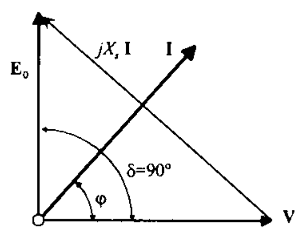


Figura 5.9

Pasando a la forma binómica las expresiones polares de los números complejos anteriores resulta:

$$j3464,1 = 3810,51 + (-5I\operatorname{sen}\varphi + j5I\cos\varphi)$$

que al igualar las partes reales e imaginarias da lugar a:

$$3810,51 - 5I\operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow I\operatorname{sen}\varphi = 762,1 \quad ; \quad I\cos\varphi = \frac{3464,1}{5} = 692,82$$

Dividiendo entre sí ambas ecuaciones resulta:

$$\operatorname{tg}\varphi = 1,1 \Rightarrow \varphi = 47,73° \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 0,74 \; ; \; \cos\varphi = 0,673 \text{ capacitivo}$$

y, por consiguiente, se obtiene una corriente:

$$I0,74 = 762,1 \Rightarrow I = 1029,95 \text{ A}$$

que corresponde a una potencia activa:

$$P = \sqrt{3}VI\cos\varphi = \sqrt{3}6600 \cdot 1029,95 \cdot 0,673 \approx 7920 \text{ kW}$$

que puede comprobarse también de este modo:

$$P = 3\frac{E_0V}{X_S} = 3\frac{\frac{6000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6600}{\sqrt{3}}}{5} = \frac{6000 \cdot 6600}{5} = 7920 \text{ kW}$$

Problema 5.15

Un alternador trifásico tiene una impedancia síncrona de 0 + j 10 Ω y está conectado a una red de potencia infinita de 11000 V suministrando una corriente de 220 A con f.d.p. unidad. Sin cambiar la entrada de potencia a la máquina motriz, se eleva la f.e.m. un 25%. Calcular: a) intensidad del inducido y f.d.p. en estas condiciones; b) potencia activa máxima que podrá ceder la máquina a la red antes de perder el sincronismo, con el nuevo valor de la excitación; c) intensidad y f.d.p. en las condiciones del apartado anterior.

Solución

a) La tensión simple de la red es:

$$V = \frac{1100}{\sqrt{3}} = 6350,85 \text{ voltios}$$

y como la f.e.m. es igual a la tensión terminal más la caída de tensión en la impedancia síncrona, si se toma la tensión como referencia de fases, se cumple:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} = 6350,85\angle 0° + j10 \cdot 220\angle 0° = 6721,11\angle 19,11° \text{ voltios}$$

Al elevarse la f.e.m. (actuando sobre la excitación), el nuevo valor de la misma es:

$$E_0' = 1,25 \cdot 6721,11 = 8401,39 \text{ voltios}$$

y teniendo en cuenta que la potencia activa inicial era:

$$P = \sqrt{3}VI\cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 1100 \cdot 220 \cdot 1 = 4191563 \text{ vatios}$$

Como esta potencia se mantiene constante, se puede calcular el ángulo de carga en la nueva situación, es decir, al aumentar la f.e.m., mediante la expresión:

$$4191563 = \frac{3E_0'V}{X_S}\operatorname{sen}\delta \Rightarrow 4191563 = \frac{3 \cdot 8401,39 \cdot 6350,85}{10}\operatorname{sen}\delta \Rightarrow \operatorname{sen}\delta = 0,2618 \Rightarrow \delta = 15,18°$$

y de acuerdo con este resultado, la fase de la nueva f.e.m. es de 15,18° adelantada a la tensión terminal, por lo que la nueva ecuación que relaciona la f.e.m. con la tensión es ahora:

$$\mathbf{E}_0' = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \Rightarrow 8401,4\angle 15,18° = 6350,85\angle 0° + j10I\angle\varphi$$

y al pasar la ecuación anterior a la forma binómica resulta:

$$8108 + j2199,9 = 6350,85 + 10I\operatorname{sen}\varphi + j10I\cos\varphi$$

igualando las parte reales e imaginarias de los dos miembros de la ecuación anterior, da lugar a las soluciones siguientes:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0,798 \Rightarrow \varphi = 38,61° \Rightarrow \cos\varphi = 0,781 \Rightarrow I = \frac{219,99}{0,781} = 281,5 \text{ A}$$

b) La potencia máxima se obtiene para un ángulo de carga igual a 90°, por lo que la ecuación de la potencia correspondiente, teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, vale:

$$P = 3\frac{E_0' V}{X_s}\text{sen}90° = 3\frac{8401,39 \cdot 6350,85}{10} = 16 \text{ MW}$$

c) En las condiciones del apartado anterior se cumplirá:

$$\mathbf{E}_0' = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \Rightarrow 8401,39\angle 90° = 6350,85\angle 0° + j10I\angle\varphi$$

que al igualar partes reales e imaginarias, da lugar a los resultados siguientes::

$$\text{tg}\varphi = 0,756 \Rightarrow \varphi = 37,09 \Rightarrow \cos\varphi = 0,7977 \text{ capacitivo} \ ; \ I = 1053,17 \text{ A}$$

Problema 5.16

Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 30 Ω/fase. Está acoplado a una red de potencia infinita de 11 kV y desarrolla 4000 kVA con f.d.p. unidad. Si se aumenta la f.e.m. un 20%, permaneciendo constante la entrada de potencia a la máquina motriz, determinar el nuevo f.d.p. con que trabajará la máquina y la potencia aparente que suministra.

Solución

La corriente que suministra el alternador a la red es:

$$I = \frac{4000000}{\sqrt{3} \cdot 11000} = 209,95 \text{ A}$$

y tomando como referencia la tensión simple de la red, las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente son respectivamente:

$$\mathbf{V} = \frac{1000}{\sqrt{3}}\angle 0° = 6350,85\angle 0 \text{ voltios} \ ; \ \mathbf{I} = 209,95\angle 0° \text{ amperios}$$

por lo que el valor de la f.e.m. del alternador debe ser:

$$\mathbf{E}_0 = 6350,85 + j30 \cdot 209,95 = 8944,52\angle 44,76° \text{ V}$$

Al aumentar la excitación, la nueva f.e.m. inducida tiene un módulo:

$$E_0' = 1,2 \cdot 8944,52 = 10733,4 \text{ voltios}$$

y como la potencia se mantiene constante, al expresar ésta en función de la nueva f.e.m. y del ángulo de carga, se tiene:

$$P = \sqrt{3} \cdot 11000 \cdot 209,95 \cdot 1 = 4000 \text{ kW} = \frac{3E_0' V}{X_S}\text{sen}\delta$$

de donde se deduce:

$$\text{sen}\delta = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 30}{3 \cdot 10733,4 \cdot 6350,85} = 0,5868 \Rightarrow \delta = 35,93°$$

y, escribiendo la ecuación de la f.e.m. en esta nueva situación, resulta:

$$10733,4\angle 35,93° = 6350,85\angle 0° + j30I\angle -\varphi$$

que al igualar partes reales e imaginarias de cada lado, da lugar a las siguientes soluciones:

$$\text{tg}\varphi = -0,3716 \Rightarrow \varphi = -20,38° \Rightarrow \cos\varphi = 0,937 \text{ capacitivo} \ ; \ I = 224 \text{ A}$$

y por consiguiente la nueva potencia aparente será:

$$S = \sqrt{3} \cdot 11000 \cdot 223,97 = 4267 \text{ kVA}$$

Problema 5.17

Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia del inducido despreciable y una reactancia síncrona de 8 Ω/fase. La curva de vacío está definida por la ecuación:

$$E_o = \frac{20240 I_e}{42 + I_e}$$

donde E_0 expresa la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación. Se conecta el generador a una red de potencia infinita de 11 kV suministrando en un momento dado una potencia activa de 3810 kW con f.d.p. unidad. En esta situación se aumenta la "corriente de excitación" un 50% sin modificar la apertura de distribuidor de turbina. Calcular: a) intensidad del inducido y f.d.p. en estas condiciones; b) potencia activa máxima que podrá ceder la máquina a la red antes de perder el sincronismo con el nuevo valor de la excitación; c) intensidad y f.d.p. en el caso anterior.

Solución

a) La corriente que entrega el alternador a la red es:

$$I = \frac{3810000}{\sqrt{3} \cdot 11000 \cdot 1} = 200 \text{ amperios}$$

y como quiera que el f.d.p. es la unidad, la f.e.m. necesaria por fase es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} = \frac{11000}{\sqrt{3}}\angle 0° + j8 \cdot 200\angle 0° = 6549,3\angle 14,14° \text{ voltios}$$

Esta f.e.m. corresponde a un valor de línea:

$$E_0 \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 6549,3 = 11343,7 \text{ voltios}$$

y para generar la f.e.m. anterior se requiere una corriente en el inductor:

$$11343,7 = \frac{20240 I_e}{42 + I_e} \Rightarrow I_e = 53,55 \text{ amperios}$$

Si se aumenta ahora la corriente de excitación un 50%, la corriente correspondiente es:

$$I_e' = 1,5 \cdot 53,55 = 80,33 \text{ amperios}$$

que generará una f.e.m. de línea:

$$E_0' \text{ (línea)} = \frac{20240\cdot 80,33}{42+80,33} = 13291 \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de fase $E_0' = 13291/\sqrt{3} = 7673,6$ voltios y, como no se modifica la posición del distribuidor, la potencia activa que entrega el alternador a la red no cambia. Expresando la potencia en función del ángulo de carga resulta:

$$P = 3810 \text{ kW} = \frac{3\cdot 7673,6\cdot 6350,85}{8}\operatorname{sen}\delta$$

que da lugar a:

$$\operatorname{sen}\delta = 0,208 \Rightarrow \delta = 12,03^\circ$$

y, en consecuencia, la ecuación de la f.e.m. del generador es ahora:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \Rightarrow 7673,6\angle 12,03^\circ = 6350,85\angle 0^\circ + j8I\angle -\varphi$$

Al igualar partes reales e imaginarias en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0,7217 \Rightarrow \varphi = 35,82^\circ \Rightarrow \cos\varphi = 0,811 \ ; \ I = \frac{1599,4}{8\cdot 0,811} = 246,6 \text{ A}$$

b) La potencia máxima que puede entregar el alternador sin perder el sincronismo se cumple para un ángulo de carga de 90°, lo que da lugar a un valor:

$$P = 3\frac{E_0V}{X_s}\operatorname{sen}90^\circ = 3\frac{7673,6\cdot 6350,85}{8} = 18,28 \text{ MW}$$

que se cumple cuando el generador trabaja con un f.d.p. capacitivo. Si se denomina α al ángulo de adelanto de la corriente respecto de la tensión terminal, la ecuación de la f.e.m. del alternador en esta situación es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \Rightarrow 7673,6\angle 90^\circ = 6350,85\angle 0^\circ + j8I\angle\alpha$$

y al igualar las partes reales e imaginarias de los dos miembros de la ecuación anterior resulta:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0,8276 \Rightarrow \alpha = 39,6^\circ \Rightarrow \cos\alpha = 0,77 \ ; \ I = 1245,5 \text{ amperios}$$

Problema 5.18

Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 6600 V, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido despreciable y una reactancia síncrona constante. La curva de vacío está definida por la ecuación.

$$E_o = \frac{12210I_e}{85+I_e}$$

donde E_0 expresa la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación. Se conecta la máquina a una red de potencia infinita; una vez efectuado el acoplamiento y sin cambiar la corriente de excitación, se abre el distribuidor de agua a la turbina hasta que el alternador suministra a la red una potencia activa de 10 MW. En esta situación se aumenta la corriente de excitación un 50% respecto al valor de conexión sin modificar la potencia de entrada a la máquina motriz y entonces se obtiene un f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular: a) reactancia síncrona del alternador; b) f.d.p. con el que trabaja la máquina antes de cambiar la excitación y entregando la potencia de 10 MW.

Solución

a) Al conectar el alternador a la red, la f.e.m. en bornes del generador debe coincidir con la tensión de la red, es por ello que si con esta f.e.m. generada se va a la curva de vacío del alternador, se obtendrá la corriente necesaria en la excitación, resultando:

$$E_0 = V = 6600 = \frac{12210I_e}{85+I_e} \Rightarrow I_e = 100 \text{ amperios}$$

Si en esta situación se aumenta la corriente de excitación un 50%, su valor será: $I_e' = 1,5\cdot 100 = 150$ amperios y la f.e.m. generada de línea correspondiente será:

$$E_0' = \frac{12210\cdot 150}{85+150} = 7793,6 \text{ voltios}$$

Como la potencia activa no varía, ya que no se ha modificado el distribuidor de la turbina, denominando I a la corriente del alternador y teniendo en cuenta que ahora trabaja con un f.d.p. 0,8 inductivo, resulta:

$$P = 10 \text{ MW} = 10^7 = \sqrt{3}\cdot 6600\cdot I 0,8 \Rightarrow I = 1093,5 \text{ amperios}$$

En consecuencia en esta situación, si se toma la tensión simple como referencia de fase, se tiene:

$$E_0' \text{ (fase)} = \frac{7793,6}{\sqrt{3}} = 4499,64 \text{ V} \Rightarrow \mathbf{E}_0 \text{ (fase)} = 4499,64\angle\delta \ ; \ \mathbf{V}_f = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 3810,5\angle 0^\circ \text{ V} \ ; \ \mathbf{I} = 1093,5\angle -36,87^\circ \text{ A}$$

y aplicando la ecuación que relaciona la f.e.m. y la tensión, se puede escribir:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \Rightarrow 4499,64\angle\delta = 3810,5\angle 0^\circ + jX_s 1093,5\angle -36,87^\circ$$

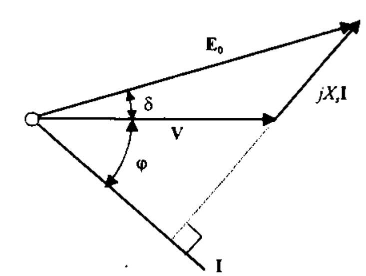


Figura 5.10

Cuya composición fasorial se muestra en la Figura 5.10. Al pasar a forma binómica la última ecuación se tiene:

$$4499,64\cos\delta + j4499,64\operatorname{sen}\delta = 3810,5 + 1093,5X_s(\cos 53,13^\circ + j\operatorname{sen}53,13^\circ)$$

igualando partes reales e imaginarias da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$4499{,}64\cos\delta = 3810{,}5 + 1093{,}5X_S 0{,}6 \ ; \ 4499{,}64\operatorname{sen}\delta = 1093{,}5X_S 0{,}8$$

cuyas soluciones son:

$$\operatorname{sen}\delta = 0{,}182 \ ; \ X_S = 0{,}936\ \Omega$$

b) Antes de cambiar la excitación, la f.e.m. de línea coincide con la tensión de línea y, al ser la potencia activa entregada a la red de 10MW, se puede escribir:

$$P = 10^7 = \frac{6600\cdot 6600}{0{,}936}\operatorname{sen}\delta \Rightarrow \operatorname{sen}\delta = 0{,}2148 \Rightarrow \delta = 12{,}41°$$

La ecuación de la f.e.m. generada se escribe ahora del siguiente modo:

$$3810{,}5\angle 12{,}41° = 3810{,}5\angle 0° + j0{,}936I\angle -\varphi$$

y al igualar partes reales e imaginarias se obtiene finalmente:

$$\cos\varphi = 0{,}994 \text{ capacitivo} \ ; \ I = 880 \text{ amperios}$$

Problema 5.19

Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 10 Ω/fase. Está acoplado a una red de potencia infinita de 11 kV y se sabe que desarrolla una potencia con f.d.p. 0,673 inductivo, siendo el ángulo de carga δ=10°. Calcular: a) f.e.m. de línea producida por el generador; b) potencia activa que suministra a la red.

Solución

a) La tensión simple del generador es:

$$V = \frac{11000}{\sqrt{3}} = 6350{,}85\ \text{V}$$

y tomando la tensión simple de la red como referencia de fase, teniendo en cuenta que arcos 0,673=47,7°, los valores fasoriales de la tensión y de la corriente, son respectivamente:

$$\mathbf{V} = 6350{,}85\angle 0° \text{ voltios; } \mathbf{I} = I\angle -47{,}7° \text{ amperios}$$

y como quiera que el ángulo de carga es de 10°, de acuerdo con el esquema fasorial de la Figura 5.10 del problema anterior, que es válido para la referencia actual, se tiene la siguiente ecuación de f.e.m.:

$$E_0\angle 10° = 6350{,}85\angle 0° + j10I\angle -47{,}7° = 6350{,}85 + 10I0{,}74 + j10I0{,}673$$

que al igualar partes reales e imaginarias conduce a las siguientes soluciones:

$$I = 206{,}4\ \text{A} \ ; \ E_0 = 8000\ \text{V}$$

siendo la f.e.m. de línea:

$$E_0(\text{línea}) = 8000\sqrt{3} = 13856\ \text{V}$$

b) La potencia activa que suministra a la red el alternador es:

$$P = \sqrt{3}\ VI\cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 11000\cdot 206{,}4\cdot 0{,}673 = 2646{,}5\ \text{kW}$$

Problema 5.20

Dos alternadores idénticos de 2000 kVA funcionan en paralelo alimentando una carga aislada. El regulador de la primera máquina es tal que la frecuencia cae uniformemente de 50 Hz en vacío a 48 Hz a plena carga. La correspondiente caída uniforme de velocidad de la segunda máquina es de 50 Hz a 47,5 Hz. a) ¿Cómo se distribuirán entre los dos generadores una potencia activa consumida por la carga de 2700 kW? b) ¿Cuál es la potencia activa máxima con f.d.p. unidad que puede suministrarse sin sobrecargar ninguno de los alternadores?

Solución

a) En la Figura 5.11 se muestran las rectas de la frecuencia/potencia de los alternadores. Las ecuaciones matemáticas de ambas rectas son:

$$\textit{Alternador I: } P_I = \frac{2000}{50-48}(50-f) = 1000(50-f) \Rightarrow f = 50 - \frac{P_I}{1000}$$

$$\textit{Alternador II: } P_{II} = \frac{2000}{50-47{,}5}(50-f) = 800(50-f) \Rightarrow f = 50 - \frac{P_{II}}{800}$$

Y teniendo en cuenta que la potencia que deben suministrar ambos generadores es de 2700 kW, se cumplirá:

$$P_I + P_{II} = 2700 \qquad \text{a)}$$

$$50 - \frac{P_I}{1000} = 50 - \frac{P_{II}}{800} \Rightarrow P_{II} = 0{,}8P_I \qquad \text{b)}$$

que da lugar a los siguientes resultados:

$$P_I = 1500\ \text{kW} \ ; \ P_{II} = 0{,}8\cdot 1500 = 1200\ \text{kW}$$

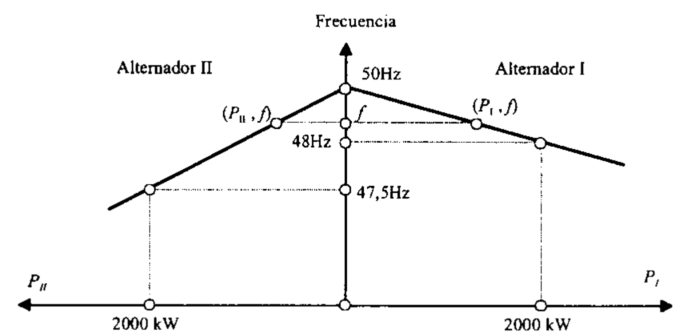


Figura 5.11

b) Si el alternador *I* (más cargado) entrega su potencia asignada con f.d.p. unidad, es decir 2000 kW, la potencia activa del generador *II*, de acuerdo con la ecuación b), suministrará una potencia del 80% del generador *I*, es decir, 1600 kW, por lo que ambos generadores pueden entregar una potencia conjunta de 3600 kW.

Problema 5.21

Dos alternadores trifásicos funcionan en paralelo suministrando a una carga una potencia de 6 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. La frecuencia de uno de ellos cae uniformemente de 51 Hz en vacío a 49,75 Hz cuando se carga con una potencia activa de 10 MW, y en el otro la frecuencia pasa de 51 Hz a 49,5 Hz, cuando se carga con 2 MW. Determinar las potencias activas suministradas por cada generador y el f.d.p. con el que trabaja el primero, si el f.d.p. del segundo es de 0,71 inductivo.

Solución

a) Las ecuaciones de la rectas frecuencia/potencia de los alternadores son, de acuerdo con los datos del enunciado, las siguientes:

$$\textit{Alternador I:}\ P_I = \frac{10000}{51-49,75}(51-f) \Rightarrow f = 51 - \frac{P_I}{8000}$$

$$\textit{Alternador II:}\ P_{II} = \frac{2000}{51-49,5}(51-f) \Rightarrow f = 51 - \frac{P_{II}}{1333,33}$$

y teniendo en cuenta que la potencia conjunta es de 6 MW, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$P_I + P_{II} = 6000\ \text{kW} \qquad \text{a)}$$

$$\frac{P_I}{8000} = \frac{P_{II}}{1333,33} \Rightarrow P_I = 6P_{II} \qquad \text{b)}$$

cuyas soluciones son:

$$P_I = 5143\ \text{kW}\ ;\ P_{II} = 857\ \text{kW}$$

La potencia total tiene un f.d.p. 0,8 inductivo, su expresión compleja es:

$$\mathbf{S}_{TOTAL} = 6000 + j4500$$

y como quiera que el segundo generador trabaja con un f.d.p. 0,71 inductivo, la potencia compleja que suministra es:

$$\mathbf{S}_{II} = 1207,04\angle 44,77° = 857 + j850$$

por lo que resulta:

$$\mathbf{S}_{TOTAL} = \mathbf{S}_I + \mathbf{S}_{II} \Rightarrow \mathbf{S}_I = (6000 + j4500) - (857 + j850) = 5143 + j3650$$

que en forma polar es:

$$\mathbf{S}_I = 5143 + j3650 = 6306,6\angle 35,36°$$

Por consiguiente, el f.d.p. con el que trabaja el primer alternador es $\cos 35,36° = 0,815$.

Problema 5.22

Dos alternadores idénticos de 15 MVA, 6,6 kV, 50 Hz, conectados en estrella, están acoplados en paralelo, suministrando en conjunto a una red aislada una potencia de 20 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. Ambos generadores tienen resistencias de inducido despreciables y reactancias síncronas de un valor de 2,83 Ω/fase. Sabiendo que la potencia activa se reparte por igual entre ambos generadores y que el primero tiene una f.e.m. de 11484 V de línea. Calcular: a) corrientes suministradas por cada generador con sus f.d.p. respectivos; b) f.e.m. generada por el segundo alternador. NOTA: se supone que la tensión común en barras de ambos generadores permanece constante en el valor nominal de 6600 V.

Solución

a) En la Figura 5.12 se muestra el diagrama fasorial de las f.e.m. y las corrientes de ambos generadores, en el que se ha tomado la tensión simple común en barras como referencia de fases. Los fasores de las magnitudes implicadas son:

$$\mathbf{E}_1 = 6630,3\angle\delta_1\ ;\ \mathbf{E}_2 = E_2\angle\delta_2\ ;\ \mathbf{I}_1 = I_1\angle -\varphi_1\ ;\ \mathbf{I}_1 = I_1\angle -\varphi_1$$

y teniendo en cuenta que la potencia total es de 20 MW con f.d.p. 0,8 inductivo, la corriente total es:

$$20\cdot 10^6 = \sqrt{3}\cdot 6600\cdot I0,8 \Rightarrow I = 2186,9\ \text{A} \Rightarrow \mathbf{I} = 2186,9\angle -36,87°\ \text{A}$$

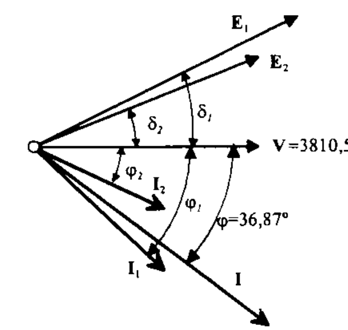


Figura 5.12

Como ambos generadores entregan la misma potencia activa (de 10 MW), se tiene:

$$10\cdot 10^6 = \sqrt{3}6600 I_1\cos\varphi_1 = \sqrt{3}6600 I_2\cos\varphi_2 \Rightarrow I_1\cos\varphi_1 = I_2\cos\varphi_2 \qquad \text{a)}$$

y aplicando a cada generador la ecuación de sus f.e.m. respectivas y sus relaciones con la tensión terminal, resulta:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \Rightarrow 6630,3\angle\delta_1 = 3810,5\angle 0° + j2,83 I_1\angle -\varphi_1\ ;\ E_2\angle\delta_2 = 3810,5\angle 0° + j2,83 I_2\angle -\varphi_2 \qquad \text{b)}$$

que al igualar partes reales e imaginarias en cada ecuación, dan lugar al conjunto siguiente:

$$6630,3\cos\delta_1 = 3810,5 + 2,83 I_1\operatorname{sen}\varphi_1\ ;\ 6630,3\operatorname{sen}\delta_1 = 2,83 I_1\cos\varphi_1 \qquad \text{c)}$$

$$E_2\cos\delta_2 = 3810,5 + 2,83 I_2\operatorname{sen}\varphi_2\ ;\ E_2\operatorname{sen}\delta_2 = 2,83 I_2\cos\varphi_2 \qquad \text{d)}$$

Por otro lado, la corriente total es igual a la suma de las corrientes que entregan los alternadores:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \Rightarrow 2186,9\angle -36,87° = I_1\angle -\varphi_1 + I_2\angle -\varphi_2 \qquad \text{e)}$$

Igualando partes reales e imaginarias se tiene:

$$2186,9\cos 36,87° = I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 = 1749,6 \ ; \ 2186,9\,\text{sen}36,87° = I_1\text{sen}\varphi_1 + I_2\text{sen}\varphi_2 = 1312,14 \qquad \text{f)}$$

La ecuación a) junto con la primera ecuación f) da lugar a:

$$I_1\cos\varphi_1 = I_2\cos\varphi_2 = \frac{1749,6}{2} = 874,76 \text{ A} \qquad \text{g)}$$

Resultado que al llevar a la segunda ecuación c) nos da:

$$6630,3\,\text{sen}\delta_1 = 2,83\cdot 874,76 = 2475,6 \ \Rightarrow \ \text{sen}\delta_1 = 0,373 \ \Rightarrow \ \delta_1 = 21,92° \qquad \text{h)}$$

Si esta solución se sustituye en la primera ecuación c) resulta:

$$6630,3\cos 21,92° = 6150,81 = 3810,5 + 2,83 I_1\text{sen}\varphi_1 \ \Rightarrow \ I_1\text{sen}\varphi_1 = 826,96 \qquad \text{i)}$$

y teniendo en cuenta g) e i) se obtiene:

$$\text{tg}\varphi_1 = 0,945 \ \Rightarrow \ \varphi_1 = 43,39° \ \Rightarrow \ \cos\varphi_1 = 0,727 \qquad \text{j)}$$

y de acuerdo con los resultados de g) y j), se obtiene el valor de la corriente del primer alternador:

$$I_1 = \frac{874,76}{0,727} = 1203,25 \text{ A} \qquad \text{k)}$$

Llevando los resultados de j) y k) a la segunda ecuación g), se tiene:

$$I_1\text{sen}\varphi_1 + I_2\text{sen}\varphi_2 = 1312,14 \ \Rightarrow \ I_2\text{sen}\varphi_2 = 1312,14 - 826,96 = 485,18 \ \Rightarrow \ \text{tg}\varphi_2 = \frac{485,18}{874,76} = 0,5546 \qquad \text{l)}$$

y por consiguiente resulta:

$$\varphi_2 = 29,01° \ \Rightarrow \ \cos\varphi_2 = 0,875 \ \Rightarrow \ I_2 = 999,7 \approx 1000 \text{ A}$$

Es decir, las corrientes suministradas por cada generador son respectivamente:

I_1= 1203,25 amperios; I_2= 1000 amperios

b) Para determinar la f.e.m. que genera el segundo alternador, si se tienen en cuenta las ecuaciones d), resulta:

$$E_2\text{sen}\delta_2 = 2,83\cdot 874,76 = 2475,6 \ ; \ E_2\cos\delta_2 = 3810,5 + 2,83\cdot 485,18 = 5183,6 \qquad \text{m)}$$

que al dividir ambas ecuaciones entre sí da lugar a:

$$\text{tg}\delta_2 = 0,478 \ ; \ \delta_2 = 25,53° ; \cos\delta_2 = 0,902 \ ; \ \text{sen}\,\delta_2 = 0,431$$

Resultados que, al llevar a m), nos dan finalmente:

$$E_2 = 5744,36 \text{ voltios} \ ; \ E_2 \text{ (línea)} = \sqrt{3}\cdot 5744,36 \approx 9950 \text{ voltios}$$

Problema 5.23

Dos alternadores idénticos conectados en estrella están acoplados en paralelo alimentando una carga aislada. Ambas máquinas tienen sus resistencias de inducido despreciables y sus reactancias síncronas son de 10 Ω/fase. Las f.e.m. generadas por cada alternador son E_1=6700 V/fase y E_2= 6500 V/fase estando la f.e.m. E_2 adelantándose 10° eléctricos respecto a E_1. Si la carga absorbe una corriente total de 500 A que está desfasada 37° en retraso respecto a la f.e.m. E_1. Calcular: a) tensión en la barra común a ambas máquinas en voltios por fase; b) corrientes suministradas por cada alternador con sus f.d.p.; c) f.d.p. de la carga.

Solución

a) En la Figura 5.13 se muestra el diagrama fasorial de las magnitudes implicadas. Las expresiones fasoriales son:

$$\mathbf{E}_1 = 6700\angle\delta_1 \ ; \ \mathbf{E}_2 = 6500\angle(\delta_1 + 10°) \ ; \ \mathbf{I}_1 = I_1\angle -\varphi_1 \ ; \ \mathbf{I}_2 = I_2\angle -\varphi_2 \ ; \ \mathbf{I} = 500\angle(\delta_1 - 37°)$$

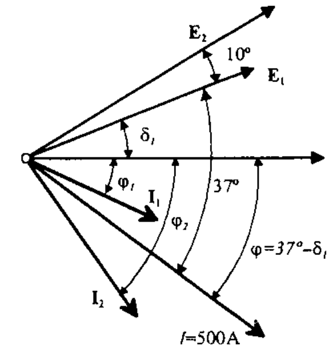


Figura 5.13

b) La ecuación de f.e.m. del primer alternador es:

$$6700\angle\delta_1 = V + j10I_1\angle -\varphi_1 \ \Rightarrow \ 6700\cos\delta_1 = V + 10I_1\text{sen}\varphi_1 \ ; \ 6700\text{sen}\delta_1 = 10I_1\cos\varphi_1$$

Para el segundo alternador se cumple:

$$6500\angle(\delta_1 + 10°) = V + j10I_2\angle -\varphi_2 \ \Rightarrow \ 6500\cos(\delta_1 + 10°) = V + 10I_2\text{sen}\varphi_2 \ ; \ 6500\text{sen}(\delta_1 + 10°) = 10I_2\cos\varphi_2$$

y la corriente total es la suma de las corrientes, es decir:

$$500\angle(\delta_1 - 37°) = I_1\angle -\varphi_1 + I_2\angle -\varphi_2 \ \Rightarrow \ 500\cos(\delta_1 - 37°) = I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 \ ; \ 500\text{sen}(\delta_1 - 37°) = -I_1\text{sen}\varphi_1 - I_2\text{sen}\varphi_2$$

operando las ecuaciones anteriores, se obtienen los siguientes resultados:

$$\delta_1 = 15,87° \ ; \ \cos\varphi_1 = 0,836 \ ; \ V \approx 5245 \text{ voltios} \ ; \ I_1 \approx 219 \text{ amperios} \ ; \ \cos\varphi_2 = 0,978 \ ; \ I_2 \approx 290 \text{ amperios}$$

c) El f.d.p. de la carga por lo tanto:

$$\cos\varphi = \cos(37° - \varphi) = \cos(37° - 15,87°) = 0,933$$

Problema 5.24

Dos alternadores idénticos de 5000 kVA, 6,6 kV, conectados en estrella, funcionan en paralelo con las mismas excitaciones y se reparten por igual una potencia activa de 8 MW a 6,6 kV con f.d.p. 0,8 inductivo. Las resistencias de los inducidos son despreciables y las reactancias síncronas por fase valen 17,4 Ω. a) Calcular las f.e.m. de línea de cada generador. b) Si la f.e.m. de uno de los generadores se reduce un 15%, determinar la f.e.m. que tendrá que generarse en el otro para evitar un cambio en la tensión en barras y un suministro adicional de vapor a "cada uno". c) Calcular en las condiciones del apartado anterior las corrientes suministradas por cada generador y sus f.d.p.

Solución

a) Teniendo en cuenta que, entre los dos alternadores dan una potencia activa de 8 MW, la corriente total correspondiente es:

$$8\cdot 10^{6}=\sqrt{3}\cdot 6600 I\, 0,8 \;\Rightarrow\; I=874,77 \text{ amperios}$$

que al tomar como referencia de fases la tensión simple en las barras, se puede poner de acuerdo con la Figura 5.14:

$$\mathbf{V}=\frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0^{\circ}=3810,5\angle 0^{\circ}\ \text{V} \;;\; \mathbf{I}=874,77\angle -36,87^{\circ}\ \text{A}$$

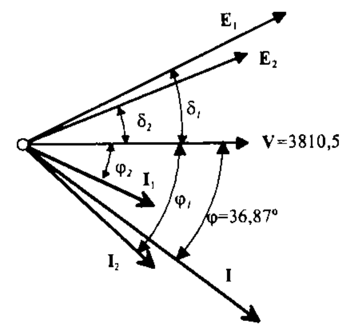


Figura 5.14

Como ambos alternadores generan la misma potencia activa, se puede escribir:

$$4\cdot 10^{6}=\sqrt{3}6600 I_1\cos\varphi_1=\sqrt{3}6600 I_2\cos\varphi_2 \;\Rightarrow\; I_1\cos\varphi_1=I_2\cos\varphi_2=349,91\ \text{A} \qquad \text{a)}$$

Además, al trabajar ambos generadores con la misma excitación, las f.e.m. de ambos son idénticas, y dado que también tienen las mismas reactancias síncronas, las corrientes que entregan a la carga deben ser iguales, es decir:

$$I_1=I_2=\frac{I}{2}=437,39\ \text{A} \;;\; \varphi_1=\varphi_2=\varphi=36,87^{\circ} \qquad \text{b)}$$

y los valores de sus f.e.m. son:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2=3810,5\angle 0^{\circ}+j17,4\cdot 437,39\angle -36,87^{\circ}=10355,73\angle 36^{\circ}\ \text{voltios} \qquad \text{c)}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea E (línea) $=\sqrt{3}\cdot 10355,73\approx 17937$ voltios.

b) Si se supone que es el primer alternador el que reduce su f.e.m. un 15%, el valor correspondiente será:

$$E_1=0,85\cdot 10355,73=8802,4\ \text{voltios}$$

y planteando ahora las ecuaciones de la f.e.m. de los alternadores, teniendo en cuenta que las nuevas corrientes son I_1 e I_2 y sus desfases respecto de la tensión en barras son φ_1 e φ_2, resulta:

$$\textit{Alternador 1:}\ 8802,4\angle\delta_1=3810,5+j17,4I_1\angle -\varphi_1 \qquad \text{d)}$$

$$\textit{Alternador 2:}\ E_2\angle\delta_2=3810,5+j17,4I_2\angle -\varphi_2 \qquad \text{e)}$$

Como la corriente total debe ser la suma de las corrientes que entrega cada generador, se tiene:

$$874,77\angle -36,87^{\circ}=I_1\angle -\varphi_1+I_2\angle -\varphi_2 \qquad \text{f)}$$

A estas ecuaciones debe añadirse la señalada en a), que representaba la igualdad de potencias entregadas por cada generador, es decir:

$$I_1\cos\varphi_1=I_2\cos\varphi_2=349,91\ \text{A} \qquad \text{g)}$$

Las dos componentes (parte real e imaginaria) de la ecuación d) son respectivamente:

$$8802,4\cos\delta_1=3810,5+17,4I_1\text{sen}\varphi_1 \;;\; 8802,4\text{sen}\delta_1=17,4I_1\cos\varphi_1 \qquad \text{h)}$$

y al sustituir el resultado g) en la segunda ecuación h) se tiene:

$$8802,4\text{sen}\delta_1=17,4\cdot 349,91=6088,4 \;\Rightarrow\; \text{sen}\delta_1=\frac{6088,4}{8802,4}=0,692 \;\Rightarrow\; \delta_1=43,76^{\circ} \;\Rightarrow\; \cos\delta_1=0,722$$

c) Llevando este resultado a la primera ecuación g) resulta:

$$I_1\text{sen}\varphi_1=\frac{8802,4\cdot 0,722-3810,5}{17,4}=146,3 \qquad \text{i)}$$

y si se dividen entre sí las ecuaciones i) y g), se obtiene:

$$tg\varphi_1=\frac{146,3}{349,91}=0,418 \;\Rightarrow\; \varphi_1=22,7^{\circ} \qquad \text{j)}$$

por lo que se deduce:

$$\cos\varphi_1=0,923 \;;\; I_1=379,3\ \text{A}$$

Por otro lado, las dos componentes (parte real e imaginaria) de la ecuación e) son respectivamente:

$$E_2\cos\delta_2=3810,5+17,4I_2\text{sen}\varphi_2 \;;\; E_2\text{sen}\delta_2=17,4I_2\cos\varphi_2 \qquad \text{k)}$$

y, de un modo análogo, las partes real e imaginaria de la ecuación f), son:

$$874,77\cos 36,87^{\circ}=I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2 \;;\; 874,77\text{sen}36,87^{\circ}=I_1\text{sen}\varphi_1+I_2\text{sen}\varphi_2 \qquad \text{l)}$$

pero al cumplirse la igualdad g), es inmediato obtener:

$$I_1=379,3\ \text{amperios} \;;\; \cos\varphi_1=0,923 \;;\; \cos\varphi_2=0,679 \;;\; I_2=515,44\ \text{amperios}$$

soluciones que llevadas a k) permiten que resulte:

$$\delta_2=30,35^{\circ} \;;\; E_2=12048\ \text{voltios} \;\Rightarrow\; E_2\ (\text{línea})=\sqrt{3}\cdot 12048=20868\ \text{voltios}$$

Problema 5.25

Un motor síncrono trifásico conectado en estrella, de 75 kW, 500 V tiene una impedancia síncrona $\mathbf{Z}_s=0,03+j3\ \Omega$/fase. Si funciona a plena carga con un f.d.p. 0,8 capacitivo y rendimiento del 90%. Calcular la f.e.m. inducida E_0 y la potencia activa absorbida de la red.

Solución

Si la potencia mecánica del motor síncrono es de 75 kW, la potencia eléctrica que absorbe de la red es:

$$P_{\text{eléctrica}}=\frac{P_{mec}}{\eta}=\frac{75}{0,9}=83,33\ \text{kW}$$

por lo que la corriente absorbida de la red es:

$$I = \frac{83333}{\sqrt{5}\cdot 500\cdot 0,8} = 120,28 \text{ A}$$

y al tomar la tensión de fase como referencia, se puede poner:

$$\mathbf{V} = \frac{500}{\sqrt{3}}\angle 0° = 288,68\angle 0° \text{ voltios}$$

Según la ecuación de la f.e.m. del motor y su relación con la tensión, resulta:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - \mathbf{Z}_S\mathbf{I} = 288,68\angle 0° - (0,03 + j0,3)120,28\angle 36,87° = 309\angle -5,8°$$

En la ecuación anterior se ha tenido en cuenta el carácter capacitivo de la corriente. En consecuencia, la f.e.m. de línea es:

$$E_0 \text{ (línea)} = 309\sqrt{3} = 535,21 \text{ voltios}$$

Problema 5.26

Un motor síncrono trifásico conectado en estrella de 4 polos, tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 3 Ω/fase. Está conectado a una red de 2000 V, 50 Hz. La excitación es constante y produce una f.e.m. de 1150 V/fase. Calcular la potencia activa absorbida de la línea, el factor de potencia y el par desarrollado en el eje si la corriente del inducido es de 200 A. NOTA: despreciar las pérdidas en el motor.

Solución

Si se elige como referencia de fases la tensión simple de la red se tiene:

$$\mathbf{V} = \frac{2000}{\sqrt{3}}\angle 0° = 1154,7\angle 0° \;;\; \mathbf{I} = 200\angle -\varphi$$

y teniendo en cuenta la relación:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}_0 + jX_S\mathbf{I}$$

Si se supone que la f.e.m. del motor se adelanta δ grados respecto a la tensión, la ecuación anterior nos da:

$$1154,7\angle 0° = 1150\angle\delta + j3\cdot 200\angle -\varphi = 1150\angle\delta + 600\angle(90° - \varphi)$$

que al igualar partes reales e imaginarias de cada miembro se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$1154,7 = 1150\cos\delta + 600\operatorname{sen}\varphi \;;\; 0 = 1150\operatorname{sen}\delta + 600\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{sen}\delta = -0,522\cos\varphi$$

y que, al resolver, da lugar a:

$$\operatorname{sen}\varphi = 0,267 \Rightarrow \varphi = 15,5° \Rightarrow \cos\varphi = 0,964$$

En consecuencia la potencia activa que el motor absorbe de la red es:

$$P_e = \sqrt{3}\cdot 2000\cdot 200\cdot 0,964 \approx 668 \text{ kW}$$

La potencia anterior coincidirá con la potencia mecánica en el eje, al no existir pérdidas en el motor. Y como la velocidad de sincronismo del motor es:

$$n = \frac{60f}{p} = \frac{60.50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.}$$

el par mecánico que desarrolla vale:

$$T = \frac{P_m}{\omega} = \frac{668000}{2\pi\frac{1500}{60}} = 4250 \text{ N.m.}$$

Problema 5.27

Un motor síncrono trifásico de 6600 V conectado en estrella, trabaja con tensión constante y excitación constante. Su impedancia síncrona es 2 + j 20 Ω/fase. Cuando la entrada es de 1000 kW, el f.d.p. es de 0,8 capacitivo. Hallar el f.d.p. cuando se aumenta la entrada a 1500 kW.

Solución

Como el motor absorbe una potencia eléctrica de 1000 kW, la corriente de la red es:

$$I = \frac{1000000}{\sqrt{3}\cdot 6600\cdot 0,8} = 109,35 \text{ amperios}$$

y al considerar como referencia de fase la tensión simple de la red, teniendo en cuenta el carácter capacitivo de la corriente, se pueden escribir las siguientes expresiones fasoriales:

$$\mathbf{V} = \frac{6600}{\sqrt{3}}\angle 0° = 3810,5\angle 0° \text{ V} \;;\; \mathbf{I} = 109,35\angle 36,87° \text{ A}$$

por lo que la ecuación de la f.e.m. del alternador se podrá escribir de este modo:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{ZI} \Rightarrow 3810,5\angle 0° = E_0\angle\delta + (2 + j20)109,35\angle 36,87°$$

En la última ecuación se ha supuesto que la f.e.m. forma δ grados con la tensión. De aquí se deduce:

$$E_0\angle\delta = 3810,5\angle 0° - 2197,91\angle 121,16° = 5293,2\angle -20,81°$$

es decir, que la f.e.m. simple es de 5293,2 voltios, que corresponden a una f.e.m. de línea:

$$E_0 \text{ (línea)} = \sqrt{3}\cdot 5293,2 \approx 9168 \text{ voltios}$$

Si ahora aumenta la potencia eléctrica de entrada a 1500 kW, la corriente absorbida de red en función de su nuevo factor de potencia, es:

$$I = \frac{1500000}{\sqrt{3}\cdot 6600\cos\varphi} = \frac{131,22}{\cos\varphi}$$

por lo que la nueva corriente tiene la siguiente expresión fasorial:

$$\mathbf{I} = \frac{131,22}{\cos\varphi}\angle\varphi \text{ amperios}$$

que al plantear la nueva ecuación de la f.e.m. del motor se tiene:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - \mathbf{ZI} \Rightarrow E_0\angle\delta' = 3810{,}5 - (2 + j20)\frac{131{,}22}{\cos\varphi}\angle\varphi$$

En la última expresión se ha supuesto que la f.e.m. E_0 se adelanta δ' grados respecto de la tensión. Al sustituir ahora el valor de la f.e.m. calculada antes, se obtiene:

$$3810{,}5 - \frac{262{,}44}{\cos\varphi}\angle\varphi - \frac{2624{,}4}{\cos\varphi}\angle(90^\circ + \varphi) = 5293{,}2\angle\delta'$$

que al igualar partes reales e imaginarias, después de algunas transformaciones trigonométricas, se deducen los resultados siguientes:

$$\varphi = 20{,}74^\circ \ ; \ \cos\varphi = 0{,}935 \ ; \ \delta' = -31^\circ$$

es decir, el motor trabajará con un f.d.p. de 0,935.

Problema 5.28

Un motor síncrono trifásico de 400 V, 6 polos, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una impedancia síncrona de 0,5 + j4 Ω/fase. Absorbe una corriente de 15 A con f.d.p. unidad cuando funciona con una cierta excitación. Si se aumenta el par de carga hasta que la corriente de línea sea de 60 A, permaneciendo constante la excitación, hallar el par total desarrollado y el nuevo f.d.p.

Solución

Inicialmente, cuando el motor trabaja con f.d.p. unidad, si se toma como referencia de fases la tensión simple de la red, las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente son:

$$\mathbf{V} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 230{,}94\angle 0^\circ \text{ V} \ ; \ \mathbf{I} = 15\angle 0^\circ \text{ A}$$

y la f.e.m. del motor es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - \mathbf{ZI} = 230{,}94 - (0{,}5 + j4)15 = 223{,}44 - j60 = 231{,}36\angle -15{,}03^\circ$$

Si en la situación anterior se aumenta el par de carga, la corriente se modifica y cambia, según el enunciado, a 60 amperios con un ángulo Φ de fase, que vamos a considerar adelantado de la tensión, es decir, su expresión fasorial es de la forma $\mathbf{I}' = 60\angle\varphi$, y la nueva ecuación de la f.e.m. vale ahora:

$$\mathbf{E}_0' = 230{,}94 - (0{,}5 + j4)60\angle\varphi = 231{,}36\angle\delta$$

que al operar se obtiene:

$$231{,}36\angle\delta = (230{,}94 - 30\cos\varphi + 240\operatorname{sen}\varphi) - j(30\operatorname{sen}\varphi + 240\cos\varphi)$$

e igualando los módulos de ambos miembros de la ecuación, resulta:

$$231{,}36 = \sqrt{(230{,}94 - 30\cos\varphi + 240\operatorname{sen}\varphi)^2 + (30\operatorname{sen}\varphi + 240\cos\varphi)^2}$$

Después de algunas simplificaciones se obtiene la siguiente ecuación:

$$5{,}83 + 11{,}08\operatorname{sen}\varphi + 1{,}39\cos\varphi = 0$$

y teniendo en cuenta las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} \ ; \ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

se transforma en:

$$88{,}8\operatorname{tg}^2\varphi + 30{,}8\operatorname{tg}\varphi - 32{,}07 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, se obtienen las dos soluciones siguientes:

$$\operatorname{tg}\varphi = -0{,}799 \text{ (inductivo)} \ ; \ \operatorname{tg}\varphi = +0{,}452 \text{ (capacitivo)} \Rightarrow \cos\varphi = 0{,}911$$

El segundo resultado es el válido, puesto que se ha partido del supuesto de que la corriente se adelanta a la tensión. Por lo tanto la potencia activa que el motor absorbe de la red es:

$$P = \sqrt{3}\,VI\cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 60\cdot 0{,}911 = 37{,}87 \text{ kW}$$

y como la velocidad de sincronismo del motor es:

$$n = \frac{60\cdot 50}{3} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

el par mecánico desarrollado vale:

$$T = \frac{37870}{2\pi\frac{1000}{60}} = 361{,}6 \text{ N.m.}$$

Problema 5.29

Una carga eléctrica de 250 kVA, tiene un f.d.p. de 0,65 inductivo. Se conecta a la misma red un motor síncrono en estrella de 75 kW de rendimiento 88% para elevar el factor de potencia de la instalación a 0,85 inductivo. a) Calcular la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja. b) Si la tensión de alimentación es de 380 V y el motor tiene una impedancia síncrona de 0 + j 0, 5 Ω/fase, determinar la f.e.m. E_0 inducida en esta máquina.

Solución

a) La carga eléctrica tiene un f.d.p. 0,65 inductivo, por lo que $\varphi_1 = \arccos 0{,}65 = 49{,}5^\circ$ y la potencia compleja correspondiente es:

$$\mathbf{S}_1 = 250\angle 49{,}5^\circ = 162{,}5 + j190$$

La potencia eléctrica activa que el motor síncrono absorbe de la red es:

$$P_e = \frac{P_{mec}}{\eta} = \frac{75}{0{,}88} = 85{,}23 \text{ kW}$$

y teniendo en cuenta que la instalación ha de tener un f.d.p. total de 0,85 ($\varphi_T = \arccos 0{,}85 = 31{,}8^\circ$), se debe cumplir que la potencia compleja total ha de ser igual a la suma de las potencias complejas de las cargas: carga 1 + motor síncrono, es decir:

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_m = (162{,}5 + j190) + (85{,}23 + jQ_m) = S_T\angle 31{,}8^\circ \qquad \text{a)}$$

En la Figura 5.15 se muestra el esquema eléctrico de la instalación y la composición fasorial de la suma de las potencias complejas de la ecuación anterior. El problema se puede resolver de forma analítica o gráfica, tal como señala la figura anterior. Desde el punto de vista analítico, si se tiene en cuenta la ecuación a) se puede poner:

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_m = (162{,}5 + j190) + (85{,}23 + jQ_m) = S_T\cos 31{,}8° + jS_T \operatorname{sen} 31{,}8° \qquad \text{b)}$$

que al igualar partes reales e imaginarias da lugar a las ecuaciones siguientes:

$$S_T\cos 31{,}8° = 0{,}85 S_T = 162{,}5 + 85{,}23 \; ; \; S_T \operatorname{sen} 31{,}8° = 0{,}527 S_T = 190 + Q_m \qquad \text{c)}$$

cuyos resultados son:

$$S_T = \frac{162{,}5 + 85{,}23}{0{,}85} = 291{,}45 \text{ kVA} \; ; \; Q_m = 0{,}527 \cdot 291{,}45 - 190 = -36{,}4 \text{ kVAr} \qquad \text{d)}$$

por lo tanto la expresión compleja de la potencia suministrada por el motor síncrono es:

$$\mathbf{S}_m = (85{,}23 - j36{,}4) = 92{,}7\angle 23{,}1°$$

y su factor de potencia es:

$$\cos\varphi_m = \cos 23{,}1° = 0{,}919$$

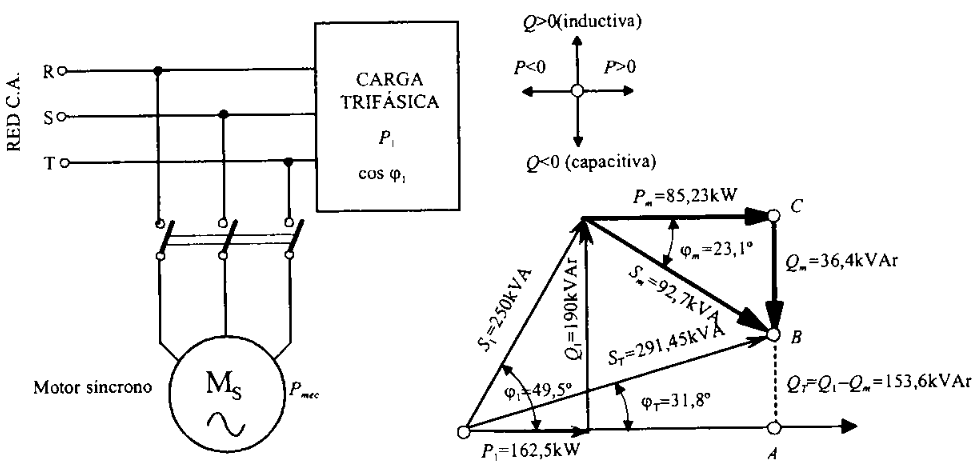


Figura 5.15

b) Si se toma la tensión simple de la red como referencia de fases, se pueden expresar los fasores de tensión y corriente del motor síncrono del siguiente modo:

$$\mathbf{V} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0° = 219{,}39\angle 0° \text{ V} \; ; \; I = \frac{92700}{\sqrt{3}\cdot 380} = 140{,}84 \Rightarrow \mathbf{I} = 140{,}84\angle 23{,}17° \text{ A}$$

por lo que f.e.m. inducida por fase en el motor síncrono es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - \mathbf{ZI} = 219{,}39\angle 0° - j0{,}5\cdot 140{,}84\angle 23{,}17° = 255{,}4\angle -14{,}7° \text{ V}$$

que corresponde a un módulo de la tensión compuesta o de línea:

$$E_0 \text{ (línea)} = \sqrt{3}\cdot 255{,}4 = 442{,}4 \text{ voltios}$$

Problema 5.30

Una industria absorbe una potencia activa de 2000 kW con f.d.p. 0,6 inductivo de una red de 6000 V. Se coloca un motor síncrono conectado en estrella que va a desarrollar una potencia mecánica de 400 kW con rendimiento 0,8 para elevar el f.d.p. de la instalación a la unidad. a) Determinar la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja. b) Si el motor tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 2 Ω/fase, estando la curva de vacío determinada por la ecuación:

$$E_o = \frac{9000 I_e}{30 + I_e}$$

donde E_0 se expresa en voltios de línea e I_e en amperios de excitación, calcular la f.e.m. E_0 del motor y la excitación necesaria en el inductor.

Solución

a) Como la industria absorbe 200 kW con f.d.p. 0,6 inductivo (arcos 0,6=53,13°), la potencia reactiva es igual a 200 tg53,13° = 2666,67 y la potencia compleja de la carga es:

$$\mathbf{S} = 2000 + j2666{,}67$$

El motor desarrolla una potencia mecánica de 400 kW, y como el rendimiento es 0,8, la potencia activa que debe absorber de la red es:

$$P = \frac{400}{0{,}8} = 500 \text{ kW}$$

por lo que la potencia compleja del motor síncrono se puede escribir del modo siguiente:

$$\mathbf{S}_m = 500 - jQ$$

De este modo la potencia compleja del conjunto de la industria (incluyendo el motor síncrono), vale:

$$\mathbf{S}_{\text{TOTAL}} = (2000 + j2666{,}67) + (500 - jQ)$$

Como el f.d.p. de toda la instalación es la unidad, significa que la parte imaginaria anterior es nula, por lo que la potencia reactiva del motor debe ser de Q = 2666,67 kVAr. En definitiva, la expresión compleja de la potencia del motor síncrono es:

$$\mathbf{S}_m = 500 - j2666{,}67 = 2713{,}1\angle -79{,}38°$$

es decir, el motor síncrono tiene una potencia compleja de 2713,1 kVA con un f.d.p.:

$$\cos 79{,}38° = 0{,}184 \text{ capacitivo}$$

b) De acuerdo con el resultado anterior, la corriente que absorbe el motor síncrono de la red es:

$$I = \frac{2713100}{\sqrt{3}\cdot 6000} = 261{,}1 \text{ amperios}$$

y al tomar la tensión simple de la red como referencia de fases se tiene:

$$\mathbf{V} = \frac{6000}{\sqrt{3}}\angle 0° \text{ V} \; ; \; \mathbf{I} = 261{,}1\angle 79{,}38° \text{ A}$$

por lo que la f.e.m. inducida en el motor síncrono es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - \mathbf{ZI} = \frac{6000}{\sqrt{3}}\angle 0° - j2 \cdot 261,1\angle 79,38° = 3464,1\angle 0° - 522,2\angle 169,38° = 3978,5\angle -1,39° \text{ V}$$

que corresponde a un módulo de la tensión compuesta o de línea:

$$E_0 \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 3978,5 = 6891 \text{ voltios}$$

Llevando esta tensión a la curva de vacío, resulta una corriente de excitación en el motor:

$$6891 = \frac{9000 I_e}{30 + I_e} \Rightarrow I_e = 98 \text{ amperios}$$

Problema 5.31

Un alternador hidráulico de polos salientes de 1500 kVA, 3000 V, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una reactancia síncrona de eje directo $X_d = 2\ \Omega$, y una reactancia síncrona en el eje cuadratura $X_q = 1,5\ \Omega$. Calcular la f.e.m. inducida cuando trabaja a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

Teoría previa

En la Figura 5.16 se muestra el diagrama fasorial de un alternador de polos salientes. La f.e.m. de vacío, si se desprecia la resistencia del inducido, viene expresada por la ecuación:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_d\mathbf{I}_d + jX_q\mathbf{I}_q \tag{a}$$

Expresión que se puede escribir del siguiente modo equivalente:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_d\mathbf{I}_d + jX_q\mathbf{I}_q + (jX_q\mathbf{I}_d - jX_q\mathbf{I}_d) \tag{b}$$

Es decir:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_q(\mathbf{I}_d + \mathbf{I}_q) + j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d = \mathbf{V} + jX_q\mathbf{I} + j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d \tag{c}$$

y denominando como f.e.m. $\mathbf{E}'$ a $\mathbf{V} + jX_q\mathbf{I}$, la expresión (c) se puede escribir así:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}' + j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d \tag{d}$$

Obsérvese, en la Figura 5.16, que el fasor $j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d$ tiene la misma dirección que la f.e.m. de vacío $\mathbf{E}_0$, lo que permite definir la alineación de la f.e.m. anterior, que es la misma dirección que la f.e.m. $\mathbf{E}'$. En definitiva, la Figura 5.16 es un método inteligente de determinar la posición del fasor de f.e.m. Lo anterior implica que el ángulo de carga δ de la f.e.m. $\mathbf{E}'$ es el mismo que el de la f.e.m. de vacío $\mathbf{E}_0$.

En este problema la corriente de plena carga de alternador es:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}V} = \frac{1500000}{\sqrt{3} \cdot 3000} = 288,7 \text{ A}$$

y si se toma como referencia de fases la tensión simple de la red, las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente del alternador son, respectivamente:

$$\mathbf{V} = \frac{3000}{\sqrt{3}}\angle 0° = 1732,1\angle 0° \text{ V} \ ; \ \mathbf{I} = 288,7\angle -36,87° \text{ A}$$

por consiguiente, la f.e.m. $\mathbf{E}'$ vale:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{V} + jX_q\mathbf{I} = 1732,1\angle 0° + j1,5 \cdot 288,7\angle -36,87° = 1992 + j346,35 = 2022\angle 9,9°$$

lo que significa que el ángulo de carga del alternador es de 9,9°. Si se tiene en cuenta el diagrama fasorial de la Figura 5.16, el ángulo Ψ que forman $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{I}$ vale:

$$\Psi = \delta + \varphi = 9,9° + 36,87° = 46,77°$$

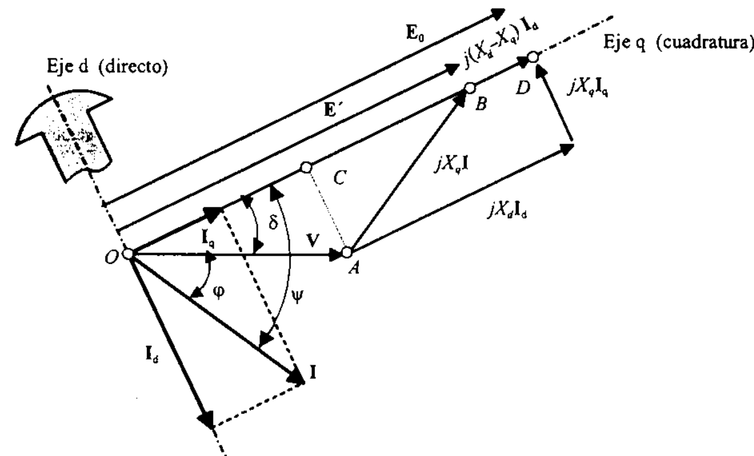


Figura 5.16

El ángulo anterior permite descomponer la corriente de inducido I en sus componentes en el eje directo y cuadratura del alternador, lo que da lugar a:

$$I_d = I\text{sen}\Psi = 288,7\text{sen}46,77° = 198 \text{ A} \ ; \ I_q = I\cos\Psi = 288,7\cos 46,77° = 210 \text{ A}$$

y para obtener la f.e.m. de vacío E_0 se puede sumar *aritméticamente* la magnitud de la f.e.m. E' con la magnitud $(X_d - X_q)I_d$, cuyo valor es:

$$(X_d - X_q)I_d = (2 - 1,5)198 = 99 \text{ voltios}$$

por lo que la f.e.m. de vacío tiene una magnitud:

$$E_0 = E' + (X_d - X_q)I_d = 2022 + 99 = 2121 \text{ voltios}$$

y su expresión fasorial es:

$$\mathbf{E}_0 = 2121\angle 9,9° \text{ voltios/fase}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$E_0 \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 2121 = 3674 \text{ voltios}$$

Problema 5.32

El alternador hidráulico del problema anterior trabaja en las condiciones señaladas, es decir, generando una tensión de 2121 V/fase en una red de 3000 V de tensión compuesta. a) Calcular la potencia activa máxima que puede suministrar a la red; b) determinar la máxima potencia aparente que puede entregar a la red.

Solución

Teoría previa

En la Figura 5.17 se muestra el diagrama fasorial de un alternador de polos salientes, en el que se ha elegido como referencia de fases la f.e.m. de vacío por fase. Por ello la expresión fasorial de la tensión simple de la red es de la forma $\mathbf{V} = V\angle -\delta$. Las magnitudes o módulos de las corrientes de eje directo y cuadratura se pueden obtener de forma muy simple a partir del diagrama fasorial de la figura, y valen:

$$I_q = \frac{V\text{sen}\delta}{X_q} \quad ; \quad I_d = \frac{E_0 - V\cos\delta}{X_d} \tag{a}$$

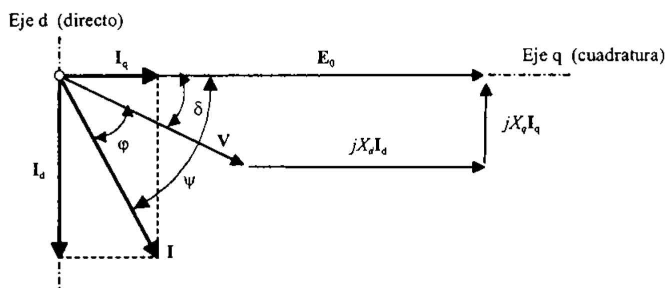


Figura 5.17

en consecuencia, el valor de la potencia compleja que entrega el generador a la red viene expresada por:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{VI}^* = 3V\angle -\delta\,(I_q\angle 0° + I_d\angle -90°) \tag{b}$$

que al sustituir los valores calculados en (a) resulta:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{VI}^* = 3V(\cos\delta - j\text{sen}\delta)\left(\frac{V\text{sen}\delta}{X_q} - j\frac{E_0 - V\cos\delta}{X_d}\right) \tag{c}$$

que operando nos da:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{VI}^* = 3\left[\frac{E_0V}{X_d}\text{sen}\delta + \frac{V^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\text{sen}2\delta\right] + j3\left[\frac{E_0V}{X_d}\text{sen}\delta - V^2\left(\frac{\text{sen}^2\delta}{X_q} + \frac{\cos^2\delta}{X_d}\right)\right] \tag{d}$$

Es decir, las expresiones de la potencia activa y reactiva que desarrolla un alternador de polos salientes vienen determinadas por las ecuaciones siguientes:

$$P = 3\left[\frac{E_0V}{X_d}\text{sen}\delta + \frac{V^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\text{sen}2\delta\right] \quad ; \quad Q = 3\left[\frac{E_0V}{X_d}\text{sen}\delta - V^2\left(\frac{\text{sen}^2\delta}{X_q} + \frac{\cos^2\delta}{X_d}\right)\right] \tag{e}$$

a) En este problema, y de acuerdo con los datos y resultados del ejercicio anterior, se conocen los siguientes valores:

$$X_d = 2\ \Omega\ ;\ X_q = 1{,}5\ \Omega\ ;\ V = 1732{,}1\ \text{V}\ ;\ E_0 = 2121\ \text{V}$$

Por lo que, al sustituir los valores anteriores en la expresión de la potencia activa, resulta:

$$P = 3\left[\frac{2121\cdot 1732{,}1}{2}\text{sen}\delta + \frac{1732{,}1^2}{2}\left(\frac{1}{1{,}5} - \frac{1}{2}\right)\text{sen}2\delta\right] = 5{,}51\text{sen}\delta + 0{,}75\text{sen}2\delta \quad \text{MW}$$

para que la potencia anterior sea máxima, la derivada con respecto al ángulo de carga debe ser cero, es decir:

$$\frac{dP}{d\delta} = 0 \Rightarrow 5{,}51\cos\delta + 1{,}5\cos 2\delta = 0$$

y teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\cos 2\delta = \cos^2\delta - sen^2\delta = 2\cos^2\delta - 1$$

da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3\cos^2\delta + 5{,}51\cos\delta - 1{,}5 = 0$$

de donde se deduce un ángulo $\delta \approx 76°$. El lector puede comprobar que, para este ángulo de carga, la potencia activa es máxima. Solamente tiene que calcular la derivada segunda de la potencia respecto de δ y ver que es negativa. Para este valor de δ, la potencia activa vale:

$$P_{max} = 35{,}51\text{sen}76° + 0{,}75\text{sen}152° \approx 5{,}7\ \text{MW}$$

b) Para ver el valor de la potencia aparente máxima es preciso calcular el valor de la potencia reactiva para el mismo ángulo anterior, que da lugar a:

$$Q \approx 3\left[\frac{2121\cdot 1732{,}1}{2}\text{sen}76° - 1732{,}1^2\left(\frac{\text{sen}^2 76°}{1{,}5} + \frac{\cos^2 76°}{2}\right)\right] \approx -4{,}06\ \text{MVAr}$$

y por lo tanto la potencia aparente máxima es:

$$S_{max} = \sqrt{P_{max}^2 + Q^2} = \sqrt{5{,}7^2 + 4{,}06^2} \approx 7\ \text{MVA}$$

Problema 5.33

Un motor síncrono trifásico de polos salientes conectado en estrella de 500 kVA, 400 V, tiene una resistencia de inducido despreciables y las reactancias síncronas de eje directo y cuadratura son respectivamente X_d = 0,32 Ω, X_q = 0,2 Ω. Calcular la f.e.m. de línea cuando absorbe de la red la potencia de 500 kVA con un f.d.p. 0,8 capacitivo.

Solución

Teoría previa

En la Figura 5.18 se muestra el diagrama fasorial de un alternador de polos salientes. La f.e.m. de vacío, si se desprecia la resistencia del inducido, viene expresada por la ecuación:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - jX_d\mathbf{I}_d - jX_q\mathbf{I}_q \tag{a}$$

Expresión que se puede escribir del siguiente modo equivalente:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - j\,X_d\,\mathbf{I}_d - j\,X_q\,\mathbf{I}_q + (j\,X_q\,\mathbf{I}_d - j\,X_q\,\mathbf{I}_d) \qquad \text{(b)}$$

es decir:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - j\,X_q\,(\mathbf{I}_d + \mathbf{I}_q) - j\,(X_d - X_q)\,\mathbf{I}_d = \mathbf{V} - j\,X_q\,\mathbf{I} - j\,(X_d - X_q)\,\mathbf{I}_d \qquad \text{(c)}$$

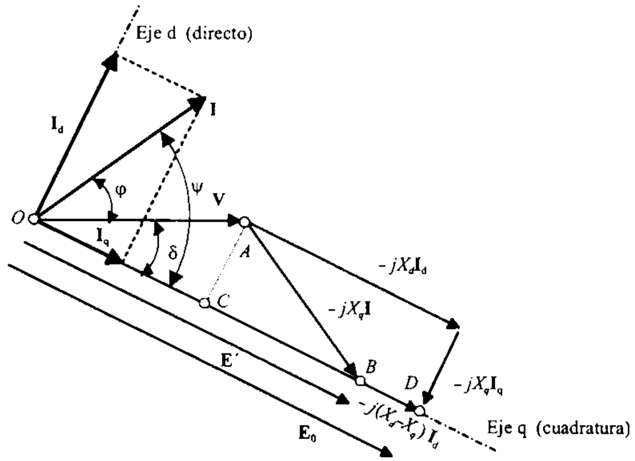


Figura 5.18

y denominando f.e.m. $\mathbf{E}'$ a $\mathbf{V} - j\,X_q\,\mathbf{I}$, la expresión (c) se puede escribir así:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}' - j\,(X_d - X_q)\,\mathbf{I}_d \qquad \text{(d)}$$

Obsérvese, en la Figura 5.18, que el fasor $-j\,(X_d - X_q)\,\mathbf{I}_d$ tiene la misma dirección que la f.e.m. de vacío $\mathbf{E}_0$, lo que permite definir la alineación de la f.e.m. anterior, que es la misma dirección que la f.e.m. $\mathbf{E}'$. En definitiva, la Figura 5.18 es un método inteligente de determinar la posición del fasor de f.e.m. Lo anterior implica que el ángulo de carga δ de la f.e.m. $\mathbf{E}'$ es el mismo que el de la f.e.m. de vacío $\mathbf{E}_0$.

En este problema la corriente de plena carga de alternador es:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\,V} = \frac{500000}{\sqrt{3}\cdot 400} = 721{,}7 \text{ A}$$

y si se toma como referencia de fases la tensión simple de la red, las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente del alternador son respectivamente:

$$\mathbf{V} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0° = 230{,}94\angle 0° \text{ V} \quad ; \quad \mathbf{I} = 721{,}7\angle +36{,}87° \text{ A}$$

por consiguiente, la f.e.m. $\mathbf{E}'$ vale:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{V} - jX_q\mathbf{I} = 230{,}94\angle 0° - j0{,}2\cdot 721{,}7\angle +36{,}87° = 338\angle -20° \text{ V}$$

lo que significa que el ángulo de carga del alternador es de 20°. Si se tiene en cuenta el diagrama fasorial de la Figura 5.18, el ángulo Ψ que forman $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{I}$ es:

$$\Psi = \delta + \varphi = 20° + 36{,}87° = 56{,}87°$$

El ángulo anterior permite descomponer la corriente de inducido $\mathbf{I}$ en sus componentes en el eje directo y cuadratura del alternador, lo que da lugar a:

$$I_d = I\text{sen}\Psi = 721{,}7\text{sen}56{,}87° = 604{,}4 \text{ A} \quad ; \quad I_q = I\cos\Psi = 721{,}7\cos 56{,}87° = 394{,}4 \text{ A}$$

y para obtener la f.e.m. de vacío E_0 se pueden sumar *aritméticamente* la magnitud de la f.e.m. E' con la magnitud $(X_d - X_q)I_d$, cuyo valor es:

$$(X_d - X_q)I_d = (0{,}32 - 0{,}2)604{,}4 = 72{,}5 \text{ voltios}$$

por lo que la f.e.m. de vacío tiene una magnitud:

$$E_0 = E' + (X_d - X_q)I_d = 338 + 72{,}5 = 410{,}5 \text{ voltios}$$

Su expresión fasorial es:

$$\mathbf{E}_0 = 410{,}5\angle -20° \text{ voltios/fase}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$E_0\,(\text{línea}) = \sqrt{3}\cdot 410{,}5 = 711 \text{ voltios}$$

Problema 5.34

Un alternador trifásico conectado en estrella de 100 kVA, 3000 V, 50 Hz, está trabajando en vacío con la tensión nominal en sus bornes. De repente, se produce un cortocircuito trifásico en sus terminales. El generador tiene unas resistencias del inductor y el inducido despreciables, las reactancias en valores por unidad son: reactancia síncrona: $X_S = 1$; reactancia síncrona transitoria: $X'_S = 0{,}4$; reactancia síncrona subtransitoria: $X''_S = 0{,}2$, y las constantes de tiempo son: constante de tiempo transitoria=1 segundo; constante de tiempo subtransitoria=0,03 segundos. Despreciando la componente de c.c. de la corriente, calcular: a) corriente inicial de cortocircuito; b) corriente al final de tres ciclos, de siete ciclos y al cabo de cinco segundos.

Solución

Teoría previa

En la Figura 5.19 se muestra un oscilograma de la componente de c.a. de cortocircuito, es decir, habiendo eliminado la componente de c.c. La expresión matemática de esta señal es:

$$I_{corto}(t) = (I'' - I')\,e^{-t/T''} + (I' - I_{corto})e^{-t/T'} + I_{corto} \qquad \text{(a)}$$

En la expresión anterior, I' es la corriente transitoria de cortocircuito, I'' es la componente subtransitoria e I_{corto} es la corriente de cortocircuito permanente y vienen definidas respectivamente por las expresiones siguientes:

$$I' = \frac{E_0}{X'_S} \; ; \; I'' = \frac{E_0}{X''_S} \; ; \; I_{corto} = \frac{E_0}{X_S} \qquad \text{(b)}$$

a) La corriente inicial de cortocircuito es, de acuerdo con el oscilograma de la Figura 5.19, la componente subtransitoria. En valores por unidad, la tensión entre terminales es la asignada, es decir 1 p.u., y tomando la potencia del generador como base, la corriente base de los cálculos es:

$$I_{base} = \frac{100000}{\sqrt{3}\cdot 3000} = 19{,}25 \text{ A}$$

siendo la corriente subtransitoria, de acuerdo con (b):

$$I'' = \frac{E_0}{X''_s} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ p.u.}$$

que corresponde a un valor real de 5 · 19,25 = 96,25 A.

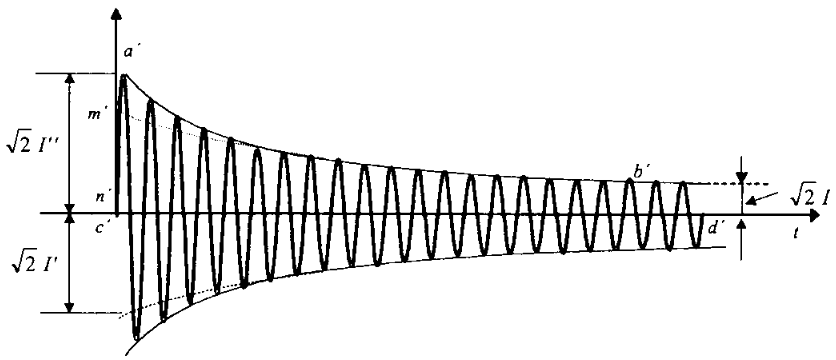


Figura 5.19

b) La corriente transitoria de cortocircuito, de acuerdo con (b), tiene un valor:

$$I' = \frac{E_0}{X'_s} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ p.u.}$$

y la corriente de cortocircuito permanente es:

$$I_{corto} = \frac{E_0}{X_s} = \frac{1}{1} = 1 \text{ p.u.}$$

De este modo, el valor instantáneo de la corriente de cortocircuito de acuerdo con (a), vale:

$$I_{corto}(t) = 2,5\, e^{-t/0,03} + 1,5\, e^{-t} + 1$$

Como la frecuencia del alternador es f = 50Hz, el período correspondiente es $T = 1/f$ = 20ms, por lo que tres ciclos equivalen a 60ms, que al llevar a la expresión anterior nos da:

$$I_{corto}(t{=}60\text{ms}) = 2,5\, e^{-0,060/0,03} + 1,5\, e^{-0,060} + 1 = 0,34+1,41+1 = 2,75 \text{ p.u.}$$

Al final de siete ciclos, es decir, de 140ms, la corriente de cortocircuito vale:

$$I_{corto}(t{=}0,140\text{s}) = 2,5\, e^{-0,140/0,03} + 1,5\, e^{-0,140} + 1 = 0,024+1,3+1 = 2,324 \text{ p.u.}$$

y al cabo de cinco segundos, la corriente de cortocircuito vale:

$$I_{corto}(t{=}10\text{s}) = 2,5\, e^{-5/0,03} + 1,5\, e^{-5} + 1 = 0+0,01+1 = 1,01 \text{ p.u.}$$

Prácticamente la corriente es de cortocircuito permanente.

Problema 5.35

En la Figura 5.20 se muestra una instalación trifásica que se compone de un alternador de A.T. a principio de línea, un transformador reductor y una red de B.T., de impedancia total 0,06+j0,08 Ω/hilo, que alimenta al final de la misma a un motor asíncrono trifásico, existiendo en el punto mitad de esta red de B.T. un motor síncrono que se utiliza para mover una carga mecánica y además para corregir la potencia reactiva de la instalación.

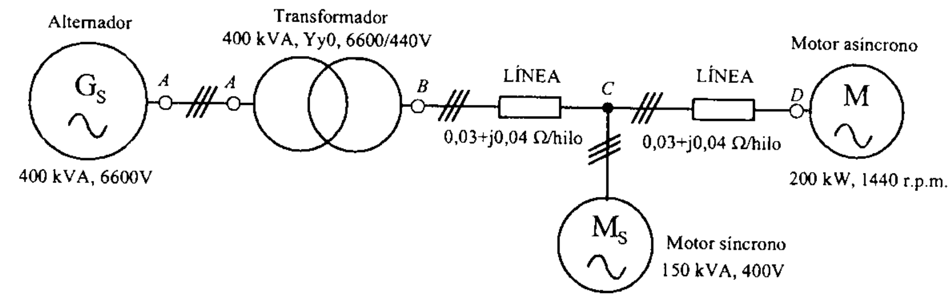


Figura 5.20

Las especificaciones de las máquinas eléctricas mostradas en la Figura 5.20 son las siguientes:

1) *TRANSFORMADOR: potencia: 400 kVA, conexión Yy0, relación 6600/440 V, P_{cc}=6 kW; ε_{cc}=4%; I_0=despreciable.*

2) *MOTOR ASÍNCRONO: potencia mecánica: 200 kW, 400 V, 4 polos, 50 Hz, conexión estrella, velocidad 1440 r.p.m. Se sabe además que la impedancia del estátor es despreciable y que la reactancia del rotor es 12 veces la resistencia del mismo. Las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío son despreciables.*

3) *MOTOR SÍNCRONO: potencia: 150 kVA, 400 V, 8 polos, 50 Hz, conexión estrella; las pérdidas mecánicas y en el hierro son despreciables.*

4) *ALTERNADOR: potencia: 400 kVA, 6600 V, 6 polos, 50 Hz, conexión estrella; impedancia síncrona: 2+j8Ω/fase. La curva de vacío del alternador está definida por la ecuación:*

$$E_0 = \frac{16000\, I_e}{12 + I_e}$$

siendo E_0 la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación del alternador.

Se considera en todo el problema que el motor asíncrono o de inducción, conectado a final de línea, funciona a plena carga, es decir, desarrolla una potencia mecánica de 200 kW cuando gira a 1440 r.p.m.

a) Si la tensión en bornes del motor asíncrono o de inducción es la asignada de 400 V, calcular la tensión que debe existir en los bornes del motor síncrono para que se cumplan las especificaciones de funcionamiento del motor asíncrono. b) Calcular la potencia aparente y el f.d.p. con el que trabaja el motor síncrono, sabiendo que absorbe de la red una potencia activa de 60 kW y que debe elevar el f.d.p. de la instalación en el punto de conexión C a la unidad. c) Calcular la tensión secundaria del transformador para que el motor asíncrono funcione a plena carga y a su tensión nominal de 400 V de línea, teniendo en cuenta el consumo existente a mitad de la línea del motor síncrono. d) Calcular en el caso anterior la tensión primaria del transformador. e) Calcular la corriente de excitación necesaria en el alternador para que funcione toda la instalación en las condiciones señaladas.

Solución

a) El circuito equivalente por fase del motor asíncrono reducido al estátor es el mostrado en la Figura 5.21. Teniendo en cuenta que tiene 4 polos y que la frecuencia es de 50 Hz, la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r.p.m.} \tag{1}$$

y como gira a una velocidad de 1440 r.p.m., el deslizamiento correspondiente es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1500 - 1440}{1500} = 4\% \tag{2}$$

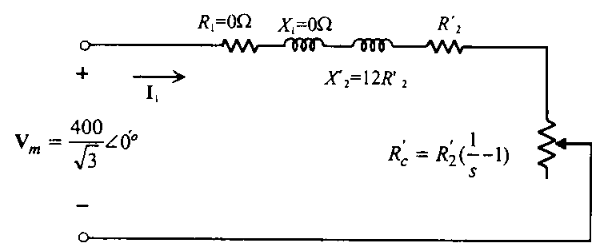


Figura 5.21

Como la tensión compuesta en bornes del motor es de 400 voltios, y está conectado en estrella, la tensión simple vale $V_m = V_1 = 400/\sqrt{3}$. Si se toma esta tensión como referencia de fases, y sabiendo que la reactancia del rotor es doce veces su resistencia, la corriente que absorbe el motor con un deslizamiento del 4%, es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0°}{\frac{R'_2}{0,04} + jX'_2} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0°}{25R'_2 + j12R'_2} \text{ amperios} \tag{3}$$

y como la potencia mecánica a plena carga es de 200 kW, al ser esta la potencia absorbida por la resistencia de carga, se puede escribir la siguiente ecuación:

$$P_{mi} = 200000 = 3R'_c I_1^2 = 3R'_2\left(\frac{1}{0,04} - 1\right)\frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{(25R'_2)^2 + (12R'_2)^2} \tag{4}$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$R'_2 = 0,025\ \Omega\ ;\ X'_2 = 12R'_2 = 0,03\ \Omega \tag{5}$$

y llevando estos resultados a la ecuación (3), resulta una corriente compleja en el motor:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0°}{0,625 + j0,3} = 333,12\angle -25,64° \text{ A} \tag{6}$$

De acuerdo con la Figura 5.20, la tensión en los bornes del motor síncrono es la tensión en el nudo *C* de la red, y la tensión en el motor asíncrono o de inducción, es la tensión en el nudo *D*. Si se continúa tomando la tensión en este nudo como referencia de fases, la tensión simple en el nudo *C* es igual a la tensión en el nudo *D* más la caída de tensión en la impedancia de línea en el tramo *CD*, es decir:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_D + (R_{CD} + jX_{CD})\mathbf{I}_1 = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0,03 + j0,04)333,12\angle -25,64° = 245,83\angle 1,8° \text{ V} \tag{7}$$

es decir, la tensión simple en el nudo *C* es de 245,83 voltios que corresponde a una tensión compuesta:

$$V_C \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 245,83 = 425,8 \text{ V} \tag{8}$$

b) En el nudo *C*, se tiene, por lo tanto, una potencia activa total (sin tener en cuenta la carga del motor síncrono) de valor:

$$P = 3V_c I_1 \cos(1,8 + 25,64°) = 3 \cdot 245,83 \cdot 333,12 \cdot \cos 27,44° \approx 218 \text{ kW} \tag{9}$$

donde se ha tenido en cuenta que la tensión forma con la corriente un ángulo de 27,44°. La potencia anterior puede comprobarse sumando las potencias siguientes: mecánica del motor asíncrono, más pérdidas en el cobre del motor asíncrono, más pérdidas en el tramo de la línea *CD*, es decir:

$$P = P_{mi} + 3R_L I_1^2 + 3R'_2 I_1^2 = 200000 + 3 \cdot 0,03 \cdot 333,12^2 + 3 \cdot 0,025 \cdot 333,12^2 = 218,3 \text{ kW} \approx 218 \text{ kW} \tag{10}$$

que coincide con la anterior (salvo errores de redondeo). En definitiva, la carga que se ve desde el nudo *C* hacia la derecha de la Figura 5.20, es una potencia activa de 218 kW con un ángulo inductivo de 27,44°. Esto significa una potencia compleja:

$$\mathbf{S}_{carga} = 218 + j218\,\text{tg}27,44° = 218 + j113,2 \text{ kVA}$$

como quiera entonces que en el nudo *C* se conecta un motor síncrono que absorbe una potencia activa de 60 kW y que debe elevar el f.d.p. total hasta la unidad, la potencia total compleja $\mathbf{S}_{total}$ que entra al nudo *C*, por el tramo de línea *BC* deberá ser la suma compleja siguiente:

$$\mathbf{S}_{total} = \mathbf{S}_{carga} + \mathbf{S}_{síncrono} = (218 + j113,2) + (60 + jQ_{síncrono}) \text{ kVA} \tag{11}$$

que debe dar como resultado un número real, ya que el motor síncrono ha de compensar la potencia reactiva que existe a la derecha del punto *C*. Por consiguiente, es evidente que la potencia compleja del motor síncrono será:

$$\mathbf{S}_{síncrono} = 60 - j113,2 = 128,12\angle -62,07° \text{ kVA} \tag{12}$$

es decir, el motor síncrono trabaja absorbiendo una potencia aparente de 128,12 kVA, con un f.d.p. capacitivo igual al cos 62,07° = 0,468.

c) Recapitulando los cálculos hasta el momento, en el nudo *C* existe una potencia compleja total, de acuerdo con (11) y (12):

$$\mathbf{S}_{total} = 278 + j0 \text{ kVA} \tag{13}$$

y para mayor sencillez en los cálculos, es interesante ahora tomar la tensión en el nudo *C* como referencia de fases, de tal modo que la corriente total que llega a este nudo esté en fase con la tensión, debido a la acción correctora del motor síncrono. La corriente total que debe llegar por el tramo *BC* se puede obtener de un modo simple, sabiendo que la potencia que llega a *C* es de 278 kW con f.d.p. unidad y, por consiguiente, se tiene una corriente que vamos a denominar I_{BC}, que vale:

$$I_{BC} = \frac{278000}{3 \cdot 245,83 \cdot 1} = 376,95 \text{ A} \tag{14}$$

Vamos a determinar, a continuación, la tensión en el nudo B, es decir, en el secundario del transformador. Para ello, a la tensión en el nudo C habrá que sumar la caída de tensión en el tramo BC de la línea y, teniendo en cuenta la referencia de fases que se ha señalado, se cumple:

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C + (R_{BC} + jX_{BC})\mathbf{I}_{BC} = 245,83\angle 0° + (0,03 + j0,04)376,95\angle 0° = 257,6\angle 3,4° \text{ V} \quad (15)$$

es decir, la tensión compuesta en el secundario del transformador es:

$$V_B \text{ (línea)} = V_2 \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 257,6 = 446,1 \text{ V} \quad (16)$$

d) Antes de comenzar a resolver este apartado, debe calcularse la impedancia de cortocircuito del transformador a partir de los datos del fabricante. Se va a determinar esta impedancia reducida al primario del transformador. Téngase en cuenta que la caída de tensión relativa de cortocircuito del transformador es del 4 por ciento y que las pérdidas en cortocircuito son de 6 kW. Como quiera que el transformador es de 400 kVA y la tensión asignada de primario es de 6600 voltios, la corriente nominal o asignada al primario es:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{\sqrt{3}\, V_{1n}} = \frac{400000}{\sqrt{3}\ 6600} \approx 35 \text{ A} \quad (17)$$

y de la definición de caída de tensión relativa en la impedancia de cortocircuito, se tiene:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{Z_{cc1} I_{1n}}{V_{1n}} \Rightarrow 0,04 = \frac{Z_{cc1} 35}{6600/\sqrt{3}} \Rightarrow Z_{cc1} = 4,35\ \Omega \quad (18)$$

Teniendo en cuenta el valor de las pérdidas en cortocircuito (es decir, con corriente de plena carga), denominando R_{cc1} a la resistencia de cortocircuito del transformador reducida al primario, se cumple:

$$P_{cc} = 3R_{cc1} I_{1n}^2 \Rightarrow 6000 = 3R_{cc1} 35^2 \Rightarrow R_{cc1} = 1,63\ \Omega \quad (19)$$

y con estos resultados se puede calcular la reactancia de cortocircuito del transformador reducida al primario del siguiente modo:

$$X_{cc1} = \sqrt{Z_{1cc}^2 - R_{1cc}^2} = \sqrt{4,35^2 - 1,63^2} = 4,03\ \Omega \Rightarrow \mathbf{Z}_{cc1} = 1,63 + j4,03\ \Omega \quad (20)$$

Además, la relación de transformación y la corriente reducida al primario son, respectivamente:

$$m = \frac{6600}{440} = 15 \Rightarrow \frac{\mathbf{I}_{BC}}{m} = \frac{376,95\angle 0°}{15} = 25,13\angle 0° \text{ A} \quad (21)$$

por lo que la tensión primaria se calculará de este modo:

$$\mathbf{V}_i = m\mathbf{V}_2 + (R_{cc1} + jX_{cc1})\frac{\mathbf{I}_{BC}}{m} = 15 \cdot 257,6\angle 3,4° + (1,63 + j4,03)25,13\angle 0° \angle 3911,8\angle 4,8° \text{ V} \quad (22)$$

que corresponde a una tensión compuesta en el primario del transformador, es decir, en el nudo A de entrada de la Figura 5.20:

$$V_1 \text{ (línea)} = V_A \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 3911,8 = 6775,4 \text{ V} \quad (23)$$

e) La tensión anterior es la que existe en bornes del alternador y teniendo en cuenta el valor de su impedancia síncrona, la f.e.m. necesaria en el alternador debe ser:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V}_A + (R + jX_S)\frac{\mathbf{I}_{BC}}{m} = 3911,8\angle 4,8° + (2 + j8)25,13\angle 0° \approx 3983,6\angle 7,6° \text{ V} \quad (24)$$

que corresponde a una f.e.m. compuesta en el alternador:

$$E_0 \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 3983,6 = 6900 \text{ V} \quad (25)$$

Para generar la f.e.m. anterior, es necesaria una corriente de excitación, que se obtiene de la curva de vacío del transformador del siguiente modo:

$$E_0 = \frac{16000 I_e}{12 + I_e} \Rightarrow 6900 = \frac{16000 I_e}{12 + I_e} \Rightarrow I_e = 9,1 \text{ A} \quad (26)$$

que es el resultado solicitado.

Problemas suplementarios

Problema 5.36

Un alternador trifásico, conectado en estrella, de 250 kVA, 400 V, 10 polos, 50 Hz, gira a 600 r.p.m., generando la tensión de 400 V en vacío. Se provoca a continuación un cortocircuito en los terminales del inducido dando lugar a una corriente en el mismo de 1000 A. La resistencia del inducido es despreciable. Calcular: a) la impedancia síncrona; b) la regulación de tensión del generador cuando trabaja a plena carga a la tensión de 400 V y con un f.d.p. 0,8 inductivo.

[Resp. a) 0,231 Ω; b) 25%]

Problema 5.37

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido de 2 Ω/fase. La curva de vacío se puede aproximar por la siguiente ecuación:

$$E_0 = \frac{9000 I_e}{30 + I_e}$$

en la que E_0 es la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación correspondiente. La característica de cortocircuito está definida por la ley lineal $I_{cc} = 6\,I_e$ (I_{cc}: corriente de cortocircuito del inducido; I_e: corriente de excitación). Calcular: a) impedancia síncrona; b) reactancia síncrona; c) regulación a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo, unidad y 0,8 capacitivo.

[Resp. a) 7,7 Ω; b) 7,44 Ω; c) 22%; 9,9%; –6,6%]

Problema 5.38

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1000 kVA, 6600 V, 10 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido de 3 Ω/fase. El ensayo de vacío ha dado el resultado siguiente:

I_e (A)	10	20	30	40	50	60
E_0 (línea) (V)	3300	5280	6600	7520	8050	8510

Se requiere una corriente de 10 A en la excitación para que circule la corriente de plena carga en el inducido cuando está en cortocircuito. El devanado de excitación tiene una resistencia por polo de 4 Ω y las pérdidas mecánicas y en el hierro son de 50 kW. Si el generador funciona a plena carga con un f.d.p. unidad, calcular: a) regulación de tensión correspondiente; b) rendimiento del generador.

[Resp. a) 11,8%; b) 85,3%]

Problema 5.39

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacio:

I_e (A)	4	8	12	16	20	24	28	32
E_0 (línea) (V)	1850	3700	5015	5940	6600	7130	7590	7990

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga con una excitación de 4 A. Además en un ensayo con carga inductiva pura a la tensión asignada de 6600 V de línea y con corriente de plena carga en el inducido, se necesitó una corriente de excitación de 27 A. La resistencia del inducido es de 0,5 Ω /fase. Calcular la f.e.m. necesaria en vacio y la regulación de tensión del alternador por los siguientes métodos: a) impedancia sincrona; b) Potier.

[Resp. a) 7546,5 V; 14,34%; b) 7260 V; 10%]

Problema 5.40

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, tiene una impedancia sincrona de valor $\mathbf{Z}_s = 0,5 + j\,5$ *Ω/fase y funciona a plena carga y a la tensión nominal asignada con f.d.p. 0,8 inductivo. Sin cambiar la excitación y con la misma corriente de carga alimenta una instalación que tiene un f.d.p. 0,8 capacitivo, ¿cuál será la tensión en bornes del alternador?*

[Resp. 7947 V]

Problema 5.41

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacio:

F_e (A.v./polo)	1200	2100	2700	3300	4200	5400
E_0 (línea) (V)	3760	5540	6270	6930	7590	8250

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga con una f.m.m. de excitación de 100 A.v./polo. La resistencia del inducido es de 0,6 Ω /fase y la reactancia de dispersión de 2,4 Ω/fase. Calcular la f.m.m. necesaria en los polos cuando el generador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

[Resp. 4557 A.v./polo]

Problema 5.42

Un turbogenerador sincrono trifásico con conexión en estrella se conecta a una red de potencia infinita de 10 kV, 50 Hz, y suministra a la misma una corriente de 500 A con f.d.p. unidad. La impedancia síncrona del alternador es $\mathbf{Z}_s = 2 + j\,6$ *Ω/fase. Calcular: a) ángulo de carga con el que trabaja el alternador; b) el nuevo ángulo de carga, la nueva corriente de inducido y el f.d.p. con el que trabaja la máquina cuando se eleva la corriente de excitación un 20 por ciento, sin cambiar la entrada de vapor de la turbina que mueve el generador. NOTA: El circuito magnético es lineal.*

[Resp. a) 25,6° eléctricos; b) 15,7° eléctricos; 582,2 A; 0,859 inductivo]

Problema 5.43

Dos alternadores trifásicos idénticos conectados en estrella tienen una impedancia sincrona $\mathbf{Z}_s = 0 + j\,10$ *Ω/fase y trabajan en paralelo en una pequeña red aislada. Las f.e.m. por fase generadas son* $E_1 = 223$ *V y* $E_2 = 216$ *V; estando* E_2 *adelantada respecto de* E_1 *un ángulo de 10° eléctricos. Se sabe además que la corriente de carga es de 16 A y está retrasada respecto de* E_1 *un ángulo de 36,87°. Calcular: a) f.d.p. de la carga; b) tensión común en la carga; c) corrientes suministradas por cada generador y sus f.d.p. respectivos.*

[Resp. a) 0,93; b) 175,8 V; c) 7 A f.d.p. 0,822; 9,32 A; f.d.p. 0,976]

Problema 5.44

Dos alternadores trifásicos idénticos trabajan en paralelo alimentando una impedancia de carga $\mathbf{Z}_L = 7,5 + j\,10$ *Ω/fase. Las impedancias sincronas de los alternadores son* $\mathbf{Z}_s = 0,5 + j\,2,5$ *Ω/fase. Si la f.e.m. del primero es de 230 V y la del segundo de 250 V y están en fase, calcular: a) tensión en la carga; b) potencias activas que suministran los generadores a la carga.*

[Resp. a) 219,6 V; b) 0,95 kW; 1,36 kW]

Problema 5.45

Dos alternadores idénticos conectados en estrella de 10 kV, tienen una impedancia síncrona $\mathbf{Z}_s = 5 + j50$ *Ω/fase y alimentan una carga que absorbe 1400 kW a 10kV con f.d.p. 0,8 inductivo. Ambos alternadores suministran la misma potencia activa y la excitación del primero de ellos se ajusta para que su corriente de inducido sea de 45 A y de carácter inductivo. Calcular: a) corriente que entrega a la carga el segundo alternador; b) f.d.p. con el que trabaja cada alternador; c) f.e.m. de línea del primer alternador.*

[Resp. a) 57,4 A; b) 0,898 inductivo; 0,704 inductivo; c) 12516,5 V]

Problema 5.46

Un alternador trifásico conectado en estrella está acoplado a una red de potencia infinita de 10 kV. La curva de vacio está expresada por la siguiente ecuación aproximada:

$$E_0 = \frac{26000 I_e}{135 + I_e}$$

donde E_0 *representa la f.e.m. de línea e* I_e *la corriente de excitación correspondiente. La impedancia síncrona* es $\mathbf{Z}_s = 2 + j\ 10\ \Omega$/fase. *Calcular la potencia activa suministrada a la red si la corriente de excitación es de 150 A y el ángulo de carga es de 30°.*

[Resp. 6,9 MW]

Problema 5.47

Dos alternadores hidráulicos trifásicos conectados en estrella, de 50 Hz, están acoplados en paralelo alimentando una carga conjunta de 200 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. Las ecuaciones de los reguladores de las turbinas respectivas responden a las ecuaciones siguientes:

$$f_1 = 51 - \frac{P_1}{140}\ ;\ f_2 = 50{,}7 - \frac{P_2}{150}$$

donde f_1 y f_2 son las respectivas frecuencias en Hz, y P_1 y P_2 las potencias correspondientes en MW. Calcular: a) potencias activas suministradas por cada alternador; b) frecuencia en Hz a la que trabaja el conjunto; c) se desea que los grupos funcionen exactamente a la frecuencia asignada de 50 Hz, para ello se ajusta el primer regulador para que siga la ley:

$$f_1 = A - \frac{P_1}{140}$$

¿cuál debe ser el valor de A para conseguir este objetivo?; ¿cómo se repartirán entonces la potencia de 200 MW entre los dos alternadores?

[Resp. a) P_1 = 118,3 MW; P_2 = 81,7 MW; b) 50,155 Hz; c) A= 50,68; P_1 = 95 MW; P_2 = 105 MW]

Problema 5.48

Un alternador hidroeléctrico trifásico de 40 polos debe conectarse a una red de potencia infinita, de tensión constante y de 50 Hz. Entre las fases R, S y T del alternador y las fases R, T y S de la red de potencia infinita, respectivamente, se conectan tres lámparas, utilizadas para realizar la operación de sincronización para la puesta en paralelo. Si las lámparas lucen 24 veces por minuto, determinar la velocidad del alternador.

[Resp. 148,8 r.p.m. o 151,2 r.p.m. según el sentido de iluminación de las lámparas, a derecha o a izquierda; estas velocidades corresponden a las frecuencias de 49,6 Hz o 50,4 Hz generadas por el alternador]

Problema 5.49

Dos turbogeneradores trifásicos de 50 Hz están acoplados en paralelo, alimentando una carga conjunta de 300 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. El generador 1 tiene una frecuencia en vacío de 51,5 Hz y una constante de su regulador de velocidad de 200 MW/Hz, el segundo generador tiene una frecuencia en vacío de 51 Hz y la misma constante del regulador. Calcular: a) potencias activas suministradas por cada generador; b) frecuencia a la que trabaja el conjunto; c) si se conecta una carga adicional de 100 MW, ¿cuáles serán los valores de las potencias activas suministradas por cada generador y la frecuencia común de funcionamiento?

[Resp. a) 200 MW, 100 MW; b) 50,5 Hz; c) 250 MW, 150MW, 50,25 Hz]

Problema 5.50

Un alternador hidráulico trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 4 Ω/fase. Está conectado a una red de potencia infinita de 6,6 kV de tensión compuesta, entregando una potencia de 2 MVA con f.d.p. 0,8 inductivo. Se abre el distribuidor de agua de la turbina que mueve el generador hasta que la máquina entrega a la red una potencia de 6 MVA. a) ¿Cuál es la variación del ángulo de carga del generador? b) Cuando entrega a la red una potencia de 6 MVA se reduce la excitación un 20% ¿cuál será entonces el nuevo ángulo de carga del alternador? c) Calcular en el caso anterior la corriente que entrega el generador a la red y el f.d.p. con el que trabaja. NOTA: se supone un circuito magnético lineal.

[Resp. a) El ángulo de carga oscila entre 7,5° eléctricos, cuando el generador produce una potencia de 2 MVA, hasta 29,4° eléctricos, cuando entrega a la red una potencia de 6 MVA; b) 37,9° eléctricos c) 535,7 A; 0,979 capacitivo]

Problema 5.51

Un alternador hidráulico trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 6 Ω/fase. Está conectado a una red de potencia infinita de 10 kV de tensión compuesta. En un momento determinado el alternador entrega a la red una potencia activa de 4 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. Si la posición del regulador de la turbina no se modifica, calcular el tanto por ciento de variación en la corriente de excitación que se requiere para elevar el f.d.p. con el que trabaja el alternador a la unidad. NOTA: se supone un circuito magnético lineal.

[Resp. reducción del 14,6 por ciento en la excitación respecto al valor inicial]

Problema 5.52

Un turbogenerador trifásico conectado en estrella de 1000 kVA, tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 2 Ω/fase. Está conectado a una red de potencia infinita de 3 kV de tensión compuesta, entregando una potencia de 600 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. Si se aumenta la corriente un 30 por ciento aumentando la entrada de vapor a la turbina y sin cambiar la excitación, calcular: a) variación del ángulo de carga del turbogenerador; b) potencia activa y reactiva que entrega a la red en la situación final.

[Resp. a) el ángulo de carga oscila entre 6,9° eléctricos, cuando el generador produce una potencia de 600 kW, hasta 10,3° eléctricos, cuando se reduce la excitación, pero entregando la misma potencia; b) 893 kW; 392 kVAr]

Problema 5.53

Un alternador de polos salientes conectado en estrella de 270 kVA, 400 V, tiene unas reactancias de eje directo y cuadratura X_d= 0,8 Ω y X_q= 0,6 Ω y alimenta a una carga resistiva que consume 390 A. La curva de vacío viene expresada por:

$$E_0 = \frac{1800 I_e}{70 + I_e} \quad (E_0\text{: f.e.m. de línea; } I_e\text{: corriente de excitación})$$

Calcular: a) regulación de tensión del alternador en este régimen; b) corriente de excitación requerida por el alternador.

[Resp. a) 41 A; b) 66,4%]

Problema 5.54

Un generador síncrono trifásico de rotor cilíndrico conectado en estrella está acoplado a una red de potencia infinita de 10 kV, 50 Hz y suministra a la misma una corriente de 500 A con f.d.p. unidad. La impedancia síncrona del alternador $\mathbf{Z}_s = 2 + j\,6$ *Ω/fase. Calcular: a) ángulo de carga; b) nuevo ángulo de carga, nueva corriente y el f.d.p. con el que trabaja la máquina cuando se eleva la corriente de excitación un 20 por ciento pero sin cambiar la entrada de vapor a la turbina que mueve el generador. NOTA: el circuito magnético es lineal.*

[Resp. a) 25,6° eléctricos; b) 15,7° eléctricos; 582,2 A; 0,859 inductivo]

Problema 5.55

Un motor síncrono conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 2 Ω/fase. Está conectado a una red trifásica de 2000 V de línea. Al mover un cierto par resistente, se observa que absorbe de la red una potencia activa de 800 kW, siendo la f.e.m. inducida de línea correspondiente de 2450 V. a) Calcular la corriente de línea, el ángulo de carga y el f.d.p. con el que trabaja el motor. b) Se aumenta un 30 por ciento la corriente de excitación del motor sin cambiar el par resistente, determinar el nuevo ángulo de carga y las potencias activa y reactiva que el motor absorbe de la red. c) Repetir el apartado anterior si se reduce un 30 por ciento la corriente de excitación.

[Resp. a) 248,3 A; δ=19°; 0,93 capacitivo; b) 14,6°; 800 kW; −1083 kVAr; c) 27,8°; 800 kW; +483,2 kVAr]

Problema 5.56

Un motor síncrono de 4 polos, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 4 Ω/fase. Está conectado a una red trifásica de 400 V de línea. Al mover un as par resistente, se observa que absorbe de la red una corriente de 15 A con f.d.p. unidad. Sin modificar la excitación, se aumenta el par de carga hasta que la corriente absorbida es de 60 A. Calcular en esta situación: a) potencias activa y reactiva absorbidas de la red y el f.d.p. con el que trabaja el motor; b) par desarrollado si se desprecian las pérdidas del motor.

[Resp. a) 36,3 kW; +20,2 kVAr; 0,863 inductivo; b) 231,1 N.m.]

Problema 5.57

La reactancia síncrona en valor por unidad y las constantes de tiempo de un generador síncrono de 50Hz, son las siguientes: X_s= *1,25 p.u.;* X_s'=*,0,27 p.u.;* X_s''= *0,2 p.u.; T =0,3 segundos; T'=0,05 segundos; T''=1 segundo. Estando el generador funcionando en vacío a su tensión asignada se produce un cortocircuito trifásico en sus terminales: a) determinar la expresión de la corriente instantánea de cortocircuito; b) calcular el valor de la corriente de cortocircuito al cabo de dos ciclos. NOTA: despréciese la componente de c.c. de la corriente de cortocircuito.*

[Resp. a) $i(t) = 1{,}3e^{-t} + 2{,}9e^{-20t} + 0{,}8$; b) 3,35 p.u.]

Problema 5.58

Un motor de inducción trifásico, conectado en estrella, de 1000 V, 50 Hz, tiene el rotor en jaula de ardilla con una relación de transformación de $m_v = m_i = 3{,}6$. *La resistencia del rotor por fase es de 0,01 Ω y la inductancia de 0,32 mH. Se desprecian las pérdidas mecánicas y en el hierro y también la impedancia del estátor del motor. Calcular: a) la corriente de arranque del rotor cuando se alimenta el motor a la tensión asignada de 1000 V de línea; b) el factor de potencia del rotor en el arranque; c) la corriente del rotor con el 3% de deslizamiento y la potencia mecánica útil correspondiente (que se considera que corresponde al régimen de plena carga). Este motor recibe la tensión de alimentación de un alternador conectado en estrella, que gira a 500 r.p.m. para dar la frecuencia asignada de 50 Hz, y que tiene una característica de vacío definida por la ecuación:*

$$E_0 = \frac{1800 I_e}{0{,}5 I_e + 1{,}5}$$

donde E_0 *expresa la f.e.m. de línea generada por el alternador e* I_e *la intensidad de excitación correspondiente. La resistencia interna del inducido del alternador es despreciable, la reactancia síncrona media es de 0,75 Ω /fase y las bobinas inductoras tienen una resistencia de 10 Ω por polo. Si el motor funciona con el mismo par resistente que en el apartado anterior, calcular: d) la tensión compuesta que debe aplicarse al motor para que gire a la mitad de la velocidad de plena carga; e) La excitación necesaria en el alternador en la situación del apartado anterior y la tensión continua que debe aplicarse a las bobinas inductoras en estas condiciones.*

[Resp. a) 1591 A; b) 0,1; c) 459,4 A; 205,4 kW; d) 1213 V; e) 3,32 A; 398,4 V]

Problema 5.59

Se tienen tres motores trifásicos asíncronos iguales, conectados en estrella, que absorbe cada uno de ellos a plena carga y a la tensión asignada de 3000 V de línea, una corriente de 1020 A, con f.d.p. 0,896 inductivo. Estos motores son alimentados por otros tantos transformadores trifásicos idénticos cuyos datos asignados son: 5500 kVA, 15000/3000 V, conexión Yy0, ε_{cc} *=8%,* P_{cc}*=110 kW,* I_0 *despreciable. Los primarios de los transformadores están unidos a las barras de distribución de un generador síncrono cuyas características son las siguientes: potencia, 20 MVA; conexión en estrella; frecuencia, 50 Hz; número de polos, 2; tensión compuesta asignada, 15000 V; resistencia del inducido despreciable; reactancia síncrona media por fase, 2 Ω y con una curva de vacío definida por la siguiente tabla de valores:*

E_0 (compuesta) en kV	6,6	11,3	13,6	15,5	17,2	17,9	18,4
A.v./ polo de excitación	1000	1800	2400	3000	4000	4500	5000

Se pide: a) impedancia de cortocircuito de cada uno de los transformadores reducida al primario; b) tensión que debe proporcionar el generador síncrono en barras para obtener, en los secundarios de los transformadores, las condiciones exigidas por los motores asíncronos; c) f.e.m. en vacío de línea del alternador y la excitación por polo necesaria para que los motores funcionen en el régimen de funcionamiento señalado.

[Resp. a) $\mathbf{Z}_{cc1}$=0,82+j3,17 Ω/fase; b) 15781 V; c) 16927 V; 3820 A.v./polo]

Problema 5.60

Una red trifásica de 1732 V de línea y 50 Hz alimenta un motor asíncrono conectado en estrella, que gira a una velocidad de 2910 r.p.m. De los ensayos efectuados al motor se conocen los siguientes parámetros de su circuito equivalente:

$$R_1 = R_2' = 0{,}05\ \Omega \quad ; \quad X_1 + X_2' = 1{,}02\ \Omega$$

Se sabe también que las pérdidas mecánicas son de 60 kW y la corriente de vacío despreciable. Calcular: a) corriente absorbida por el motor y su factor de potencia; b) par útil desarrollado por el motor; c) rendimiento del motor. La compañía suministradora de energía exige un factor de potencia no inferior a 0,9 y por ello se opta por incluir en paralelo con el motor anterior un motor síncrono, conectado en estrella, que ha de desarrollar una potencia mecánica de 75 kW a una velocidad de 1000 r.p.m. El rendimiento de este motor es del 90 por ciento, su impedancia síncrona es de 0,5+j4,5 Ω/fase y su característica de vacío está definida por la siguiente tabla:

E_0 (línea)	150	275	500	1000	1500	2000	2500
A.v./polo	500	900	1500	3000	4500	6000	7500

d) ¿cuál es el valor de la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja?; e)¿cuál es el valor mínimo de la excitación, en A.v./polo, del motor síncrono en el caso anterior?

[Resp. a) ≈501 A; 0,86; b) 3795 N.m.; c) 90,2%; d) 131,5 kVA; 0,634 capacitivo; e) ≈ 4500 A.v./polo]

MÁQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA 6

Sumario de fórmulas

6.1 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

a) Tipos de devanados de máquinas de c.c.:

$$\text{IMBRICADO SIMPLE: } 2c = 2p \tag{6.1}$$

$$\text{ONDULADO SIMPLE: } 2c = 2 \tag{6.2}$$

$2c$: número de circuitos derivados; $2p$: número de polos.

b) F.e.m. inducida en las máquinas de c.c.:

$$E = \frac{n}{60} Z \Phi \frac{p}{c} = K_E n \Phi \tag{6.3}$$

E: f.e.m. inducida; Φ: flujo magnético; $2p$: número de polos; $2c$: número de circuitos derivados; n: r.p.m. Z: número de conductores del inducido; la constante K_E vale: $K_E = Zp/60c$.

c) F.e.m. inducida en las máquinas de c.c.:

$$E = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi n}{60} Z \Phi \frac{p}{c} = K_T \omega\, \Phi \tag{6.4}$$

La constante K_T vale: $K_T = Zp/2\pi c$, por lo que la relación entre las constantes K_E y K_T es: $K_E = \frac{2\pi}{60} K_T$.

d) Par motor en las máquinas de c.c en función del flujo magnético.:

$$T = \frac{1}{2\pi}\frac{p}{c} Z\, \Phi\, I_i = K_T I_i\, \Phi \tag{6.5}$$

T: par motor; I_i: corriente del inducido; Φ: flujo magnético.

e) Par motor en las máquinas de c.c. en función de la f.c.e.m.:

$$T = \frac{E I_i}{2\pi \frac{n}{60}} \tag{6.6}$$

T: par motor; E: f.e.m. inducida; I_i: corriente del inducido; n: r.p.m.

$$R_1 = R_2' = 0{,}05\ \Omega \quad ; \quad X_1 + X_2' = 1{,}02\ \Omega$$

Se sabe también que las pérdidas mecánicas son de 60 kW y la corriente de vacío despreciable. Calcular: a) corriente absorbida por el motor y su factor de potencia; b) par útil desarrollado por el motor; c) rendimiento del motor. La compañía suministradora de energía exige un factor de potencia no inferior a 0,9 y por ello se opta por incluir en paralelo con el motor anterior un motor síncrono, conectado en estrella, que ha de desarrollar una potencia mecánica de 75 kW a una velocidad de 1000 r.p.m. El rendimiento de este motor es del 90 por ciento, su impedancia síncrona es de 0,5+j4,5 Ω/fase y su característica de vacío está definida por la siguiente tabla:

E_0 (línea)	150	275	500	1000	1500	2000	2500
A.v./polo	500	900	1500	3000	4500	6000	7500

d) ¿cuál es el valor de la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja?; e)¿cuál es el valor mínimo de la excitación, en A.v./polo, del motor síncrono en el caso anterior?

[Resp. a) ≈501 A; 0,86; b) 3795 N.m.; c) 90,2%; d) 131,5 kVA; 0,634 capacitivo; e) ≈ 4500 A.v./polo]

MÁQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA 6

Sumario de fórmulas

6.1 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

a) Tipos de devanados de máquinas de c.c.:

$$\text{IMBRICADO SIMPLE: } 2c = 2p \tag{6.1}$$

$$\text{ONDULADO SIMPLE: } 2c = 2 \tag{6.2}$$

$2c$: número de circuitos derivados; $2p$: número de polos.

b) F.e.m. inducida en las máquinas de c.c.:

$$E = \frac{n}{60} Z\Phi \frac{p}{c} = K_E n\Phi \tag{6.3}$$

E: f.e.m. inducida; Φ: flujo magnético; $2p$: número de polos; $2c$: número de circuitos derivados; n: r.p.m. Z: número de conductores del inducido; la constante K_E vale: $K_E = Zp/60c$.

c) F.e.m. inducida en las máquinas de c.c.:

$$E = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi n}{60} Z\Phi \frac{p}{c} = K_T \omega\ \Phi \tag{6.4}$$

La constante K_T vale: $K_T = Zp/2\pi c$, por lo que la relación entre las constantes K_E y K_T es: $K_E = \frac{2\pi}{60} K_T$.

d) Par motor en las máquinas de c.c en función del flujo magnético.:

$$T = \frac{1}{2\pi}\frac{p}{c} Z\ \Phi\ I_i = K_T I_i\ \Phi \tag{6.5}$$

T: par motor; I_i: corriente del inducido; Φ: flujo magnético.

e) Par motor en las máquinas de c.c. en función de la f.c.e.m.:

$$T = \frac{E I_i}{2\pi \frac{n}{60}} \tag{6.6}$$

T: par motor; E: f.e.m. inducida; I_i: corriente del inducido; n: r.p.m.

6.2 REACCIÓN DEL INDUCIDO Y CONMUTACIÓN

a) Corriente que circula por los conductores del inducido:

$$I(\text{conductor}) = \frac{I_i}{2c} \tag{6.7}$$

I_i: corriente total del inducido; $2c$: número de circuitos derivados.

b) Número de conductores por polo:

$$Z(polo) = \frac{Z}{2p} \tag{6.8}$$

Z: número de conductores del inducido; $2p$: número de polos.

c) Número de amperivueltas del inducido por polo:

$$\mathcal{F}(\text{polo}) = \frac{1}{2}\frac{I_i}{2c}\frac{Z}{2p} = \frac{I_i Z}{8pc} \tag{6.9}$$

Z: número de conductores del inducido; $2p$: número de polos. I_i: corriente total del inducido; $2c$: número de circuitos derivados.

d) F.m.m. antagonista (por polo) cuando las escobillas se giran un ángulo θ:

$$\mathcal{F}_d = \frac{I_i Z}{8pc}\frac{2\theta}{180°} \text{ A.v./polo} \tag{6.10}$$

Z: número de conductores del inducido; $2p$: número de polos; I_i: corriente total del inducido; $2c$: número de circuitos derivados; θ: ángulo en grados que se han girado las escobillas.

e) F.m.m. transversal (por polo) cuando las escobillas se giran un ángulo θ:

$$\mathcal{F}_t = \frac{I_i Z}{8pc}\frac{180° - 2\theta}{180°} = \frac{I_i Z}{8pc}\left(1 - \frac{2\theta}{180°}\right) \text{ A.v./polo} \tag{6.11}$$

Z: número de conductores del inducido; $2p$: número de polos. I_i; corriente total del inducido; $2c$: número de circuitos derivados; θ: ángulo en grados que se han girado las escobillas.

f) F.e.m. de conmutación:

$$e_C = B_C\, 2L\, v\, N \tag{6.12}$$

e_c: f.e.m. de conmutación; B_c: inducción magnética en la sección conmutada; L: longitud de los conductores (longitud axial de los polos auxiliares); v: velocidad tangencial de los conductores; N: número de espiras de la sección conmutada.

g) F.m.m. necesaria en los polos auxiliares:

$$\mathcal{F}_{aux} = \frac{I_i}{8pc}Z + \frac{B_c}{\mu_0}\delta_{aux} \text{ A.v./polo} \tag{6.13}$$

B_c: inducción magnética en la sección conmutada; δ_{aux}: entrehierro de los polos auxiliares; Z: número de conductores del inducido; $2p$: número de polos; I_i: corriente total del inducido; $2c$: número de circuitos derivados; μ_0: permeabilidad del vacío.

6.3 GENERADORES DE C.C.

a) Ecuación de la f.e.m. del inducido:

$$E = V + R_i I_i + V_{esc} \tag{6.14}$$

E: f.e.m. del generador; V: tensión en bornes; R_i: resistencia del inducido; I_i: corriente del inducido; V_{esc}: caída de tensión en las escobillas.

b) Ecuación de tensión del inductor:

$$V_e = R_e I_e \tag{6.15}$$

V_e: tensión en el devanado inductor; R_e: resistencia del devanado inductor; I_e: corriente de excitación.

c) Balance de potencias en el inducido del generador:

$$E\ I_i = V I_i + R_i\ I_i^2 + V_{esc} I_i \tag{6.16}$$

$P_a = E I_i$: potencia electromagnética desarrollada por la máquina; $P_2 = V I_i$: potencia eléctrica de salida suministrada por el generador; $P_{cu\,i} = R_i\ I_i^2$: pérdidas en el cobre del inducido; $P_{esc} = V_{esc}\ I_i$: pérdidas en los contactos de las escobillas.

d) Potencia en el inductor o excitación del generador:

$$P_{exc} = V_e I_e = R_e\ I_e^2 \tag{6.17}$$

P_{exc}: potencia de la excitación del generador; V_e: tensión en el devanado de excitación; R_e: resistencia de la excitación; I_e: corriente de excitación.

e) Potencia total absorbida por el generador:

$$P_1 = P_{exc} + P_m + P_{Fe} + P_a \tag{6.18}$$

P_1: potencia de entrada; P_a: potencia electromagnética; P_2: potencia eléctrica útil; P_{cui}: pérdidas en el cobre del inducido; P_{Fe}: pérdidas en el hierro; P_{exc}: pérdidas en la excitación.

f) Relación de f.e.m. inducidas respecto de las velocidades a flujo constante:

$$\frac{E}{E'} = \frac{n}{n'} \tag{6.19}$$

E: f.e.m. inducida a velocidad n; E': f.e.m. inducida a velocidad n'.

6.4 MOTORES DE C.C.

a) Ecuación de la f.e.m. del inducido:

$$V = E + R_i I_i + V_{esc} \tag{6.20}$$

V: tensión aplicada al motor; E: f.c.e.m. del motor; R_i: resistencia del inducido; I_i: corriente del inducido; V_{esc}: caída de tensión en las escobillas.

b) Balance de potencias en el inducido del motor:

$$V I_i = E I_i + R_i I_i^2 + V_{esc} I_i \tag{6.21}$$

$P_i = V I_i$: potencia eléctrica aplicada al inducido; $P_a = E I_i$: potencia electromagnética desarrollada por el motor; $P_{cu\,i} = R_i I_i^2$: pérdidas en el cobre del inducido; $P_{esc} = V_{esc} I_i$: pérdidas en los contactos de las escobillas.

c) Potencia mecánica útil del motor:

$$P_2 = P_a - P_{Fe} - P_m \tag{6.22}$$

P_2: potencia mecánica útil; P_a: potencia electromagnética desarrollada; P_{Fe}: pérdidas en el hierro; P_m: pérdidas mecánicas.

d) Potencia eléctrica absorbida por el motor:

$$P_1 = P_i + P_{exc} \tag{6.23}$$

P_1: potencia eléctrica total de entrada; P_i: potencia absorbida por el inducido; P_{exc}: potencia absorbida por el circuito de excitación.

e) Rendimiento del motor:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \tag{6.24}$$

P_1: potencia eléctrica total de entrada; P_2: potencia mecánica útil.

f) Par motor desarrollado en función de la f.c.e.m.:

$$T = \frac{E I_i}{2\pi \frac{n}{60}} \tag{6.25}$$

T: par motor en N.m.; E: f.e.m. inducida; I_i: corriente del inducido; n: r.p.m. del rotor.

g) Par motor desarrollado en función del flujo:

$$T = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{c} Z \Phi I_i = K_T \Phi I_i \tag{6.26}$$

T: par motor; I_i: corriente del inducido; Φ: flujo magnético; $2p$: número de polos; $2c$: número de circuitos derivados; Z: número de conductores del inducido; la constante K_T vale: $K_T = Zp/2\pi c$.

h) Ecuación de la velocidad del motor en r.p.m.:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \Phi} \tag{6.27}$$

n: velocidad del motor en r.p.m.; V: tensión aplicada al inducido; R_i: resistencia del inducido; I_i: corriente del inducido; Φ: flujo magnético; $K_E = Zp/60c$.

i) Ecuación de la velocidad del motor en rad/s:

$$\omega = \frac{V - R_i I_i}{K_T \Phi} \tag{6.28}$$

ω: velocidad angular del motor en rad/s; V: tensión aplicada al inducido; R_i: resistencia del inducido; I_i: corriente del inducido; Φ: flujo magnético; $K_T = Zp/2\pi c$.

j) Ecuación de la velocidad del motor en función del par resistente:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \Phi} = \frac{1}{K_E \Phi} V - \frac{R_i}{K_E K_T \Phi^2} T \tag{6.29}$$

n: velocidad del motor en r.p.m.; V: tensión aplicada al inducido; R_i: resistencia del inducido; I_i: corriente del inducido; Φ: flujo magnético; $K_E = Zp/60c$; $K_T = Zp/2\pi c$; T: par resistente.

k) Velocidad en vacío del motor:

$$n_0 = \frac{1}{K_E \Phi} V \tag{6.30}$$

l) Ecuación del par y de la corriente de inducido en un motor serie de c.c.:

$$T = K_T K_I I_i^2 \Rightarrow I_i = \sqrt{\frac{T}{K_T K_I}} \tag{6.31}$$

m) Ecuación de la velocidad en un motor serie de c.c.:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \Phi} = \frac{V - R_i I_i}{K_E K_I I_i} - \frac{R_i}{K_E K_I} = \frac{1}{K_E} \sqrt{\frac{K_T}{K_I}} \frac{V}{\sqrt{T}} - \frac{R_i}{K_E K_I} \tag{6.32}$$

n: velocidad del motor en r.p.m.; V: tensión aplicada al inducido; R_i: resistencia del inducido; I_i: corriente del inducido; $K_E = Zp/60c$; $K_T = Zp/2\pi c$; $\Phi = K_I I_i$ (circuito magnético lineal); T: par motor.

6.5 FRENADO DE MOTORES DE C.C.

a) Ecuación de la corriente del inducido en el frenado por recuperación de energía:

$$I_i = \frac{V - E}{R_i} = \frac{V - K_E n \Phi}{R_i} \tag{6.33}$$

n: velocidad del motor en r.p.m.; V: tensión aplicada al inducido; R_i: resistencia del inducido; I_i: corriente del inducido; Φ: flujo magnético inductor; $K_E = Zp/60c$.

b) Ecuación de la velocidad:

$$n = \frac{V}{K_E\Phi} - \frac{R_i}{K_E K_T \Phi^2}T \tag{6.34}$$

n: velocidad del motor en r.p.m.; V: tensión aplicada al inducido; R_i: resistencia del inducido; Φ: flujo magnético inductor; $K_E = Zp/60c$; $K_T = Zp/2\pi c$; T: par resistente.

c) Velocidad en vacío:

$$n_0 = \frac{V}{K_E\Phi} \tag{6.35}$$

d) Ecuación de la corriente del inducido en el frenado por resistencias externas:

$$I_i = -\frac{E}{R_i + R_{ext}} = -\frac{K_E n\Phi}{R_i + R_{ext}} \tag{6.36}$$

I_i: corriente del inducido; R_i: resistencia del inducido; R_{ext}: resistencia externa de carga del inducido; Φ: flujo magnético inductor; $K_E = Zp/60c$; n: velocidad.

e) Par de frenado reostático (con resistencias externas):

$$T = K_T\Phi I_i = -\frac{K_T K_E n\Phi^2}{R_i + R_{ext}} \tag{6.37}$$

T: par de frenado; R_i: resistencia del inducido; R_{ext}: resistencia externa de carga del inducido Φ: flujo magnético inductor; $K_E = Zp/60c$; $K_T = Zp/2\pi c$; n: velocidad.

f) Ecuación de la corriente del inducido en el frenado a contracorriente:

$$I_i = -\frac{V + E}{R_i + R_r} \tag{6.38}$$

I_i: corriente del inducido; V: tensión aplicada; E: f.c.e.m. del motor; R_i: resistencia del inducido; R_r: resistencia limitadora de la corriente del inducido.

e) Par de frenado a contracorriente:

$$T = K_T\Phi I_i = -K_T\Phi\frac{V + E}{R_i + R_r} \tag{6.39}$$

T: par de frenado; R_i: resistencia del inducido; R_r: resistencia limitadora de la corriente del inducido; Φ: flujo magnético inductor; $K_T = Zp/2\pi c$; V: tensión aplicada; E: f.c.e.m. del motor.

Problemas resueltos

Problema 6.1

Un generador de c.c. de 4 polos tiene un inducido con 564 conductores que gira a 800 r.p.m., siendo el flujo por polo de 20 mWb. La corriente que circula por los conductores es igual a 60 A. Calcular la corriente total, la f.e.m. y la potencia electromagnética desarrollada (EI_i) si el devanado es: a) ondulado simple; b) imbricado simple.

Solución

a) Si se denomina n a la velocidad de giro del generador de c.c. expresada en r.p.m., Z al número de conductores del inducido, $2p$ al número de polos (que es igual a 4) y $2c$ al número de circuitos derivados, la f.e.m. producida por la máquina si el devanado es ondulado, es decir, cuando $2c = 2$, es igual a:

$$E = nZ\Phi\frac{p}{c} = \frac{800}{60}564\cdot 20\cdot 10^{-3}\frac{2}{1} = 300{,}8 \text{ voltios}$$

La corriente que circula por los conductores I es igual a 60 A, la corriente total del inducido I_i está relacionada con la corriente I por medio de la ecuación:

$$I = \frac{I_i}{2c} = 60 = \frac{I_i}{2} \Rightarrow I_i = 120 \text{ A}$$

y, por consiguiente, la potencia electromagnética tiene un valor:

$$P = EI_i = 300{,}8\cdot 120 = 36{,}096 \text{ kW}$$

b) Cuando el devanado es imbricado, se cumple $2c = 2p$, es decir, el número de circuitos derivados es igual al número de polos, por lo que resulta $2c = 4$, y de este modo la f.e.m. generada por la máquina tiene ahora un valor:

$$E = \frac{800}{60}564\cdot 20\cdot 10^{-3}\cdot 1 = 150{,}4 \text{ voltios}$$

En este caso la corriente del inducido será igual a:

$$I_i = 60\cdot 4 = 240 \text{ A}$$

por lo tanto, la potencia electromagnética tendrá un valor:

$$P = 150{,}4\cdot 240 = 36{,}096 \text{ kW}$$

que coincide con el caso anterior.

Problema 6.2

Un motor de c.c. tetrapolar tiene un inducido bobinado con un arrollamiento imbricado simple de 888 conductores. Las escobillas están desplazadas de la línea neutra en sentido contrario al movimiento del rotor un ángulo de 5 grados geométricos. Si la corriente total del inducido es igual a 90 A, calcular: a) los amperivueltas por polo antagonistas y transversales; b) la corriente adicional necesaria en los polos para compensar la acción desmagnetizante, si el devanado de excitación tiene 1200 espiras/polo.

Solución

a) Al ser el devanado imbricado simple se cumple $2p = 2c = 4$. Además, la corriente total del inducido vale $I_i = 90$ A y como el número total de conductores es $Z = 888$, la f.m.m. antagonista se debe a los conductores existentes en un ángulo eléctrico 2θ (ver Figura 6.1), y teniendo en cuenta que $\theta = p\alpha = 2 \cdot 5 = 10°$, esta f.m.m. será igual a:

$$F_a = \frac{Z}{2p}\frac{I_i}{2c}\frac{2\theta}{180} = \frac{888}{4}\frac{90}{4}\frac{20}{180} = 555 \text{ A.v./polo}$$

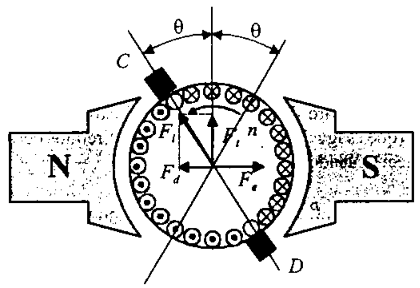


Figura 6.1

La f.m.m. transversal se debe a los conductores existentes en un ángulo eléctrico $180°-2\theta$, lo que da lugar a un valor:

$$F_t = \frac{Z}{2p}\frac{I_i}{2c}\frac{180°-2\theta}{180°} = \frac{888}{4}\frac{90}{4}\frac{180°-20°}{180°} = 4440 \text{ A.v./polo}$$

b) Para compensar la f.m.m. antagonista de 555 A.v/polo, será necesario aumentar la corriente en la excitación para crear este valor, lo que conduce a la siguiente corriente adicional necesaria en los devanados de los polos:

$$F = \frac{NI_e}{2p} \Rightarrow 555 = 1200 I_e \Rightarrow I_e = 0{,}4625 \text{ A}$$

Problema 6.3

Estimar el número de espiras que necesita cada uno de los polos de conmutación de un generador de 6 polos que suministra 200 kW a 200 V, sabiendo que el inducido tiene 540 conductores en conexión imbricada, el entrehierro interpolar es de 1 cm y la densidad de flujo en el mismo es de 0,3 Wb/m². Despreciar la reluctancia del hierro y la dispersión.

Solución

La f.m.m. necesaria en los polos de conmutación o auxiliares vale:

$$\mathcal{F}_{aux} = \frac{I_i Z}{8pc} + \frac{B_c}{\mu_0}\delta_{aux} \text{ A.v./polo}$$

y teniendo en cuenta que $2p = 2c = 6$; $Z = 540$; $\delta = 1$cm; $B_c = 0{,}3$ teslas. Además, la corriente total del inducido es igual a:

$$I_i = \frac{P}{V} = \frac{200000}{200} = 1000 \text{ A}$$

se tiene una f.m.m. de valor:

$$F_{aux} = \frac{1000 \cdot 540}{8 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{0{,}3}{4\pi \cdot 10^{-7}} 1 \cdot 10^{-2} = 9887{,}32 \text{ A.v./polo}$$

y por consiguiente:

$$F_{aux} = N_{aux} I_i \Rightarrow N_{aux} = \frac{9887{,}32}{1000} = 9{,}88 \approx 10 \text{ espiras}$$

Problema 6.4

Un generador tipo derivación desarrolla una f.e.m. de 130 V. Cuando se conecta una carga, la tensión terminal baja a 120 V. Hallar la corriente de carga si la resistencia del circuito de campo es de 10 Ω y la resistencia total del inducido de 0,05 Ω. Prescíndase de la reacción del inducido.

Solución

En la Figura 6.2 se muestra el esquema eléctrico correspondiente. La corriente de excitación o campo, teniendo en cuenta que la tensión entre terminales del generador es de 100 voltios, vale:

$$I_e = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}$$

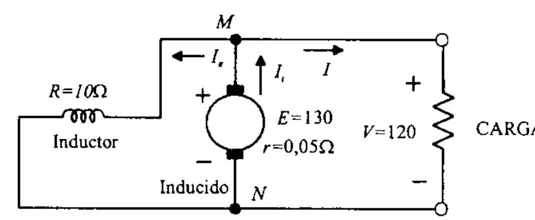


Figura 6.2

Por otro lado, de la relación entre la f.e.m., la tensión y la corriente del inducido, se puede obtener el valor de esta:

$$V = E - rI_i \Rightarrow 120 = 130 - 0{,}05 I_i \quad \Rightarrow I_i = \frac{10}{0{,}05} = 200 \text{ A}$$

Por lo tanto, la corriente de carga, de acuerdo con el esquema de la Figura 6.2 es igual a:

$$I = I_i - I_e = 200 - 12 = 188 \text{ A}$$

Problema 6.5

Un generador tipo derivación de 4 polos, 1500 r.p.m. tiene una curva de vacío (a velocidad asignada) definida por la siguiente tabla de valores:

I_e(A)	0	0,1	0,4	0,6	1	1,14	1,32	1,56	2,4	3,04
E(V)	6	20	80	120	200	220	240	260	300	320

Calcular: a) tensión en vacío que desarrollará la máquina cuando la resistencia total del circuito de excitación sea de 125 Ω; b) valor crítico de la resistencia del circuito de campo; c) tensión en vacío a 1000 r.p.m. con una resistencia del inductor igual a 125 Ω; d) velocidad a la cual se hace crítica la resistencia de campo de 125 Ω.

Solución

En la Figura 6.3 se muestra la curva de vacío del generador a la velocidad asignada de 1500 r.p.m.

a) Para R = 125 Ω, se dibuja la recta del inductor del siguiente modo: se considera una corriente de excitación I_e=1 A para la cual el valor de la d.d.p. en bornes de la excitación, y que coincide con la d.d.p. en bornes de la máquina, tiene un valor $V=R_{exc}I_e$ = 125 · 1=125 voltios, lo que da lugar al punto D' en el gráfico de la Figura 6.3 y la recta OM. Esta recta corta a la curva de vacío en el punto A, que corresponde a una f.e.m. E = 300 voltios.

b) El valor crítico de la resistencia de excitación es el que corresponde a la tangente a la curva de vacío (recta ON). Para medir la pendiente, se toma un punto cualquiera de esta recta (por ejemplo el punto B) para el cual E = 200 voltios, I_{exc}= 1 amperio, resultando:

$$R = \frac{200}{1} = 200\ \Omega$$

c) Los valores de la curva de vacío, para n = 1000 r.p.m., se obtienen de la proporción entre las f.e.m. y velocidades, es decir:

$$\frac{E}{E'} = \frac{n}{n'}$$

de acuerdo con esta relación, se puede construir la siguiente tabla de valores:

E a 1500 r.p.m.	6	20	80	120	200	220	240	260	300	320
E' a 1000 r.p.m.	4	13,3	53,3	80	133,3	146,7	160	173,3	200	213,3

Esta curva se ha dibujado en trazo discontinuo en la Figura 6.3. El corte de la recta OM con la curva de vacío a 1000 r.p.m. es el punto C, que corresponde a una f.e.m. E'≈156 voltios.

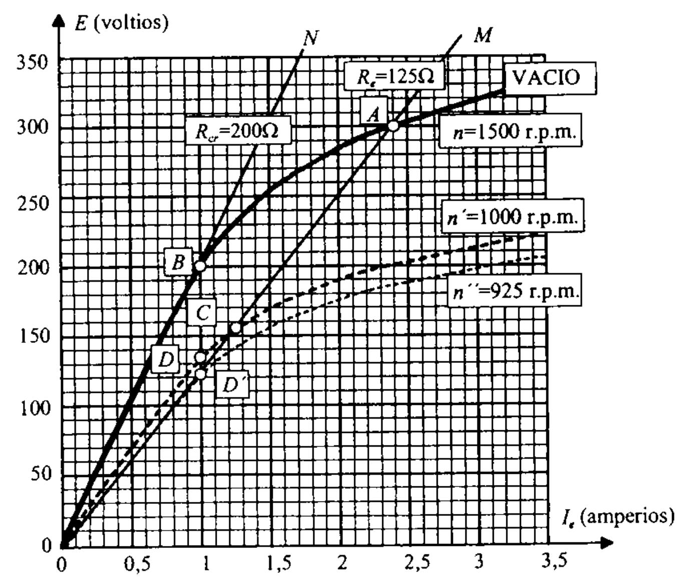


Figura 6.3

d) La curva de vacío correspondiente deberá ser tangente a la recta OM (R = 125 ohmios). Para los puntos D y D' se tienen las siguientes f.e.m.: E'= 133 voltios en la curva correspondiente a n'= 1000 r.p.m.; E''= 123 voltios en el punto D' correspondiente a la curva de vacío tangente a la recta OM, que corresponderá a una velocidad incógnita n''. De este modo se puede escribir:

$$\frac{E'}{E''} = \frac{n'}{n''} \Rightarrow \frac{123}{133} = \frac{1000}{n''} \Rightarrow n'' = 1000\frac{123}{133} = 925 \text{ r.p.m.}$$

Problema 6.6

Un generador tipo derivación tiene una característica de circuito abierto expresada por la ecuación:

$$E = \frac{200I_e}{K + I_e}$$

Para una corriente de excitación de 1,5 A se obtiene una f.e.m. en vacío de 150 V. Determinar el valor de la resistencia crítica del devanado inductor en derivación y la tensión en vacío cuando la resistencia del campo es de 200 Ω.

Solución

Este problema se puede resolver de forma analítica aprovechando que la curva de vacío está definida por una función matemática. El valor de la constante K se puede obtener fácilmente puesto que, según el enunciado, para I_e = 1,5 amperios, la f.e.m. es E = 150 voltios, es decir:

$$I_e = 1,5 \Rightarrow E = \frac{200 \cdot 1,5}{K + 1,5} = 150 \Rightarrow K = 0,5$$

por consiguiente, la curva de vacío de la máquina estará expresada por:

$$E = \frac{200I_e}{0,5 + I_e}$$

Como quiera que la resistencia crítica es aquella que es tangente a la curva de vacío en el origen, se puede obtener la pendiente de esta recta (en definitiva su tangente) derivando la ecuación de la curva de vacío y calculando su valor para I_e= 0, lo que da lugar a:

$$\text{tg}\alpha = \left[\frac{dE}{dI_e}\right]_{I_e=0} = \frac{200(0,5 + I_e) - 200I_e}{(0,5 + I_e)^2} = \frac{100}{(0,5 + I_e)^2} = \frac{100}{0,5^2} = 400\ \Omega$$

Cuando la resistencia del inductor o campo es R_e = 200 Ω, en vacío se cumple que $V=E=R_eI_e$, y, al sustituir en la curva de vacío se obtiene una corriente de excitación:

$$V = E = \frac{200I_e}{0,5 + I_e} = RI_e = 200I_e \Rightarrow 0,5 + I_e = 1 \Rightarrow I_e = 0,5 \text{ A}$$

que corresponde a una f.e.m. o tensión en vacío:

$$E = \frac{200 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 100 \text{ voltios}$$

Problema 6.7

La característica en vacío de un generador derivación que gira a 1200 r.p.m. es:

E (V)	*47*	*85*	*103*	*114*	*122*	*127*	*135*	*141*
I_e (A)	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*1,0*	*1,2*	*1,6*	*2,0*

La resistencia del devanado inductor es de 55 Ω. Determinar: a) resistencia que hay que añadir al circuito de campo para que la máquina genere una tensión de 120 V en vacío cuando gira a 1200 r.p.m. b) tensión en circuito abierto cuando se añade al inductor una resistencia de 20 Ω y la velocidad se reduce a 800 r.p.m.

Solución

a) En la Figura 6.4 se ha construido la curva de vacío de la máquina para una velocidad de 1200 r.p.m. de acuerdo con los valores del enunciado. En esta curva se observa que, para un valor de la f.e.m. E_b = 120 voltios, se obtiene el punto de trabajo A, dando lugar a la recta de inductor OM. Para el punto de trabajo A se cumple:

$$E = V = 120 \text{ voltios}; \quad I_e \approx 0{,}95 \text{ amperios.}$$

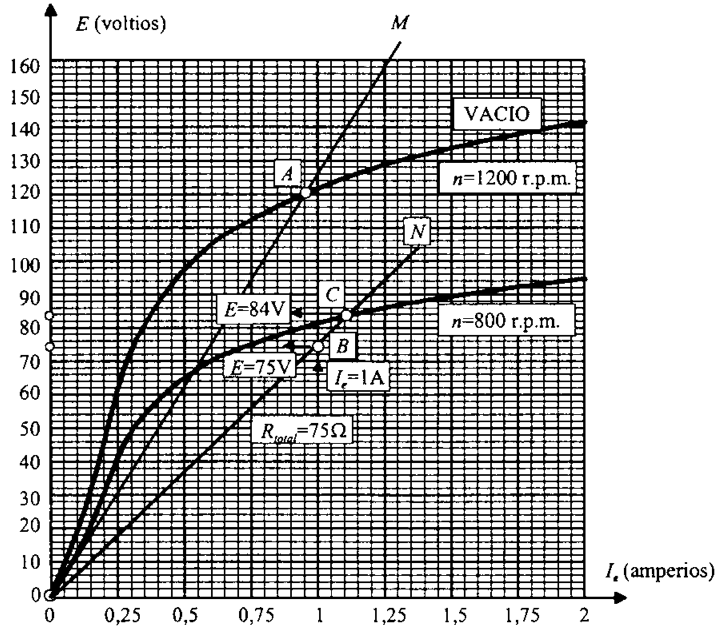


Figura 6.4

De acuerdo con el resultado anterior, el valor de la resistencia total del inductor o devanado de excitación es igual a:

$$R_{exc\ total} = \frac{120}{0{,}95} = 126{,}3\ \Omega$$

de donde se deduce el valor de la resistencia adicional:

$$R_{ad} = 126{,}3 - 55 = 71{,}3\ \Omega$$

b) En la Figura 6.4 se ha dibujado, a continuación, la curva de vacío correspondiente a la velocidad de 800 r.p.m., tomando como referencia la curva de vacío para 1200 r.p.m., (lo que se realiza teniendo en cuenta la proporcionalidad entre las f.e.m. y las velocidades para la mismas corrientes de excitación). La resistencia total del devanado inductor es ahora:

$$R_{exc\ total} = 55 + 20 = 75\ \Omega$$

que da lugar a la recta del inductor ON (esta recta pasa por el origen, punto O, y el punto B correspondiente a I_e = 1 amperio y $E = R_{ind\ total} I_e$ = 75 1 = 75 voltios); esta recta corta a la curva de vacío de la máquina para n = 800 r.p.m. en el punto C, que corresponde a una f.e.m. de 84 voltios, que será la nueva tensión que generará la máquina en circuito abierto.

Problema 6.8

Un generador tipo derivación de 200 V debe mantener una tensión constante entre terminales para todas las cargas. A plena carga, la velocidad cae un 10% y la caída de tensión en el inducido es de 10V. La corriente de excitación en vacío es de 4A y la curva de vacío viene definida por la siguiente tabla de valores:

E (V)	56	114	132	160	180	200	216	240
I_e (A)	0,8	1,6	2	2,6	3,2	4	4,8	6,3

Hallar el cambio en la resistencia del circuito de excitación desde vacío a plena carga.

Solución

En la Figura 6.5 se ha representado la curva de vacío de la máquina tanto para una velocidad n como para una velocidad del 90% de n. En vacío, para una corriente de excitación de 4 amperios, la curva correspondiente señala una f.e.m. de 200 voltios, es por ello que la resistencia de excitación debe tener un valor:

$$R_{exc} = \frac{200}{4} = 50\ \Omega$$

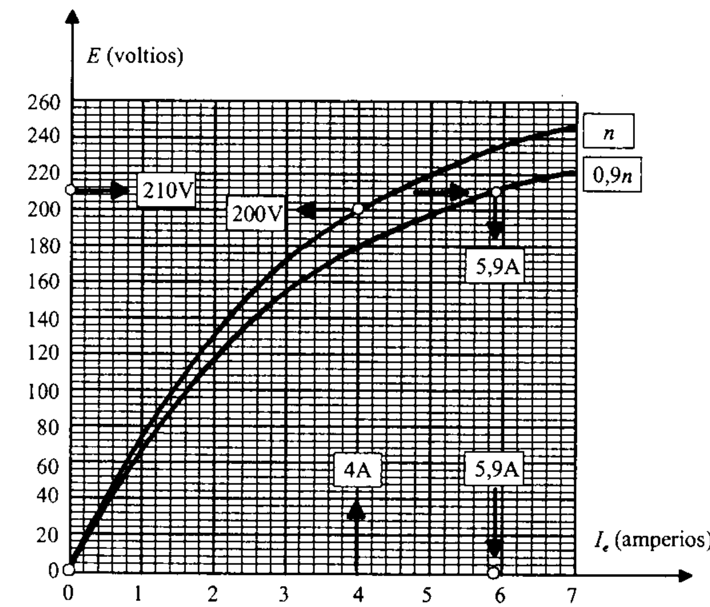


Figura 6.5

Según el enunciado, a plena carga la velocidad cae un 10% y la caída de tensión del inducido es de 10 voltios, por lo tanto, la f.e.m. necesaria en carga debe valer:

$$E = V + rI = 200 + 10 = 210 \text{ voltios}$$

y para esta f.e.m., la curva de vacío para una velocidad 0,9n nos indica que la corriente de excitación tiene un valor de 5,9 amperios. Por consiguiente, la nueva resistencia total del devanado de excitación deber ser:

$$R_{exc} = \frac{200}{5,9} = 33,9\ \Omega$$

Problema 6.9

Un generador tipo compuesto, de gran derivación, suministra una corriente de carga de 50 A a 500 V y tiene unas resistencias de inducido, campo en serie y campo en derivación, de 0,05; 0,03 Ω y 250 Ω respectivamente. Calcular la f.e.m. generada y la corriente en el inducido. Considérese una caída de contacto de 1 V por escobilla.

Solución

En la Figura 6.6 se muestra el esquema del generador. De acuerdo con esta figura la corriente de excitación del devanado inductor derivación tiene un valor:

$$I_e = \frac{V}{R} = \frac{500}{250} = 2\text{A}$$

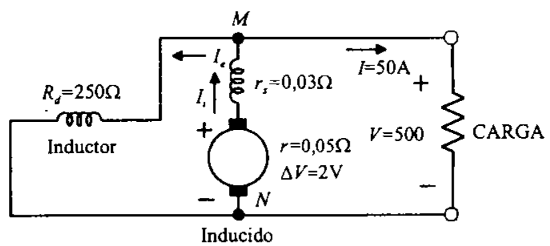


Figura 6.6

Por consiguiente el valor de la corriente que circula por el inducido será:

$$I_i = I + I_e = 50 + 2 = 52 \text{ A}$$

y la f.e.m. que debe generar la máquina es:

$$E = V + r_i I_i + r_s I_i + \Delta V = 500 + 0,05 \cdot 52 + 0,03 \cdot 52 + 2 = 506,16 \text{ V}$$

Problema 6.10

Un motor tipo derivación de 240 V, tiene una resistencia del inducido de 0,2 Ω. Calcular: a) el valor de la resistencia que debe introducirse en el circuito del inducido para limitar la corriente de arranque a 40 A; b) f.e.m. generada cuando el motor está girando a velocidad constante con esta resistencia adicional en el circuito para una corriente del inducido igual a 30 A.

Solución

a) En la Figura 6.7 se muestra el montaje correspondiente. Como en el arranque la velocidad es cero, la f.c.e.m. producida en ese momento por el motor también será cero. Aplicando el 2 segundo lema de Kirchhoff al circuito del inducido se puede escribir:

$$V = E + (r_i + r)I_i \quad \Rightarrow \quad 240 = 0 + (0,2 + r)40$$

de donde se deduce un valor de la resistencia necesaria en el reóstato conectado en serie con el inducido, de $r = 5,8\Omega$.

b) Con el valor de la resistencia anterior, cuando el motor gira absorbiendo una corriente de inducido de 30 amperios, la f.c.e.m. del motor tendrá un valor:

$$E = 240 - (0,2 + 5,8)30 = 60 \text{ V}$$

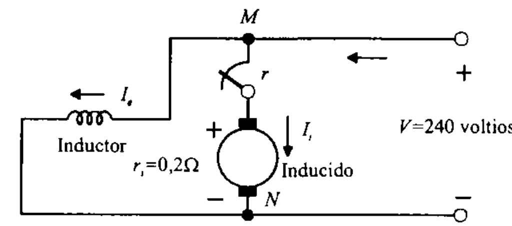


Figura 6.7

Problema 6.11

Un motor tipo derivación de 250 V, gira en vacío a 1000 r.p.m. y absorbe una corriente de 5 A. La resistencia total del inducido es de 0,2 Ω y la del campo en derivación de 250 Ω. Calcular la velocidad cuando esté cargado y tome una corriente de 50 A, sabiendo que la reacción del inducido debilita el campo un 3%.

Solución

En la Figura 6.8 se muestra el esquema eléctrico del motor. Vamos a calcular, en primer lugar, el valor de la f.c.e.m. producida por el motor en vacío. El valor de la corriente de excitación es:

$$I_e = \frac{250}{250} = 1 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta que, en vacío, el motor absorbe de la alimentación una corriente total de 5 amperios, el valor de la corriente de inducido en vacío es $I_i = 5 - 1 = 4$A y, por lo tanto, la f.c.e.m. del motor en vacío debe ser:

$$E = V - rI_i = 250 - 0,2 \cdot 4 = 249,2 \text{ V}$$

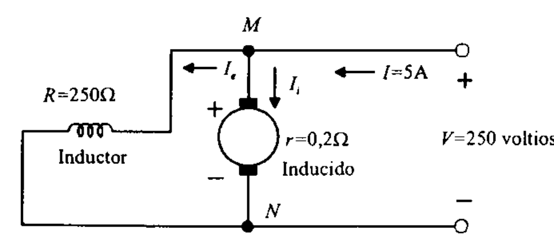


Figura 6.8

Cuando el motor trabaja en carga, absorbe una corriente total de 50 A, y como la corriente de excitación sigue siendo de 1 amperio, la corriente de inducido será entonces $I_i = 50 - 1 = 49$ A, que corresponde a una f.c.e.m. generada en carga de:

$$E' = 250 - 0,2 \cdot 49 = 240,2\text{V}$$

Ahora bien, en vacío se cumple:

$$E = k\, n\, \Phi \quad \Rightarrow \quad 249,2 = k1000\Phi$$

donde en la ecuación anterior Φ indica el flujo de la máquina en vacío. De un modo análogo, la f.c.e.m. del motor en carga cuando gira a una velocidad n' y con un nuevo flujo Φ' vale:

$$E' = k\, n'\, \Phi' \quad \Rightarrow \quad 240,2 = kn'\Phi' = kn'0,97\Phi$$

donde se ha tenido en cuenta que, debido a la reacción del inducido, el flujo de entrehierro en carga es el 97% del flujo en vacío. Dividiendo entre sí las dos ecuaciones anteriores se obtiene finalmente:

$$\frac{249,2'}{240,2} = \frac{1000}{0,97n'} \Rightarrow n' = 993,7 \text{ r.p.m.}$$

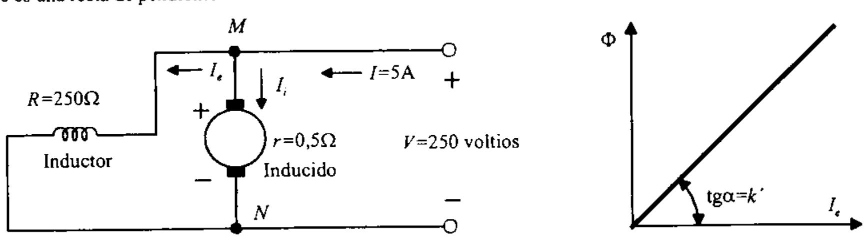
que será la velocidad a la que girará el motor en carga.

Problema 6.12

Un motor tipo derivación de 250 V tiene una resistencia de inducido de 0,5 Ω y una resistencia de campo de 250 Ω. Cuando mueve a 600 r.p.m. una carga cuyo par es constante, el inducido absorbe 20 A. Si se desea elevar la velocidad de 600 a 800 r.p.m., ¿qué resistencia debe insertarse en el circuito de excitación suponiendo que la curva de magnetización sea una línea recta?

Solución

En la Figura 6.9a se muestra el esquema del motor y en la Figura 6.9b se señala la curva de magnetización correspondiente que es una recta de pendiente k'.



a) b)

Figura 6.9

Cuando el motor gira a 600 r.p.m., la corriente de inducido es, según el enunciado, de 20 amperios y la corriente del devanado de excitación conectado en paralelo vale:

$$I_e = \frac{250}{250} = 1 \text{ A}$$

La f.c.e.m. del motor en esta situación es:

$$E = V - rI_i = 250 - 0,5 \cdot 20 = 240 \text{ V}$$

que se puede escribir en función de la velocidad y de la corriente de excitación de este modo:

$$E = 240 = kn\Phi = knk'I_e = bnI_e = b600 \cdot 1$$

donde se ha tenido en cuenta que la recta de magnetización es de la forma: $\Phi = k'I_e$ y donde se ha llamado b al producto kk'. Se puede calcular asimismo el valor del par producido por el motor y que tiene que contrarrestar el par resistente a partir de la expresión:

$$T = \frac{EI_i}{\omega} = \frac{240 \cdot 20}{2\pi \frac{600}{60}} = 76,39 \text{ N.m.} = \text{constante}$$

Ahora bien, es conveniente ver explícitamente de quién depende el par. Téngase en cuenta que el par se puede expresar en función del flujo de la máquina, y por tanto en función de la corriente de excitación por medio de las ecuaciones siguientes:

$$E = kn\Phi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{EI_i}{\omega} = \frac{kn\Phi I_i}{2\pi \frac{n}{60}} = \frac{k\,k'}{\frac{2\pi}{60}} I_e I_i = AI_e I_i = 76,39 \text{ N.m.}$$

De acuerdo con lo anterior, al ser constante el valor de la fracción, se deduce que el par desarrollado por el motor es de la forma: $T = A\, I_e I_i$, es decir, proporcional al producto de la corriente de excitación por la corriente de inducido.

Aplicando este resultado al problema, se cumplirá a 600 r.p.m.:

$$T = 76,39 = AI_e I_i = A1 \cdot 20$$

Cuando la máquina gira a 800 r.p.m., la nueva corriente de inducido se denominará I_i' y a la nueva corriente de inductor la designaremos ahora por I_e'. Además, debe tenerse en cuenta que el par resistente es constante e igual al caso anterior. De este modo, y según se muestra en la Figura 6.10, habrá que añadir en el circuito del inductor un reóstato de regulación para que se cumplan las condiciones anteriores.

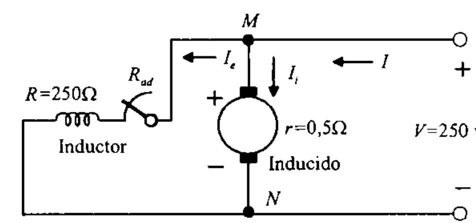


Figura 6.10

Cuando la máquina gira a 800 r.p.m., la f.c.e.m. del motor es igual a:

$$E' = 250 - 0,5I_i' = bnI_e' = b800 \cdot I_e'$$

y teniendo en cuenta la expresión de la f.c.e.m. a 600 r.p.m. calculada anteriormente:

$$E = 240 = kn\Phi = knk'I_e = bnI_e = b600 \cdot 1$$

Al dividir entre sí las dos últimas ecuaciones resulta:

$$\frac{240}{250 - 0,5I_i'} = \frac{600}{800I_e'} \qquad \text{(a)}$$

Por otro lado, al ser el par resistente constante, se podrá escribir en ambos casos:

$$T = AI_eI_i \;\Rightarrow \text{para } n{=}600 \text{ r.p.m.: } T = AI_eI_i = AI\cdot 20 \text{ ; para } n'{=}\ 800 \text{ r.p.m.: } T = AI'_eI'_i$$

y al ser el par en ambas situaciones el mismo, se obtiene:

$$T = A20 = AI'_eI'_i \;\Rightarrow I'_eI'_i = 20 \;\Rightarrow I'_e = \frac{20}{I'_i} \qquad \text{(b)}$$

Resultado que, al sustituir en la ecuación (a), da lugar a:

$$250 - 0,5\frac{20}{I'_e} - \frac{800\cdot 240}{600} = 320I'_e$$

es decir:

$$320I'^2_e - 250I'_e + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad I'_e = 0,739\text{A} \;\; ; \;\; I'_e = 0,042\text{A}$$

Al sustituir en (b) se obtienen las siguientes corrientes de inducido posibles:

$$I'_i = \frac{20}{I'_e} \quad \Rightarrow \quad I'_i = 27,06 \text{ A} \;\; ; \;\; I'_i = 476,19 \text{ A}$$

Evidentemente la solución válida es la primera, ya que la segunda da lugar a una corriente de inducido que no soportaría el motor. Por consiguiente, el valor de la resistencia total del circuito de excitación, cuando la máquina gira a 800 r.p.m., debe ser:

$$R_{total} = \frac{250}{0,739} = 338,29\ \Omega$$

y como quiera que el devanado inductor tiene una resistencia propia de 250 Ω, el valor de la resistencia adicional que debe añadir el reóstato de regulación será:

$$R_{ad} = 338,29 - 250 = 88,3\ \Omega$$

Problema 6.13

Un motor tipo derivación de 250 V tiene una corriente de inducido de 20 A cuando gira a 1000 r.p.m. venciendo el par de plena carga. La resistencia del inducido es de 0,5 Ω. ¿Qué resistencia debe insertarse en serie con el inducido para reducir la velocidad a 500 r.p.m. con el mismo par y ¿Cuál será la velocidad si el par de carga se reduce a la mitad, estando dicha resistencia en circuito? Supóngase que el flujo permanece constante.

Solución

En la Figura 6.11 se muestra el esquema eléctrico del motor. Inicialmente, cuando gira a 1000 r.p.m., la f.c.e.m. del motor vale:

$$E = 250 - 0,5\cdot 20 = 240 \text{ voltios}$$

Las expresiones de la f.c.e.m. del motor y del par, al ser el flujo magnético constante, son:

$$E' = kn\Phi = bn \;\; ; \;\; T = \frac{EI_i}{2\pi\frac{n}{60}} = \frac{kn\Phi I_i}{2\pi\frac{n}{60}} = A\Phi I_i = aI_i$$

Es decir, la f.c.e.m. es directamente proporcional a la velocidad de giro y el par es directamente proporcional a la corriente de inducido. De acuerdo con estas ecuaciones, cuando el motor gira a 1000 r.p.m., se cumple:

$$240 = b1000 \;;\; T = a20$$

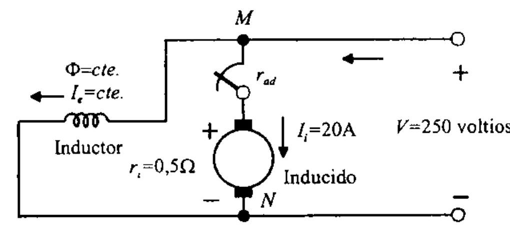


Figura 6.11

Por consiguiente, si el motor va a trabajar con el mismo par, la corriente de inducido será la misma, es decir I_i= 20 amperios, y al conectar una resistencia adicional en serie con el inducido, se tendrá una nueva f.c.e.m. del motor que debe cumplir la siguiente ecuación:

$$E' = 250 - (0,5 + r_{ad})20$$

Pero al ser la f.c.e.m. proporcional a la velocidad, es evidente que la f.c.e.m, cuando el motor gira a 500 r.p.m., será la mitad que a 1000 r.p.m., es decir, debe valer 120 voltios, por lo que se obtiene:

$$E' = 120 = 250 - (0,5 + r_{ad})20 \;\Rightarrow\; r_{ad} = \frac{250-120}{20} - 0,5 = 6\ \Omega$$

Si con la resistencia anterior puesta en el circuito, se reduce el par a la mitad del original, la corriente del inducido será la mitad que la original, es decir, de 10 amperios y, por lo tanto, la nueva f.c.e.m. del motor será:

$$E'' = 250 - (0,5 + 6)\ 10 = 185 \text{ voltios}$$

Como la f.c.e.m. es proporcional a la velocidad, se tendrá:

$$\frac{240}{185} = \frac{1000}{n} \qquad \Rightarrow \quad n = 770,83 \text{ r.p.m.}$$

Problema 6.14

Un motor tipo derivación de 7,5 kW, 450 V, tiene una entrada de 9000 W cuando desarrolla un par en el eje de 80 N.m. a 900 r.p.m. ¿En qué tanto por ciento debe reducirse el campo para aumentar la velocidad a 1100 r.p.m. con un par en el eje de 60 N.m.? La resistencia del inducido es de 1 Ω, la resistencia del circuito de campo a 900 r.p.m. es de 600 Ω y las pérdidas mecánicas y en el hierro son constantes. Prescíndase de la reacción de inducido.

Solución

La corriente de excitación del motor se obtiene como cociente entre la tensión de alimentación y la resistencia del devanado paralelo, y es:

$$I_e = \frac{450}{600} = 0,75 \text{ A}$$

Mientras que la corriente total I absorbida por la máquina es el cociente entre la potencia absorbida y la tensión de alimentación:

$$I = \frac{9000}{450} = 20 \text{ A}$$

En la Figura 6.12 se muestra el esquema correspondiente. La corriente del inducido es, de este modo, igual a:

$$I_i = 20 - 0,75 = 19,25 \text{ A}$$

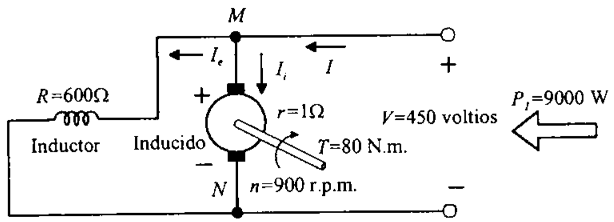


Figura 6.12

Como quiera que el par desarrollado por el motor es 80 N.m. a 900 r.p.m., el valor de la potencia mecánica útil que desarrolla el motor a esta velocidad vale:

$$P_{mec\ útil} = T\omega = 80 2\pi \frac{900}{60} = 7539,8 \text{ vatios}$$

Las pérdidas en el cobre en los devanados inductor e inducido son, respectivamente:

$$P_{exc} = R.I_e^2 = 600 \cdot 0,75^2 = 337,5 \text{ vatios} \quad ; \quad P_{cui} = rI_i^2 = 1 \cdot 19,25^2 = 370,6 \text{ vatios}$$

En la Figura 6.13 se muestra el reparto de potencias en el motor. De este esquema se deduce que las pérdidas fijas, constituidas por las pérdidas en el hiero y mecánicas, tienen un valor:

$$P_f = 9000 - 337,5 - 370,6 - 7539,8 = 752,1 \text{ vatios} = P_{fijas} = \text{constantes}$$

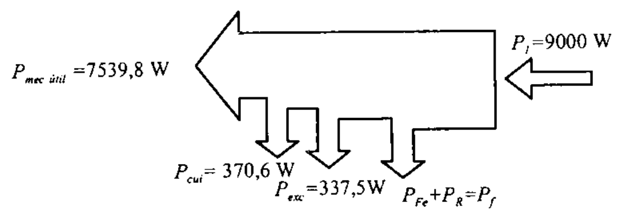


Figura 6.13

La potencia mecánica total, o potencia electromagnética de entrehierro, es la suma de la potencia mecánica útil más las pérdidas anteriores, que a su vez es el producto de la f.c.e.m. del motor por la corriente del inducido, es por ello que resulta:

$$P_{mec\ total} = 7539,8 + 752,1 = 8291,9 = EI_i = E19,25 \Rightarrow E = 430,75 \text{ voltios}$$

Cuando el motor gira a una velocidad de 1100 r.p.m. y con un par de 60 N.m., el valor de la nueva potencia mecánica útil es:

$$P'_{mec\ útil} = T'\omega' = 60 \cdot 2\pi \frac{1100}{60} = 6911,50 \text{ vatios}$$

y como quiera que las pérdidas mecánicas y en el hierro son constantes y su valor se ha determinado anteriormente, se obtiene una potencia mecánica total, que es igual al producto de la nueva f.c.e.m. del motor E' por la nueva corriente de inducido I'_i:

$$P'_{mec\ total} = 6911,50 + 752,1 = 7663,60 \text{ W} = E'I'_i$$

pero como quiera que la f.c.e.m. del motor se puede poner en función de la tensión de alimentación mediante la expresión:

$$E' = 450 - 1I'_i$$

al sustituir esta en la ecuación anterior, resulta la siguiente ecuación de 2° grado:

$$7663,6 = (450 - I'_i)I'_i \quad \Rightarrow \quad I'^2_i - 450I'_i + 7663,6 = 0$$

que conduce a las siguientes corrientes:

$$I'_i = 432,27 \text{ A} \quad ; \quad I'_i = 17,73 \text{ A}$$

La primera solución es fisicamente imposible ya que da lugar a una corriente que no soportaría el inducido. Tomando como correcta la segunda, el valor de la f.c.e.m. del motor sería, en esta situación, igual a:

$$E' = 450 - 1 \cdot 17,73 = 432,27 \text{ voltios}$$

Teniendo en cuenta, además, la relación de la f.c.e.m. con el flujo y la velocidad, se pueden escribir las siguientes ecuaciones para ambas situaciones de funcionamiento:

$$E = 430,75 = kn\Phi = k900\Phi \quad ; \quad E' = 432,27 = k1100\Phi'$$

y al dividir entre sí ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{430,75}{432,27} = \frac{900\Phi}{1100\Phi'} \quad \Rightarrow \quad \Phi' = 0,82\Phi$$

lo que significa una reducción de flujo magnético en el segundo caso de valor: $\Phi - 0,82\Phi = 0,18\Phi$, es decir, una reducción del flujo magnético del 18%.

Problema 6.15

Un motor tipo derivación de 250 V, con un flujo inductor constante, mueve una carga cuyo par varía con el cubo de la velocidad. Cuando gira a 500 r.p.m. el inducido absorbe 40 A. Hallar la velocidad a que girará si se conecta una resistencia de 25 Ω en serie con el inducido. Prescíndase de las pérdidas del motor.

Solución

En la Figura 6.14 se muestra el esquema de la máquina. Si las pérdidas del del motor son nulas, significa que se pueden despreciar las pérdidas mecánicas, las pérdidas en el hierro y la resistencia del inducido. Es evidente que por el inductor circulará una corriente para producir el flujo magnético de la máquina, y el que las pérdidas sean nulas para este devanado significa que la corriente de excitación es muy reducida (y que no interviene en el cálculo). De este modo, el valor de la f.c.e.m. de motor es igual a la tensión de alimentación del mismo, y al ser el flujo magnético constante, la f.c.e.m. será proporcional a la velocidad, por consiguiente se puede poner:

$$E = V = 250 \text{ voltios} = kn = k500 \qquad \text{(a)}$$

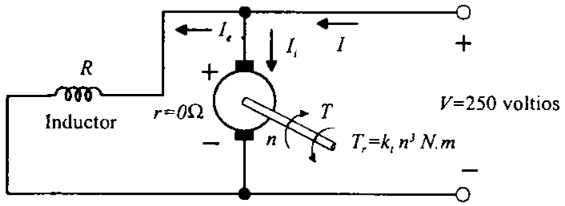


Figura 6.14

La potencia mecánica desarrollada por el motor es, de este modo:

$$P_{mec} = EI_i = 250 \cdot 40 = 10000 \text{ vatios} = T_r\omega$$

y teniendo en cuenta que el par depende del cubo de la velocidad de giro y que la velocidad angular mecánica es $\omega = 2\pi n/60$, al sustituir en la ecuación anterior, resulta:

$$10000 = k_t n^3 2\pi \frac{n}{60} = An^4 = A500^4 \qquad \text{(b)}$$

donde se ha denominado como constante A a la expresión $A = 2\pi k_t/60$.

Al introducir en el circuito del inducido una resistencia de 25 ohmios, la f.c.e.m. en esta situación será:

$$E' = V - rI_i' = 250 - 25I_i'$$

y al ser el flujo magnético siempre constante, la f.c.e.m. del motor será proporcional en cada caso a la velocidad, y por lo tanto se puede poner:

$$E' = V - rI_i' = 250 - 25I_i' = kn' \qquad \text{(a')}$$

Al dividir entre sí las ecuaciones (a) y (a') se obtiene:

$$\frac{250}{250-25I_i'} = \frac{500}{n'} \Rightarrow 250 - 25I_i' = \frac{n'}{2} \Rightarrow I_i' = 10 - \frac{n'}{50} \qquad \text{(c)}$$

Por otro lado, la potencia mecánica desarrollada por el motor con la resistencia adicional conectada en serie con el inducido, en este caso, viene expresada por:

$$P_{mec}' = E'I_i' = (250 - 25I_i')I_i' = An'^4 \qquad \text{(b')}$$

y dividiendo entre sí las ecuaciones (b) y (b') resulta:

$$\frac{10000}{(250-25I_i')I_i'} = \frac{n^4}{n'^4} = \frac{500^4}{n'^4} \qquad \text{(c')}$$

Al sustituir los valores de $250 - 25I_i'$ y de I_i' de la ecuación (c) y llevarlos a (c'), se obtiene:

$$\frac{10^4}{\frac{n'}{2}(10 - \frac{n'}{50})} = \frac{500^4}{n'^4} = \frac{625 \cdot 10^8}{n'^4} \Rightarrow 625 \cdot 10^4 (5 - \frac{n'}{100}) = n'^3$$

resultando la siguiente ecuación:

$$n'^3 + 6{,}25 \cdot 10^4 n' - 3{,}125 \cdot 10^7 = 0$$

que, el lector puede comprobar, da lugar a una solución real $n' = 250$ r.p.m. y a dos soluciones complejas conjugadas. Por consiguiente, el motor girará a una velocidad de 250 r.p.m.

Problema 6.16

Se dispone de un motor derivación de 200 V, cuya excitación se mantiene constante. El circuito del inducido tiene en serie un reóstato de arranque. Calcular el número de secciones de este reóstato y las resistencias de cada sección, sabiendo que la resistencia del inducido es de 0,5 Ω, y que las corrientes en este circuito deben estar comprendidas: a) entre 25 A y 50 A; b) entre 30 A y 50 A.

SUGERENCIA: *se deben demostrar las siguientes relaciones:*

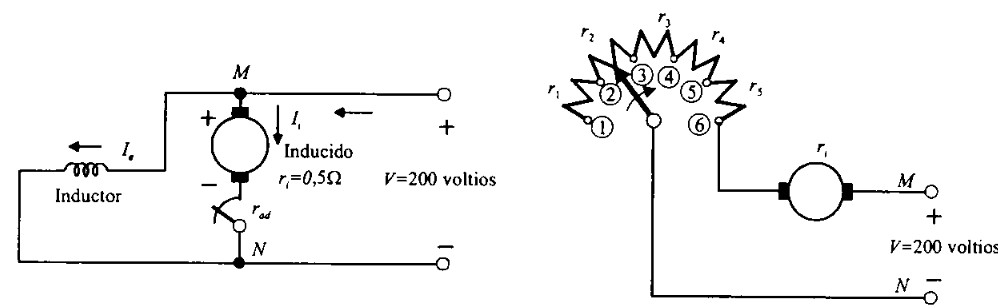
$$\frac{R_T}{r_i} = \gamma^n \quad ; \quad \frac{R_k}{R_{k+1}} = \gamma$$

donde R_T representa la resistencia total del circuito del inducido: propia + reóstato de arranque, r_i es la resistencia del inducido; R_k y R_{k+1} son las resistencias totales del circuito del inducido hasta las secciones k y k+1 respectivamente del reóstato de arranque, γ es el cociente I_{max}/I_{min} del inducido en el proceso de arranque.

Solución

En la Figura 6.15a se muestra el esquema de circuito correspondiente, mientras que en la Figura 6.15b se ha dibujado con detalle el reóstato de excitación con 5 secciones, en el que se incluyen las resistencias parciales: r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 (que corresponden a 6 posiciones de la manivela giratoria sobre los *plots* del reóstato). En el momento del arranque se incluye la máxima resistencia adicional del reóstato de arranque (posición 1 del reóstato), la velocidad es cero y, por consiguiente, la f.c.e.m. del motor es nula, lo que da lugar a una elevada corriente de arranque en el inducido. Si se denomina R_1 a la resistencia total del circuito del inducido en el arranque (es decir, desde el terminal *M* hasta el *plot 1* de la Figura 6.15b) e I_{max} a la máxima corriente de inducido permitida, se puede escribir:

$$E = 0 \Rightarrow V = E + R_1 I \Rightarrow V = 0 + R_1 I_{max} \Rightarrow R_1 = \frac{V}{I_{max}} \qquad \text{(a)}$$



a) b)

Figura 6.15

Estando el reóstato en el *plot* 1 y conforme se acelera el motor, la f.c.e.m. del motor deja de ser cero y se va elevando gradualmente con el aumento de velocidad, lo que se traduce en una reducción de la corriente del inducido, que disminuye hasta un valor I_{min}, de tal modo que al cabo de este tiempo se cumplirá la ecuación:

$$V = E_1 + I_{min} R_1 \qquad \text{(b)}$$

En la Figura 6.16 se muestra la forma en la que evoluciona la corriente de arranque con el tiempo. La primera posición del reóstato corresponde a la onda de corriente comprendida entre 0 y t_1 segundos (y la ecuación anterior (b) corresponde al punto de trabajo *A*). Cuando finaliza este primer período de arranque, el reóstato se pasa a la posición 2, lo cual elimina la resistencia r_1 del primer tramo del reóstato de arranque (la resistencia total desde *M* hasta el *plot 2* pasa a tener un valor total R_2), y es por lo que, en ese momento, la corriente adquiere un valor máximo (punto de trabajo *B*), que nuevamente se va a limitar al valor I_{max}. En el momento del cambio del *plot 1* al *plot 2*, la velocidad es constante, por lo que la f.c.e.m. del motor sigue siendo E_1 y la ecuación del inducido es de la forma:

$$V = E_1 + I_{max} R_2 \tag{c}$$

De las ecuaciones (b) y (c) se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{R_1}{R_2} = \gamma \tag{d}$$

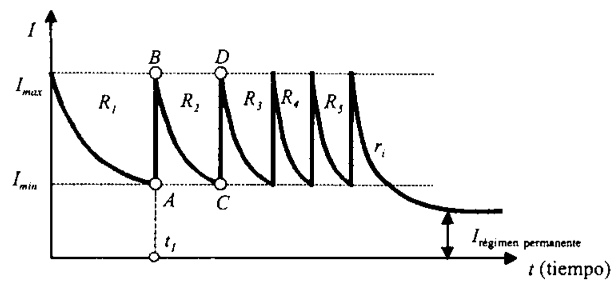


Figura 6.16

El motor sigue aumentando de velocidad en la posición del *plot 2* con la consiguiente reducción de la corriente. Al llegar a un valor mínimo nuevamente I_{min} (punto de trabajo *C*) hace que se pase el reóstato a la posición 3 (con resistencia total entre *M* y el *plot 3* de valor R_3 y punto de trabajo *D*) por lo que se obtiene una relación similar a la anterior:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{R_2}{R_3} = \gamma \tag{e}$$

El proceso de arranque continúa hasta que se elimina totalmente el reóstato de arranque (quedando solamente la resistencia del inducido r_i) y se alcanza el régimen permanente. Aplicando relaciones similares a (c) y (d) en cada posición del reóstato, el lector puede demostrar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \gamma = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_4}{R_5} = \frac{R_5}{r_i} = \frac{R_k}{R_{k+1}} \tag{f}$$

por lo que es inmediato escribir:

$$\frac{R_1}{R_2}\frac{R_2}{R_3}\frac{R_3}{R_4}\frac{R_4}{R_5}\frac{R_5}{r_i} = \gamma^5 \tag{g}$$

En general, si se denomina *n* al número de secciones del reóstato, $R_T = R_1$ a la *resistencia total* del circuito del inducido (inducido + total del reóstato) en el momento del arranque y r_i a la resistencia propia del inducido, y se denomina γ al cociente entre la corriente máxima y mínima permitida, se puede escribir:

$$\frac{R_1}{r_i} = \gamma^n \tag{h}$$

siendo las resistencias totales en función de las parciales las siguientes:

$$R_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_i \ ; \ R_2 = r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_i \ ; \ R_3 = r_3 + r_4 + r_5 + r_i \ ; R_4 = r_4 + r_5 + r_i \ ; R_5 = r_5 + r_i \ ;$$

a) En este caso la corriente solamente debe variar entre 25 y 50 amperios y, por consiguiente, se cumple:

$$r_i = 0{,}5 \ ; \ \gamma = \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{50}{25} = 2$$

Pero de acuerdo con (a), la resistencia total inicial del circuito del inducido debe valer:

$$R_T = R_1 = \frac{V}{I_{max}} = \frac{200}{50} = 4\ \Omega$$

y teniendo en cuenta la ecuación (h), el *número de plots n* o posiciones del reóstato de arranque será:

$$\frac{R_T}{r_i} = \frac{4}{0{,}5} = 8 = 2^n \Rightarrow n = 3$$

y por lo tanto los valores totales de la resistencias para cada posición, de acuerdo con (f), son:

$$R_T = R_1 = 4 \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{\gamma} = \frac{4}{2} = 2\ \Omega \ ; \ R_3 = \frac{R_2}{\gamma} = \frac{2}{2} = 1\ \Omega \ ; \ r_i = 0{,}5\ \Omega$$

que corresponden a las resistencias parciales siguientes:

$$r_1 = R_1 - R_2 = 4 - 2 = 2\ \Omega \quad ; \quad r_2 = R_2 - R_3 = 2 - 1 = 1\ \Omega \quad ; \quad r_3 = R_3 - r_i = 1 - 0{,}5 = 0{,}5\ \Omega$$

b) En este caso la corriente solamente debe variar entre 30 y 50 amperios, por lo que se cumple:

$$r_i = 0{,}5\ \Omega \quad ; \quad \gamma = \frac{50}{30} = 1{,}6 \quad ; \quad R_T = \frac{200}{50} = 4\ \Omega$$

y por lo tanto:

$$\frac{R_T}{r_i} = \frac{4}{0{,}5} = 8\Omega = \left(\frac{50}{30}\right)^n \Rightarrow n \log\frac{50}{30} = \log 8 \Rightarrow n\ (\log 50 - \log 30) = \log 8 \Rightarrow n = \frac{0{,}903}{1{,}6989 - 1{,}477} = 4{,}07 \approx 4$$

Los valores de las resistencias totales de los tramos serán:

$$R_T = R_1 = 4\ \Omega \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{\gamma} = \frac{4}{1{,}6} = 2{,}4 \quad ; \quad R_3 = \frac{2{,}4}{1{,}6} = 1{,}44\ \Omega \quad ; \quad R_4 = \frac{1{,}44}{1{,}6} = 0{,}864\ \Omega$$

que corresponden a unas resistencias parciales de:

$$r_1 = R_1 - R_2 = 4 - 2{,}4 = 1{,}6\ \Omega \quad ; \quad r_2 = R_2 - R_3 = 2{,}4 - 1{,}44 = 0{,}96\ \Omega$$

$$r_3 = R_3 - R_4 = 1{,}44 - 0{,}864 = 0{,}576\ \Omega \quad ; \quad r_4 = R_4 - r_i = 0{,}864 - 0{,}5 = 0{,}364\ \Omega$$

Problema 6.17

Un motor shunt, o derivación, de 400 voltios, tiene un reóstato de arranque en serie con el inducido de 4 secciones. La resistencia del inducido es de 1 ohmio. Si la corriente de arranque inicial es de 25 amperios y el pico de cada uno de los otros pasos es de 46 amperios, hallar: a) el límite inferior de corriente o corriente mínima de arranque; b) resistencias de cada sección.

Solución

a) La resistencia total del reóstato más la resistencia del inducido del motor tiene un valor:

$$R_1 = \frac{V}{I} = \frac{400}{25} = 16\ \Omega$$

El cociente entre la resistencia total y la resistencia del inducido vale:

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{16}{1} = 16 = \gamma^n = \gamma^4$$

de donde se deduce que $\gamma = 2$. Y como quiera que γ es el cociente entre la corriente máxima y mínima de arranque, se tiene:

$$\gamma = 2 = \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{46}{I_{min}} \quad \Rightarrow \quad I_{min} = \frac{46}{2} = 23 \text{ amperios}$$

b) Las resistencias totales de arranque serán:

$$R_2 = \frac{R_1}{\gamma} = \frac{16}{2} = 8\ \Omega \quad ; \quad R_3 = \frac{R_2}{\gamma} = \frac{8}{2} = 4\ \Omega \quad ; \quad R_4 = \frac{R_3}{\gamma} = \frac{4}{2} = 2\ \Omega$$

que corresponden a unas resistencias parciales de las secciones de valores:

$$r_1 = R_1 - R_2 = 16 - 8 = 8\ \Omega \quad ; \quad r_2 = R_2 - R_3 = 8 - 4 = 4\ \Omega \quad ; \quad r_3 = R_4 - R_3 = 4 - 2 = 2\ \Omega \quad ; \quad r_4 = R_4 - r_i = 2 - 1 = 1\ \Omega$$

Problema 6.18

Un motor shunt, o derivación de 500 voltios, absorbe una corriente de inducido de 240 amperios cuando gira a la velocidad asignada de 1000 r.p.m. moviendo un cierto par resistente. De repente se quiere frenar el motor desconectando el inducido de la red y cerrándole sobre una resistencia de 1,95 Ω, permaneciendo la excitación del devanado inductor. Calcular: a) corriente de frenado inicial; b) par de frenado a 800 r.p.m. como tanto por ciento del par a la velocidad asignada de 100 r.p.m. Se sabe que la resistencia del inducido del motor es de 0,05 Ω.

Solución

a) La f.c.e.m. del motor en las condiciones iniciales de funcionamiento es:

$$E = 500 - 0{,}05 \cdot 240 = 488 \text{ voltios}$$

Por lo tanto, al cerrar el inducido por una resistencia de 1,95 ohmios, se producirá inicialmente una corriente de inducido de valor:

$$I_i = \frac{E}{r_i + R} = \frac{488}{0{,}05 + 1{,}95} = 244 \text{ amperios}$$

b) Por otro lado, en la etapa de frenado, si el flujo magnético que produce el devanado de excitación es constante, la f.c.e.m. del motor será siempre proporcional a la velocidad. Por consiguiente, la f.c.e.m. E' del motor, a la velocidad de 800 r.p.m, será igual a:

$$E' = E\frac{n'}{n} = 488\frac{800}{1000} = 390{,}4 \text{ voltios}$$

y como el inducido en esta etapa de frenado dinámico está cerrado sobre una resistencia adicional de 1,95 Ω, la corriente que circulará por el mismo a la velocidad de 800 r.p.m., es:

$$I_i' = \frac{E'}{r_i + R} = \frac{390{,}4}{0{,}05 + 1{,}95} = 195{,}2 \text{ amperios}$$

En definitiva, la corriente del inducido en la etapa de frenado es directamente proporcional a la velocidad del motor, y si esta es de 800 r.p.m. y la asignada es de 1000 r.p.m., la corriente de inducido, a 800 r.p.m., será el 80% de la corriente inicial de frenado (compruébese que 195,2/244 = 0,8).

Además, como el par del motor es de la forma:

$$T = \frac{EI_i}{\omega} = \frac{kn\Phi I_i}{2\pi \frac{n}{60}} = A\, I_i$$

Este par es directamente proporcional a la corriente que atraviesa el inducido, es decir, el valor del par de frenado a 800 r.p.m., será el 80% del par a la velocidad asignada de 1000 r.p.m.

Problema 6.19

Un motor de c.c. tipo derivación tiene una resistencia del devanado inductor de 125 Ω y una resistencia total del inducido (incluidas las escobillas) de 0,1 Ω. Para construir su curva de vacío se impulsa mediante un motor auxiliar a una velocidad de 1500 r.p.m., lo que da lugar a una curva que puede expresarse por la ecuación:

$$E = \frac{400 I_e}{1 + I_e} \quad (E\text{: f.e.m.; } I_e\text{: corriente de excitación})$$

La reacción del inducido es equivalente a una corriente de 1 mA del devanado de excitación por cada amperio que circula por el devanado del inducido. Las pérdidas en el hierro y mecánicas son de 1500 W y se suponen constantes. Calcular: a) la velocidad cuando trabaja como motor alimentado de una red de c.c. de 250 voltios y absorbiendo una corriente total de 100 amperios; b) potencia electromagnética desarrollada por el motor; c) potencia mecánica; d) par mecánico en el eje; e) rendimiento del motor.

Solución

a) La corriente de excitación es:

$$I_e = \frac{V}{R_e} = \frac{250}{125} = 2 \text{ amperios}$$

y la corriente de inducido es:

$$I_i = I - I_e = 100 - 2 = 98 \text{ amperios}$$

Por consiguiente, la f.c.e.m. del motor vale:

$$E' = V - r_i I_i = 250 - 0{,}1 \cdot 98 = 240{,}2 \text{ voltios}$$

Pero debido a la reacción del inducido, la corriente de excitación neta es la diferencia entre la corriente real de campo menos la acción desmagnetizante del inducido que, según el enunciado, es equivalente a 1mA por cada amperio que circula por el inducido, es decir, la corriente de excitación neta vale:

$$I_{e\,neta} = 2 - 0{,}001 \cdot 98 = 1{,}902 \text{ amperios}$$

y teniendo en cuenta la curva de vacío del motor, se observa que la corriente anterior produciría una f.e.m. a una velocidad de 1500 r.p.m. de valor:

$$E = \frac{400 I_e}{1 + I_e} = \frac{400 \cdot 1{,}902}{1 + 1{,}902} = 262{,}16 \text{ voltios}$$

Por ello conociendo la proporcionalidad entre las f.c.e.m.s. y las velocidades, la velocidad a la que girará el motor cuando su f.c.e.m. sea de 240,2 voltios será:

$$\frac{E}{E'} = \frac{n}{n'} \quad \Rightarrow \quad \frac{262{,}16}{240{,}2} = \frac{1500}{n'} \quad \Rightarrow \quad n' = 1374{,}35 \text{ voltios}$$

b) La potencia electromagnética es igual a:

$$P_a = E' I_i = 240{,}2 \cdot 98 = 23539{,}6 \text{ vatios}$$

c) La potencia mecánica será:

$$P_2 = P_a - P_f = 23539{,}6 - 1500 = 22039{,}6 \text{ vatios}$$

d) El par mecánico en el eje será, por lo tanto:

$$T = \frac{P_2}{\omega} = \frac{22039{,}6}{2\pi \dfrac{1374{,}35}{60}} = 153{,}14 \text{ N.m.}$$

e) Como quiera que la potencia eléctrica que absorbe el motor de la red vale $P_1 = VI = 250 \cdot 100 = 25000$ vatios, el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{22039{,}6}{25000} = 88{,}16\%$$

el lector puede comprobar que: $P_1 = P_2 + P_f + P_{cui} + P_{exc} = 22039{,}6 + 1500 + 0{,}1 \cdot 98^2 + 125 \cdot 2^2 = 25000$ vatios.

Problema 6.20

Un motor serie de c.c. con el circuito magnético lineal de 250 V, absorbe 50 A, cuando da su par asignado a 1000 r.p.m. La resistencia del motor (inducido + inductor) es de 0,4 Ω. Calcular la resistencia que debe añadirse en serie con el motor para obtener el par asignado, a) en el arranque; b) a 500 r.p.m.

Solución

La f.c.e.m del motor vale inicialmente:

$$E = 250 - 0{,}4 \cdot 50 = 230 \text{ voltios}$$

Pero al ser el circuito magnético lineal se puede escribir:

$$E = k\, n\, \Phi = k\, n\, k' I = c n I \qquad \text{(a)}$$

Donde c es una constante e igual a $k \cdot k'$. Por otro lado, la expresión del par producido por el motor se puede poner:

$$T = \frac{EI}{\omega} = \frac{c n I^2}{2\pi \dfrac{n}{60}} = A I^2$$

es decir, el par es proporcional al cuadrado de la corriente que absorbe el motor. Esto significa que si el par del motor no varía, la corriente absorbida por la máquina en todas situaciones será de 50 amperios.

a) En el arranque, al ser la velocidad nula, la f.c.e.m. producida en ese instante es cero, además la corriente debe ser de 50A porque el par es constante y, como consecuencia de haber colocado una resistencia en serie de valor R con el motor, se cumple:

$$E = 0 = 250 - (R + 0{,}4)\, 50$$

de donde se deduce que $R = 4{,}6\ \Omega$.

b) Si el motor debe producir el par asignado a 500 r.p.m., la corriente absorbida será nuevamente de 50 A, y si se denomina R' a la resistencia colocada en serie, la f.c.e.m. E' del motor será:

$$E' = 250 - (R' + 0{,}4)\, 50$$

Teniendo en cuenta la expresión (a) y que la corriente es constante e igual a 50 amperios a 500 r.p.m. (que es la mitad de la velocidad asignada), se producirá la mitad de la f.c.e.m., es decir, el valor de E' debe ser de 115 voltios, valor que al sustituir en la ecuación anterior nos da un valor de la resistencia R':

$$E' = 115 = 250 - (R' + 0{,}4)\, 50 \Rightarrow R' = 2{,}3\ \Omega$$

Problema 6.21

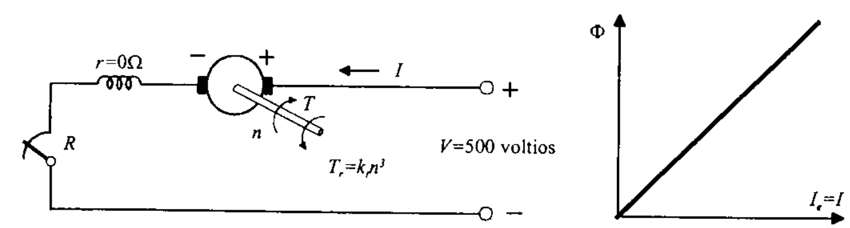
Un motor serie, con un circuito magnético no saturado (es decir, el circuito magnético es lineal) y con una resistencia de inducido despreciable, absorbe 50 A a 500 V cuando gira a una cierta velocidad con una carga dada. Si el par de carga varía con el cubo de la velocidad, hallar la resistencia adicional colocada en serie con el motor para poder reducir la velocidad: a) un 50%; b) un 20%.

Solución

En la Figura 6.17a se muestra el circuito del motor y en la Figura 6.17b se observa la característica lineal del circuito magnético de la máquina. El valor de la f.c.e.m. del motor, cuando absorbe 50 amperios, es igual a la tensión aplicada de 500 voltios, ya que se desprecia la resistencia interna del motor. Las expresiones de la f.c.e.m. del motor y del par, y su relación con la velocidad y la corriente I absorbida por la máquina, son de la forma:

$$E = V - rI = V = 500 = kn\Phi = cnI \; ; \; T = \frac{EI}{\omega} = \frac{500 \cdot 50}{2\pi \dfrac{n}{60}} = k_r n^3 \Rightarrow EI = 25000 = \frac{2\pi}{60} k_r n^4 = A n^4 \qquad \text{(a)}$$

ya que el par de carga varía con el cubo de la velocidad, siendo c, k_r y A parámetros constantes.



a) b)

Figura 6.17

a) Si la velocidad se reduce un 50%, la nueva velocidad será $n' = 0{,}5n$, y denominando E' e I' a los valores correspondientes de la f.c.e.m. y corriente absorbida por el motor, se cumple:

$$\text{f.c.e.m: } E' = 500 - RI' = cn'I' ; \quad \text{potencia: } E'I' = (500 - RI')I' = An'^4 \qquad \text{(b)}$$

De este modo, si se dividen las expresiones (a) por (b), resulta:

$$\frac{500}{E'} = \frac{nI}{n'I'} = 2\frac{I}{I'} = \frac{100}{I'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{E'}{I'} = \frac{500}{100} = 5$$

$$\frac{25000}{E'I'} = \frac{n^4}{0,5n^4} = 2^4 = 16 \qquad \Rightarrow \qquad 25000 = 16E'I' = 16\cdot 5I'^2 = 80I'^2$$

de donde se deduce:

$$I' = 17,678 \text{ amperios} \quad \Rightarrow \quad E' = 5I' = 88,388 \text{ voltios} = 500 - RI' = 500 - R17,678 \Rightarrow R = 23,284\ \Omega$$

b) Si la velocidad se reduce un 20%, es decir, la nueva velocidad es $n' = 0,8n$, los valores correspondientes de la f.c.e.m. y la corriente absorbida por el motor se denominan ahora E'' e I'' respectivamente, por lo que se cumple:

$$\text{f.c.e.m: } E'' = 500 - RI'' = cn''I''; \quad \text{potencia: } E''I'' = (500 - RI'')I'' = An''^4 \qquad \text{(c)}$$

y al dividir las ecuaciones (a) por (c) se obtiene:

$$\frac{500}{E''} = \frac{nI}{n''I''} = \frac{n50}{0,8nI''} = \frac{62,5}{I''} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{E''}{I''} = 8 \Rightarrow E'' = 8I''$$

$$\frac{25000}{E''I''} = \left(\frac{n}{0,8n}\right)^4 = 2,441 \qquad \Rightarrow \qquad 25000 = 2,441E''I'' = 2,441\cdot 8I''^2 = 19,53I''^2$$

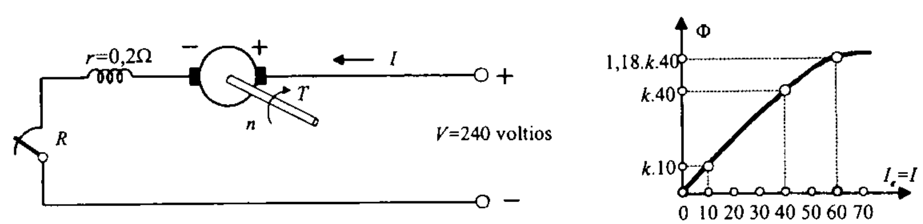
de donde se deduce:

$$I'' = 35,777A \Rightarrow E'' = 8I'' = 286,216 = 500 - R''35,777 \Rightarrow R'' = 5,975\ \Omega$$

Problema 6.22

Un motor serie de 240 V, tiene una resistencia de 0,2 Ω. A la velocidad de 1800 r.p.m. absorbe 40 A. Hallar la resistencia que debe añadirse: a) para limitar la velocidad a 3600 r.p.m. cuando la corriente sea de 10 A, suponiendo un flujo proporcional a la corriente entre 10 y 40 A; b) para que la velocidad sea de 900 r.p.m. para una corriente de 60 A, sabiendo que el flujo a 60 A es un 18% mayor que el flujo a 40 A. ¿A qué velocidad girará el motor cuando se conecte directamente a la línea y absorba 60 A?

Solución



a) b)

Figura 6.18

En la Figura 6.18a se muestra el esquema del motor y en la Figura 6.18b la curva de imanación de la máquina. Inicialmente, cuando el motor gira a 1800 r.p.m. y absorbe 40 amperios, la f.c.e.m. del motor es igual a:

$$E = V - rI = 240 - 0,2\cdot 40 = 232 \text{ voltios} \quad ; \quad E = k_1 n\Phi = k_1 nkI = A40n = 232 = A40\cdot 1800 \qquad \text{(a)}$$

a) Cuando el motor gira a 3600 r.p.m. y absorbe 10 amperios, se tiene:

$$n' = 3600 \Rightarrow E' = An'I' = A3600\cdot 10 \qquad \text{(b)}$$

y teniendo en cuenta la relación (a), se cumple:

$$\frac{232}{E'} = \frac{A40\cdot 1800}{A10\cdot 3600} = 2$$

de donde se deduce:

$$E' = 116 \text{ voltios} = V - RI = 240 - R10 \Rightarrow R = 12,4\ \Omega$$

Como la resistencia del inducido vale 0,2 ohmios, la resistencia adicional del reóstato conectado en serie debe ser:

$$R_{ad} = 12,4 - 0,2 = 12,2\ \Omega$$

b) Cuando el motor gira a 900 r.p.m. con una corriente de 60 amperios, y al ser el flujo magnético un 18% mayor que cuando la corriente absorbida es de 40 amperios, se tiene una f.c.e.m. del motor:

$$E'' = k_1 n''\Phi'' = k_1 n'' k1,18\cdot 40 = A1,18\cdot 40\cdot 900 \qquad \text{(c)}$$

y teniendo en cuenta la relación (a), resulta:

$$\begin{matrix} 232 = A40\cdot 1800 \\ E'' = A1,18\cdot 40.900 \end{matrix} \Rightarrow E'' = 136,88 = 240 - R''60 \Rightarrow R'' = 1,719\ \Omega$$

que corresponde a una resistencia adicional:

$$R'_{ad} = 1,719 - 0,2 = 1,519\Omega$$

c) Si el motor se conecta directamente a la red y absorbe 60 amperios, la f.c.e.m. es igual a:

$$E''' = V - rI = 240 - 0,2\cdot 60 = 228 \text{ voltios} = A1,18\cdot 40n'''$$

y teniendo en cuenta (a), da lugar a:

$$\begin{matrix} 232 = A40\cdot 1800 \\ 228 = A1,18\cdot 40n''' \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad n''' = \frac{228}{232}\frac{40\cdot 1800}{1,18\cdot 40} = 1499,12 \text{ r.p.m.}$$

que será la velocidad a la que girará el motor.

Problema 6.23

Un motor serie de 4 polos, gira normalmente a 600 r.p.m. con una alimentación a 250 V, absorbiendo 20 A. Todas las bobinas de campo están conectadas en serie. Estimar la velocidad y la corriente consumida por el motor si las bobinas se vuelven a conectar en dos grupos en paralelo de dos bobinas en serie. El par de carga es de tipo "ventilador", aumentando con el cuadrado de la velocidad. Supóngase que el flujo es directamente proporcional a la intensidad de excitación y prescíndase de las pérdidas de potencia y las caídas de tensión.

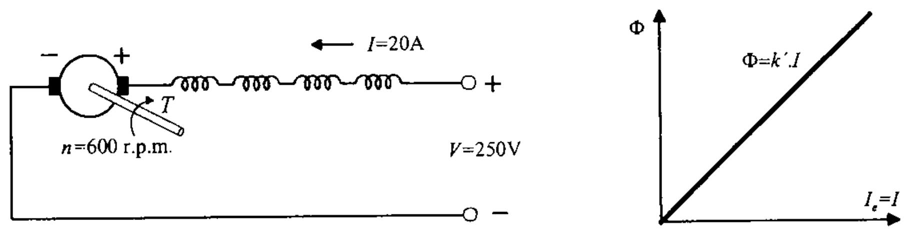
Solución

En la Figura 6.19a se muestra el esquema inicial del motor con todas las bobinas de excitación puestas en serie. En la Figura 6.19b se señala el carácter lineal del circuito magnético. Al prescindir de las caídas de tensión de la máquina, la f.c.e.m. del motor viene expresada inicialmente por:

$$E = V = 250 = kn\Phi = knk'I = A600\cdot 20 \qquad \text{(a)}$$

y el par del motor será de la forma:

$$T = \frac{EI}{\omega} = \frac{EI}{2\pi\frac{n}{60}} = c\frac{EI}{n} = c\frac{250.20}{600} = k_r n^2 = k_r 600^2 \qquad \text{(b)}$$



a) b)

Figura 6.19

Cuando el motor se conecta como señala la Figura 6.19, es decir, con los devanados de excitación unidos en paralelo con dos bobinas en serie, la corriente que circulará por los devanados de excitación es igual a $I'/2$, siendo I' la nueva corriente absorbida por el motor, y por lo tanto, la nueva f.c.e.m. del motor vendrá expresada por:

$$E' = V' = 250 = kn'\Phi' = kn'k'\frac{I'}{2} = An'\frac{I'}{2} \qquad \text{(c)}$$

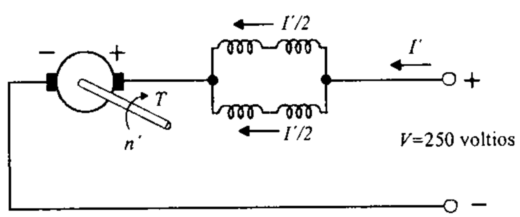


Figura 6.20

Al dividir las expresiones (a) por (c) resulta:

$$A600\cdot 20 = An'\frac{I'}{2} \quad \Rightarrow \quad 24000 = n'I' \qquad \text{(d)}$$

Si en esta situación el motor gira a una velocidad n', el par correspondiente teniendo en cuenta (b), será de la forma:

$$T' = \frac{E'I'}{\omega'} = \frac{E'I'}{2\pi\frac{n'}{60}} = c\frac{E'I'}{n'} = c\frac{250\cdot I'}{n'} = k_r n'^2 \qquad \text{(e)}$$

y al dividir entre sí las ecuaciones (b) y (e) se obtiene:

$$\frac{20n'}{600I'} = \frac{600^2}{n'^2} \qquad \text{(f)}$$

Al sustituir el valor de la corriente I' de la ecuación (d) en la expresión (f), resulta una velocidad:

$$\frac{20n'^2}{600\cdot 24000} = \frac{600^2}{n'^2} \Rightarrow n'^4 = \frac{600^3\cdot 24000}{20} \Rightarrow n' = 713{,}52 \text{ r.p.m.}$$

que corresponde a una corriente absorbida por el motor:

$$I' = \frac{24000}{713{,}52} = 33{,}64 \text{ amperios}$$

Problema 6.24

Un motor serie que tiene una resistencia de 1 Ω entre terminales mueve un ventilador, para el cual el par varía con el cuadrado de la velocidad. A 220 V el conjunto gira a 300 r.p.m. y absorbe 25 A. Debe aumentarse la velocidad a 400 r.p.m. aumentando la tensión. Hallar la tensión y la corriente para los casos límites siguientes: a) cuando el circuito magnético esté saturado, es decir, para flujo constante; b) cuando el circuito magnético esté no saturado, es decir, cuando el flujo sea directamente proporcional a la corriente.

Solución

En la Figura 6.21 se muestra el esquema del motor. Cuando este gira a 300 r.p.m. alimentado por una tensión de 220 voltios y absorbiendo 25 amperios, la f.c.e.m. del motor y el par correspondiente son respectivamente:

$$E = 220 - 1\cdot 25 = 195 = kn\Phi = k300\cdot\Phi \ ; \ T = \frac{EI}{\omega} = \frac{195\cdot 25}{2\pi\frac{300}{60}} = k_r n^2 = k_r 300^2 \qquad \text{(a)}$$

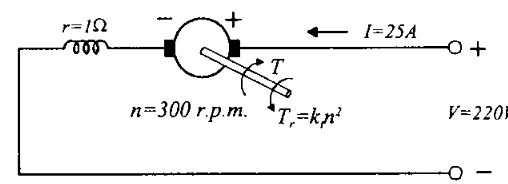


Figura 6.21

a) Si se desea aumentar la velocidad a 400 r.p.m. y el flujo permanece constante, y se denominan respectivamente V' e I' a la tensión aplicada y la corriente absorbida por el motor, la nueva f.c.e.m. del motor será:

$$E' = V' - 1I' = kn'\Phi' = k400\Phi' \qquad \text{(b)}$$

Teniendo en cuenta la primera ecuación (a) y al dividirla por (b), da lugar a:

$$\frac{195}{E'} = \frac{300}{400} \quad \Rightarrow \quad E' = 260 = V' - 1I' \qquad \text{(c)}$$

Por otro lado, el nuevo valor del par del motor vendrá expresado por:

$$T' = \frac{EI}{\omega'} = \frac{260I'}{2\pi\frac{n'}{60}} = C400^2 \qquad \text{(d)}$$

y dividiendo entre sí la segunda ecuación (a) por (d), resulta:

$$\frac{195\cdot 25}{300}\frac{400}{260I'}=\frac{300^2}{400^2}\quad\Rightarrow I'=44{,}44 \text{ amperios}$$

por lo que según (b), corresponde a una tensión de alimentación V':

$$260=V'-44{,}44\quad\Rightarrow\quad V'=304{,}44 \text{ voltios}$$

b) Si se desea aumentar la velocidad a 400 r.p.m. y el flujo es proporcional a la corriente, y se denominan respectivamente V'' e I'' a la tensión aplicada y la corriente absorbida por el motor, la nueva f.c.e.m. del motor será:

$$E''=V''-1I''=kn''\Phi''=k400\Phi''=k400k'I''=A400I'' \tag{e}$$

y teniendo en cuenta el carácter lineal del circuito magnético, la primera ecuación (a) se puede escribir de esta forma:

$$E=195=k300\Phi=k300k'I=A300I$$

dividiendo esta última ecuación por la (e), se obtiene:

$$\frac{195}{E''}=\frac{300\cdot 25}{400I''}\Rightarrow E''=10{,}4I'' \tag{f}$$

Por otro lado, la nueva expresión del par desarrollado por la máquina es:

$$T''=\frac{E''I''}{\omega''}=\frac{10{,}4I''^2}{2\pi\frac{n''}{60}}=k_t 400^2$$

y dividiendo la segunda ecuación (a) por la anterior, resulta una corriente absorbida por la máquina:

$$\frac{10{,}4I''^2}{n''}\frac{300}{195\cdot 25}=\frac{400^2}{300^2}\Rightarrow I''=33{,}33 \text{ A}$$

Que corresponde, según (f), a una f.c.e.m. del motor: $E''=10{,}4\cdot 33{,}33=346{,}66$ voltios,

y a una tensión de alimentación según (e): $V''=E''+rI''=346{,}66+1\cdot 33{,}33=380$ voltios.

Problema 6.25

Una máquina de c.c. tipo serie tiene una resistencia total (inductor + inducido) de 1 Ω. Se mueve esta máquina mediante un motor externo que hace trabajar al motor de c.c. como generador, a una velocidad de ensayo de 500 r.p.m., dando lugar a la siguiente curva de vacío:

E(V)	10	20	30	35	40	45	50	60
I (A)	194	302	370	397	418	437	453	480

Cuando la máquina eléctrica funciona como motor serie mueve un ventilador cuyo par resistente viene expresado por la ecuación:

$$T_r=10+\frac{n^2}{1600}\quad (T_r \text{ se expresa en N.m. y } n \text{ en r.p.m.})$$

Calcular la velocidad de funcionamiento en régimen permanente y el par desarrollado por el motor cuando se conecta a una red de c.c. cuya tensión es de 500 V.

Solución

La resolución de este problema debe realizarse por un método gráfico que requiere dibujar las curvas par-velocidad del motor y de la carga, de tal modo que el punto de intersección de ambas curvas será el punto de funcionamiento o de equilibrio del sistema motor-carga. Para determinar la curva par-velocidad del motor de c.c. se parte de los valores de la curva de vacío. Para cada valor de la corriente de inducido debe calcularse la f.c.e.m. del motor mediante la ecuación:

$$E'=V-rI_i$$

De este modo se calcula la velocidad angular de funcionamiento correspondiente a partir de la expresión:

$$\omega'=\omega_n\frac{E'}{E}$$

donde ω_n es la velocidad angular a la que se ha realizado el ensayo de vacío, E' es la f.c.e.m. del motor para la corriente de funcionamiento y E es la f.e.m. de la máquina trabajando como generador y que se obtiene de la curva de vacío. A partir de estos valores se calcula el par electromagnético del motor de acuerdo con la ecuación:

$$T=\frac{E'I_i}{\omega'}$$

En la Tabla nº1 se indican los resultados obtenidos para una velocidad de ensayo que en rad/s tiene un valor:

$$\omega_n=2\pi\frac{n}{60}=2\pi\frac{500}{60}=52{,}36 \text{ rad/s}$$

ω_n=52,36 rad/s	$I_i=I_e$(A)	10	20	30	35	40	45	50	60
	E(V)	194	302	370	397	418	437	453	480
$E'=V-rI_i$		490	480	470	465	460	455	450	440
$\omega'=\omega_n E'/E$	ω'	132,2	83,2	66,5	61,3	57,6	54,5	52	48
$n'=60\omega'/2\pi$	n'	1262,4	794,5	635	585,6	550	520,6	496,6	458,4
Par motor: $T=E'I_i/\omega'$		37,1	115,4	212	265,5	319,4	375,7	432,7	550
Par resistente: $T_r=10+n'^2/1600$		1006	404,5	262	224	199	179,3	164	141,3

Tabla nº 1

Para que el lector comprenda la preparación y confección de esta tabla, se va a determinar la columna correspondiente a una corriente de inducido de 30 A, a la que corresponde una f.e.m. de 370 V y una velocidad de 500 r.p.m.; de este modo la f.c.e.m. del motor será:

$$E'=V-rI_i=500-1\cdot 30=470 \text{ voltios}$$

La velocidad correspondiente en rad/s será:

$$\omega'=\omega_n\frac{E'}{E}=52{,}36\frac{470}{370}\approx 66{,}5 \text{ rad/s}$$

que corresponde a una velocidad en r.p.m.:

$$\omega'=2\pi\frac{n}{60}\Rightarrow n=\frac{60}{2\pi}\omega'=\frac{60}{2\pi}66{,}5\approx 635 \text{ r.p.m.}$$

por consiguiente, el par electromagnético producido por el motor vale:

$$T=\frac{E'I_i}{\omega'}=\frac{470\cdot 30}{66{,}5}=212 \text{ N.m.}$$

y el par resistente que ejerce el ventilador es igual a:

$$T_r = 10 + \frac{n^2}{1600} = 10 + \frac{635^2}{1600} \approx 262 \text{ N.m.}$$

y de este modo se pueden construir las curvas par-velocidad tanto del motor como del ventilador, como se muestra en la Figura 6.22. El punto A de intersección de ambas curvas, indica la igualdad entre los pares motor (electromagnético) y resistente y será el punto de funcionamiento del sistema motor-ventilador, que corresponde de un modo aproximado a los valores:

$$T \approx 240 \text{ N.m.} \;\; ; \;\; n \approx 600 \text{ r.p.m.}$$

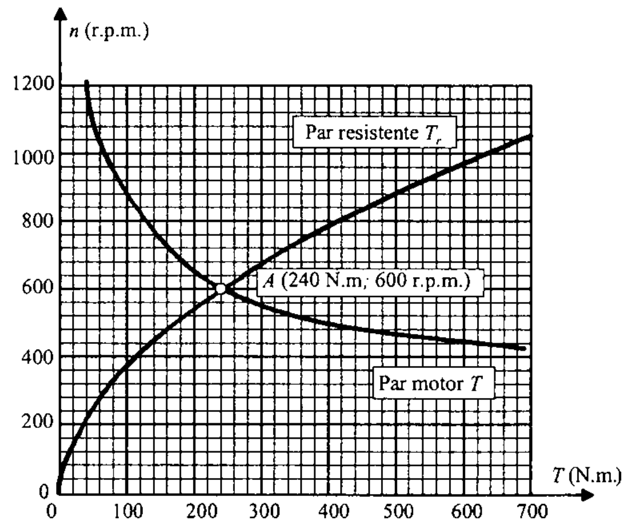


Figura 6.22

Se puede llegar a los mismos resultados dibujando las curvas de pares en función de las corrientes de inducido como se muestra en la Figura 6.22 (y que en algunos casos da lugar a resultados más precisos cuando se tienen altos valores de los pares y velocidades). El punto de intersección B de ambas curvas corresponde a los valores:

$$I_i \approx 31{,}5 \text{ A} \;\; ; \;\; T = 230 \text{ N.m.}$$

Partiendo de los mismos, se puede obtener la velocidad de funcionamiento del grupo sustituyendo en la ecuación del par resistente del ventilador, lo que da lugar a:

$$T_r = 230 = 10 + \frac{n^2}{1600} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{1600(230-10)} \approx 593 \text{ r.p.m.}$$

que también se puede comprobar con las ecuaciones del motor, ya que para este punto de trabajo y partiendo de que $I_i = 31{,}5$ A, se obtienen los siguientes resultados:

La f.c.e.m. del motor valdrá:

$$E' = V - rI_i = 500 - 1 \cdot 31{,}5 = 468{,}5 \text{ voltios}$$

La velocidad correspondiente en rad/s será:

$$\omega' = \omega_n \frac{E'}{E} = 52{,}36 \frac{468{,}5}{370} \approx 66{,}3 \text{ rad/s}$$

que corresponde a una velocidad en r.p.m.:

$$\omega' = 2\pi \frac{n}{60} \Rightarrow n = \frac{60}{2\pi}\omega' = \frac{60}{2\pi} 66{,}3 \approx 633 \text{ r.p.m.}$$

que es algo diferente a la velocidad obtenida a partir del par resistente de la bomba. Por otra parte, el par electromagnético producido por el motor vale:

$$T = \frac{E' I_i}{\omega'} = \frac{468{,}5 \cdot 31{,}5}{66{,}3} = 223 \text{ N.m.} \approx 230 \text{ N.m.}$$

resultado que es consistente con el valor que se obtiene en la curva de la Figura 6.23.

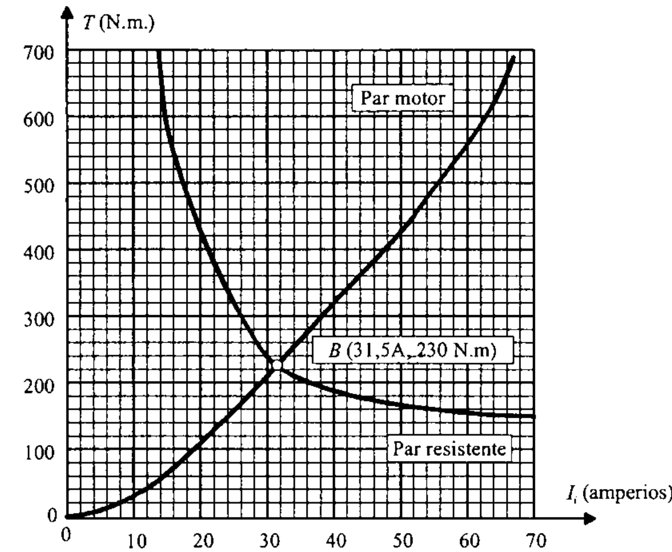


Figura 6.23

Problemas suplementarios

Problema 6.26

Un generador de c.c. con excitación derivación, se ha sometido a un ensayo de vacío a la velocidad asignada de 1000 r.p.m., dando lugar a la siguientes tabla de valores:

E(V)	*23*	*43*	*76*	*104*	*126*	*145*	*161*
I(A)	*1*	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*

La resistencia del devanado inductor es de 15 ohmios y la resistencia total del inducido es de 0,02 ohmios. Si el generador gira a la velocidad asignada de 1000 r.p.m., determinar la corriente que la dinamo suministrará a la carga cuando la tensión terminal sea de 120 V.

[Resp. I = 292 A]

Problema 6.27

Un generador shunt tiene una curva de vacío medida a 500 r.p.m. expresada por la ecuación:

$$E = \frac{350 I_e}{1 + I_e}$$

La resistencia del devanado de campo es de 100 ohmios y la del inducido de 0,2 ohmios. El devanado de campo o inductor tiene en serie un reóstato de regulación para ajuste de la tensión producida por la máquina. a) Calcular el valor de la resistencia que debe incluirse en el reóstato anterior para que la dinamo, girando a 500 r.p.m., produzca una tensión en bornes de 220 V, cuando la máquina entregue una corriente de 50 A a una carga conectada en sus terminales; b) calcular la resistencia del reóstato de regulación para que la máquina genere en vacío una tensión de 180 V a la velocidad de 500 r.p.m.; c) si se elimina la resistencia del reóstato y la máquina gira en vacío a 250 r.p.m., calcular la tensión producida por el generador.

[Resp. a) R = 4,78 Ω; b) R = 70 Ω; c) 75 V]

Problema 6.28

Un generador derivación de 4 polos tiene un devanado imbricado simple con 1500 conductores. Si el flujo magnético por polo es de 2.10^{-2} Wb: a) determinar la velocidad a la que debe girar la máquina para obtener una tensión de 500 V en vacío; b) si la resistencia del devanado de excitación es de 250 Ω y la del inducido es de 0,1 Ω, calcular la velocidad a la que debe girar el generador para mantener la tensión terminal de 500V cuando la corriente de carga sea de 150 A.

[Resp. a) 1000 r.p.m.; b) 1030,4 r.p.m.]

Problema 6.29

Un generador derivación tiene una resistencia total del inducido de 0,3 Ω y se conecta a una red de c.c. de 500V. Cuando el generador tiene un flujo por polo de 0,03 Wb y gira a 1000 r.p.m. suministra a la red una corriente de 50 A. a) Si el flujo por polo se reduce de repente a 0,025 Wb, calcular la corriente del inducido del generador en el instante inmediato al cambio de flujo magnético, indicando en ese momento si la máquina trabaja como generador o como motor: b) Se desea que la máquina vuelva al funcionamiento original, entregando a la red la misma corriente de 50 A, ¿cuál es la velocidad a la que tendrá que girar.

[Resp. a) 236,11 A, motor; b) 1200 r.p.m.]

Problema 6.30

Una dinamo derivación tiene una curva de vacío a la velocidad asignada que responde a la ecuación:

$$E = \frac{360 I_e}{0,7 + I_e}$$

las resistencias de los devanados inductor e inducido son respectivamente de 200 ohmios y 1 ohmio. El generador se mueve a la velocidad asignada alimentando una resistencia de carga R_L. Calcular: a) valores posibles de esta resistencia de carga si se sabe que en ella se disipa una potencia de 2 kW; b) tensión en bornes de la máquina para los valores de las resistencias anteriores.

[Resp. a) R_L = 21,08 Ω; R_L = 1,065 Ω; b) 205,35 V; 46,15 V. Realmente la solución físicamente posible es la primera, ya que conduce a una corriente de carga menor y a una pequeña caída de tensión de la máquina; la otra solución obligaría a que el generador suministrara una corriente muy elevada que produciría el deterioro de la máquina.]

Problema 6.31

Un generador derivación se mueve a velocidad constante y tiene una curva de vacío expresada por la siguiente tabla de valores:

E(V)	0	124	248	318	364	386	392
I_e(A)	0	1	2	3	4	5	6

Calcular: a) tensión generada en vacío si la resistencia del inductor es de 80 Ω; b) resistencia adicional que debe conectarse en serie con el devanado inductor para reducir la tensión de vacío en 20 V; c) resistencia crítica del devanado inductor.

[Resp. a) 384 V; b) 11 Ω; c) 124 Ω]

Problema 6.32

Una dinamo shunt, movida por una correa de transmisión, gira a 250 r.p.m. sobre unas barras colectoras de 500 V, a las que entrega una potencia eléctrica de 200 kW. De repente se rompe la correa y la máquina continúa girando como motor, absorbiendo una potencia eléctrica de las barras de 20 kW. Si la resistencia del inductor es de 100 ohmios y la del inducido de 0,04 ohmios, ¿a qué velocidad girará la máquina como motor?

[Resp. 241,5 r.p.m.]

Problema 6.33

Una dinamo con excitación independiente gira a 500 r.p.m. y alimenta una carga de resistencia constante, siendo la tensión en la misma de 250 V y la corriente en el inducido de 200 A. La resistencia del inducido es de 0,05 Ω. Si se reduce la velocidad de rotación de la máquina a 400 r.p.m. permaneciendo constante la corriente de excitación ¿cuál será el valor de la corriente que la dinamo suministrará a la carga?

[Resp. 160 A]

Problema 6.34

Un motor de c.c. tipo derivación tiene una resistencia de inducido de 0,5 Ω y una resistencia del devanado inductor de 100 Ω. El motor se alimenta por medio de una red de c.c. de 200 V y gira a 1000 r.p.m., absorbiendo en esa situación una corriente de la red de 20 A. Suponiendo que el motor trabaja en la zona lineal de la curva de imanación, calcular la velocidad a la que girará el motor cuando absorba de la red una corriente de 15,6 A y se coloque una resistencia de 25 Ω en serie con el devanado inductor.

[Resp. 1263 r.p.m.]

Problema 6.35

Un motor derivación tiene unas resistencias de inducido e inductor de 0,5 ohmios y 250 ohmios respectivamente. Cuando se conecta a una red de 250 V y mueve una carga de par constante, gira a 600 r.p.m. y absorbe una corriente de la red de 21 A. Si el circuito magnético es lineal y se desea elevar la velocidad del motor hasta 800 r.p.m. ¿cuál será el valor de la resistencia que deberá colocarse en serie con el devanado inductor?

[Resp. 88,3 ohmios]

Problema 6.36

Un motor shunt de 4 polos tiene un devanado de inducido tipo imbricado simple con 1000 conductores, siendo el flujo magnético por polo de 0,028 Wb. Las resistencias del inducido e inductor son, respectivamente, de 1 Ω y 400 Ω. a) ¿Cuál será la velocidad del motor, si se sabe que al conectarlo a una red de 400 V absorbe una corriente de 20 A?; b) calcular el par electromagnético desarrollado por el motor y el par útil si las pérdidas mecánicas y en el hierro son de 1 kW; c) calcular el rendimiento del motor.

[Resp. a) 816,4 r.p.m.; b) 84,7 N.m.; 73 N.m.; c) 78%]

Problema 6.37

Un motor derivación tiene una resistencia de inducido de 0,5 Ω y se conecta a una red de 220 V, absorbiendo una corriente de inducido de 40 A cuando mueve un par resistente constante. Si en estas circunstancias se quiere aumentar la velocidad un 50%, ¿en qué tanto por ciento se debe reducir el flujo magnético inductor para conseguirlo?.

[Resp. 37,3%]

Problema 6.38

Se necesita un reóstato de arranque de cinco secciones para un motor derivación con valores asignados de 10 kW y 440 V. El rendimiento a plena carga del motor es del 80% y las resistencias del devanado inductor e inducido son respectivamente de 1000 Ω y de 0,6 Ω. Se supone que la corriente inicial de arranque es la de plena carga del motor y los picos de corriente máximos en los cambios posteriores no deben ser superiores a 1,5 veces la corriente de plena carga. Calcular la corriente mínima de arranque que se produce y los valores de las resistencias de las cinco secciones del reóstato de arranque.

[Resp. 21,85 A; 7,54 Ω; 3,92 Ω; 2,05 Ω; 1,06 Ω; 0,56 Ω]

Problema 6.39

Un motor de c.c. tipo derivación está alimentado por una red de 440 V y absorbe a plena carga una corriente de inducido de 100 A cuando gira a 1000 r.p.m. Estando el motor en estas condiciones, se desea frenar la máquina a contracorriente, es decir, invirtiendo la tensión de alimentación y limitando la corriente de inducido a 120 amperios. a) ¿Qué resistencia externa conectada en serie con el inducido se necesita?; b) ¿cuál será el par de frenado inicial?; c) calcular la corriente de frenado y el par de frenado cuando el motor pasa por la velocidad de 500 r.p.m. NOTA: la resistencia total del inducido es de 0,4 Ω.

[Resp. a) 6,6 Ω; b) 458,37 N.m.; c) 91,43 A; 349,23 N.m.]

Problema 6.40

Un motor serie, con un circuito magnético no saturado y con una resistencia de inducido despreciable, absorbe 40 A a 440 V cuando gira a cierta velocidad con una carga dada. Si el par de carga varía con el cubo de la velocidad, hallar la resistencia adicional colocada en serie con el motor para poder reducir la velocidad a la mitad.

[Resp. R=17,08 Ω]

Problema 6.41

Un motor serie de c.c. se alimenta de una red de 200 V y absorbe una corriente de 50 A cuando gira a una velocidad de 1500 r.p.m. La resistencia total del motor (inductor+ inducido) es de 0,1 Ω y se supone que el circuito magnético es lineal. Si se coloca en serie con el motor una resistencia de 1,9 Ω, calcular la velocidad a la que girará el motor si el par resistente es constante.

[Resp. 769 r.p.m.]

Problema 6.42

Un motor serie de c.c. se alimenta de una red de 440 V y absorbe una corriente de 80 A, girando a una velocidad de 1000 r.p.m. Las resistencias de los devanados inductor e inducido son, respectivamente, de 0,2 Ω y 0,3 Ω, y el circuito magnético es lineal. a) ¿Qué corriente absorberá el motor si se coloca en paralelo con el inductor una resistencia de 0,2 Ω y se aumenta el par resistente un 50%?; b) en el caso anterior, ¿a qué velocidad girará el motor?

[Resp. a) 138,6 A; b) 1110,2 r.p.m.]

Problema 6.43

Un motor serie tiene un circuito magnético lineal y sus resistencias de inducido e inductor son de 0,8 Ω y 0,2 Ω respectivamente. En condiciones de plena carga, el motor se conecta a una red de 220 V, absorbe una corriente de 10 A y gira a 1500 r.p.m. a) Calcular la corriente que absorberá el motor de la red si se conecta, en paralelo con el inductor, una resistencia de 0,2 Ω, y se ajusta el par resistente para que la máquina gire a 900 r.p.m.; b) calcular en el caso anterior el valor del par resistente en función del par de plena carga.

[Resp. a) 32,6 A; b) T_2=5,31T_{pc}]

Problema 6.44

Un motor serie de 220 V, tiene una resistencia total (inducido+inductor) de 0,1 Ω. Se sabe que el motor trabaja en la zona lineal de la curva de imanación y que cuando mueve un cierto par resistente absorbe una corriente de 100 A girando a 1500 r.p.m. Se conecta una resistencia R en serie con el motor y el par resistente se reduce a la mitad del original, observándose que el motor gira entonces a 750 r.p.m., calcular en esta situación: a) corriente absorbida por el motor; b) valor de la resistencia adicional R.

[Resp. a) 70,71 A; b) 1,96 Ω]

Problema 6.45

Un motor serie de c.c. de 7,5 kW, 220 V, 1500 r.p.m. tiene un rendimiento a plena carga del 85,2%. El circuito magnético es lineal y las resistencias de inducido e inductor son de 0,3 Ω y 0,15 Ω respectivamente. a) ¿Qué resistencia debe añadirse en serie con el motor para que la corriente de arranque no supere la que requeriría el motor si el par resistente fuera 1,5 veces el de plena carga?; b) si la resistencia anterior permanece en el circuito y el motor mueve el par de plena carga ¿a qué velocidad girará el motor?; c) en el caso anterior ¿cuál sería el valor de la resistencia de un reóstato de arranque para que la máquina se mueva a 900 r.p.m.?

[Resp. a) 4,04 Ω; b) 300 r.p.m.; c) 2,02 Ω]

Problema 6.46

Un motor serie de 220 V gira a 1000 r.p.m. y absorbe una corriente de 70 A cuando mueve un cierto par resistente de plena carga. La resistencia total del motor (inducido + inductor) es de 0,3 Ω. ¿Calcular a qué velocidad girará el motor cuando: a) el par resistente sea 2/3 del par de plena carga y suponiendo que el flujo magnético sea proporcional a la corriente; b) la corriente sea el doble suponiendo que el flujo magnético aumente un 20%?

[Resp. a) 1301,3 r.p.m.; b) 745,4 r.p.m.]

Problema 6.47

Un motor serie de c.c. se conecta a una red de 220 V y absorbe una corriente de 100 A girando a una velocidad de 1000 r.p.m. El circuito magnético es lineal y la resistencia total del motor es de 0,2 Ω. Calcular la velocidad del motor si el par de carga se reduce al 60% del par de plena carga y la tensión de alimentación se reduce a 150 V.

[Resp. 868,2 r.p.m.]

Problema 6.48

Un motor serie de 440 V gira a 1000 r.p.m. y absorbe una corriente de 40 A cuando mueve cierto par resistente. La resistencia total del motor (inductor+inducido) es de 0,5 Ω y el circuito magnético es lineal. Calcular la velocidad del motor: a) si el par de carga aumenta un 44%; b) si la corriente absorbida es de 20 A

[Resp. a) 825,4 r.p.m.; b) 2047,6 r.p.m.]

Problema 6.49

Un motor derivación de 54 kW, 600 V, 1000 r.p.m. tiene un rendimiento a plena carga del 90%. Las resistencias de los devanados inductor e inducido son de 0,2 Ω y 150 Ω respectivamente. a) Calcular la corriente de inducido de plena carga: b) Determinar la velocidad en cada una de las situaciones siguientes en las que se considera que la máquina desarrolla un par electromagnético igual al de plena carga: 1) frenado regenerativo o por recuperación de energía sin que exista resistencia limitadora de la corriente de inducido; 2) frenado a contracorriente cuando se incluye en el inducido una resistencia limitadora de 4,8 Ω; 3) frenado dinámico al cargar el inducido con una resistencia externa de 2,5 Ω.

[Resp. a) I_i = 96 A; b1) 1066 r.p.m.; b2) 206,6 r.p.m.; b3) 446,3 r.p.m.]

Problema 6.50

Un motor serie de c.c. tiene una resistencia total (inductor+inducido) de 3 Ω. Se impulsa con un motor auxiliar a la velocidad de 600 r.p.m. y se alimenta su circuito de excitación por una fuente externa de corriente continua, dando lugar a la siguiente característica de vacío:

I (A)	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
E (V)	*325*	*400*	*433*	*452*	*464*	*472*

Este motor se utiliza para mover un ventilador que requiere una potencia que varía con el cubo de la velocidad de acuerdo con la ecuación:

$$P = 1{,}7 \cdot 10^{-7} n^3 \quad (P \text{ se expresa en kW y } n \text{ en r.p.m.})$$

Calcular la velocidad en régimen permanente y la potencia absorbida por el motor de la red si las pérdidas mecánica y en el hierro son de 500 W y se consideran constantes en todo el régimen de funcionamiento de la máquina.

SUGERENCIA: *a partir de la curva de vacío debe construirse una tabla en la que se calculen las f.c.e.m. del motor para las diversas corrientes de inducido señaladas en la tabla. A partir de ellas deben determinarse las velocidades correspondientes, las potencias electromagnéticas (EI_i), la potencia mecánica útil desarrollada por el motor en cada caso y la potencia requerida por el ventilador a las velocidades correspondientes. Una vez confeccionada esta tabla deben dibujarse las curvas de potencia útil del motor y de potencia absorbida por el ventilador en función de la corriente de inducido (este procedimiento tiene menos error que dibujar estas magnitudes en función de la velocidad). El punto de intersección de ambas curvas permite calcular la corriente de inducido que cumpliría la igualdad de potencias entre el motor y la carga y, con este valor, es inmediato calcular la potencia absorbida por el motor de la red, su potencia mecánica útil y la velocidad de giro correspondiente.*

[Resp. 686 r.p.m.; 6000 W]