# TEORÍA DE CONTROL

# Técnicas clásicas de Control

# III – Diseño de controladores discretos

Grado de Robótica

Curso 2021-2022

# Objetivos

- Discretización de controladores PID.
- Deseño de controladores por asignación de polos.
- Reguladores de tiempo mínimo.

# CONTROLADOR DISCRETO

## INTRODUCCIÓN

Tipos de controladores:

- **Controladores analógicos**: implementados con elementos que modifican la respuesta frecuencial de un sistema (AOs, resistencias, condensadores, ...)
- **Controladores digitales**: implementados con microprocesadores, microcontroladores, DSP, FPGA,... Necesitan conversores A.D. y D.A.

| CONTROLADOR | VENTAJAS | DESVENTAJAS |
|---|---|---|
| ANALÓGICO | • Elevado ancho de banda.<br>• Elevada resolución<br>• Fácil de diseñar? | • Envejecimiento de componentes<br>• Derivas con la temperatura |
| DIGITAL | • Diseño programable<br>• Implementación de algoritmos complejos.<br>• Fácilmente ampliable. | • Difícil de diseñar?<br>• Puede necesitar procesadores potentes.<br>• Puede generar problemas numéricos. |

# CONTROLADOR DISCRETO

**INTRODUCCIÓN**

Pasos de diseño de un sistema de control:

1. Obtención del modelo del sistema a controlar (o no...)
2. Diseño del controlador para obtener el comportamiento deseado.

El diseño de controles digitales implica la conversión a la forma discreta:

- Diseño analógico y conversión a forma discreta para su implementación.
- Diseño discreto directo, entonces es necesario obtener el modelo de la planta en forma discreta (transformada Z).

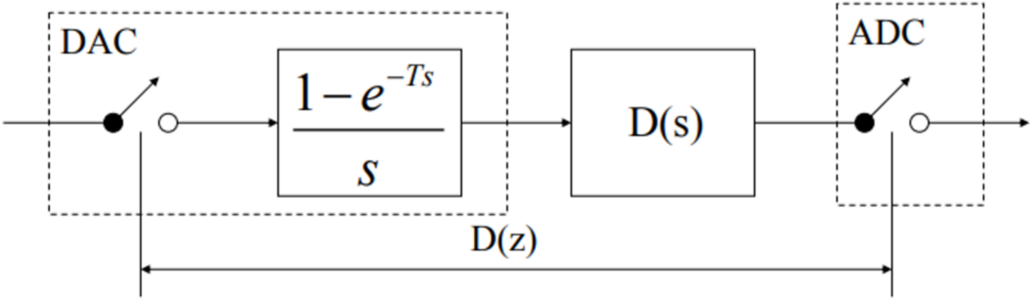
Tres técnicas para convertir un sistema analógico en discreto:

- Mantenedor de orden cero (ZOH).
- Correspondencia polos-ceros.
- Transformación bilineal.

# CONTROLADOR DISCRETO

**DISCRETIZACIÓN – MANTENEDOR DE ORDEN CERO**

Esta técnica asume que el controlador tiene una entrada con un mantenedor de orden cero




$$D(z) = (1 - z^{-1}) \times Z\left[\frac{D(s)}{s}\right]$$

# CONTROLADOR DISCRETO

## DISCRETIZACIÓN – CORRESPONDENCIA POLO-CERO

Los polos y ceros "$s_i$" de *D(s)* se mapean como polos y ceros de *D(z)* de acuerdo con:

$$z_i = e^{s_i T} \qquad \text{T = periodo de muestreo}$$

Si *D(s)* tiene más polos que ceros se añaden ceros en *z=-1* en el numerador para igualar el número de polos y ceros.
La ganancia se escoge adecuadamente para que se cumpla:

$$D(z)\big|_{z=1} = D(s)\big|_{s=0}$$

# CONTROLADOR DISCRETO

**DISCRETIZACIÓN – CORRESPONDENCIA POLO-CERO**

Los polos y ceros $s_i$ de $D(s)$ se mapean como polos y ceros de $D(z)$ de acuerdo con:

$$z_i = e^{s_i T} \quad T = \text{periodo de muestreo}$$

Si $D(s)$ tiene más polos que ceros se añaden ceros en $z = -1$ en el numerador para igualar el número de polos y ceros.

La ganancia se escoge adecuadamente para que se cumpla:

$$D(z)\Big|_{z=1} = D(s)\Big|_{s=0}$$

# CONTROLADOR DISCRETO

**DISCRETIZACIÓN – TRANSFORMACIÓN BILINEAL**

También denominada aproximación de Tustin o trapezoidal. Utiliza la siguiente relación:

$$s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1} \qquad T = \text{periodo de muestreo}$$

para transformar del dominio “s” al dominio “z”.

# CONTROLADOR PID DISCRETO

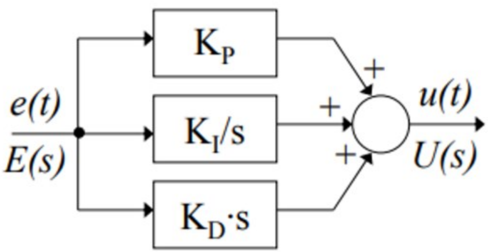
**INTRODUCCIÓN**

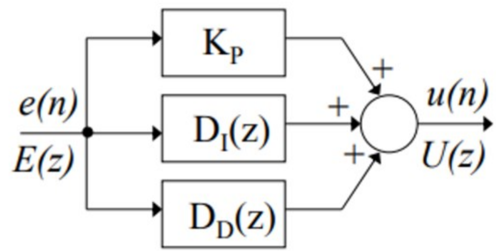
$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Minimiza el error

Reduce el error en
estado estacionario

Incrementa la estabilidad
Acción anticipativa
que reduce el sobreimpulso




$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d s E(s)$$

$$U(z) = K_p E(z) + D_I(z)E(z) + D_D(z)E(z)$$

Varias formas de
implementar $D_I(z)$

# CONTROLADOR PID DISCRETO

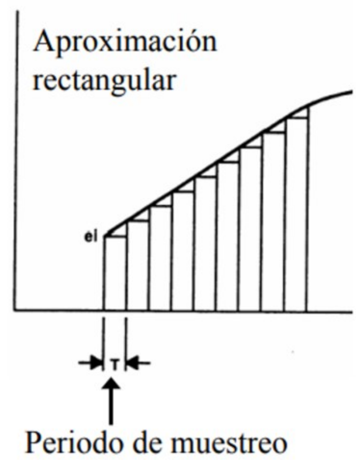
**INTRODUCCIÓN**

Dos técnicas de implementación del control PID digital:

- **Aproximación rectangular**: El diseño se realiza en el dominio analógico y a continuación se transfiere al dominio discreto. Es fácil de implementar y produce buenos resultados
- **Aproximación trapezoidal**: El diseño se realiza en el dominio discreto directamente utilizando técnicas de ubicación de polos.

# CONTROLADOR PID DISCRETO

**APROXIMACIÓN RECTANGULAR DEL PID**




Término proporcional

$$K_p e(t) \rightarrow K_p e(n)$$

Término integral

$$K_i \int e(t)dt \rightarrow K_i T \sum_{\eta} e(\eta)$$

Término derivativo

Si T es suficientemente pequeño se aproxima por

$$K_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow K_d \frac{e(n) - e(n-1)}{T}$$

Si se conoce $e(n+1)$ se puede obtener una mejor aproximación de la derivada:

$$K_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow K_d \frac{e(n+1) - e(n)}{T}$$

***Algoritmo de posición***: $u(n) = K_p e(n) + K_i T \sum_{\eta} e(\eta) \ + K_d \frac{e(n)-e(n-1)}{T}$

# CONTROLADOR PID DISCRETO

## APROXIMACIÓN RECTANGULAR DEL PID

***Algoritmo de posición***: $u(n) = K_p e(n) + K_i T \sum_\eta e(\eta) + K_d \frac{e(n)-e(n-1)}{T}$

- Inconveniente: en el caso de malfuncionamiento del sistema digital que calcula $u(n)$ se podría generar una salida donde $u(n) = 0$

***Algoritmo de velocidad***: $\Delta u(n) = u(n) - u(n-2)$

- Es el algoritmo que se emplea habitualmente
- El sistema de control calcula incrementos o correcciones sobre la señal de control.
- Presenta mejor comportamiento en el arranque y frente a cambios bruscos de la señal de entrada.

$$u(n-2) = K_p e(n-2) + K_i T \sum_{\eta}^{n-2} e_\eta + K_d \frac{e(n-1) - e(n-2)}{T}$$

$$u(n) = u(n-2) + K_p[e(n) - e(n-2)] + K_i T \left[\sum_{\eta}^{n} e_\eta - \sum_{\eta}^{n-2} e_\eta\right] + K_d \frac{e(n) - 2e(n-1) + e(n-2)}{T}$$

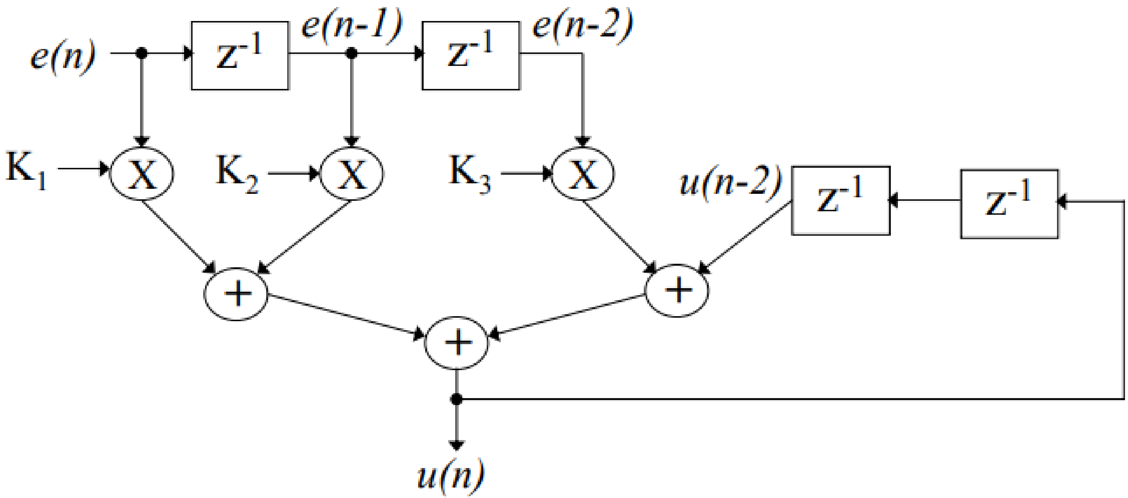
$$u(n) = u(n-2) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)$$

$$K_1 = K_p + \frac{K_d}{T} + K_i T \quad , \quad K_2 = K_i T - \frac{2K_d}{T} \quad , \quad K_3 = \frac{K_d}{T} - K_p$$

# CONTROLADOR PID DISCRETO

**APROXIMACIÓN RECTANGULAR DEL PID**

$$\boxed{u(n) = u(n-2) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)}$$



# CONTROLADOR PID DISCRETO

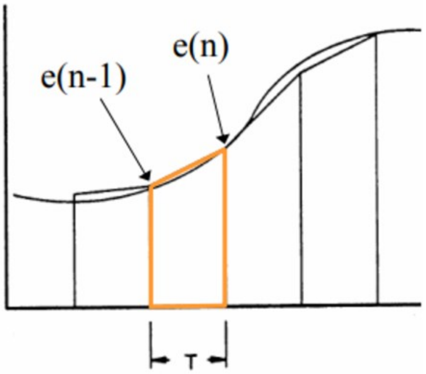
**APROXIMACIÓN TRAPEZOIDAL DEL PID**

Se utiliza cuando se requiere mayor precisión en la conversión a forma discreta.

La integral se determina con la suma de trapezoides: $\frac{T}{2}[e(n) + e(n+1)]$

Función de transferencia del término integral:

$$u(n) = u(n-1) + K_I \frac{T}{2}[e(n) + e(n-1)]$$




$$U(z)(1 - z^{-1}) = K_I \frac{T}{2}(1 + z^{-1})E(z)$$

$$\boxed{D_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_I \frac{T}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}}$$

$$u(n) = K_p e(n) + K_i T \sum_{\eta} e(\eta) + K_d \frac{e(n) - e(n-1)}{T}$$

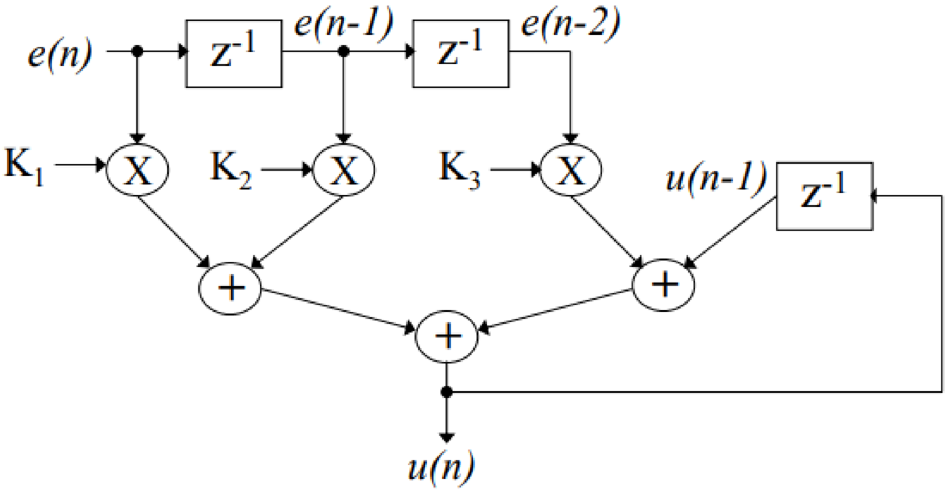
$$U(z) = K_p E(z) + K_I \frac{T}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}E(z) + \frac{K_d}{T}(1 - z^{-1})E(z) \rightarrow D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_I \frac{T}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{K_d}{T}(1 - z^{-1})$$

$$\boxed{D(z) = \frac{(2TK_P + K_I T^2 + 2K_D) + (K_I T^2 - 2TK_P - 4K_D)z^{-1} + 2K_D z^{-2}}{2T(1 - z^{-1})}}$$

# CONTROLADOR PID DISCRETO

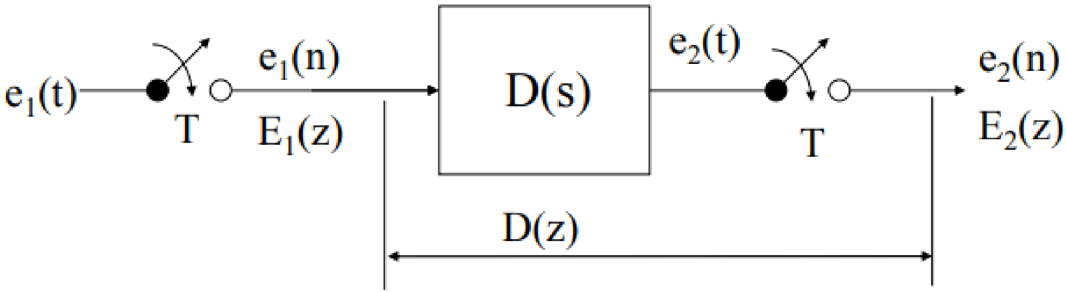
**APROXIMACIÓN TRAPEZOIDAL DEL PID**

$$\boxed{u(n) = u(n-1) + K_1 e(n) + K_2 e(n-1) + K_3 e(n-2)}$$



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN CONTROLADOR DIGITAL**




Expresión general de la función de transferencia del controlador digital

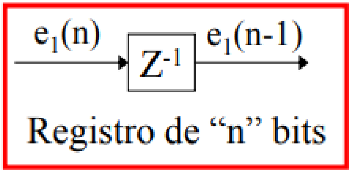
$$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}$$

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

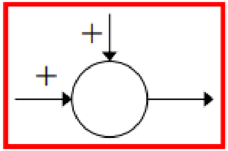
**ELEMENTOS PARA REALIZAR UN CONTROLADOR DIGITAL**

$$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}$$

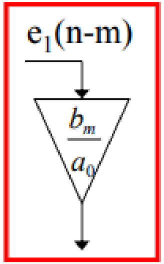
Elementos de retardo




Sumadores c.a.2




Multiplicadores c.a.2



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**ESTRUCTURAS DE IMPLEMENTACIÓN**

- *Programación directa*: implementa la ecuación en diferencias

- *Programación estándar*: reduce el número de registros a utilizar

- *Programación en serie*
- *Programación en paralelo*
- *Programación en escalera*

La función de transferencia se descompone en funciones de primer y segundo orden para disminuir los errores de truncado de coeficientes

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN DIRECTA**

$$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}$$

$$E_2(z)\left[a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}\right]=E_1(z)\left[b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}\right]$$

Transformada "z" inversa

$$a_0\cdot e_2(n)+\sum_{i=1}^{p}a_ie_2(n-i)=\sum_{i=0}^{m}b_ie_1(n-i)$$

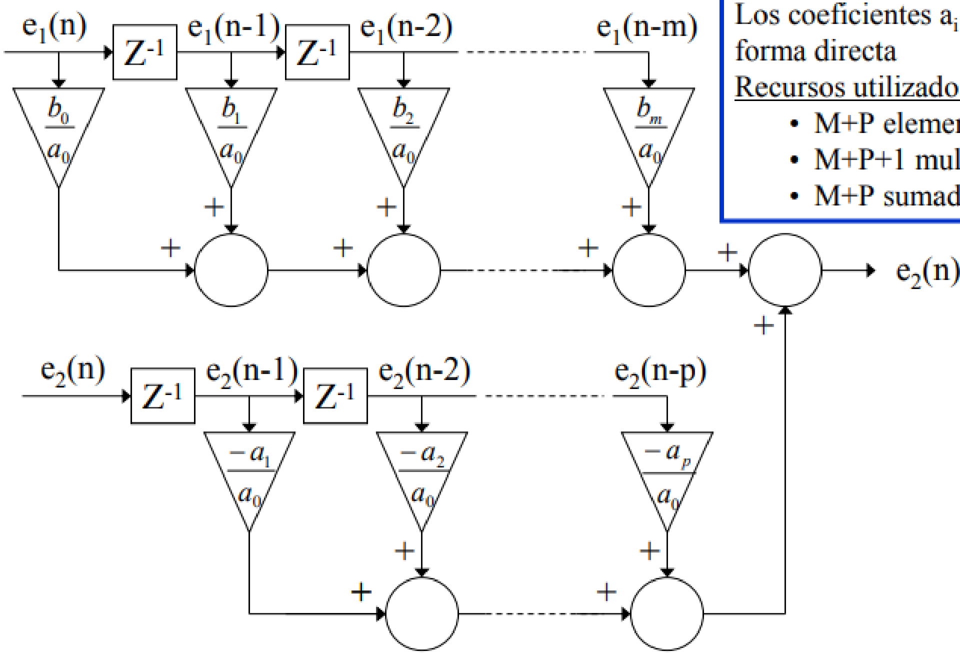
Salida actual $\rightarrow$ $$e_2(n)=\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{m}b_ie_1(n-i)-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{p}a_ie_2(n-i)$$

Entradas

Salidas anteriores

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN DIRECTA**




Los coeficientes $a_i$ y $b_i$ aparecen de forma directa

Recursos utilizados:

- M+P elementos de retraso "$Z^{-1}$"
- M+P+1 multiplicadores
- M+P sumadores

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN ESTÁNDAR**

$$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}=\frac{E_2(z)}{H(z)}\frac{H(z)}{E_1(z)}$$

$$\frac{E_2(z)}{H(z)}=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m} \qquad \frac{H(z)}{E_1(z)}=\frac{1}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}$$

Transformada "z" inversa

$$E_2(z)=\left[b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}\right]\cdot H(z) \qquad \Rightarrow e_2(n)=\sum_{i=0}^{m}b_ih(n-i)$$

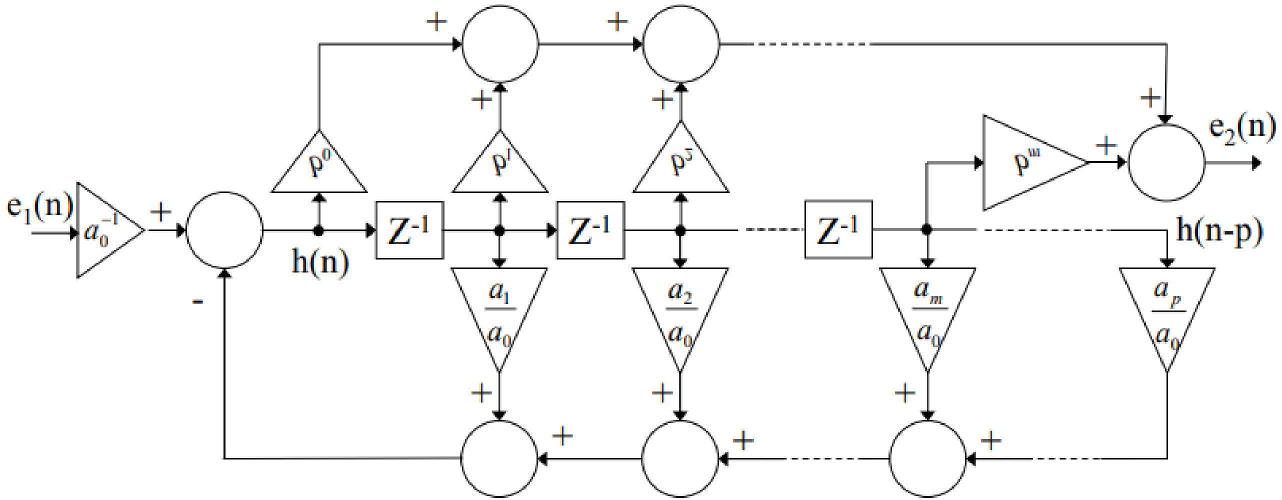
$$H(z)=\frac{1}{a_0}E_1(z)-\frac{1}{a_0}\left[a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}\right]\cdot H(z)\Rightarrow h(n)=\frac{1}{a_0}e_1(n)-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{p}a_ih(n-i)$$

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN ESTÁNDAR**

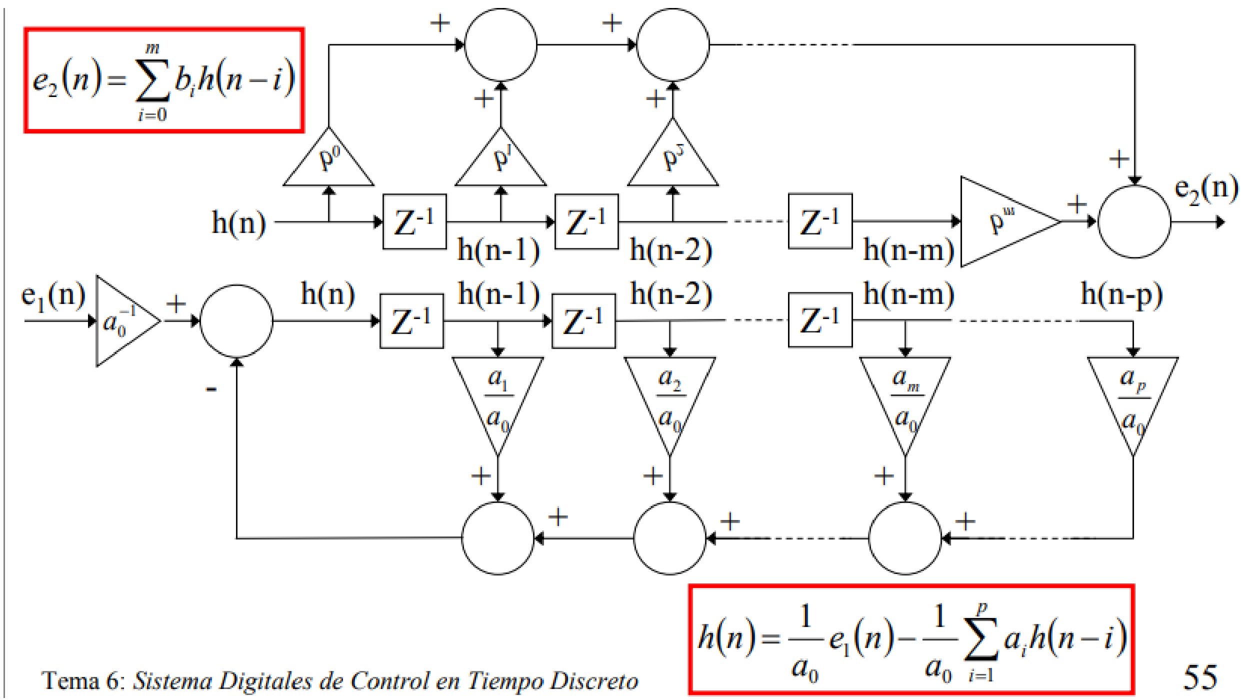
Recursos utilizados:

- P elementos de retraso "$Z^{-1}$"
- P+M+2 multiplicadores
- P+M+1 sumadores



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN ESTÁNDAR**



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

## FUENTES DE ERROR

La precisión en la implementación de controles digitales es importante para obtener un buen resultado.

Hay tres fuentes de error que afectan a la precisión:

- El error de cuantificación de los ADC
- Redondeo en las operaciones aritméticas
- Truncamiento de los coeficientes $a_i$ y $b_i \Rightarrow$ este error aumenta al aumentar el orden de la función de transferencia $\Rightarrow$ un pequeño error en los coeficientes de un filtro de orden elevado provoca un gran error en la ubicación de polos y ceros

Este error se puede reducir matemáticamente descomponiendo las funciones de transferencia de orden elevado en combinaciones de funciones de primer y segundo orden

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

## PROGRAMACIÓN SERIE

La función de transferencia se descompone en un producto de funciones sencillas de primer o segundo orden

$$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}=D_1(z)\cdot D_2(z)\cdots D_r(z)=\prod_{k=1}^{r}D_k(z)$$

$$e_1(n) \rightarrow \boxed{D_1(z)} \rightarrow \boxed{D_2(z)} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{D_r(z)} \rightarrow e_2(n)$$

Las funciones de transferencia $D_i(z)$ dependen de los polos y ceros de D(z):

**Polo y cero reales**

$$D_i(z)=\frac{1+b_iz^{-1}}{1+a_iz^{-1}}$$

**Polos y ceros complejo conjugados**

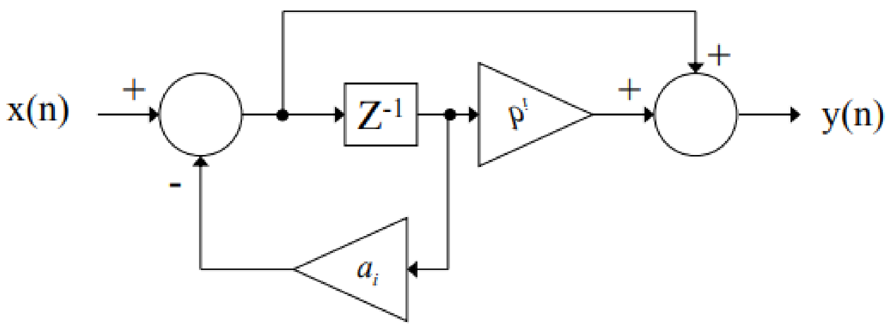
$$D_i(z)=\frac{1+e_iz^{-1}+f_iz^{-2}}{1+c_iz^{-1}+d_iz^{-2}}$$

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

## PROGRAMACIÓN SERIE: CEROS Y POLOS REALES

Polo y cero reales

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+b_i z^{-1}}{1+a_i z^{-1}}$$

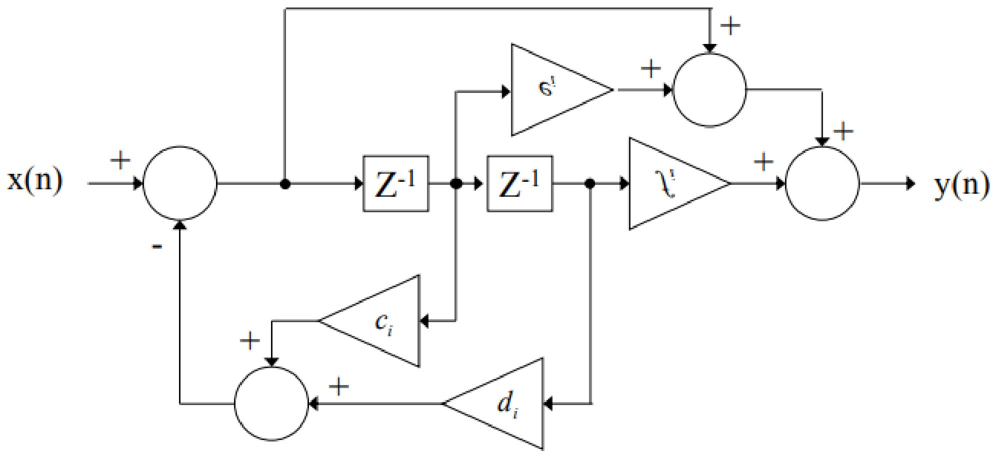


# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN SERIE: CEROS Y POLOS COMPLEJO CONJUGADOS**

Polos y ceros complejo conjugados

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN PARALELO**

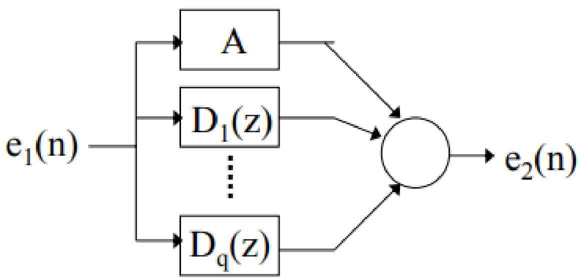
La función de transferencia se descompone en suma de fracciones parciales de primer y segundo orden:

$$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}=A+D_1(z)+D_2(z)+\cdots+D_q(z)$$

$$=A+\sum_{i=1}^{j}D_i(z)+\sum_{i=j+1}^{q}D_i(z)=A+\boxed{\sum_{i=1}^{j}\frac{b_i}{1+a_iz^{-1}}}+\boxed{\sum_{i=j+1}^{q}\frac{e_i+f_iz^{-1}}{1+c_iz^{-1}+d_iz^{-2}}}$$

Polos reales

Polos complejos

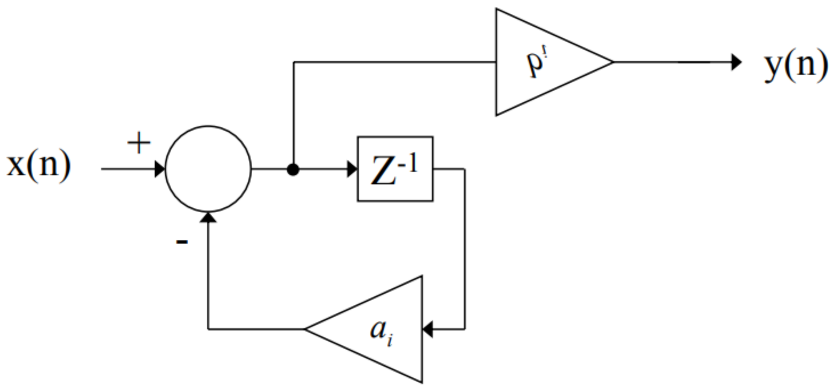


# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN PARALELO: CEROS Y POLOS REALES**

Polos reales

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}}$$

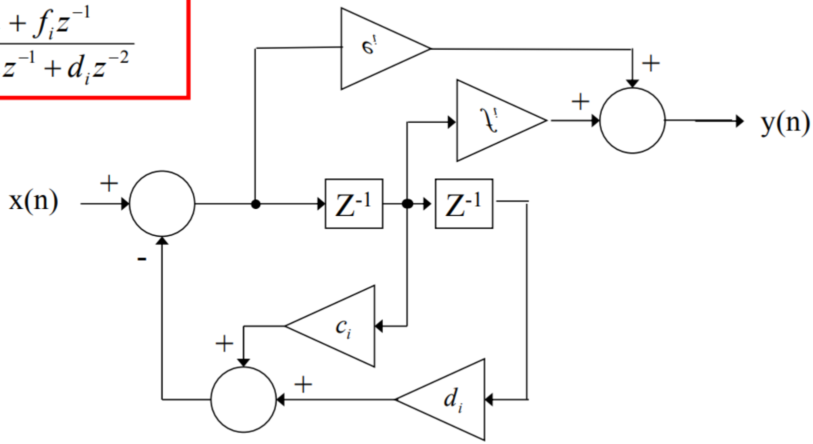


# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN PARALELO: CEROS Y POLOS COMPLEJO CONJUGADOS**

Polos complejos conjugados

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{e_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN EN ESCALERA**

$$\boxed{D(z) = A_0 + D_1^{(B)}(z)}$$

$$D_i^{(B)}(z) = \frac{1}{B_i z + G_i^{(A)}(z)} \quad con \quad i = 1,2,\ldots,p-1$$

$$D_i^{(A)}(z) = \frac{1}{A_i + G_{i+1}^{(B)}(z)} \quad con \quad i = 1,2,\ldots,p-1$$

$$D_p^{(B)}(z) = \cfrac{1}{B_p z + \cfrac{1}{A_p}}$$

$$D(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{\begin{matrix} \vdots \\ A_{p-1} \cfrac{1}{B_p z + \cfrac{1}{A_p}} \end{matrix}}}}}$$

*Tema 6: Sistema Digitales de Control en Tiempo Discreto* 63

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN EN ESCALERA: EJEMPLO**

$$D(z)=A_0+\cfrac{1}{B_1z+\cfrac{1}{A_1+\cfrac{1}{B_2z+\cfrac{1}{A_2}}}}$$

p=2

$$D_p^{(B)}(z)=\cfrac{1}{B_pz+\cfrac{1}{A_p}}$$

$$D(z)=A_0+\cfrac{1}{B_1z+\cfrac{1}{A_1+D_2^{(B)}(z)}}=A_0+\frac{1}{B_1z+D_1^{(A)}(z)}=A_0+D_1^{(B)}(z)$$

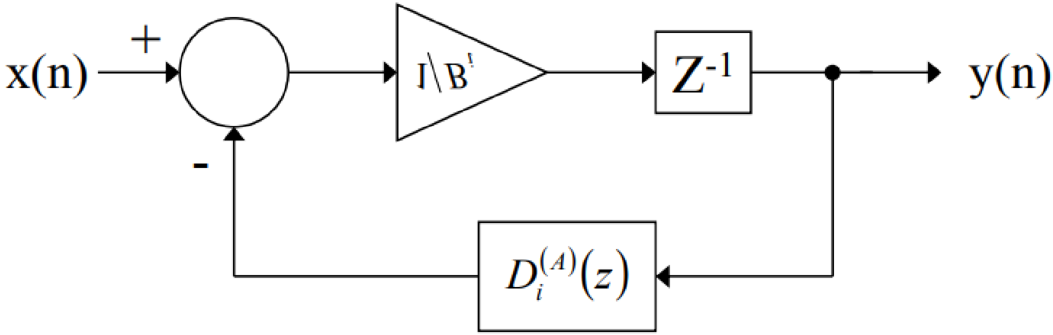
$D_i^{(B)}(z)$ se puede escribir como:

$$D_i^{(B)}(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{B_iz+D_i^{(A)}(z)} \Rightarrow X_i(z)-D_i^{(A)}Y_i(z)=B_izY_i(z)$$

# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN EN ESCALERA: EJEMPLO**

$$\boxed{X_i(z) - D_i^{(A)} Y_i(z) = B_i z Y_i(z)}$$

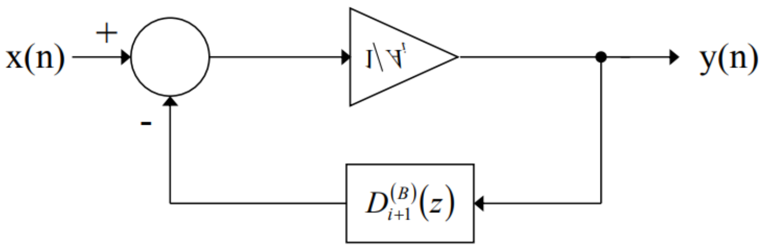


# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

## PROGRAMACIÓN EN ESCALERA: EJEMPLO

$D_i^{(A)}(z)$ se puede escribir como:

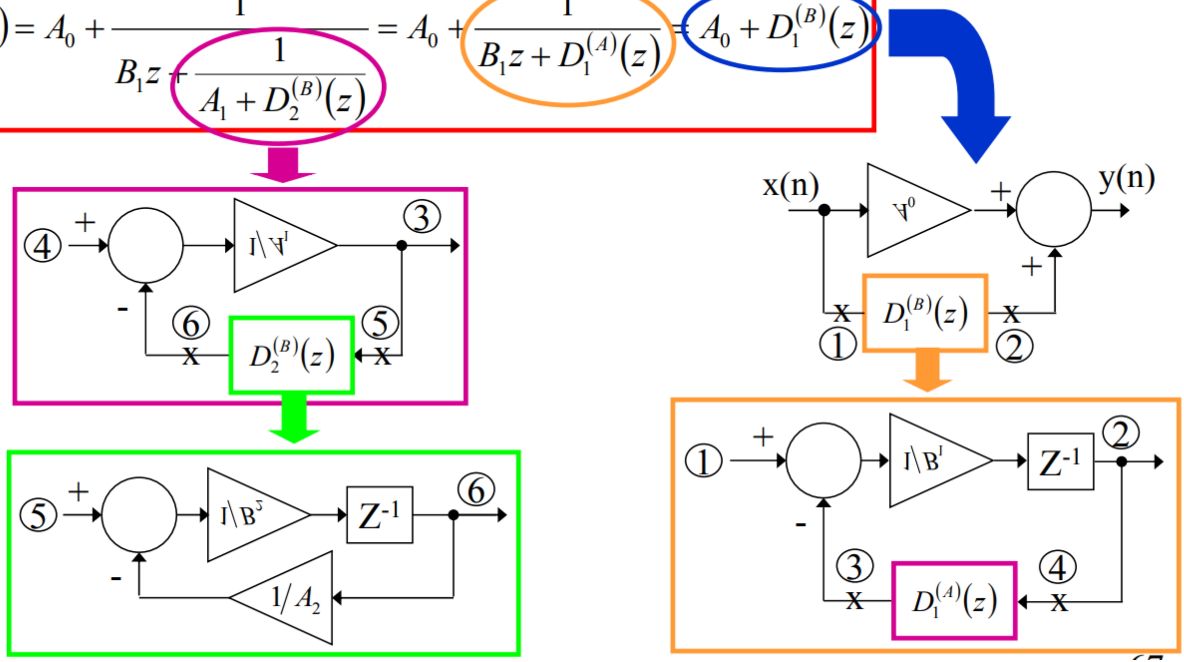
$$D_i^{(A)}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{A_i + D_{i+1}^{(B)}(z)} \Rightarrow X_i(z) - D_{i+1}^{(B)} Y_i(z) = A_i Y_i(z)$$



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN EN ESCALERA: EJEMPLO**

$$D(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + D_2^{(B)}(z)}} = A_0 + \frac{1}{B_1 z + D_1^{(A)}(z)} = A_0 + D_1^{(B)}(z)$$



# CONTROLADOR DIGITAL: REALIZACIÓN

**PROGRAMACIÓN EN ESCALERA: EJEMPLO**

Combinación de los diagramas de bloques