# TEORÍA DE CONTROL
# Control en el espacio de estados
# Controlabilidad y observabilidad

Grado de Robótica

Curso 2021-2022

# Solución del vector de estado

Si se considera una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\ x(t) + b\ u(t)$$

La solución resulta: $$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b\ u(\tau)\ d\tau$$

Ahora para el vector ***x(t)*** se ensaya la siguiente solución:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\ u(\tau)\ d\tau$$

Se debe cumplir que:

$$x(t=0) = x(0)$$

y

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\ x(t) + B\ u(t)$$

Propiedades de $e^{At}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At}$$

$$e^{A0} = I$$

$e^{At}$ Es no singular para todo t finito

$$e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$$

$$\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{A(-t)}$$

$$\left(e^{At}\right)^{n} = e^{A(nt)}$$

# Solución del vector de estado - Demostración

$$x(t=0)=x(0) \qquad x(0)=\underbrace{e^{A0}}_{I}x(0)+\underbrace{\int_0^0 e^{A(t-\tau)}B\ u(\tau)\ d\tau}_{0}=x(0)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=A\ x(t)+B\ u(t) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t_0}^{t} f(t,\tau)d\tau\right)=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial t}f(t,\tau)\right]d\tau+f(t,\tau)\Big|_{\tau=t}$$

$$\dot{x}(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\ u(\tau)\ d\tau\right)$$

$$\dot{x}(t)=Ae^{At}x(0)+\int_0^t Ae^{A(t-\tau)}B\ u(\tau)\ d\tau+\ e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\Big|_{\tau=t}$$

$$\dot{x}(t)=A\underbrace{\left(e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\ u(\tau)\ d\tau\right)}_{x(t)}+Bu(t)$$

# Solución del vector de estado - Demostración

$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ Aplicando transformada de Laplace

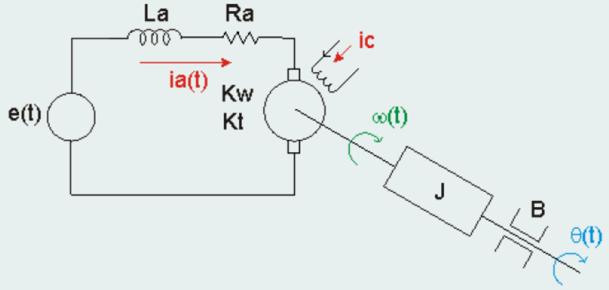
$$sX(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s) \qquad \left(sI - A\right)X(s) = x(0) + B\,U(s)$$

$$X(s) = \left(sI - A\right)^{-1} x(0) + \left(sI - A\right)^{-1} B\,U(s)$$

Antitransformando $(sI\text{-}A)^{-1}$ $\qquad \Phi(t) = L^{-1}\left\{\left(sI - A\right)^{-1}\right\}$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\,u(\tau)\,d\tau \qquad \Phi(t) = e^{At}$$

# Solución del vector de estado - Ejemplo

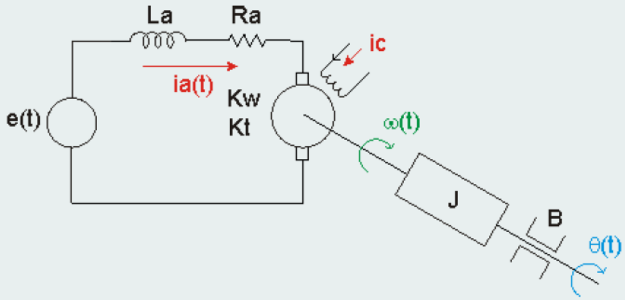



Ra=2 Ω
La=5 mHy
J=0.005 $Nms^2$
B1=0.005 Nms
Kt=0.7 Nm/A
Kw=0.8 Vs

$$\begin{bmatrix} \dot{I}a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & -160 & 0 \\ 140 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

# Solución del vector de estado - Ejemplo




$$\begin{bmatrix} \dot{I}a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & -160 & 0 \\ 140 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

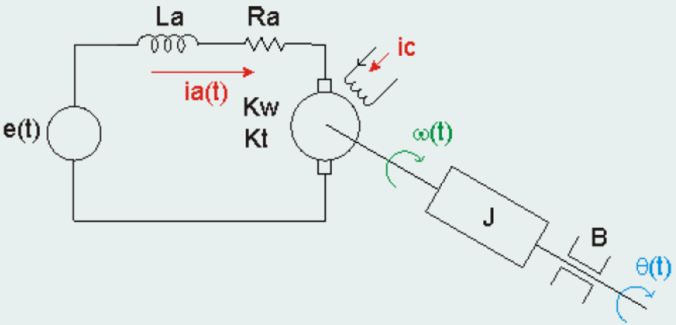
$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s+400 & 160 & 0 \\ -140 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

$$Adj[sI - A] = \begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2 + 401s + 2,28\cdot 10^4) \end{bmatrix}$$

$$Det[sI - A] = s(s+1)(s+400) - (160)(-140)s = s(s^2 + 401s + 2.28\ \cdot 10^4)$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2 + 401s + 2,28\cdot 10^4) \end{bmatrix}}{s(s^2 + 401s + 2.28\ \cdot 10^4)}$$

# Solución del vector de estado - Ejemplo



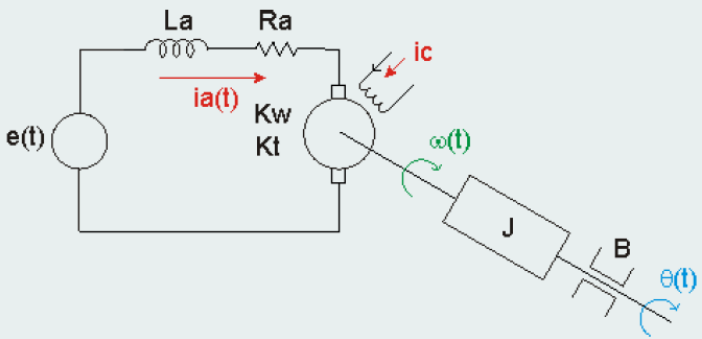

$$\begin{bmatrix} Ia(0) \\ \omega(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3\,Amp \\ 122.5\,{rad}/{s} \\ 2.0\ rad \end{bmatrix}$$

$$U(s) = {100}/{s}$$

$$\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}(s) = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2+401s+2,28\cdot 10^4) \end{bmatrix}}{s\left(s^2+401s+2,28\cdot 10^4\right)}\left(\begin{bmatrix} Ia(0) \\ \omega(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)\right)$$

$$\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}(s) = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2+401s+2,28\cdot 10^4) \end{bmatrix}}{s\left(s^2+401s+2,28\cdot 10^4\right)}\begin{bmatrix} 1.3+\dfrac{20000}{s} \\ 122.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

# Solución del vector de estado - Ejemplo




$$\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}(s) = \frac{\begin{bmatrix} s\left(0.13s^2 - 1.93987\cdot 10^4 + 200\right) \\ s\left(122.5s^2 + 4.9182\cdot 10^4 s + 28000\right) \\ 2s^3 + 924.5s^2 + 9.4782\cdot 10^4 s + 28000 \end{bmatrix}}{s^2\left(s^2 + 401s + 2,28\cdot 10^4\right)}$$

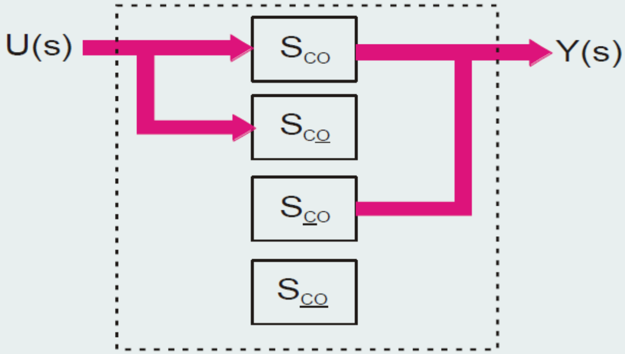
$$\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} 0.008772 - 73.88e^{(-68,59t)} + 75.17e^{(-332,4t)} \\ 1.228 + 153e^{(-68,59t)} - 31.75e^{(-332,4t)} \\ (1.228t + 4.136) - 2.231e^{(-68,59t)} + 0.09553e^{(-332,4t)} \end{bmatrix}$$

# Controlabilidad y observabilidad

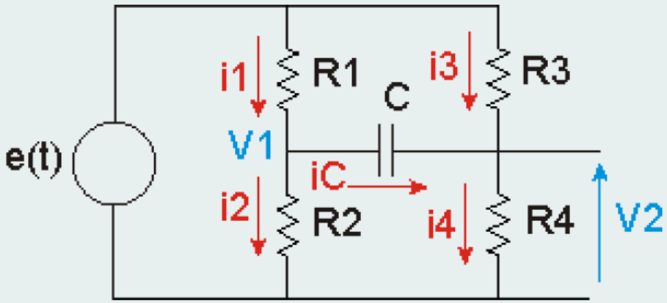
## Controlabilidad y observabilidad. (Ogata)

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo to si se puede llevar de cualquier estado inicial x(to) a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Se dice que un sistema es observable en el tiempo to si, con el sistema en el estado x(to), es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito. Se supone que la entrada u(t) es conocida en el intervalo.



# Controlabilidad y observabilidad – Ejemplo 1




$$\frac{e-V_1}{R_1} = I_C + \frac{V_1}{R_2}$$

$$\frac{e-V_2}{R_3} + I_C = \frac{V_2}{R_4}$$

$$V_1 - V_2 = X$$

$$I_C = C\dot{X}$$

Si R1=R2=R3=R4=R

$$\dot{X} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)X + (R_1R_4 - R_2R_3)e}{C\left(R_1(R_2\left(R_4 + R_3\right) + R_3R_4\right) + R_2R_3R_4}$$

$$\dot{X} = \frac{X}{CR}$$

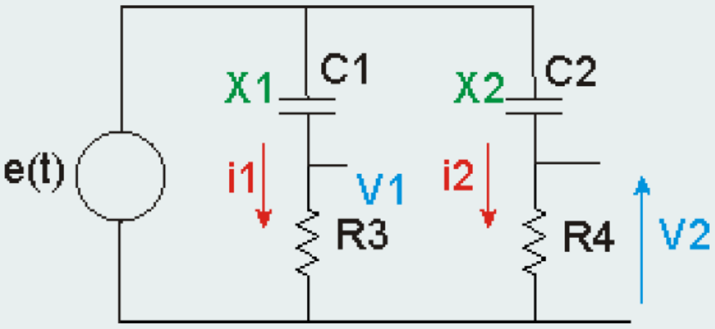
X no es controlable desde e(t)

$$V_2 = \frac{R_4R_2\cdot(R_1 + R_3)e - R_4R_3(R_1 + R_2)X}{R_1(R_2(R_3+R_4) + R_3R_4) + R_2\cdot R_3\cdot R_4}$$

$$V_2 = \frac{e - X}{2}$$

X es observable desde V2(t)

# Controlabilidad y observabilidad – Ejemplo 2




$$E = X_1 + \dot{X}_1 C_1 R_3$$

$$E = X_2 + \dot{X}_2 C_2 R_4$$

$$\dot{X}_1 = \frac{E - X_1}{C_1 R_3}$$

$$\dot{X}_2 = \frac{E - X_2}{C_2 R_4}$$

El circuito permite controlar las variables de estado salvo el caso en que las constantes de tiempo de ambas ramas sean iguales. En este caso las dos variables se comportan de la misma manera para una dada entrada y no puedo diferenciarlas y el sistema resulta incontrolable desde e(t)

Si planteo la salida en V2 no se puede obtener información del valor de la variable X1 por que las dos ramas están desacopladas. El sistema resulta inobservable desde V2

# Controlabilidad y observabilidad - Verificación

Sistemas MIMO

Un sistema de orden ***n*** con ***r*** entradas y ***q*** salidas

es controlable , si y sólo si , la matriz compuesta ***U [nxnr] ,*** denominada matriz controlabilidad, es de rango ***n.***

Matriz Controlabilidad: $U = \begin{bmatrix} B \mid & AB \mid & A^2B \mid & \ldots\mid & A^{n-2}B \mid & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

es observable , si y sólo si , la matriz compuesta ***V [nqxn] ,*** denominada matriz observabilidad, es de rango ***n.***

Matriz Observabilidad:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

# Controlabilidad y observabilidad - Verificación

Sistemas MIMO

Un sistema de orden ***n*** con ***r*** entradas y ***q*** salidas

es controlable , si y sólo si , la matriz compuesta ***U [nxnr] ,*** denominada matriz controlabilidad, es de rango ***n.***

Matriz Controlabilidad: $U = \left[\begin{array}{cccccc} B \;|\; & AB \;|\; & A^2B \;|\; & \ldots| & A^{n-2}B \;|\; & A^{n-1}B \end{array}\right]$

es observable , si y sólo si , la matriz compuesta ***V [nqxn] ,*** denominada matriz observabilidad, es de rango ***n.***

Matriz Observabilidad:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

# Controlabilidad y observabilidad - Verificación

Para un modelo de orden n:

***Si el rango de la matriz controlabilidad U (matriz observabilidad V) es j<n entonces, habrá j variables de estado controlables (observables) y (n-j) no controlables (no observables)***

Sistemas SISO

Para un sistema SISO, tanto la matriz controlabilidad ***U*** como la matriz observabilidad ***V***, son matrices cuadradas. Por lo tanto, para que resulten de rango igual a ***n***, las matrices deben ser *no singulares*.

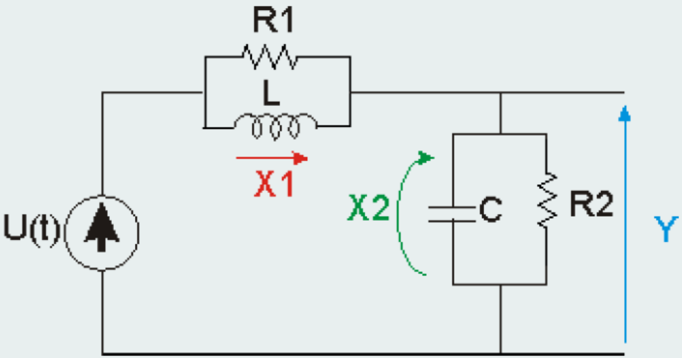
Entonces:

$$\det\left[U\right] = \det\left[B \;|\; AB \;|\; A^2B \;|\; \ldots | \; A^{n-2}B \;|\; A^{n-1}B\right] \neq 0$$

$$\det\left[V\right] = \det\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

# Controlabilidad y observabilidad - Verificación

Ejemplo 1




$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{R_1^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C^2} \end{bmatrix}$$

$$\det(U) = \frac{R_1}{LC}\left(\frac{R_1}{L} - \frac{1}{R_2 C}\right)$$

No será controlable si las ctes de tiempo son iguales

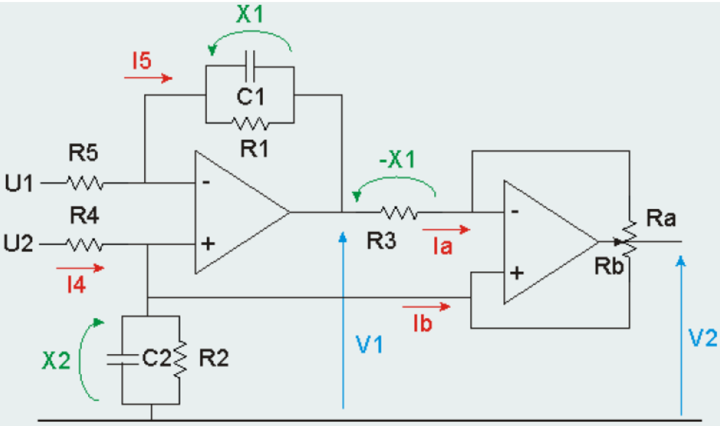
$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C^2} \end{bmatrix}$$

$$\det(V) = 0$$

Desde la salida solamente es observable X2

# Controlabilidad y observabilidad - Verificación

Ejemplo 2




$$I_a R_a = I_b R_b \qquad K = \frac{R_a}{R_b} = \frac{I_b}{I_a}$$

$$R_b = \frac{1}{1+K} R_p \qquad R_a = \frac{K}{1+K} R_p$$

$$I_a = -\frac{x_1}{R_3} \qquad I_b = -\frac{K}{R_3} x_1$$

$$C_1 \dot{x}_1 + \frac{x_1}{R_1} = \frac{u_1 - x_2}{R_5} \qquad C_2 \dot{x}_2 + \frac{x_2}{R_2} = I_4 - I_b = \frac{u_2 - x_2}{R_4} - \frac{K}{R_3} x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{C_1 R_1} x_1 - \dfrac{1}{C_1 R_5} x_2 + \dfrac{1}{C_1 R_5} u_1 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{K}{C_2 R_3} x_1 - \dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}\right) x_2 + \dfrac{1}{C_2 R_4} u_2 \end{cases}$$

$$V_1 = x_2 - x_1$$

$$V_2 = x_2 - \frac{I_b}{R_b} = x_2 - \frac{K}{1+K}\frac{R_p}{R_3} x_1$$

# Controlabilidad y observabilidad - Verificación

Ejemplo 2

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1R_1} & -\frac{1}{C_1R_5}\\ \frac{K}{C_2R_3} & -\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1R_5} & 0\\ 0 & \frac{1}{C_2R_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ \frac{K}{1+K}\frac{R_p}{R_3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1R_5} & 0 & -\frac{1}{C_1^2R_1R_5} & -\frac{1}{C_1C_2R_4R_5}\\ 0 & \frac{1}{C_2R_4} & \frac{K}{C_1C_2R_3R_5} & -\frac{(R_2+R_4)}{C_2^2R_2R_4^2}\end{bmatrix}$$

$$Rg[U]=2$$

$$U(U_1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1R_5} & -\frac{1}{C_1^2R_1R_5}\\ 0 & \frac{K}{C_1C_2R_3R_5}\end{bmatrix}$$

Si K=0 entonces

$$Rg[U(U_1)]=1$$

# Controlabilidad y observabilidad - Verificación

## Ejemplo 2

$$V=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \dfrac{K}{1+K}\dfrac{R_p}{R_3} & 1 \\ \dfrac{1}{C_1R_1}+\dfrac{K}{C_2R_3} & \dfrac{1}{C_1R_5}-\dfrac{R_2+R_4}{C_2R_2R_4} \\ \dfrac{K}{C_2R_3}-\dfrac{KR_p}{C_1R_1R_3(1+K)} & -\dfrac{KR_p}{C_1R_5R_3(1+K)}-\dfrac{R_2+R_4}{C_2R_2R_4} \end{bmatrix}$$

$$Rg[V]=2$$

$$V(V_2)=\begin{bmatrix} \dfrac{K}{1+K}\dfrac{R_p}{R_3} & 1 \\ \dfrac{K}{C_2R_3}-\dfrac{KR_p}{C_1R_1R_3(1+K)} & -\dfrac{KR_p}{C_1R_5R_3(1+K)}-\dfrac{R_2+R_4}{C_2R_2R_4} \end{bmatrix}$$

Si K=0 entonces

$$Rg[V(V_2)]=1$$

Si K=0 entonces $G_{21}(s)=\dfrac{V_2(s)}{U_1(s)}=0$

# Formas canónicas de modelos de estado

Modelos de estado en donde las matrices tienen formas especiales. En general, se llega a estas formas aplicando una transformación lineal al vector de estado.

**Modelo Canónico Controlable**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + d\ u(t)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_m s^{m-1} + c_{m-1} s^{m-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} + d \qquad D(s) = \det\left[sI - A\right]$$

# Formas canónicas de modelos de estado

Modelos de estado en donde las matrices tienen formas especiales. En general, se llega a estas formas aplicando una transformación lineal al vector de estado.

**Modelo Canónico Controlable**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + d\ u(t)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_m s^{m-1} + c_{m-1} s^{m-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} + d \qquad D(s) = \det\left[sI - A\right]$$

# Formas canónicas de modelos de estado

**Modelo Canónico Observable**

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)+d\ u(t)$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^{m-1}+b_{m-1}s^{m-2}+\dots+b_2 s+b_1}{s^n+a_n s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\dots+a_2 s+a_1}+d \qquad D(s)=\det\left[sI-A\right]$$

# Formas canónicas de modelos de estado

**Modelo Canónico Observable**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + d\ u(t)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^{m-1} + b_{m-1} s^{m-2} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} + d \qquad D(s) = \det\left[ sI - A \right]$$

# Formas canónicas de modelos de estado

**Modelo Canónico Diagonal**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} x(t) + d\ u(t)$$

$$G(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{s-\lambda_{n-1}} + \frac{c_n}{s-\lambda_n} + d$$

Todos los $\lambda$i distintos

# Formas canónicas de modelos de estado

**Modelo Canónico Diagonal**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} x(t) + d\ u(t)$$

$$G(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{s-\lambda_{n-1}} + \frac{c_n}{s-\lambda_n} + d$$

Todos los $\lambda$i distintos

# Transformación de modelos de estado

Suponga una planta descrita por el siguiente modelo de estado:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad ; \quad y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

Y considere una transformación lineal a través de una matriz no singular T, tal que:

$$x(t) = T\,\overline{x}(t) \quad ; \quad \overline{x}(t) = T^{-1}\,x(t)$$

Reemplazando en el modelo:

$$T\,\dot{\overline{x}}(t) = A\,T\,\overline{x}(t) + B\,u(t) \quad ; \quad y(t) = C\,T\,\overline{x}(t) + D\,u(t)$$

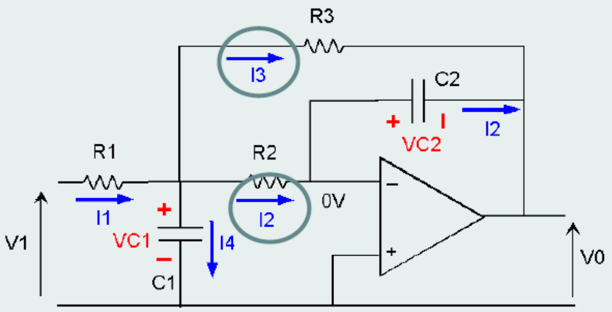
Despejando la derivada:

$$\dot{\overline{x}}(t) = T^{-1}AT\,\overline{x}(t) + T^{-1}B\,u(t) \qquad \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\,\overline{x}(t) + \overline{B}\,u(t)$$

$$\overline{A} = T^{-1}AT \qquad \overline{B} = T^{-1}B \qquad \overline{C} = CT \qquad \overline{D} = D$$

# Transformación de modelos de estado

Ejemplo 1




$$V_1 - V_{C1} = I_1 R_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 = \frac{V_{C1}}{R_2} + \frac{V_{C1} + V_{C2}}{R_3} + \dot{V}_{C1} C_1$$

$$\dot{V}_{C1} = \frac{V_1}{C_1 R_1} - \frac{V_{C1}}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_{C2}}{C_1 R_3}$$

$$I_2 = \frac{V_{C1}}{R_2} = \dot{V}_{C2} C_2$$

$$\dot{V}_{C2} = \frac{V_{C1}}{C_2 R_2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{C_1 R_3} \\ -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100K\Omega \;;\; C_1 = 0.9\mu F \;\;;\;\; C_2 = 0.1\mu F$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33.33 & -11.11 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

# Transformación de modelos de estado

Ejemplo 1

$$\begin{bmatrix} I_3 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_3 & 1/R_3 \\ 1/R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \quad ; T = \begin{bmatrix} 0 & 10^{5} \\ 10^{5} & -10^{5} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -33.33 & -11.11 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10^{5} \\ 10^{5} & -10^{5} \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} -11{,}11 & 77{,}78 \\ -11{,}11 & -22{,}22 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} -3{,}33*10^{-4} \\ -3{,}33*10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10^{5} \\ 10^{5} & -10^{5} \end{bmatrix} \qquad \overline{C} = \begin{bmatrix} -10^{5} & 10^{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11{,}11 & 77{,}78 \\ -11{,}11 & -22{,}22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3{,}33*10^{-4} \\ -3{,}33*10^{-4} \end{bmatrix} V_1 \quad ; \quad \begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10^{5} & 10^{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

# Transformación de modelos de estado

<u>Controlabilidad:</u>

$$\bar{U} = \left[ \bar{B} \middle| \quad \bar{A}\bar{B} \middle| \quad \ldots \middle| \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B} \right] = \left[ T^{-1}B \middle| \quad T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{I}B \middle| \quad \ldots \middle| \quad T^{-1}AT\ldots\ldots T^{-1}B \right]$$

$$\bar{U} = T^{-1}\left[ B \middle| \quad AB \middle| \quad \ldots \middle| \quad A^{n-1}B \right] = T^{-1}U$$

Como el rango de una matriz no cambia si se premultiplica o posmultiplica por una matriz no singular .

$$Rango\left[ T^{-1}U \right] = Rango\left[ U \right]$$

Por lo tanto:

$$Rango\left[ \bar{U} \right] = Rango\left[ U \right]$$

Entonces la controlabilidad no es afectada por la transformación del modelo.

# Transformación de modelos de estado

<u>Observabilidad:</u>

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \cdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ C\underbrace{TT^{-1}}_{I}AT \\ \cdots \\ CT\ldots T^{-1}AT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T = VT$$

Como el rango de una matriz no cambia si se premultiplica o posmultiplica por una matriz no singular .

$$Rango[VT] = Rango[V]$$

Por lo tanto:

$$Rango[\bar{V}] = Rango[V]$$

Entonces la observabilidad no es afectada por la transformación del modelo.

# Transformación de modelos de estado

Dado un modelo de estado controlable y observable:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad ; \quad y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

Con $\det[sI - A] = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + .... + a_2 s + a_1$

*Transformación a Modelo Canónico Controlable*

$$Ac = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \qquad Bc = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Cc = CP$$

Puesto que el modelo es controlable las matrices $U$ y $Uc$ resultarán no singulares :

$$Uc = \left[ Bc \middle| \; AcBc \middle| \; \dots \middle| \; Ac^{n-1}Bc \right] = P^{-1}U$$

Por lo tanto resulta: $P^{-1} = UcU^{-1}$ y $P = UUc^{-1}$

Dada la topología de $Ac$ y $Bc$, resulta:

$$Uc^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Transformación de modelos de estado

*Transformación a Modelo Canónico Observable*

$$Ao = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \; ; \; Co = CQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; Bo = Q^{-1}B$$

Puesto que el modelo es observable las matrices $V$ y $Vo$ resultarán no singulares :

$$Vo = \begin{bmatrix} Co \\ CoAo \\ \dots \\ CoAo^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} Q = VQ$$

Por lo tanto resulta: $Q = V^{-1}Vo$ y $Q^{-1} = Vo^{-1}V$

Dada la topología de $Ao$ y $Co$, resulta:

$$Vo^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$