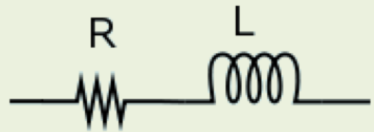
TEORÍA DE CONTROL
Análisis de sistemas mediante modelos

Grado de Robótica
Curso 2022-2023

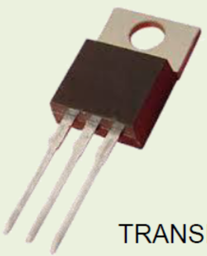
Análisis de sistemas mediante modelos

SISTEMAS FÍSICOS Y MODELOS

RESISTOR



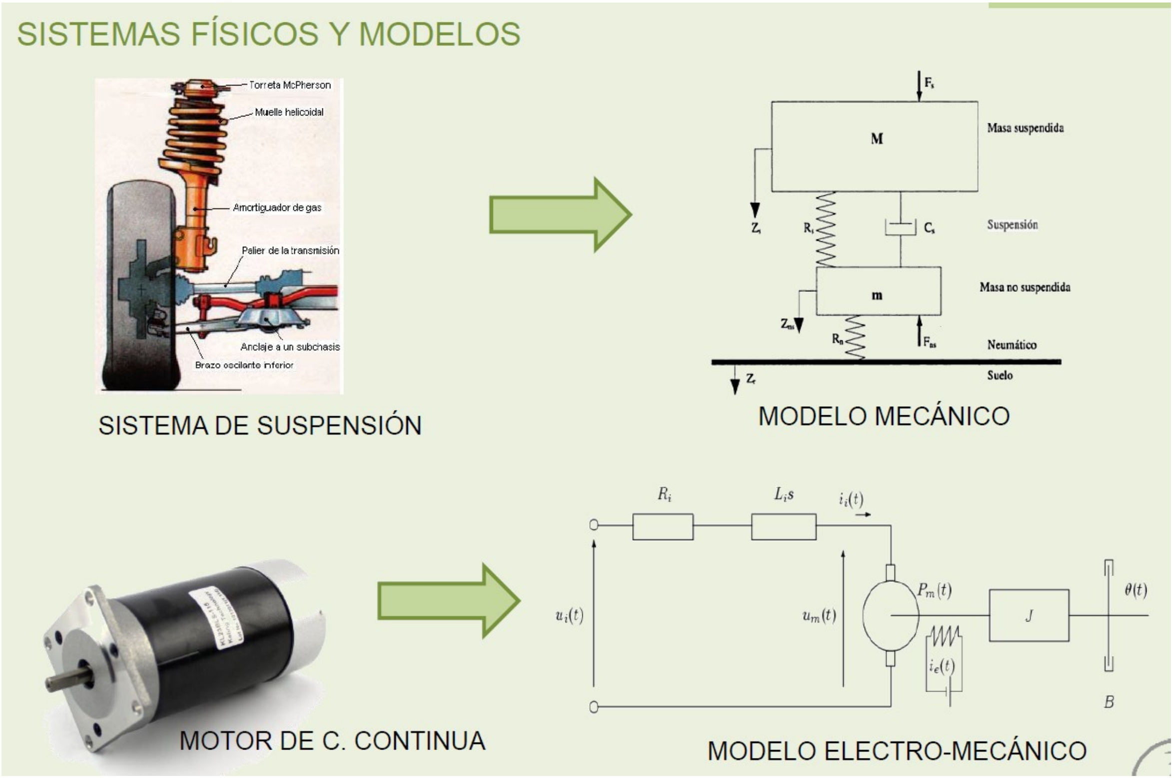
MODELO ELÉCTRICO



TRANSISTOR

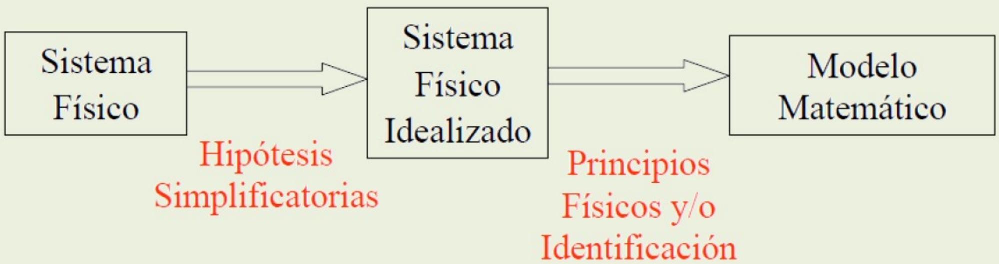
- MODELO DE PEQUEÑA SEÑAL
- MODELO DE GRAN SEÑAL
- MODELO DE BAJA FRECUENCIA
- MODELO DE ALTA FRECUENCIA

Análisis de sistemas mediante modelos

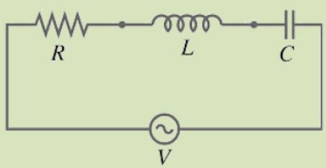


Análisis de sistemas mediante modelos

MODELOS MATEMÁTICOS



SISTEMA FÍSICO



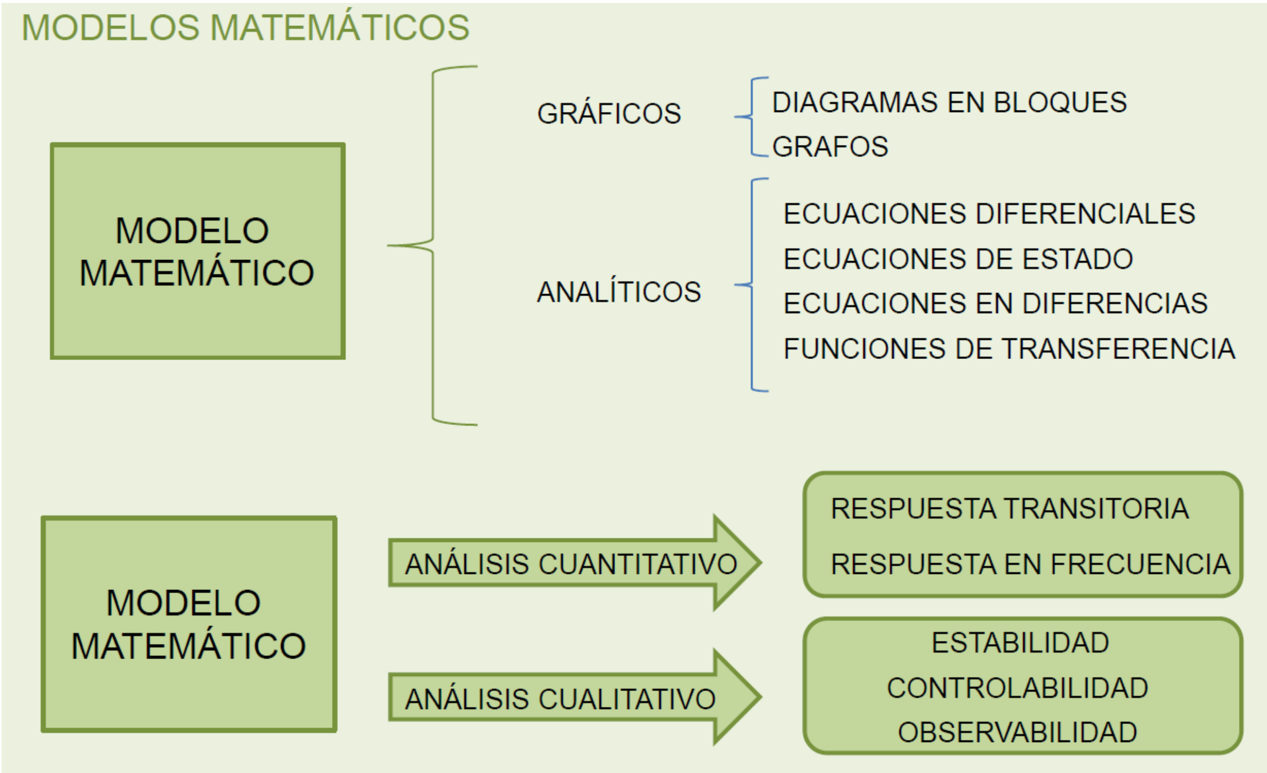
MODELO ELÉCTRICO

$$V(t) = I(t)R + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

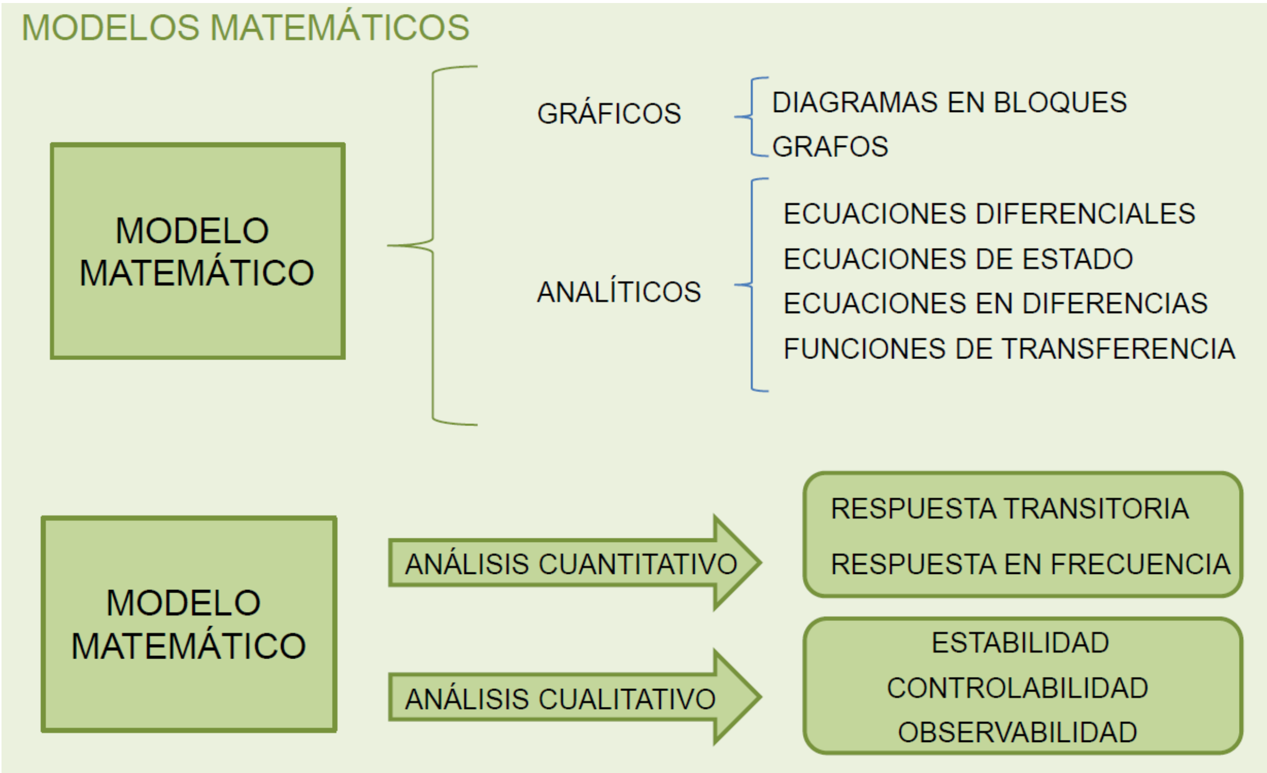
$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{sC}{s^2LC + sCR + 1}$$

MODELO MATEMÁTICO

Análisis de sistemas mediante modelos



Análisis de sistemas mediante modelos



Análisis de sistemas mediante modelos

DIAGRAMA EN BLOQUES

ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DE UN DIAGRAMA EN BLOQUES

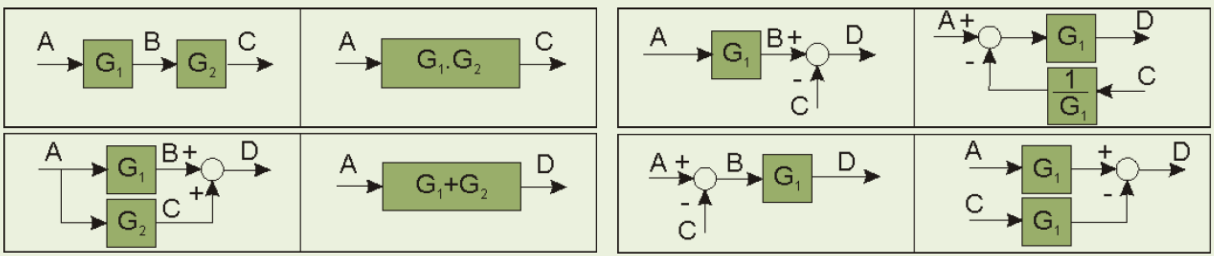
BLOQUES OPERACIONALES caracterizados por la relación causal ENTRADA/SALIDA

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}} \longrightarrow Y(s)$$

LÍNEAS DE CONEXIÓN donde se representan las variables de interés del sistema.

SUMADORES donde se produce la combinación lineal de las variables del sistema.

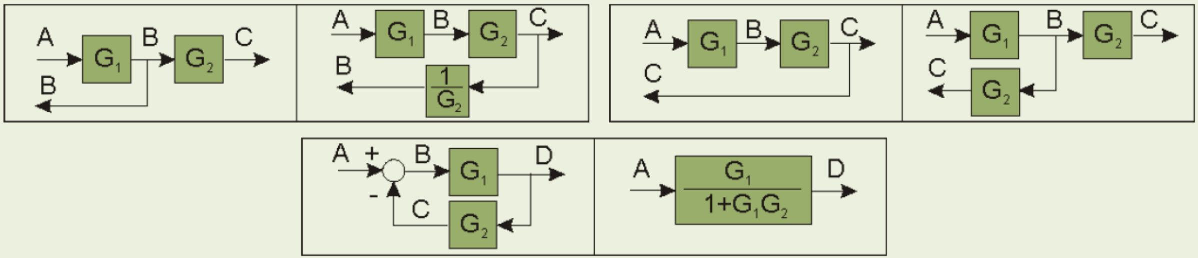
ÁLGEBRA DE BLOQUES



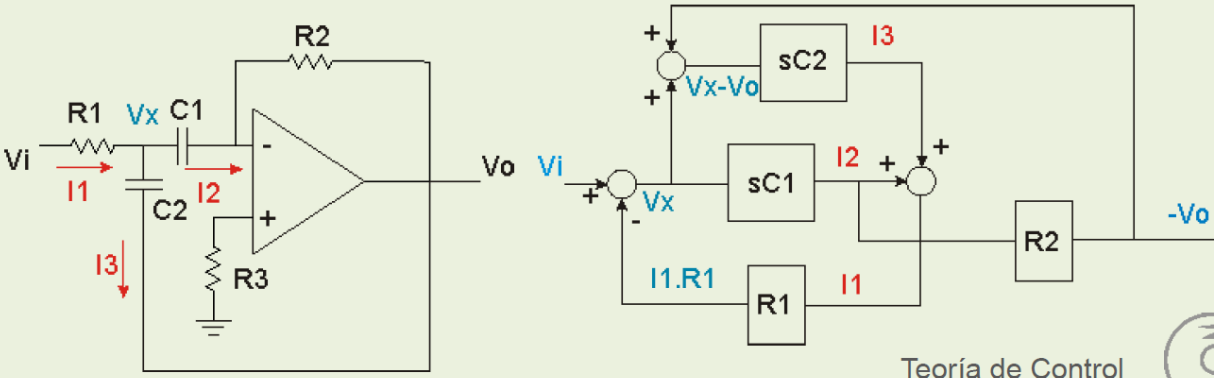
Análisis de sistemas mediante modelos

DIAGRAMA EN BLOQUES

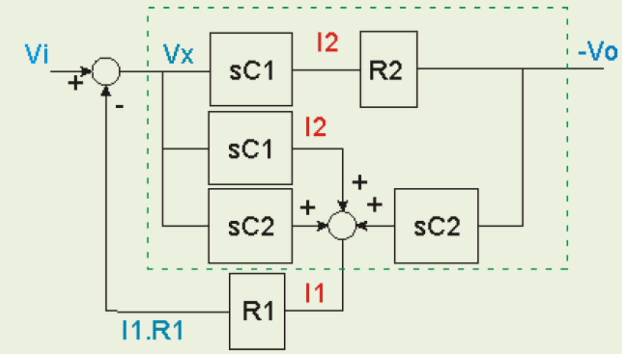
ÁLGEBRA DE BLOQUES



Ejemplo 1: Halle la transferencia Vo/Vi del siguiente circuito electrónico. Considere al amplificador operacional con características ideales.



Análisis de sistemas mediante modelos

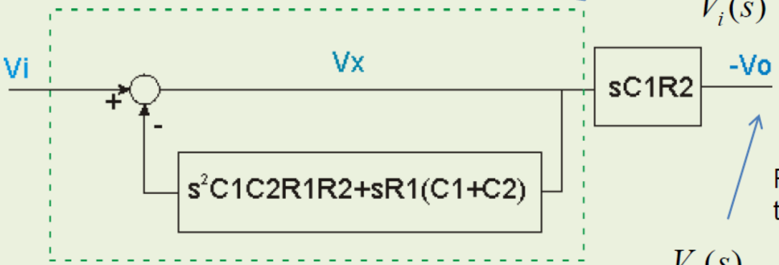


La porción recuadrada del diagrama se puede reemplazar por un único bloque que represente la trasferencia I1(s) / Vx(s)

$$\frac{I_1(s)}{V_x(s)} = sC_1 + sC_2 + s^2 C_1 C_2 R_2$$

Se calcula la transferencia del lazo realimentado

$$\frac{V_x(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + sR_1 \quad C_1 + C_2}$$

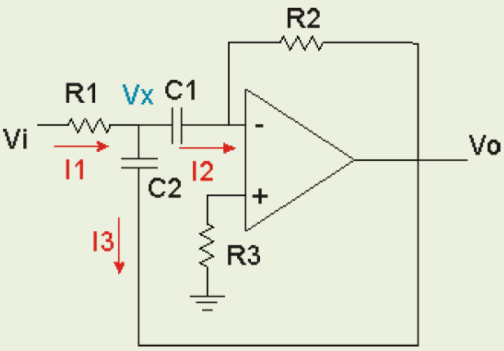


Finalmente se calcula la transferencia total

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-sC_1 R_2}{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + sR_1 \quad C_1 + C_2 \quad +1}$$

La transferencia corresponde a un filtro pasabanda

Análisis de sistemas mediante modelos



$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-sC_1R_2}{s^2C_1R_1C_2R_2 + sR_1 \;\; C_1 + C_2 \;\; +1}$$

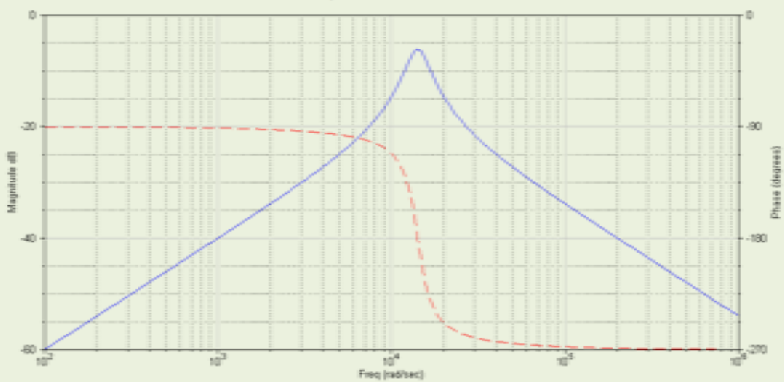
La expresión general de un filtro pasabanda es:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = A_0 \frac{s}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + s\frac{2\delta}{\omega_n} + 1}$$

Para este circuito:

$$A_0 = -R_2C_1 \qquad \delta = R_1 \;\; C_1 + C_2 \qquad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{C_1R_1C_2R_2}}$$

Si C1=C2=0,01uF , R1=1000 y R2=50 K

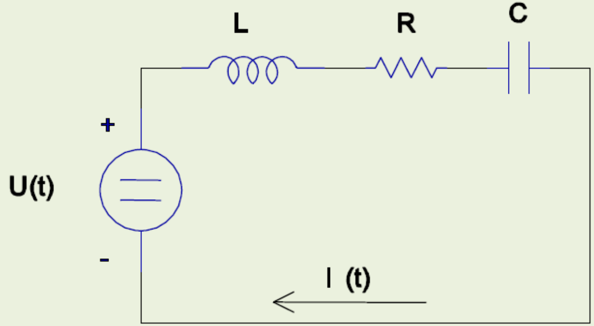


Teoría de Control

Análisis de sistemas mediante modelos

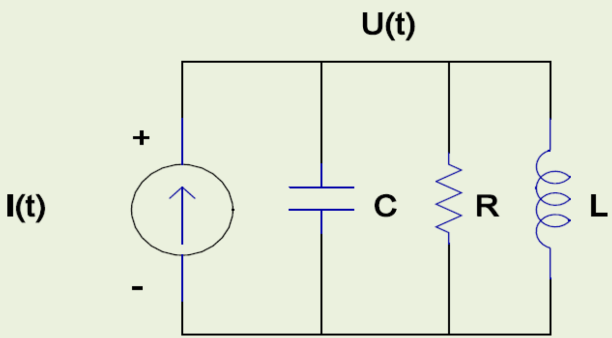
ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

CIRCUITOS ELÉCTRICOS BÁSICOS



Circuito serie

$$U(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt} + R\,I(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt$$



Circuito paralelo

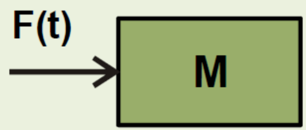
$$I(t) = C\,\frac{dU(t)}{dt} + \frac{U(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t U(t)\,dt$$

Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

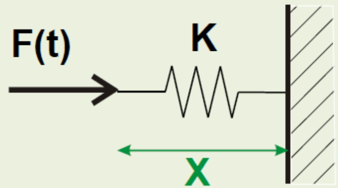
SISTEMA MECÁNICO DE TRASLACIÓN

Segunda Ley de Newton



$$F(t) = M\,a(t) = M\,\frac{dV(t)}{dt}$$

Ley de Hooke



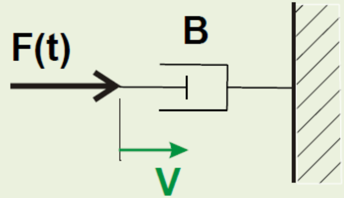
$$F(t) = K\,x(t) = K\int V(t)dt$$

Rozamiento

- **Seco**

$$F(t) = \mu\,N = cte$$

- **Viscoso**

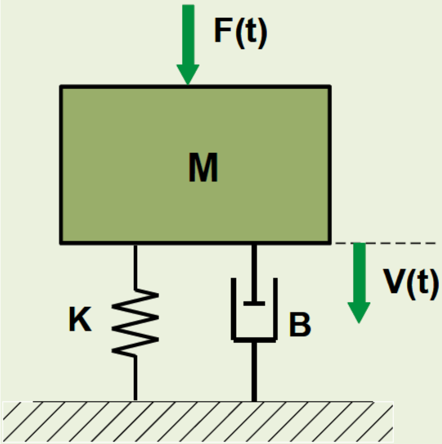


$$F(t) = B\,V(t)$$

Análisis de sistemas mediante modelos

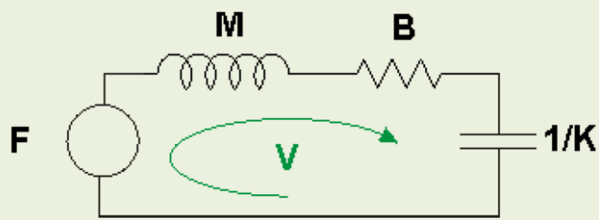
ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA MECÁNICO DE TRASLACIÓN



$$F(t) = M\,\frac{dV(t)}{dt} + B\,V(t) + K\int V(t)\,dt$$

Equivalencia de tensión			Equivalencia de corriente		
F	→	U	F	→	I
V	→	I	V	→	U
M	→	L	M	→	C
B	→	R	B	→	1/R
K	→	1/C	K	→	1/L

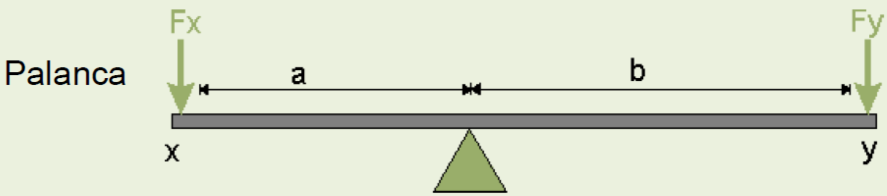


Teoría de Control

Análisis de sistemas mediante modelos

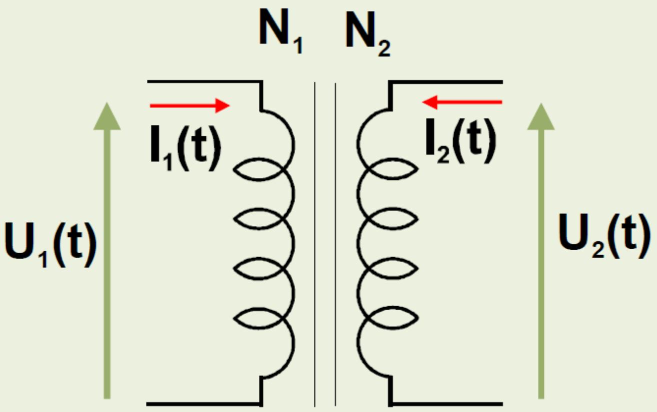
ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA MECÁNICO DE TRASLACIÓN



$$a\,Fx = b\,Fy \qquad \frac{Vx}{a} = \frac{Vy}{b}$$

$$Fx = \frac{b}{a}\,Fy = \eta\,Fy$$



$$N_1\,I_1(t) = N_2\,I_2(t)$$

$$U_1\ \ t\ \approx N_1\ \frac{d\Phi}{dt}$$

$$U_2\ \ t\ \approx N_2\ \frac{d\Phi}{dt}$$

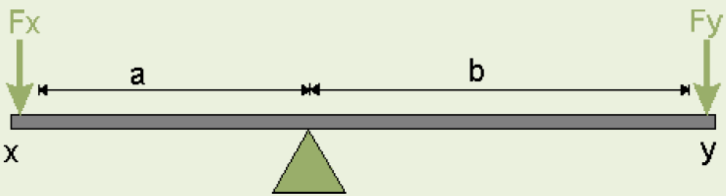
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \eta$$

Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

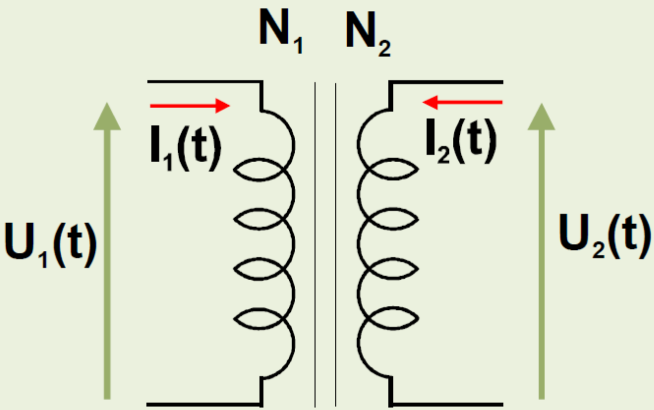
SISTEMA MECÁNICO DE TRASLACIÓN

Palanca



$$a\ Fx = b\ Fy \qquad \frac{Vx}{a} = \frac{Vy}{b}$$

$$Fx = \frac{b}{a} Fy = \eta\ Fy$$



$$N_1\ I_1(t) = N_2\ I_2(t)$$

$$U_1\ \ t\ \approx N_1\ \frac{d\Phi}{dt}$$

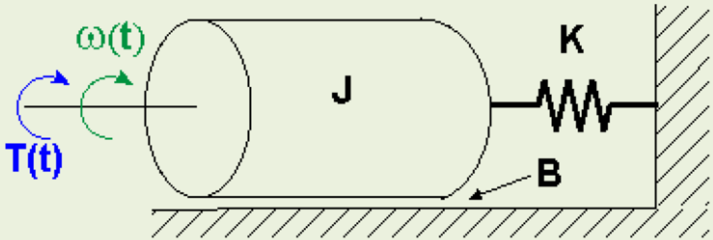
$$U_2\ \ t\ \approx N_2\ \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \eta$$

Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA MECÁNICO DE ROTACIÓN



$$T(t) = J\,\frac{d\omega(t)}{dt} + B\,\omega(t) + K\int \omega(t)\,dt$$

Equivalencia de tensión

T	→	U
ω	→	I
J	→	L
B	→	R
K	→	1/C

Equivalencia de corriente

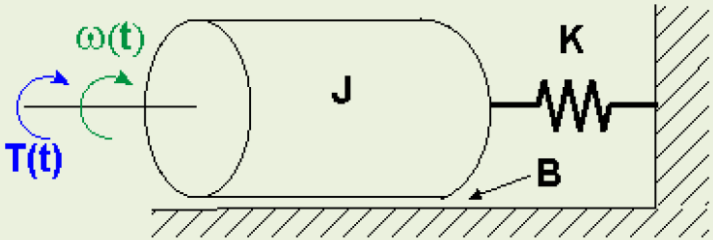
T	→	I
ω	→	U
J	→	C
B	→	1/R
K	→	1/L

Te

Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA MECÁNICO DE ROTACIÓN



$$T(t) = J\,\frac{d\omega(t)}{dt} + B\,\omega(t) + K\int \omega(t)\,dt$$

Equivalencia de tensión

T	→	U
ω	→	I
J	→	L
B	→	R
K	→	1/C

Equivalencia de corriente

T	→	I
ω	→	U
J	→	C
B	→	1/R
K	→	1/L

Te

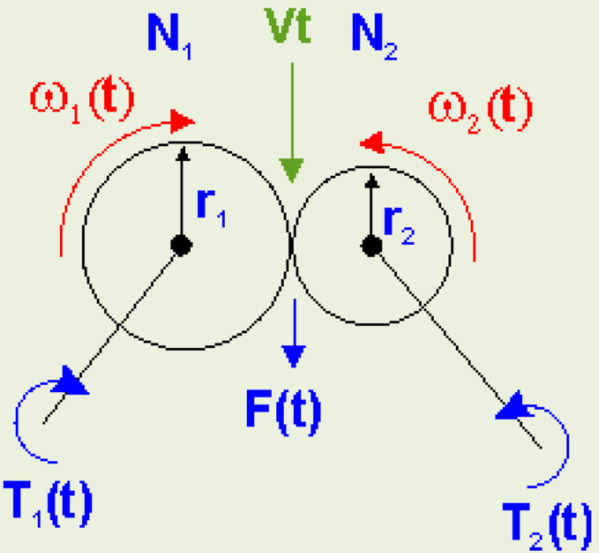
Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA MECÁNICO DE ROTACIÓN

Poleas

Engranajes



$$V_t = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\eta}$$

$$F = \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} = \eta$$

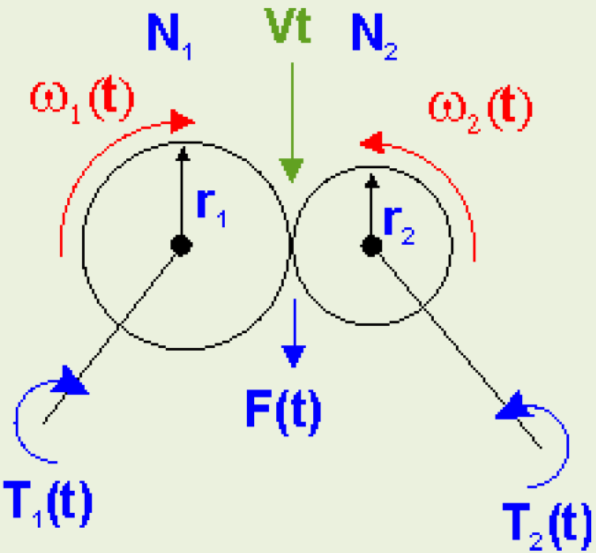
Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA MECÁNICO DE ROTACIÓN

Poleas

Engranajes



$$V_t = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\eta}$$

$$F = \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} = \eta$$

Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA TÉRMICO

Conducción y Convección

$$\text{Flujo de calor } Q = K\,\Delta T \left[{}^{\text{Cal}}\!/_{\text{seg}} \right]$$

$$\Delta T = \text{Diferencia de temperatura}$$

Para conducción

$$K = k_c \frac{\text{A}}{\Delta x} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_c : \text{Conductividad} \\ \text{A} : \text{Area} \\ \Delta x : \text{Espesor} \end{array} \right\}$$

Resistencia Térmica

$$\frac{d\Delta T}{dQ} = \frac{1}{K} = \theta \quad \left[{}^{\circ}K\!/_{Watt} \right]$$

Capacidad Térmica

$$C = \left(\frac{\text{Variación del calor acumulado}}{\Delta \text{T}} \right)$$

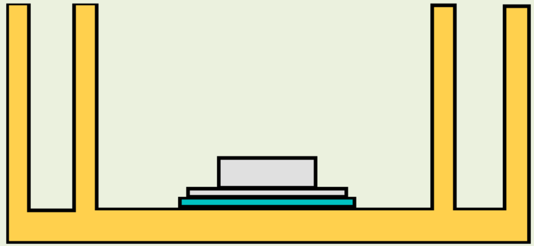
$$C = M\,Q_e \quad \left\{ \begin{array}{l} M \quad \text{masa} \\ Q_e \quad \text{calor específico} \end{array} \right\}$$

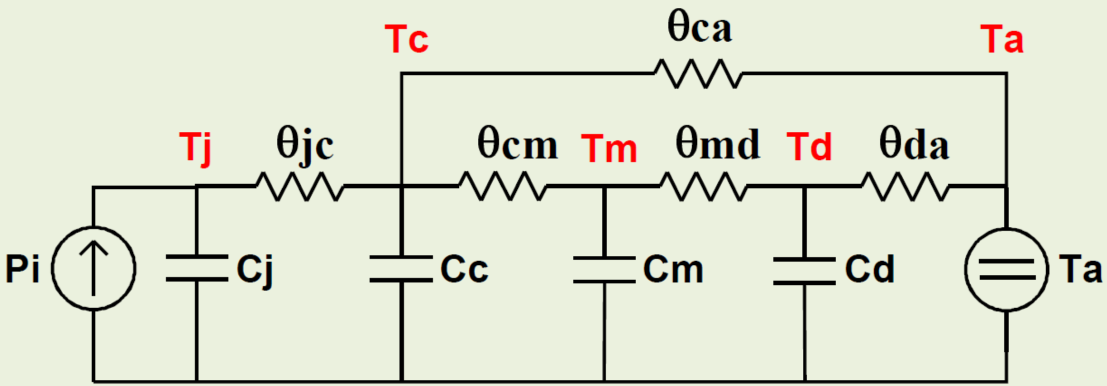
Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA TÉRMICO

Amplificador de Potencia





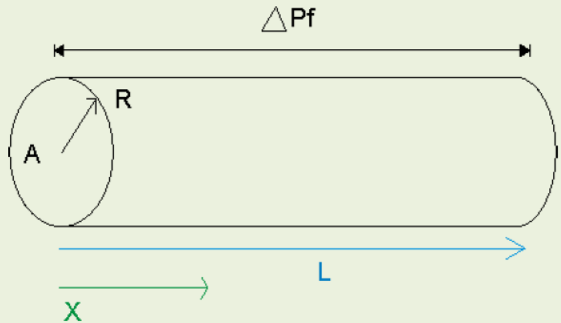
Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

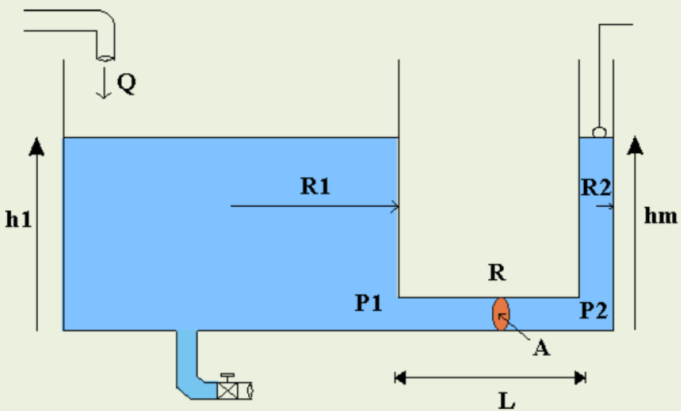
SISTEMA HIDRÁULICO

Ecuación de Poiseuille

$$\text{Caudal} = Q = \frac{\pi\, R^4 \Delta \mathrm{P_f}}{8\, \nu\, L}$$



Tanques interconectados



Ecuaciones del Sistema

Caudal
$$Q_i = \frac{dV}{dt} + Q_s$$

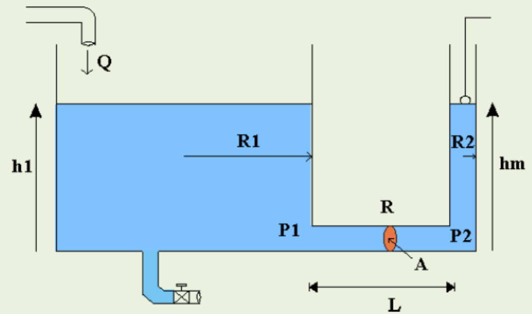
Presión
$$P = \delta\, g\, h$$

Teoría de Control

Análisis de sistemas mediante modelos

ANALOGÍAS ELÉCTRICAS DE SISTEMAS

SISTEMA HIDRÁULICO



Tanque 1 $$Q = A_1 \frac{dh_1}{dt} + \frac{\pi R^4 g \delta}{8 \nu L}(h_1 - h_m)$$

Tanque 2 $$0 = A2 \frac{dh_m}{dt} - \frac{\pi R^4 g \delta}{8 \nu L}(h_1 - h_m)$$

$$\frac{8 \nu L}{\pi R^4 g \delta} = R$$ Resistencia dinámica del fluido

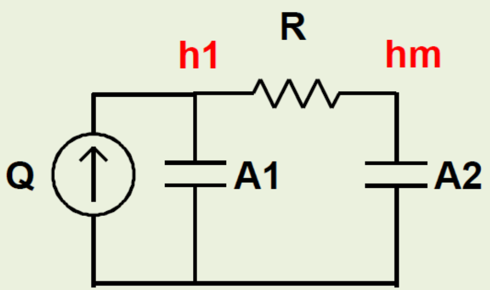
Equivalencia de tensión

U → h

I → Q

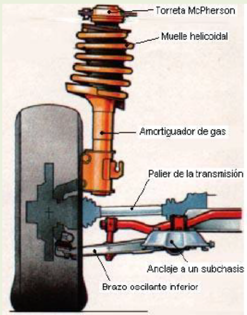
R → R

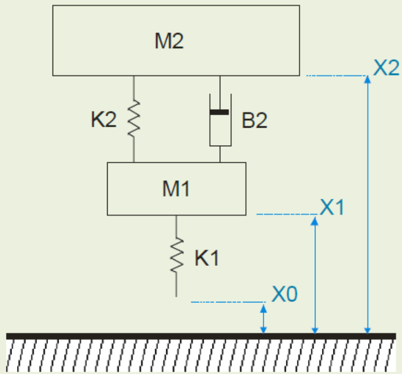
C → A



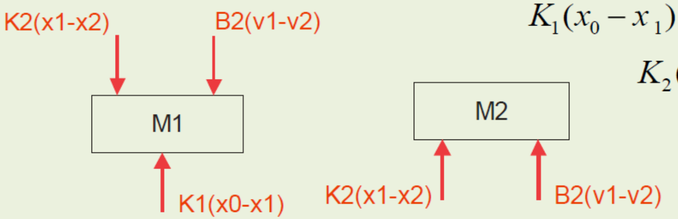
Análisis de sistemas mediante modelos

Ejemplo 2: Considere el modelo mecánico planteado para el sistema de suspensión del automóvil. Halle la transferencia entre la posición de la carrocería y el desplazamiento provocado por una imperfección en el piso. Determine el comportamiento transitorio de la carrocería cuando se pretende subir un escalón .





Planteando las ecuaciones de cuerpo aislado sobre el modelo mecánico se obtiene:



$$K_1(x_0 - x_1) - K_2(x_1 - x_2) - B_2(v_1 - v_2) = M_1 a_1 = F_{M1}$$

$$K_2(x_1 - x_2) + B_2(v_1 - v_2) = M_2 a_2 = F_{M2}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Teoría de Control

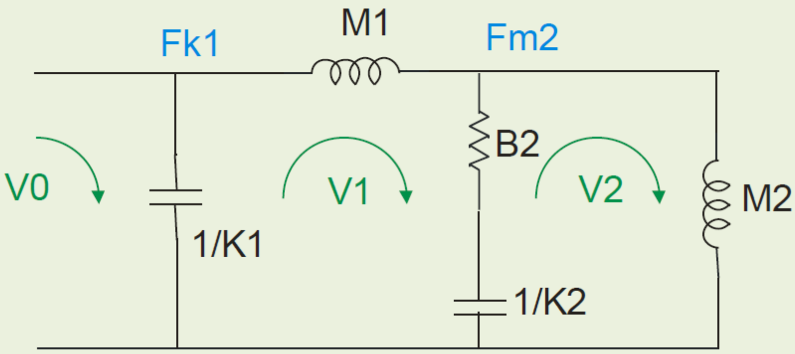
Análisis de sistemas mediante modelos

Reescribiendo las ecuaciones en términos de velocidad se llega a :

$$K_1 \int (v_0 - v_1) dt = K_2 \int (v_1 - v_2) dt + B_2 (v_1 - v_2) + M_1 \frac{dv_1}{dt} = F_{k1}$$

$$K_2 \int (v_1 - v_2) dt + B_2 (v_1 - v_2) = M_2 \frac{dv_2}{dt} = F_{M2}$$

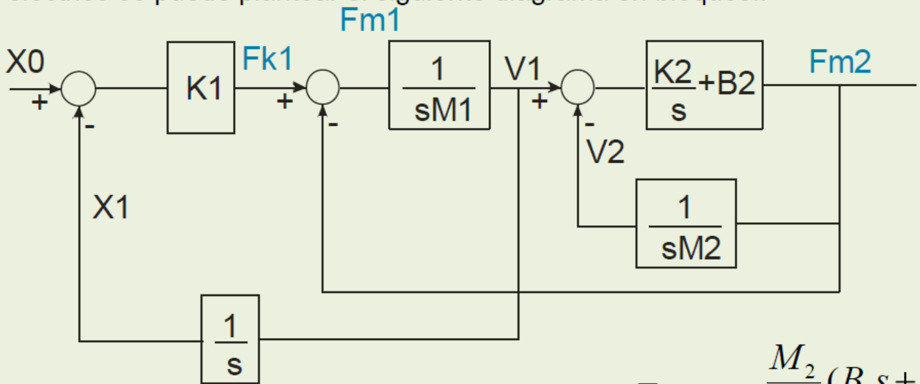
Si se realiza una equivalencia entre las fuerzas en las ecuaciones mecánicas y tensiones en un circuito eléctrico, se podría plantear que las velocidades resultan equivalentes a las corrientes del circuito eléctrico, las masas equivalentes a inductancias , los rozamientos equivalentes a resistencias y los resortes equivalentes a la inversa de la capacidad. En tales condiciones las anteriores ecuaciones serían equivalentes a las del siguiente circuito eléctrico:



Las ecuaciones planteadas corresponden a las ecuaciones de malla del circuito eléctrico

Análisis de sistemas mediante modelos

Del circuito eléctrico se puede plantear el siguiente diagrama en bloques.:



$$\frac{F_{M2}}{V_1} = \frac{sM_2(B_2 s + K_2)}{s^2 M_2 + B_2 s + K_2}$$

$$\frac{F_{M2}}{F_{M1}} = \frac{\frac{M_2}{M_1}(B_2 s + K_2)}{s^2 M_2 + B_2 s + K_2}$$

$$\frac{F_{M2}}{F_{K1}} = \frac{M_2(B_2 s + K_2)}{s^2 M_2 M_1 + B_2 s \quad M_1 + M_2 \quad + K_2 \quad M_1 + M_2}$$

$$\frac{F_{M2}}{X_0} = \frac{K_1 M_2 s^2 (B_2 s + K)}{s^4 M_2 M_1 + B_2 s^3 \quad M_1 + M_2 \quad + s^2 \left[K_1 M_2 + K_2 \quad M_1 + M_2 \quad \right] + B_2 K_1 s + K_1 K_2}$$

Análisis de sistemas mediante modelos

Finalmente la posición de la carrocería para un escalón de desplazamiento:

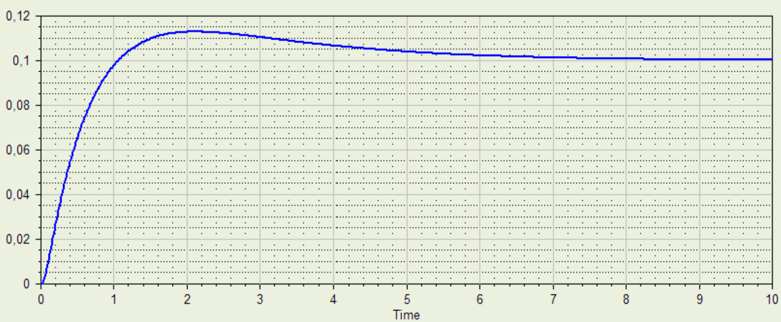
$$\frac{X_2}{X_0} = \frac{K_1(B_2 s + K_2)}{s^4 M_2 M_1 + B_2 s^3 \;\; M_1 + M_2 \;\; + s^2 \left[K_1 M_2 + K_2 \;\; M_1 + M_2 \;\; \right] + B_2 K_1 s + K_1 K_2}$$

Para M1=20 Kg , M2=1300Kg, K1=50000 N/m, K2=1000 N/m, B2=2500 Ns/m

$$\frac{X_2}{X_0} = \frac{1.923(\,2500\mathrm{s}+1000)}{s^4 + 126.9 s^3 + 2551 s^2 + 4808 s + 1923} = \frac{4808(\mathrm{s}+0.4)}{(\mathrm{s}+0.5641)(\mathrm{s}+1.486)(\mathrm{s}+22.38)(\mathrm{s}+102.5)}$$

Suponiendo un escalón de 10 cm la respuesta tiene la siguiente expresión

$$X_2(t) = 0.1 \;+\; 0.06822\, e^{-0.5641t} \;-\; 0.1806\, e^{-1,486t} \;+\; 0.01293\, e^{-22,38t} \;-\; 0.0005807\, e^{-102,5t}$$

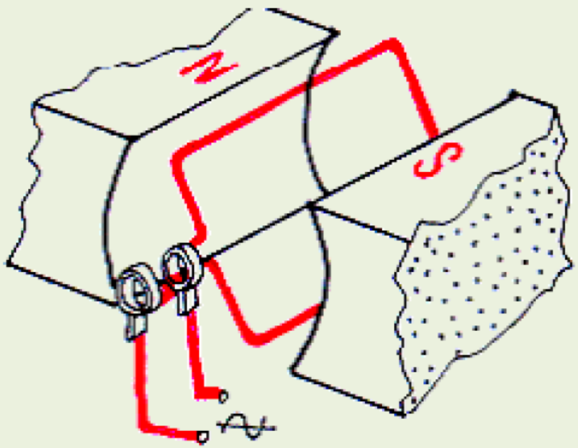


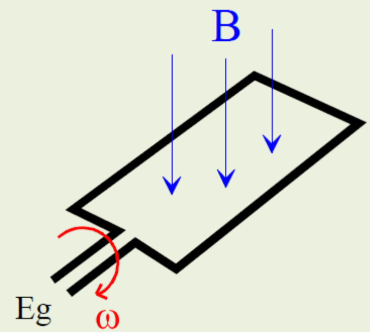
Teoría de Control

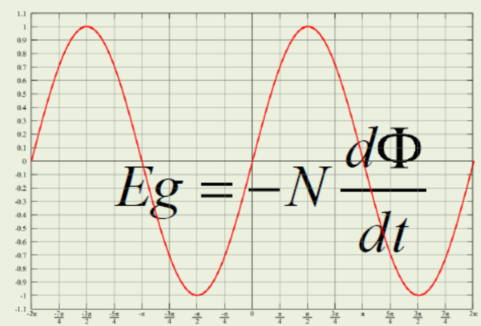
Análisis de sistemas mediante modelos

GENERADOR Y MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA

Ley de Faraday

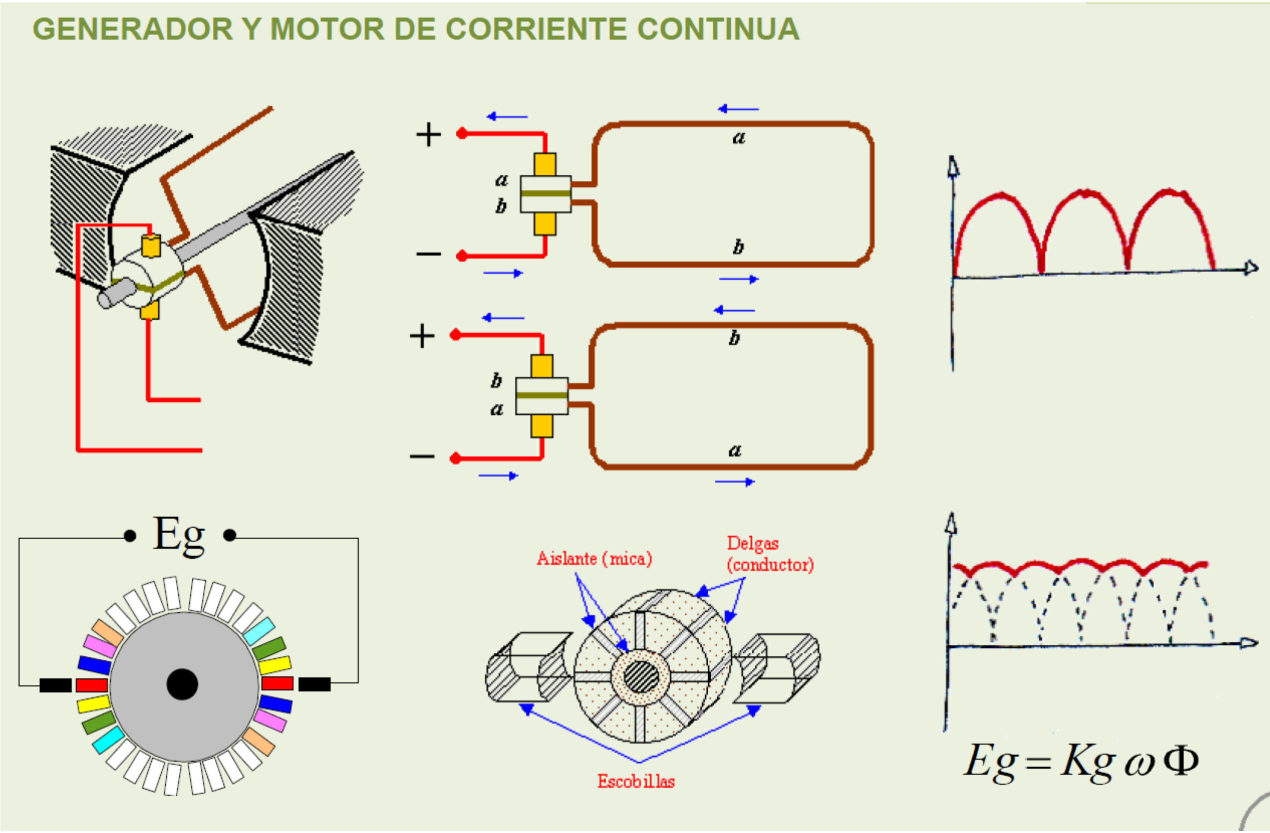






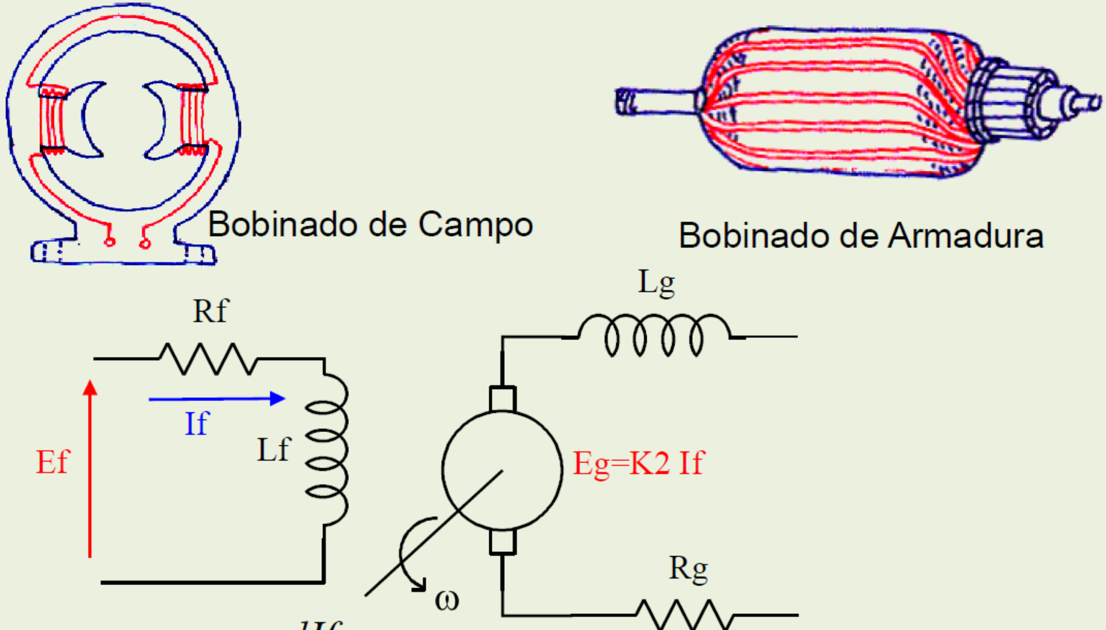
$$Eg = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

Análisis de sistemas mediante modelos



Análisis de sistemas mediante modelos

GENERADOR Y MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA



$$Ef = Rf\ If + Lf\ \frac{dIf}{dt}$$

$$Eg = Kg\ \omega\,\Phi$$

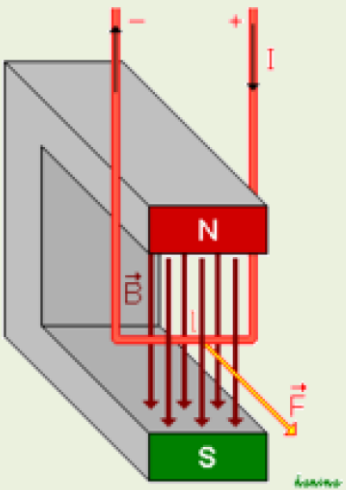
$$\Phi = Kf\ If$$

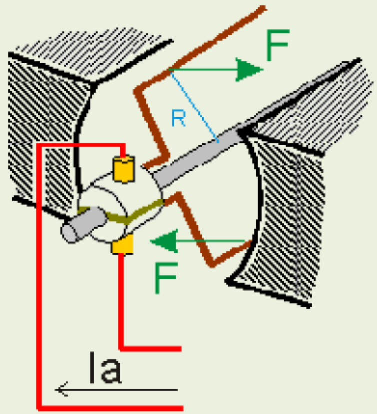
Si ω es constante $Eg = K_2\ If$

Análisis de sistemas mediante modelos

GENERADOR Y MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA

Fuerza de Lorentz





$$F = \int I.dl \times B$$

$$Tm = K_1\ Ia\,\Phi$$

$$Eg = Kg\,\omega\,\Phi$$

Si Φ es constante

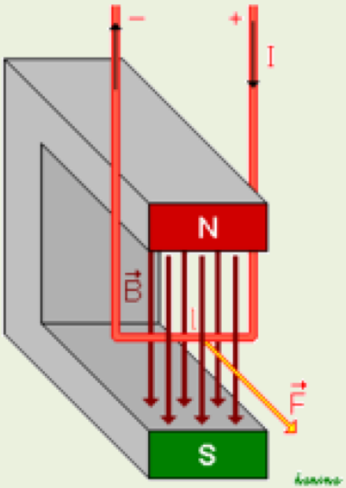
$$Tm = K_T\ Ia$$

$$Eg = Kw\,\omega$$

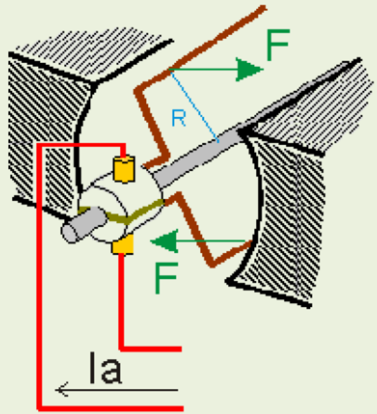
Análisis de sistemas mediante modelos

GENERADOR Y MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA

Fuerza de Lorentz



$$F = \int I.dl \times B$$



$$Tm = K_1 \, Ia \, \Phi$$

$$Eg = Kg \, \omega \, \Phi$$

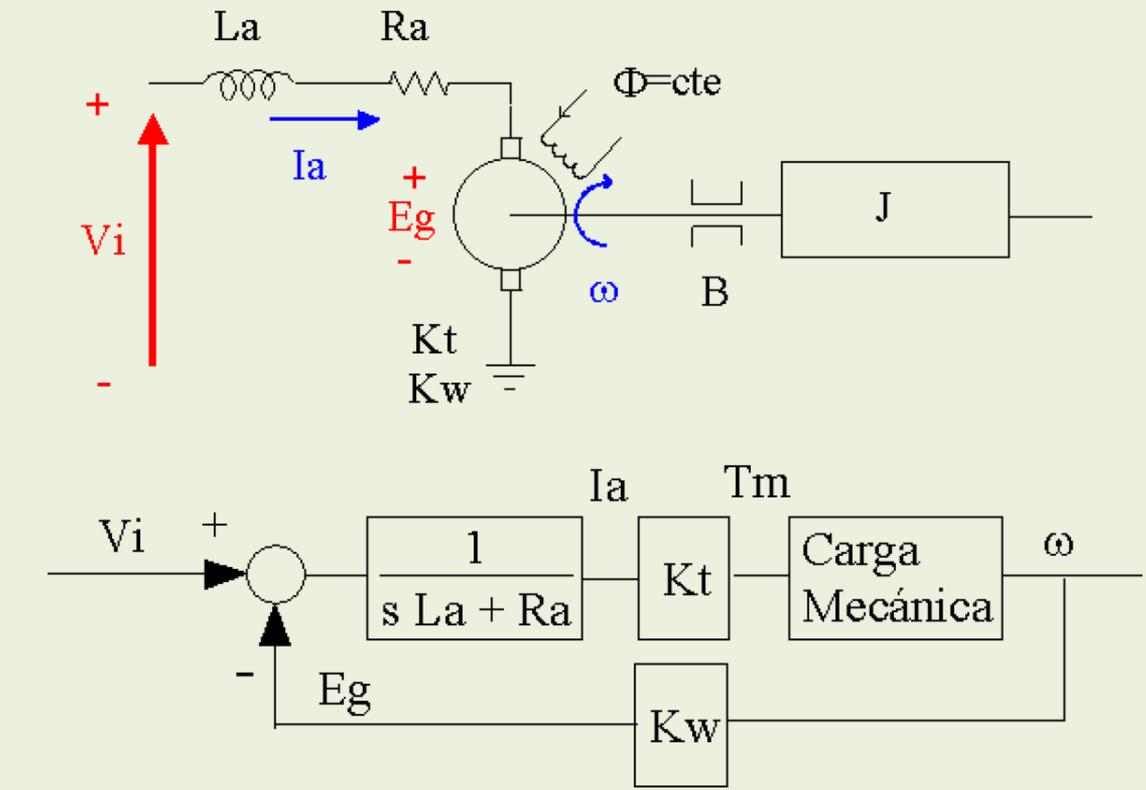
Si Φ es constante

$$Tm = K_T \, Ia$$

$$Eg = Kw \, \omega$$

Análisis de sistemas mediante modelos

GENERADOR Y MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA



Linealización de sistemas

Objetivo: obtener modelos lineales aproximados a partir de los modelos no lineales.

Punto de funcionamiento: Es el punto de equilibrio en torno al cual se linealiza

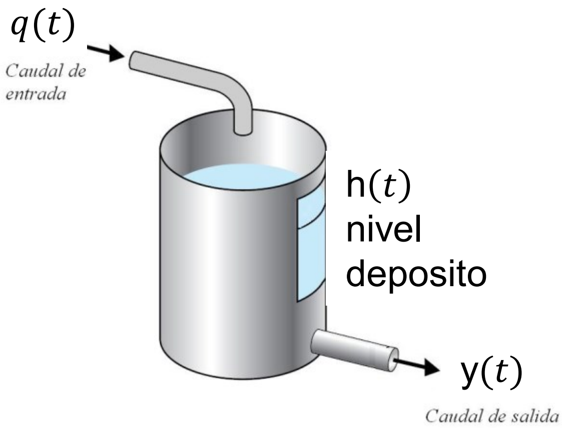
Propiedades:

- Representa bien al sistema en cierta zona en torno al punto de equilibrio
- Fuera de esa zona el modelo tiene un error grande.

Pag 43, Ogata, Cap 2.

Linealización de sistemas

Ejemplo:



$$A\frac{dh(t)}{dt} = q(t) - y(t) = q(t) - k\sqrt{h(t)}$$

¡Ecuación diferencial no lineal!

Punto de funcionamiento:

$$0 = q_0 - k\sqrt{h_0}$$

Definimos variables incrementales en torno al punto de funcionamiento

$$q(t) = q_0 + \beta(t) \text{ y } h(t) = h_0 + \alpha(t)$$

$$A\frac{dh(t)}{dt} = (q(t) - q_0) - k(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

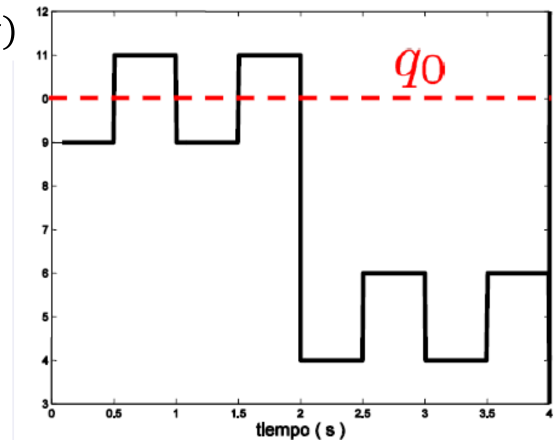
$$q(t) - q_0 = \beta(t)$$

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} \approx \frac{1}{2\sqrt{h_0}}\alpha(t)$$

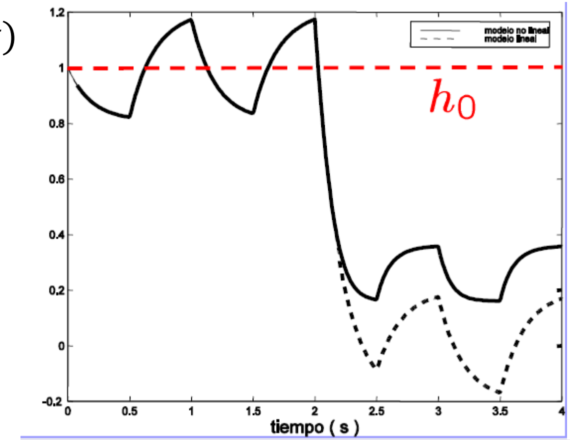
$$\boldsymbol{A\frac{dh(t)}{dt} = \beta(t) - \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\alpha(t)}$$

Linealización de sistemas

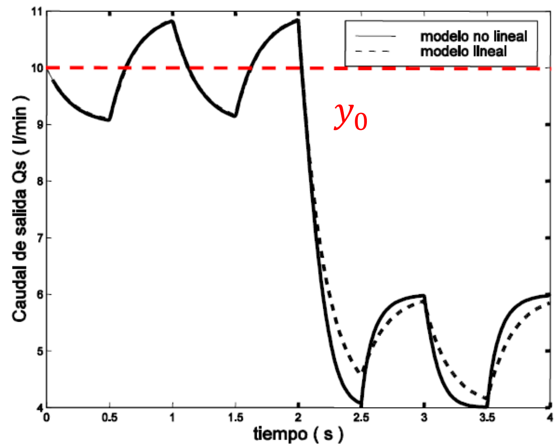
$q(t)$



$h(t)$



$y(t)$



Funciona bien en torno al punto de funcionamiento.

Para variaciones grandes el modelo acumula error

Se espera que las variables evolucionen en torno al punto de equilibrio