TEORÍA DE CONTROL

Control en el espacio de estados

Modelado de sistemas

Grado de Robótica

Curso 2021-2022

Modelo de sistemas en el espacio de estados

- Teoría de control clásica basada en la relación entrada-salida o función de transferencia. Enfoque en el dominio de la frecuencia.
- Teoría de control moderna se basa en el concepto de ***estado***. Basada en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de **n** ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. Se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser o no lineales. Enfoque en el dominio del tiempo. La formulación matricial simplifica la representación matemática y facilita la resolución por computador usando herramientas tipo Matlab.

Modelo de sistemas en el espacio de estados

- Es útil cuando las ec. Diferenciales que describen el sistema son de alto orden.
- **Consiste en realizar cambios de variable de modo que resulte un sistema de ecuaciones diferenciales donde todas las ecuaciones sean de orden 1.**
- A partir de dicho sistema se puede deducir el grafo de flujo.
- A partir del grafo de flujo se puede obtener la función de transferencia en el dominio de Laplace.
- Las funciones de transferencia de alto orden pueden representarse, también en forma de grafo y, a partir de él, obtener las ecuaciones diferenciales
- La formulación matricial es útil cuando la resolución es por computador usando herramientas tipo Matlab.

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Definiciones: (Ogata)

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas ***variables de estado)*** de modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado. Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico.

Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x. Tal vector se denomina ***vector de estado.***

Espacio de estados. El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1, el eje x_2,. . . , el eje x_n, se denomina ***espacio de estados.*** Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Ecuaciones en el espacio de estados.

En el análisis en el espacio de estados, existen tres tipos de variables :
- variables de entrada,
- variables de salida y
- variables de estado.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r, t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r, t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r, t) \end{cases} \qquad \dot{x}\ (t) = f(x,u,t)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r, t) \\ y_2(t) = g_2(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r, t) \\ \ldots \\ y_p(t) = g_p(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r, t) \end{cases} \qquad y\ (t) = g(x,u,t)$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Sistemas lineales.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots + b_{2r}u_r \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nr}u_r \end{cases}$$

$$\dot{x}\ (t) = A\ x(t) + B\ u(t)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \ldots + d_{1r}u_r \\ y_2(t) = a_{c21}x_1 + \ldots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \ldots + d_{2r}u_r \\ \ldots \\ y_n(t) = c_{n1}x_1 + \ldots + c_{pn}x_n + b_{dp1}u_1 + \ldots + d_{pr}u_r \end{cases}$$

$$y\ (t) = C\ x(t) + D\ u(t)$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}}$$

$\mathbf{A}(t)$: Matriz de Estado
$\mathbf{B}(t)$: Matriz de Entrada
$\mathbf{C}(t)$: Matriz de Salida
$\mathbf{D}(t)$: Matriz de Transmisión Directa

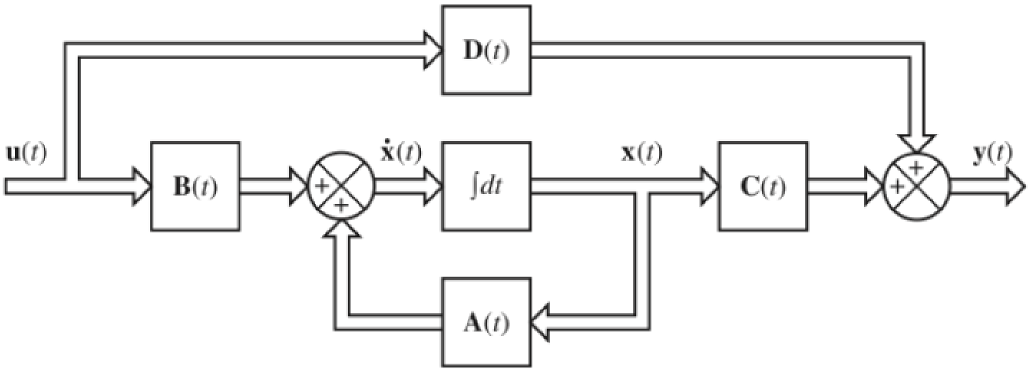
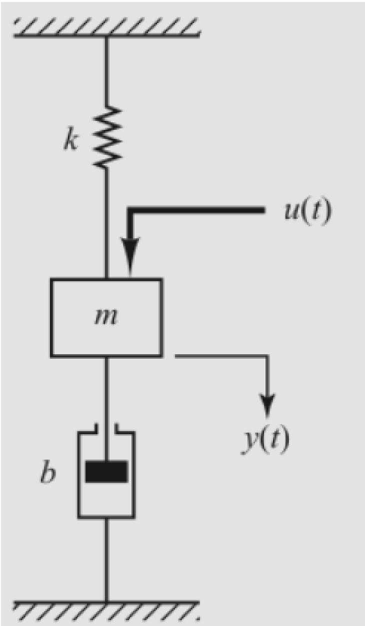


Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados

Modelo de sistemas en el espacio de estados



Ejemplo 2.2.
"Ingeniería De Control Moderna "Ogata. 5ª Edición.

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b\frac{\partial y}{\partial t} + ky = u(t)$$

Sistema de segundo orden, dos integradores:

$$x_1(t) = y(t);$$

$$x_2(t) = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Por lo que convertimos la Ec. Diferencial en un sistema de Ec. de Orden 1:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x_2$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{-b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

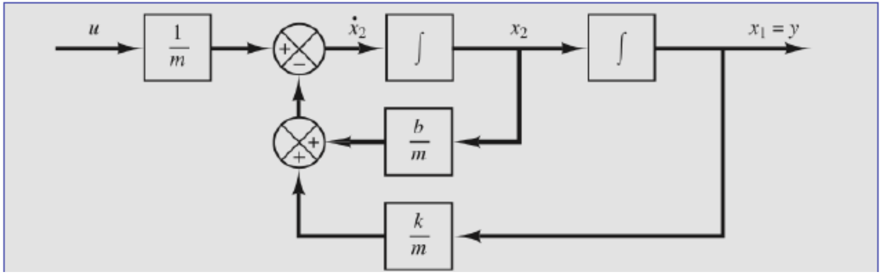
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

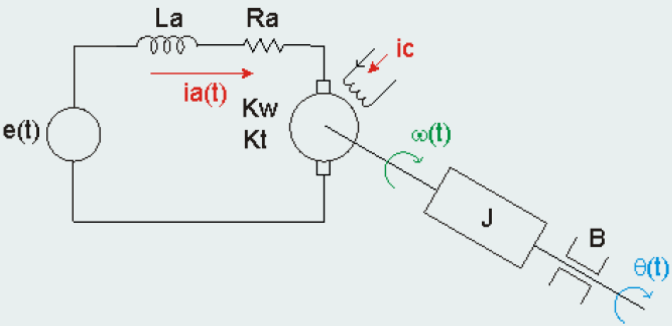
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \qquad D = 0$$

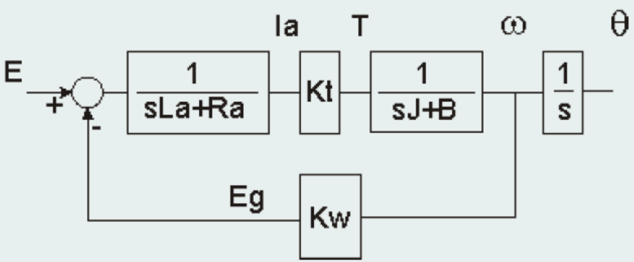


Modelo de sistemas en el espacio de estados

Elección de las Variables de Estado

EJEMPLO 1





Se consideran condiciones iníciales nulas para las variables .

$$Ia = \frac{E - Kw\ \omega}{s\ La + Ra}$$

$$\dot{I}a\ La + Ia\ Ra = E - Kw\ \omega$$

$$\dot{I}a = -Ia\ \frac{Ra}{La} - \omega \frac{Kw}{La} + \frac{E}{La}$$

$$\omega = \frac{Kt\ Ia}{s\ J + B} \qquad \dot{\omega} J + \omega B = Kt\ Ia$$

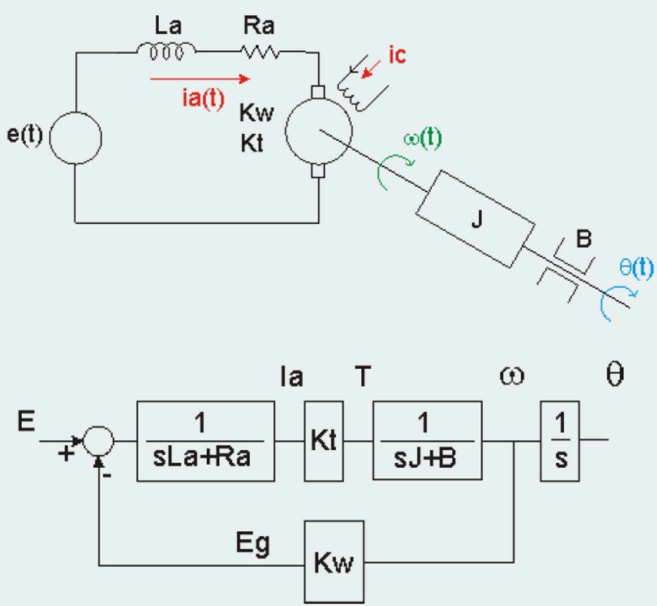
$$\dot{\omega} = Ia \frac{Kt}{J} - \omega \frac{B}{J} \qquad \dot{\theta} = \omega$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kw}{La} & 0 \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Elección de las Variables de Estado



$$\begin{bmatrix} \dot{I}a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kw}{La} & 0 \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\begin{bmatrix} T \\ Eg \\ V_{Ra} \\ V_{La} \\ T_B \\ T_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Kt & 0 & 0 \\ 0 & Kw & 0 \\ Ra & 0 & 0 \\ -Ra & -Kw & 0 \\ 0 & B & 0 \\ Kt & -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$x = \begin{bmatrix} T \\ Eg \\ \theta \end{bmatrix}$$

SI

$$x = \begin{bmatrix} T \\ T_B \\ \omega \end{bmatrix}$$

NO

$$x = \begin{bmatrix} T \\ V_{La} \\ \theta \end{bmatrix}$$

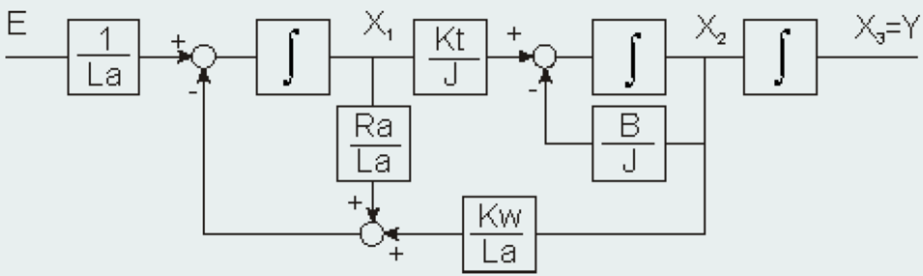
NO

Modelo de sistemas en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{I}a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kw}{La} & 0 \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

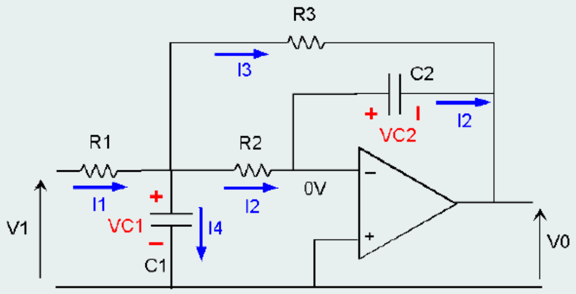
Ra=2 Ω
La=5 mHy
J=0.005 Nms^2
B1=0.005 Nms
Kt=0.7 Nm/A
Kw=0.8 Vs



Modelo de sistemas en el espacio de estados

Elección de las Variables de Estado

EJEMPLO 2



$$V_1 - V_{C1} = I_1 R_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 = \frac{V_{C1}}{R_2} + \frac{V_{C1} + V_{C2}}{R_3} + \dot{V}_{C1} C_1$$

$$\dot{V}_{C1} = \frac{V_1}{C_1 R_1} - \frac{V_{C1}}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_{C2}}{C_1 R_3}$$

$$I_2 = \frac{V_{C1}}{R_2} = \dot{V}_{C2} C_2$$

$$\dot{V}_{C2} = \frac{V_{C1}}{C_2 R_2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Dadas las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{10}$$

si les aplicamos $\mathscr{L}\{\circ\}$ obtenemos las ecuaciones algebraicas

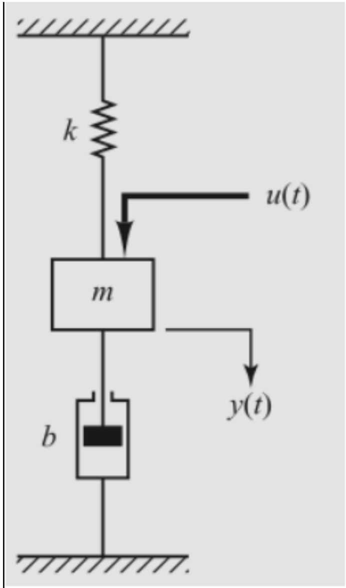
$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0^-). \end{aligned}$$

Así, $\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$ es la función transferencia del sistema (10).

Modelo de sistemas en el espacio de estados



Ejemplo 2.3.
"Ingeniería De Control Moderna "Ogata.
5ª Edición.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

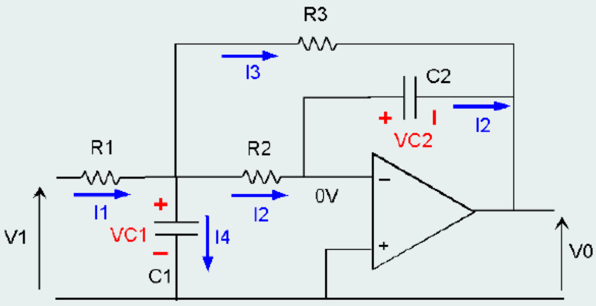
$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

EJEMPLO 2



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100K\Omega \; ; \; C_1 = 0.9\mu F \; ; \; C_2 = 0.1\mu F$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33.33 & -11.11 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

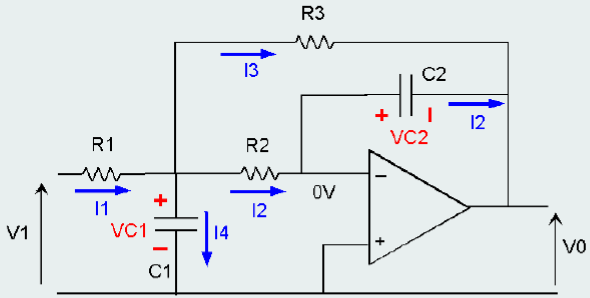
$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$[s\,I - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & -11.11 \\ 100 & s+33.33 \end{bmatrix}}{s^2 + 33.33s + 1111}$$

$$[s\,I - A] = \begin{bmatrix} s+33.33 & 11.11 \\ -100 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{C1}(s) \\ V_{C2}(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s & -11.11 \\ 100 & s+33.33 \end{bmatrix}}{s^2 + 33.33s + 1111} \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{C_1R_3} \\ \frac{1}{C_2R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100K\Omega \;;\; C_1 = 0.9\mu F \;\;;\;\; C_2 = 0.1\mu F$$

$$\begin{bmatrix} V_0(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s & -11.11 \\ 100 & s+33.33 \end{bmatrix}}{s^2 + 33.33s + 1111} \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

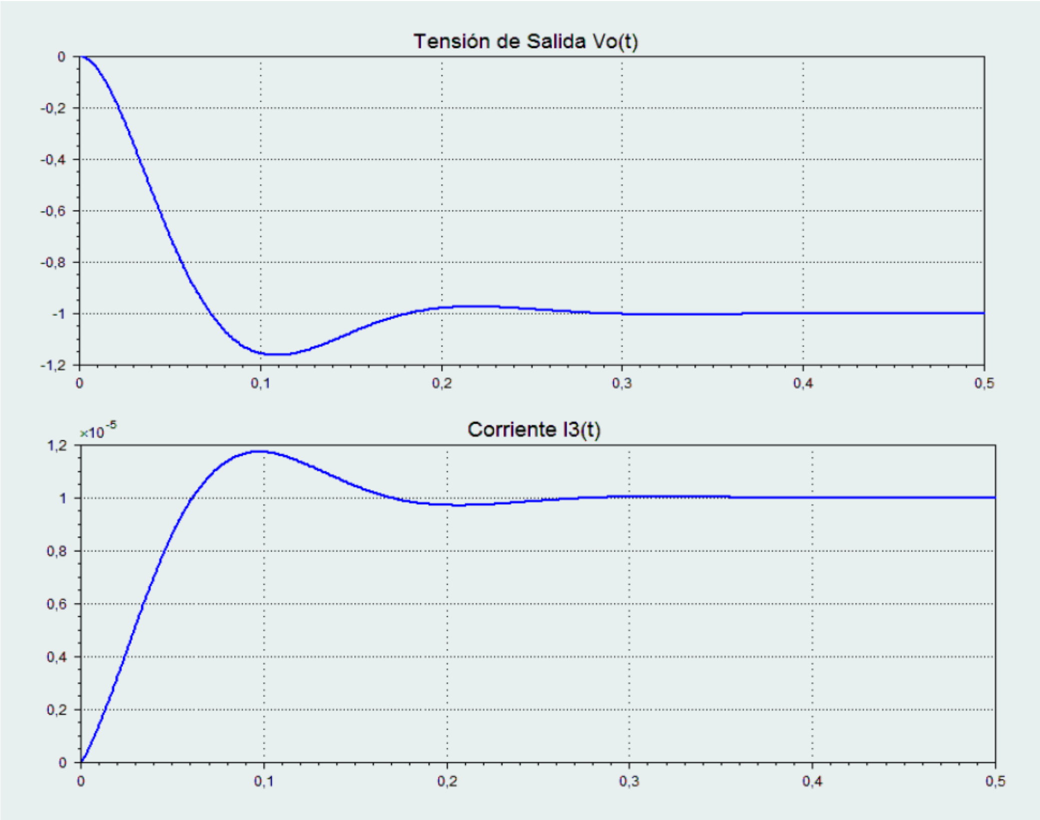
$$\begin{bmatrix} V_0(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1111}{s^2+33.33s+1111} \\ \frac{0.0001111(s+100)}{s^2+33.33s+1111} \end{bmatrix} U(s)$$

Si $U(S) = \frac{1}{s}$

$$\begin{bmatrix} V_0(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1111}{s^3+33.33s^2+1111s} \\ \frac{0.0001111(s+100)}{s^3+33.33s^2+1111s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_0(t) \\ I_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 1.155\cos(28.87t - 0.5236) * e^{(-16.67t)} \\ 10^{-5} - 1.018\;\; 10^{-5}\cos(28.87t - 0.1901)e^{(-16.67t)} \end{bmatrix}$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados



Modelo de sistemas en el espacio de estados

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación no contiene términos derivados

$$\boxed{\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u}$$

Variables de estado

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} \end{aligned}}
\quad \Rightarrow \quad
\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \end{aligned}}$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación no contiene términos derivados

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación contiene términos derivados

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u
\end{aligned}$$

Variables de estado

Donde:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\vdots \\
\beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0
\end{aligned}$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación contiene términos derivados

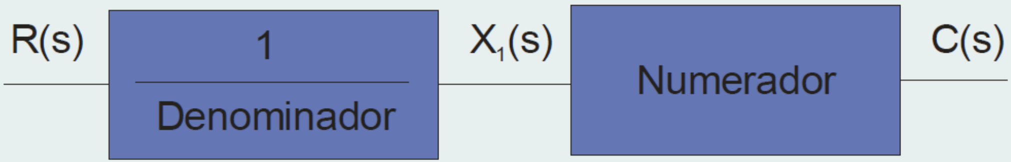
$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\beta_1 s^m+\beta_2 s^{m-1}+\ldots+\beta_m s+\beta_{m+1}}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n}$$



$$\frac{X_1(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n} \qquad \frac{C(s)}{X_1(s)}=\beta_1 s^m+\beta_2 s^{m-1}+\ldots+\beta_m s+\beta_{m+1}$$

$$s^n X_1(s)+\alpha_1 s^{n-1}X_1(s)+\ldots+\alpha_{n-1}sX_1(s)+\alpha_n X_1(s)=R(s)$$

$$x_1^{(n)}(t)+\alpha_1 x_1^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_{n-1}\dot{x}_1(t)+\alpha_n x_1(t)=r(t)$$

$$C(s)=\beta_1 s^m X_1(s)+\beta_2 s^{m-1}X_1(s)+\ldots+\beta_m sX_1(s)+\beta_{m+1}X_1(s)$$

Modelo de sistemas en el espacio de estados

MODELO DE FASE

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$c(t) = \begin{bmatrix} \beta_{m+1} & \beta_m & \dots & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) = \ddot{x}_1(t)$$

$$\dots.$$

$$\dot{x}_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) = x_1^{(n-2)}(t)$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) = x_1^{(n-1)}(t)$$

$$x_1^{(n)}(t) + \alpha_1 x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1}\dot{x}_1(t) + \alpha_n x_1(t) = r(t)$$

$$\dot{x}_n(t) + \alpha_1 x_n(t) + \dots + \alpha_{n-1} x_2(t) + \alpha_n x_1(t) = r(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = -\alpha_1 x_n(t) - \dots - \alpha_{n-1} x_2(t) - \alpha_n x_1(t) + r(t)$$

$$c(t) = \beta_1 x_{m-1}(t) + \beta_2 x_{m-2}(t) + \dots + \beta_m x_2(t) + \beta_{m+1} x_1(t)$$

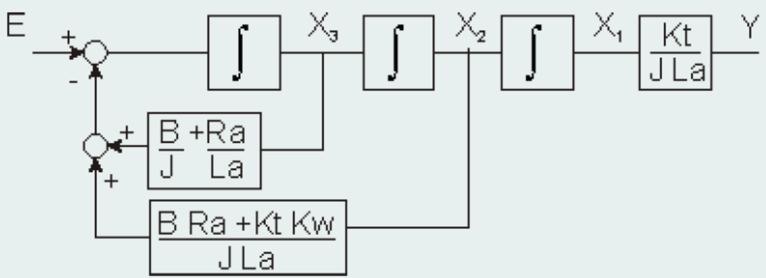
Modelo de sistemas en el espacio de estados

EJEMPLO 1

Para el caso del motor

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{E(s)}=\left[\frac{\dfrac{Kt}{JLa}}{s^3+\left(\dfrac{Ra}{La}+\dfrac{B}{J}\right)s^2+\left(\dfrac{Ra\ B+Kt\ Kw}{La\ J}\right)s}\right]$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{Ra\ B+Kt\ Kw}{La\ J} & -\dfrac{Ra}{La}+\dfrac{B}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \quad ; \quad y=\begin{bmatrix}\dfrac{Kt}{JLa} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$



Modelo de sistemas en el espacio de estados