TEORÍA DE CONTROL
Técnicas clásicas de Control
Diseño de sistemas de control en el dominio del tiempo

Grado de Robótica
Curso 2022-2023

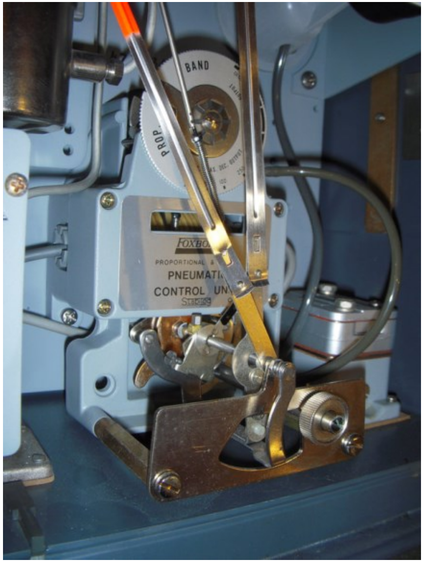
Objetivos

- Estructura básica de un controlador PID.
- Métodos de sintonía experimental.
- Técnicas de compensación basadas en el lugar de las raíces.

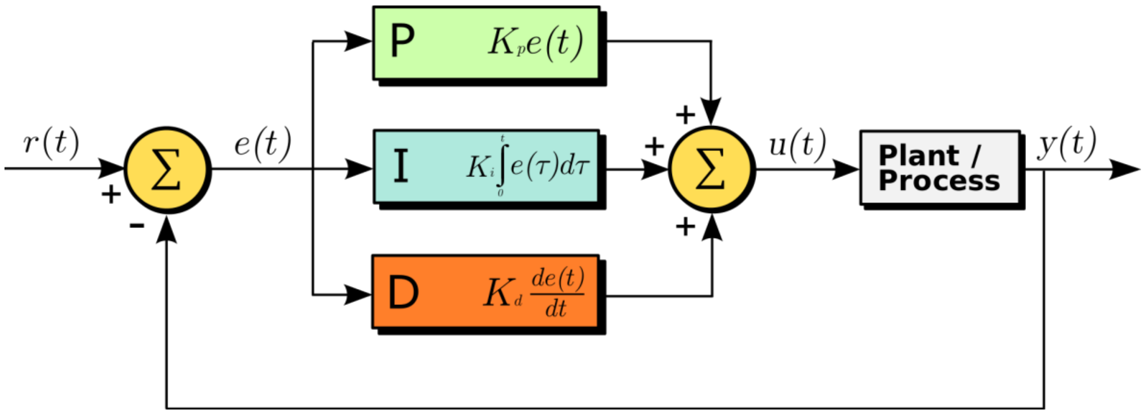
Historia del controlador PID

1922: N. Minorsky analiza los controladores PID, describiendo el uso de controladores de tres términos para el piloto automático del buque “USS New México”.
https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1922.tb04958.x

1936: Se introduce la idea del controlador de tres términos de propósito general. Taylor Instrument Co. Introdujo el primer controlador de este tipo, primero en 1936 con una constante derivativa fijada y en 1939 con la acción derivativa variable.
http://www.av8rdas.com/uploads/1/0/3/2/103277290/fullscope_manual_01a202_2.pdf



Esquema básico del control PID



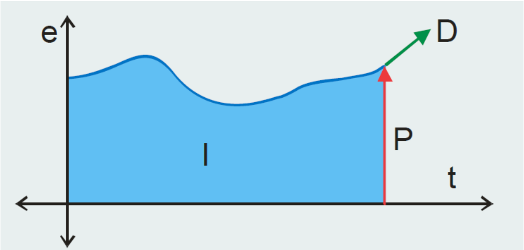
- **La acción del PID depende de una señal de error, $e(t) = r(t) - y(t)$, que mide la diferencia entre el valor deseado para la variable controlada, $r(t)$ (setpoint o referencia), y el valor medido de dicha variable, $y(t)$, produciendo una señal, $u(t)$ (variable de control), que actúa sobre el proceso.**

- Es la extensión natural del controlador ON-OFF.
- Es suficiente para muchos problemas de control.
- Más del 95% de los lazos de control utilizan PID.
- Se ha adaptado a los cambios tecnológicos, desde del controlador neumático original a las implementaciones digitales actuales.

Esquema básico del control PID

El control PID combina tres acciones:

- ***Proporcional (P)***
- ***Integral (I)***
- ***Derivativa (D)***



Controlador PID continuo en el dominio del tiempo

$$u(t) = \underbrace{\boxed{K_p e(t)}}_{\text{P}} + \underbrace{\boxed{\mathrm{K_i} \int e(t)dt}}_{\text{I}} + \underbrace{\boxed{K_d \frac{de(t)}{dt}}}_{\text{D}}$$

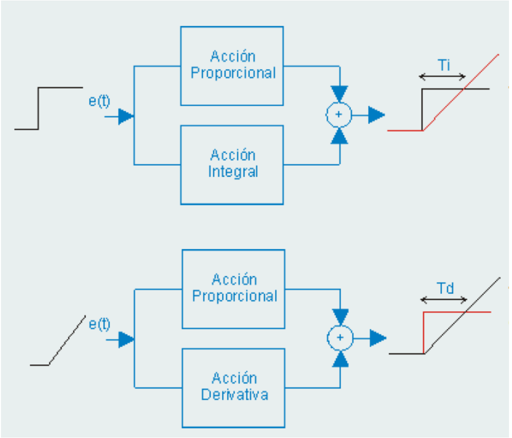
$$\mathrm{U}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_p s$$

K_p, K_i y K_d (a veces llamadas P,I y D) son constantes de ajuste (todas no negativas) que determinan el peso de cada una de las componentes del PID y deben ser determinadas para la proceso a controlar.

Controlador PID continuo

$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right] \qquad \begin{cases} K_i = \dfrac{K_p}{T_i} \\ K_d = K_p T_d \end{cases}$$

Esta representación del PID busca dar sentido físico a los coeficientes T_i y T_d



Constante de tiempo de integración: T_i
Tiempo requerido para que la acción integral iguale el valor de la acción proporcional.

K_p/T_i determina cuanto tiempo el controlador permite un error persistente (por encima o debajo del setpoint)

Constante de tiempo de integración: T_d
Tiempo requerido para que la acción derivativa iguale el valor de la acción proporcional.

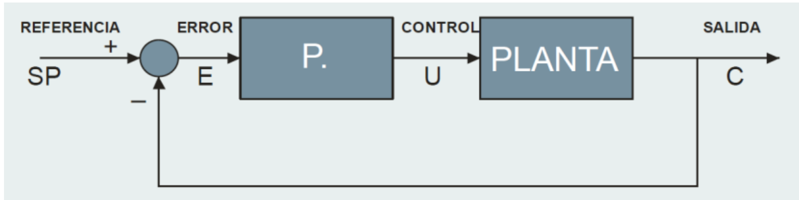
K_pT_d es el tiempo característico en el cual el controlador llevará la variable controlada al setpoint

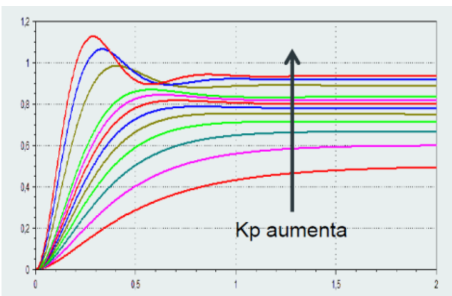
Controlador PID continuo

- El **término P** es proporcional al valor del error $e(t)$. Por ejemplo, si el error es grande y positivo, la variable de control será grande y positiva, con la ganancia K_p. Usar solo control proporcional resultará en un error entre el setpoint y el valor de salida, porque tiene que haber error para generar una respuesta proporcional correctiva.
- El **termino I** recoge la información de los valores pasados del error $e(t)$. Por ejemplo, si hay un error residual después de aplicar el término proporcional, el término integral intentará eliminarlo, añadiendo una acción proporcional al valor acumulado de error y compensando la reducción de la contribución del término proporcional.
- El **termino D** estima la tendencia del error $e(t)$, a partir de su tasa de cambio. Se le llama, a veces, control anticipativo y es efectivo reduciendo el efecto del error a partir de la tasa de cambio. Cuanto más rápido cambie $e(t)$, mayor será el amortiguamiento.

Controlador PID continuo

Controlador Proporcional (P)





Respuesta a una entrada escalón unitario

Al aumentar el valor de K_p

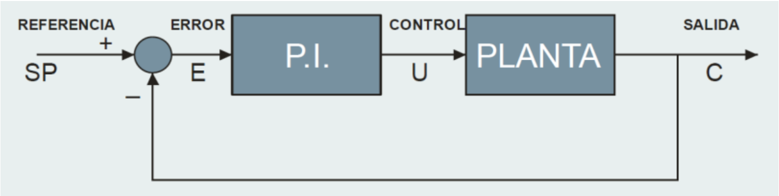
- El error en régimen permanente disminuye
- La velocidad de respuesta aumenta
- El sobrepico aumenta, pudiendo llegar a ser inestable (mantener siempre por debajo del 30%).

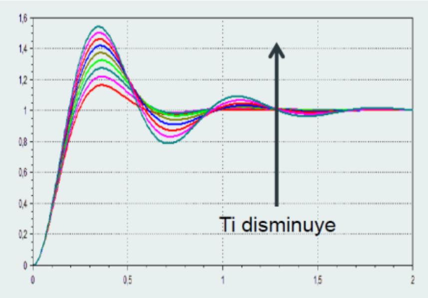
El término proporcional debe atender a la cambio "*grueso*" de la respuesta.

El **error en estado estacionario** mide la diferencia entre la salida final deseada y real. Este suele ser distinto de cero en un controlador proporcional. El error en estado estacionario es proporcional a la ganancia del proceso e inversamente proporcional a la ganancia proporcional. Este error puede ser **mitigado añadiendo un offset al setpoint y a la salida o añadiendo un término integral**.

Controlador PID continuo

Controlador Proporcional-Integral (PI)





Respuesta a una entrada escalón unitario

Al disminuir el valor de T_i (o aumentar K_i)

- El error en régimen permanente se elimina
- La estabilidad del sistema empeora
- El sobrepico aumenta , pudiendo llegar a ser inestable (mantener siempre por debajo del 30%).

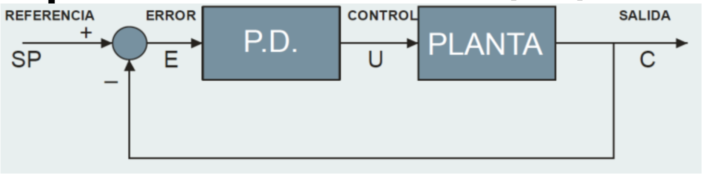
El término integral es proporcional a la magnitud del error y a la duración de este.

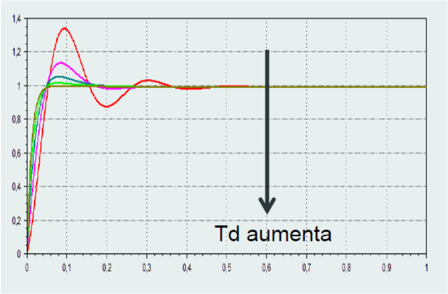
El término integral acelera el movimiento del sistema al setpoint y elimina el error residual del controlador proporcional.

Puede causar rebasamiento del setpoint, por el uso de valores pasados del error.

Controlador PID continuo

Controlador Proporcional-Diferencial (PD)





Respuesta a una entrada escalón unitario

Al aumentar el valor de T_d (o aumentar K_d)

- La estabilidad del sistema mejora.
- El sobrepico disminuye.
- La velocidad de respuesta aumenta.

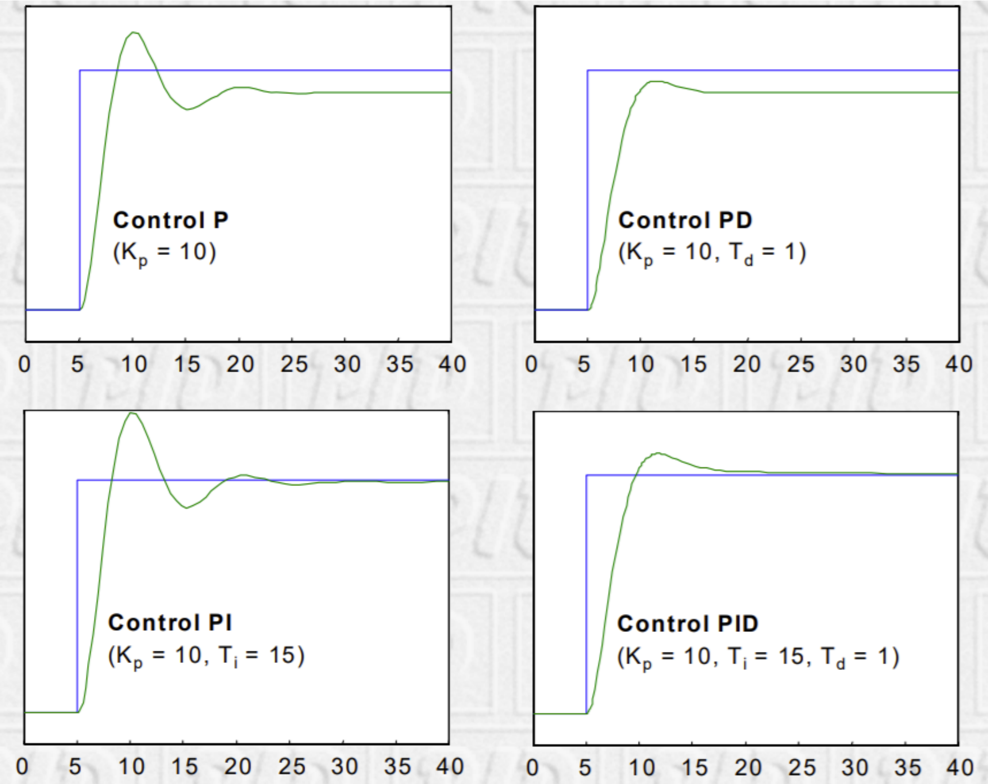
El término derivativo predice el comportamiento del sistema, por lo tanto conduce a mejores tiempos de estabilización y mayor estabilidad del sistema.

Un termino derivativo ideal es no causal (usa valores futuros de la respuesta para su acción) por lo que suele ser necesario añadir filtros pasa-baja para limitar el efecto de la ganancia de alta frecuencia y del ruido de las señales.

La acción derivativa apenas se usa en la práctica (en torno al 25% de los controladores), por su impacto en la complejidad de los controladores de aplicaciones reales.

Controlador PID continuo

Comparación de las acciones de control ante un cambio brusco en la referencia



Controlador PID continuo

El modelo matemático planteado y el bucle de control mostrado usa una **acción de control directa** para todos los términos, lo que significa que un incremento en el error conduce a un incremento positivo en la corrección de la salida.

En otros casos es necesario aplicar correcciones negativas y para esto necesitamos una **acción de control inversa**. Ejemplo: una válvula para enfriar un fluido, que, en modo a prueba de fallos, en el caso de perdida de señal, necesitamos una apertura del 100% de la válvula para una salida de la variable de control del 0%

Uso selectivo de los términos de control

Dependiendo de la aplicación, usaremos uno o dos términos para realizar un control apropiado, estableciendo las constantes de los términos no usados a cero. Serán controladores PI, PD, P o I. Los controladores PI son muy comunes en ambientes de mucho ruido (donde la componente D deja de ser relevante) y es necesario alcanzar el valor objetivo.

Controlador PID continuo

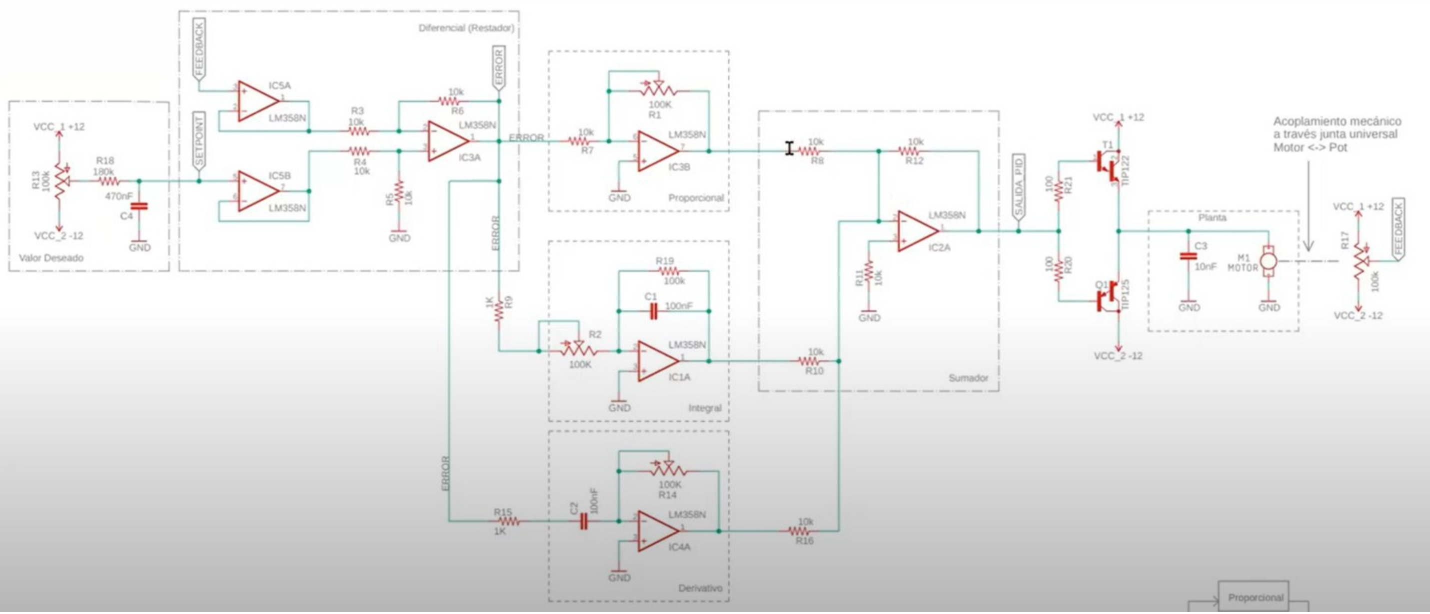
Las constantes del PID deben ser ajustadas para balancear el efecto de cada componente y lograr un control óptimo. Este ajuste será realizado en cada aplicación de control y dependerán de la respuesta global del sistema a la acción de control.

¿Qué afecta a las constantes PID?

- El diseño del lazo de control.
- La respuesta del sensor de medida.
- La respuesta del elemento último controlado (motor, electroválvula, estufa...).
- Cualquier retardo existente en las señales mismas.

Para ajustar la constantes PID, se establecen a valores típicos para la aplicación realizada. Pero a continuación, debe realizarse un proceso de refinado o sintonizado, introduciendo un cambio en el setpoint o referencia y observando la respuesta del sistema.

Implementación de un PID continuo



Ajuste o sintonizado de un PID

Sintonizar un PID es el ajuste de los **parámetros de control** (ganancia proporcional o banda proporcional, ganacia integral o reset o control flotante y ganancia derivativa o rate action), manteniendo la estabilidad del sistema, para adaptarlo a las características y requerimientos.

Métodos de sintonización

Método	Ventajas	Desventajas
Sintonización manual	No se requieren matemáticas Sistema encendido	Requiere experiencia sobre el sistema y PID Puede ser un proceso tedioso
Ziegler-Nichols	Método ampliamente probado Sistema encendido	Esfuerzo sobre el proceso. Prueba y error en algunos pasos Sintonización agresiva
Tyreus-Luyben	Método ampliamente probado Sistema encendido	Esfuerzo sobre el proceso. Prueba y error en algunos pasos Sintonización agresiva
Herramientas software	Sintonizado consistente Sistema encendido o apagado Incluye técnicas para evaluación de información compleja y simulación.	Curva de aprendizaje y entrenamiento
Cohen-Coon	Produce buenos modelos de proceso	Matemáticas Sistema apagado Solo válido para procesos de primer orden
Aström-Hägglund	Puedo se usado para autotuning. Usa amplitudes bajas para minimizar esfuerzos sobre el sistema	El proceso tiene que ser de forma inherente oscilatorio

Ajuste o sintonizado de un PID

REGLAS HEURÍSTICAS DE SINTONIZADO DE UN PID

	K_p aumenta	T_i disminuye	T_d aumenta
Estabilidad	Se reduce	Disminuye	Aumenta
Velocidad	Aumenta	Aumenta	Aumenta
Error estacionario	No eliminado	Eliminado	No eliminado
Área de error	Se reduce	Disminuye hasta cierto punto	Se reduce
Perturbación control	Aumenta bruscamente	Aumenta gradualmente	Aumenta muy bruscamente
Frecuencia lazo	No afecta hasta cierto punto	Disminuye	Aumenta

Ajuste o sintonizado de un PID

REGLAS HEURÍSTICAS DE AJUSTE DE UN PID

- **Paso 1. Acción Proporcional**
  - Tiempo integral (TI), a su máximo valor
  - Tiempo derivativo (TD), a su mínimo valor
  - Empezando con ganancia baja se va aumentando hasta obtener las características de respuesta deseadas
- **Paso 2. Acción integral**
  - Reducir el TI hasta anular el error en estado estacionario, aunque la oscilación sea excesiva
  - Disminuir ligeramente la ganancia
  - Repetir hasta obtener las características de respuesta deseadas
- **Paso 3. Acción Derivativa**
  - Mantener ganancia y tiempo integral obtenidos anteriormente
  - Aumentar el TD hasta obtener características similares pero con la respuesta más rápida
  - Aumentar ligeramente la ganancia si fuera necesario

https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller#/media/File:PID_Compensation_Animated.gif

Ajuste o sintonizado de un PID

MÉTODOS DE AJUSTE DE ZIEGLER-NICHOLS (ZN)

Ziegler y Nichols propusieron una serie de reglas para sintonizar controladores PID en base a la experiencia acumulada, la respuesta experimental de la planta y sin presuponer ningún conocimiento de esta.

Proponen dos métodos de sintonización:

- **Ziegler-Nichols a lazo abierto.**
- **Ziegler-Nichols a lazo cerrado.**

En ambos métodos el objetivo es conseguir que el valor del máximo sobreimpulso sea menor del 25% para una entrada en escalón. Esta condición puede no ser cumplida en plantas complejas, pero siempre asegura la estabilidad en lazo cerrado.

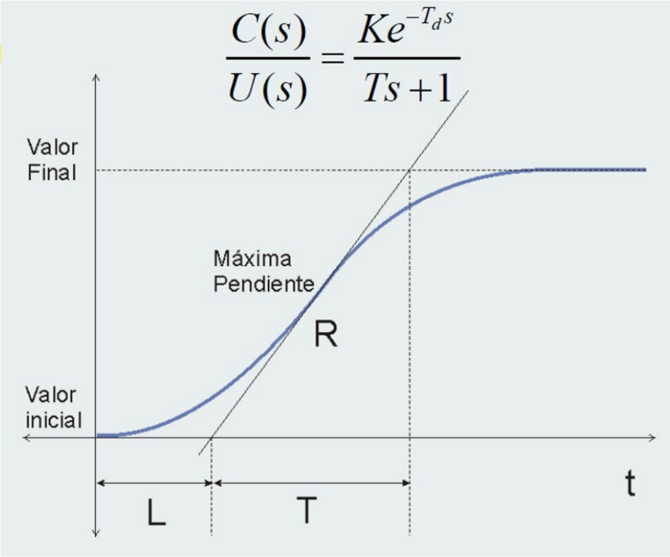
DESVENTAJAS DEL MÉTODO:

- Está diseñado para eliminar las perturbaciones rápidamente y no para seguir el setpoint.
- Tiene oscilaciones en la respuesta en lazo cerrado (máximo 25%)
- Solamente aplicable en sistemas con tiempo muerto cortos.
- Valores altos de ganancia con amortiguamientos muy bajos (término diferencial): baja robustez a cambios en la dinámica del sistema y no linealidades.
- No permite establecer objetivos requisitos en el despeño o la respuesta de control.

Ajuste o sintonizado de un PID

MÉTODOS DE SINTONIZADO DE ZIEGLER-NICHOLS A LAZO ABIERTO

Se obtiene experimentalmente la respuesta de la planta a un cambio brusco en el setpoint (entrada escalón) y, si la respuesta no tiene oscilaciones y posee un retardo en forma de "ese" (como la figura), pueden obtenerse las constantes del controlador a partir del análisis gráfico de la respuesta:

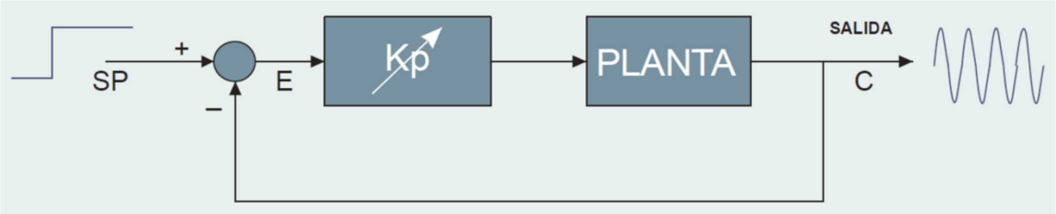


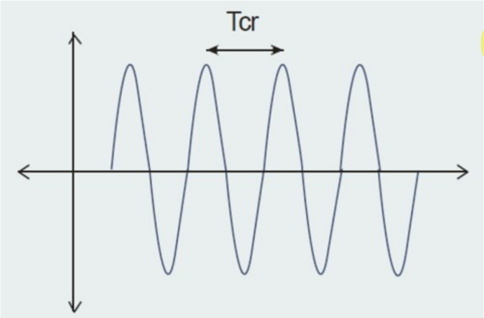
TIPO DE CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{R \cdot L}$		
PI	$\frac{0{,}9}{R \cdot L}$	$3L$	
PID	$\frac{1{,}2}{R \cdot L}$	$2L$	$0{,}5L$

Ajuste o sintonizado de un PID

MÉTODOS DE SINTONIZADO DE ZIEGLER-NICHOLS A LAZO CERRADO

Se utilizan en sistemas que pueden tener oscilaciones sostenidas. Primero se desactivan las partes integral y derivativa ($K_i = 0, K_d = 0$). Después, se sintoniza a ganancia K_p hasta que el sistema tenga oscilaciones sostenidas. Este valor de ganancia proporcional se conoce como ganancia crítica K_{cr}, que corresponde a un periodo crítico T_{cr} de la señal de salida.



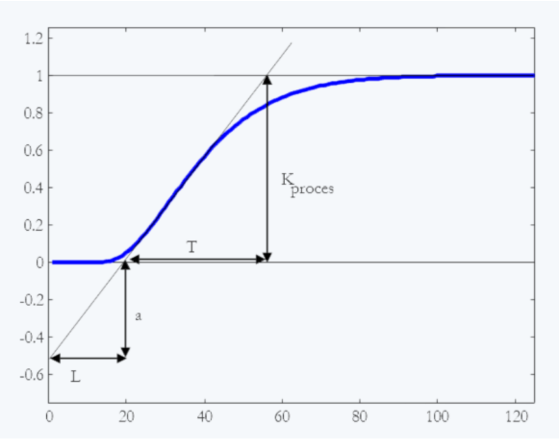


TIPO DE CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
P	$0,50 \cdot K_{cr}$		
PI	$0,45 \cdot K_{cr}$	$\frac{T_{cr}}{1,2}$	
PID	$0,60 \cdot K_{cr}$	$\frac{T_{cr}}{2}$	$\frac{T_{cr}}{8}$

Ajuste o sintonizado de un PID

MÉTODO DE SINTONIZADO DE COHEN-COON

Está basado en el método de Ziegler-Nichols, pero añade más información del proceso para mejorar la respuesta. De nuevo, los procesos se definen mediante tres parámetros: la ganancia en estado estacionario K_{proces}, el tiempo de retraso L y la constante de tiempo T. Este método mejora el rendimiento del control al usar más información sobre el proceso y mejora la respuesta en sistemas con mucho retraso en la respuesta.



TIPO DE CONTROL	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a}\left(1+\frac{0.35\tau}{1-\tau}\right)$		
PI	$\frac{0.9}{a}\left(1+\frac{0.92\tau}{1-\tau}\right)$	$\frac{3.3-3.0\tau}{1+1.2\tau}L$	
PD	$\frac{1.24}{a}\left(1+\frac{0.13\tau}{1-\tau}\right)$		$\frac{0.27-0.36\tau}{1-0.87\tau}L$
PID	$\frac{1.35}{a}\left(1+\frac{0.18\tau}{1-\tau}\right)$	$\frac{2.5-2.0\tau}{1-0.39\tau}L$	$\frac{0.37-0.37\tau}{1-0.81\tau}L$
$\tau=\frac{L}{L+T}$ $\quad a=K_{proces}\frac{L}{T}$			

Ajuste o sintonizado de un PID

MÉTODO DE SINTONIZADO KAPPA-TAU

Evolución del método de Ziegler-Nichols, está diseñado para limitar la ganancia proporcional y dar robustez a sistemas con gran tiempo muerto.

	Controlador lento PI			Controlador rápido PI			Controlador lento PID			Controlador rápido PID		
	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
$f(\tau) = R \times K_p$	0.29	-2.7	3.7	0.78	-4.1	5.7	1.4	3.8	-8.4	2.0	8.4	-9.6
$f(\tau) = \frac{T_i}{L}$	8.9	-6.6	3.0	8.9	-6.6	3.0	7.3	5.2	-2.5	9.8	3.2	-1.5
$f(\tau) = \frac{T_d}{L}$	0	0	0	0	0	0	0.89	-0.37	-4.1	-0.93	0.86	-0.44
$f(\tau) = R$	0.81	0.73	1.9	0.44	0.78	-0.45	0.4	1.8	2.8	0.22	0.65	0.051
$f(\tau) = a_0 \times e^{(a_1\tau + a_2\tau^2)}$												

Ventajas: Provee una respuesta menos oscilante y es más resistente a perturbaciones (sin producir sobrepaso de la señal) y al cambio en el setpoint. Permite escoger entre respuesta más rápida o más lenta.

Desventajas: Al igual que ZN no permite establecer objetivos de control y requerimientos sobre el lazo cerrado.

Ajuste o sintonizado de un PID

MÉTODO DE SINTONIZADO LAMBDA

El método de sintonizado Lambda emplea un parámetro λ para especificar como de rápido responde el sistema. Se asume que la respuesta es de primer orden con retraso.

Ventajas:

- Permite establecer como de rápido responde el controlador.
- Adecuado para sistemas con gran retraso o tiempo muerto.
- Robustez en sistemas dinámicos y sistemas no lineales
- Respuesta sin sobrepaso.

Lambda	K_c	T_i
PI	$\frac{T}{K_p(\lambda + L)}$	T
$\lambda = 3 \times max(L, T)$ (estable) Reducir λ para respuesta más rápida		

Desventajas:

- Sensible a perturbaciones, especialmente en sistemas lentos.
- No permite establecer objetivos de control
- Solo válido para control PI. No hay termino diferencial.

Ajuste o sintonizado de un PID

MÉTODO DE SINTONIZADO DE TYREUS-LUYBEN

Basado en ZN de lazo cerrado: Se obtienen los parámetros K_{cr}y T_{cr} siguiendo el procedimiento explicado anteriormente. A continuación se obtienen los parámetros del controlador según lo indicado en la tabla

Tiene las mismas ventajas y desventajas que el método de Ziegler-Nichols de lazo cerrado y además solo define los parámetros para controladores PI y PID

TIPO DE CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
PI	$\frac{K_{cr}}{3.2}$	$2.2 \times T_{cr}$	
PID	$\frac{K_{cr}}{2.2}$	$2.2 \times T_{cr}$	$\frac{T_{cr}}{6.3}$

Ajuste o sintonizado de un PID

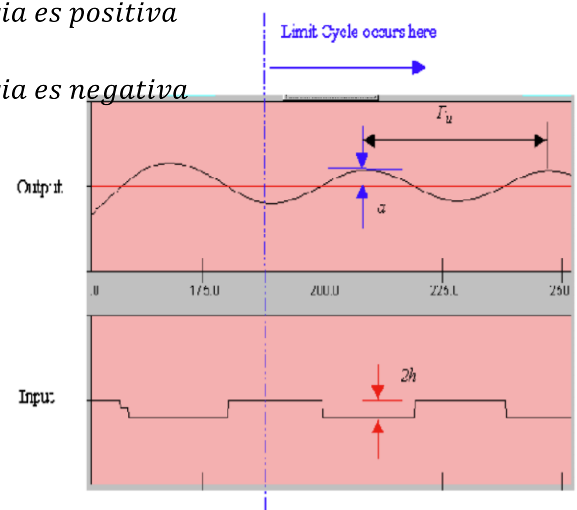
MÉTODO DE SINTONIZADO AUTOTUNE (ASTRÖM-HÄGGLUND)

- PASO 1: Dejar evolucionar el proceso hasta el estado estacionario.
- PASO 2: Mover el setpoint al valor del estado estacionaria alcanzado.
- PASO 3: Implementar un controlador on-off (relé) que:

$$u = \begin{cases} u_0 + h \; si \; e \geq 0 \\ u_0 - h \; si \; e < 0 \end{cases} \quad si \; la \; ganancia \; es \; positiva$$

$$u = \begin{cases} u_0 - h \; si \; e \geq 0 \\ u_0 + h \; si \; e < 0 \end{cases} \quad si \; la \; ganancia \; es \; negativa$$

- PASO 4: Permitir al proceso estabilizarse en una oscilación periódica sostenida.



- PASO 5: Extraer el período estable T_u de la gráfica y evaluar la ganancia estable K_u usando la expresión:

$$K_u = \frac{4h}{\pi a}$$

- PASO 6: Emplear Ziegler-Nichols (lazo cerrado) o Tyreus-Luyben para obtener los parámentros

Limitaciones del controlador PID

- Los PID presentan malas características cuando la ganancia del lazo debe ser reducida para evitar sobrepaso, oscilaciones o auto-oscilaciones (movimiento de lazo).
- También puede tener dificultades para controlar sistemas con componentes no lineales o existen cambios inherentes al comportamiento del sistema. Ejemplo: válvulas con respuesta no lineal cuya sensibilidad cambia con el rango de apertura.
- En sistemas asimétricos, cuya respuesta depende del sentido de cambio de la variable, por ejemplo sistemas AC con solo elementos calentadores, donde para corregir sobrepasos debemos esperar a que el sistema se enfríe “lentamente”.
- Ruido en el término derivativo: El término derivativo amplifica el ruido de alta frecuencia y esto puede causar cambios bruscos en la señal de salida. En caso de usar término derivativo se deben emplear filtros pasa-baja para eliminar esas componentes de ruido. O no usar el término derivativo si no hay perdida considerable en el control del sistema.

Modificaciones del controlador PID

WINDUP

Uno de los problemas del los controladores PID es el “windup” del término integral cuando se produce un cambio significativo en el setpoint. En esta situación el término integral puede acumular un error mucho mayor que el máximo de la variable de control, produciendo sobreoscilaciones hasta que ese error acumulado desaparece. Para atenuar este problema:

- Deshabilitar el término integral hasta que la variable controlada alcance una zona controlable.
- Limitar los valores de error que el término integral puede acumular.
- Reiniciar el término integral para acotar la salida del controlador en márgenes adecuados.

LIMITACIÓN DEL SOBREPASO ANTE PERTURBACIONES CONOCIDAS

Esta modificación consisten en la desactivación, durante un tiempo determinado, del término integral cuando se producen perturbaciones controladas para limitar las sobreoscilaciones producidas. Por ejemplo: puerta del horno abierta.

Modificaciones del controlador PID

CONTROLADOR PI

Eliminar el término derivativo hace a los sistemas más estables en el estado estacionario cuando los datos de entrada son ruidosos. Aunque como contrapartida, un sistema sin término derivativo es menos responsivo en situaciones ausentes de ruido y más lento en su respuesta ante perturbaciones y cambios rápidos del setpoint que un PID bien sintonizado.

DEADBAND (CONTROL DE BANDA MUERTA)

Sobre todo en sistemas mecánicos que se degradan tanto físicamente como en términos del control, sobre todo debido a adherencias (stiction) y holguras (backslash). Lo rápido que un sistema se degrada es principalmente debido a número de veces en que ese sistema se hace cambiar de estado.

Cuando la degradación es relevante el lazo del PID puede tener una deadband para reducir la frecuencia de activación del cambio, esto es el sistema control mantiene su salida si el cambio en la variable de salida es pequeño (en el rango que se defina).

Modificaciones del controlador PID

ESCALON EN EL CAMBIO DEL SETPOINT

Cambios bruscos en el setpoint pueden introducir inestabilidades en los términos I y D del PID. Para evitar esto se usan la siguientes estrategias:

- **Rampas de setpoint**: El nuevo valor de referencia se alcanza mediante una rampa que hace cambiar este de forma progresiva del viejo al nuevo valor.
- **Derivada de la variable de salida**: En este caso el PID analiza la derivada de la variable de salida en lugar de la derivada del error. Esta cantidad siempre es continua por lo tanto no produce esas inestabilidades de alta frecuencia.
- **Ponderación del setpoint**: Se añaden factores ajustables al setpoint en el calculo de la función de error para los términos proporcional y derivativo. Estos nuevos factores pueden sintonizados para mejorar la respuesta del controlador. El error en el término integral ha de ser completo para evitar errores en estado estacionario.

Modificaciones del controlador PID

FEEDFORWARD (LAZO ABIERTO)

Esta modificación consiste en combinar control feedback (lazo cerrado, PID) y control feedforward (lazo abierto). Añadir elementos de control que recojan conocimiento del sistema (inercia, aceleración, perdidas…) pueden mejor la respuesta del sistema.

Se puede usar un control de lazo abierto para controlar el sistema y un PID para compensar o eliminar cualquier error restante entre el setpoint y el sistema de lazo abierto.

Ejemplo:

Para acelerar una carga mecánica se requiere fuerza desde un actuador (motor). Si se usa un PID para controlar la velocidad de al carga y comandar al fuerza aplicada por el actuador, entonces es beneficioso emplear la capacidad de aceleración instantánea, escalarla apropiadamente y añadirla a la salida del PID.

Esto significa que cuando una carga es acelerada (o decelerada) una parte de la fuerza vendrá dada independientemente del valor de realimentación y el PID corregirá ese valor para reducir la diferencia entre el setpoint y el valor de realimentación, consiguiendo así una respuesta más rápida del sistema.

Modificaciones del controlador PID

OPERACIÓN BUMPLESS (SUAVE)

Esta modificación consiste en hacer que el PID recalcula el termino integral para mantener la salida del proceso consistente ante cambios de parámetros del sistema.

OTRAS MEJORAS

- Planificación de ganacias (gain scheduling)
- Lógica borrosa (fuzzy logic)
- Computational verb logic
- ...

Modificaciones del controlador PID

OPERACIÓN BUMPLESS (SUAVE)

Esta modificación consiste en hacer que el PID recalcula el termino integral para mantener la salida del proceso consistente ante cambios de parámetros del sistema.

OTRAS MEJORAS

- Planificación de ganacias (gain scheduling)
- Lógica borrosa (fuzzy logic)
- Computational verb logic
- ...

Compensación basada en el lugar de las raíces

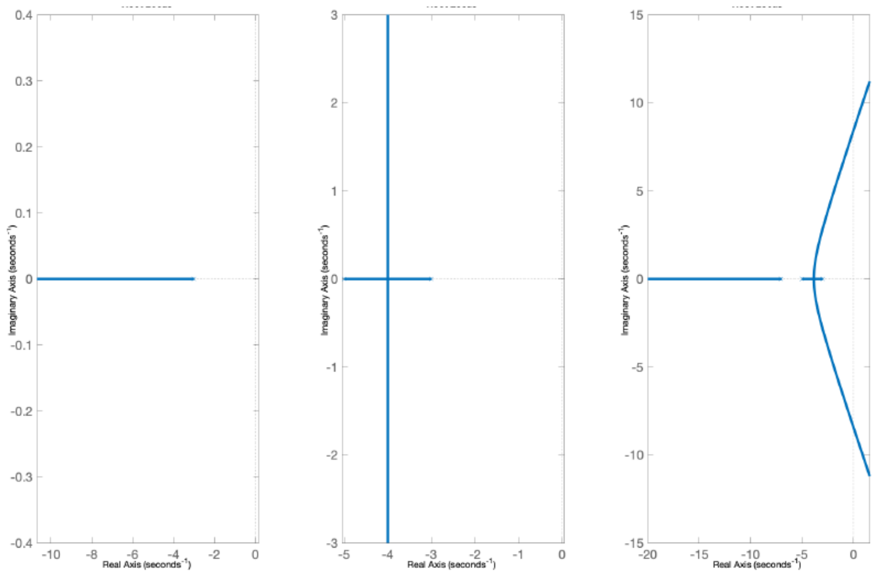
DE FUNDAMENTOS DE AUTOMÁTICA (Tema 3):

3.4 Consideraciones de diseño de parámetros para el lugar de las raíces

- Efecto adición polo:

Desplazamiento hacia la derecha

Menos estable



1 polo   2 polos   3 polos

Compensación basada en el lugar de las raíces

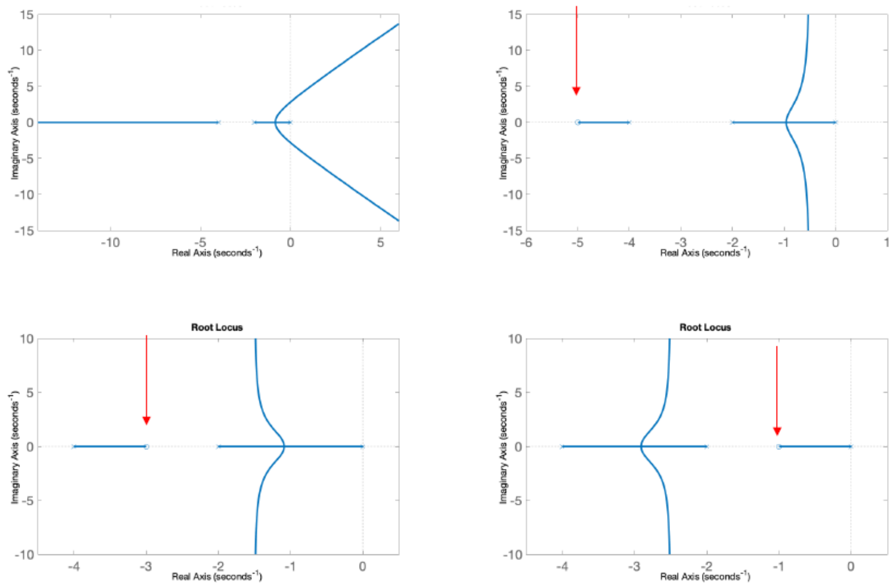
DE FUNDAMENTOS DE AUTOMÁTICA (Tema 3): :

3.4 Consideraciones de diseño de parámetros para el lugar de las raíces

- Efecto adición cero:

Desplazamiento hacia la izquierda

Más estable



Compensación basada en el lugar de las raíces

DE FUNDAMENTOS DE AUTOMÁTICA (Tema 3): :

3.4 Consideraciones de diseño de parámetros para el lugar de las raíces

- Sistema de segundo orden con un par de polos dominantes complejos:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

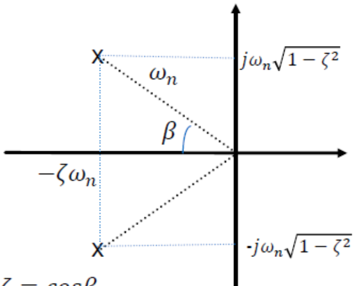
$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

Sobreelongación: $M_p = e^{-\pi\left({\sigma}/{\omega_d}\right)} = e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$

Tiempo de pico: $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$

Tiempo de asentamiento: $t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ $\quad t_s = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}$

Tiempo de subida: $t_r = \dfrac{1}{\omega_d} tg^{-1}\left(\dfrac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}$



$\zeta = cos\beta$

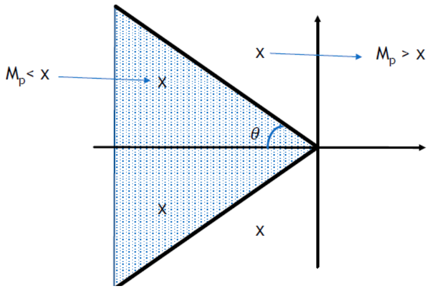
https://es.mathworks.com/help/control/ref/lti.stepinfo.html

Compensación basada en el lugar de las raíces

DE FUNDAMENTOS DE AUTOMÁTICA (Tema 3):

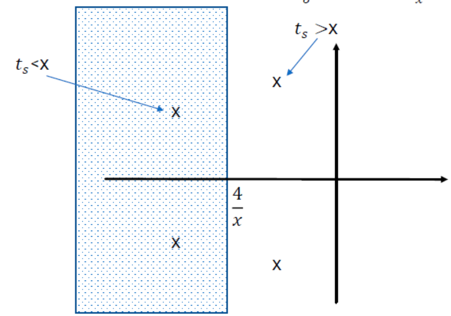
- SOBREELONGACIÓN:

Sobreelongación menor que x $\Longrightarrow M_p = e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = e^{-\pi \operatorname{tg}\theta} < x \Longrightarrow \beta < \theta$



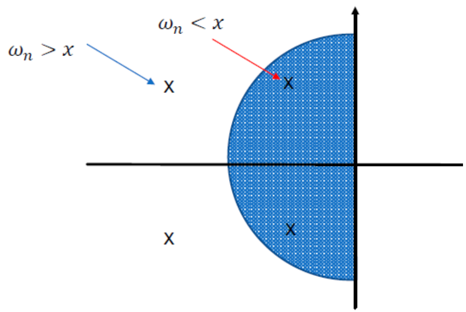
- TIEMPO DE ASENTAMIENTO (t_s):

Tiempo de asentamiento menor que x $\Longrightarrow t_s(2\%) = \frac{4}{\sigma} < x \Longrightarrow \sigma > \frac{4}{x}$



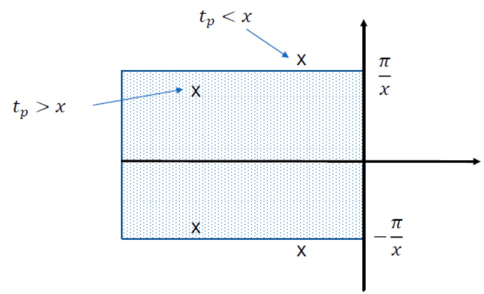
- Frecuencia natural no amortiguada

ω_n mayor que x $\Longrightarrow \omega_n > x$



- Tiempo de pico (t_p)

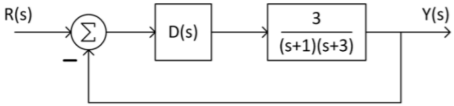
Tiempo de pico mayor que un valor x $\Longrightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} > x \Longrightarrow \omega_d < \frac{\pi}{x}$



Compensación basada en el lugar de las raíces

INTRODUCCIÓN

Considerando el sistema de lazo cerrado:



$$T(s) = \frac{3K}{s^2+4s+3+3K}$$

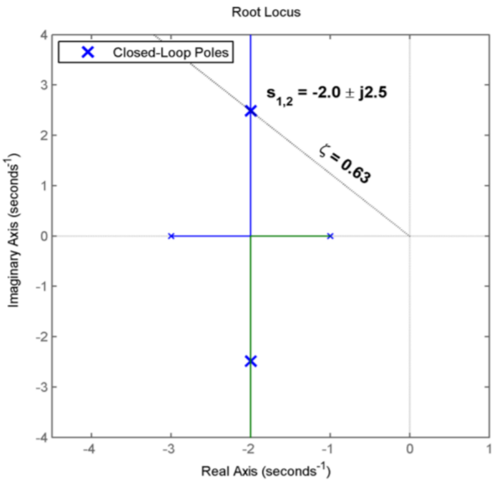
Asumiendo un controlador proporcional $D(s) = K$

Si diseñamos para un 8% de sobrepasamiento (OS):
Obtenemos que el valor del factor de amortiguamiento de $\xi = 0.63$

$$\xi = -\frac{\ln(0.08)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(0.08)}} = 0.63$$

Entonces los polos deseados son:

$s_{1,2} = -2 \pm j2.5$ y entonces $\boldsymbol{K = 2.4}$



Nota: Cálculo de K a partir de los polos:

$$1 + K \times \frac{3}{(s+1)(s+3)} = 0 \ \rightarrow\ (s+1)(s+3) + K \times 3 = 0 \ \rightarrow\ K = -\frac{(s+1)(s+3)}{3} \ \rightarrow$$

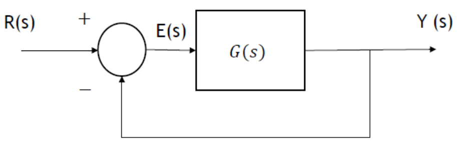
$$K = -\frac{(-2+j2.5+1)(-2+j2.5+3)}{3} = -\frac{(-1+j2.5)(1+j2.5)}{3} = \frac{1+2.5^2}{3} = 2.4$$

Compensación basada en el lugar de las raíces

INTRODUCCIÓN

Entonces el sobrepasamiento es el requerido (8%), pero vamos a evaluar el error en estado estacionario:

A partir de la **constante de posición** $\boldsymbol{K_p = \lim_{s\to 0} G(s)}$**,** siendo $G(s)$ la función de transferencia directa, el **error en estado estacionario** en un sistema en lazo cerrado, para una **entrada escalón**, viene dado por $\boldsymbol{e_{ss}^{step} = \frac{1}{1+K_p}}$. Entonces:



$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3K}{(s+1)(s+3)} = K \ \to K_p = 2.4$$

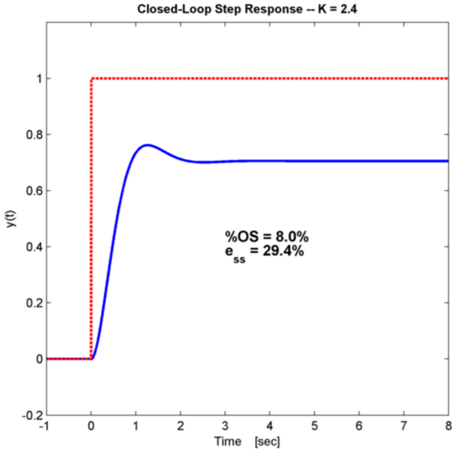
Y el error en estado estacionario

$$e_{ss}^{step} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+2.4} = 0.294 \ \to \mathbf{30\%}$$

Nota: Error en estado estacionario (Fund. Automática – Tema 2)

$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$, teorema del valor final

$$e_{ss}^{step} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K_p}$$



Compensación basada en el lugar de las raíces

INTRODUCCIÓN

Ahora vamos a reducir el error en estado estacionario al 2%

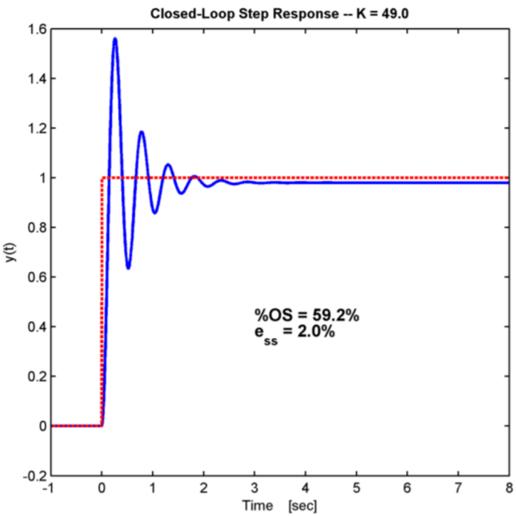
A partir de la expresión del error en estado estacionario podemos obtener el valor de la ganancia:

$$e_{ss}^{step} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+K} = 0.02 \;\rightarrow K = 49$$

Si analizamos la respuesta vemos que está degradada:

OS = 59,2%

Como conclusión, podemos establecer el error estacionario o el sobrepasamiento vía el ajuste de la ganancia, pero no ambos de forma simultanea.



Ejercicio: Obtención del OS a partir de K:

$$1 + K \times \frac{3}{(s+1)(s+3)} = 0 \;\rightarrow\; (s+1)(s+3) + 49 \times 3 = 0 \rightarrow s^2 + 4s + 150 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm j12.08$$

Las raíces están en el lugar de las raíces del sistema y $\mathrm{tg}(\theta) = \mathrm{tg}\left(\frac{12.08}{2}\right) \rightarrow M_p = e^{-\frac{\pi}{\mathrm{tg}(\theta)}} = e^{-\pi\frac{2}{12.08}} = \mathbf{0.59}$

Compensación basada en el lugar de las raíces

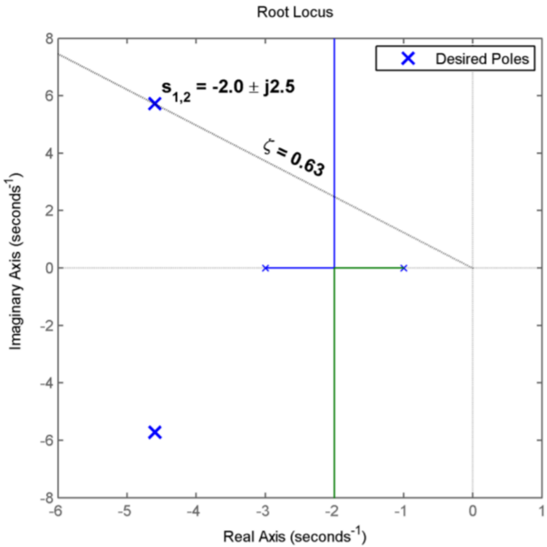
INTRODUCCIÓN

Supongamos ahora que necesitamos un $OS = 8\%$ (sobrepaso), un $t_s \approx 1\ seg$ (tiempo de asentamiento), entonces necesitaremos un factor de amortiguamiento $\xi = 0.63$ y una frecuencia natural $\omega_n = 4.7$

Los polos necesarios para esta respuesta serían $-2.96\ \pm j3.65$, los cuales no son accesibles en el lugar de las raíces de un sistema en lazo cerrado con un compensador proporcional.

Tendremos que modificar el lugar de las raíces añadiendo polos y ceros, es decir añadiendo nuevos elementos dinámicos al controlador:

Definiremos **un compensador**



Compensación basada en el lugar de las raíces

INTRODUCCIÓN

En conclusión a partir de la técnica del lugar de las raíces, podemos diseñar compensadores que hagan lo siguiente:

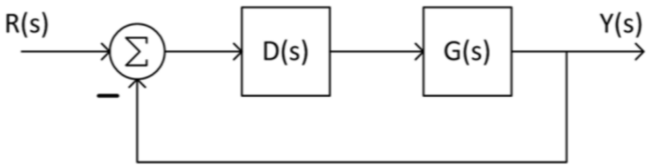
- **Para mejorar el error en estado estacionario:**
  Compensador proporcional-integral (PI)
  Compensador en retraso
- **Para mejorar la respuesta dinámica:**
  Compensador proporcional derivativo (PD)
  Compensador en adelanto
- **Para mejorar ambos, la respuesta dinámica y el error en estado estacionario:**
  Compensador PID
  Compensadore en adelanto y retraso

Compensación basada en el lugar de las raíces

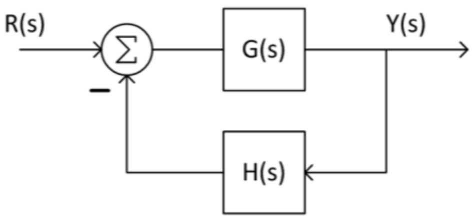
INTRODUCCIÓN

Dos configuraciones básicas:

- **Compensación en cascada:**



- **Compensación en realimentación:**



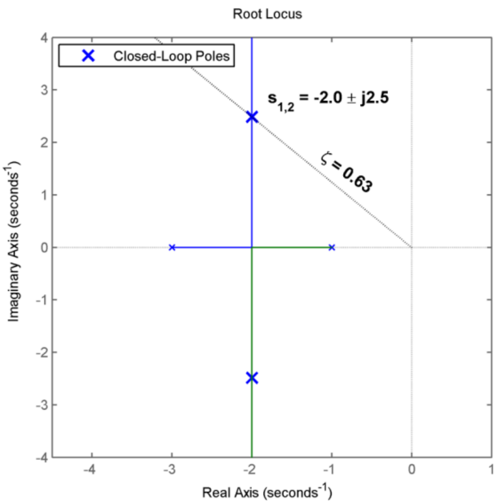
- Nos centraremos en la **compensación en cascada.**

Compensación basada en el lugar de las raíces

MEJORA DEL ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO

Se mejora el error en estado estacionario añadiendo un polo en el origen.

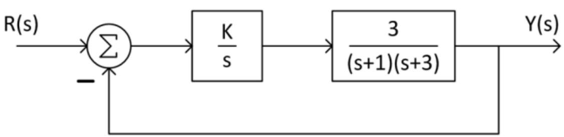
- Por ejemplo: añadiendo un elemento integrador.



Consideremos el ejemplo anterior:

- Mantenemos en un 8% la sobreelongación y la localización de los polos del sistema.
- Queremos conseguir un error en estado estacionario del 2%.

Entonces empleamos un elemento integrador como sistema de control:



Compensación basada en el lugar de las raíces

MEJORA DEL ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO – INTEGRADOR – LGDR:

¿Como afecta el nuevo polo al lugar de las raíces?

Ecuación característica, P(s) del sistema en lazo cerrado con polos y ceros:

$$1 + K\frac{3}{s(s+1)(s+3)} = 0$$

Tenemos entonces $(n - m) = 3$ asíntotas a ceros en el ∞

- Con ángulos $\phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \times 180º$ con $q = 0,1,2, \dots (n - m - 1)$ $\rightarrow \phi_A = 60°, 180°, 300°$
- Y centroide $\sigma_A = \frac{\sum polos\ de\ P(s) - \sum ceros\ de\ P(s)}{n - m} = \frac{-3-1+0}{3} = -1.33$

El lugar de las raíces cruzan el eje imaginario ($s = j\omega$):

- $3k + s(s+1)(s+3) = 0 \rightarrow s^3 + 4s^2 + 3s + 3K = 0$
- De Routh-Hurwithz: $K = 4$, con los puntos de corte del eje imaginario: 1.7i y -1.7i

Los puntos de ruptura: $\frac{dK}{ds} = \frac{dp(s)}{ds} = 0 = 3s^2 + 8s + 3 \rightarrow -2.2\ y\ \mathbf{-0.45}$

Compensación basada en el lugar de las raíces

MEJORA DEL ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO – INTEGRADOR – LGDR:

Los polos buscados ahora no están en el LGDR.

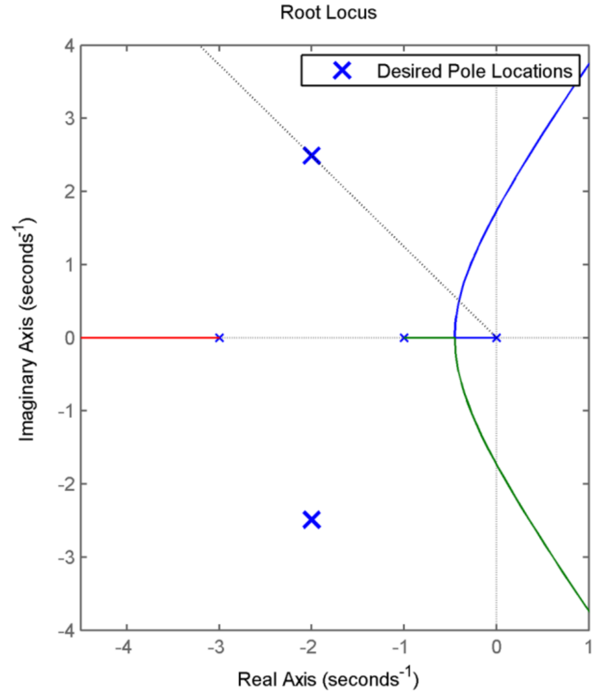
Además el LGDR cruza el eje imaginario: El elemento integrador introduce inestabilidad en el lazo cerrado.

¿Cómo podemos modificar la función de control para volver a tener los polos buscados en el LGDR?:

- Añadir un cero en el origen:
  Pero cancelará el polo en el origen.
- ¿Añadir un **cero muy cerca del origen**?
  $\boldsymbol{z_c = -0.1}$ → Nueva función de control:

$$D(s) = K\frac{(s+}{s}$$

Analicemos el nuevo LGDR!



Compensación basada en el lugar de las raíces

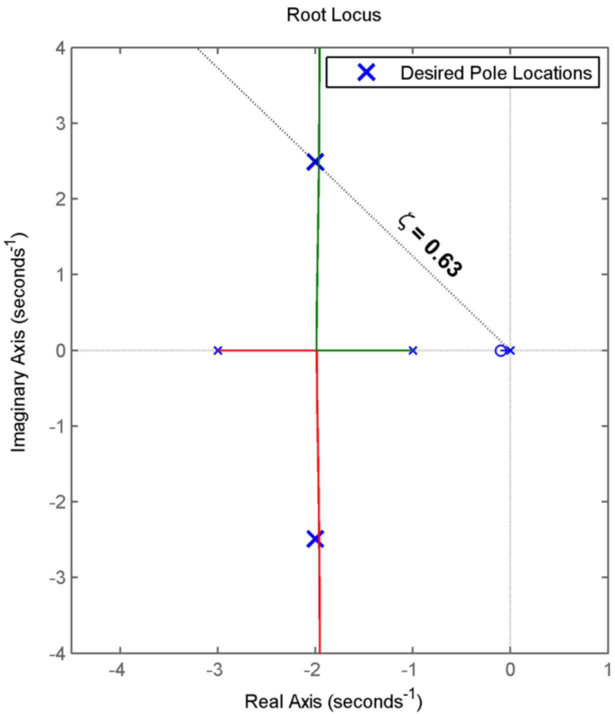
MEJORA DEL ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO – INTEGRADOR – LGDR:

Ahora solo hay dos asíntotas a C^{∞}

- Ángulos: $\theta_a = 90°, 270°$
- Centroide: $\sigma_a = -1.95$
- Punto de ruptura: $s = -1.99$

En lazo cerrado tendremos dos polos:

- $s_{1,2} = -1.96 \pm j2.44$
- Factor de amortiguamiento: $\xi = 0.63$
- Ganancia: $K = 2.37$



Los polos buscados no están en el lugar de las raíces pero muy cerca.

Analicemos la respuesta temporal de este nuevo sistema de lazo cerrado!

Compensación basada en el lugar de las raíces

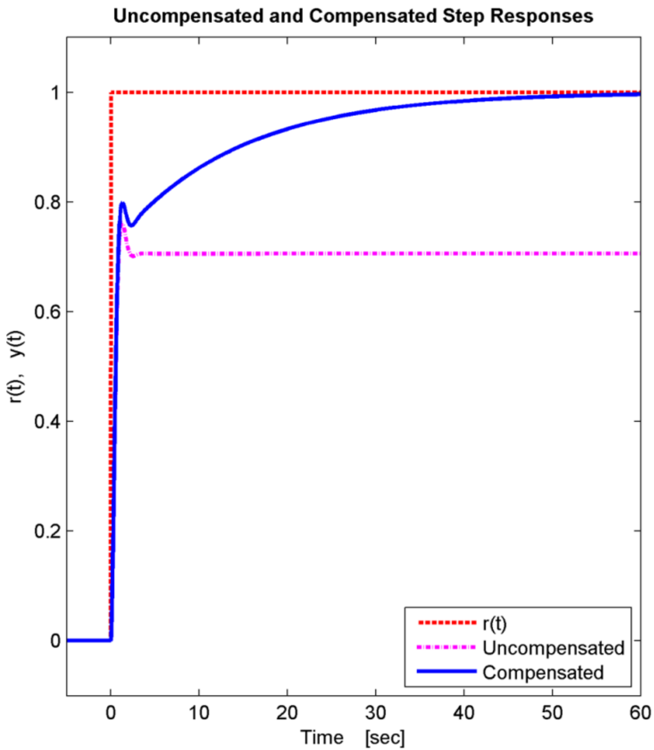
MEJORA DEL ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO – INTEGRADOR – LGDR:

El transitorio inicial permanece sin cambios

- El par de polo y cero en el origen casi se cancelan.
- Los polos de 2º orden están casi en el mismo lugar.

En error en estado estacionario desaparece:

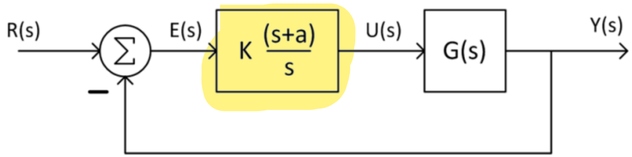
- Transitorio muy lento
- El error se integra hasta desaparecer
- Polos en $s = 0.07,\ -1.96 \pm j2.44$
- Ceros en $s = 0.01$.



Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL

Compensador diseñado antes empleando un integrador ideal o un **compensador proporcional integral (PI)**

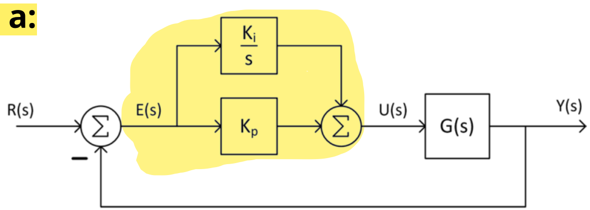


La señal de control de la planta $U(s)$, tiene dos componentes:

- Una proporcional al error
- Una proporcional a la integral del error

$$U(s) = E(s)\left[K\frac{s+a}{s}\right] = KE(s) + \frac{Ka}{s}E(s)$$

Esto es equivalente a:



Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL

Un **compensador proporcional integral (PI)** añade un polo en el origen y un cero muy cerca de este último polo.

$$D(s) = K\frac{s+a}{s} = K_p + \frac{K_i}{s}$$

El polo en el origen mejora el error en estado estacionario.

El cero cerca del origen casi cancela el polo añadido manteniendo la respuesta transitoria casi sin cambios.

Si el cero añadido se acerca al origen:

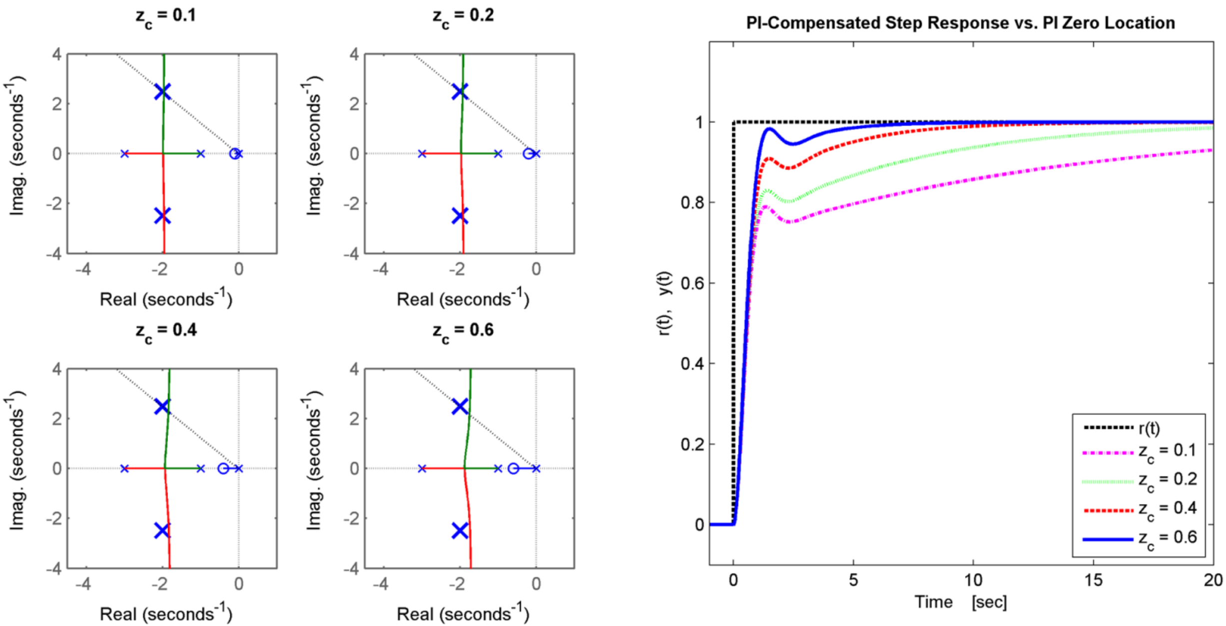
- Los polos en lazo cerrado apenas cambian respecto de los del sistema sin compensar.
- La ganancia integral K_i es muy pequeña.
- El sistema es muy lento para eliminar el error en estado estaionario.

Si el cero añadido se aleja del origen:

- Los polos en lazo cerrado se alejan del los del sistema sin compensar.
- Aumenta la ganancia integral: Aumenta la velocidad de respuesta.
- El error en estado estacionario desaparece más rápido.

Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL - VARIACIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

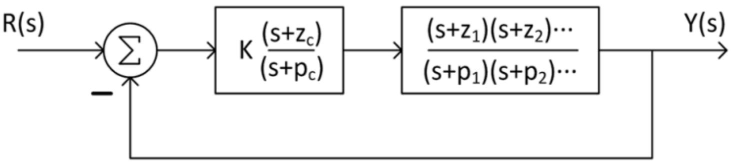


Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE RETRASO

Un compensador proporcional integral (PI) requiere un integrador ideal.

- Circuitería de control con elementos activos (amplificadores operacionales)
- Susceptible de saturación (*windup*).



Alternativa: **Compensador de retraso**

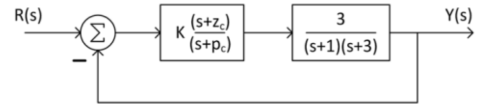
- Se añade un polo cerca del origen, **NO en el origen**
- Implementación realizable con elementos pasivos (resistencia y condensadores).
- Igual que el compensador PI, emplea un par cero-polo próximos y la respuesta transitoria apenas cambia. El error en estado estacionario mejora pero no se elimina.

La constante de posición compensada cambia a $K_{pc} = K_{pu}\frac{z_c}{p_c}$, entonces, para disminuir el error en estado estacionario: El polo del compensador de retraso está más cerca del origen que el cero $z_c > p_c$

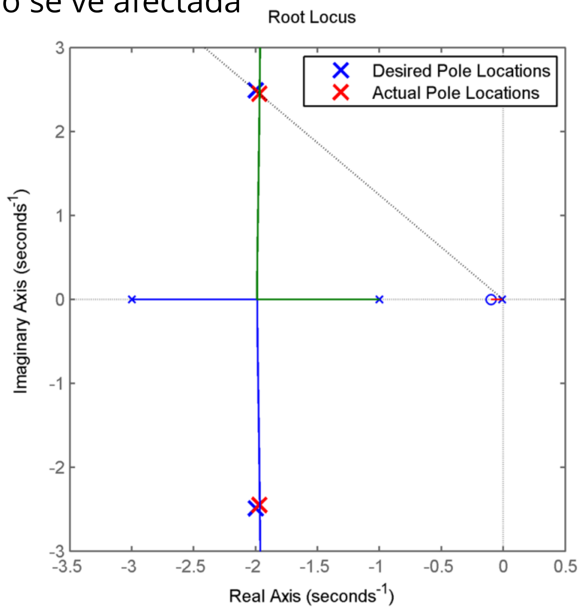
Para mejorar el error en estado estacionario hacer $z_c \gg p_c$ pero para evitar afectar a la respuesta transitoria debemos mantener $z_c \approx p_c$. Si los valores de z_c y p_c son pequeños se cumplen ambas condiciones.

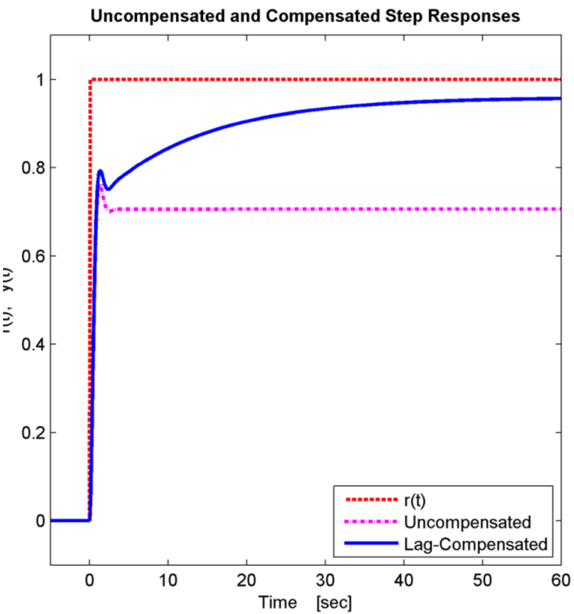
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE RETRASO - EJEMPLO



- Polo casi cero: $p_c = 0.01$
- Queremos una mejora de 10x K_p $z_c = 10p_c = 0.1$
- El error en estado estacionario mejora en un factor 10 y respuesta transitoria no se ve afectada

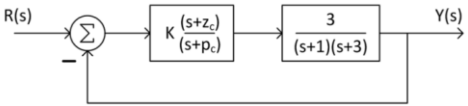


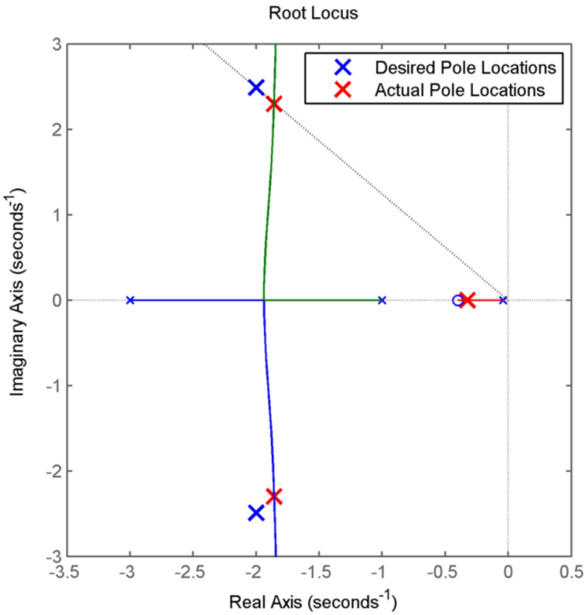


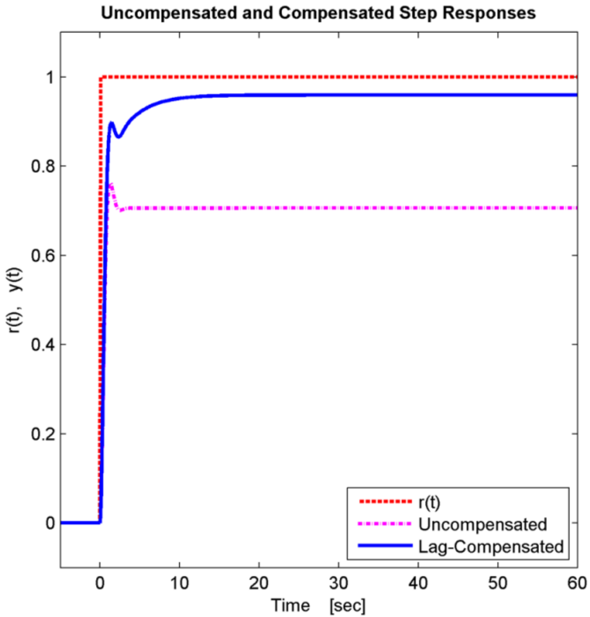
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE RETRASO - EJEMPLO

- Ahora: $z_c = 0.4$ y $p_c = 0.04$
- Mayor velocidad de respuesta

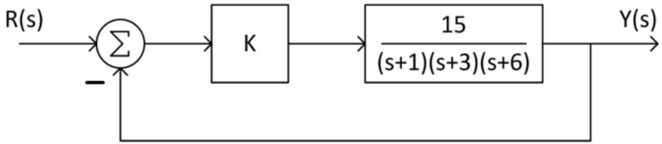


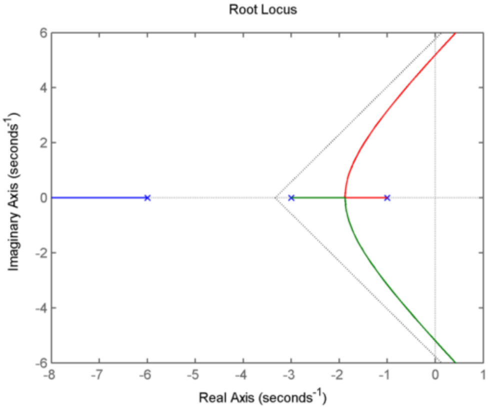




Compensación basada en el lugar de las raíces

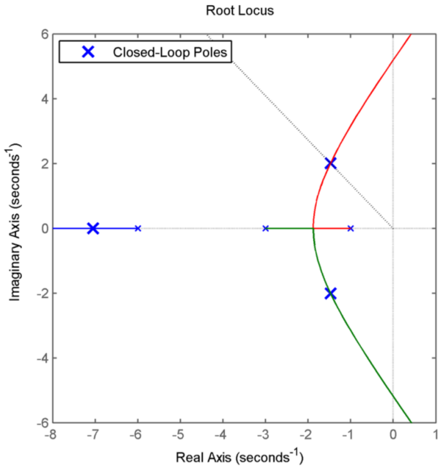
MEJORA DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

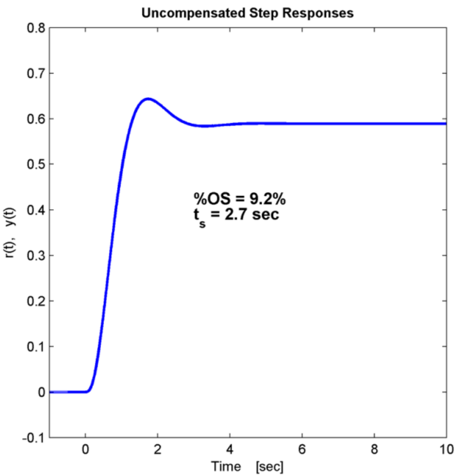




Lugar de las raíces:

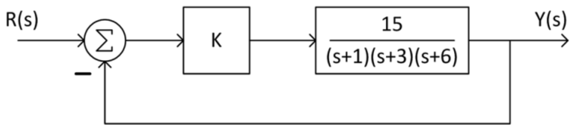
- Asíntotas: 60º, 180º y 300º. PR: $s = -1.89$. Inestable
- Con un controlador proporcional con $K = 1.72$





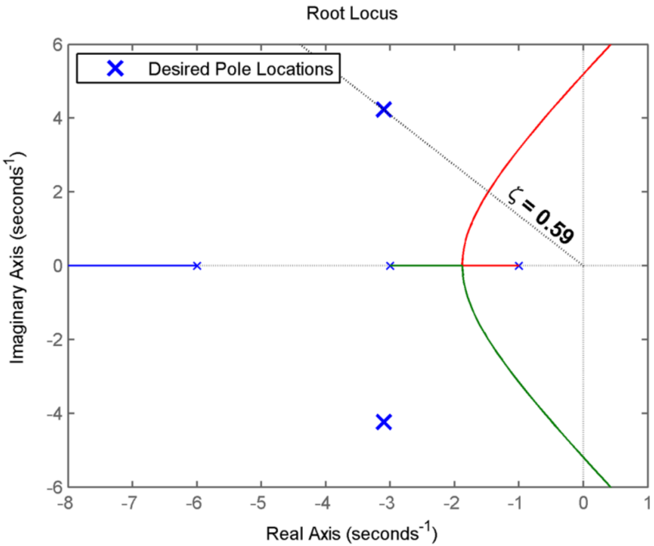
Compensación basada en el lugar de las raíces

MEJORA DE LA RESPUESTA TRANSITORIA



Ahora, buscamos disminuir el tiempo de establecimiento a $t_s = 1.5\ s$ manteniendo el nivel de sobrepasamiento ($\xi = 0.59$), entonces los polos buscados son $s_{1,2} = -3.1 \pm j4.2$

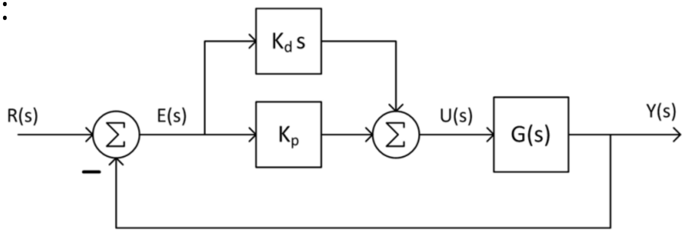
- No están en el lugar de las raíces del sistema.
- Hay que añadir compensación
- **Compensación derivativa**



Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR PROPORCIONAL-DERIVATIVO

Para mejorar la respuesta transitoria se puede añadir la derivada del error a la señal de control de la planta:



Esto es la compensación **derivativa ideal o proporcional derivativa (PD).**

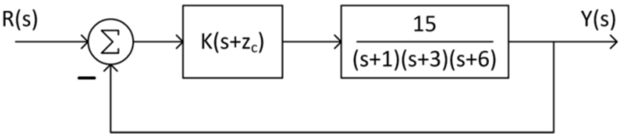
$$U(s) = E(s)\left(K_p + K_d s\right) = K(s + z_c)E(s) \qquad \rightarrow \qquad D(s) = K(s + z_c)$$

Entonces el compensador derivativo añade un cero en $s = -z_c$:

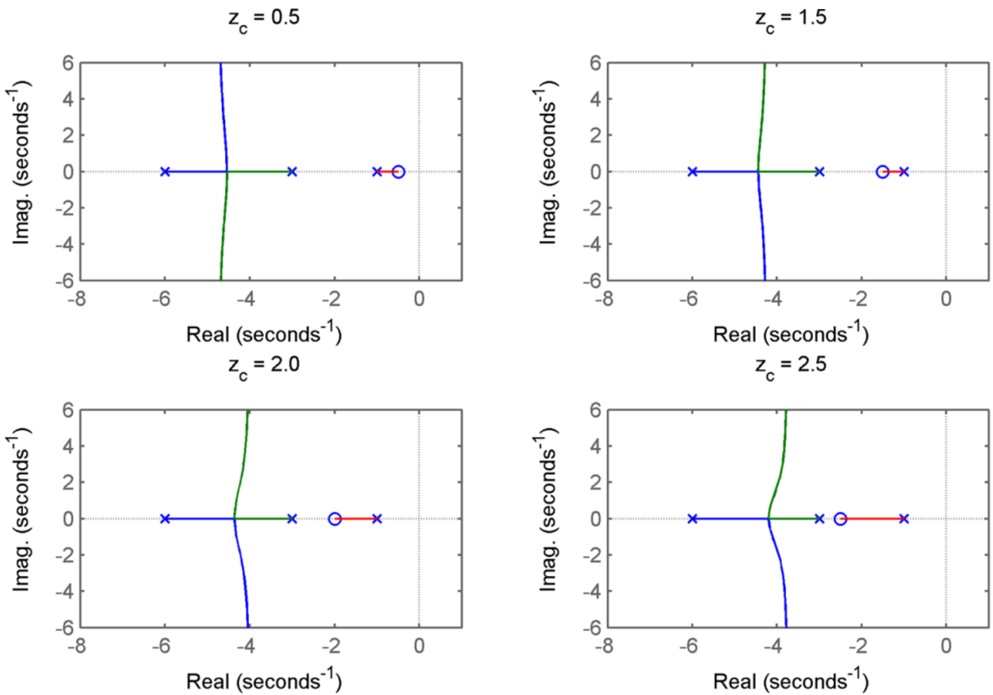
- Permite desplazar el LGDR para colocar los polos en lazo cerrado según necesidad.
- Una asíntota menos a C^{∞}, cambia el origen de las asíntotas σ_a:
  Si z_c crece σ_a se mueve a la derecha, hacia el origen y viceversa.
- La compensación derivativa permite acelerar la respuesta en lazo cerrado anticipando los errores futuros y compensándolos.

Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR PD - EJEMPLO



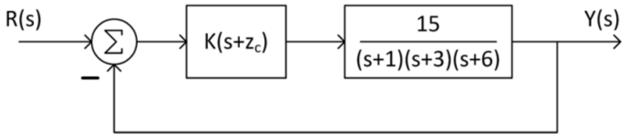
- $z_c < 3$

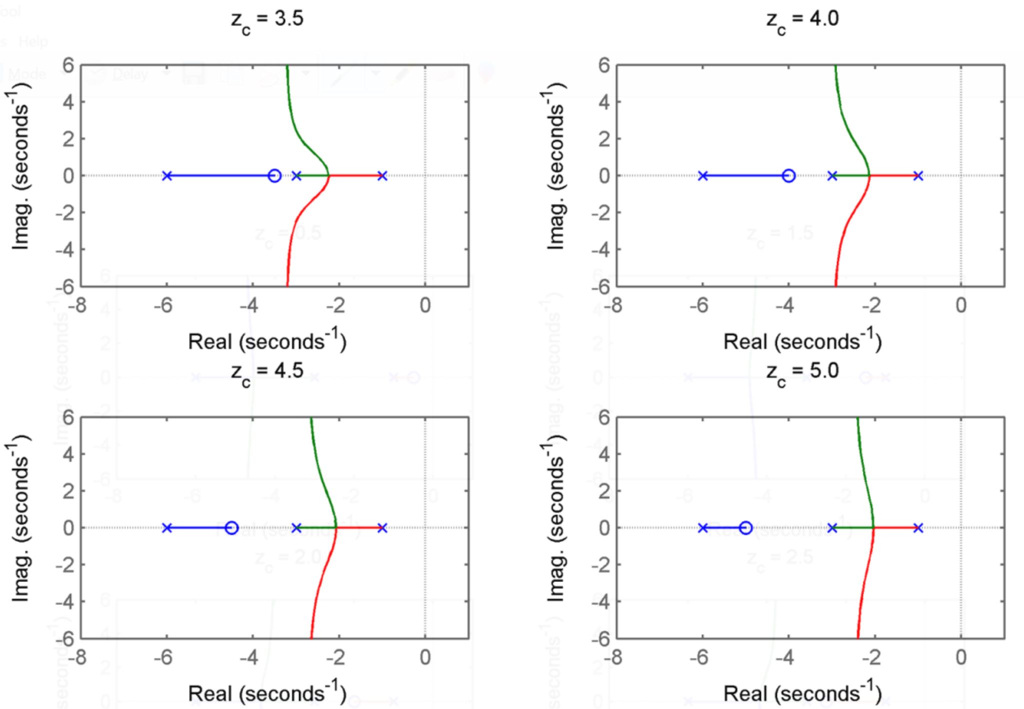


Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR PD - EJEMPLO

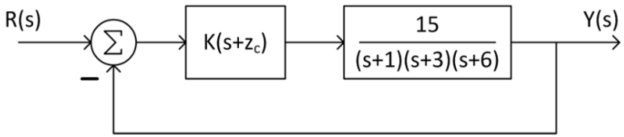
- $z_c > 3$





Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR PD - EJEMPLO



Vamos a obtener el valor de z_c optimo

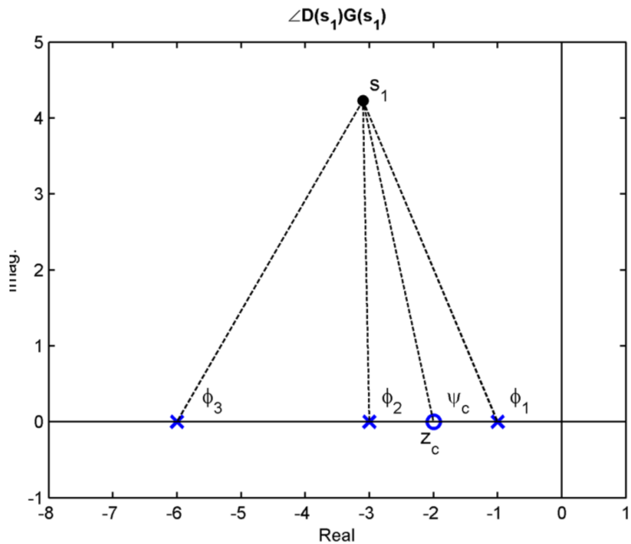
Para esto, usamos el criterio del ángulo del LGDR:

$$\angle D(s_1)G(s_1) = 180^{\circ}$$

$$\angle D(s_1)G(s_1) = \Phi_c - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$$

$$\phi_1 = 116.4^{\circ}\ ,\ \phi_2 = 91.3^{\circ},\ \phi_3 = 55.6^{\circ}$$

$$\Phi_c = 180 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 83.3^{\circ}$$



Para calcular z_c, para obtener $s_{1,2} = -3.1 \pm j4.23$:

$$\psi_c = \angle(s_1 + z_c) = \angle(-3.1 + j4.23 + z_c) = 83.3^{\circ}$$

$$\psi_c = \tan^{-1}\left(\frac{4.23}{z_c - 3.1}\right)$$

$$\tan(\psi_c) = \frac{4.23}{z_c - 3.1}$$

$$z_c = \frac{4.23}{\tan(\psi_c)} + 3.1 = \frac{4.23}{\tan(83.3^{\circ})} + 3.1$$

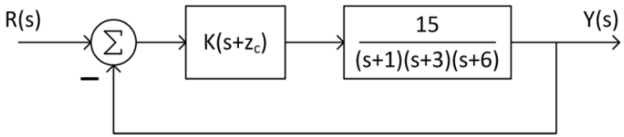
Entonces el compensador introducirá un cero en $z_c = 3.6$

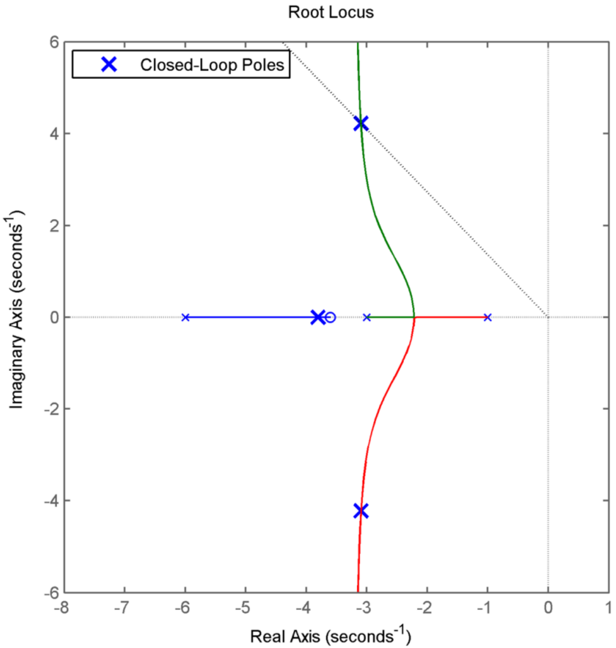
Compensación basada en el lugar de las raíces

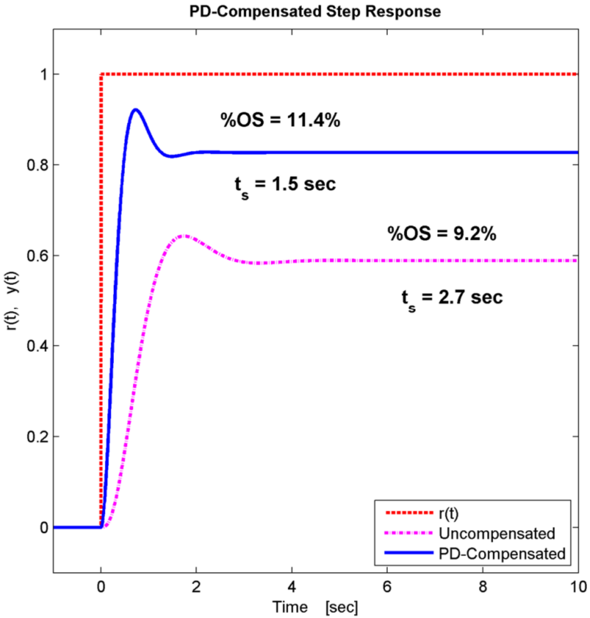
COMPENSADOR PD - EJEMPLO

Se reduce el tiempo de establecimiento.

Aumenta ligeramente el sobrepasamiento.







Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO

El lazo de realimentación necesita medir la señal de salida con algún tipo de sensor:

- Ruido inherente de gran ancho de banda por naturaleza.
- Ruido de alta frecuencia provoca grandes valores de derivada.
- La compensación PD amplifica el efecto del ruido.

La alternativa es el **compensador de adelanto**: Reduce el ruido del sensor.

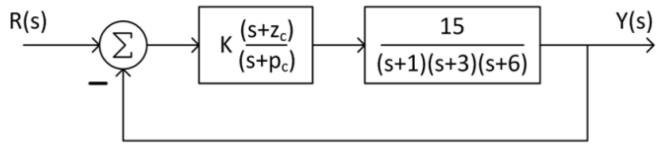
- Añade un cero y un polo de alta frecuencia: $D(s) = K\frac{s+z_c}{s+p_c}$ con $p_c > z_c$
- El polo adicional reduce la amplificación del ruido.
- Se puede implementar con componentes pasivos (resistencias y condensadores)

Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO - EJEMPLO

Polos deseados: $s_{1,2} = -3.1 \pm j4.23$

Se tiene que cumplir el criterio de ángulos en s_1



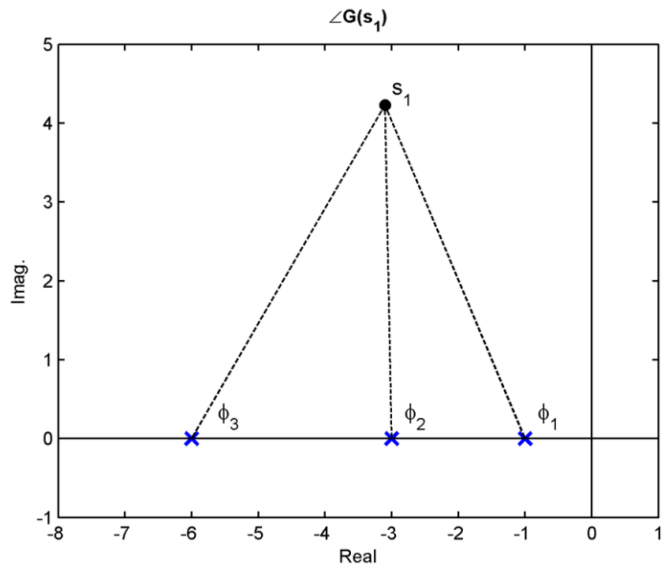
$\angle D(s_1)G(s1) = 180°$

$\angle D(s_1) + \angle G(s_1) = 180°$

$\angle D(s_1) = 180° - \angle G(s_1)$

$\angle G(s_1) = -(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)$

$\angle G(s_1) = -263{,}3°$



Entonces el compensador tiene que introducir un ángulo neto de:

$\angle D(s_1) = 443{,}3° = 83{,}3°$

$\angle D(s_1) = \angle(s_1 + z_c) - \angle(s_1 + p_c) = 83{,}3°$

Compensación basada en el lugar de las raíces

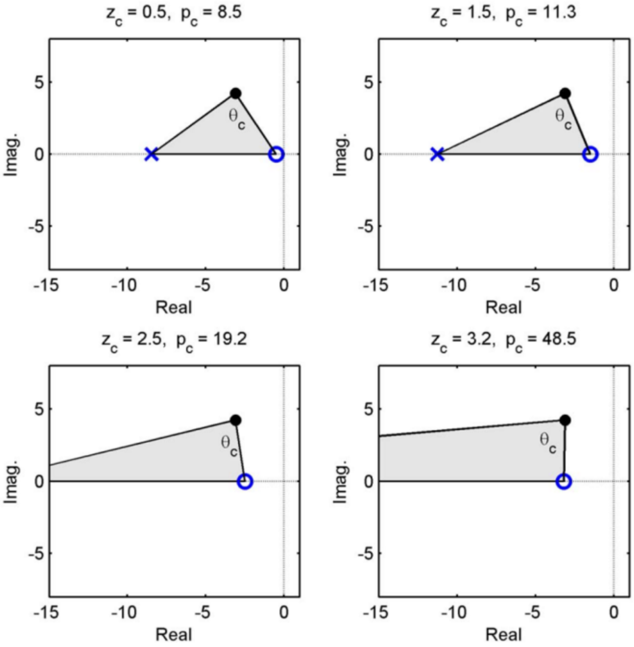
COMPENSADOR DE ADELANTO – EJEMPLO

Existen infinitas combinaciones posibles de $\frac{z_c}{p_c}$

- Todas cumplen $\theta_c = 83{,}3°$
- Diferente error estacionario
- Diferentes ganancias
- Diferentes localizaciones de polos en lazo cerrado

No hay ninguna regla para seleccionar z_c y p_c, algunos consejos son:

- Escoger p_c con valor lo más alto posible dentro de los requerimientos de ruido establecidos
- Escoger z_c por debajo o ligeramente a la izquierda de los polos buscados

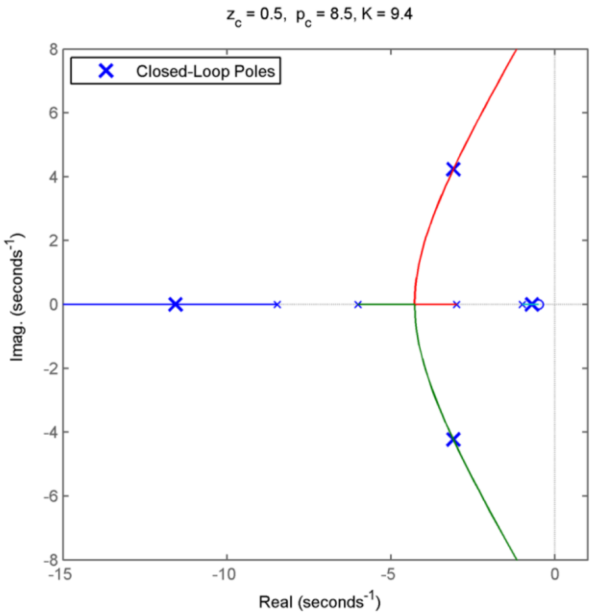


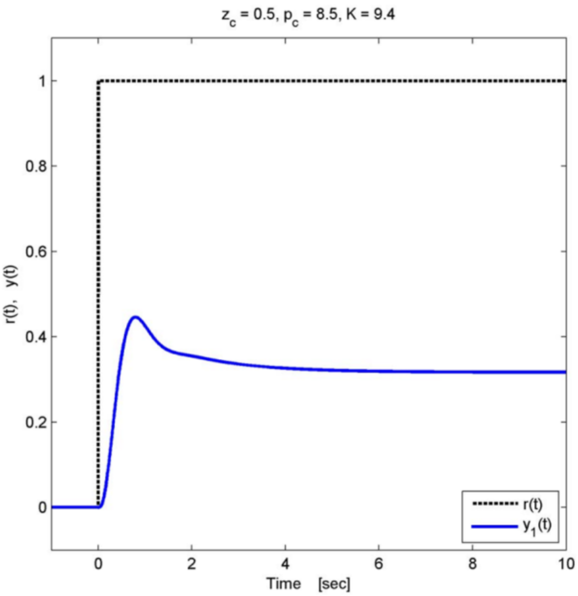
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO - EJEMPLO

Lugar de las raíces y respuesta a entrada escalón para $z_c = 0,5$ y $p_c = 8,5$

El polo/cero de baja frecuencia no se cancelan adecuadamente



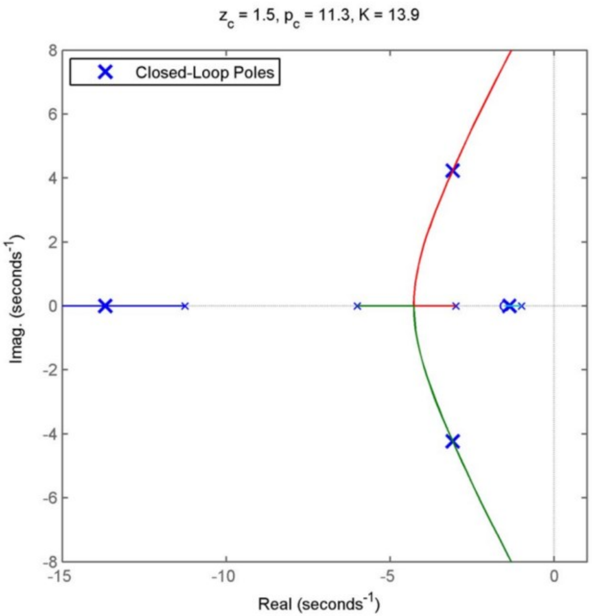


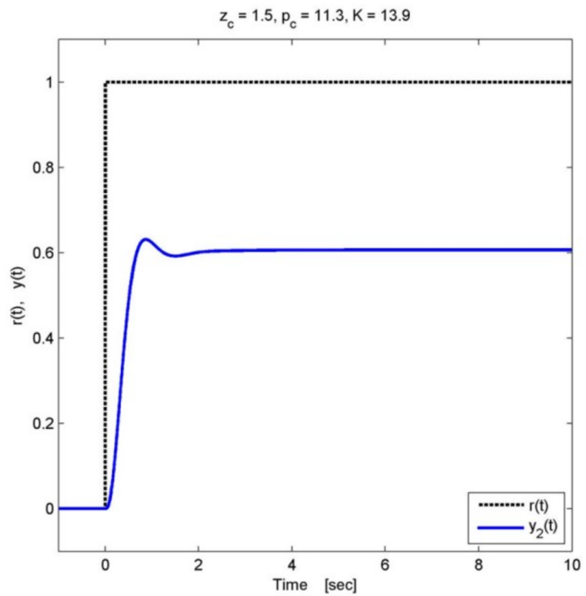
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO – EJEMPLO

Lugar de las raíces y respuesta a entrada escalón para $z_c = 1{,}5$ y $p_c = 11{,}3$

El efecto del polo/cero de baja frecuencia se reduce



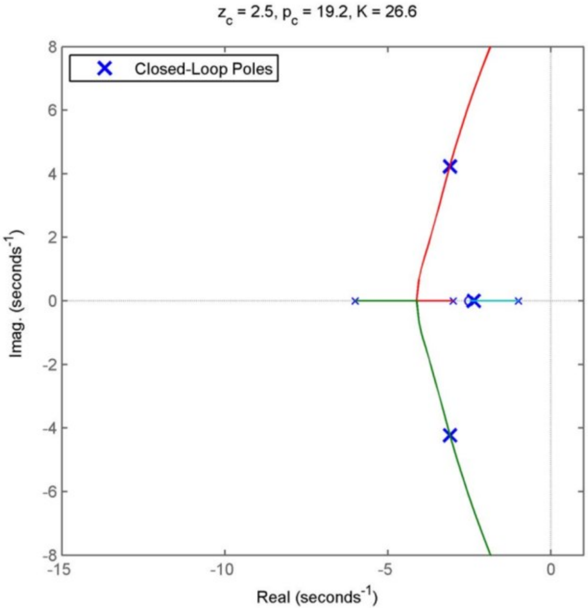


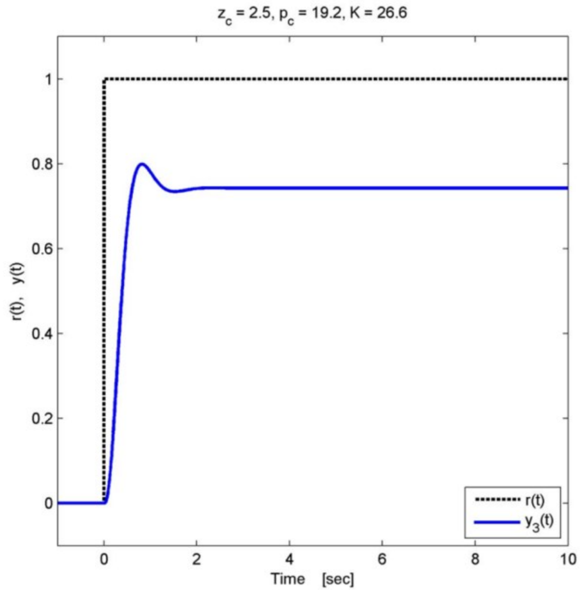
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO – EJEMPLO

Lugar de las raíces y respuesta a entrada escalón para $z_c = 2{,}5$ y $p_c = 19{,}2$

El polo/cero de baja frecuencia prácticamente se cancelan entre si.



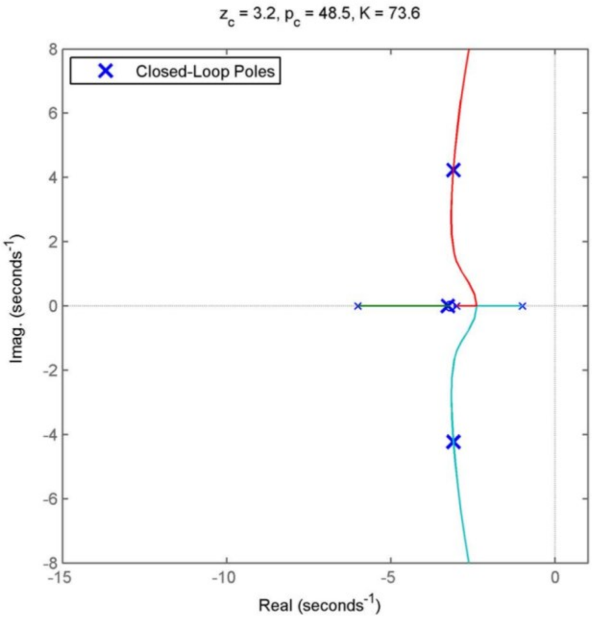


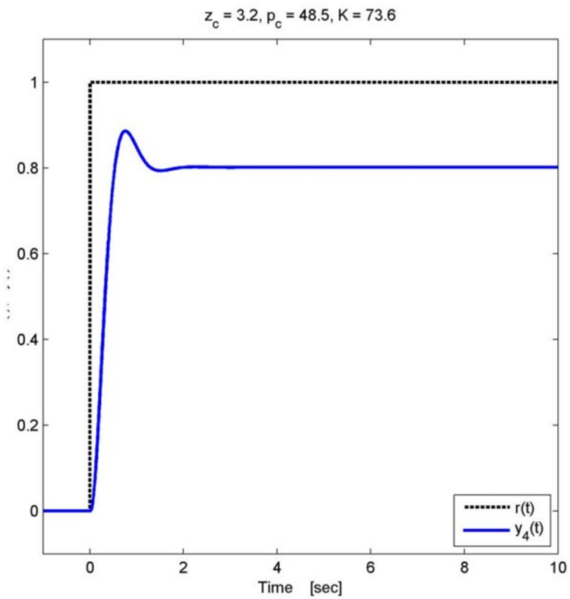
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO – EJEMPLO

Lugar de las raíces y respuesta a entrada escalón para $z_c = 3{,}2$ y $p_c = 33{,}1$

El polo/cero siguiente de más frecuencia está prácticamente cancelado





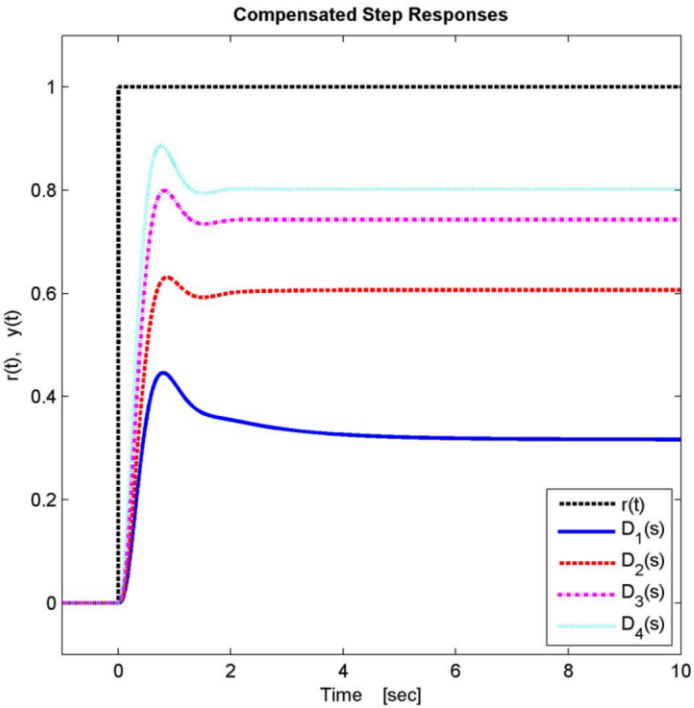
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO - EJEMPLO

Los valores de $z_c = 3{,}2$ o $z_c = 2{,}5$ parecen buenas opciones

El error en estado estacionario varía.

Depende del valor de ganancia para cada configuración de compensador de adelanteo



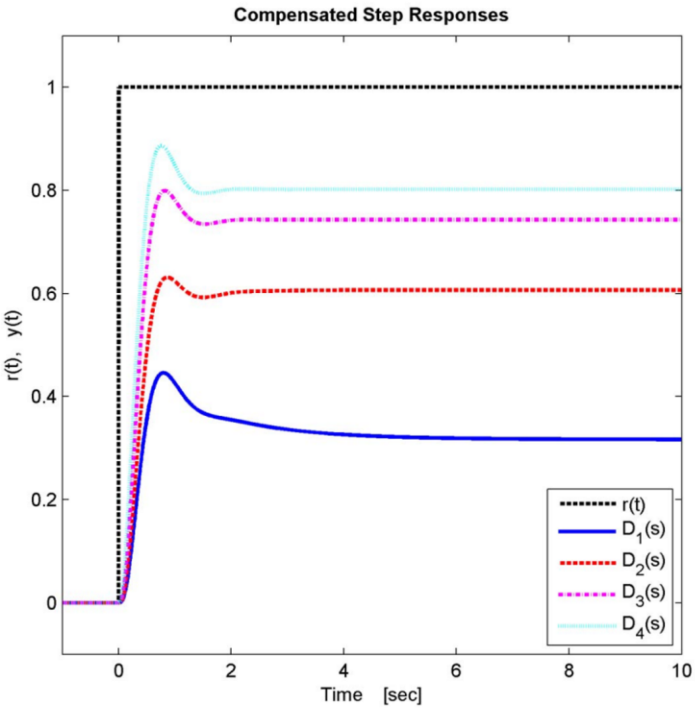
Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO - EJEMPLO

Los valores de $z_c = 3{,}2$ o $z_c = 2{,}5$ parecen buenas opciones

El error en estado estacionario varía.

Depende del valor de ganancia para cada configuración de compensador de adelanteo



Compensación basada en el lugar de las raíces

COMPENSADOR DE ADELANTO - EJEMPLO

Los valores de $z_c = 3{,}2$ o $z_c = 2{,}5$ parecen buenas opciones

El error en estado estacionario varía.

Depende del valor de ganancia para cada configuración de compensador de adelanto