

## Comunicaciones II – 3º GITT – “Test de prueba”

Apellidos y nombre: \_\_\_\_\_ DNI: \_\_\_\_\_

1. En un sistema binario unidimensional, con símbolos equiprobables en  $-1$  y en  $+1$ , con un ruido con densidad de potencia espectral  $0.25$ . ¿Cuál es la probabilidad de error de símbolo?

- a.  $Q(1/\sqrt{0.25})$ .
- b.  $Q(1/0.25)$ .
- c.  $Q(2/\sqrt{0.25})$ .

Comentarios: En sistemas binarios la probabilidad de error de símbolo la proporciona  $Q(x)$  evaluada en la semidistancia que separa los símbolos normalizada con la desviación estándar del ruido. La densidad de potencia espectral es igual a la varianza del ruido en el espacio de señal, y su desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza ( $\sqrt{0.25}$ ). La distancia es 2, y la semidistancia es 1. Por tanto, la respuesta correcta es la (a).

2. ¿Qué diferencia hay entre un demodulador basado en correladores y un demodulador basado en filtros adaptados?

- a. El primero es más preciso pero el segundo más sencillo de implementar.
- b. Son equivalentes en cuanto a resultado, aunque la implementación es diferente.
- c. El segundo es más preciso, pero el primero es más sencillo de implementar.

Comentarios: La misión del demodulador es proporcionar, a partir de la señal recibida  $r(t)$ , un conjunto de observaciones  $\mathbf{q}$  (una observación vectorial en el espacio de señal), que permitan detectar de forma óptima cuál fue el símbolo transmitido. Para ello, se calcula el producto escalar  $\langle r(t), \phi_n(t) \rangle$  para cada señal de la base, esto es, la correlación entre ambas señales (la integral entre 0 y T del producto de ambas señales). Este producto escalar puede obtenerse mediante el filtro adaptado a  $\phi_n(t)$ , cuya respuesta impulsiva  $h_n(t)$  se obtiene invirtiendo el eje temporal a la señal  $\phi_n(t)$ , y retardando la señal invertida un periodo T para que el filtro resultante sea causal. Si muestreamos la salida del filtro en el instante  $t=T$ , la salida del filtro (la convolución de  $r(t)$  y  $h_n(t)$ ) evaluada en dicho instante toma un valor exactamente igual a la integral de correlación, y por tanto ambas implementaciones son matemáticamente equivalentes. En general, la implementación basada en filtros adaptados es más eficiente en cuanto a cálculo (aunque si  $\phi_n(t)$  es un pulso rectangular la implementación basada en correladores es también sencilla), pero en cuanto al resultado ambas implementaciones son idénticas. Por tanto, por lo que respecta a la precisión, las respuestas (a) y (c) son falsas (ninguna implementación es más precisa que la otra), y la respuesta (b) es correcta.

3. En canales AWGN, la salida del demodulador óptimo es:

- a. Una variable aleatoria centrada en el vector que representa al símbolo transmitido, con matriz de covarianza diagonal.
- b. Una variable aleatoria centrada en el vector que representa al símbolo transmitido, de tipo gaussiana multivariada.
- c. Ambas respuestas son correctas.

Comentarios: A la salida del demodulador (en el espacio de señal), la observación  $\mathbf{q}$  es resultado de demodular  $r(t)=s(t)+n(t)$ , donde  $s(t)$  es la señal usada para representar el vector  $\mathbf{a}$  (del espacio de señal) y  $n(t)$  es el ruido que ha añadido el canal. Tal y como se discutió en clases de teoría, en el espacio de señal (canal discreto equivalente) se puede expresar  $\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$  donde  $\mathbf{a}$  corresponde al símbolo transmitido y  $\mathbf{n}$  al ruido. Este último vector es una variable aleatoria de tipo vectorial, tal que, si el conjunto de señales usadas para el modulador y el demodulador forman una base ortonormal y el ruido es AWGN, es una distribución de probabilidad de tipo gaussiana multivariada, de media nula, y cuya matriz de covarianza es diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a  $N_0/2$  (es decir, iguales a la densidad de potencia espectral). Puesto que dado el símbolo transmitido, el vector  $\mathbf{a}$  toma un valor fijo, las observaciones  $\mathbf{q}$  para un símbolo dado son una variable aleatoria de tipo vectorial, gaussianas, de media  $\mathbf{a}$  y matriz de covarianza igual a la de  $\mathbf{n}$ . Por tanto, la observación  $\mathbf{q}$  es una variable aleatoria centrada en el vector que

representa al símbolo, de tipo gaussiana multivariada, con matriz de covarianza diagonal. La respuesta (a) es correcta, y la (b) también lo es, y en consecuencia, debe marcarse la respuesta (c).

Nota adicional: Dado que las opciones (a) y (b) son correctas, la selección de una de ellas no se evaluará como una respuesta incorrecta sino como una respuesta en blanco y no penalizará en la nota final.

4. En un demodulador basado en correladores, para cada observable tenemos:

- a. Un filtro y un integrador.
- b. Un correlador y un integrador.
- c. Un multiplicador y un integrador.

Comentarios: La correlación se obtiene multiplicando la señal de entrada  $r(t)$  por la función  $\phi_n(t)$  de la base e integrando el producto entre 0 y T. Por tanto, requiere un multiplicador y un integrador por cada observable y la respuesta correcta es (c). La implementación basada en filtros adaptados no requiere un integrador (la respuesta (a) es incorrecta). El integrador forma parte del correlador (la respuesta (b) es también incorrecta).

5. Para obtener el observable  $q_i$  correspondiente a la señal  $\phi_i(t)$  de la base, ¿cómo se obtiene la respuesta impulsiva del filtro adaptado en el demodulador?

- a. Se obtiene el primer filtro adaptado  $h_0(t)$  igual a  $\phi_0(t)$  y a partir de éste se genera la base ortonormal por el método de Gram-Schmidt.
- b. La respuesta impulsiva  $h_i(t)$  es una versión de  $\phi_i(t)$  con una inversión del eje temporal. Además, tenemos que retrasar la señal invertida un periodo de símbolo T para que el filtro sea causal y la salida la tomamos en  $t=T$ .
- c. La respuesta impulsiva  $h_i(t)$  es una versión de  $\phi_i(t)$  con una inversión del eje temporal. Además, tenemos que adelantar la señal invertida un periodo de símbolo T para que el filtro sea causal y la salida la tomamos en  $t=T$ .

Comentarios: Tal y como se ha visto en los comentarios a la pregunta 2, la respuesta correcta es la (b). En el proceso de demodulación, las señales  $\phi_i(t)$  se suponen conocidas y por tanto no tiene sentido hablar de construcción de una base ortonormal; además, no puede hacerse  $h_0(t) = \phi_0(t)$ ; la respuesta (a) es incorrecta. La respuesta (c) es incorrecta, porque la señal invertida debe retrasarse (no adelantarse) para que la implementación del filtro adaptado sea causal. Además, si la respuesta en lugar de retrasarla la adelantamos, en lugar de muestrear en  $t=T$  debería muestrearse en  $t=-T$ .

6. Los vectores a la salida del demodulador:

- a. Tienen la misma matriz de covarianza, independientemente del símbolo.
- b. Tienen la misma matriz de covarianza sólo si los símbolos son equiprobables.
- c. Tienen la misma media pero distinta matriz de covarianza.

Comentarios: Tal y como se ha visto en los comentarios a la respuesta 3, los vectores  $\mathbf{q}$  a la salida del demodulador son variables aleatorias gaussianas multivariadas, cuya media es el vector  $\mathbf{a}_i$  (correspondiente al símbolo transmitido) y cuya matriz de covarianza es la correspondiente al ruido  $\mathbf{n}$ , es decir, una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos iguales a  $N_0/2$  (la densidad de potencia espectral). Para los distintos símbolos, la distribución de probabilidad de los vectores es similar salvo por la media (la media viene dada por el símbolo; la matriz de covarianza viene dada por el ruido, que afecta de igual forma a todos los símbolos). Esto es además independiente de la probabilidad a priori de los símbolos, y consecuentemente es así tanto para sistemas de símbolos equiprobables como para símbolos no equiprobables. La respuesta correcta es la (a). La respuesta (b) es incorrecta por lo indicado anteriormente. La respuesta (c) es incorrecta pues la matriz de covarianza es la misma para todos los símbolos, y la media no lo es.

7. En un decisor ML la frontera de decisión entre dos símbolos es:
- a. El hiperplano mediatriz entre los vectores que representan a estos símbolos.
  - b. La hipersuperficie que verifica que la distancia de cada punto a los dos vectores que representan a los símbolos es igual.
  - c. Ambas respuestas son correctas.

Comentarios: En el decisor ML, la frontera entre dos símbolos es, por definición, la hipersuperficie del espacio de señal que hace que las probabilidades de la observación dados cada uno de los símbolos sean iguales. Esta condición es equivalente a hacer que se igualen las distancias de los puntos de la hipersuperficie a cada uno de los símbolos, y por tanto la respuesta (b) es correcta. Si calculamos esta hipersuperficie, resulta ser el hiperplano mediatriz entre los vectores que representan a los símbolos, de modo que la respuesta (a) es también correcta. Por ello, debe marcarse la (c).

Nota adicional: Dado que las opciones (a) y (b) son correctas, la selección de una de ellas no se evaluará como una respuesta incorrecta sino como una respuesta en blanco y no penalizará en la nota final.

8. En un sistema M-ario unidimensional con símbolos equiprobables:
- a. Todos los símbolos tienen la misma probabilidad de error.
  - b. Todos los símbolos tienen la misma probabilidad de error salvo los de los extremos, que presentan una probabilidad de error doble.
  - c. La probabilidad de error para cada símbolo depende de la distribución de los símbolos en la recta q.

Comentario: En un sistema M-ario unidimensional con símbolos equiprobables, normalmente los símbolos están distribuidos uniformemente en la recta q. Si este fuera el caso, los símbolos de los extremos presentan la mitad de probabilidad de error que los símbolos que no están en los extremos. Por ello, las respuestas (a) y (b) en general no son correctas. Si tenemos en cuenta que los símbolos no tienen que estar necesariamente distribuidos de forma uniforme, la probabilidad de error para cada símbolo depende de la distancia a la que se encuentran los vecinos más próximos y por tanto depende de cómo estén distribuidos los símbolos en la recta q. La respuesta correcta es la (c).

9. Para un sistema de comunicación digital que transmite información a una tasa de 16.000 bits por segundo, ¿cuántos símbolos por segundo transmite si utiliza un alfabeto 16-ario?
- a. 48.000
  - b. 4.000
  - c. 1.000

Comentarios: Un sistema 16-ario transmite  $m = \log_2(16) = 4$  bits por símbolo. Si la velocidad de transmisión es de 16.000 bits por segundo, y cada símbolo transmite 4 bits de información, la velocidad de transmisión de símbolos es de 4.000 símbolos por segundo:  $R_s(\text{simb/segundo}) = R_b(\text{bits/segundo}) / m(\text{bits/símbolo})$ .

10. En un decisor ML ¿se puede tomar la decisión a partir de la correlación entre el vector observado y el vector que representa a cada símbolo?
- a. Sí; es equivalente: basta con maximizar la correlación.
  - b. Sí; es equivalente, pero debe tenerse en cuenta el módulo del vector que representa a cada símbolo.
  - c. Sí; es equivalente, pero debe tenerse en cuenta el módulo del vector observado.

Comentario: En un sistema ML el símbolo elegido es el más cercano a la observación, es decir, aquél para el que la distancia de la observación al símbolo es mínima. Desarrollando el módulo al cuadrado del vector diferencia, se puede obtener una expresión equivalente que incluye como primer término la correlación entre el vector observado y el que representa al símbolo y un segundo término que sólo depende de la norma del vector que representa al símbolo (aparece un tercer término, la norma del vector observación, pero puede eliminarse en la maximización por ser común a todos los símbolos). Hay que maximizar la correlación pero corrigiéndola (usando para ello el módulo del vector que representa al símbolo). La respuesta correcta es por tanto la (b). La respuesta (a) resulta incompleta, y es incorrecta, pues afirma que

bastaría maximizar la correlación. La respuesta (c) no es correcta puesto que lo que debe usarse para corregir no es el módulo del vector observado.

11. La probabilidad de error de símbolo depende de:

- a. La densidad de potencia espectral del ruido y la base ortonormal elegida.
- b. La densidad de potencia espectral del ruido y la constelación.
- c. La densidad de potencia espectral del ruido y la energía promedio de símbolo.

Comentario: La probabilidad de error de símbolo para un símbolo dado depende de la integral de la distribución de probabilidad de observación dado el símbolo sobre la región en la que no se elige a este símbolo. La probabilidad de error de símbolo total es un promedio (pesado con las probabilidades a priori de los símbolos) de las probabilidades de error de símbolo para cada símbolo. La probabilidad de error de símbolo no depende de la base ortonormal elegida y por tanto la respuesta (a) no es correcta. En principio, la integral que proporciona el error depende de la densidad de potencia espectral del ruido (que condiciona la distribución de probabilidad a integrar) y de la constelación (que condiciona las fronteras en decisores ML, y que, junto con la densidad de potencia espectral y las probabilidades a priori condicionaría las fronteras en decisores MAP). Por tanto, la respuesta (b) es correcta. La respuesta (c) estrictamente hablando no es correcta: en primer lugar, la energía promedio de símbolo está condicionada por la constelación, y en segundo lugar, pueden elegirse constelaciones donde los símbolos estén colocados en posiciones que proporcionan mucho error con una energía de símbolo grande, es decir, no basta con que la energía promedio de símbolo sea grande para garantizar un comportamiento óptimo del sistema de comunicación (es necesario además elegir una constelación adecuada). Sin embargo, la redacción de la pregunta puede inducir a confusión: Fijada la constelación (salvo por un factor de escala) la probabilidad de error depende del cociente entre la energía de símbolo y la densidad de potencia espectral del ruido, y desde esta perspectiva (por otra parte habitual en la práctica), la respuesta (c) sería aceptable. Por ello, se han aceptado como correctas tanto la respuesta (b) como la (c).

12. El decisor MAP proporciona como símbolo recibido:

- a. Aquél para el que la probabilidad a priori de símbolo es máxima.
- b. Aquél para el que la probabilidad de símbolo dada la observación es máxima.
- c. Aquél para el que la probabilidad de observación dado el símbolo es máxima.

Comentarios: En un decisor MAP la decisión se obtiene maximizando la probabilidad del símbolo dada la observación (esto es equivalente a maximizar el producto de la probabilidad a priori de símbolo  $p_A(a_i)$  por la densidad de probabilidad de observación dado el símbolo  $f_{q|A}(q|a_i)$ ). Por tanto, la respuesta (b) es la correcta. No tiene sentido maximizar la probabilidad a priori del símbolo (esto conduciría a tomar decisiones sin prestar atención a las observaciones proporcionadas por el demodulador). La opción considerada en la respuesta (c) es la usada en el criterio ML, pero no es correcta para un decisor MAP.

13. El desplazamiento de la frontera en un decisor MAP con respecto a la frontera ML depende de:

- a. El logaritmo de la densidad de potencia espectral del ruido y el cociente de las probabilidades a posteriori de los símbolos involucrados.
- b. El logaritmo del cociente de probabilidades a priori de los símbolos involucrados y la densidad de potencia espectral del ruido.
- c. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Comentarios: El desplazamiento de la frontera en un decisor MAP es  $-N_0 \log(p_A(a_i)/p_A(a_j))$ , donde  $N_0/2$  es la densidad de potencia espectral,  $a_i$  y  $a_j$  son los símbolos involucrados, y  $p_A(a_i)$  es la probabilidad a priori del símbolo  $a_i$ . Por tanto, la respuesta (b) es correcta.

14. En un sistema de comunicación digital que transmite 3.000 símbolos por segundo de un alfabeto octal, ¿cuál es la velocidad de transmisión en bits por segundo?

- a. 24.000      **b. 9.000**      c. 1.000

Comentarios: Un sistema octal transmite  $m = \log_2(8) = 3$  bits por símbolo. Si la velocidad de transmisión es de 3.000 símbolos por segundo, y cada símbolo transmite 3 bits de información, la velocidad de transmisión de bit es de 9.000 bits por segundo:  $R_s(\text{simb/segundo}) = R_b(\text{bits/segundo}) / m(\text{bits/símbolo})$ .

15. Comparemos dos sistemas de comunicación digital que transmiten símbolos binarios. El primero representa el símbolo  $b_0$  con una señal  $\phi_0(t) + \phi_1(t)$  y el símbolo  $b_1$  con una señal  $\phi_0(t) - \phi_1(t)$ , siendo  $\phi_0(t)$  y  $\phi_1(t)$  ortogonales entre sí. El segundo transmite el símbolo  $b_0$  con una señal  $\phi_0(t) + \phi_1(t)$  y el símbolo  $b_1$  con una señal  $-\phi_0(t) - \phi_1(t)$ . ¿Cuál de ellos ofrece un mejor rendimiento, en términos de probabilidad de error y energía por símbolo?

- a. El primero.  
**b. El segundo.**  
c. Depende de las señales  $\phi_0(t)$  y  $\phi_1(t)$ .

Comentario: Se trata de un sistema binario bidimensional. En el primer caso, los dos símbolos tienen la misma energía (2) y forman, con respecto al origen de coordenadas, un ángulo de  $90^\circ$ . En el segundo caso, los símbolos tienen la misma energía (de nuevo 2) pero son símbolos antipodales. En cuanto a la energía por símbolo son iguales. La distancia entre símbolos, en el primer caso, es 2, mientras que en el segundo caso es  $2\sqrt{2}$  y por tanto, al ser mayor la separación entre símbolos, para una misma densidad de potencia espectral, la segunda constelación da lugar a un error menor. Consecuentemente, el segundo sistema presenta un mejor rendimiento y la respuesta correcta es (b). La ventaja del segundo sistema es independiente de la base elegida (o de las señales usadas en el modulador).