Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico** Grado en Ingeniería de Tegnologías de Telecomunicación	**Convocatoria Ordinaria de Junio** 9 de julio de 2013

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración del examen es de **3 horas.**
- **No se permite el uso de calculadora programable.**
- El examen corresponde a la parte de teoría y problemas, constando de **5 preguntas tipo test y 4 ejercicios. Será valorado sobre 7 puntos (1 el test y 6 los ejercicios).**
- **Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.**

(M1)

Preguntas tipo TEST **(0.2 puntos cada una)**

1. Las soluciones de la ecuación
$$x' = -(x+t)^2$$
son ...
   - ☐ crecientes en todo el dominio.
   - ☐ decrecientes en todo el dominio.
   - ☐ convexas en todo el dominio.
   - ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

2. Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial
$$x'''(t) + 3\,x''(t) + x'(t) - 5\,x(t) = 0$$
es ...
   - ☐ $\{e^t, e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\operatorname{sen}(2t)\}$.
   - ☐ $\{e^{-2t}\cos(t), e^{-2t}\operatorname{sen}(t)\}$.
   - ☐ $\{e^t, e^{-2t}\cos(t), e^{-2t}\operatorname{sen}(t)\}$.
   - ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

3. Una solución de la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx} - 2x\, u_{xy} - 2u_y = (-4x + 4y - 2)e^{2x}$$

es ...

- ☐ $u(x, y) = \cos(x^2 + y) + y\, e^{-2x}$.
- ☐ $u(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y) + y\, e^{2x}$.
- ☐ $u(x, y) = \cos(x^2 + y) + x\, e^{2y}$.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

4. Sea f una función continua que tiene una única raíz en el intervalo $[0, 1]$. Para aproximar dicha raíz con un error inferior a 10^{-4} mediante el método de bisección tendremos que hacer ...

- ☐ al menos 19 iteraciones.
- ☐ al menos 16 iteraciones.
- ☐ al menos 13 iteraciones.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

5. El problema de interpolar una tabla de valores $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_5, y_5)\}$ mediante un polinomio de grado menor o igual que 6 ...

- ☐ tiene solución si los nodos son distintos dos a dos.
- ☐ tiene solución única siempre.
- ☐ a veces no tiene solución.
- ☐ Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

(Observación: en esta pregunta hay dos posibles respuestas verdaderas.)

EJERCICIOS (1.5 puntos cada uno)

1. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 2\,x - 3\,\frac{t}{x}\,. \tag{1}$$

   a) Determina los posibles dominios maximales de (1).

   b) Resuelve (1) empleando el cambio de variable $u = x^2$.

   c) Determina la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(0) = 1$, indicando el intervalo maximal donde está definida (de la forma más precisa posible).

2. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4\,x_2(t), \\ x_2'(t) = -\,x_1(t). \end{cases} \tag{2}$$

   a) Sin hacer uso de la transformada de Laplace y sin pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula un sistema fundamental de soluciones de (2) formado por funciones reales de variable real.

   b) Calcula la solución de (2) que satisface la condición inicial $(x_1, x_2)(\pi) = (3, 2)$.

3. Se considera la ecuación

$$e^x + 1.3\,x^3 = 5.2\,. \tag{3}$$

   a) Demuestra que (3) tiene una única solución real.

   b) Determina, sin usar la calculadora, un intervalo de longitud uno que contenga a la solución de (3).

   c) Para el intervalo hallado en el apartado anterior, determina justificadamente un punto que asegure la convergencia del método de Newton-Raphson.

   d) Partiendo del intervalo hallado en el apartado b), calcula tres iteraciones con el método de la secante (operando con cinco cifras decimales).

   e) A la vista de los resultados obtenidos en el apartado anterior, ¿cuál es la mejor aproximación que puedes dar de la solución de (3)?

4. Se considera la función

$$s(x) = \begin{cases} -3\,x^2 + 9\,x - 7, & \text{si } x \in [-1, 1], \\ p(x), & \text{si } x \in [1, 3], \\ -x^3 + 12\,x^2 - 42\,x + 46, & \text{si } x \in [3, 5]. \end{cases} \tag{4}$$

   a) Determina $p(x)$ para que $s(x)$ sea un spline cúbico de clase 2.

   b) ¿Puede ser $s(x)$ un spline cúbico natural? Justifica tu respuesta.

   c) ¿Cuánto vale $s'(0)$? ¿Y $s''(2)$?

EJERCICIO PARA NOTA (1 punto)

Este ejercicio es de carácter voluntario. Se deben hacer previamente el test y los cuatro ejercicios obligatorios. Sólo se corregirá cuando la calificación conjunta del test y los cuatro ejercicios obligatorios sea superior o igual a 4.

5. Queremos diseñar un fórmula de integración numérica en dos nodos que sea exacta en $\mathbb{P}_3$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Para ello, optamos por dejar los nodos libres. Es decir, consideramos una fórmula del tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha\, f(a) + \beta\, f(b), \tag{5}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in [-1, 1]$ son cuatro parámetros por determinar.

   a) Halla α, β, a, b para que (5) tenga grado de exactitud 3.

   b) Determina, justificadamente, el mayor grado de exactitud de (5).

   c) Aplica la fórmula hallada para dar una aproximación de

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$