Examen de Septiembre 2012

Nombre:……………………………………………………………………………………

D.N.I.:………………………………GRUPO ………………………………………

1. (2ptos) Un sistema LTI causal en tiempo discreto recibe como entrada la función *x(n*) dando lugar a la salida *y(n)*. Determine:

   a) Represente gráficamente las señales de entrada y salida.
   b) La respuesta impulsiva del sistema *h(n)*.
   c) Justifique si el sistema es estable o no.
   d) La ecuación en diferencias que caracteriza al sistema.

$$x(n) = (1/2)^n u(n) - 1/4(1/2)^{n-1} u(n-1)$$
$$y(n) = \cos\left(\frac{3}{5}\pi n\right)u(n) - \cos\left(\frac{13}{5}\pi n\right)u(n-1)$$

2. (2ptos) Un problema importante que aparece cuando se realiza un electrocardiograma (ECGs) es la aparición de una interferencia no deseada a 60Hz causada por la red eléctrica. Asumiendo que el ancho de banda de la señal de interés es 1kHz, esto es $X_a(f) = 0 \quad |f| > 1000Hz$. La señal analógica es convertida a una señal discreta usando un convertidor A/D ideal que opera usando una frecuencia de muestreo f_s. La señal resultante, $x(n) = x_a(nT_s)$ es procesada por un sistema en tiempo discreto descrito por la siguiente ecuación en diferencias: $y(n) = x(n) + ax(n-1) + b(x(n-2)$. La señal filtrada, $y(n)$, es convertida a una señal analógica usando un conversor D/A ideal. Determine los valores de f_s, a y b que eliminan la interferencia de 60Hz de la señal de salida *y(t)*. La señal de 60Hz a eliminar es de la forma: $\omega_a(t) = Asen(120\pi t)$.

3. Una secuencia causal de fase no mínima x(n) tiene la siguiente transformada Z: $X(z) = \dfrac{\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{5}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$ ¿Para qué valores de la constante α podría la secuencia $y(n) = \alpha^n x(n)$ ser de fase mínima?

4. (1pto) Imagínese que está usando Simulink, diseñe un diagrama de bloques para un Cuantificador Uniforme que cuantifique una señal sinusoidal de entrada de 10 voltios valor de pico usando a) 2 bits y b) 3 bits. Dibuje de forma aproximada la salida del cuantificador. Determine una expresión para el error de cuantificación.

5. (1pto) Encuentre la convolución de las dos secuencias siguientes:

$$h(n) = 2\delta(n+3) + \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$
$$x(n) = \delta(n-2) - 2\delta(n-4) + 3\delta(n-6)$$

6. (2ptos) Describa brevemente las tres técnicas para la conversión de filtros analógicos en digitales, a saber: aproximación en derivadas, invarianza impulsional y transformación bilineal. Represente gráficamente como se realiza la conversión de frecuencias analógicas al dominio digital (plano Z) y comente las ventajas e inconvenientes de cada una de estas técnicas.

①

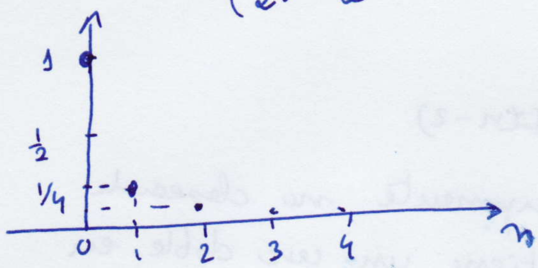
a) Representa gràficament les senyals de entrada y salida

$$x(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$y(n) = \cos\left(\tfrac{3}{5}\pi n\right) u(n) - \cos\left(\tfrac{13}{5}\pi n\right) u(n-1)$$

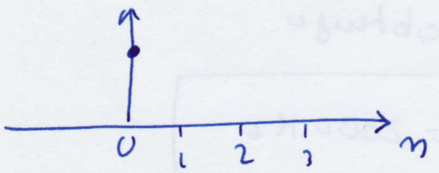
$$x(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n-1) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \left[u(n) - \tfrac{1}{2} u(n-1)\right]$$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \tfrac{1}{2} & n>0 \end{cases} \Rightarrow x(n) \begin{cases} 1 & n=0 \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} & n>0 \end{cases}$$



$$y(n) = \cos\left(\tfrac{3}{5}\pi n\right) u(n) - \cos\left(\tfrac{3}{5}\pi n + 2\pi n\right) u(n-1) =$$

$$\cos\left(\tfrac{3}{5}\pi n\right)\left[u(n) - u(n-1)\right] = \cos\left(\tfrac{3}{5}\pi n\right) \cdot \delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



b) $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{4}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} = \frac{1}{\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$h(n) = \delta(n) + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u(n)$$

c) → Pols de $H(z)$ $\quad 1 - \frac{1}{4}z^{-1} = 0$; $\quad z - \frac{1}{4} = 0$; $\quad z = \frac{1}{4}$

pol simple dentro de la circumferencia unidad

d) $y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$

② f_s si el convertidor A/D es ideal es la frecuencia de Nyquist

$F_{max} = 1\,KHz \Rightarrow f_s = 2\,KHz = 2000\,Hz.$

La componente a eliminar es 60 Hz o bien $\Omega = 120\pi$

Como el filtro se diseña en el dominio digital tengo que pasar a frecuencias digitales normalizadas.

$f = \frac{F}{F_s}$; la frecuencia a eliminar normalizada es

$f_{el} = \frac{6\cancel{0}}{200\cancel{0}} = 0.03$ y en radianes $\omega_{elim.} = 0.03 \times 2\pi$
$= 0.06\pi$

dada la ecuación en diferencias

$y(n) = x(n) + a\,x(n-1) + b\,x(n-2)$

vemos que eliminamos la componente no deseada con un filtro ranura FIR que tiene un cero doble en $z = e^{\pm j0.06\pi}$

$h(n) = 1 + a z^{-1} + b z^{-2}$

$1 + a z^{-1} + b z^{-2} = (1 - e^{j0.06\pi} z^{-1})(1 - e^{-j0.06\pi} z^{-1})$

igualando potencias de z obtengo

$$\boxed{\begin{array}{ll} b = 1 & f_s = 2000\,Hz \\ a = -2\cos(0.06\pi) & \end{array}}$$

$h(n) = 1 - 2\cos(0.06\pi)\, z^{-1} + z^{-2}$

~~Teléfono~~

③ $y(n) = \alpha^n x(n)$

$Y(z) = Y(\alpha^{-1} z) = Y(z/\alpha)$

$$\mathcal{Y}(z)\,\cancel{X(z)} = \frac{\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{5}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{\left(\frac{z}{\alpha}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{z}{\alpha}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{z}{\alpha}+\frac{5}{3}\right)}{\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)^2\left(\frac{z}{\alpha}-\frac{1}{4}\right)}$$

fase mínima: pols y cers en el interior del círculo unidad

$$\cancel{\mathcal{Y}(z) = \left(\frac{z}{\alpha}-\frac{3}{2}\frac{z^{-1}}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}/\alpha\right)\left(1+\frac{5}{3}z^{-1}/\alpha\right)}$$

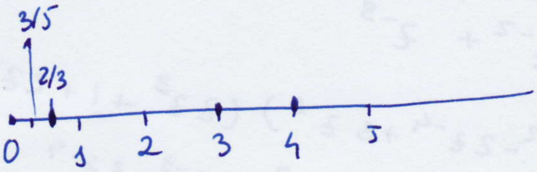
$\frac{z}{\alpha} - \frac{3}{2} = 0 \qquad z = \frac{3\alpha}{2} \qquad |z| < 1 \Rightarrow |3\alpha| < 2 \ ; \ |\alpha| < 2/3$

$\frac{z}{\alpha} + \frac{1}{3} = 0 \qquad z = -\frac{1}{3}\alpha \qquad |z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}\alpha\right| < 1 \ ; \ |\alpha| < 3$

$\frac{z}{\alpha} + \frac{5}{3} = 0 \qquad z = -\frac{5}{3}\alpha \qquad |z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{5}{3}\alpha\right| < 1 \ ; \ |\alpha| < \frac{3}{5}$

$\frac{z}{\alpha} - 1 = 0 \qquad z = \alpha \qquad |z| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 1$

$\frac{z}{\alpha} - \frac{1}{4} = 0 \qquad z = \frac{1}{4}\alpha \qquad |z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{4}\alpha\right| < 1 \quad |\alpha| < 4$

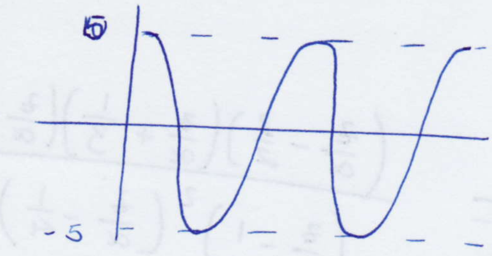


$|\alpha|$ tiene que ser menor que $3/5$

para que $y(n)$ sea de fase mínima.

(4)

$V = 10$ voltios valor de Pico



*Falta dibujar la gráfica

2 bits $\quad 2^2 = 4$ nivels

$$\Delta = \frac{2.5}{2^2} = 2.5$$

3 bits $\quad 2^3 = 8$ nivels

$$\Delta = \frac{2.5}{2^3} = \frac{4}{5} = 1.25$$

$$SNRQ = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$$

$$SNRQ\Big|_{B=2} = \frac{3.2^2}{X_{max}^2}\sigma_x^2$$

$$SNRQ\Big|_{B=3} = \frac{3.2^3}{X_{max}^2}\sigma_x^2 = 2.\ SNRQ\Big|_{B=2}.$$

(5) $x(n) = \delta(n-2) - 2\delta(n-4) + 3\delta(n-6)$

$h(n) = 2\delta(n+3) + \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$

$y(n) = x(n) * h(n)$; $\quad Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

$$X(z) = z^{-2} - 2z^{-4} + 3z^{-6}$$

$$H(z) = 2z^3 + 1 + 2z^{-2} + z^{-3}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = (z^{-2} - 2z^{-4} + 3z^{-6})(2z^3 + 1 + 2z^{-2} + z^{-3}) =$$

$$= 2z - 4z^{-1} + z^{-2} + 6z^{-3} + z^{-5} - z^{-6} - 2z^{-7} + 6z^{-8} + 3z^{-9}$$

$y(n) = 2\delta(n+1) + \delta(n-2) - 4\delta(n-1) + 6\delta(n-3) + \delta(n-5) - \delta(n-6)$
$- 2\delta(n-7) + 6\delta(n-8) + 3\delta(n-9)).$