Examen de Señales Digitales

Junio 2015

Nombre: .... Grupo: ....

1. Considere el sistema de la figura 1 con $h(n) = 0{,}9^n u(n)$. Determine la respuesta $y(n)$ del sistema a la excitación $x(n) = 10cos(\pi/2n)$.

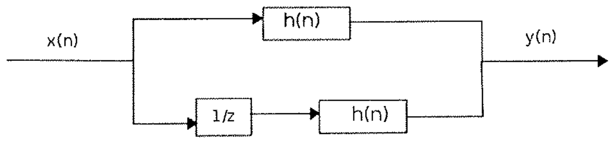


Figura 1: Sistema del problema 1.

2. Calcule los 3 coeficientes de un filtro FIR paso baja con una frecuencia de corte de 800 Hz y una frecuencia de muestreo de 8 KHz (suponga una ventana rectangular). Determine la función de transferencia y la ecuación en diferencias del filtro diseñado y calcule y dibuje la respuesta en magnitud para $\omega = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ y π.

   Nota: La respuesta al impulso de un filtro paso baja ideal es:

$$h(n) = 2f_c \frac{sin(n\omega_c)}{n\omega_c}; n \neq 0$$

$$h(n) = 2f_c; n = 0$$

3. Suponga que quiere ralentizar la velocidad de un segmento de voz a la mitad. La señal de voz, $s_a(t)$ se asume que no tiene energía por encima de los 5 KHz y se ha muestreado con una frecuencia de muestreo de 10 KHz. Para ello se propone el sistema de la Figura 2:

   - Indique como es el espectro de $v(n)$.
   - Suponiendo que el filtro de tiempo discreto esta definido por la ecuación en diferencias $y(n) = v(n) + \frac{1}{2}[v(n-1) + v(n+1)]$ determine la frecuencia del filtro y sus efectos en $v(n)$.
   - Encuentre la relación entre $Y_a(\Omega)$ y $X_a(\Omega)$ y determine si se ha logrado el objetivo.

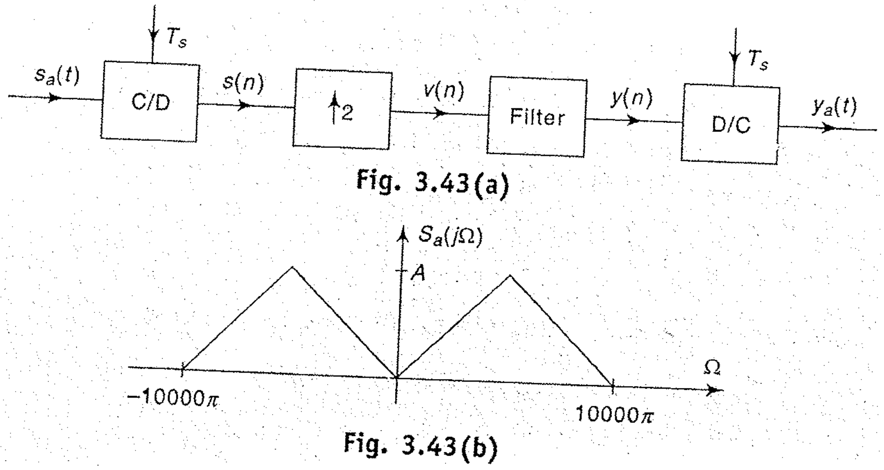


Figura 2: Sistema del problema 2.

4. Verifique la estabilidad de la siguiente función de transferencia IIR causal y, si no es estable, encuentre una función de transferencia estable con una función de magnitud idéntica:

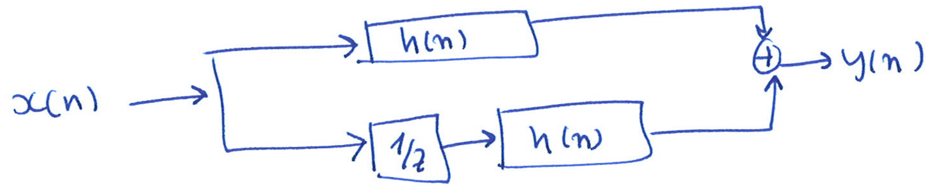
$$H(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 2z + 6}{(2z+3)(z^2 + 0{,}5z + 0{,}8)} \tag{1}$$

5. Demuestre que la transformada de Fourier de una señal periódica y discreta es periódica y discreta.

① ①

$h(n) = (0.9)^n u(n)$

$x(n) = 10\cos(\frac{\pi}{2} n)$ ← Entrada sinusoidal



$H(z) = \dfrac{1}{1-0.9z^{-1}}$

$G(z) = H(z) + z^{-1} \cdot H(z) = \dfrac{1}{1-0.9z^{-1}} + \dfrac{z^{-1}}{1-0.9z^{-1}} = \dfrac{1+z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}$

$x(n) \rightarrow$ tiene una componente en frecuencia en $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$y(n) = |G(j\omega)|_{\omega=\pi/2} \, e^{-j\theta(\omega)|_{\omega=\pi/2}} \cdot 10 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

$$G(j\omega)\Big|_{\omega=\pi/2} = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-0.9e^{-j\omega}}\Bigg|_{\omega=\pi/2} = \frac{1+\cancel{\cos\pi/2} - j\underbrace{\text{sen}\,\pi/2}_{1}}{1-0.9\cancel{\cos\pi/2}+0.9j\underbrace{\text{sen}\,\pi/2}_{1}} =$$

$$= \frac{1-j}{1+0.9j} = \frac{(1-j)(1-0.9j)}{(1+0.9j)(1-0.9j)} = \frac{1-0.9j-j-0.9}{1+(0.9)^2} = \frac{1-0.9-1.9j}{1+(0.9)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=\pi/2} = \left|\frac{1-j}{1+0.9j}\right| = \left|\frac{\sqrt{(1-0.9)^2+(1.9)^2}}{1+(0.9)^2}\right| = A.$$

$$\theta(\omega)/_{\omega=\pi/2} = \text{arctg}\,\frac{-1.9}{1-0.9} = \theta_1$$

$$y(n) = A.10.\cos(\tfrac{\pi}{2}n + \theta_1)$$

② Calcule los 3 coeficiente de un filtro FIR paso bajo con una frecuencia de corte de 800 Hz y una frecuencia de muestreo de 8000 Hz. Determine la función de transferencia y la ecuación en diferencias del filtro diseñado. Y calcule y dibuje la respuesta de magnitud para $\omega = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ y π radians.

a) $\omega_c = 2\pi f_c T_s = \frac{2\pi \times 800}{8000} = 0.2\pi$ rad : frecuencia angular de corte normalizada

~~2M+1~~ $2M+1=3$

h(n) de un filtro paso bajo: $h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & n=0 \\ \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{n\pi} & n\neq 0 \quad -M \leq n \leq M \end{cases}$

$h(0) = \frac{\omega_c}{\pi} = 0.2$

$h(1) = \frac{\operatorname{sen} 0.2\pi}{\pi} = 0.1871$

Si elijo el filtro con respuesta impulsiva simétrica ~~$b_0 = h(0-1) = h(-1) = 0$~~ obtengo que los coeficientes del filtro con un retardo de una muestra son

$\{0.1871, \underset{\uparrow}{0.2}, 0.1871\}$

b) la función de transferencia

$H(z) = 0.1871 + 0.2z^{-1} + 0.1871 z^{-2}$

$Y(z) = X(z)H(z) = 0.1871 X(z) + 0.2z^{-1}X(z) + 0.1871 z^{-2}X(z)$

$y(n) = 0.1871\, x(n) + 0.2\, x(n-1) + 0.1871\, x(n-2)$

c) $H(\omega) = 0.1871 + 0.2 e^{-j\omega} + 0.1871 e^{-j2\omega} =$

$= e^{-j\omega}\left[0.1871 e^{j\omega} + 0.2 + 0.1871 e^{-j\omega}\right] =$

$= e^{-j\omega}\left[0.2 + 0.1871 * 2\cos\omega\right] = e^{-j\omega}\left[0.2 + 0.3742\cos\omega\right]$

$$|H(e^{j\omega})| = |0.2 + 0.3472\cos\omega|$$

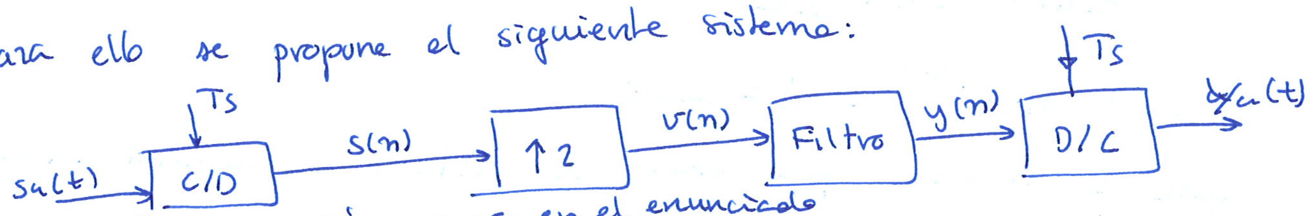
$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \Omega & \text{si } 0.2 + 0.3472\cos\omega > 0 \\ -\Omega + \pi & \text{si } 0.2 + 0.3472\cos\omega < 0 \end{cases}$$

ω (rd)	$f = \omega f_s / 2\pi$	$\lvert H(e^{j\omega})\rvert$	$\angle H(e^{j\omega})$ °
0	0	0.5742	0
$\pi/4$	1000	0.4646	-45
$\pi/2$	2000	0.2	-90
$3\pi/4$	3000	0.0646	45
π	4000	0.1742	0

③

Supongamos que queremos ralentizar la velocidad de un segmento de voz a la mitad. La señal de voz $(s_a(t))$ se asume que no tiene energía por encima de 5 KHz y que se ha muestreado con una frecuencia de muestreo de 10 KHz. $s(n) = s_a(nT_s)$ y $T_s = \frac{1}{F_s} = \frac{1}{10k}$ sg.

para ello se propone el siguiente sistema:



Información que va en el enunciado

a) Indique cómo es el espectro de v(n)

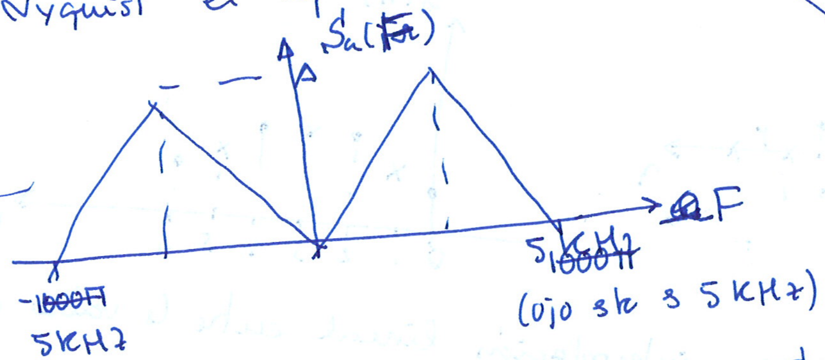
b) Suponiendo que el filtro de tiempo discreto está definido por la siguiente ec. en diferencias

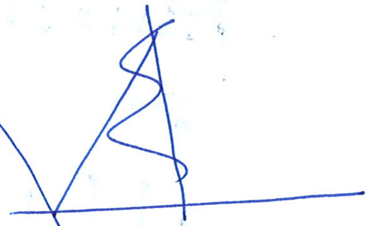
$$y(n) = v(n) + \frac{1}{2}\left[v(n-1) + v(n+1)\right]$$

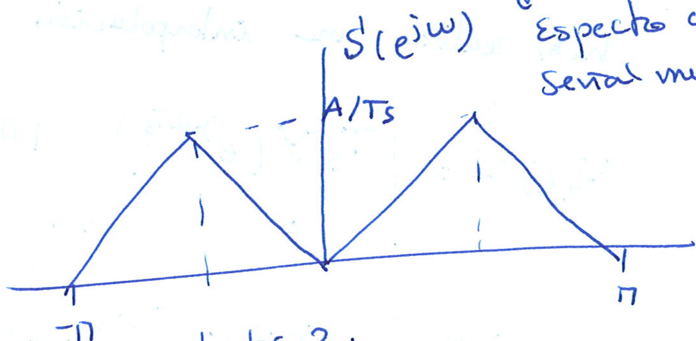
determine la respuesta en frecuencia del filtro y sus efectos en v(n)

c) Encuentre la relación entre $Y_a(j\Omega)$ y $X_a(j\Omega)$. Y determine si se ha conseguido el objetivo

a) puesto que la señal $s_a(t)$ está muestreada a la frecuencia de Nyquist el espectro de s(n) será:

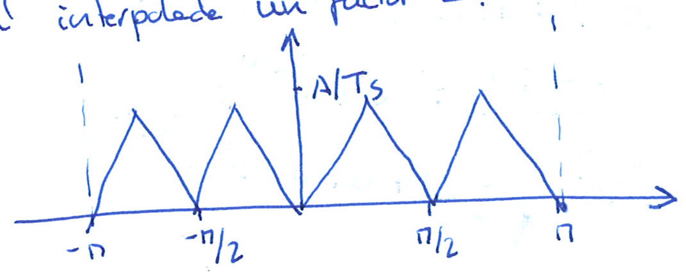






Espectro de la señal muestreada

Espectro de la señal interpolada un factor 2:



Si la ecuación en diferencias del filtro es de la forma

$$y(n) = v(n) + \frac{1}{2}\left[v(n-1) + v(n+1)\right]$$

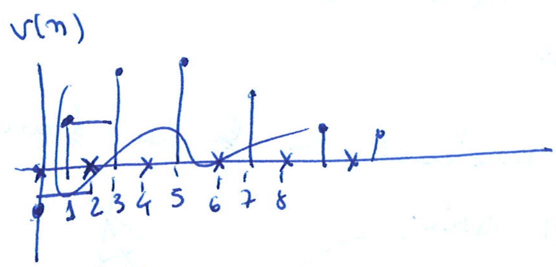
La respuesta al impulso

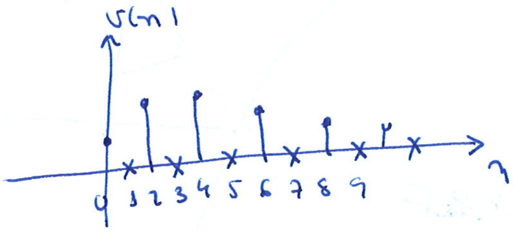
$$h(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\left[\delta(n-1) + \delta(n+1)\right]$$

y $H(e^{j\omega}) = 1 + \cos\omega$

para ver el efecto que tiene el filtro sobre la señal interpolada $v(n)$ tenemos que tener en cuenta que la forma de interpolar ~~en~~ un factor 2 es ~~inte~~ insertar un cero entre cada dos muestras., entonces $v(n) = 0$ para n impar

$$y(n) = \begin{cases} v(n) & n \ \cancel{\text{impar}} \ \text{par} \\ \frac{1}{2}\left(v(n-1) + v(n+1)\right) & n \ \text{impar} \end{cases}$$





$h(n)$ realiza una interpolación lineal entre los valores de $v(n)$

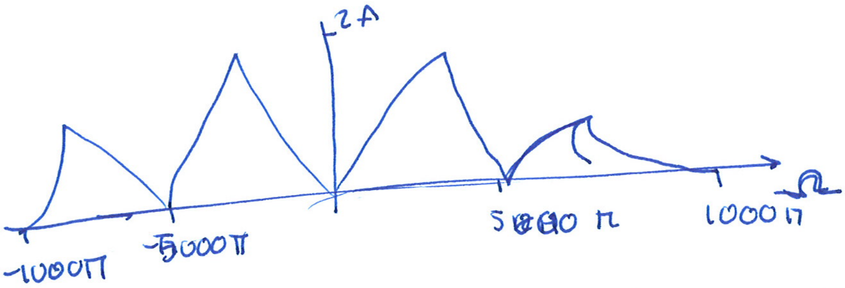
c) $$Y_a(j\Omega) = \begin{cases} T_s Y(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \pi/T_s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})V(e^{j\omega}) = (1+\cos\omega)V(e^{j\omega})$$

$$V(e^{j\omega}) = S(e^{j2\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = (1+\cos\omega)S(e^{j2\omega})$$

$$Y_a(j\Omega) = \begin{cases} T_s(1+\cos\Omega T_s)\, S(e^{j2\Omega T_s}), & |\Omega| < \cancel{8000}\ 10.000\pi \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



Luego el objetivo no se ha conseguido !!! ~~La no linealidad~~ debido a las imágenes de $S_a(t)$ en el rango de frecuencias entre $\Omega = 5000\pi$ y 10000π

④

$$H(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 2z + 6}{(2z+3)(z^2 + 0.5z + 0.8)}$$

polos: $2z + 3 = 0$; $z = -\frac{3}{2}$ ← polo instable

$$z^2 + 0.5z + 0.8 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \begin{cases} -0'25 + j0'8588 \\ -0.25 - j0.8588 \end{cases}$$

$$|z_1| = |z_2| = 0.8944$$

Para estabilizar $H(z)$ hay que multiplicar por el siguiente filtro pasa todo

$$\frac{2z+3}{3z+2}$$

$$H_1(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 2z + 6}{\cancel{(2z+3)}(z^2+0.5z+0.8)} \cdot \frac{\cancel{(2z+3)}}{(3z+2)} \cdot z^{-1}$$