Comunicaciones II – 3º GITT – (5 de Febrero de 2015)

Apellidos y nombre: ____ DNI: ______________ Grupo: ____

Problema 1. ***[1,5 Puntos]*** Considere un sistema de comunicación digital que utiliza 4 símbolos para representar grupos de 2 bits en un espacio de señal de 4 dimensiones, para el que las asignaciones de bit y las coordenadas de los símbolos son los de la tabla siguiente.

SÍMBOLO	BITS	COORDENADAS
s_0	00	[-A -A -A -A]
s_1	01	[-A +A -A +A]
s_2	10	[+A -A +A -A]
s_3	11	[+A +A +A +A]

a) *[0.3 puntos]* Determine la energía media por símbolo y la distancia mínima de la constelación en función de A.
b) *[0.6 puntos]* Obtenga una aproximación basada en la cota de la unión para la probabilidad de error de símbolo en función de la energía media por símbolo y la densidad de potencia espectral del ruido $N_0/2$. Considere símbolos equiprobables.
c) *[0.6 puntos]* Obtenga una estimación del BER en función de la energía media por bit y la densidad de potencia espectral del ruido $N_0/2$. Considere símbolos equiprobables. Para simplificar los cálculos considere la aproximación de decisiones binarias dada por $p(s_j|s_i) \cong Q\left(\frac{d(s_j,s_i)}{\sqrt{2N_o}}\right)$ donde $d(s_j,s_i)$ es la distancia entre los símbolos considerados.

Apartado a)

La energía media por símbolo se calcula simplemente como la suma de los cuadrados de las coordenadas de cada símbolo. Y asumiendo símbolos equiprobables, se obtiene el promedio de los 4 símbolos.

$$E[s_0] = E[s_1] = E[s_2] = E[s_3] = A^2 + A^2 + A^2 + A^2 = 4A^2$$

$$E_s = \frac{E[s_0] + E[s_1] + E[s_2] + E[s_3]}{4} = 4A^2$$

$$E_s = 4A^2$$

Para calcular la distancia mínima, calculamos las distancias entre cada pareja de símbolos

$$d(s_0,s_1) = d(s_0,s_2) = d(s_1,s_3) = d(s_2,s_3) = \sqrt{0^2 + (2A)^2 + (2A)^2 + 0^2} = \sqrt{8A^2} = 2\sqrt{2}A$$

$$d(s_0,s_3) = d(s_1,s_2) = \sqrt{(2A)^2 + (2A)^2 + (2A)^2 + (2A)^2} = \sqrt{16A^2} = 4A$$

Y además se tiene por la definición de distancia que $d(s_i,s_j) = d(s_j,s_i)$

De forma que la distancia mínima es $d_{min} = 2\sqrt{2}A$

Apartado b)

La cota de la unión establece un límite máximo a la probabilidad de error de símbolo considerando decisiones binarias entre los símbolos. De esta forma, la probabilidad de error condicionada a la transmisión del símbolo s_i se calcula sumando las probabilidades de confusión de este símbolo con los demás de la constelación

$$P_{e|s_i} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} P_e(s_i,s_j)$$

Donde las probabilidades de error son de la forma

$$P_e(s_i, s_j) = P(s_j|s_i) = Q\left(\frac{d(s_i, s_j)}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Que dependen de las distancias entre símbolos, que ya hemos calculado previamente.

Consideremos el símbolo s_0, en este caso tenemos dos símbolos (s_1 y s_2) a distancia $2\sqrt{2}A$ y un símbolo (s_3) a distancia $4A$

$$P_{e|s_0} \leq P(s_1|s_0) + P(s_2|s_0) + P(s_3|s_0) = Q\left(\frac{d(s_0, s_1)}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{d(s_0, s_2)}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{d(s_i, s_3)}{\sqrt{2N_0}}\right)$$
$$= Q\left(\frac{2\sqrt{2}A}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{2\sqrt{2}A}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{4A}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\frac{2A}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{4A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$$P_{e|s_0} \leq 2Q\left(\frac{2A}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{4A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Para los otros símbolos tenemos la misma contribución (dos símbolos a distancia $2\sqrt{2}A$ y un tercero a distancia $4A$ por lo tanto

$$P_{e|s_0} = P_{e|s_1} = P_{e|s_2} = P_{e|s_3}$$

Por lo que, considerando símbolos equiprobables $P(a_i) = \frac{1}{M} = \frac{1}{4}$ y la relación anterior obtenemos

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} P(a_i)P_{e|a_i} = \sum_{i=0}^{3} P(a_i)P_{e|a_i} = P_{e|a_0} \leq 2Q\left(\frac{2A}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{4A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$$P_e \leq 2Q\left(\frac{2A}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{4A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

La energía media por símbolo que calculamos en el apartado anterior nos permite expresar la amplitud A en función de E_s

$$E_s = 4A^2 \qquad\qquad A = \frac{\sqrt{E_s}}{2}$$

$$P_e \leq 2Q\left(\frac{2\frac{\sqrt{E_s}}{2}}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{4\frac{\sqrt{E_s}}{2}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

$$P_e \leq 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Nota: Esto es intuitivamente correcto dado que cada símbolo tiene DOS símbolos ortogonales que contribuyen con una probabilidad de error $Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$ *cada uno y UNO antipodal que contribuye con* $Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$.

Apartado c)

Para el cálculo del BER, consideremos de nuevo el símbolo s_0. Usando la relación

$$BER_{s_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} \frac{d_H(s_j, s_i)}{m} P(s_j|s_i) = \frac{d_H(s_1, s_0)}{2} P(s_1|s_0) + \frac{d_H(s_1, s_0)}{2} P(s_2|s_0) + \frac{d_H(s_1, s_0)}{2} P(s_3|s_0)$$

Usamos las aproximaciones sugeridas de decisiones binarias para escribir

$$P(s_1|s_0) = P(s_2|s_0) \cong Q\left(\frac{d(s_0, s_1)}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{2}A}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$p(s_3|s_0) \cong Q\left(\frac{d(s_0, s_3)}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{4\frac{\sqrt{E_s}}{2}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Nota: hemos considerado las probabilidades condicionales calculadas en el apartado anterior.

Y entonces el BER condicionado a la transmisión del símbolo s_0 es

$$BER_{s_0} \cong \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + \frac{2}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

$$BER_{s_0} \cong Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Podemos repetir el mismo cálculo para el resto de los símbolos de la constelación, pero es fácil observar que, al igual que s_0 cada uno de los otros símbolo tiene DOS símbolos ortogonales con distancia de Hamming 1 y UN símbolo antipodal con distancia de Hamming 2; por lo tanto, todos los símbolos presentan el mismo BER y entonces (al ser todos los símbolos equiprobables)

$$BER = BER_{s_0} \cong Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Y como cada símbolo transporta 2 bits ($E_s = 2E_b$) tenemos finalmente

$$BER \cong Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + Q\left(2\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Resolución alternativa

Alternativo b)

Considerando la constelación del enunciado, es sencillo comprobar que los 4 símbolos NO SON INDEPENDENTES. En concreto se tienen las relaciones $s_3 = -s_0$ y $s_2 = -s_1$. Siendo además s_1 y s_2 ortogonales a s_0 y s_3. Por lo que podemos representarlos en un espacio de señal reducido de únicamente DOS dimensiones. Por ejemplo tomando s_0 y s_1 como funciones de la base (que son ortogonales entre si) convenientemente normalizadas en energía

$$\emptyset_o = \frac{s_0}{2A} = [-1/2 \quad -1/2 \quad -1/2 \quad -1/2]$$

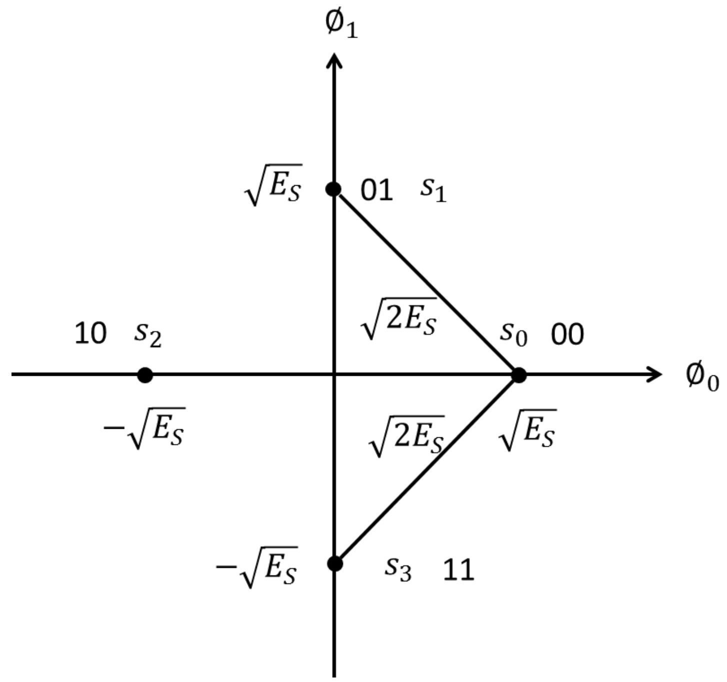
$$\emptyset_1 = \frac{s_1}{2A} = [-1/2 \quad +1/2 \quad -1/2 \quad +1/2]$$

En esta base, las coordenadas de los símbolos son (se obtienen proyectando las coordenadas actuales sobre los dos vectores de la base)

SÍMBOLO	BITS	COORDENADAS (nueva base)	COORDENADAS (nueva base)
s_0	00	[2A 0]	$[\sqrt{E_S} \quad 0]$
s_1	01	[0 2A]	$[0 \quad \sqrt{E_S}]$
s_2	10	[0 -2A]	$[0 \ -\sqrt{E_S}]$
s_3	11	[-2A 0]	$[-\sqrt{E_S} \ 0]$

Nota: Se ha usado la relación de la energía media por símbolo $A = \frac{\sqrt{E_S}}{2}$ *derivada anteriormente*

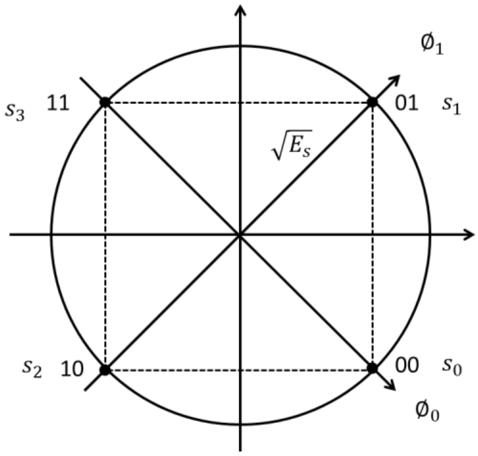
Que es una constelación tipo QPSK con codificación de Gray como la mostrada en la figura



Donde se aprecia fácilmente la simetría de la constelación. El cálculo de la cota de la unión ofrece el mismo resultado que en el caso anterior evidentemente. La probabilidad de error de símbolo es igual para todos los símbolos. Por ejemplo calculamos la de s_0 que consiste en la suma de la probabilidad de dos símbolos a distancia $\sqrt{2E_s}$ y un tercero a distancia $2\sqrt{E_s}$ por lo tanto

$$P_e \leq 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Pero también podemos calcular de forma exacta la probabilidad de error de símbolo. Si rotamos la constelación tenemos



$$P_{a|s_1} = \int_{q\in I_1} f_{q|A}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_1)d\boldsymbol{q} = \left(\int_0^{\infty} f_{q_0|A}(q_0|\boldsymbol{s}_1)dq_0\right)\left(\int_0^{\infty} f_{q_1|A}(q_1|\boldsymbol{s}_1)dq_1\right)$$
$$= \left(1 - \int_{-\infty}^{0} f_{q_0|A}(q_0|\boldsymbol{s}_1)dq_0\right)\left(1 - \int_{-\infty}^{0} f_{q_1|A}(q_1|\boldsymbol{s}_1)dq_1\right)$$

Y teniendo en cuenta que tanto $f_{q_0|A}(q_0|\boldsymbol{s}_1)$ como $f_{q_1|A}(q_1|\boldsymbol{s}_1)$ son gausianas centradas en $\sqrt{\frac{E_s}{2}}$ la integral resulta en

$$P_{a|s_1} = \left(1 - Q\left(\frac{\sqrt{\frac{E_s}{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)\right)\left(1 - Q\left(\frac{\sqrt{\frac{E_s}{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)\right) = \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right)^2$$

$$P_{e|s_1} = 1 - P_{a|s_1} = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right)^2 = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$P_e = P_{e|s_1} = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Que es un valor inferior a la cota de la unión que calculamos antes y los términos dominantes (los de menor valor) de las dos expresiones coinciden.

Alternativo c)

Podemos calcular el BER aproximado con esta nueva constelación, y obtendremos el mismo resultado, donde aquí es sencillo ver que por la simetría de la constelación, el BER es igual para todos los símbolos, y que consta de dos símbolos ortogonales a distancia $\sqrt{2E_s}$ con distancia de Hamming 1 y un símbolo antipodal a distancia $2\sqrt{E_S}$ y distancia de Hamming 2. Por lo tanto tenemos

$$BER \cong Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + Q\left(2\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

El exacto se puede calcular de la constelación anterior, pero ya lo hemos derivado varias veces, y para una QPSK con codificación de Gray resulta igual que en el caso BPSK (antipodal binario)

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Que coincide con el término dominante de la aproximación.

Problema 2. ***[1,5 Puntos]*** Considere el código de bloque lineal cuya matriz de paridad es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *[0.3 puntos]* Determine la dimensión (n, k) del código
b) *[0.4 puntos]* Construya su matriz de generación y la tabla de codificación
c) *[0.4 puntos]* ¿Cuál es la distancia mínima del código? ¿Cuántos bits erróneos es capaz de detectar? ¿Cuántos bits erróneos es capaz de corregir?
d) *[0.4 puntos]* Obtenga la matriz de verificación de paridad y calcule el síndrome de la palabra $r = [0\ 1\ 1\ 1\ 1]$

Apartado a)

La dimensión de la matriz de paridad es $[k \times (n-k)]$ y contiene k filas y $(n-k)$ columnas, por lo tanto $k = 2$ y $(n-k) = 3$ por lo que $n = 3 + k = 3 + 2 = 5$, es decir

$$(n, k) = (5,2)$$

Apartado b)

La matriz de generación de un código sistemático se construye como

$$G = [P|I_k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para construir la tabla de codificación, usamos la relación $U = mG$ que permite obtener la palabra código U para cada palabra mensaje m. Podemos obtener todos los códigos de una vez si definimos una matriz con los mensajes por filas M y la multiplicamos por la matriz de generación G, obteniendo una matriz con todas las palabras código por filas (o hacer los productos individualmente)

$$MG = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Tenga en cuenta que se trata de aritmética módulo 2

Luego la tabla de codificación es

m	U	$w(U)$
0 0	0 0 0 0 0	0
0 1	1 1 0 0 1	3
1 0	0 0 1 1 0	2
1 1	1 1 1 1 1	5

Hemos añadido $w(U)$ con el peso de Hamming de cada palabra del código para usarlo en el apartado siguiente.

Apartado c)

De la tabla anterior es sencillo comprobar que

$$d_{min} = \min_{U \neq 0} \{w(U)\} = 2 \qquad t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor = 0$$

Por lo tanto el código es capaz de detectar un máximo de 1 bit erróneo y no es capaz de corregir ningún error.

Apartado d)

La matriz de verificación de paridad (de un código sistemático) es

$$H = [I_{n-k}|P'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El síndrome se obtiene multiplicando la palabra recibida por la transpuesta de la matriz de verificación de paridad, luego tenemos

$$s = rH' = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Problema 3. ***[1 Punto]*** Considere un sistema de comunicación digital DQPSK para el que la señal a la salida del filtro adaptado es de la forma $q[n] = A[n]e^{-jnw_o} + z[n]$ donde el término $w_o = \pi/16$ es debido a un error de frecuencia en el receptor y $z[n]$ es un ruido blanco gausiano. Los símbolos transmitidos son

$$A[n] \in \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = j \quad a_2 = -1 \quad a_3 = -j$$

En ausencia de ruido ($z[n] = 0]$):

a) *[0.5 puntos*] Dibuje la constelación en el transmisor (símbolos transmitidos) y en el receptor (observaciones $q[n]$) ¿Cuál es el efecto del error de frecuencia?

b) *[0.5 puntos]* Para la decodificación el receptor utiliza las observaciones modificadas $u[n] = q[n]q^*[n-1]$ resultantes de multiplicar la observación actual por el complejo conjugado de la observación anterior. Dibuje la constelación para $u[n]$ y compárela con la constelación del transmisor. ¿Cuál es el efecto del error de frecuencia?

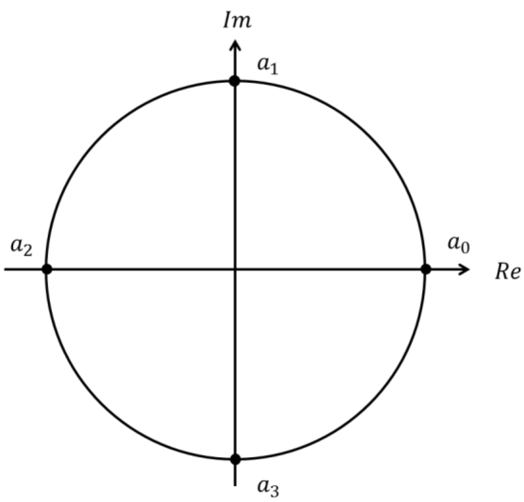
Antes de comenzar a desarrollar el problema, resulta conveniente expresar los símbolos de la constelación en forma de módulo y fase

$$a_0 = 1 = e^{j0} \quad a_1 = j = e^{\frac{j\pi}{2}} \quad a_2 = -1 = e^{j\pi} \quad a_3 = -j = e^{\frac{j3\pi}{2}}$$

$$a_k = e^{j\frac{k\pi}{2}} \qquad k = 0,1,2,3$$

Apartado a)

Es decir, que nuestra constelación es simplemente una 4PSK (una QPSK no rotada). Por lo tanto, la constelación del transmisor es



Las observaciones en el receptor son de la forma (en ausencia de ruido)

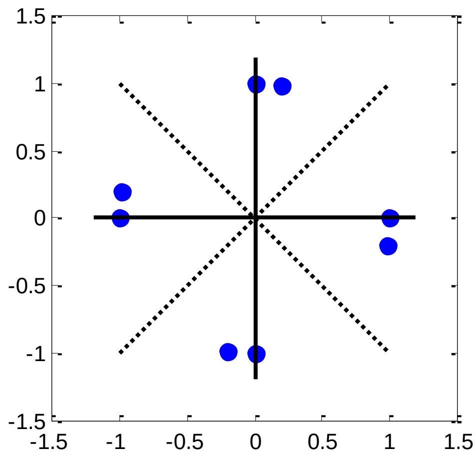
$$q[n] = A[n]e^{-jnw_o} = e^{j(\phi[n]-nw_o)}$$

Donde $\phi[n]$ es la fase correspondiente al símbolo n-ésimo, que será un valor de entre las cuatro posibles fases $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ dependiendo del símbolo transmitido. Por lo tanto la fase de $q[n]$ será $\sphericalangle q[n] = (\phi[n] - nw_o)$ cuyo valor depende tanto de la fase del símbolo transmitido $\phi[n]$ como del índice n de secuencia del mismo.

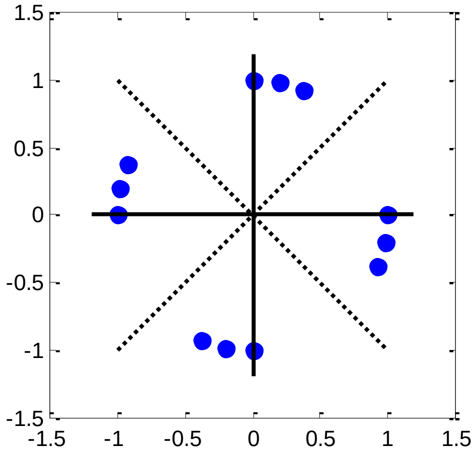
Para calcular los valores de la fase de $q[n]$ bastan con considerar que cada nuevo símbolo recibido la constelación rota un ángulo $-w_o$. Así, para el primer símbolo $n = 0$ la constelación es la misma del transmisor. Para el segundo símbolo $n = 1$ la constelación está rotada $-\frac{\pi}{16}$ y aparecen 4 nuevos símbolos en la constelación. En general, la tabla siguiente se muestra la rotación de la constelación en función del índice n

n	nw_o
0	0
1	$\pi/16$
2	$\pi/8$
3	$3\pi/16$
4	$\pi/4$
5	$5\pi/16$
6	$6\pi/16$
7	$7\pi/16$
8	$8\pi/16 = \pi/2$
…	…

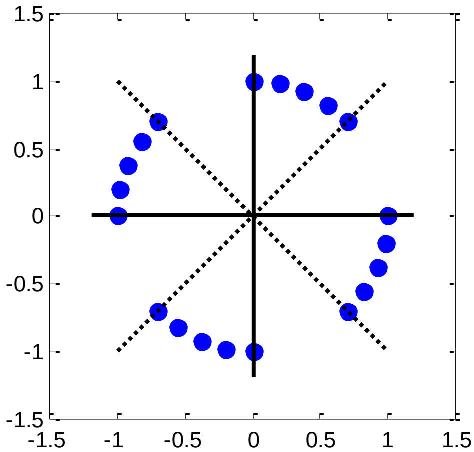
Si trazamos superpuestas las constelaciones correspondientes a $n = 0{,}1$ obtenemos la siguiente constelación



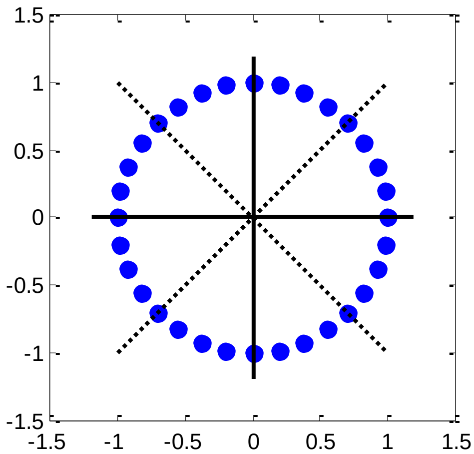
Si superponemos las correspondientes a $n = 0,1,2$ tenemos la siguiente constelación



Y para $n = 0,1,2,3,4$ tenemos



Y finalmente para $= 0,1,2,3,4,5,6,7$ tenemos



A partir de este valor no aparecen nuevos puntos en la constelación. Como se puede observar, el efecto es una rotación $-w_o = -\frac{\pi}{16}$ de la constelación por cada nuevo símbolo trasmitido, lo que provocará errores en el receptor incluso en ausencia de ruido. Observe que a partir del símbolo $n = 4$ aparecen errores porque los símbolos originales se trasladan a regiones de decisión adyacentes.

El efecto del error de frecuencia es una rotación continua de la constelación, en pasos de w_o por cada nuevo símbolo

Apartado b)

Para los símbolos modificados $u[n] = q[n]q^*[n-1]$, la fase correspondiente es de la forma

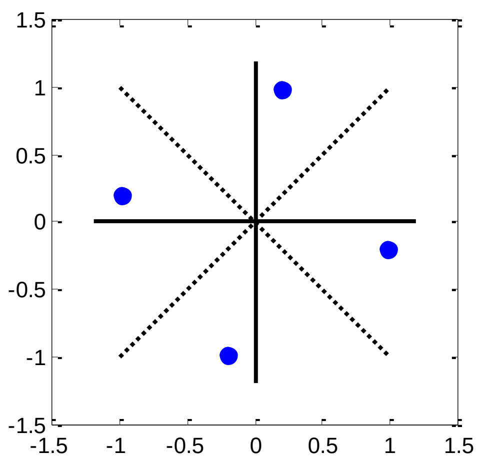
$$u[n] = q[n]q^*[n-1] = e^{j(\phi[n]-nw_o)}e^{-j(\phi[n-1]-(n-1)w_o)} = e^{j(\phi[n]-\phi[n-1]-w_o)}$$

La fase de las observaciones modificadas $u[n]$ es por lo tanto de la forma

$$\sphericalangle u[n] = (\phi[n]-\phi[n-1]) - w_0 = \Delta\phi[n] - w_0$$

$$\sphericalangle u[n] = \Delta\phi[n] - w_0$$

Note que ahora las fases diferenciales $\sphericalangle u[n]$ están afectadas por un error constante w_o a diferencia del caso de las fases absolutas (caso del apartado a) donde se incrementaba con cada nuevo símbolo. Los posibles valores del término $\Delta\phi[n] = (\phi[n]-\phi[n-1])$ son al igual que en la constelación original $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
Por lo tanto el efecto sobre $u[n]$ es ahora una rotación de la constelación original pero un ángulo fijo $-w_o = -\frac{\pi}{16}$.



Nota: Puede observarse que en ausencia de ruido y usando un esquema diferencial, no se producen errores en el receptor porque la constelación de $u[n]$ aparece rotada respecto de la constelación diferencial del transmisor (de fases $\Delta\phi[n]$) un ángulo w_0 fijo inferior a $\frac{\pi}{4}$ (que es la frontera angular de decisión entre símbolos adyacentes.