Señales Digitales

Examen Extraordinario de Septiembre – 01-09-2009

1. Dada la siguiente ecuación en diferencias correspondiente a un sistema LTI de segundo orden:

$$0.5y(n)+0.5y(n-1)-3y(n-2)=x(n)$$

Calcular:

a) La respuesta a la entrada cero cuando las condiciones iniciales (C.I.) son: $y(-1)=y(-2)=-1$.

b) La respuesta del sistema en reposo cuando la entrada es $x(n)=5u(n)$, donde $u(n)$ es la función escalón y las C.I. nulas.

c) La respuesta del sistema a la entrada anterior cuando las C.I. son las del apartado a) $(y(-1)=y(-2)=-1)$.

d) La respuesta al impulso del sistema.

2. La siguiente función de transferencia describe un filtro FIR:

$y(n) = x(n)+x(n-10)$.

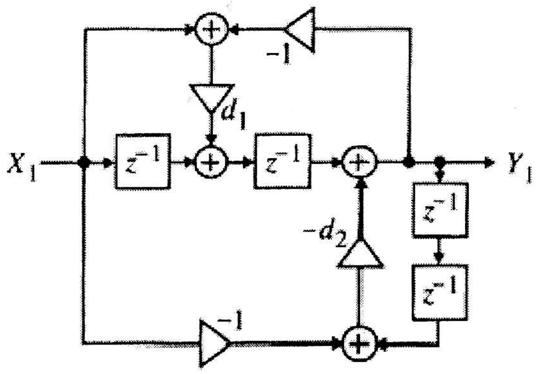
a) Calcule y dibuje la respuesta en frecuencia (magnitud y fase)

b) Determine la respuesta del sistema a la siguiente entrada:

$x(n)=\cos(\pi n/10)+3\mathrm{sen}(\pi n/3 + \pi/10)$

3. Diseñe un filtro ranura FIR de longitud 3 con respuesta al impulso, $h(n)$, simétrica ($h(n)=h(2-n)$, $0\leq n\leq 2$), con frecuencia de ranura 0.4π y una ganancia de continua de 0 dB.

4. Indique a qué tipo de filtro corresponde la siguiente estructura. Determine su respuesta al impulso.



5. Enuncie y demuestre el teorema de muestreo.

$0'5y(n) + 0.5y(n-1) - 3y(n-2) = x(n)$

1.- Se puede resolver de varias formas:

I) - Utilizando el método de solución de la ecuación en diferencias

II) - Utilizando la T.Z, si las C.I $\neq 0$ la T.Z unilateral si las C.I $= 0$ la T.Z.

Se muestra la solución usando I.

1. a) $0.5y(n) + 0.5y(n-1) - 3y(n-2) = 0$

respuesta a entrada cero con C.I $y(-1) = y(-2) = 1$.

Ecuación característica

$$0.5\lambda^n + 0.5\lambda^{n-1} - 3\lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2}[0.5\lambda^2 + 0.5\lambda - 3] = 0 \qquad \lambda \neq 0$$

$$\lambda = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4 \cdot 0.5 \cdot 3}}{2 \cdot 0.5} = \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

sol. homogénea

$$y_h(n) = c_1(2)^n + c_2(-3)^n$$

Calculamos c_1 y c_2 teniendo en cuenta las C.I

de la sol. homogénea:

$$y_h(0) = c_1 + c_2$$

$$y_h(1) = 2c_1 - 3c_2$$

de la ecuación en diferencias cuando $x(n) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0.5y(0) + 0.5\underbrace{y(-1)}_{1} - 3\underbrace{y(-2)}_{1} = 0 \\ 0.5y(1) + 0.5y(0) - 3\underbrace{y(-1)}_{1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y(0) = -5 \\ y(1) = -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = -5 \\ 2c_1 - 3c_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -16/5 \\ c_2 = -9/5 \end{array} \qquad y_h(n) = -\frac{16}{5}(2)^n - \frac{9}{5}(-3)^n =$$

b) $x(n) = 5u(n)$ C.I $= 0$.

Sol. homogénea $y_h(n) = c_1(2)^n + c_2(-3)^n$

Sol. particular $y_p(n) = Ku(n)$

calculamos K para que se verifique la ecuación en diferencias

$$\frac{1}{2}Ku(n) + \frac{1}{2}Ku(n-1) - 3Ku(n-2) = 5u(n)$$

La evaluamos en $n=2$

$$\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K - 3K = 5$$

$$-2K = 5 \Rightarrow K = -5/2$$

$$y_p(n) = K\,u(n) = -\frac{5}{2}u(n)$$

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = C_1(2)^n + C_2(-3)^n - \frac{5}{2}u(n)$$

calculamos C_1 y C_2 para C.I = 0

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - 5/2 \\ y(1) &= 2C_1 - 3C_2 - 5/2 \end{aligned}\right\}$$

de la ecuación en diferencias:

$$\frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}\cancel{y(-1)} - 3\cancel{y(-2)} = 5 \Rightarrow y(0) = 10$$

$$\frac{1}{2}y(1) + \frac{1}{2}y(0) - 3\cancel{y(-1)} = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}y(1) + 5 = 5$$

$$y(1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 - 5/2 &= 10 \\ 2C_1 - 3C_2 - 5/2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= 8 \\ C_2 &= 9/2 \end{aligned}$$

$$y(n) = 8(2)^n + \frac{9}{2}(-3)^n - \frac{5}{2}u(n) =$$

$$(2)^{n+3} + \frac{1}{2}(-3)^{n+2} - \frac{5}{2}u(n) = y_{zi}(n)$$

c) $x(n) = 5u(n)$ C.I $y(-1) = y(-2) = -1$

se suman las respuestas obtenidas en a y b

a: respuesta del sistema a la entrada cero

b: respuesta del sistema a una entrada con C.I. cero.

o también $y(n) = y_h(n) + y_p(n) = C_1(2)^n + C_2(-3)^n - \frac{5}{2}u(n)$

y se calcula C_1 y C_2 para las C.I dadas

d) Respuesta al impulso.

$$h(n) = C_1(2)^n + C_2(-3)^n$$

se calcula C_1 y C_2 para C.I=0 y $x(n) = \delta(n)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}\cancel{y(-1)} - 3\cancel{y(-2)} &= 1 \\ \frac{1}{2}y(1) + \frac{1}{2}y(0) - 3\cancel{y(-1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y(0) &= 2 \\ y(1) &= -2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 2 \\ 2C_1 - 3C_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= 4/5 \\ C_2 &= 6/5 \end{aligned}$$

$$h(n) = \frac{4}{5}(2)^n + \frac{6}{5}(-3)^n.$$

2.- $y(n) = x(n) + x(n-1)$

a) Esta ecuación se corresponde con un filtro peine.

$$Y(\omega) = (1 + e^{-j10\omega})X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = 1 + e^{-j10\omega} = 2\cos 5\omega \, e^{-j5\omega}$$

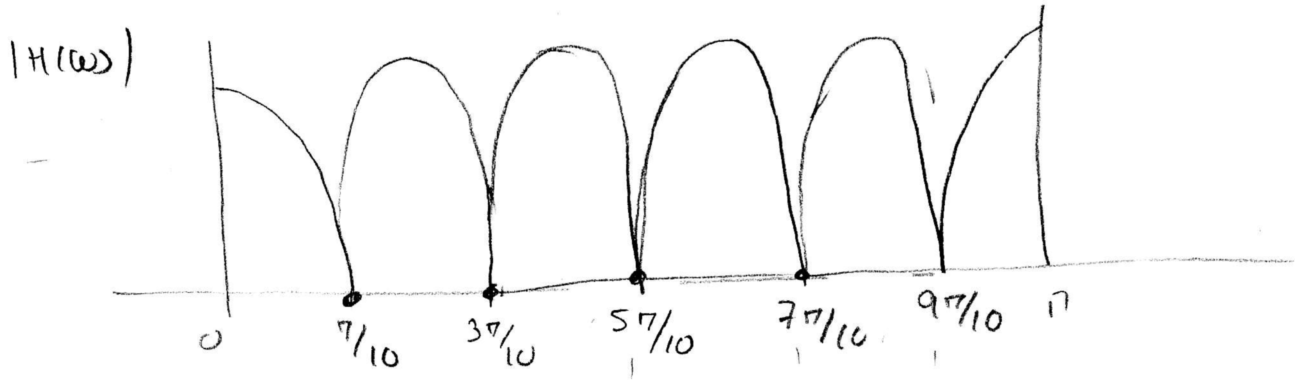
Se llega haciendo uso de las relacions trigonométricas $\begin{cases} \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \\ \text{sen}\, 2A = 2\,\text{sen}A \cos A \end{cases}$

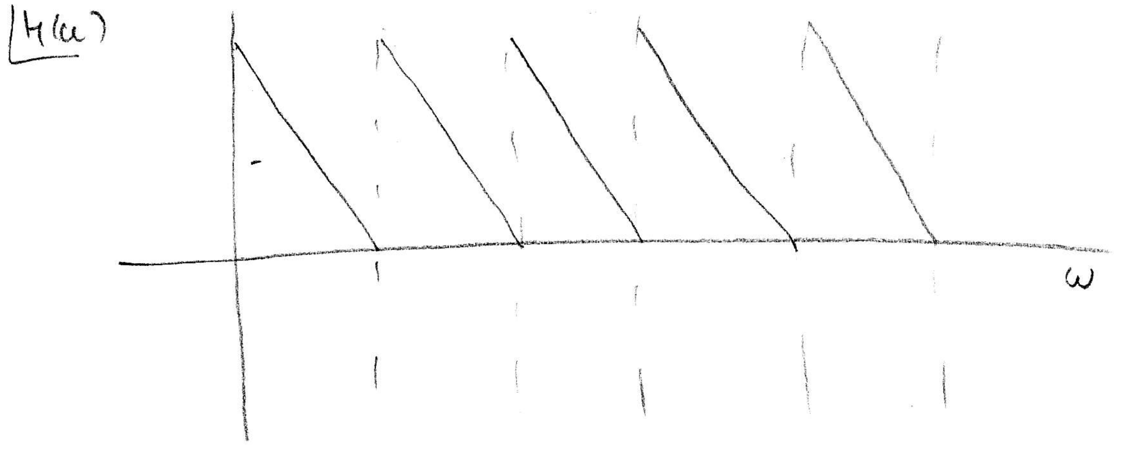
$$1 + \cos 10\omega - j\,\text{sen}\,10\omega = \cancel{1} + 2\cos^2 5\omega \cancel{-1} - j \cdot 2\cos 5\omega\, \text{sen}\, 5\omega =$$

$$2\cos 5\omega\,[\cos 5\omega - j\,\text{sen}\,5\omega] = 2\cos 5\omega\, e^{-j5\omega}$$

$H(\omega)$ tiene ceros en $5\omega = k\pi + \pi/2$, $\omega = \frac{k\pi}{5} + \pi/10$

máximos en $5\omega = k\pi$ $k = 0, 1, 2, \dots 9$





b) Respuesta a la entrada $x(n) = \cos \frac{\pi}{10} n + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right)$

se aplica el principio de superposición

$$Y(\omega) = H(\omega)\,[X_1(\omega) + X_2(\omega)]$$

$$H(\pi/10) = 2 \cdot \cos \frac{5\pi}{10}\, e^{-j5\pi/10} = 2\cos \pi/2\, e^{-j\pi/2} = 0$$

$$H(\pi/3) = 2\cos \frac{5\pi}{3}\, e^{-j5\pi/3}$$

$$y(n) = 6 \cdot \cos \frac{5\pi}{3}\, \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10} - \frac{5\pi}{3}\right)$$

3.- Filtro FIR de longitud 3 con $h(n)$ simétrica con frecuencia ranura en 0.4π y ganancia en continua 0 dB.

$$h(n) = h(N-1-n) = h(2-n)$$

$$h(0) = h(2)$$

$$h(1)$$

$$|H(\omega_r)| = 0$$

$$|H(0)| = 1$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = h(0) e^{0} + h(1) e^{-j\omega n} + h(0) e^{-2j\omega n} =$$

$$= h(0) [1 + e^{-j\omega 2n}] + h(1) e^{-j\omega n} =$$

$$h(0) e^{-j\omega n} [e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}] + h(1) e^{-j\omega n}$$

$$H(\omega) = h(0) 2\cos \omega n + h(1)$$

aplicando las condiciones $|H(0'4\pi)| = 0$ obtenemos
$|H(0)| = 1$

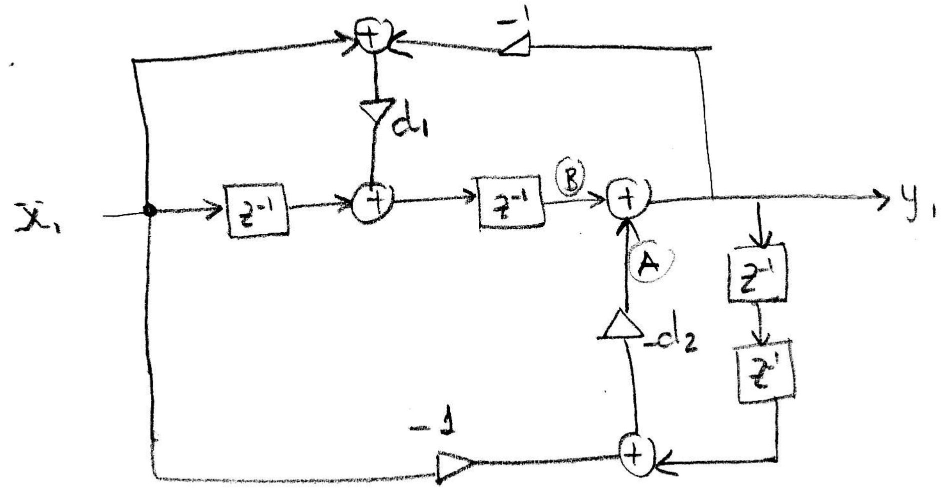
un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y calculamos $h(0)$ y $h(1)$

$$h(0) = h(2) = 0'72$$

$$h(1) = 0.44$$

$$h(n) = \{ 0'72, 0'44, 0'72 \}$$

4.



$$Y_1(z) = A(z) + B(z)$$

$$A(z) = (-X_1(z) + Y_1(z) \cdot z^{-2})(-d_2) = d_2 X_1(z) - d_2 z^{-2} Y_1(z)$$

$$B(z) = [(-Y_1(z) + X_1(z)) d_1 + X_1(z) \cdot z^{-1}] z^{-1} =$$

$$- d_1 Y_1(z) \cdot z^{-1} + X_1(z) d_1 z^{-1} + X_1(z) \cdot z^{-2}$$

$$Y_1(z) = -d_2 z^{-2} Y_1(z) + d_2 X_1(z) - d_1 Y_1(z) \cdot z^{-1} + X_1(z) d_1 z^{-1} + X_1(z) \cdot z^{-2}$$

$$Y(z)[d_2 z^{-2} + d_1 z^{-1} + 1] = X(z)[z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_2]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_2}{d_2 z^{-2} + d_1 z^{-1} + 1}$$

ecuación que corresponde con un filtro paso todo.

b) Respuesta al impulso:

$$H(z) = \frac{d_2 z^2 + d_1 z + 1}{z^2 + d_1 z + d_2} = d_2 + \frac{\overbrace{d_1(1-d_2)}^{a} z + \overbrace{1-d_2^2}^{b}}{z^2 + d_1 z + d_2}$$

se puede descomponer en fracciones simples

$$H(z) = d_2 + \frac{az + b}{(z-P_1)(z-P_2)} = d_2 + \frac{A}{z-P_1} + \frac{B}{z-P_2}$$

$$h(n) = d_2 \delta(n) + [A(P_1)^n + B(P_2)^n] u(n)$$