Teoría de la Comunicación
Examen de 11 de septiembre de 2015

Nombre:

1) Una señal se muestrea a razón de 1000 muestras por segundo y las muestras obtenidas $s(n)$ se pueden modelar como una variable aleatoria continua con una distribución Laplaciana. Se diseña un cuantizador para las muestras de la señal que viene dado en la siguiente tabla:

Entrada al cuantizador	Salida del cuantizador
$-\infty < s(n) \leq -2\alpha$	m_1
$-2\alpha < s(n) \leq -\alpha$	m_2
$-\alpha < s(n) \leq 0$	m_3
$0 < s(n) \leq \alpha$	m_4
$\alpha < s(n) \leq 2\alpha$	m_5
$2\alpha < s(n) \leq \infty$	m_6

(1)

a) (*1.25 puntos*) Determinar la entropía de la salida del cuantizador y la tasa de información en bits por segundo.

b) (*1.25 puntos*) Determinar los niveles de cuantización en función de α de forma que a la salida del cuantizador la entropía sea máxima.

2) El proceso aleatorio $X(t)$ se define como $X(t) = Ag(t)$ donde A es una variable aleatoria discreta que toma valores 1, 2 o 3 con probabililidad $P[A = 1] = 1/2$, $P[A = 2] = 1/4$ y $P[A = 3] = 1/4$ y $g(t)$ un pulso definido por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t-1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases} \tag{2}$$

Determine:

- a)(*0.5 puntos*) Determine la media del proceso $X(t)$.
- b)(*0.5 puntos*) Determine la función masa de probabilidad (pmf) de orden uno (pmf de las variables resultantes del muestreo en un instante de tiempo) del proceso aleatorio $X(t)$.
- c)(*0.75 puntos*) Determine la función masa de probabilidad (pmf) de orden dos (pmf conjunta de las variables resultantes del muestreo en dos instantes de tiempo) del proceso aleatorio $X(t)$.
- d)(*0.75 puntos*) Determine la autocorrelación del proceso aleatorio $X(t)$.

3) (*0.75 puntos*) Escriba la expresión matemática de la correlación cruzada y de la covarianza cruzada de dos procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$. Indique cuando estos dos procesos son independientes, cuando no están correlados y cuando son ortogonales.

4) (*0.75 puntos*) Defina qué es la información mutua entre la entra X y la salida Y de un canal e indique dos de sus propiedades. Defina qué es la capacidad de un canal.

5) (*1 punto*) Explique en detalle cómo ha obtenido la función de autocorrelación (estadística) $R_X(n_1, n_2)$ del proceso aleatorio de la segunda parte de la práctica 1 a partir de las 2000 realizaciones del proceso de que se disponen.

6) (*1 punto*).Explique en detalle cómo ha establecido una ley de probabilidad para el primer modelo de la *práctica 2* (indicando qué funciones de MATLAB ha utilizado). En las estimaciones 1 y 2 basadas en el primer modelo, Â¿obtenía siempre la misma estimación para la muestra que faltaba o la estimación que obtenía dependía de la muestra anterior recibida? Justifique su respuesta.

NOTA: En los ejercicios 1 y 2 no es suficiente con dar sólo la respuesta correcta sino que hay que mostrar cómo se ha obtenido el resultado. Si no se da una explicación el valor del ejercicio será de cero puntos.

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}\,dx = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a}$$

$$\int_0^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}\,\mathrm{erfc}\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

where $\mathrm{erfc}\,(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_p^\infty e^{-x^2}\,dx$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}$$

Laplacian Random Variable

$S_X = (-\infty, \infty)$

$f_X(x) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \alpha > 0$

$E[X] = 0 \qquad \mathrm{VAR}[X] = 2/\alpha^2$