Examen Ordinario de Señales Digitales
Junio 2010

Nombre:..
DNI...GRUPO...

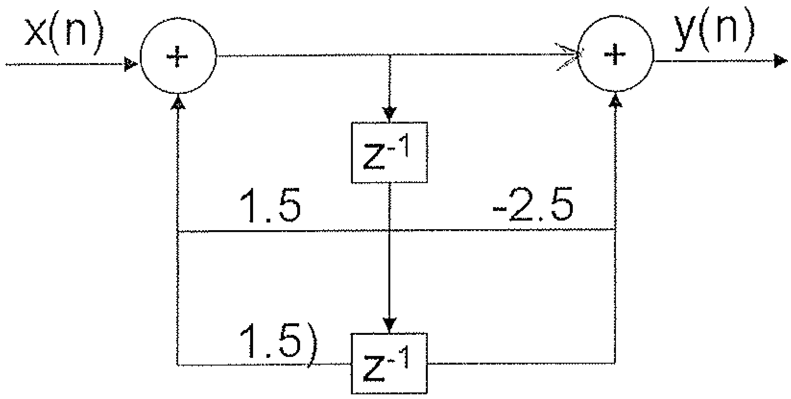
1. El ingeniero anterior de la empresa ha sido despedido porque después de implementarse el filtro digital representado en el diagrama de la figura 1 se observó que sistemáticamente los encapsulados fallaban. Se le requiere para que:

a) indique la causa del fallo,

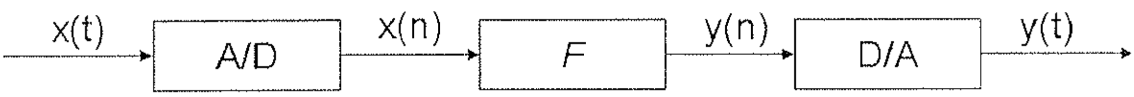
b) represente de forma aproximada el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro y

c) justifique que tipo de filtro es.

d) Por último, dado que este filtro es un componente esencial del sistema se le pide que derive uno con exactamente la misma respuesta en módulo (la fase no nos interesa) pero que funcione.



2. Se dispone de un sistema como el de la figura 2. La entrada a dicho sistema es una señal analógica de la forma $x(t) = \cos(2\pi F_0 t) + \sin(2\pi F_1 t)$ con $F_0 = 10$ *y* $F_1 = 100$. El sistema digital representado por *F* es lineal e invariante en el tiempo. Cuando a este sistema se le introduce un impulso unitario como entrada, devuelve $y(n) = 1$ *para* $n = 0$ *y* $n = 4$. $y(n) = 0$ para el resto de muestras. Suponiendo que los conversores A/D y D/A fueran ideales y trabajaran a 150 muestras por segundo, ¿cuales son las salidas analógica y digital del sistema?



Examen Ordinario de Señales Digitales
Junio 2010

Nombre:...
DNI...GRUPO...

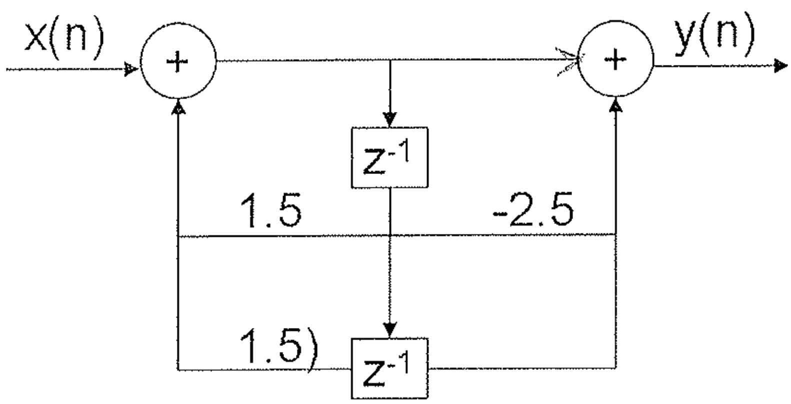
1. El ingeniero anterior de la empresa ha sido despedido porque después de implementarse el filtro digital representado en el diagrama de la figura 1 se observó que sistemáticamente los encapsulados fallaban. Se le requiere para que:

a) indique la causa del fallo,

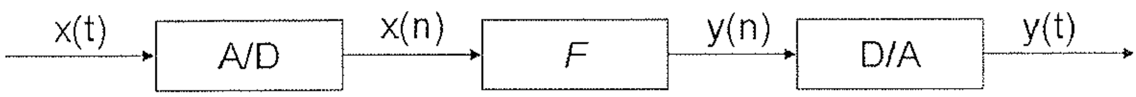
b) represente de forma aproximada el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro y

c) justifique que tipo de filtro es.

d) Por último, dado que este filtro es un componente esencial del sistema se le pide que derive uno con exactamente la misma respuesta en módulo (la fase no nos interesa) pero que funcione.



2. Se dispone de un sistema como el de la figura 2. La entrada a dicho sistema es una señal analógica de la forma $x(t)=\cos(2\pi F_0 t)+\sin(2\pi F_1 t)$ con $F_0=10$ y $F_1=100$. El sistema digital representado por F es lineal e invariante en el tiempo. Cuando a este sistema se le introduce un impulso unitario como entrada, devuelve $y(n)=1$ $para$ $n=0$ y $n=4$. $y(n)=0$ para el resto de muestras. Suponiendo que los conversores A/D y D/A fueran ideales y trabajaran a 150 muestras por segundo, ¿cuales son las salidas analógica y digital del sistema?



Examen Ordinario de Señales Digitales
Junio 2010

Nombre:..
DNI......................................GRUPO...

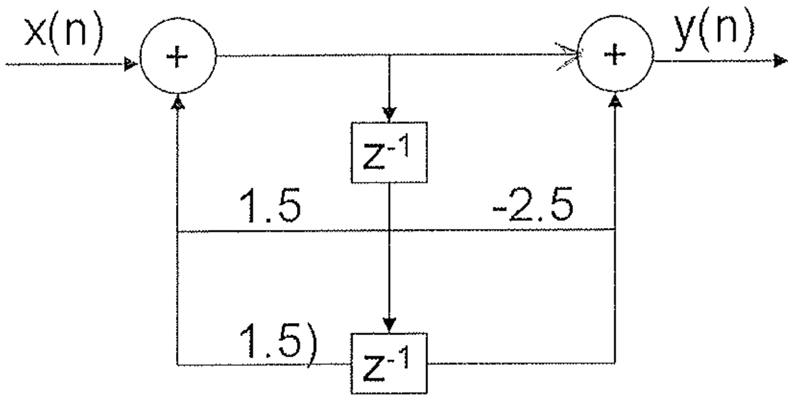
1. El ingeniero anterior de la empresa ha sido despedido porque después de implementarse el filtro digital representado en el diagrama de la figura 1 se observó que sistemáticamente los encapsulados fallaban. Se le requiere para que:

a) indique la causa del fallo,

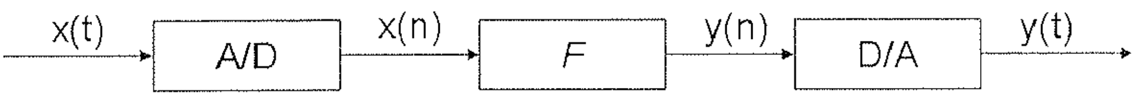
b) represente de forma aproximada el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro y

c) justifique que tipo de filtro es.

d) Por último, dado que este filtro es un componente esencial del sistema se le pide que derive uno con exactamente la misma respuesta en módulo (la fase no nos interesa) pero que funcione.



2. Se dispone de un sistema como el de la figura 2. La entrada a dicho sistema es una señal analógica de la forma $x(t) = \cos(2\pi F_0 t) + \sin(2\pi F_1 t)$ con $F_0 = 10$ y $F_1 = 100$. El sistema digital representado por *F* es lineal e invariante en el tiempo. Cuando a este sistema se le introduce un impulso unitario como entrada, devuelve $y(n) = 1$ *para* $n = 0$ y $n = 4$. $y(n) = 0$ para el resto de muestras. Suponiendo que los conversores A/D y D/A fueran ideales y trabajaran a 150 muestras por segundo, ¿cuales son las salidas analógica y digital del sistema?



3. Explique detalladamente las distintas técnicas de diseño de filtros IIR a partir de sus correspondientes analógicos.

4. La relación entre la entrada y la salida de un sistema FIR es la siguiente: $y(n)=\sum_{k=0}^{N} b(k)x(n-k)$. Encuentre los coeficientes *b(k)* para el filtro de menor orden que satisface las siguientes condiciones:

a) El filtro tiene fase lineal.

b) Rechaza completamente sinusoides de frecuencia $\omega_0=\pi/3$

c) La magnitud de la respuesta en frecuencia es igual a 1 para $\omega=0, \omega=\pi$.

5. Una señal de audio *s(t)* generada por un altavoz se refleja en dos paredes diferentes con coeficientes de reflexión r1 y r2. La señal *x(t)* grabada con un micrófono cercano al altavoz, después del muestreo es: $x(n)=s(n)+r1s(n-k1)+r2s(n-k2)$, donde k1 y k2 son los retardos de los ecos.

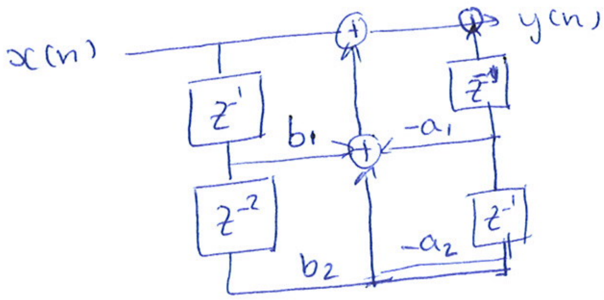
a) Determine un sistema realizable que permita recuperar s(n) a partir de x(n) si k2=2k1.

b) Determine la autocorrelación de la señal *x(n)*. ¿Se podría determinar k1 y k2 a partir de la autocorrelación?.

1.- Ecuación en diferencias de un sistema de 2º orden

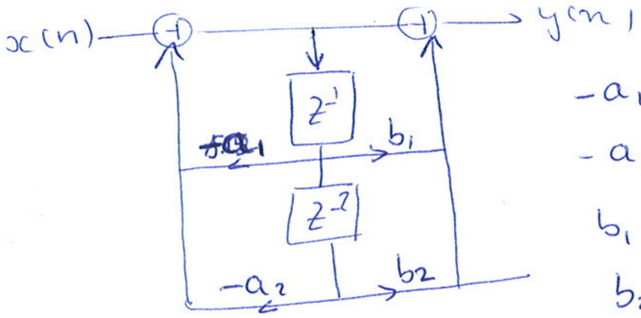
$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$

Diagrama de bloques en forma directa I



$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) +$
$+ x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$

Diagrama de bloques en forma directa II (minimizando el número de ~~blo~~ elementos de retardo)



$-a_1 = 1.5$

$-a_2 = 1.5$

$b_1 = -2.5$

$b_2 = 1$

$$y(n) = 1.5y(n-1) + 1.5y(n-2) + x(n) - 2.5x(n-1) + x(n-2)$$

$$y(n) - 1.5y(n-1) - 1.5y(n-2) = x(n) - 2.5x(n-1) + x(n-2)$$

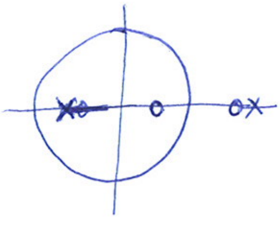
$$Y(z)\left[1 - 1.5z^{-1} - 1.5z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} - 1.5z^{-2}} = \frac{z^2 - 2.5z + 1}{z^2 - 1.5z - 1.5}$$

ceros: $z = 2$; $z = 0.5$

polos: $z = 2'1$ → polo fuera de la circunferencia unidad ⇒ sistema inestable

$z = -0'65$



Se trata de un filtro que ~~anula~~ realza las altas frecuencias

pero es instable.

Se estabiliza con un filtro para todo que mantiene la misma respuesta en frecuencia pero compensa el polo fuera de la circunferencia unidad.

$$H_{pt}(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} \quad , \quad A(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k} \qquad a_0 = 1$$

2

$$x(t) \longrightarrow \boxed{A/D} \xrightarrow{x(n)} \boxed{F} \xrightarrow{y(n)} \boxed{D/A} \longrightarrow y(t)$$

F es un filtro LTI digital con respuesta impulsiva $h(0) = h(4) = 1$
$h(n) = 0 \quad \forall\, n \neq 0, 4$

$x(t) = \cos(2\pi F_0 t) + \text{sen}(2\pi F_1 t)$; $F_0 = 10\,Hz$ $F_1 = 100\,Hz$

$F_s = 150\,Hz$

$$x(n) = \cos\left(2\pi \frac{10}{150} n\right) + \text{sen}\left(2\pi \frac{100}{150} n\right)$$

como $F_s < 2F_1$ hay aliasing.

$$\omega_0 = 2\pi \frac{1\cancel{0}}{15\cancel{0}} = \frac{2}{15}\pi$$

$$\omega_1 = 2\pi \frac{10\cancel{0}}{15\cancel{0}} = \frac{20}{15}\pi > \pi \Rightarrow \text{aliasing.}$$

$$\omega_1 = \frac{20}{15}\pi = \frac{2\pi}{15} - 2\pi = \frac{-10}{15}\pi = \frac{-2}{3}\pi \qquad (\in [-\pi, \pi])$$

$$x(n) = \cos \frac{2\pi}{15} n + \text{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi n\right)$$

$h(n) = \{1, 0, 0, 1\} \Rightarrow H(z) = 1 + z^{-4}$, $H(\omega) = 1 + e^{-j4\omega}$

$$H(\omega) = \underbrace{2\cos(2\omega)}_{\text{módulo}} \, e^{\overbrace{-2j\omega}^{\text{fase}}} \Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = |2\cos(2\omega)| \\ \angle H(\omega) = -2\omega \end{cases}$$

~~1ª Componente~~ Aplicamos el principio de superposición a la entrada digital del filtro:

1ª Componente:

$$\left|H\left(\omega = \frac{2}{15}\pi\right)\right| = \left|2\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right| = 1'3383$$

$$\angle H\left(\omega = \frac{2}{15}\pi\right) = -\frac{4\pi}{15}$$

2ª Componente:

$$\left|H\left(\omega = -\frac{2}{3}\pi\right)\right| = \left|2\cos -\frac{4}{3}\pi\right| = 1$$

$$\angle H\left(\omega = -\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi$$

La salida del filtro digital es

$$y(n) = 1'3383 \cos\left(\frac{2}{15}\pi n + \frac{4}{15}\pi\right) + \operatorname{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi n + \frac{4}{3}\pi\right)$$

La salida analógica es:

$$y(t) = 1'3383 \cos\left(\frac{2\pi}{15} t \cdot F_s + \frac{4}{15}\pi\right) + \operatorname{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi t F_s + \frac{4}{3}\pi\right) =$$

$$= 1'3383 \cos\left(2\pi \times 10 t - \frac{4}{15}\pi\right) + \operatorname{sen}\left(2\pi(-50)t + \frac{4}{3}\pi\right)$$

4

$$h_0 + h_1 e^{-j\omega} + h_2 e^{-j2\omega} + h_3 e^{-j3\omega} + h_4 e^{-j4\omega}$$

$$H(\omega=0) = 1 = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$$

$$H(\omega=\pi) = 1 = h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 = 1$$

$$H(\omega=\pi/3) = 0 = h_0 + h_1 e^{-j\pi/3} + h_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} + h_3 e^{-j\pi} + h_4 e^{-j\frac{4}{3}\pi} = 0$$

$h_0 = h_4$

$h_1 = h_3$

h_2

$$2h_0 + 2h_1 + h_2 = 1$$

$$\cancel{h_2 = 1} \quad 2h_0 - 2h_1 + h_2 = 1$$

$$h_0 + h_1 e^{-j\pi/3} + h_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} - h_3 + h_4 e^{-j\frac{1}{3}\pi} = 0$$

$$h_0 + h_1 \cos \pi/3 - j h_1 \operatorname{sen} \pi/3 + h_2 \cos \tfrac{2}{3}\pi - j h_2 \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\pi - h_3 -$$

$$h_4 \cos \tfrac{\pi}{3}\pi + j h_4 \operatorname{sen} \pi/3\,\pi = 0$$

→ así no se puede, luego pruebo con 5 coeficients.

$$2h_0 + 2h_1 + h_2 = 1$$

$$2h_0 - 2h_1 + h_2 = 1$$

$$h_0 + h_1 \cos \pi/3 + h_2 \cos \tfrac{2}{3}\pi - h_1 - h_0$$

$$H(\omega=\pi/3) = 0 = h_0 + h_1 e^{-j\pi/3} + h_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} + h_3 e^{-j\pi} + h_4 e^{-j\frac{4}{3}\pi}$$

$h_0 = h_4$

$h_1 = h_3$

h_2

$$e^{-j\frac{2}{3}\pi}\left[h_0 e^{j\frac{2}{3}\pi} + h_1 e^{j\frac{1}{3}\pi} + h_2 + h_3 e^{-j\frac{1}{3}\pi} + h_4 e^{-j\frac{2}{3}\pi}\right] = 0$$

$$e^{-j\frac{2}{3}\pi}\left[h_0 \cos \tfrac{2}{3}\pi + h_1 \cos \tfrac{1}{3}\pi + h_2\right] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2h_0 + 2h_1 + h_2 &= 1 \\ 2h_0 - 2h_1 + h_2 &= 1 \\ h_0 \cos \tfrac{2}{3}\pi + h_1 \cos \tfrac{1}{3}\pi + h_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} 2h_0 + 2h_1 + h_2 &= 1 \\ - \quad 2h_0 - 2h_1 + h_2 &= 1 \\ \hline 4h_1 = 0 &\Rightarrow h_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2h_0 + h_2 &= 1 \\ h_0 \cos \tfrac{2}{3}\pi + h_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad h_2 = 1 - 2h_0$$

$$h_0 \cos \tfrac{2}{3}\pi + 1 - 2h_0 = 0$$

$$h_0 (\cos \tfrac{2}{3}\pi) - 2h_0 = -1$$

$$h_0 \left[\cos \tfrac{2}{3}\pi - 2\right] = -1; \quad h_0 = -1 \big/ \cos \tfrac{2}{3}\pi - 2 = \frac{1}{2 - \cos \frac{2}{3}\pi}$$

$$h_2 = 1 - \frac{2}{2 - \cos \frac{2}{3}\pi}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{2 - \cos \frac{2}{3}\pi} + \left(1 - \frac{2}{2 - \cos \frac{2}{3}\pi}\right) z^{-2} + \frac{1}{2 - \cos \frac{2}{3}\pi} z^{-4}}$$

(5) $x(n) = s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2)$

a) $k_2 = 2k_1$

$$X(z) = S(z) + r_1 z^{-k_1} S(z) + r_2 z^{-k_2} S(z)$$

$$X(z) = S(z) \left[1 + r_1 z^{-k_1} + r_2 z^{-k_2} \right]$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{X(z)} \quad ; \quad S(z) = G(z) X(z)$$

~~$G(z) =$~~

$$G(z) = \frac{1}{1 + r_1 z^{-k_1} + r_2 z^{-k_2}} = \frac{1}{1 + r_1 z^{-k_1} + r_2 z^{-k_2}}$$

si $k_2 = 2k_1$

cambio de variable $\quad z^{k_1} \longrightarrow z$

$$z^{2k_1} \longrightarrow z^2$$

$$G(z) = F(z^{k_1}) \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}$$

para que el sistema sea realizable los polos de $F(z)$ deben de estar en el interior de la circunferencia unidad. La relación entre los coeficientes de reflexión de ambas paredes debe ser:

$$|r_2| < 1$$
$$|r_1| < 1 + r_2$$

b) $r_{xx}(l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, x(k-l)$

$x(n) = s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2)$

llamo $s_1(n) = s(n-k_1)$

$s_2(n) = s(n-k_2) = s(n-2k_1)$

$$r_{xx}(l) = r_{s,s}(l) + r_1^2 r_{s_1 s_1}(l) + r_2^2 r_{s_2 s_2}(l) +$$
$$r_1 r_{s_1,s}(l) + r_2 r_{s,s_2}(l) + 2 r_1 r_2 r_{s_2,s_1}(l)$$

$r_{s,s}(l) \rightarrow$ máximo en $l=0$

$r_{s_1 s_1}(l) \rightarrow$ " " $l=0$

$r_{s_2,s_2}(l) \rightarrow$ " " $l=0$

$r_{s_1,s}(l) \rightarrow$ máximo en $l=k_1$

$r_{s_2,s}(l) \rightarrow$ máximo en $l=k_2=2k_1$

$r_{s_2,s_1}(l) \rightarrow$ máximo en $l=k_1$.

Si se podría determinar k_1 y k_2 a partir de la autocorrelación. El máximo de la autocorrelación estará en $l=0$ y luego habrá otro máximo en $l=k_1$ y otro más pequeño en $l=k_2$.