
 Universidad de Granada 	<p align="center">Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico</p> <p align="center">Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación</p>	<p align="center">Convocatoria Ordinaria de Junio</p> <p align="center">1 de julio de 2014</p>
--	---	---

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración del examen es de **3 horas**.
- **No se permite el uso de calculadora programable.**
- El examen corresponde a la parte de teoría y problemas, constando de **6 preguntas tipo test y 4 ejercicios**. Será valorada sobre **7 puntos** (1.5 el test y 5.5 los ejercicios).
- Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.

Preguntas tipo TEST _(xx)

1. (0.25 puntos) Las soluciones de la ecuación diferencial $x' = \ln(x^2 - 4) - 2$ son ...

- ☐ a) crecientes en su dominio.
- ☐ b) decrecientes en su dominio.
- ☐ c) monótonas en su dominio.
- ☐ d) Ninguna de las opciones a), b), c) es correcta.

2. (0.25 puntos) La solución del problema de valores iniciales

$$x' = \ln(x^2 - 4) - 2, \quad x(0) = 3,$$

puede satisfacer la condición ...

- ☐ a) $x(t) = -3.5$ para algún valor de $t > 0$.
- ☐ b) $x(t) = 2.5$ para algún valor de $t > 0$.
- ☐ c) $x(t) = 3.5$ para algún valor de $t > 0$.
- ☐ d) Ninguna de las opciones a), b), c) es correcta.

Observación: En las preguntas 1 y 2 debemos tener en cuenta las posibles soluciones constantes.

3. (0.25 puntos) La pareja de funciones $\phi_1(t) = e^t$, $\phi_2(t) = \cos(t)$, definidas en toda la recta real, puede ser solución de una ecuación diferencial ...
- ☐ a) lineal homogénea de tercer orden.
 - ☐ b) lineal homogénea de cuarto orden.
 - ☐ c) lineal de segundo orden.
 - ☐ d) Las opciones a), b) y c) son posibles.
 - ☐ e) Sólo dos de las tres opciones a), b), c) son posibles.
4. (0.25 puntos) Sea f una función continua que tiene una única raíz en el intervalo $[-1.5, 2.5]$. Si deseamos aproximar dicha raíz con un error inferior a 10^{-5} mediante el método de bisección entonces, en general, necesitamos realizar ...
- ☐ a) al menos 18 iteraciones.
 - ☐ b) al menos 17 iteraciones.
 - ☐ c) al menos 16 iteraciones.
 - ☐ d) al menos 15 iteraciones.
5. (0.25 puntos) Se considera la función $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{(x/4)}$, $\forall x \in [0, 3]$. Se tiene asegurada la convergencia del método de Newton-Raphson tomando como aproximación inicial ...
- ☐ a) $x_0 = 2.9$.
 - ☐ b) $x_0 = 1.6$.
 - ☐ c) $x_0 = 0.2$.
 - ☐ d) Las opciones a) y c) son adecuadas pero no la b).
 - ☐ e) Las opciones b) y c) son adecuadas pero no la a).
 - ☐ f) Las opciones a) y b) son adecuadas pero no la c).
 - ☐ g) Las tres opciones a), b) y c) son adecuadas.
 - ☐ h) Ninguna de las opciones a), b), c) es adecuada.
6. (0.25 puntos) Sea $s(x)$ un spline cúbico natural. Entonces ...
- ☐ a) $s(x)$ puede ser un spline cuadrático.
 - ☐ b) $s(x)$ puede ser un spline cúbico sujeto.
 - ☐ c) $s(x)$ puede ser un spline cúbico periódico.
 - ☐ d) las tres opciones a), b) y c) son posibles.
 - ☐ e) sólo las opciones b) y c) son posibles.
 - ☐ f) ninguna de las opciones a), b), c) es posible.

EJERCICIOS

1. (2 puntos) Se considera la ecuación diferencial

$$t^2 x'(t) + 5x(t) = e^{(t^{-1})}. \quad (1)$$

- a) Determina los posibles dominios maximales de (1).
- b) Fijada una condición inicial $x(t_0) = x_0$ cualquiera, ¿existe una única solución de la ecuación (1)? Justifica adecuadamente tu respuesta.
- c) Comprueba que, mediante el cambio de variables $s = \frac{1}{t}$, la ecuación (1) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.
- d) Calcula todas las soluciones de la ecuación (1). (Puedes hacerlo directamente o usando la ecuación obtenida en el apartado anterior.)
- e) Halla, si es posible, la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(-2) = 0$.

2. (1 punto) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) - 2x_2(t) + e^{2t}, \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) + 4. \end{cases} \quad (2)$$

- a) Sin usar la transformada de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula todas las soluciones reales de (2).
- b) Halla todas las soluciones de (2) que satisfacen la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (1.5 puntos) Se considera la ecuación

$$x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 2 = 0. \quad (3)$$

- a) Determina justificadamente el número exacto de soluciones reales de (3).
- b) Determina justificadamente un intervalo en el que se pueda aplicar el método de la secante para obtener una sucesión convergente a una solución de (3).
- c) Aplicando el método de Newton-Raphson, con una elección justificada de la aproximación inicial, calcula una solución de (3) con al menos dos decimales exactos.

4. (1 punto) Se considera la siguiente tabla de datos

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	1	-1	1
y_i'	1	0	2	1

- a) Calcula el spline cúbico de clase uno $s(x)$ que interpola los datos de la tabla anterior.
- b) ¿Es $s(x)$ un spline cúbico periódico? Justifica tu respuesta.

Observación: recuerda que toda función está definida por una ley y un dominio.

EJERCICIO PARA NOTA (1 punto)

Este ejercicio es de carácter voluntario. Previamente se deben haber realizado el test y los cuatro ejercicios obligatorios. Además, sólo se corregirá cuando la calificación obtenida sea igual o superior a 4.

5. Queremos diseñar un método de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que mejore al de Euler pero con menos cálculos que el de Runge-Kutta de cuarto orden. Así pues, sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (4)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua definida en un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y arco-conexo. Además, supondremos que $f(t, x)$ admite derivada parcial continua con respecto a x para asegurar la existencia y unicidad de solución.

- a) Justifica que $x(t)$ es la única solución del problema (4) si y sólo si $x(t)$ es la única solución de la ecuación integral

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds + x_0. \quad (5)$$

- b) Ahora la idea es tomar un paso h e ir calculando sucesivos valores de la solución $x(t)$ en los instantes $t_k = t_0 + kh$. Para ello procedemos como sigue.

- b1) A partir de (5), deduce que

$$x(t_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s)) \, ds + x(t_k). \quad (6)$$

- b2) Aplica en (6) la fórmula de cuadratura del punto medio (o regla central del rectángulo) para llegar a la expresión

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + hf \left(t_k + \frac{h}{2}, x \left(t_k + \frac{h}{2} \right) \right). \quad (7)$$

- b3) Ya que $x(t_k + \frac{h}{2})$ es desconocido, aplica el método de Euler para hacer una estimación de este valor. (Recuerda que el método de Euler viene dado por la recurrencia $x(t_{k+1}) = x(t_k) + hf(t_k, x(t_k))$.)

- c) Aplica el método diseñado para realizar una estimación de $x(1)$ siendo $x(t)$ la única solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t), \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (8)$$

tomando $h = 0.5$ como paso.