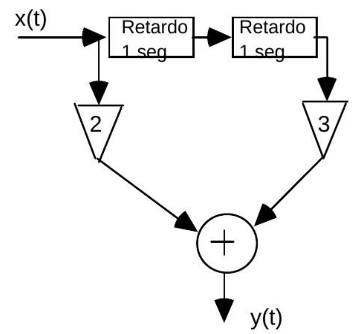
Teoría de la Comunicación
Examen de 6 de febrero de 2015

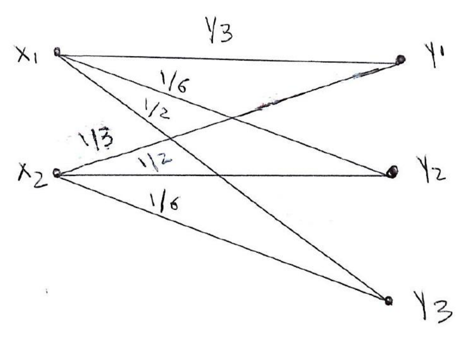
Nombre:

1) Sea el siguiente sistema, donde la entrada $x(t)$ es un proceso aleatorio estacionario



- a)(*0.75 puntos*) Determine la función de autocorrelación del proceso de salida $y(t)$ en función de la autocorrelación del proceso de entrada $x(t)$.
- b)(*0.75 puntos*) Determine la densidad de potencia espectral de la salida si la autocorrelación del proceso de entrada viene dada por $R_X(\tau) = \frac{4e^{-|\tau|}}{3}$.
- c)(*0.75 puntos*) El sistema propuesto se puede considerar un filtro lineal invariante con el tiempo. Obtenga el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema a partir de la densidad de potencia espectral de la salida y de la entrada del sistema.
- d)(*0.75 punto*) Sea la autocorrelación del proceso de entrada $x(t)$ la indicada en el apartado b). Al realizar un muestreo de orden uno del proceso aleatorio $x(t)$ obtenemos una variable aleatoria continua uniforme en el intervalo $[-a, a]$. Determine el valor de a.

2) Sea el canal que se muestra en la figura



Determine:

- a) (*1 punto*) La información mutua entre la entrada y la salida del canal $I(X;Y)$ en el caso en que las probabilidades de la entrada sean $P(x_1) = 0{,}3$ y $P(x_2) = 0{,}7$.
- b) (*1 punto*) La capacidad C de dicho canal. (Ayuda: Se recomienda partir de la expresión $H(Y) - H(Y|X)$).

3) (*0.75 puntos*) Demuestre por qué la función de autocorrelación de un proceso estacionario en sentido amplio es una medida de la velocidad de cambio del proceso aleatorio. Ayuda:desigualdad de Markov $P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$.

4) (*0.75 puntos*) Obtenga la expresión de la entropía de una fuente de Markov de orden m.

5) (*1 punto*)¿Cómo ha determinado la función de autocorrelación temporal $R_t(k)$ de la secuencia de 128000 valores que se le suministraba en la segunda parte de la práctica 1?. Explíquelo en detalle. ¿Cómo verificaba que el proceso era ergódico en la autocorrelación?

6) (*1 punto*)Usando la estimación 4 de la práctica 2 (segundo tipo de estimación descrito para el segundo modelo), determine qué fila o qué columna utilizaría para estimar la muestra que no ha llegado en el instante n, si la muestra que llegó en el instante $n-1$ es $s(n-1) = 81$. ¿Cómo la utilizaría, es decir, cómo realizaría la estimación usando dicha información?

NOTA: En los ejercicios 1 y 2 no es suficiente con dar sólo la respuesta correcta sino que hay que mostrar cómo se ha obtenido el resultado. Si no se da una explicación el valor del ejercicio será de cero puntos.

TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CONTINUO PROPIEDADES

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(\omega)$ $Y(\omega)$
Ecuaciones	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$
	$x(t)$ Par	$X(\omega)=2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos\omega t\,dt$
	$x(t)$ Impar	$X(\omega)=-2j\int_{0}^{\infty} x(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,dt$
Linealidad	$a\,x(t)+b\,y(t)$	$a\,X(\omega)+b\,Y(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega-\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Escalado de tiempo y frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)\,Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)\,y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega)*Y(\omega)\right]$

TABLA 3.1 Algunos pares seleccionados de la transformada de Fou

	$f(t)$	$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}$
1.	$e^{-at}u(t)$	$1/(a+j\omega)$
2.	$te^{-at}u(t)$	$1/(a+j\omega)^2$
3.	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(a^2+\omega^2)$
4.	$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
5.	$\mathrm{sgn}\,(t)$	$2/(j\omega)$
6.	$j/(\pi t)$	$\mathrm{sgn}\,(\omega)$
7.	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/(j\omega)$
8.	$\delta(t)$	1
9.	1	$2\pi\delta(\omega)$
10.	$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega\mp\omega_0)$
11.	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
12.	$\mathrm{sen}\,\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
13.	$\mathrm{rect}\,(t/\tau)$	$\tau\,\mathrm{Sa}\,(\omega\tau/2)$

1. a) $y(t) = 3x(t-2) + 2x(t)$

$R_x(\tau)$

$R_y(t, t+\tau) = E[y(t)\cdot y(t+\tau)] =$

$= E[(3x(t-2) + 2x(t))(3x(t+\tau-2) + 2x(t+\tau))]$

$= E[9x(t-2)x(t+\tau-2) + 6x(t-2)\cdot x(t+\tau) +$

$+ 6x(t)x(t+\tau-2) + 4x(t)x(t+\tau)]$

$= E[9x(t-2)x(t+\tau-2)] + E[6x(t-2)x(t+\tau)] +$

$E[6x(t)x(t+\tau-2)] + E[4x(t)x(t+\tau)] =$

$= 9R_x(\tau) + 6R_x(\tau+2) + 6R_x(\tau-2) + 4R_x(\tau)$

$= 13R_x(\tau) + 6R_x(\tau+2) + 6R_x(\tau-2)$

b) $S_y(w)$ Como $y(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio ya que:

- Se ha obtenido que R_y es sólo función de τ y si calculamos $E[y(t)]$

$E[y(t)] = E[3x(t-2) + 2x(t)] = 3E[x(t-2)]$

$+ 2E[x(t)] = 3m_x + 2m_x = \boxed{5m_x} = cte$

como $x(t)$ es estacionario su media $E[x(t)]$ es constante $= m_x$

2

$$S_y(w) = TF[R_y(\tau)] = TF[13R_x(\tau) + 6R_x(\tau+2) + 6R_x(\tau-2)]$$

$$= 13\,TF\left[\frac{4}{3}e^{-|\tau|}\right] + 6\,TF\left[\frac{4}{3}e^{-|\tau+2|}\right] + 6\,TF\left[\frac{4}{3}e^{-|\tau-2|}\right]$$

$$= \frac{13\cdot 4}{3}\left(\frac{2}{1+w^2}\right) + \frac{6\cdot 4}{3}e^{jw2}\left(\frac{2}{1+w^2}\right) + \frac{6\cdot 4}{3}e^{-jw2}\left(\frac{2}{1+w^2}\right)$$

$$= \frac{52}{3}\left(\frac{2}{1+w^2}\right) + 8\cdot\frac{2}{1+w^2}\left(\cos 2w + \cancel{j\,\mathrm{sen}\,2w}\right) +$$

$$8\cdot\frac{2}{1+w^2}\left(\cos 2w - \cancel{j\,\mathrm{sen}\,2w}\right) = \frac{2}{(1+w^2)}\left(\frac{52}{3} + 8\cos 2w + 8\cos 2w\right) = \frac{2}{(1+w^2)}\left(\frac{52}{3} + 16\cos 2w\right)$$

c) $S_y(w) = TF[R_y(\tau)] = TF[13R_x(\tau) + 6R_x(\tau+2) + 6R_x(\tau-2)]$

$$= 13\,TF[R_x(\tau)] + 6\,TF[R_x(\tau+2)] + 6\,TF[R_x(\tau-2)]$$

$$= 13\,S_x(w) + 6\,e^{jw2}S_x(w) + 6\,e^{-jw2}S_x(w) =$$

$$= S_x(w)\cdot[13 + 6(\cos 2w + j\,\mathrm{sen}\,2w) + 6(\cos 2w - j\,\mathrm{sen}\,2w)]$$

$$= (13 + 12\cos 2w)\,S_x(w) = |H(w)|^2 S_x(w)$$

$$\Rightarrow |H(w)| = \sqrt{13 + 12\cos 2w}$$

sabemos que

$$S_y(w) = |H(w)|^2 S_x(w)$$

donde $H(w)$ es la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo.

d) La autocorrelación requiere conocer la pdf de orden dos del proceso aleatorio, salvo en el caso en que estemos calculando

$$R_X(t,t) = E[X(t)\,X(t)] = R_X(0)$$

en ese caso necesitaríamos la pdf de orden 1 del proceso.

Vamos a usar esto para plantear una ecuación que nos permita establecer la pdf de orden 1 que nos piden.

Al muestrear en cualquier instante t_1 obtenemos una variable $X(t_1)$ uniforme en el intervalo $[-a, a] \Rightarrow f_{X(t_1)}(x) = \frac{1}{2a}$

Sabemos $R_X(t_1, t_1) = E[X^2(t_1)] = R_X(0)$

$$E[X^2(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X(t_1)}(x)\,dx = \int_{-a}^{a} x^2 \frac{1}{2a}\,dx = R_X(0)$$

$$\left.\frac{x^3}{3\cdot 2\cdot a}\right]_{-a}^{a} = R_X(0) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{a^3}{3\cdot 2\cdot a} + \frac{a^3}{3\cdot 2\cdot a} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\cancel{2}a^3}{3\cdot \cancel{2}\cdot a} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a^2 = 4 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

(2) Matriz del canal

$$\begin{pmatrix} p(y_1|x_1), & p(y_2|x_1), & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2), & p(y_2|x_2), & p(y_3|x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3, & 1/6, & 1/2 \\ 1/3, & 1/2, & 1/6 \end{pmatrix}$$

a) $p(x_1) = 0'3$
$p(x_2) = 0'7$

$$p(y_1) = p(y_1|x_1)\cdot p(x_1) + p(y_1|x_2)\cdot p(x_2) =$$
$$= 1/3 \cdot 0'3 + 1/3 \cdot 0'7 = 1/3 \cdot 1 = 1/3$$

$$p(y_2) = p(y_2|x_1)\cdot p(x_1) + p(y_2|x_2)\, p(x_2) =$$
$$= 1/6 \cdot 0'3 + 1/2 \cdot 0'7 = 0'05 + 0'35 = 0'4$$

$$p(y_3) = p(y_3|x_1)\cdot p(x_1) + p(y_3|x_2)\cdot p(x_2) =$$
$$= 1/2 \cdot 0'3 + 1/6 \cdot 0'7 = 0'15 + 0'12 = 0'27$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y) = \sum_{i=1}^{3} p(y_i)\cdot \log_2 \frac{1}{p(y_i)} = 1/3 \cdot \log_2 \frac{1}{1/3} + 0'4 \cdot \log_2 \frac{1}{0'4}$$
$$+ 0'27 \cdot \log_2 \frac{1}{0'27} = 1/3 \cdot 1'58 + 0'4 \cdot 1'32 + 0'27 \cdot 1'89$$
$$= 1'56 \text{ bits/símbolo}$$

$$H(Y|X) = \sum_{j=1}^{2} p(x_j)\, H(Y|x_j) = p(x_1)\, H(Y|x_1) + p(x_2)\, H(Y|x_2)$$

$$H(Y|x_1) = \sum_{i=1}^{3} p(y_i|x_1)\cdot \log_2 \frac{1}{p(y_i|x_1)} = 1/3 \cdot \log_2 \frac{1}{1/3} + 1/6 \log_2 \frac{1}{1/6}$$
$$+ 1/2 \log_2 \frac{1}{1/2} = 1'46 \text{ bits/sím}$$

$=$

$$H(Y|x_2) = \sum_{i=1}^{3} p(y_i|x_2) \cdot \log_2 \frac{1}{p(y_i|x_2)}$$

$$= 1/3 \log_2 \frac{1}{1/3} + 1/2 \log_2 \frac{1}{1/2} + 1/6 \cdot \log_2 \frac{1}{1/6} =$$

$= 1'46$ bits/símbolo

$$H(Y|X) = 0'3 \cdot 1'46 + 0'7 \cdot 1'46 = 1'46 \text{ bits/símbolo}$$

$$I(X;Y) = 1'56 - 1'46 = 0'1 \text{ bits/símbolo}$$

b) $C = \max I(X;Y)$
para aquella distribución de X

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_{j=1}^{2} p(x_i) H(Y|x_i)$$

Como se observa de ~~m~~ la matriz del canal, ocurre que en este canal

$$H(Y|x_1) = H(Y|x_2)$$

entonces

$$I(X;Y) = H(Y) - p(x_1) \cdot H(Y|x_1) - p(x_2) \cdot H(Y|x_1) =$$

$$= H(Y) - H(Y|x_1) \underbrace{[p(x_1) + p(x_2)]}_{= 1} = H(Y) - H(Y|x_1)$$

$$= H(Y) - \boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{3} p(y_i|x_1) \log_2 \frac{1}{p(y_i|x_1)}}_{= 1'46 \text{ bits/simbolo}}}$$

En este canal ese término sólo depende del canal

$\max(I(X;Y)) = \max(H(Y) - 1'46 \text{ bits/simbolo})$ ⑥

↓

obtendremos el máximo cuando

$H(Y)$ sea máximo

↓

eso ocurrirá cuando

$p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = 1/3$

y entonces

$H(Y) = \log_2 3 = 1'58$ bits/simbolo

$\max(I(X;Y)) = \log_2 3 - 1'46 = 1'58 - 1'46 = 0'12$ bits/simbolo

Faltaría comprobar que existe una distribución de entrada $(p(x_1), p(x_2))$ que hace que, en efecto, las $p(y_1), p(y_2)$ y $p(y_3)$ sean equiprobables.

Veamos, sabemos que habría de verificarse

$p(y_1) = 1/3\, p(x_1) + 1/3\, p(x_2)$

$p(y_2) = 1/6\, p(x_1) + 1/2\, p(x_2)$

$p(y_3) = 1/2\, p(x_1) + 1/6\, p(x_2)$

$1/3 = 1/3\, p(x_1) + 1/3(1 - p(x_1)) = \cancel{1/3\, p(x_1)} + 1/3 - \cancel{1/3\, p(x_1)}$

conclusión: cualquier distribución cumple la primera ecuación

sigamos con la segunda

$1/3 = 1/6\, p(x_1) + 1/2\, (1 - p(x_1)) = 1/6\, p(x_1) + 1/2 - 1/2\, p(x_1)$

$$1/3 - 1/2 = (1/6 - 1/2)\, p(x_1)$$

$$-1/6 = -2/6\, p(x_1)$$

$$p(x_1) = 1/2 \rightarrow p(x_2) = 1/2$$

Finalmente comprobamos que la distribución que acabamos de obtener cumple también la 3ª ecuación

$$1/3 = 1/2 \cdot 1/2 + 1/6 \cdot 1/2 = 1/4 + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = 1/3$$

en efecto

Luego existe una distribución de entrada que es $p(x_1) = p(x_2) = 1/2$ que hace que la distribución de salida sea $p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = 1/3$ y por tanto se confirma que el máximo de $I(X,Y) = \log_2 3 - 1'46 = 0'12$ bits/símbolo

y por tanto

$$C = 0'12 \text{ bits/símbolo}$$