EXAMEN DE LMD

Grupos D y F

Junio de 2014

APELLIDOS, NOMBRE: ....

DNI:................................. GRUPO: D F

- ✓ Rodee con un círculo la letra del grupo al que pertenece.
- ✓ De las preguntas 1 a la 5, responda sólo a cuatro de ellas.
  De las preguntas 6 a la 10, responda sólo a cuatro de ellas.
- ✓ En todas las preguntas hay que justificar la respuesta e incluir todos los cálculos o pasos intermedios.
- ✓ El planteamiento sólo se tendrá en cuenta si se ha alcanzado alguna conclusión o resultado válido.
- ✓ No se corregirán respuestas escritas a lápiz.
- ✓ Cada pregunta vale 1 punto.

1. Demuestre para todo entero positivo n la siguiente desigualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

2. Resuelva la recurrencia dada por $f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) + 3^n - 3$ para $n \geq 2$ y $f(0) = 1,\ f(1) = 2$.

3. Determine el menor número de lados que hay que suprimir en el grafo completo K_{80} para que el grafo resultante G:
   a) Sea conexo y sin ciclos.
   b) Tenga un ciclo de Hamilton.
   c) Tenga algún camino de Euler.
   d) Sea plano.
   Se recuerda que al suprimir lados no se eliminan vértices.

4. Sea la función booleana $f(x, y, z, t) = \sum m(0, 1, 4, 5, 11, 14, 15)$. Obtenga todas las expresiones mínimas de f como producto de sumas de literales.

5. A partir de los axiomas de álgebra de Boole, pruebe que $\overline{a} + b = \mathbf{1}$ si y sólo si $a \cdot \overline{b} = \mathbf{0}$, para cualesquiera a, b pertenecientes a un álgebra de Boole de B.

6. Calcule una forma clausulada para la fórmula

$$\forall z \exists x \Big(R(x, g(a, z)) \to \forall y Q(y, x) \Big) \to \neg \exists x \Big(P(f(x)) \vee \neg R(x, b) \Big),$$

donde como es usual x, y, z son símbolos de variable y a, b son símbolos de constante.

7. Consideramos los símbolos de predicado P^1, S^2, G^2 a los que les asignamos el significado siguiente:

$$\begin{array}{lcl} P(x) & : & x \text{ es un planeta;} \\ S(x,y) & : & x \text{ es un satélite de } y; \\ G(x,y) & : & x \text{ gira alrededor de } y. \end{array}$$

Traduzca las frases siguientes a un lenguaje de predicados de primer orden:
a) Todo satélite de cualquier planeta gira alrededor del Sol.
b) Sólo los planetas tienen satélites.

8. Para el lenguaje de predicados de primer orden $\mathfrak{L}$ dado por $\mathrm{Var}(\mathfrak{L}) = \{x, y\}$, $\mathrm{Cons}(\mathfrak{L}) = \{a\}$, $\mathrm{Func}(\mathfrak{L}) = \{f^2, g^2\}$ y $\mathrm{Rel}(\mathfrak{L}) = \{P^1, Q^2\}$, consideramos la estructura $\mathcal{E}$ dada por

$$\begin{cases} \mathrm{D} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\} \\ a^{\mathcal{E}} = 4 \\ f^{\mathcal{E}}(x,y) = x + y, \quad g^{\mathcal{E}}(x,y) = x \cdot y \\ P^{\mathcal{E}}(x) = \mathbf{1} \text{ si y sólo si } x \text{ es primo} \\ Q^{\mathcal{E}}(x,y) = \mathbf{1} \text{ si y sólo si } x \text{ divide a } y, \end{cases}$$

y la asignación $v(x) = 6$, $v(y) = 2$. Interprete las fórmulas siguientes en $\mathcal{E}$:
a) $\exists y \forall x (Q(a,x) \rightarrow \neg P(x)) \wedge \exists x \Big(P(y) \rightarrow \forall x \neg P(g(y,x)) \Big)$.
b) $\forall x \forall y (P(f(x,y)) \wedge P(g(x,y)) \rightarrow Q(x,a) \vee Q(y,a))$.

9. Sean las proposiciones lógicas

$$\alpha = P \rightarrow (Q \rightarrow R \vee S) \;\text{ y }\; \beta = (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg R \wedge \neg S \rightarrow \neg P).$$

¿Es cierto que $\alpha \models \beta$? ¿Y que $\beta \models \alpha$?

10. Consideramos el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \Big\{ \neg P(f(a)),\ \neg P(g(x)) \vee P(x),\ P(x) \vee P(y) \vee \neg P(f(x)),$$
$$\neg P(a),\ P(f(g(a))),\ P(g(x)) \vee \neg P(x) \Big\}.$$

¿Es Γ refutable? Si su respuesta es positiva, muestre alguna refutación para Γ, mientras que si es negativa, dé un modelo para Γ.