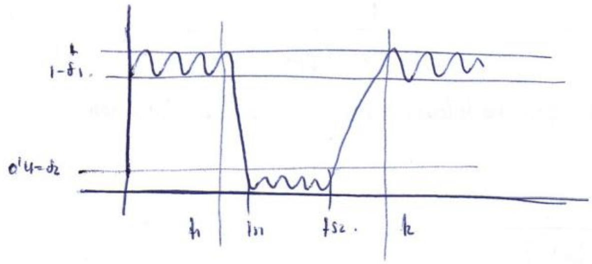
Examen

Rechazabanda diseñado a partir de Butterworth LP.

- Ganancia máxima unidad
- Banda de rechazo entre 50 a 70 Hz
- La ganancia entre 51 Hz y 61 Hz debe ser menor que 0'4.

$BW = 70 - 50 = 20\ Hz.$



$BW = 40\pi\ rad/s.$

$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 371'71\ rad/s.$

$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 59'16\ Hz.$

$\delta_1 = 1 - 10^{-3/20} = 0.29254.$

$\delta_2 = 0.4.$

$$n \geq \frac{1}{2}\left[\frac{\log \frac{\delta_1(2-\delta_1)\delta_2^2}{(1-\delta_1)^2(1-\delta^2)}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_2}}\right] = 4.94. \quad \text{dejo } \boxed{n=5}.$$

Tablas LP normalizado

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 0'6180s + 1)(s^2 + 1'6180s + 1)}$$

$$\boxed{s' = \frac{BW}{\omega_0\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)}} = \frac{BW}{s + \frac{\omega_0^2}{s}} = \frac{sBW}{s^2+\omega_0^2}$$

$$= \frac{(s^2+\omega_0^2)^5}{(s^2+sBW+\omega_0^2)\left[s^4 + 0'6180BWs^3 + (BW^2+2\omega_0^2)s^2 + (0'6180BW\omega_0^2)s + \omega_0^4\right]\left[s^4 + 1'6180BWs^3 + (BW^2+2\omega_0^2)s^2 + 1'6180BW\omega_0^2)s + \omega_0^4\right]}$$

$(s^2+\omega_0^2)^5$

- Obtenga Función de Transferencia BP (BT) con 2 polos.

$f_0 = 500\ Hz$ y una banda de $BW = 100\ Hz$ (ganancia máxima unidad).

$$s' = \frac{\omega_0\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)}{BW} \qquad H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 1000\pi\ rad/s.$

$BW = 200\pi\ rad/s.$

$$H(s) = \frac{1}{\frac{\omega_0^2\ (s^2/\omega_0^2 + \omega_0^2/s^2)}{BW} + \sqrt{2}\,\frac{\omega_0\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)}{BW} + 1} = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{BW^2}\left[\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right]^2 + \frac{\sqrt{2}\left(s + \frac{\omega_0^2}{s}\right)}{BW} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{BW^2}\left[s^2 + \frac{\omega_0^4}{s^2}\right] + \frac{\sqrt{2}s^2 + \omega_0^2}{sBW} + 1} = \frac{s^2BW^2}{s^4 + \omega_0^4 + \sqrt{2}s^3BW + \omega_0^3\sqrt{2}s^3 + s^2BW^2}$$

ω_0

$\hookrightarrow$ $\frac{1}{\quad}$

Desarrollo en casa

$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$

$BW = \omega_2 - \omega_1$

1

Relación → Filtro LP $\boxed{n=3}$ para reducción de ruido $G \leq 3\,dB$ $(0, 10\,Hz)$

$\boxed{G_{máx} = 2}$

Funciones de transferencia Butterworth y Chebyshev.

$\omega_1 = 2\pi \cdot 10Hz = \boxed{20\pi\,rad/s}$ $\quad -3 = 20\log(1-\delta_1) \longrightarrow \boxed{\delta_1 = 0.2902}$

y para hallar ω_c, sale $\left(\frac{\omega_d}{\omega_c}\right)^6 = \left(\frac{1}{1-\delta_1}\right)^2 \longrightarrow \boxed{\omega_c = 20\pi\,rad/s}$

$B(s) \Rightarrow \quad H(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \dfrac{1}{(1+s/\omega_c)\left(\frac{s^2}{\omega_c^2}+\frac{s}{\omega_c}+1\right)}$

$\lim\limits_{s\to 0} H(s) \quad \dfrac{1}{1} = 1$. y como ha de tener orden 3, y además tiene ganancia 2,

$$H(s) = \frac{2}{(1+s/\omega_c)\left(\frac{s^2}{\omega_c^2}+\frac{s}{\omega_c}+1\right)}$$

Chebyshev Calculo ε; $\quad \varepsilon = \sqrt{10^{3/10}-1} = 0'9976 \longrightarrow \beta = \frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon} = 0'29435$

Obtención de los polos

$s_k = e^{j\frac{(2k+n-1)\pi}{2n}}$ con $k = 0, \ldots\ldots, 2n-1$ $\quad s_k = e^{j\frac{(2k+2)\pi}{6}}$

$s_0 = e^{j\frac{2\pi}{6}} = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)$

$s_1 = e^{j\frac{4\pi}{6}} = \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right) \longrightarrow$ Polo

$s_2 = e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\,\text{sen}(\pi) \longrightarrow$ Polo

$s_3 = e^{j\frac{8\pi}{6}} = \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) \longrightarrow$ Polo

$s_4 = e^{j\frac{10\pi}{6}} = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{10\pi}{6}\right)$

$s_5 = e^{j\frac{12\pi}{6}} = \cos\left(\frac{12\pi}{6}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{12\pi}{6}\right)$

$s_2 = -1$

$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}/2\,j$

$s_2 = -1/2 - \sqrt{3}/2\,j$.

$s'_2 = -\sinh\beta\,\omega_c = -18'763$

$s'_{13} = -\frac{1}{2}\sinh\beta \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh\beta\,j = $

y ahora tenemos que $s' = \frac{s}{\omega_c}$.

Por tanto $s = \omega_c s' \longrightarrow s = \omega_c s'_{13} = -9'383 \pm 56'79j$.

$$H(s)_{LP\,Ch.} \quad \frac{1}{(s+18'763)\left[(s+9'383)^2 + 56'79^2\right]}$$

Con ganancia unidad

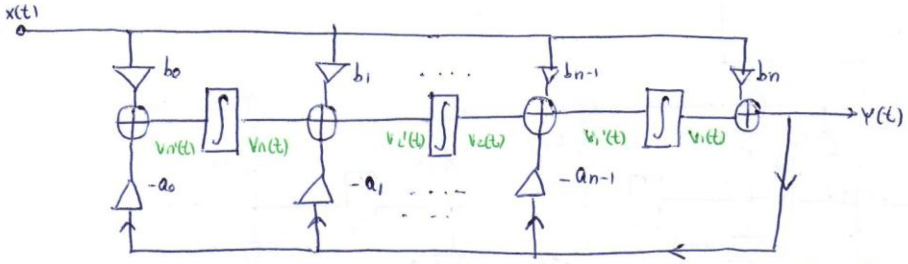
$$\lim_{s\to 0} H(s) = \frac{18'763\left[(9'383)^2+56'79^2\right]}{18'763\left[(9'383)^2+56'79^2\right]} = 1;$$

H(s) ganancia 1 $\quad H(s) = \boxed{\dfrac{18'763\left[(9'383)^2+56'79^2\right]}{(s+18'763)\left[(s+9'383)^2+56'79^2\right]}}$

Variables de estado

Las variables de estado permiten un planteamiento alternativo para la representación de sistemas, q aportan ciertas ventajas para el estudio de dichos sistemas.

Primera forma canónica



Ecuación de estado →

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ \vdots \\ v_N'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{N-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_{N-1}(t) \\ v_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{N-1} - a_{N-1} b_N \\ b_{N-2} - a_{N-2} b_N \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_N \\ b_0 - a_0 b_N \end{bmatrix} x(t)$$

$$\boxed{v'(t) = A\, v(t) + b\, x(t)}$$

Ecuación de salida → $y(t) = [1, 0, 0 \dots 0] \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} + b_N\, x(t).$

Ejemplo 1

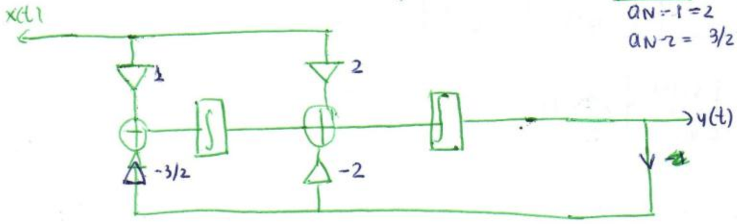
$$2y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 4x'(t) + 2x(t)$$

$a_N = 2$
$b_N = 0.$

Si normalizamos, como $a_N = 1$ → $y''(t) + 2y'(t) + \frac{3}{2} y(t) = 2x'(t) + x(t).$

$\boxed{a_N = 1}$ → No va ya que está normalizado
$a_{N-1} = 2$
$a_{N-2} = 3/2$

$b_N = 0$
$b_{N-1} = 2$
$b_{N-2} = 1$



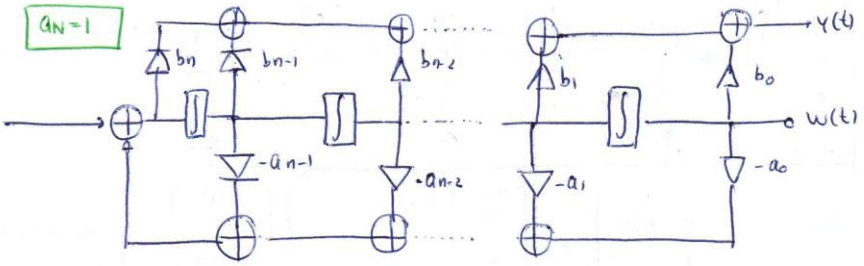
$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + b\,x(t)$$

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \end{bmatrix}.$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + b_n \left[x(t) \right] = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + 0}$$

$\boxed{\text{2ª Forma canónica}}$

$\boxed{a_N = 1}$



Ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ \vdots \\ v_{N-1}'(t) \\ v_N'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Ecuación de salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} (b_0 - a_0 b_N) & (b_1 - a_1 b_N) & \cdots & (b_{N-1} - a_{N-1} b_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} + b_N\, x(t)$$

Ejemplo

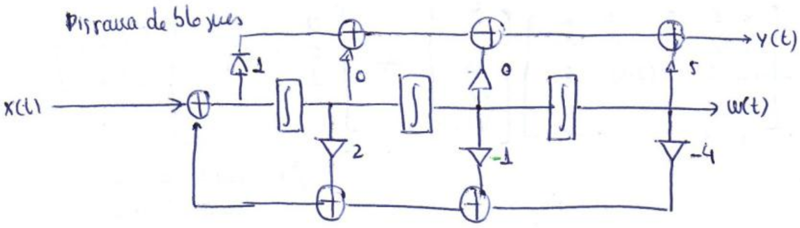
$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) + 4y(t) = x'''(t) + 5x(t)$$

$b_n = a_n = 1.$

$a_N = 1$
$b_N = 1$
$a_2 = -2$ $\quad a_1 = 1$
$b_0 = 5$ $\quad a_0 = 4$

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t).$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + x(t) =$$



Ejercicio 5.11

Entradas $x_1(t)$, $x_2(t)$

salidas $y_1(t)$, $y_2(t)$

$$y_1'''(t) + 2y_1''(t) + y_2'' - 3\left[y_1'(t) + y_2'(t)\right] + t\left[y_1(t) - y_2(t)\right] = x_1(t).$$

$$y_2''(t) + 5y_2'(t) + 3y_1'(t) + 2\left[y_2(t) - y_1(t)\right] = x_2(t)$$

$v_1(t) = y_1(t)$ $\quad$ $v_4(t) = y_2(t)$

$v_2(t) = y_1'(t)$ $\quad$ $v_5(t) = y_2'(t)$.

$v_3(t) = y_1''(t)$

Vamos a la segunda forma canónica y escribimos la ecuación de estado y de salida

$V_1'(t) = V_2(t)$.

$V_2'(t) = V_3(t)$

$V_4'(t) = V_5(t)$.

y ahora sustituimos en las dos ecuaciones que me da: ; puesto que necesito 5, y tengo 3. Despejemos en función de variables no en función de derivadas.

$$V_3'(t) + 2V_3(t) + V_5'(t) - 3\left[V_2(t) + V_5(t)\right] + t\left[V_1(t) - V_4(t)\right] = x_1(t)$$

$$V_5'(t) + 5V_5(t) + 3V_2(t) + 2\left[V_4(t) - V_1(t)\right] = x_2(t).$$

$\hookrightarrow$ $V_5'(t) = x_2(t) - 5V_5(t) - 3V_2(t) - 2V_4(t) + 2V_1(t)$

$V_3'(t) = x_1(t) - 2V_3(t) + 3\left[V_2(t) + V_5(t)\right] - t(V_1(t) - V_4(t)) - V_5'(t) =$

$= x_1(t) - 2V_3(t) + 3\left[V_2(t) + V_5(t)\right] - t(V_1(t) - V_4(t)) - \left[x_2(t) - 5V_5(t) - 3V_2(t) - 2V_4(t) + 2V_1(t)\right]$

$V_5'(t) = x_2(t) + 2V_1(t) - 3V_2(t) - 2V_4(t) - 5V_5(t)$

$V_3'(t) = -(2+t)V_1(t) + 6V_2(t) - 2V_3(t) + (t+2)V_4(t) + 8V_5(t) + x_1(t) - x_2(t).$

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \\ v_4'(t) \\ v_5'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(t+2) & 6 & -2(2+t) & 8 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

↑ No se puede poner en forma matricial