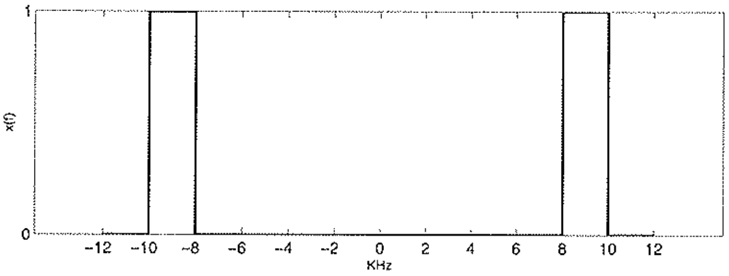
Examen de Junio 2014.

1. Los convertidores A/D y D/A hacen de interface con un filtro digital que tiene la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(w) = \frac{\frac{1}{2} - e^{-jw}}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

   Si la frecuencia de muestreo para el convertidor A/D y D/A es la misma, $f_s = 500Hz$, determine el módulo y la fase del filtro digital, encuentre la salida del filtro discreto $y(n)$ así como la salida del conversor D/A cuando la entrada es un tono puro de frecuencia $F_0 = 125Hz$.

2. Una señal pasabanda $x(t)$ tiene el espectro de frecuencia que se detalla en la figura. Obtenga gráficamente el espectro de la señal muestreada $x(n)$, si la frecuencia de muestreo es $4kHz$.



3. Considere el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias: $y(n) - 1/2y(n-1) = x(n) + 1/2x(n-1)$. determine:
   - La respuesta en frecuencia del sistema.
   - La respuesta al impulso del sistema (en forma cerrada).
   - La respuesta del sistema $y(n)$, cuando la entrada es $x(n) = cos(n\pi/2)$ (con condiciones iniciales nulas).

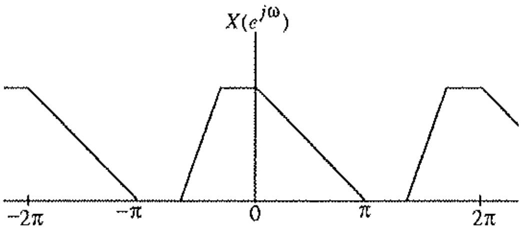
4. Considere dos sistemas discretos cuyas funciones de transferencia están dadas por:

$$H_1(z) = \frac{a + z^{-T_1}}{1 - az^{-T1}}; H_2(z) = \frac{b + z^{-T_2}}{1 - bz^{-T_2}}$$

   - Mediante su ecuación en diferencias, verifique que $H_1(z)$ y $H_2(z)$ se pueden usar como canceladores de ecos.

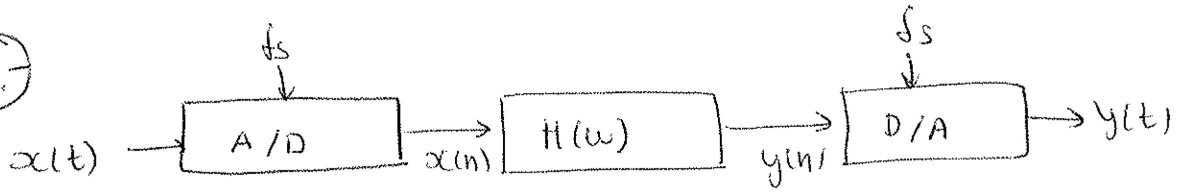
- Estudie si es posible obtener un sistema cancelador de ecos si se conectan los sistemas anteriores en cascada. Particularice para valores de $T_1 = 7$ y $T_2 = 5$.

5. La respuesta en magnitud de una señal se muestra en la siguiente figura,



Represente la respuesta en magnitud de la misma señal tras una interpolación de factor 4 antes y depues del filtrado anti-imagen.

① 1.-



$f_s = 500Hz$

$x(t) = \cos(2\pi \cdot 125t)$

ⓐ $H(\omega) = \dfrac{\frac{1}{2} - e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ ← si nos fijamos $H(\omega)$ es un filtro pasa todo

veámoslo

$$\left[|H(\omega)| = \left| \frac{\frac{1}{2} - e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \right| = \frac{\left| \frac{1}{2} - \cos\omega + j\,\text{sen}\,\omega \right|}{\left| 1 - \frac{1}{2}\cos\omega + \frac{1}{2}j\,\text{sen}\,\omega \right|} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2} - \cos\omega)^2 + \text{sen}^2\omega}}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\cos\omega)^2 + \frac{1}{4}\text{sen}^2\omega}} \right.$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \cos^2\omega - 2 \cdot \frac{1}{2}\cos\omega + \text{sen}^2\omega}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2\omega - 2 \cdot \frac{1}{2}\cos\omega + \frac{1}{4}\text{sen}^2\omega}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} + 1 - \cos\omega}{1 + \frac{1}{4} - \cos\omega}} = \left. 1 \right].$$

$$\angle H(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Img}}{\text{Real}}.$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{2} - e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{(\frac{1}{2} - e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega})}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{5}{4}\cos\omega + \frac{3}{4}j\,\text{sen}\,\omega}{5/4 - \cos\omega}$$

$$\angle H(\omega) = \text{arctg} \frac{3/4\, \cancel{j}\, \text{sen}\,\omega}{1 - \frac{5}{4}\cos\omega}$$

ⓑ $x(t) = \cos(2\pi\, 125t) \rightarrow \boxed{A/D} \rightarrow x(n) = \cos\left[2\pi \frac{125}{500} n\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

$\uparrow f_s = 500Hz$

$$y(n) = |H(\omega)|_{\omega = \pi/2} \cdot e^{j\pi/2 \cdot n} \cdot e^{j\theta(\omega)|_{\omega=\pi/2}}$$

$|H(\omega)|_{\omega=\pi/2} = 1$ puesto que es un filtro pasa todo

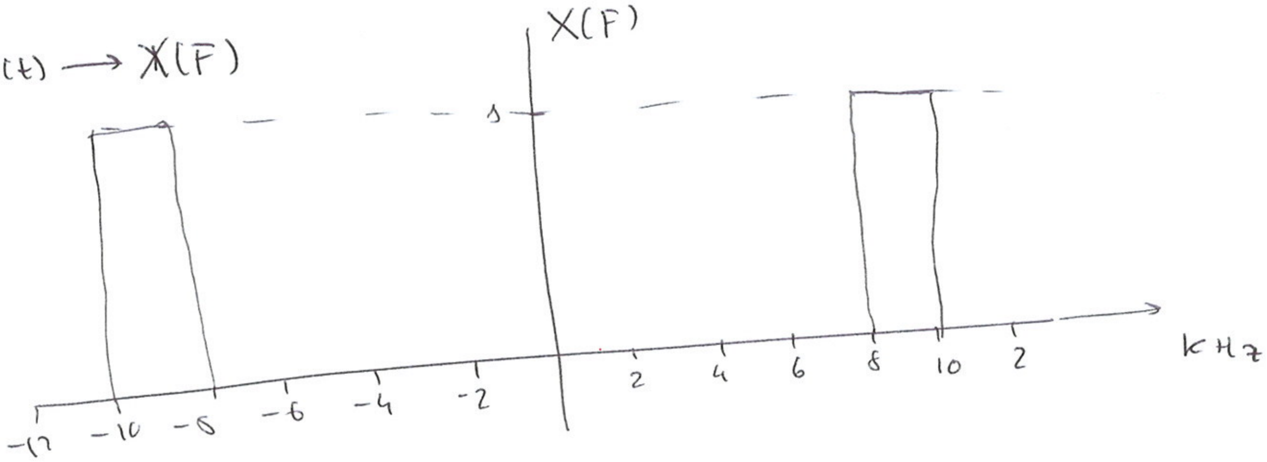
$\theta(\omega)|_{\omega=\pi/2} = \text{arctg.}(3/4)$

$$\boxed{y(n) = \cos\left[\frac{\pi}{2} n + \text{arctg}(3/4)\right]}$$

ahora obtenemos $y(t) = y(n)\Big|_{n=t\cdot F_s} = \cos\left[\left(\frac{2\pi}{2} t \cdot 500 + \text{arctg}(3/4)\right]\right. =$

$= \cos\left[250\pi t + \text{arctg}(3/4)\right] = \cos\left(2\pi \cdot 125 t + \text{arctg}(3/4)\right)$

② $x(t) \longrightarrow X(F)$



$f_s = 4$ kHz

$x(t)$ es una señal pasobanda con $B = 2$ kHz

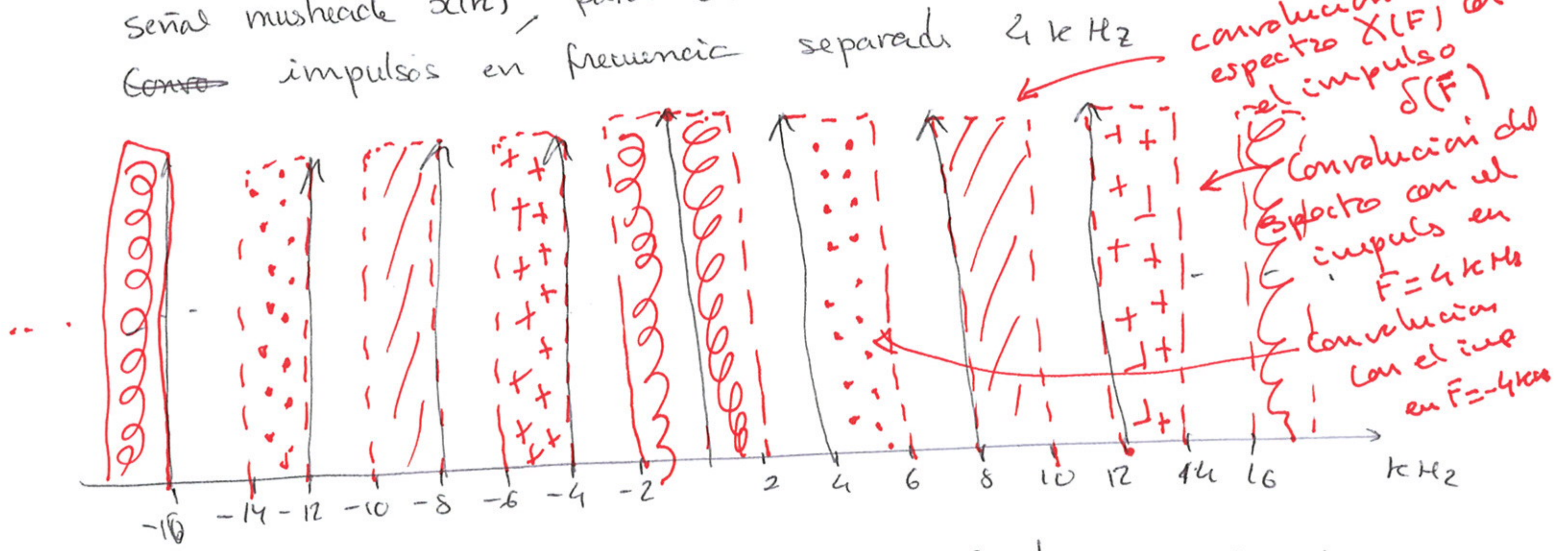
Comprobams si $F_c + \frac{B}{2} = kB$

$F_c = 9$ kHz $\quad$ 9 kHz + 1kHz = $\cancel{k} \cdot 2$ kHz

$B = 2$ kHz $\quad \boxed{k = 5}$

Luego el teorema de mustreo de señals pasobanda nos dice que se puede mustrear con $f_s = 2B = 4$ kHz.

El enunciado pide que obtengams gráficamente el spectro de la señal mustreada $x(n)$, para ello convolucionams $X(F)$ con ~~Convo~~ impulsos en frecuencia separads 4 kHz



convolución del espectro X(F) con el impulso δ(F)

Convolución del espectro con el impuls en F = 4 kHz

Convolución con el imp en F = -4 kHz

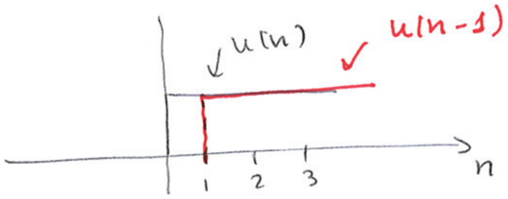
Para recuperar la señal aplicams un filtro paso banda.

ⓑ $H(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z+\frac{1}{2}}{z-1/2} = \frac{z}{z-1/2} + \frac{1/2}{z-1/2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1/2\, z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u(n) + u(n-1)\right]$ ~~$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(n) = \sum \delta(n)$~~ $= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\delta(n) + 2u(n-1)\right]$



$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(n) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) =$ ~~$\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$~~

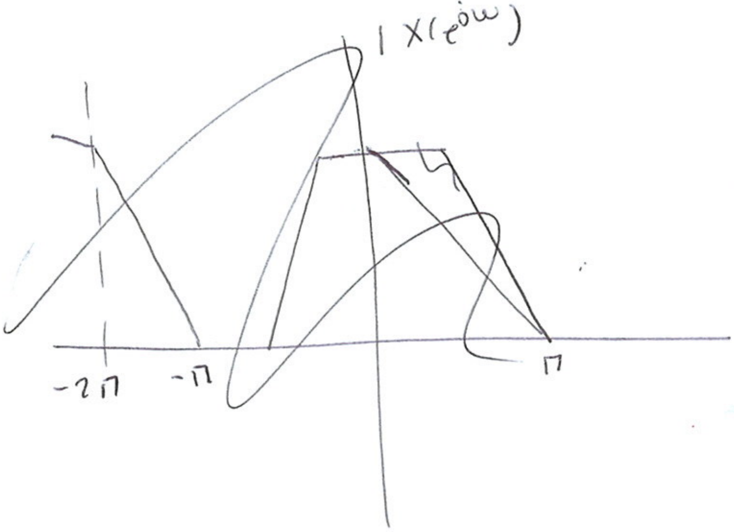
~~$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$~~ $=$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$

c) La respuesta cuando la entrada es $x(n) = \cos(n\pi/2)$

$y(n) = |H(\omega)|_{\omega=\pi/2} \cdot e^{j\pi/2 n} \cdot e^{-j\,\mathrm{arctg}(-4/3)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 0'9273\,rd\right).$

⑤



③ $y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$

- Respusta en frecuencia
- Respuesta al impulso
- Respuesta del sistema cuando la entrada es $x(n) = \cos(n\pi/2)$

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) + \frac{1}{2} z^{-1} X(z)$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right] = X(z)\left[1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$H(w) = \frac{1 + \frac{1}{2} e^{jw}}{1 - \frac{1}{2} e^{-jw}} \, ; \quad |H(w)| = \frac{|1 + \frac{1}{2} e^{-jw}|}{|1 - \frac{1}{2} e^{-jw}|} =$$

$$= \frac{|1 + \frac{1}{2}\cos w - \frac{1}{2} j \operatorname{sen} w|}{|1 - \frac{1}{2}\cos w + \frac{1}{2} j \operatorname{sen} w|} = \sqrt{\frac{(1 + \frac{1}{2}\cos w)^2 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 w}{(1 - \frac{1}{2}\cos w)^2 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 w}} = \sqrt{\frac{1 + 4/5 \cos w}{1 - 4/5 \cos w}}$$

$$\angle \theta(w) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Img}(H(w))}{\operatorname{Real}(H(w))}$$

$$H(w) = \frac{(1 + \frac{1}{2} e^{-jw})(1 - \frac{1}{2} e^{jw})}{(1 - \frac{1}{2} e^{-jw})(1 - \frac{1}{2} e^{jw})} = \frac{1 - \frac{1}{2} e^{jw} + \frac{1}{2} e^{-jw} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2} e^{jw} - \frac{1}{2} e^{jw} + \frac{1}{4}} =$$

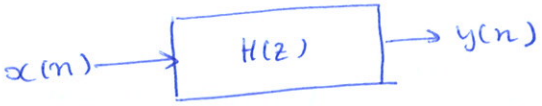
$$= \frac{3/4 - \frac{1}{2}\left(e^{jw} - e^{-jw}\right)}{5/4 - \frac{1}{2}\left[e^{jw} + e^{-jw}\right]} = \frac{3/4 - j \operatorname{sen} w}{5/4 - \cos w}$$

$$\angle \theta(w) = \operatorname{arctg} \frac{-\operatorname{sen} w \cancel{/(5/4 - \cos w)}}{3/4 \cancel{/(5/4 - \cos w)}} = \operatorname{arctg}\left[-\frac{4}{3}\operatorname{sen} w\right]$$

$$H(w) = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}\cos w}{1 - \frac{4}{5}\cos w}} \; \angle -\frac{4}{3}\operatorname{sen} w$$

④ Nos piden que verifiquemos si $H_1(z) = \frac{a+z^{-T_1}}{1-az^{-T_1}}$ y $H_2(z) = \frac{b+z^{-T_2}}{1-bz^{-T_2}}$ se pueden utilizar como canceladores de eco.

Veamos cómo sería un filtro cancelador de eco



x(n) es una señal sumada a sus ecos.

$$x(n) = x_1(n) + a x_1(n-T_1) + a^2 x_1(n-2T_1) + \dots$$

con $|a|<1$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x_1(n-kT_1) = x_1(n) * \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(n-kT_1) = x_1(n) * h_1(n)$$

entonces $X(z) = X_1(z) \cdot H_1(z)$ y $H_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-T_1 k} \underset{\uparrow \atop \text{si } |az^{-T_1}|<1}{=} \frac{1}{1-az^{-T_1}}$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ queremos que $y(n) = x_1(n)$, señal original sin ecos.

entonces $\underline{\underline{H(z)}} = \frac{X_1(z)}{X(z)} = \frac{X_1(z)}{X_1(z) \cdot H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-T_1 k}} = \underline{\underline{1-az^{-T_1}}}$

para construir el filtro cancelador de ecos necesitamos tener información del retardo de los ecos, T_1, y del factor de decaimiento a.

Otra forma de verlo ~~$y(n) = x_1(n) = x(n) * h_1(n)$~~

$$y(n) = x_1(n) = x(n) * h(n) = x_1(n) * h_1(n) * h(n) \Rightarrow$$

$$h_1(n) * h(n) = \delta(n)$$

$$H_1(z) \cdot H(z) = 1 \Rightarrow H(z) = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-T_1 k}}$$

$$\underline{\underline{H(z)}} = \left[\frac{1}{1-az^{-T_1}}\right]^{-1} = \underline{\underline{1-az^{-T_1}}}$$

La función de transferencia del problema es $H_1(z) = \frac{a+z^{-T_1}}{1-az^{-T_1}}$

$$H_1(z) = \underbrace{\frac{1}{1-az^{-T_1}}}_{} \cdot a + z^{-T_1}$$

→ lo podemos ver como el generador de ecos.

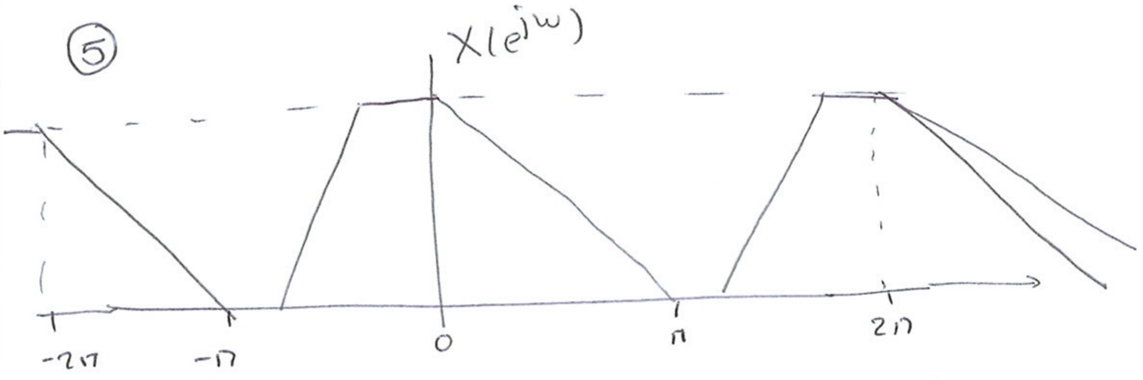
entonces para que $H_1(z)$ sea un cacelador de ecos $|H_1(z)| = 1$

$$|H_1(z)| = H_1(z) . H_1(z^{-1}) = \frac{a+z^{-T_1}}{1-az^{-1}} \cdot \frac{a+\left(\frac{1}{z}\right)^{-T_1}}{1-a\left(\frac{1}{z}\right)^{-T_1}} = \frac{a+z^{-T_1}}{1-az^{-T_1}} \cdot \frac{a+z^{T_1}}{1-az^{T_1}} =$$

$$= \frac{a^2+1+a(z^{T_1}+z^{-T_1})}{a^2+1-a(z^{T_1}+z^{-T_1})} \neq 1$$ luego no es un cancelador de ecos.

del mismo modo $H_2(z) = \frac{b+z^{-T_2}}{1-bz^{-T_2}}$ tampoco es un cancelador de ecos.

⑤



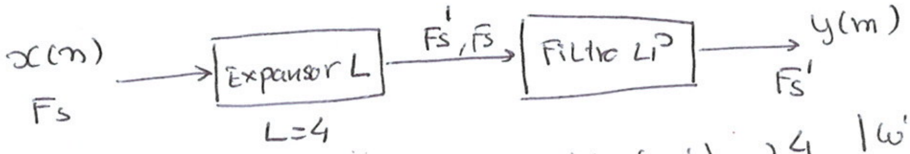
Interpolación factor 4.

Variamos la tasa de muestreo en un factor 4 La nueva frecuencia de muestreo es 4 veces superior a la original $F_s' > F_s$; $F_s' = 4F_s$

EL proceso de interpolación se realiza en dos pasos:

1.- Expansión en un factor L

2.- Filtrado antialiassing paso bajo



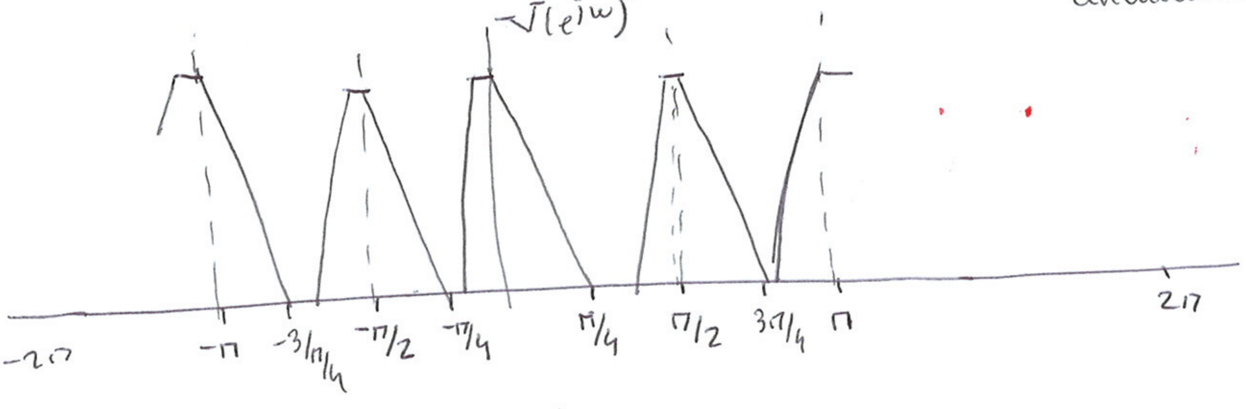
$$H_I(w') = \begin{cases} 4 & |w'| < \pi/L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$T \rightarrow F_s = \frac{1}{T}$$

$$T' = \frac{T}{4} \Rightarrow F_s' = 4F_s$$

$$V(w) = X(w'L)$$

El espectro de la señal interpolada antes del filtro antialiassing y



después del filtro