Señales Aleatorias
Examen Final de 19 de junio de 2009

Nombre:

1) (*2 puntos*)Una variable aleatoria continua X, con una función densidad de probabilidad (pdf) Laplaciana y una varianza igual a 2, es transformada en una nueva variable aleatoria Y mediante la transformación:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 4 & 1 \leq X < \infty \text{ o } -\infty < X < -1 \\ 2 & 0 \leq X < 1 \\ -1 & -1 \leq X < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Determine la funcion de distribucion de probabilidad acumulada (cdf) de la variable Y.

2) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio Gaussiano estacionario en sentido amplio con una media $E[X(t)]=4$ y con una función de autocorrelación $R_X(\tau) = 25e^{-3|\tau|} + 16$. Determine:

- a) (*1 punto*)La función densidad de probabilidad conjunta de las tres variables aleatorias resultantes del muestreo del proceso aleatorio en los instantes de tiempo t_i $(X(t_i), i = 1, 2, 3)$ con $t_i = t_0 + [(i-1)/2]$, donde t_0 es una constante.
- b)(*0.5 puntos*) La densidad de potencia espectral S_X.
- c)(*0.5 puntos*) La potencia promedio P_X.

3) (*1.25 puntos*).Explique en detalle cómo ha establecido una ley de probabilidad para el primer modelo de la práctica 1. En la estimación 2 basada en el primer modelo, ¿obtenía siempre la misma estimación para la muestra que faltaba o la estimación que obtenía dependía de la muestra anterior recibida? Justifique su respuesta.

4) (*1.25 puntos*).¿Cómo ha determinado los límites de los intervalos en el test chi-cuadrado de la práctica 2?. Explíquelo en detalle.

NOTA: En los ejercicios 1 y 2 no vale con dar sólo la respuesta correcta sino que hay que mostrar cómo se ha obtenido el resultado. Si no se da una explicación el valor del ejercicio será de cero puntos.

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}\,dx = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a}$$

$$\int_0^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}\ \mathrm{erfc}\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

where $\mathrm{erfc}\,(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_p^\infty e^{-x^2}\,dx$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}$$

Laplacian Random Variable

$S_X = (-\infty, \infty)$

$f_X(x) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \alpha > 0$

$E[X] = 0 \qquad \mathrm{VAR}[X] = 2/\alpha^2$

Table B-2 Common Continuous-Time Fourier Transform Pairs

	$x(t)$	$X(\omega)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
3.	1	$2\pi\delta(\omega)$
4.	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
5.	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
6.	$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
7.	$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
8.	$e^{-at}u(t) \quad a>0$	$\frac{1}{j\omega+a}$
9.	$te^{-at}u(t) \quad a>0$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$
10.	$e^{-a\|t\|} \quad a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
11.	$\frac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\|\omega\|}$
12.	$e^{-at^2} \quad a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$

Señales aleatorias

Problemas resueltos

Junio 09

$\boxed{1.}$ $f_X(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \alpha > 0$

$$\alpha^2 = \frac{2}{VAR[X]} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \alpha = 1$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty$$

$Y = \{4, 2, -1\} \rightarrow$ V.A. discreta $\rightarrow$ Determinamos primero su pmf

$$P[Y=4] = P[1 \le X < \infty] + P[-\infty < X < -1]$$

$$P[1 \le X < \infty] = \int_1^\infty f_X(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2} e^{-x}\,dx$$

debido al rango de integración

$$= -\frac{1}{2} e^{-x}\Big]_1^\infty = \frac{1}{2e}$$

$$P[-\infty < X < -1] = P[1 \le X < \infty] = \frac{1}{2e}$$

Por simetría en torno a cero de la pdf Laplaciana

$$P[Y=4] = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$$

$$P[Y=2] = P[0 \le X < 1] = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-x}\Big]_0^1 =$$

debido al rango de integración

$$= \frac{e-1}{2e}$$

$$P[Y=-1] = P[-1 \leq X < 0] = P[0 \leq X < 1] = \frac{e-1}{2e}$$ ②

↑ por simetría en torno a 0 de la pdf Laplaciana

Una vez que conocemos la pmf de Y podemos determinar la cdf

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ \frac{e-1}{2e} & -1 \leq y < 2 \\ \frac{e-1}{e} & 2 \leq y < 4 \\ 1 & y \geq 4 \end{cases}$$

2º a) Sabemos que para caracterizar una variable vectorial Gaussiana $\vec{X}$ de dimensión 3 necesitamos conocer el vector de medias $\vec{m}$ y la matriz de covarianzas $\underline{K}$. $\vec{X} = (X(t_1), X(t_2), X(t_3))$ (3)

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} E[X(t_1)] \\ E[X(t_2)] \\ E[X(t_3)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

según los datos del problema

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} C_X(t_1,t_1), & C_X(t_1,t_2), & C_X(t_1,t_3) \\ C_X(t_2,t_1), & C_X(t_2,t_2), & C_X(t_2,t_3) \\ C_X(t_3,t_1), & C_X(t_3,t_2), & C_X(t_3,t_3) \end{bmatrix} =$$

como el proceso es estacionario en sentido amplio

$$= \begin{bmatrix} C_X(0), & C_X(t_2-t_1), & C_X(t_3-t_1) \\ C_X(t_1-t_2), & C_X(0), & C_X(t_3-t_2) \\ C_X(t_1-t_3), & C_X(t_2-t_3), & C_X(0) \end{bmatrix} =$$

Del enunciado del problema y de la relación covarianza-correlación

$$C_X(t_i,t_j) = C_X(t_j-t_i) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - E[X(i)]E[X(j)]$$

$$= 25e^{-3|\tau|} + 16 - 4 \cdot 4 = 25e^{-3|\tau|}$$

Teniendo en cuenta el valor de las diferencias de tiempos $t_j - t_i$, la matriz de covarianzas queda

$i,j = 1,2,3$
$t_1 = t_0$
$t_2 = t_0 + 1/2$
$t_3 = t_0 + 1$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} C_X(0), & C_X(1/2), & C_X(1) \\ C_X(-1/2), & C_X(0), & C_X(1/2) \\ C_X(-1), & C_X(-1/2) & C_X(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 25e^{-3/2} & 25e^{-3} \\ 25e^{-3/2} & 25 & 25e^{-3/2} \\ 25e^{-3} & 25e^{-3/2} & 25 \end{bmatrix}$$

b) $S_X(\omega) = F[R_X(\tau)] = F\left[25e^{-3|\tau|} + 16\right] = \dfrac{150}{9+\omega^2} + 32\pi\delta(\omega)$

por ser el proceso aleatorio estacionario en sentido amplio

consultando la tabla de pares de Fourier

c) Dos formas de obtener la potencia promedio P_X

1. En el dominio del tiempo

$$P_X = R_X(0) = 25 + 16 = 41$$

si es estacionario en sentido amplio

2. Usando la densidad de potencia espectral

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{150}{9+\omega^2}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 32\pi\,\delta(\omega)\,d\omega$$

Usando las tablas de integrales y teniendo en cuenta que $\dfrac{150}{9+w^2}$ es una función par

$$= \frac{1}{2\pi}\, 2 \int_0^{\infty} \frac{150}{9+w^2}\, dw + \frac{32\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\, dw}$$

es bien conocido que vale 1

$$= \frac{150 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{\pi}}{\cancel{2\pi} \cdot 6} + 16 = 25 + 16 = 41$$

cualquiera de las dos formas era válida.