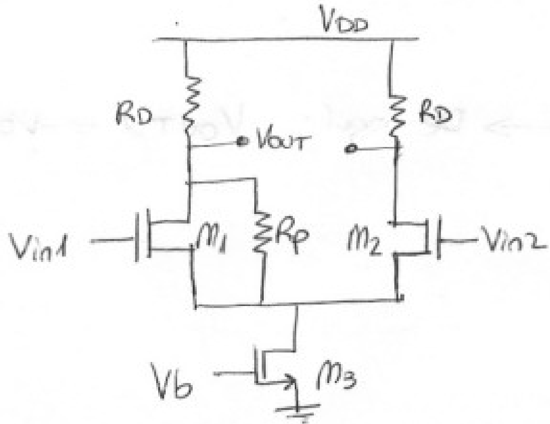
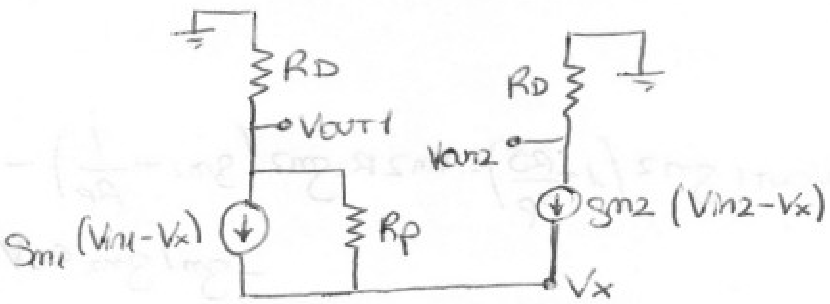
Problema 2

Tenemos un par diferencial NO SIMÉTRICO debido a la resistencia parásita entre drenador y fuente de $M1$.



Si $\lambda=0$ no hay efecto de modulación de la longitud del canal en el mosfet, con lo que la resistencia $r_o \to \infty$ en el modelo de pequeña señal del transistor.
Con $\gamma=0$ no se tiene "efecto Body".

En general, $V_{OUT1} - V_{OUT2} = f(V_{i1}, V_{i2})$
Hallemos la relación entre la entrada y la salida del par estudiando su modelo de pequeña señal:



Tenemos este modelo en pequeña señal, haciendo $r_o \to \infty$ (Consideramos $\lambda=0$).

Las ecuaciones que podemos plantear son:

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{-V_{OUT1}}{R_D} = g_{m1}(V_{in1}-V_x) + \dfrac{(V_{OUT1}-V_x)}{R_P} \\[2ex] (2) \quad \dfrac{-V_{OUT2}}{R_D} = g_{m2}(V_{in2}-V_x) \\[2ex] (3) \quad \dfrac{V_{OUT1}}{R_D} = g_{m2}(V_{in2}-V_x) \end{cases}$$

(2), (3) $\longrightarrow$ De aquí: $V_{OUT1} = -V_{OUT2}$

Desarrollamos la ecuación (1):

$$-V_{OUT1} = g_{m1}R_D V_{in1} - g_{m1}R_D V_x + \frac{R_D V_{OUT1}}{R_P} - \frac{R_D V_x}{R_P}$$

Despejamos V_x y queda: $V_x = \dfrac{V_{OUT1}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right) + g_{m1}R_D V_{in1}}{g_{m1}R_D + \frac{R_D}{R_P}}$

Introducimos el valor de V_x en la ecuación (2):

$$-V_{OUT2} = R_D g_{m2} V_{in2} - \cancel{R_D} g_{m2} \frac{V_{OUT1}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right) + g_{m1}R_D V_{in1}}{g_{m1}\cancel{R_D} + \frac{\cancel{R_D}}{R_P}}$$

desarrollando:

$$-V_{OUT2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right) + V_{OUT1}g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right) = V_{in2}R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right) - g_{m1}g_{m2}R_D V_{in1}$$

Al ser $V_{OUT1} = -V_{OUT2}$, expresamos V_{OUT1} como función de V_{in1} y de V_{in2}, y lo mismo con V_{OUT2}:

$$V_{OUT1}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)+V_{OUT1}\,g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)=V_{in2}R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)-V_{in1}g_{m1}g_{m2}R_D$$

$$-V_{OUT2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)-V_{OUT2}\,g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)=V_{in2}R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)-V_{in1}g_{m1}g_{m2}R_D$$

Tenemos entonces:

$$V_{OUT1}=\frac{V_{in2}R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)-V_{in1}g_{m1}g_{m2}R_D}{g_{m1}+\frac{1}{R_P}+g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)}$$

$$V_{OUT2}=\frac{V_{in1}g_{m1}g_{m2}R_D-V_{in2}R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)}{g_{m1}+\frac{1}{R_P}+g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)}$$

V_{OUT} es la diferencia entre V_{OUT1} y V_{OUT2}:

$$V_{OUT}=V_{OUT1}-V_{OUT2}=\frac{2V_{in2}R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)-2V_{in1}g_{m1}g_{m2}R_D}{g_{m1}+\frac{1}{R_P}+g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)}$$

Hemos expresado $(V_{OUT1}-V_{OUT2})$ como función de V_{in1} y V_{in2}.

A continuación calculamos la ganancia diferencial A_d haciendo $V_{in1}=-V_{in2}$, y la ganancia en modo común A_{cm} haciendo $V_{in1}=V_{in2}$

Ganancia diferencial: $\longrightarrow V_{in1} = -V_{in2}$

$$V_{OUT} = \frac{2V_{in}\left(-R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_p}\right) - g_{m1} g_{m2} R_D\right)}{g_{m1} + \frac{1}{R_p} + g_{m2}\left(1 + \frac{R_D}{R_p}\right)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{A_d = \frac{-2\left(R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_p}\right) + g_{m1} g_{m2} R_D\right)}{g_{m1} + \frac{1}{R_p} + g_{m2}\left(1 + \frac{R_D}{R_p}\right)}}$$

Ganancia en modo común $\longrightarrow V_{in1} = V_{in2}$

$$V_{OUT} = \frac{2V_{in}\left(R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_p}\right) - g_{m1} g_{m2} R_D\right)}{g_{m1} + \frac{1}{R_p} + g_{m2}\left(1 + \frac{R_D}{R_p}\right)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{A_{cm} = \frac{2\left(R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_p}\right) - g_{m1} g_{m2} R_D\right)}{g_{m1} + \frac{1}{R_p} + g_{m2}\left(1 + \frac{R_D}{R_p}\right)}}$$

Observamos que si el par fuese simétrico, no tendríamos la resistencia R_p entre drenador y fuente de $M1$, y en este caso no tendríamos ganancia en modo común (lo cual es deseable). Si fuese simétrico podríamos haber obtenido la ganancia diferencial A_d utilizando el principio de superposición. En este caso sería un amplificador ideal debido a que la salida sólo es proporcional a la diferencia entre entradas.

La razón de rechazo al modo común es:

$$CMRR = 20\log\frac{|A_d|}{|A_{cm}|} =$$

$$= 20\log\frac{|-R_D g_{m2}(g_{m1}+\frac{1}{R_p})+g_{m1}g_{m2}R_D|}{|R_D g_{m2}(g_{m1}+\frac{1}{R_p})-g_{m1}g_{m2}R_D|} =$$

$$= 20\log\frac{|-1/R_p|}{|1/R_p|} = 0$$

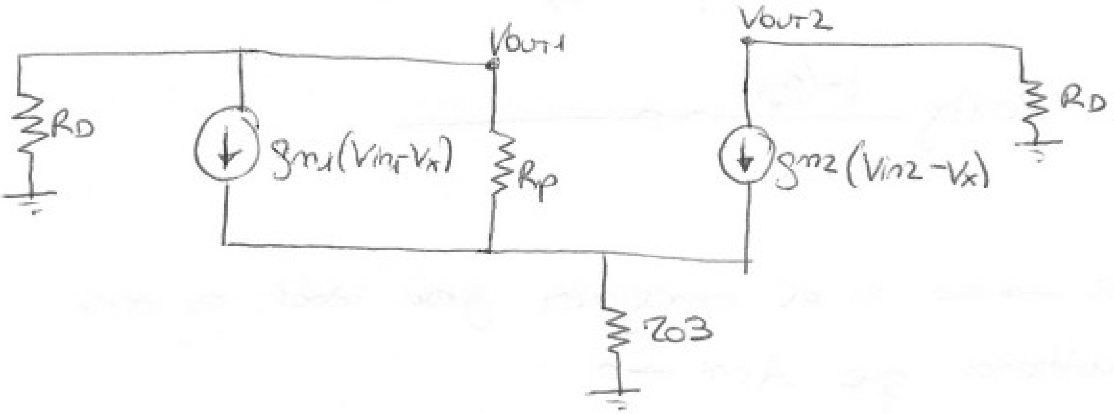
CMRR $\to \infty$ si el amplificador fuese ideal, es decir, si tuviésemos que $A_{cm}\to 0$.

CMRR es función de la frecuencia y suele disminuir al aumentar la misma.

Ahora repetimos el ejercicio suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para simplificar los cálculos, suponemos que $\lambda \neq 0$ sólo para el transistor M3, es decir, vamos a suponer que se comporta como una fuente de corriente no ideal.

El modelo en pequeña señal sería el siguiente:



Podemos establecer las ecuaciones:

(1) $$-\frac{V_{OUT1}}{R_D} = g_{m1}(V_{in1} - V_x) + \frac{V_{OUT1} - V_x}{R_P}$$

(2) $$\frac{-V_{OUT2}}{R_D} = g_{m2}(V_{in2} - V_x)$$

(3) $$\frac{V_x}{r_{o3}} = -\frac{V_{OUT1}}{R_D} - \frac{V_{OUT2}}{R_D}$$

Seguimos el mismo procedimiento que antes: Despejamos V_x de la ecuación (1) y la sustituimos en la ecuación (2). Nos queda entonces que:

$$-V_{OUT2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)+V_{OUT1}\,g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)=V_{in2}\,R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)-g_{m1}g_{m2}R_D V_{in1}$$

Por otro lado,
Con la ecuación (3) y la V_x despejada de (1) tenemos que:

$$V_x=-V_{OUT1}\frac{r_{O3}}{R_D}-V_{OUT2}\frac{r_{O3}}{R_D}=\frac{V_{OUT1}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)+g_{m1}R_D V_{in1}}{g_{m1}R_D+\frac{R_D}{R_P}}$$

de aquí, la relación entre V_{OUT1} y V_{OUT2} es:

$$V_{OUT1}=\frac{-\left(\frac{r_{O3}}{R_D}V_{OUT2}+\frac{g_{m1}R_D V_{in1}}{g_{m1}R_D+\frac{R_D}{R_P}}\right)}{\frac{r_{O3}}{R_D}+\frac{1+R_D/R_P}{g_{m1}R_D+\frac{R_D}{R_P}}}$$

Combinándolo con la ecuación anterior, conseguimos expresar V_{OUT1} y V_{OUT2} en función de V_{in1} y V_{in2}:

$$V_{OUT1}=f(V_{in1},V_{in2}). \qquad V_{OUT2}=f(V_{in1},V_{in2})$$

$$V_{OUT1}=\frac{\left(\frac{-R_D}{r_{O3}}g_{m1}-g_{m1}g_{m2}R_D\right)V_{in1}+R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)V_{in2}}{\left(\frac{r_{O3}}{R_D}+\frac{1+\frac{R_D}{R_P}}{g_{m1}R_D+\frac{R_D}{R_P}}\right)\frac{R_D}{r_{O3}}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)+g_{m2}\left(1+\frac{R_D}{R_P}\right)}$$

$$V_{OUT2}=\frac{V_{in1}\left(g_{m1}g_{m2}R_D-\frac{\frac{g_{m1}}{g_{m1}+1/R_P}}{\frac{r_{O3}}{R_D}+\frac{1+R_D/R_P}{g_{m1}R_D+R_D/R_P}}\right)-V_{in2}\,R_D g_{m2}\left(g_{m1}+\frac{1}{R_P}\right)}{g_{m1}+\frac{1}{R_P}-\frac{r_{O3}/R_D}{\frac{r_{O3}}{R_D}+\frac{1+R_D/R_P}{g_{m1}R_D+\frac{R_D}{R_P}}}}$$

V_{OUT} es la diferencia entre V_{OUT1} y V_{OUT2}: $V_{OUT} = V_{OUT1} - V_{OUT2}$.
Con esto, podemos expresar $(V_{OUT1} - V_{OUT2})$ como función de V_{in1} y V_{in2}. La expresión que queda es complicada.

Calculamos ahora la ganancia diferencial A_d haciendo $V_{in1} = -V_{in2} = V_{in}$

Por simplificar, llamemos "A" al denominador de V_{OUT1}, y "B" al denominador de V_{OUT2}. (de las expresiones anteriores)

La expresión que nos queda para A_d es:

$$A_d = \frac{\overset{a}{-\frac{R_D}{r_{o3}} g_{m1}} - \overset{b}{g_{m1} g_{m2} R_D} - \overset{c}{R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_P}\right)}}{A} + \frac{-\overset{d}{g_{m1} g_{m2} R_D} + \overset{f}{\dfrac{\frac{g_{m1}}{g_{m1}+\frac{1}{R_P}}}{\frac{r_{o3}}{R_D} + \frac{1 + R_D/R_P}{g_{m1}R_D + R_D/R_P}}} - \overset{g}{R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_P}\right)}}{B}$$

Para la ganancia en modo común A_{cm}, hacemos $V_{in1} = V_{in2}$.

Entonces:

$$A_{cm} = \frac{\overset{a}{-\frac{R_D}{r_{o3}} g_{m1}} - \overset{b}{g_{m1} g_{m2} R_D} + \overset{c}{R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_P}\right)}}{A} + \frac{-\overset{d}{g_{m1} g_{m2} R_D} + \overset{f}{\dfrac{\frac{g_{m1}}{g_{m1}+1/R_P}}{\frac{r_{o3}}{R_D} + \frac{1 + R_D/R_P}{g_{m1}R_D + R_D/R_P}}} + \overset{g}{R_D g_{m2}\left(g_{m1} + \frac{1}{R_P}\right)}}{B}$$

Haciendo $r_{o3} \rightarrow \infty$ y simplificando nos quedarán las expresiones para Ad, Acm que hemos hallado en la primera parte del ejercicio.

El factor de rechazo al modo común se puede obtener como:

$$CMRR = 20 \log \frac{|Ad|}{|Acm|}$$

Si llamamos con letras minúsculas a cada uno de los factores que nos aparecen en las ganancias Ad y Acm, (como hemos indicado) tenemos:

$$CMRR = 20 \log \frac{\left| \frac{-a-b-c}{A} + \frac{-d+f-g}{B} \right|}{\left| \frac{-a-b+c}{A} + \frac{-d+f+g}{B} \right|}$$

Podríamos simplificarlo todo si sustituyésemos los valores numéricos.

Como $d \neq 0$, el transistor M3 proporciona una corriente cuyo valor aumenta con V_{DS}. Esta no idealidad hace que el amplificador diferencial sea aún menos simétrico, debido que la corriente que atraviesa un transistor es distinta a la del otro, y esto origina cierto desequilibrio.