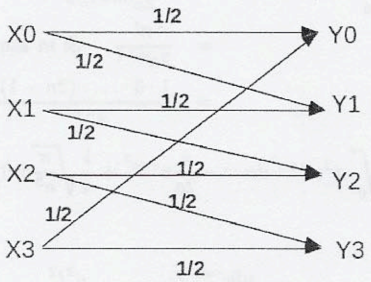
Teoría de la Comunicación
Examen de 12 de febrero de 2016

Nombre:

1) Sean dos procesos aleatorios independientes entre sí, discretos en el tiempo y ambos de media constante. La media del proceso $X(n)$ es $m_X = 1/\sqrt{2}$ y la del proceso $Y(n)$ es $m_Y = 2$. La función de autocorrelación del proceso $X(n)$ viene dada por $R_X(k) = (1/2)^k$ y la del proceso $Y(n)$ por $R_Y(k) = (1/3)^k$. Sea $Z(n)$ un nuevo proceso aleatorio dado por $Z(n) = X(n)+Y(n)$. Determine

- a)(*1 puntos*) Determine la energía promedio del proceso $Z(n)$.
- b)(*1 puntos*) Determine la función de autocovarianza del proceso $Z(n)$.
- c)(*1 puntos*) Al realizar un muestreo de orden uno del proceso aleatorio $X(n)$ obtenemos una variable aleatoria continua con una función densidad de probabilidad exponencial ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x < \infty,\ \lambda > 0$). Determine el valor de λ.

2) Sea el canal que se muestra en la figura



Determine:

- a) (*1 punto*) La información mutua entre la entrada y la salida del canal $I(X;Y)$ en el caso en que las probabilidades de la entrada sean $P(x_0) = 0{,}2$ $P(x_1) = 0{,}4$ $P(x_2) = 0{,}3$ y $P(x_3) = 0{,}1$.
- b) (*1 punto*) La capacidad C de dicho canal.

3) (*0.75 puntos*) Deduzca la expresión de la media de un proceso aleatorio $Y(t)$ generado como la salida de un filtro lineal e invariante con el tiempo cuando la entrada $X(t)$ al filtro es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio de media m_X.

4) (*0.75 puntos*) Defina los conceptos de código no singular, unívoco, instantáneo y compacto.

5) (*1 punto*) Explique en detalle cómo ha obtenido la función de autocorrelación (estadística) $R_X(n_1, n_2)$ del proceso aleatorio de la segunda parte de la práctica 1 a partir de las 2000 realizaciones del proceso de que se disponen.

6) (*1 punto*).Explique en detalle cómo ha establecido una ley de probabilidad para el primer modelo de la *práctica 2* (indicando qué funciones de MATLAB ha utilizado). En las estimaciones 1 y 2 basadas en el primer modelo, ¿obtenía siempre la misma estimación para la muestra que faltaba o la estimación que obtenía dependía de la muestra anterior recibida? Justifique su respuesta.

NOTA: En los ejercicios 1 y 2 no es suficiente con dar sólo la respuesta correcta sino que hay que mostrar cómo se ha obtenido el resultado. Si no se da una explicación el valor del ejercicio será de cero puntos.

2. Integrales definidas

(108) $\int_0^\infty x^n e^{-qx} dx = \frac{n!}{q^{n+1}}, \quad n > -1, q > 0;$

$$\begin{aligned}(109)\ \int_0^\infty x^m e^{-ax^2} dx &= \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{2a^{(m+1)/2}}, \qquad a > 0 \\ &= \frac{n!}{2a^{n+1}}, \ \text{Si } m \text{ impar} : m = 2n+1 \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}, \quad \text{Si } m \text{ par} : m = 2n\end{aligned}$$

(110) $\int_0^\epsilon x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{\epsilon}{2a} e^{-a\epsilon^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \mathrm{erf}(\epsilon\sqrt{a})$

(111)

$$\int_t^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n! e^{-at}}{a^{n+1}} \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n t^n}{n!}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, a > 0;$$

(112) $\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \frac{n-1}{2a} \int_0^\infty x^{n-2} e^{-ax^2} dx$

(113) $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(114) $\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$

(115) $\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \ln \frac{1}{1-x}$

(116) $\int_0^x \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x}$

(117) $\int_0^x \frac{dx}{1+\epsilon x} = \frac{1}{\epsilon} \ln(1+\epsilon x)$

(118) $\int_0^x \frac{1+\epsilon x}{1-x} dx = (1+\epsilon) \ln \frac{1}{1-x} - \epsilon x$