Examen de Señales Digitales

Junio 2016

Nombre: .... Grupo: ....

1. (2 puntos) Enuncie y demuestre el teorema del muestreo.

2. (2 puntos) Considere un filtro digital definido por la ecuación en diferencias $y(n) = x(n) + Ax(n-1) + By(n-1)$ donde $y(n) = 0$ para $n < 0$.

   a) Determine la respuesta al impulso del sistema.

   b) Determine los valores de A y B para que el sistema sea estable.

   c) Determine la respuesta al escalón unidad.

3. (2 puntos) Considere un sistema LTI con la siguiente respuesta impulsional:

$$h(n) = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right) u(n)$$

   a) Determine la ecuación en diferencias asociada al sistema.

   b) Dibuje su diagrama de polos y ceros.

   c) Represente de forma aproximada la respuesta en magnitud del sistema.

4. (2 puntos) Una señal escalón analógico se muestrea a 10 Hz desde el primer instante de tiempo, almacenándose únicamente las primeras 10 muestras de la señal ($x(n)$ con $n = 0, \ldots, 9$). Sobre estas muestras se aplica una Transformada de Fourier y una Transformada Discreta de Fourier.

   a) Determine ambas transformadas ($X(\omega)$ y $X(k)$).

   b) Represente gráficamente la magnitud de espectro para cada una de las transformaciones de forma aproximada.

   c) Calcule $X(\omega)$ para $\omega = \pi/5$ y $X(k)$ para $k = 2$. ¿A que frecuencias analógicas corresponden estos dos puntos?

5. (2 puntos) Calcule un filtro FIR de fase lineal con 3 coeficientes que elimine la componente en frecuencia de 800 Hz supuesta una frecuencia de muestreo de 8 KHz. Determine la función de transferencia y la ecuación en diferencias del filtro diseñado y calcule y dibuje la respuesta en magnitud para $\omega = 0, (\pi/4), (\pi/2), (3\pi/4)$ y π. Recuerde que $(1 + e^{(j2\omega)}) = 2cos(\omega)e^{j\omega}$.

Examen Resuelto

① Ver Teoría.

② $y(n)=0 \quad \forall n<0$ (Sistema Causal)

$$y(n) - B\,y(n-1) = x(n) + A\,x(n-1)$$

T. Z.: $Y(z)\left(1 - Bz^{-1}\right) = X(z)\left(1 + Az^{-1}\right)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + Az^{-1}}{1 - Bz^{-1}}$$

a) $H(z) = \dfrac{1}{1-Bz^{-1}} + \dfrac{Az^{-1}}{1-Bz^{-1}} \Rightarrow h(n) = B^n u(n) + A\cdot B^{n-1}u(n-1)$

b) Si $|B|<1$ el sistema es estable

Si $A=-B \ \forall B$ el sistema es estable $(H(z)=1)$

c) $Y(z) = H(z)\cdot U(z) = \dfrac{1+Az^{-1}}{1-Bz^{-1}} \cdot \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z^2 + Az}{(z-B)(z-1)}$ (impropia)

$$H_1(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z+A}{(z-B)(z-1)} = \frac{\alpha}{(z-B)} + \frac{\beta}{(z-1)}$$ (desc. frac. simples de $H_1(z)$)

$$\alpha = \left.\frac{(z+A)\cancel{(z-B)}}{\cancel{(z-B)}(z-1)}\right|_{z=B} = \frac{B+A}{B-1} \qquad \beta = \left.\frac{(z+A)\cancel{(z-1)}}{(z-B)\cancel{(z-1)}}\right|_{z=1} = \frac{A+1}{1-B}$$

Descomp. frac. simples de $H(z)$: $H(z) = \dfrac{\alpha z}{(z-B)} + \dfrac{\beta z}{(z-1)} = \dfrac{\alpha}{1-Bz^{-1}} + \dfrac{\beta}{1-z^{-1}}$

Entonces:
$$\boxed{\begin{aligned} h(n) &= \alpha B^n u(n) + \beta u(n) \\ &= \frac{B+A}{B-1} B^n u(n) + \frac{A-1}{1-B} u(n) \end{aligned}}$$

③ $h(n) = \left[(1/4)^n \cos(\frac{\pi}{4} n) \right] u(n)$

Relación de Euler: $\cos(\omega n) = \dfrac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$

$$h(n) = \left[(1/4)^n \left[\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/4 n} \right] \right] \cdot u(n) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4} e^{j\pi/4}\right)^n + \left(\frac{1}{4} e^{-j\pi/4}\right)^n \right] u(n)$$

$$= 1/2 \underbrace{\left(1/4\, e^{j\pi/4}\right)}_{\text{base}}{}^n u(n) + 1/2 \left(1/4\, e^{-j\pi/4}\right)^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - 1/4\, e^{j\pi/4} z^{-1}} + \frac{1}{1 - 1/4\, e^{-j\pi/4} z^{-1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - 1/4\, e^{-j\pi/4} z^{-1} + 1 - 1/4\, e^{j\pi/4} z^{-1}}{\left(1 - 1/4\, e^{j\pi/4} z^{-1}\right)\left(1 - 1/4\, e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{2 - 1/2 \cos \pi/4\, z^{-1}}{1 - 1/2 \cos \frac{\pi}{4} z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-2}} =$$

$$= \frac{1 - 1/4 \cos \pi/4\, z^{-1}}{1 - 1/2 \cos \pi/4\, z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-2}}$$

a) $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1 - 1/4 \cos \pi/4\, z^{-1}}{1 - 1/2 \cos \pi/4\, z^{-1} + 1/16\, z^{-2}}$

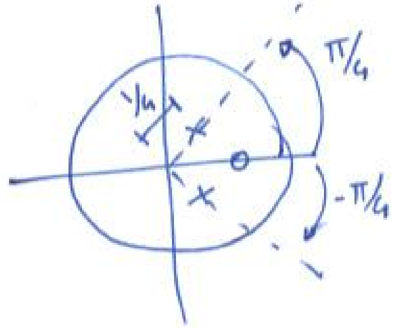
$$Y(z)\left[1 - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}\, z^{-1} + \tfrac{1}{16} z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{\pi}{4}\, z^{-1}\right]$$

$$\left[\, y(n) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{4})\cdot y(n-1) + \tfrac{1}{16} y(n-2) = x(n) - \tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{\pi}{4})\cdot x(n-1) \,\right]$$

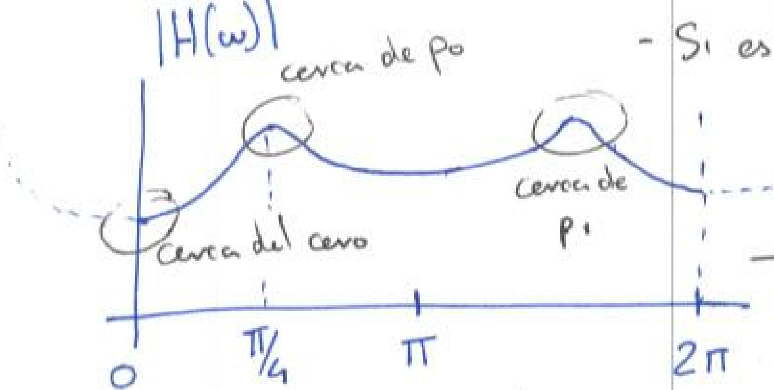
E. D.

b) $$H(z) = \frac{1 - \overbrace{\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{\pi}{4}}^{\text{cero}}\, z^{-1}}{\Big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{4}e^{j\pi/4}}_{\text{polos}}\, z^{-1}\Big)\Big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{4}e^{-j\pi/4}}_{\text{polos}}\, z^{-1}\Big)}$$

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \tfrac{1}{4}\cos \tfrac{\pi}{4} \\ p_0 &= \tfrac{1}{4} e^{j\pi/4} \quad \text{(complejo en forma polar)} \\ p_1 &= \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{\text{radio}}\, e^{\overbrace{-j\pi/4}^{\text{angulo}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



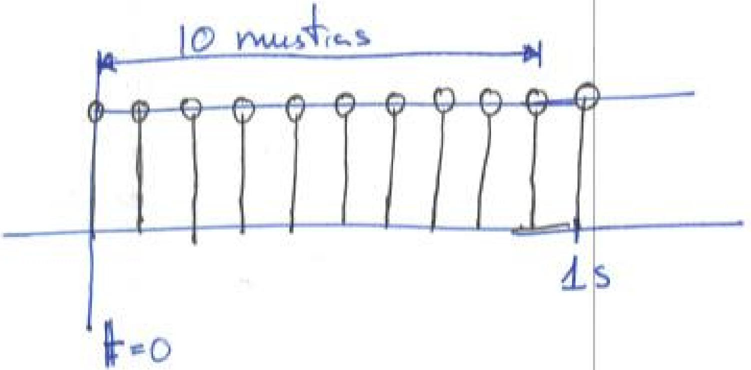
c) $H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$ (La respuesta en frecuencia la obtenemos al recorrer la circunferencia unidad.
- Si estamos cerca de un polo $|H(\omega)| \uparrow$
- Si estamos cerca de un cero $|H(\omega)| \downarrow$)



→ Infinitas repeticiones del espectro en 0-2π

2)

④



$F_s = 10\,Hz$

$N = 10$

a) $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{9} 1 \cdot e^{-j\omega n}$ DTFT.

$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N} n} = \sum_{n=0}^{9} 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{10} \cdot n}$

$k = 0 \ldots N-1$

$= \sum_{n=0}^{9} \left(e^{-j\frac{2\pi k}{10}}\right)^n = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{10}}}$ $k = 0 \ldots 9$

$\sum_{n=M}^{N} a^n = \frac{a^M - a^{N+1}}{1-a}$

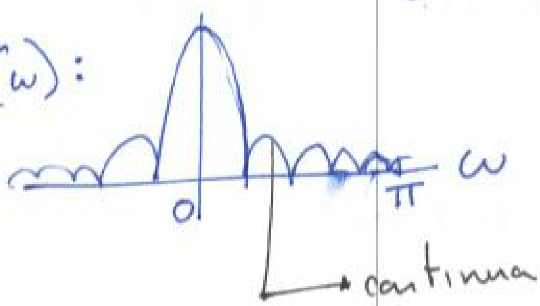
$= \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \emptyset & \text{si } k \neq \emptyset \end{cases}$

Si $k=0 \Rightarrow \frac{1-1}{1-1} = 1$

Si $k \neq 0 \Rightarrow \frac{1-1}{1-\text{algo}} = \frac{\emptyset}{1-\text{algo}} = \emptyset$

b) $x(n)$ es una ventana rectangular luego:

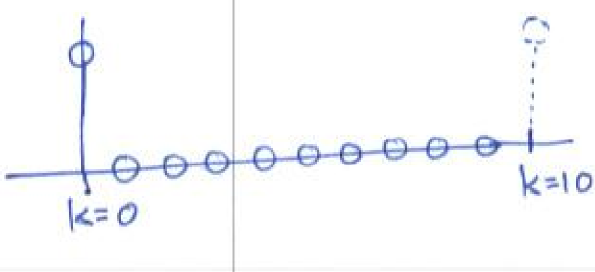
$X(\omega)$:



(Como en las prácticas)

por otro lado:

$X(k)$:



5. Filtro FIR de fase lineal con 3 coef. : b_0, b_1, b_2

$h(0) = h(1) = h(2)$ por ser FIR

- Como es de fase lineal: $h(n) = \pm h(N-n)$

Luego $h(0) = h(2)$

Entonces: $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_0 x(n-2)$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Respuesta freq: $H(\omega) = b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_0 e^{-j2\omega}$

$$= b_0 (1 + e^{-j2\omega}) + b_1 \cdot e^{-j\omega}$$

$$= 2 b_0 \cos\omega \cdot e^{-j\omega} + b_1 \cdot e^{-j\omega}$$

$$= \underbrace{(2 b_0 \cos\omega + b_1)}_{\text{magnitud}} \cdot e^{\underbrace{-j\omega}_{\text{fase (lineal)}}}$$

→ Nº complejo en forma polar!

$$\omega_c = 2\pi f_d = 2\pi \frac{800}{8000} = 0'2\pi \text{ rd/muestra}$$

Filtro paso baja $\quad H(0) = 1 \quad$ || $\quad 2 b_0 \cos 0 + b_1 = 1$

$\quad H(0'2\pi) = 0 \quad$ || $\quad 2 b_0 \cos 0'2\pi + b_1 = 0$

$2 b_0 + b_1 = 1$

$2 b_0 \cos 0'2\pi + b_1 = 0$ || Resolvemos el sistema $\quad b_0 \simeq 5'2361$

$b_1 \simeq -9'4721$