Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico** Grado en Ingeniería de Tegnologías de Telecomunicación	**Convocatoria extraordinaria de septiembre** 12 de septiembre de 2014

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. (o Pasaporte):

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración del examen es de **3 horas.**
- **No se permite el uso de calculadora programable.**
- El examen corresponde a la parte de teoría y problemas, constando de **6 preguntas tipo test y 4 ejercicios. Será valorada sobre 9 puntos (1.8 el test y 7.2 los ejercicios).**
- **Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.**

Preguntas tipo TEST **(0.3 puntos cada pregunta)**

1. La solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \ln\left(\dfrac{x^2(t)+7}{18}\right), \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

es ...

- ☐ a) convexa en su dominio.
- ☐ b) cóncava en su dominio.
- ☐ c) estrictamente creciente en su dominio.
- ☐ d) estrictamente decreciente en su dominio.

2. El cambio de variable $s = t^2$ transforma la ecuación diferencial

$$x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = t^2, \ \forall t > 0,$$

en la ecuación diferencial ...

- ☐ a) $x''(\sqrt{s}\,) + 3x'(\sqrt{s}\,) + 5x(\sqrt{s}\,) = s, \ \forall s > 0.$
- ☐ b) $4sx''(s) + 2(1 + 3\sqrt{s})x'(s) + 5x(s) = s, \ \forall s > 0.$
- ☐ c) $4sx''(s) + 6\sqrt{s}\,x'(s) + 5x(s) = s, \ \forall s > 0.$
- ☐ d) Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

3. Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea

$$tx'' + (3t-1)x' - 3x = 0,\ \forall t > 0.$$

Si se aplica reducción de orden con $\phi(t) = e^{-3t}$, $\forall t > 0$, se obtiene una nueva ecuación diferencial lineal homogénea cuyo sistema fundamental es ...

- ☐ a) $\left\{e^{3t},\, e^{3t}(3t-1)\right\}$, $\forall t > 0$.
- ☐ b) $\left\{1,\, e^{3t}\right\}$, $\forall t > 0$.
- ☐ c) $\left\{1,\, e^{3t}(3t-1)\right\}$, $\forall t > 0$.
- ☐ d) Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

4. Sea f una función continua en el intervalo $[0,1]$ de forma que tiene una única raíz en el mismo. Para aproximar dicha raíz con un error inferior a 10^{-4} mediante el método de bisección tendremos que hacer ...

- ☐ a) Al menos 13 iteraciones.
- ☐ b) Al menos 16 iteraciones.
- ☐ c) Al menos 19 iteraciones.
- ☐ d) Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

5. Si se aumenta el número de nodos en un problema de interpolación polinomial entonces se verifica que ...

- ☐ a) siempre disminuye el error.
- ☐ b) a veces aumenta el error.
- ☐ c) nunca disminuye el error.

6. Se considera la función a trozos

$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 - 12x^2 + 20x, & -2 \leq x \leq 0, \\ 7x^3 - 12x^2 + 20x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3 + 12x^2 - 4x + 8, & 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Entonces...

- ☐ a) $s(x)$ es un spline cúbico natural.
- ☐ b) $s(x)$ es un spline cúbico periódico.
- ☐ c) $s(x)$ no es un spline cúbico.
- ☐ d) Las opciones a) y b) son correctas.
- ☐ e) Ninguna de las opciones a), b), c) es correcta.

<u>EJERCICIOS</u> **(1.8 puntos cada uno)**

1. Se considera la ecuación diferencial
$$t^2x''(t) + (4t^2 - 4t)x'(t) + (4t^2 - 8t + 6)x(t) = 0. \tag{1}$$
   a) Determina los posibles dominios maximales de (1).
   b) Comprueba que, mediante el cambio de variable $y = \dfrac{x}{t^2}$, la ecuación (1) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.
   c) Calcula <u>todas</u> las soluciones de la ecuación (1) usando la ecuación obtenida en el apartado anterior.
   d) Halla, si es posible, la solución del problema de valores iniciales
$$\begin{cases} t^2x''(t) + (4t^2 - 4t)x'(t) + (4t^2 - 8t + 6)x(t) = 0 \\ x(-1) = 0,\ x'(-1) = 3. \end{cases}$$

2. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales
$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) - 3, \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) - 2. \end{cases} \tag{2}$$
   a) Sin usar la transformada de Laplace o pasar a una ecuación diferencial lineal equivalente, calcula <u>todas</u> las soluciones <u>reales</u> de (2).
   b) Halla <u>todas</u> las soluciones de (2) que satisfacen la condición inicial $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Se pretende estimar el valor de $\sqrt[5]{3}$ usando un método iterativo.
   a) Determina justificadamente una función $f(x)$, un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permitan asegurar que el método de Newton-Raphson asociado converge a $\sqrt[5]{3}$.
   b) Realiza tres iteraciones del método de Newton-Raphson con el valor inicial x_0 del apartado anterior.
   c) Se propone el método iterativo
$$x_{n+1} = \frac{9x_n + 2x_n^6}{6 + 3x_n^5}.$$
   Tomando el mismo valor x_0 que en el apartado anterior, realiza tres iteraciones con este método.
   d) A la vista de las iteraciones obtenidas en los dos apartados anteriores, ¿cuál de los dos métodos consideras que converge más rápidamente a la solución? Justifica tu elección.

4. Se considera la siguiente tabla de valores de una cierta función f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	3	-1	4

   a) Calcula el polinomio que interpola los datos de la tabla anterior.
   b) Utiliza el polinomio que has calculado para estimar el valor de $f(-0.5)$. Proporciona una cota del error cometido si se sabe que la función f cumple que $|f^{iv)}(x)| < 3$, $\forall x \in [-1, 2]$.
   c) Calcula el spline lineal $s(x)$ que interpola los datos de la tabla.
   d) Utiliza el spline obtenido para estimar los valores de $f(-0.5)$, $f'(0.5)$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.