EXAMEN SISTEMAS LINEALES CONVOCATORIA 12 DE JUNIO DE 2015

1. Un sistema LTI causal es un filtro paso-banda, cuya función de transferencia tiene una frecuencia central de 2 rad/s, una banda de paso de 5 rad/s. La banda de transición tiene una caída de 20 dB por década. Obtenga la función de transferencia del sistema. Estudie la estabilidad del sistema. Justifique las respuestas.

2. Dibuje la aproximación asintótica del diagrama de Bode para el sistema anterior. Justifique las respuestas.

3. Represente el sistema del ejercicio 1 en el dominio del tiempo. Estudie la estabilidad del sistema con los criterios de este dominio. Justifique las respuestas.

4. Para el sistema LTI descrito mediante la respuesta al escalón:

$$s(t) = \left(-\frac{1}{16}e^{-2t} + \frac{1}{80}e^{-10t} + \frac{1}{20}\right)u(t)$$

obtenga la ecuación de estados y ecuación de salida. Justifique la respuesta.

5. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique las respuestas.
   a. La señal x(t)=u(t) es causal.
   b. Todo sistema LTI puede ser descrito mediante una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
   c. Podemos obtener la salida de un sistema mediante convolución con su respuesta impulsiva.
   d. Todo sistema LTI cuya función de transferencia tiene polos con parte real negativa es estable.
   e. El sistema LTI cuya respuesta impulsiva es g(t)=sen(t) es estable.

RESPUESTAS:

1. Obtenemos la función de transferencia del filtro paso-baja

El sistema que en la banda de transición tiene una caída de 20 dB/dec es un filtro con un polo, por tanto con n=1.

Si usamos la aproximación de Butterworth, el filtro prototipo paso-baja tiene una función de transferencia en la que el denominador es el polinomio de Butterworth de orden 1:

$$G_{P-Baja}(s) = \frac{1}{s+1}$$

Para obtener el filtro paso-banda pedido tenemos que hacer el cambio de variable: $s \to \frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}$

donde $\omega_0 = 2$ rad/s y B = 5 rad/s

Después del cambio de variable obtenemos el filtro paso-banda cuya función de transferencia es:

$$G_{P-Banda}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}+1\right)} = \frac{Bs}{s^2+Bs+\omega_0^2} = \frac{5s}{s^2+5s+4}$$

El sistema es LTI causal, por lo tanto su RdC es un semiplano a la derecha desde el polo en s=-1, la RdC es un semiplano a la derecha con Re(s)>-1, que además incluye al eje jw, por lo que el sistema es **ESTABLE**.

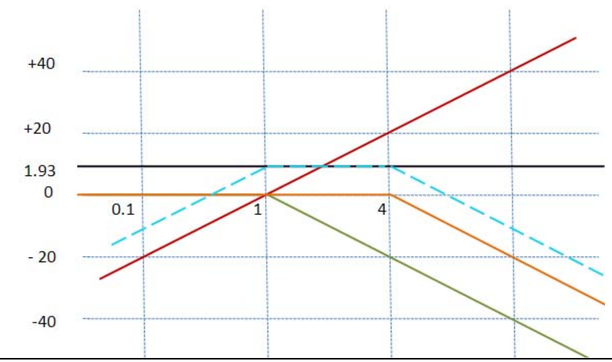
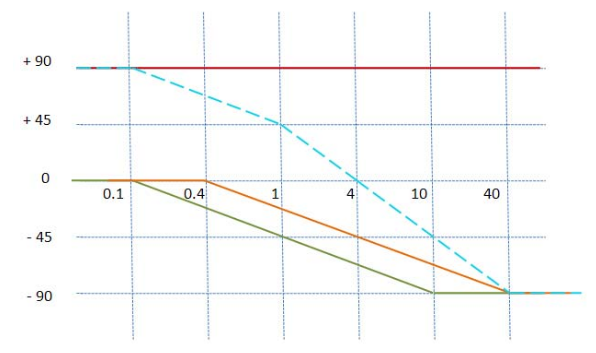
2. Dibujamos la aproximación asintótica del diagrama de Bode

Para dibujar el diagrama de Bode reescribimos la función de transferencia:

$$G_{P-Banda}(s) = \frac{5s}{s^2+5s+4} = \frac{5s}{(s+4)(s+1)} = \frac{5}{4}\frac{s}{\left(\frac{s}{4}+1\right)(s+1)}$$

Ganancia=5/4 → 20log(5/4)=1.9382
Frecuencias de corte en 4, 1 (polos) y 0 (cero)

Ganancia → línea negra
Cero en el origen → línea roja
Polo en s=-1 → línea verde (wc = 1 rad/s)
Polo en s=-4 → línea naranja (wc = 4 rad/s)
La contribución tota → línea azul

Módulo	Fase
	

3. Representamos el sistema en el dominio del tiempo:

$$G_{P-Banda}(s) = \frac{5s}{s^2+5s+4}$$

Opción 1: Aplicamos la transformada inversa de Laplace a la función de transferencia:

$$G_{P-Banda}(s) = \frac{5s}{s^2+5s+4} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s)[s^2+5s+4]=5sX(s)$$

$$s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)=5sX(s)$$

$$L^{-1}\{s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)\}=L^{-1}\{5sX(s)\}$$

Aplicamos la propiedad de linealidad:

$$L^{-1}\{s^2Y(s)\}+5L^{-1}\{sY(s)\}+4L^{-1}\{Y(s)\}=5L^{-1}\{sX(s)\}$$

Aplicamos la propiedad de la transformada de la derivada: $L\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\}=s^nY(s)$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=5\frac{dx(t)}{dt}$$

El resultado anterior es la representación del sistema en el dominio del tiempo.

El polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea es: $p^2+5p+4=0$.

Las raíces del polinomio característico son s=-4 y s=-1, ambas tienen parte real positiva, por lo tanto el sistema es **ESTABLE.**

Opción 2: Obtenemos la respuesta impulsiva:

La respuesta impulsiva será la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia :

$$g(t)=L^{-1}\{G_{p-Banda}(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{5s}{s^2+5s+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{5s}{(s+4)(s+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{(s+4)}+\frac{B}{(s+1)}\right\}$$
$$=L^{-1}\left\{\frac{A}{s+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{B}{s+1}\right\}$$

Calculamos A y B:

$$A(s+1)+B(s+4)=5s\rightarrow\begin{cases}A+B=5\\A+4B=0\end{cases}$$

De donde A=20/3 y B=-5/3

Teniendo en cuenta que:

$$L\{e^{-at}u(t)\}=\frac{1}{s+a}\ con\ RdC\ Re(s)>-a$$

La respuesta impulsiva es:

$$g(t)=\frac{20}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}+\frac{-5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=\frac{20}{3}e^{-4t}u(t)-\frac{5}{3}e^{-t}u(t)$$

El sistema será estable si: $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt<\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{20}{3}e^{-4t}u(t) - \frac{5}{3}e^{-t}u(t)\right|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{20}{3}e^{-4t}u(t)\right|dt - \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{5}{3}e^{-t}u(t)\right|dt$$
$$= \int_{0}^{\infty}\left|\frac{20}{3}e^{-4t}\right|dt - \int_{0}^{\infty}\left|\frac{5}{3}e^{-t}\right|dt = \frac{20}{3}\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt - \frac{5}{3}\int_{0}^{\infty}e^{-t}dt < \infty$$

Por lo tanto, el sistema es **ESTABLE.**

4. Ecuación de estados y ecuación de salida

El sistema viene representado por la respuesta al escalón, pero nosotros necesitamos la respuesta impulsiva.

Obtenemos la respuesta impulsiva:

$$g(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \left(\frac{2}{16}e^{-2t} - \frac{10}{80}e^{-10t}\right)u(t) + \left(-\frac{1}{16}e^{-2t} + \frac{1}{80}e^{-10t} + \frac{1}{20}\right)\delta(t)$$
$$= \left(\frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t}\right)u(t)$$

Obtenemos la función de transferencia:

$$G(s) = L\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t}\right)u(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_{0}^{\infty}\frac{1}{8}e^{-2t}e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty}\frac{-1}{8}e^{-10t}e^{-st}dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{\infty}e^{-(2+s)t}dt - \frac{1}{8}\int_{0}^{\infty}e^{-(10+s)t}dt = \frac{-1}{8(s+2)}\left[e^{-(2+s)t}\right]_0^{-\infty}$$
$$+ \frac{1}{8(s+10)}\left[e^{-(10+s)t}\right]_0^{-\infty} = \frac{-1}{8(s+2)} - \frac{1}{8(s+10)} = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)} = \frac{1}{s^2+12s+20} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Obtenemos la ecuación diferencial:

$$Y(s)[s^2+12s+20] = X(s)$$

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 20Y(s) = X(s)$$

$$L^{-1}\{s^2Y(s) + 12sY(s) + 20Y(s)\} = L^{-1}\{X(s)\}$$

Aplicamos la propiedad de linealidad:

$$L^{-1}\{s^2Y(s)\} + 12L^{-1}\{sY(s)\} + 20L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{X(s)\}$$

Aplicamos la propiedad de la transformada de la derivada: $L\left\{\frac{d^ny(t)}{dt^n}\right\} = s^nY(s)$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = x(t)$$

Tenemos un sistema descrito por una ecuación diferencial de orden 2, por lo tanto necesitaremos 2 variables de estado para describirlo ($v_1(t)$ y $v_2(t)$).

Aplicando la primera forma canónica:

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & 1 \\ -a_{N-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{N-1} - a_{N-1}b_N \\ b_{N-2} - a_{N-2}b_N \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + b_N x(t)$$

Los coeficientes de la ecuación diferencial son: $a_2=1$, $a_1=12$, $a_0=20$, $b_2=0$, $b_1=0$, $b_0=1$

Por lo tanto, la ecuación de estados:

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 1 \\ -20 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x(t)$$

Y la ecuación de salida:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + 0x(t)$$

6. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique las respuestas.

- **a.** La señal x(t)=u(t) es causal.
  FALSO, la causalidad no es una característica de las señales
- **b.** Todo sistema LTI puede ser descrito mediante una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
  FALSO, para representar un sistema LTI se necesitan también las condiciones iniciales nulas para asegurar la invarianza temporal.
- c. Podemos obtener la salida de un sistema mediante convolución con su respuesta impulsiva.
  FALSO, sólo es posible para sistemas LTI
- d. Todo sistema LTI cuya función de transferencia tiene polos con parte real negativa es estable.
  FALSO, es necesario además que el sistema sea causal
- e. El sistema LTI cuya respuesta impulsiva es g(t)=sen(t) es estable.
  FALSO, $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt \to \infty$