Comunicaciones II 3º GITT (30/01/2013) [PARTE 2: PROBLEMAS]

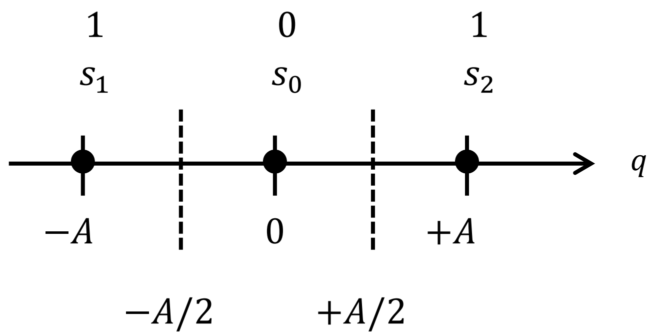
Apellidos y Nombre: ____ D.N.I.:_____________

Problema 1 ***[2 puntos]***

Considere un sistema de comunicación digital pseudoternario que utiliza 3 símbolos $\{s_0, s_1, s_2\}$ para transmitir un único bit de información. Los símbolos se mapean en pulsos rectangulares resultando en la constelación mostrada en la figura, que además indica el valor del bit asociado a cada símbolo. Para una secuencia de bits independientes y equiprobables, la secuencia de símbolos resultante no es equiprobable sino que las probabilidades a priori son $p(s_1) = p(s_2) = 1/4 \ y \ p(s_0) = 1/2$. Sin embargo, y por sencillez, el receptor se diseña en base al criterio MLE y en consecuencia los umbrales de decisión son los mostrados en la figura resultando el criterio de detección: decidir s_1 cuando la observación $q < -A/2$, decidir s_0 cuando $-A/2 < q < A/2$ y decidir s_2 cuando $q > A/2$. Los símbolos se transmiten sobre un canal AWGN con densidad de potencia espectral $N_0/2$.

a. *[1 punto]* Determine de forma exacta la probabilidad de error de símbolo P_e en función de la energía media por símbolo E_s.

b. *[1 punto]* Determine de forma exacta el BER del sistema en función de la energía media por bit E_b.



Solución del apartado a

Por la simetría de la constelación, las probabilidades de error de los símbolos s_1 y s_2 son iguales. Calculamos por lo tanto uno de ellos, por ejemplo P_{e1}, que considerando el umbral $-A/2$ resulta ser la integral en $[-A/2, \infty]$ de la gausiana centrada en $-A$

$$P_{e1} = \int_{-A/2}^{\infty} p(q|s_1)dq = \int_{-A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q+A)^2}{N_0}} dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

En consecuencia obtenemos

$$P_{e1} = P_{e2} = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

La probabilidad de error del símbolo s_0 se calcula de forma similar, con la diferencia de que ahora implica la integración de las dos colas de la gausiana centrada en 0, resultando en un valor doble del anterior

$$P_{e0} = \int_{-\infty}^{-A/2} p(q|s_0)dq + \int_{A/2}^{\infty} p(q|s_0)dq = 2\int_{A/2}^{\infty} p(q|s_0)dq = \int_{A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{q^2}{N_0}} dq = 2Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

La probabilidad media de error de símbolo la calculamos teniendo en cuenta las diferentes probabilidades a priori de los símbolos (no son equiprobables)

$$P_e = P(s_0)P_{e0} + P(s_1)P_{e1} + P(s_2)P_{e2} = \frac{1}{2}2Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) + \frac{1}{4}\,Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) + \frac{1}{4}\,Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Calculamos ahora la energía media por símbolo

$$E_s = P(s_0)E_0 + P(s_1)E_1 + P(s_2)E_2 = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^2 = \frac{A^2}{2}$$

Con lo que

$$A = \sqrt{2E_s}$$

Y sustituyendo este valor obtenemos finalmente el resultado

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\frac{\sqrt{2E_s}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Solución del apartado b

De nuevo por la simetría de la constelación, el BER de los símbolos s_1 y s_2 es igual, por lo que únicamente necesitamos calcular uno de ellos, por ejemplo el del símbolo s_1, cuya expresión es de la forma

$$BER_{s1} = P(s_0|s_1)\frac{d_H(s_0,s_1)}{m} + P(s_2|s_1)\frac{d_H(s_2,s_1)}{m}$$

Como s_1 y s_2 tienen asignado el mismo valor de bit, diferente del asignado a s_0 , y $m = 1$ (un bit por símbolo) obtenemos

$$\frac{d_H(s_0,s_1)}{m} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{d_H(s_2,s_1)}{m} = \frac{0}{1} = 0$$

Por lo tanto

$$BER_{s1} = P(s_0|s_1)$$

Luego sólo es necesario calcular la probabilidad de recibir s_0 cuando se transmitió s_1, que es la integral en $[-A/2\,,A/2]$ de la gausiana centrada en $-A$.

$$P(s_0|s_1) = \int_{-A/2}^{A/2} p(q|s_1)dq = \int_{-A/2}^{A/2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q+A)^2}{N_0}} dq = \int_{-A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q+A)^2}{N_0}} dq - \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q+A)^2}{N_0}} dq$$
$$= Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) - Q\left(\frac{3A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Por lo tanto obtenemos

$$BER_{s2} = BER_{s1} = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) - Q\left(\frac{3A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Calculamos ahora el BER correspondiente al símbolo s_0

$$BER_{s0} = P(s_1|s_0)\frac{d_H(s_0,s_1)}{m} + P(s_2|s_0)\frac{d_H(s_0,s_2)}{m}$$

De nuevo por la simetría de la constelación, se puede concluir que las probabilidades de confusión $P(s_1|s_0)$ y $P(s_2|s_0)$ son iguales, y como $d_H(s_0,s_1) = d_H(s_0,s_2) = 1$ y $m = 1$ podemos escribir

$$BER_{s0} = 2P(s_1|s_0)$$

Por lo que únicamente es necesario calcular la probabilidad de recibir s_1 cuando se transmitió s_0, que es la integral en $[-\infty, -A/2]$ de la gausiana centrada en 0.

$$P(s_1|s_0) = \int_{-\infty}^{-A/2} p(q|s_0)dq = \int_{-\infty}^{-A/2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{q^2}{N_0}} dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Con lo que tenemos

$$BER_{s0} = 2Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

El BER promedio se puede calcular entonces como (de nuevo hay que tener en cuenta que los símbolos no son equiprobables)

$$\begin{aligned} BER = P(s_0)BER_{s0} + P(s_1)BER_{s1} + P(s_2)BER_{s2} &= \frac{1}{2}BER_{s0} + \frac{1}{4}BER_{s1} + \frac{1}{4}BER_{s2} \\ &= \frac{1}{2}2Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) + \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) - Q\left(\frac{3A}{\sqrt{2N_0}}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) - Q\left(\frac{3A}{\sqrt{2N_0}}\right)\right] \\ &= \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) - \frac{1}{2}Q\left(\frac{3A}{\sqrt{2N_0}}\right) \end{aligned}$$

La energía por bit es sencilla de calcular dado que para el valor 0 la energía es 0 y para el valor 1 la energía es A^2, y como los bits son equiprobables, la energía media por bit es

$$E_b = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}A^2 = \frac{A^2}{2}$$

Y entonces

$$A = \sqrt{2E_b}$$

(La energía media por bit coincide con la energía media por símbolo, porque aunque el sistema usa 3 símbolos, cada símbolo transmitido transporta la información de un único bit)

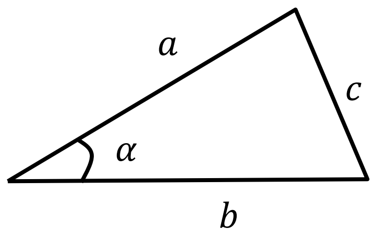
Por lo que finalmente

$$BER = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{\sqrt{2N_0}}\right) - \frac{1}{2}Q\left(\frac{3A}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\frac{\sqrt{2E_b}}{\sqrt{2N_0}}\right) - \frac{1}{2}Q\left(\frac{3\sqrt{2E_b}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) - \frac{1}{2}Q\left(3\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Problema 2 ***[1 punto]***
Debido a la particular organización de los símbolos en las constelaciones PSK, si mantenemos la energía por símbolo constante, la probabilidad de error aumenta al aumentar el número de símbolos. En consecuencia, para mantener fija la probabilidad de error aumentando el número de símbolos es necesario aumentar la energía por símbolo. Una comparativa entre dos modulaciones PSK se puede establecer entonces en términos de la cantidad adicional de energía necesaria para mantener fija la probabilidad de error.

Considere el caso de las constelaciones QPSK y 8-PSK. Determine la cantidad adicional de energía (en decibelios) que es necesaria para que una modulación 8-PSK alcance la misma probabilidad de error de símbolo que una modulación QPSK. Para simplificar los cálculos considere que la SNR es alta y en consecuencia los errores se deben únicamente a confusiones entre símbolos adyacentes.

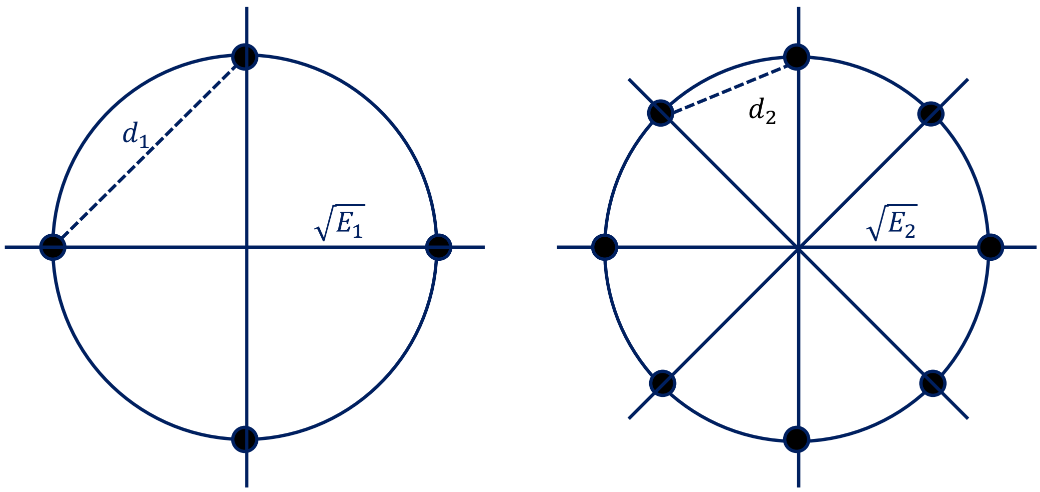
Fórmulas de utilidad: Teorema del coseno



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Solución

Las constelaciones de las señales QPSK y 8-PSK son las siguientes



QPSK **8-PSK**

Considerando que los errores ocurren únicamente entre símbolos adyacentes, la condición de igual probabilidad de error se reduce a que las distancias d_1 y d_2 sean iguales.

En el caso QPSK, la relación entre la distancia y la energía por símbolo es (del teorema de Pitágoras)

$$d_1^2 = 2E_1$$

En el caso 8-PSK, usando la regla del coseno obtenemos

$$d_2^2 = 2E_2 - 2E_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2E_2 - \frac{2E_2}{\sqrt{2}} = \left(2 - \sqrt{2}\right)E_2$$

Igualando las dos distancias $d_1^2 = d_2^2$ obtenemos la relación entre las energías por símbolo

$$2E_1 = \left(2 - \sqrt{2}\right)E_2$$

Y por lo tanto

$$E_2 = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} E_1$$

Que en decibelios es

$$E_2(dB) = E_1(dB) + 10\log_{10}\left(\frac{2}{2 - \sqrt{2}}\right)$$

Luego la energía adicional necesaria es

$$10\log_{10}\left(\frac{2}{2 - \sqrt{2}}\right) = 5.33\ dB$$

Alternativa

Una aproximación alternativa es partir de la probabilidad de error de símbolo para el caso de alta SNR en función del número de símbolos para modulaciones M-PSK

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

Igualando los argumentos de la función Q para los casos M=4 (QPSK) y M=8 (8-PSK)

$$\frac{2E_1}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2E_2}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Obtenemos la relación

$$E_2 = E_1 \left(\frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/8)}\right)^2$$

$$E_2(dB) = E_1(dB) + 10\log_{10}\left(\frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/8)}\right)^2$$

Con el mismo resultado

$$10\log_{10}\left(\frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/8)}\right)^2 = 5.33\ dB$$