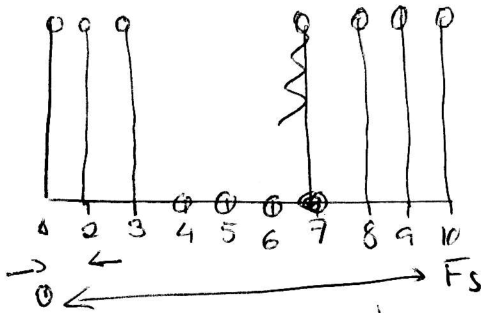
1.-

Examen Junio 2009

b) DFT de una señal.



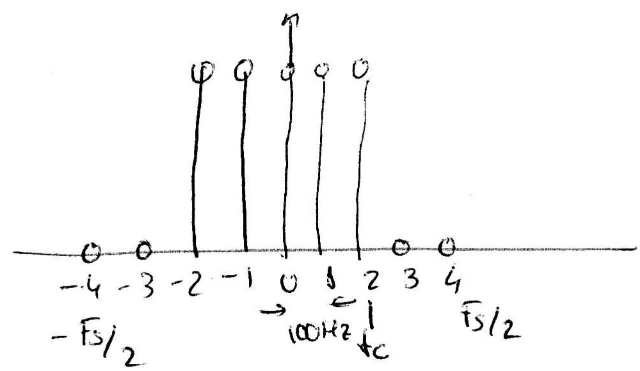
La DFT relaciona N puntos en el dominio del tiempo con N en el dominio de la frecuencia.

T_s: periodo de muestreo en frecuencia

$T_s = 0.01 sg.$ ⇒ separación entre dos muestras de frecuencia es de

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{0.01 sg} = 100 \text{ Hz}.$$

Dibujamos la DFT entre $-F_s/2$ y $F_s/2$



Es un filtro paso bajo de frecuencia de corte $2 \times 100 = 200$ Hz

Veamos cuanto vale $F_s/2$ ⇒ $\frac{F_s}{2} = 4 \times 100 = 400$ Hz ⇒ $F_s = 800$ Hz

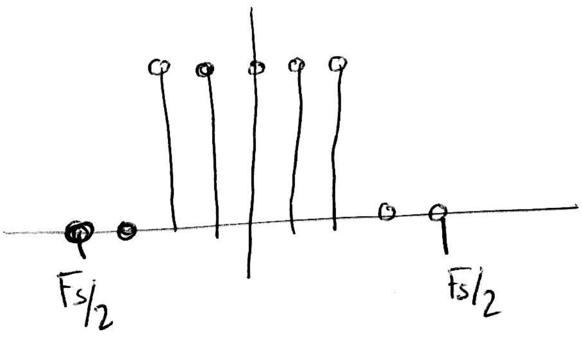
⇒ la señal fué muestreada en el dominio del tiempo con un periodo de muestreo de $\frac{1}{F_s} = T_s\ sg = 0.00125 sg$.

si N muestras en el dominio de la frecuencia se corresponden con N muestras en el dominio del tiempo ⇒ la duración de la señal en el dominio del tiempo es $N \times T_s = 9 \times T_s = 0.01125$.

→ OTRA INTERPRETACIÓN QUE SE PUEDE CONSIDERAR CORRECTA: assumir que $T = 0.01 sg$ es el periodo de muestreo de la señal en el dominio del tiempo:

→ Duración de la señal en el dominio del tiempo: $T \cdot N = 0.09 sg$.

Frecuencia de corte del filtro:



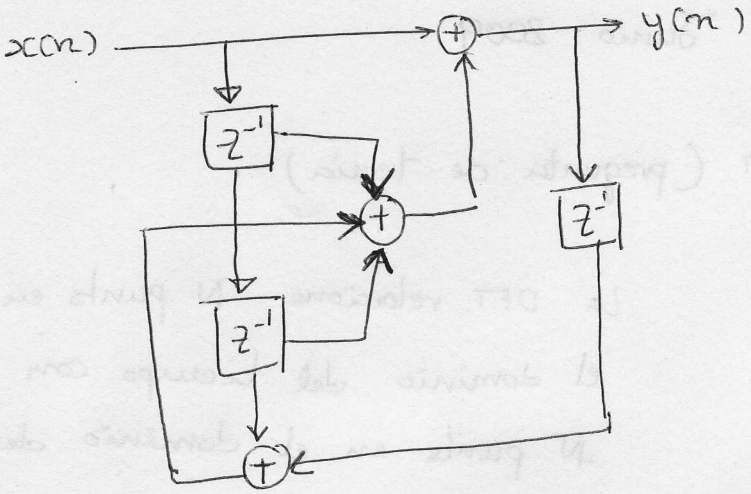
$F_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{0'01} = 100\ Hz$

$F_s/2 = 50\ Hz$

En el intervalo de 100 Hz tenemos 9 valores de frecuencia, luego la separación en frecuencia es: $100/9 = 11'11\ Hz$.

La frecuencia de corte del filtro será $2 \times 11'11\ Hz = 22'22\ Hz$

② ①b



a) Ecuación en diferencias

$$Y(z) = X(z) + X(z)z^{-1} + X(z)z^{-2} + Y(z)z^{-1} + X(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left[1 - z^{-1}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1} + 2z^{-2}\right]$$

$$y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1) + 2x(n-2)$$

b) Respuesta al impulso

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1 + z^{-1} + 2z^{-2})z^2}{(1 - z^{-1})z^2} = \frac{z^2 + z + 2}{z^2 - z}$$

grado de numerador = grado de denominador ⇒ función impropia, para poder desarrollarla en fraccions simpls divido nº entre denominador

$$\begin{array}{r|l} z^2 + z + 2 & z^2 - z \\ -\;z^2 - z & 1 \\ \hline 2z + 2 & \end{array}$$

$$H(z) = 1 + \underbrace{\frac{2z+2}{z(z-1)}}$$

→ esta función es propia y si se puede desarrollar en fraccions simpls.

$$\frac{2z+2}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \Rightarrow \left\} \begin{array}{l} A = -2 \\ B = 4 \end{array}\right.$$

$$H(z) = 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z-1} \Rightarrow \boxed{h_1(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + 4u(n-1)}$$

(2a)

o también

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2+z+2}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1}$$

$B = -2$

$A = -3$

$C = 4$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-3}{z} + \frac{-2}{z^2} + \frac{4}{z-1}$$

$$H(z) = -3 - \frac{2}{z} + \frac{4z}{z-1}$$

$$H(z) = -3 - 2z^{-1} + 4\frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow \boxed{h_2(n) = -3\delta(n) - 2\delta(n-1) + 4u(n)}$$

Se puede comprobar que las expresions $h_1(n)$ y $h_2(n)$ obtenidas coinciden

$n < 0$

$h_1(n) = 0$

~~$h_2(n) = 0$~~

$n = 0$

$h_1(0) = \delta(0) = 1$;

$n = 1$

$h_1(1) = -2\delta(1-1) + 4u(1-1) =$

$-2 + 4 = 2$

$n > 1$

$h_1(n) = 4u(n-1) = 4$

$n < 0$

$h_2(n) = 0$

$n = 0$

$h_2(n) = \underbrace{-3\delta(0)}_{-3} + \underbrace{4u(0)}_{4} = 1$

$n = 1$

$h_2(n) = -2\delta(1-1) + 4u(1) =$

$-2 + 4 = 2$

$n > 1$

$h_2(n) = 4u(n) = 4$

c) Respusta ~~al escalón~~. a le entrade

$x(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

asumimos que el sistema está en reposo

$X(z) = 1 - z^{-1}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) = \left(-3 - 2z^{-1} + \frac{4}{1-z^{-1}}\right)(1-z^{-1}) =$$

$$-3 - 2z^{-1} + \frac{4}{1-z^{-1}} + 3z^{-1} + 2z^{-2} - \frac{4z^{-1}}{1-z^{-1}} = 2z^{-2} + z^{-1} + 1$$

$$\boxed{y(n) = 2\delta(n-2) + \delta(n-1) + \delta(n)}$$

2b

Solución de la respuesta al impulso a partir de la ecuación en diferencias

$$y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1) + 2x(n-2)$$

$$\lambda^{n-1}(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$y_h(n) = (1)^n C_1 = C_1 \Rightarrow \text{solución válida para } n \geq 2$$

Cálculo de la cte. $x(n) = \delta(n)$. C.I nulas

$$y(0) - \cancel{y(-1)} = x(0) + \cancel{x(-1)} + 2\cancel{x(-2)}$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) - y(0) = \cancel{x(1)} + x(0) + 2\cancel{x(-1)}$$

$$y(1) = x(0) + y(0) = 1 + 1 = 2$$

$$y(2) - y(1) = \cancel{x(2)} + \cancel{x(1)} + 2x(0)$$

$$y(2) = 2 + 2 = 4$$

$$y(3) - y(2) = 0 \Rightarrow y(3) = 4$$

$$y(n) = 4 \quad \forall n \geq 2$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = 2$$

$$y(n) = 0 \quad \forall n < 0.$$

Observamos que obtenemos la misma respuesta impulsiva que para el caso anterior.

3.- Filtro FIR simétrico de longitud 5

$$h(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}$$

$b_0 = b_4$

$b_1 = b_3$

b_2

entrada $x(n) = \cos(0.3n) + \cos(0.5n) + \cos(0.8n)$

queremos eliminar la frecuencia media $\omega = 0.5$

$|H(0.3)| = 1$

$|H(0.5)| = 0$

$|H(0.8)| = 1$

$$H(z) = b_0[1 - z^{-4}] + b_2 z^{-2} + b_1[1 - z^{-3}]$$

$$H(e^{j\omega}) = b_0[1 - e^{-4j\omega}] + b_1[1 - e^{-3j\omega}] + b_2 e^{-2j\omega} =$$

$$= b_0[1 - e^{-4j\omega}] + b_1 e^{-j\omega}[1 - e^{-2j\omega}] + b_2 e^{-2j\omega} =$$

$$= b_0 2\cos 2\omega\, e^{-2j\omega} + b_1 e^{-j\omega} 2\cos\omega\, e^{j\omega} + b_2 e^{-2j\omega} =$$

$$[2 b_0 \cos 2\omega + 2 b_1 \cos\omega + b_2] e^{-2j\omega}$$

$$|H(0.3)| \Rightarrow \left| [2 b_0 \cos(2 \cdot 0.3) + 2 b_1 \cos(0.3) + b_2] e^{-2j0.3} \right| = 1$$

$$|H(0.5)| \Rightarrow \left| [2 b_0 \cos(2 \cdot 0.5) + 2 b_1 \cos(0.5) + b_2] e^{-2j0.5} \right| = 0$$

$$|H(0.8)| \Rightarrow \left| [2 b_0 \cos(2 \cdot 0.8) + 2 b_1 \cos(0.8) + b_2] e^{-2j0.8} \right| = 1$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con 3 incógnitas que hay que resolver

$$\left.\begin{aligned} a_{11} b_0 + a_{12} b_1 + b_2 &= 1 \\ a_{21} b_0 + a_{22} b_1 + b_2 &= 0 \\ a_{31} b_0 + a_{32} b_1 + b_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

incógnitas b_0, b_1, b_2.

4.- $$H(z) = \frac{(1+z^{-1}-2z^{-2})(1-0.5z^{-1})}{(1+1.6z^{-1}+1.28z^{-2})(1+2z^{-1})}$$

Calculamos los polos y los ceros del sistema

ceros: $1-0.5z^{-1}=0 \Rightarrow z_1 = 1/2$

$1+z^{-1}-2z^{-2}=0 \Rightarrow z_2 = 1$

$z_3 = -2$ } ⇒ este polo y este cero se cancelan

polos: $\cancel{1}+2z^{-1}=0 \Rightarrow z_{p_1} = -2$

$1+1.6z^{-1}+1.28z^{-2}=0 \Rightarrow z = -\frac{4}{5} \pm \frac{4}{5}j \Rightarrow z_{p_{2,3}} = 1'13\, e^{\pm j\frac{3}{4}\pi}$ ($-0.8 \pm 0.8i$)

Los tres polos están fuera del círculo unidad, luego el sistema es inestable.

Para estabilizar el sistema ~~hay que~~ sin que se modifique la respuesta en magnitud hay que multiplicar por un filtro pasa todo que tenga ceros ~~en~~ en las mismas posiciones que el filtro H(z) tiene los polos que lo hacen inestable, de esta forma se cancelarán polos y ceros y obtendremos un filtro estable.

$$H_E(z) = H(z)\, H_{PT}(z)$$

$$H_{PT}(z) = z^{-N}\frac{A(z^{-1})}{A(z)} \Rightarrow z^{-2}\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{a_2+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}$$

si H(z) tiene polos en $-0'8+0'8j$ y $-0'8-0'8j$

$H_{PT}(z)$ tiene ceros en $-0'8+0'8j$ y $-0'8-0'8j$

$$H_{PT}(z) = z^{-2}\frac{(1+(0.8-0.8j)z^{-1})(1+(0.8+0.8j)z^{-1})}{(1+(0.62-0.62j)z^{-1})(1+(0.62-0.62j)z^{-1})}$$

Nota. $$\frac{1}{-0.8+0.8j} = \frac{-1}{0.8-0.8j} = \frac{-(0.8+0.8j)}{1.28} = -0.62+0.62j$$

$$\frac{1}{-0.8-0.8j} = \frac{-1}{0.8+0.8j} = \frac{-(0.8-0.8j)}{1.28} = -0.62-0.62j$$

$$H_E(z) = H(z)\,H_{PT}(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}{(1+(0.62-0.62j)z^{-1})(1+(0.62-0.62j)z^{-1})}\cdot z^{-2}$$

realizando esta multiplicación resultan coeficientes reales.

5.- $H(z) = \frac{3z}{z - e^{-1'5}} + \frac{4z}{z - e^{-1'8}}$

a) T. Bilineal $T = 0.5$ sg.

$$S = \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$$

Tenemos que obtener z en función de s

$z = -\frac{s+4}{s-4}$ (donde hemos tenido en cuenta que $T = \frac{1}{2}$ sg.

Sustituimos en la función de transferencia z por $-\frac{s+4}{s-4}$

$$H(s) = \underbrace{\frac{-3\frac{s+4}{s-4}}{-\frac{s+4}{s-4} + e^{-1'5}}} + \underbrace{\frac{-4\frac{s+4}{s-4}}{-\frac{s+4}{s-4} - e^{-1'8}}}$$

habría que operar un poco en cada uno de stos términos.

b) Invarianza al impulso $T = 0.2$ sg.

Se asume la siguiente relación entre los polos en el plano z y en el plano s

$P_z = e^{P_s T}$ de aquí obtenemos

$$P_s = \frac{1}{T} \ln P_z$$

Expresamos $H(z) = \frac{3}{1 - e^{-1.5} z^{-1}} + \frac{4}{1 - e^{-1'8} z^{-1}}$

Los polos están en $e^{-1.5}$ y $e^{-1.8}$

$$P_{s_1} = \frac{1}{0.2} \ln e^{-1.5} = \frac{-1.5}{0.2} = -7.5$$

$$P_{s_2} = \frac{1}{0.2} \ln e^{-1.8} = \frac{-1.8}{0.2} = -9$$

$$H(s) = \frac{3}{s+7.5} + \frac{4}{s+9}$$