Examen de Señales Digitales

Junio 2013

Nombre: ....

1. Considere el sistema de la figura 1 con $h(n) = a^n u(n)$, $-1 < a < 1$. Determine la respuesta $y(n)$ del sistema a la excitación $x(n) = u(n+5) - u(n-10)$.

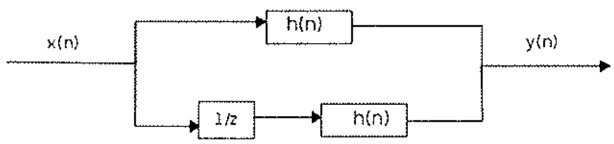


Figura 1: Sistema del problema 1.

2. Considere un sistema LTI con la siguiente respuesta impulsional:

$$h(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] u(n)$$

   - Determine su función de transferencia.
   - Dibuje su diagrama de polos y ceros.
   - Represente de forma aproximada la respuesta en magnitud del sistema.

   (Nota: recuerde que las señales sinusoidales se pueden expresar como exponenciales complejas a través de las relaciones de Euler).

3. Una señal $x_a(t)$ está limitada en banda a $10kHz$, se muestrea con una frecuencia de muestreo de $20kHz$. A continuación se obtiene la DFT con $N = 1000$ muestras de $x(n)$.

   - Indique a qué frecuencias analógicas se corresponden los índices $k = 150$ y $k = 800$
   - Indique el espaciado entre las muestras (o bins) espectrales.

4. Un modelo frecuentemente usado para generar ecos es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x(n - kT)$$

donde $x(n)$ es la versión discreta de una señal musical original, T es el intervalo entre los ecos y a_k un factor de ganancia entre el eco k-ésimo y la señal original. El filtro peine con función de transferencia $H(z) = \frac{1}{1-az^{-T}}$ se puede usar para generar ecos artificiales.

- Demuestre esta última afirmación e indique cómo serían los factores de ganancia a_k asociados dicho filtro.
- Encuentre la ecuación en diferencias y el diagrama de bloques de dicho filtro.

(Nota: recuerde que $\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ con $|\alpha| < 1$)

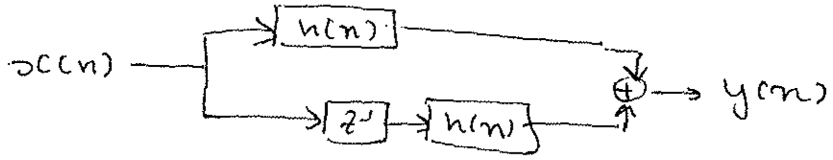
5. Explique detalladamente el método de transformación bilineal para pasar de filtros analógicos a digitales.

6. Explique detalladamente cómo se puede modificar por un factor racional L/M, la frecuencia de muetreo de una señal digital que ha sido muestreada con una drecuencia de muestreo F_s.

$\longrightarrow$ Exàmen de S.D. Julio 2013 resuelto ——— (1)

(1.) $h(n) = a^n u(n) \qquad -1 < a < 1$

$y(n) \Rightarrow \quad x(n) = u(n+5) - u(n-10)$



$H(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} \qquad Y(z) = X(z)H(z) + z^{-1}X(z)H(z) =$

$$X(z)\left[\underbrace{H(z) + z^{-1}H(z)}_{G(z)}\right] = X(z)G(z)$$

$$G(z) = H(z) + z^{-1}H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{z^5}{1-z^{-1}}}_{X_1(z)} - \underbrace{\frac{z^{-10}}{1-z^{-1}}}_{X_2(z)} = \frac{z^5 - z^{10}}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = G(z)X_1(z) - G(z)X_2(z)$$

$$Y_1(z) = G(z)X_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \cdot \frac{z^5}{\cancel{1}-z^{-1}} = \frac{z^7+z^6}{(z-1)(z-a)} = \frac{z^6(z+1)}{(z-1)(z-a)}$$

$$\frac{Y_1(z)}{z^6} = \frac{z+1}{(z-1)(z-a)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-a)}$$

$$A(z-a) + B(z-1) = z+1$$

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 1 \\ + \quad -Aa - B = 1 \\ \hline A(1-a) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{2}{1-a} \qquad B = -\frac{1+a}{1-a}$$

$$\frac{Y_1(z)}{z^6} = \left[\frac{2/1-a}{z-1} - \frac{\frac{1+a}{1-a}}{z-a}\right]\frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{z^{-1}\frac{2}{1-a}}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-1}\frac{1+a}{1-a}}{1-az^{-1}}$$

$$Y_1(z) = z^5\,\frac{2}{1-a}\,\frac{1}{1-z^{-1}} - z^5\,\frac{1+a}{1-a}\,\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$y_1(n) = \frac{2}{1-a}\,u(n+5) - a^{n+5}\,\frac{1+a}{1-a}\,u(n+5) =$$

$$Y_2(z) = G(z)\,X_2(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \cdot \frac{z^{-10}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-10}+z^{-11}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} =$$

$$= \frac{z^{-10}(1+z^{-1})}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$\frac{Y_2(z)}{z^{-10}} = \frac{(1+z^{-1})}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{(1+z^{-1})}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2+1}{(z-a)(z-1)} =$$

$$= \frac{z^2+1-1+1}{(z-a)(z-1)} = \frac{z^2-1}{(z-a)(z-1)} + \frac{2}{(z-a)(z-1)} =$$

$$= \frac{(z+1)\cancel{(z-1)}}{(z-a)\cancel{(z-1)}} + \frac{2}{(z-a)(z-1)} = 1 + \frac{1+a}{z-a} + \underbrace{\frac{A}{(z-a)} + \frac{B}{(z-1)}}$$

$$A = \frac{2}{1+a} \quad y \quad B = \frac{2}{1-a}$$

$$\frac{Y_2(z)}{z^{-10}} = 1 + \left[\frac{1+a}{z-a} + \frac{2/(1+a)}{z-a} + \frac{2/(1-a)}{z-1}\right]\frac{z^{-1}}{z^{-1}} =$$

$$1 + \frac{z^{-1}(1+a)}{1-az^{-1}} + \frac{z^{-1}\frac{2}{(1+a)}}{1-az^{-1}} + \frac{z^{-1}\frac{2}{(1-a)}}{1-z^{-1}}$$

$$Y_2(z) = z^{-10} + z^{-11}\frac{(1+a)}{1-az^{-1}} + \frac{z^{-11}\frac{2}{(1+a)}}{1-az^{-1}} + \frac{z^{-11}\frac{2}{(1-a)}}{1-z^{-1}}$$

$$y_2(n) = \delta(n-10) + (1+a)\,a^{n-11}u(n-11) + \frac{2}{(1+a)}a^{n-11}u(n-11) + \frac{2}{1-a}u(n-11)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) + y_2(n) = \frac{1}{1-a}\left[2u(n+5) - (1+a)a^{n+5}u(n+5)\right] - \\ &\left[\delta(n-10) + (1+a)a^{n-11}u(n-11) + \frac{2}{1+a}a^{n-11}u(n-11) + \frac{2}{1-a}u(n-11)\right] = \\ &\left(2-(1+a)a^{n+5}\right)\frac{u(n+5)}{1-a} - \delta(n-10) - \left[(1+a)a^{n-11} + \frac{2a^{n-11}}{1+a} + \frac{2}{1-a}\right]u(n-1 \end{aligned}}$$

(2) $h(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]u(n)$

a) Función de Transferencia

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$$

$$h(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}}{2} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2}\right]\right]u(n) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n\right]u(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\pi/4}}{4}\right)^n u(n) +$$

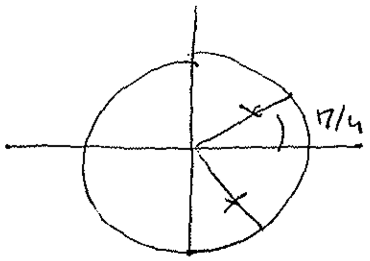
$$+ \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}/4\right)^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/4}z^{-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/4}z^{-1} + 1 - \frac{1}{4}e^{j\pi/4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}e^{j\pi/4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/4}z^{-1})}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{2-\frac{1}{2}\cos\pi/4\, z^{-1}}{1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1-\cos\pi/4\, z^{-1}}{1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}$$

b)

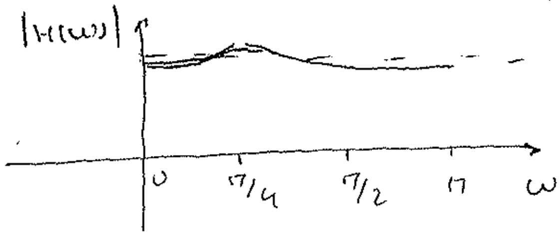


$z_0 = \cos\pi/4$

$z_{p_1} = \frac{1}{4}e^{j\pi/4}$

$z_{p_2} = \frac{1}{4}e^{-j\pi/4}$

c) $$H(\omega) = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{16}e^{-2j\omega}}$$



$|H(0)| = 1.06$

$|H(\pi/4)| = 1.1.7$

$|H(\pi/2)| = 1.03$

$|H(\pi)| = 0.8$

3.- $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi . (20.10^3)$

a) $\omega = \Omega T_s = \frac{\Omega}{20.000}$

Con una DFT de N puntos la transformade de Fourier de tiempo discreto se muestrea obteniendo N frecuencias que son: $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k \qquad k = 0 \ldots N-1$

X(k) corresponde a la frecuencia analógica

$\Omega_k = 20.000 \; \omega_k = \frac{2\pi}{N} 20.000 k$

$f_k = 20.000 \frac{k}{N}$

luego si $N = 1000$ el indice $k = 150$ se corresponde con $f_{150} = \frac{20.000 \times 150}{1000} = 3 kHz$

$k = 800$; $X(e^{j\omega})$ es periódica, esto es

$X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega + 2\pi})$

$k = 800 \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N} k = \frac{2\pi}{N}(k - N) = -200 \frac{2\pi}{N}$

$\omega_k = -0.4\pi$

$\Omega_k = -0.4\pi \; 20.000 = -8000\pi$

$f_k = -4000 Hz$

b) Espaciado entre las muestras:

$\Delta f = \frac{20.000}{N} = 20 Hz$

4. $$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x(n-kT)$$

a) $$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-T})^n \quad \text{con} \quad |az^{-T}| < 1$$

$$H(z) = 1 + a z^{-T} + a^2 z^{-2T} + \dots$$

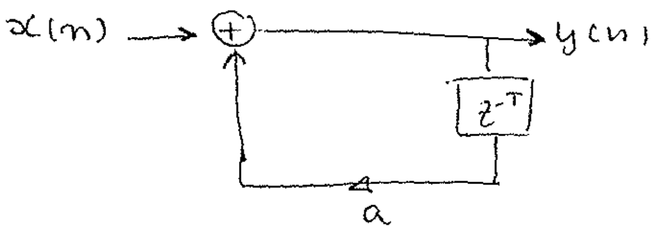
por tanto la salida del filtro será:

$$y(n) = x(n) + a\, x(n-T) + a^2 x(n-2T) + \dots$$

b) $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-az^{-T}}$$

$$Y(z) = X(z) + a z^{-T} Y(z)$$

$$y(n) = x(n) + a\, y(n-T)$$



1. Otra forma mucho mas sencilla

$$X(z) = \frac{z^5 - z^{-10}}{1 - z^{-1}}$$

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

$$Y(z) = G(z)\,X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \cdot \frac{z^5 - z^{-10}}{1 - z^{-1}} = \frac{(1+z^{-1})(z^5 - z^{-10})}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$= \frac{z^5 - z^{-10} + z^4 - z^{-11}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = (z^5 - z^{-10} + z^4 - z^{-11})\left[\frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}\right]$$

En fracciones simples

$$k(z)\ \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} \Rightarrow \frac{A}{(1-az^{-1})} + \frac{B}{(1-z^{-1})}$$

$$k(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)} \quad ; \quad \frac{k(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-1)} = \frac{A}{(z-a)} + \frac{B}{(z-1)}$$

$$A = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=a} = \frac{a}{a-1}$$

$$B = \left.\frac{z}{z-a}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

$$\frac{k(z)}{z} = \frac{a/a-1}{z-a} + \frac{1/1-a}{(z-1)} \Rightarrow k(z) = \frac{a}{a-1}\frac{z}{z-a} + \frac{1}{1-a}\frac{z}{z-1}$$

$$k(z) = \frac{a}{a-1}\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = (z^5 - z^{-10} + z^4 - z^{-11})\left[\frac{a}{a-1}\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-z^{-1}}\right] =$$

$$\frac{a}{a-1}\left[a^{n+5}u(n+5) - a^{n-10}u(n-10) + a^{n+4}u(n+4) - a^{n-11}u(n-11)\right] +$$

$$\frac{1}{1-a}\left[u(n+5) - u(n-10) + u(n+4) - u(n-11)\right]$$