Adrian Camilo Tibaduiza Castillo - 20192005032.

Libro "Modern Control Engineering" de Katsuhiko Ogata.

Ejercicio 3.3.

Debemos Utilizar la segunda ley de Newton.

$$ma = \sum F$$

donde m es la masa, a es aceleración y $\sum F$ es la suma de todas las fuerzas; Expresandolas en términos de derivadas y la segunda ley de Newton.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

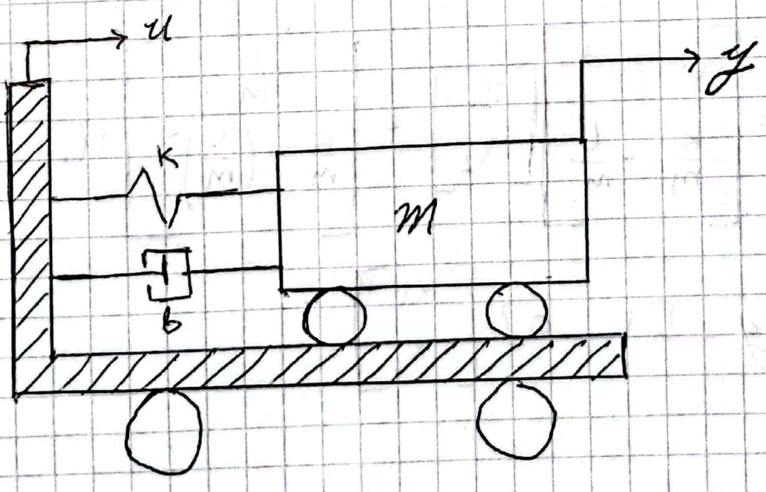
aplicando la transformada de laplace

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

Podemos obtener la función de transferencia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

ahora podemos representar la función con su modelo.



ahora obtenemos el modelo de espacio de estados.

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

$$\beta_0 = b_0 = \emptyset$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

definimos

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

Espacio de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u.$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diagrama de Bloques Ejercicio 3.B.

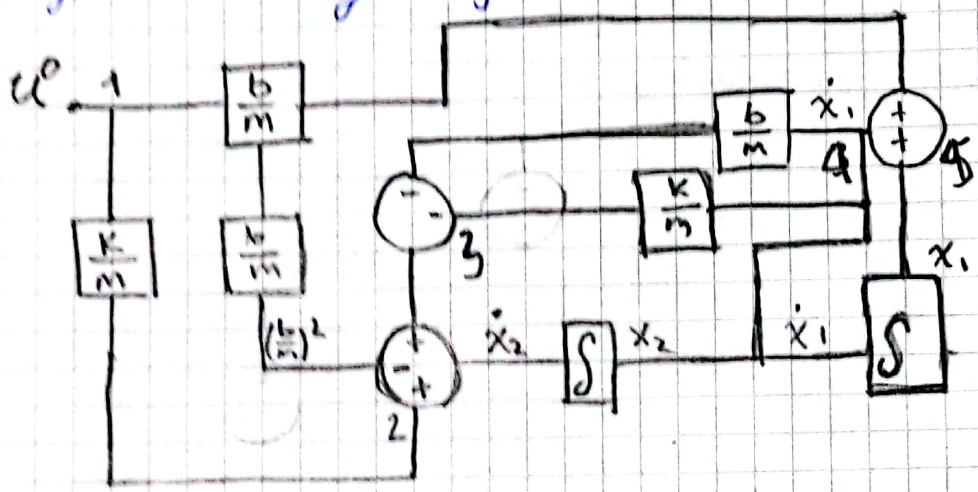
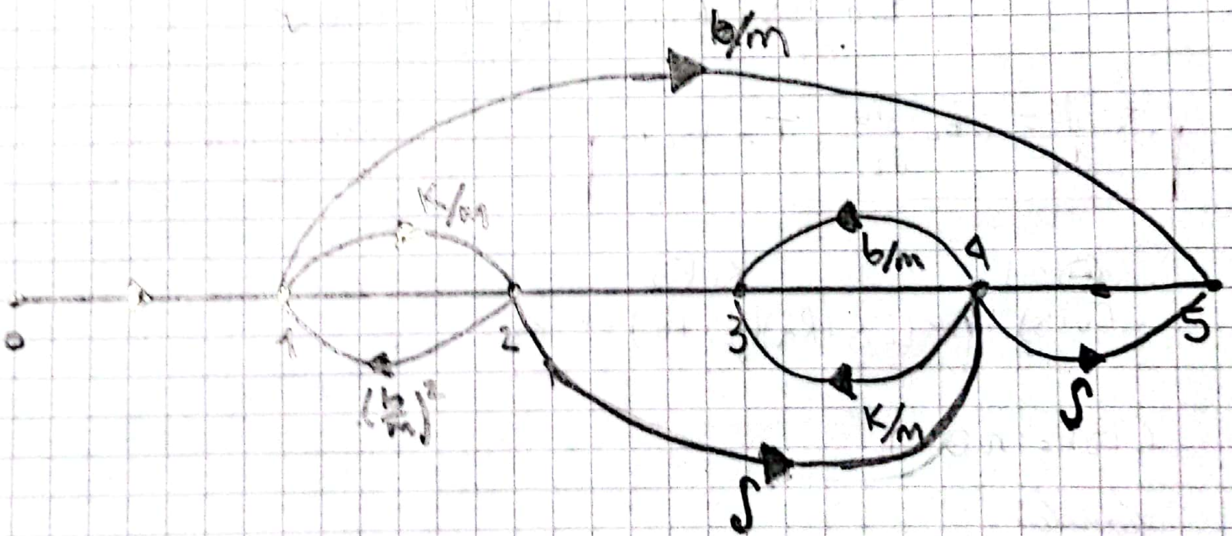
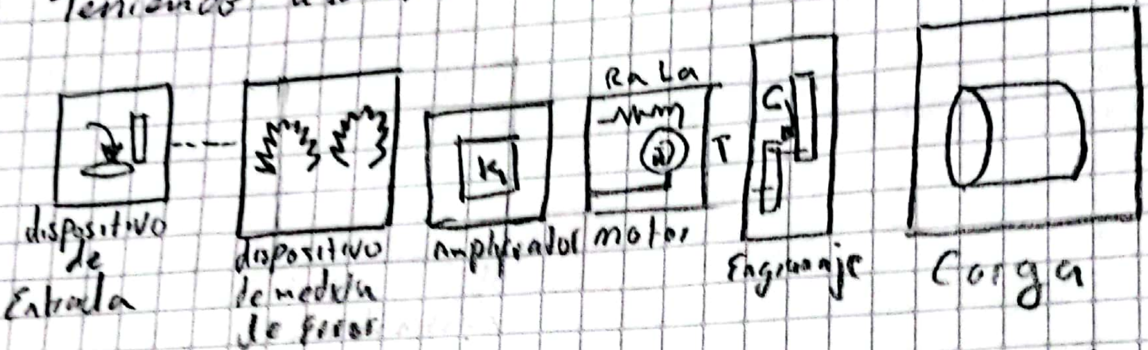


Diagrama de flujo de señal.



Ejercicio A-3.9 - Ogata.

Teniendo un Servo motor Como se ve en la imagen



La ~~armad~~ Velocidad de ~~arma~~ motor de armadura DC está controlado por el Voltaje de armadura e_a.

$e_a = (K_1 e_v)$.

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v$$

$$\boxed{J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a} \longrightarrow$$ Ecuación para el equilibrio del torque.

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s}$$

Eliminando i_a y pasando a dominio de La place.

$C(s) = n\,\Theta(s)$

donde:

$$E_v(s) = K_0 \left[R(s) - C(s)\right] = K_0 E(s)$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s\left[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3\right]} = \frac{C(s)}{\Theta(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{E_v(s)}{E(s)}$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) s}$$

$J = J_0 / n^2$ - momento de inercia

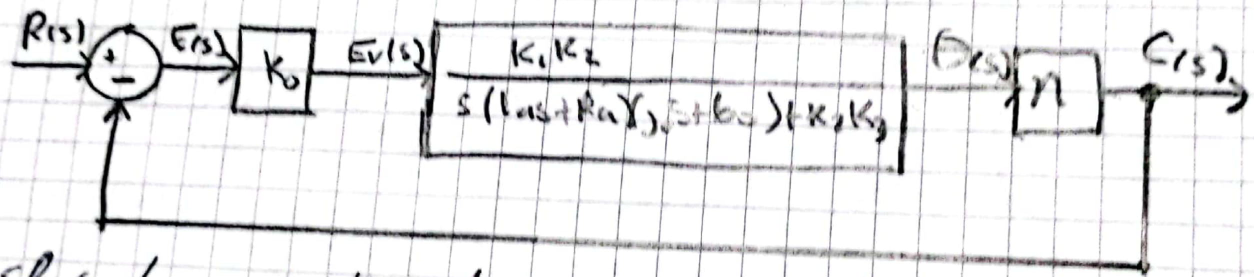
$B = [b_0 + (K_2 K_3 / R_a)] / n^2$ = coeficiente de visco-fricción.

$K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$

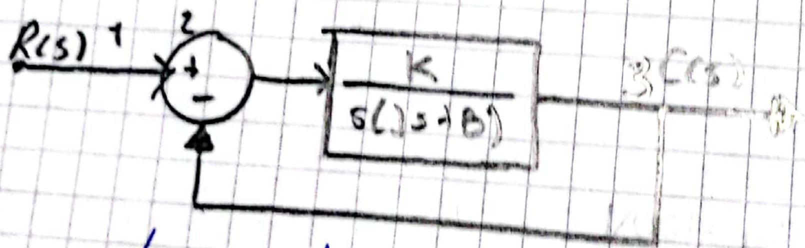
podemos reducir "G(s)"

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \qquad \begin{cases} K_m = K/B \\ T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3} \end{cases}$$

obtenemos el diagrama de bloques.



El cual se puede reducir a.

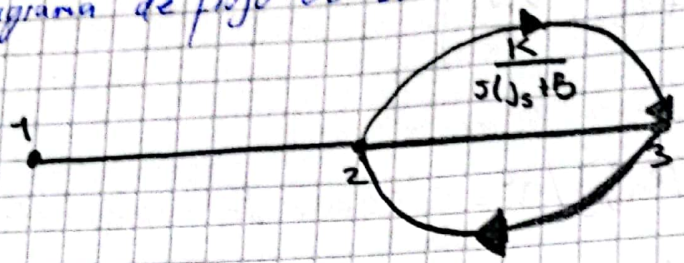


Espacio de Estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

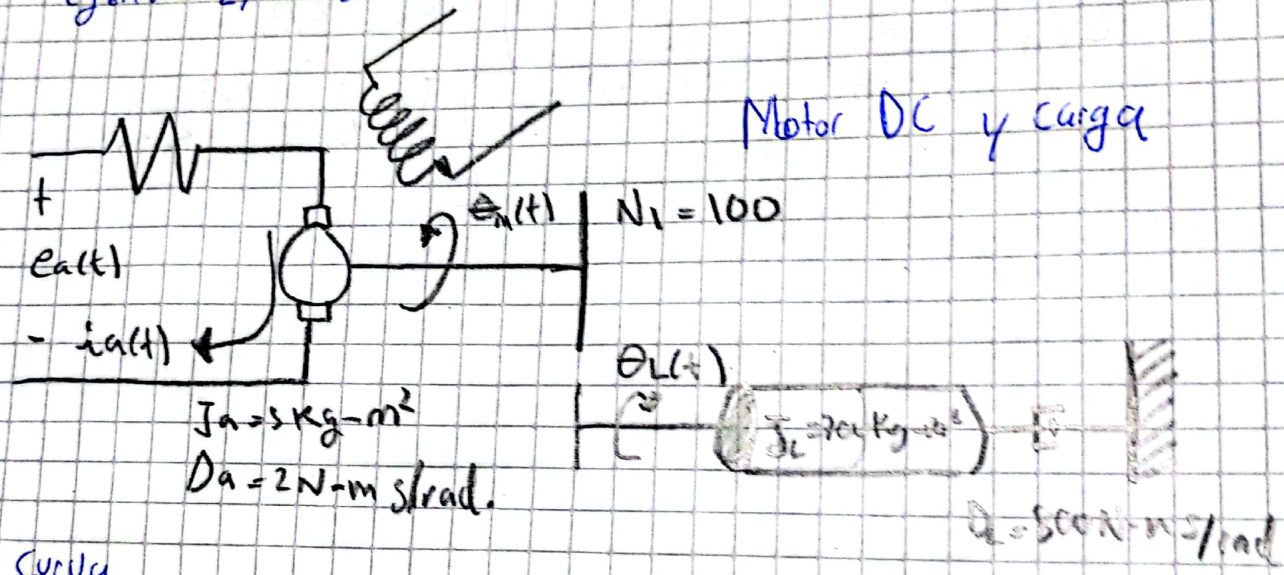
Diagrama de flujo de señal.



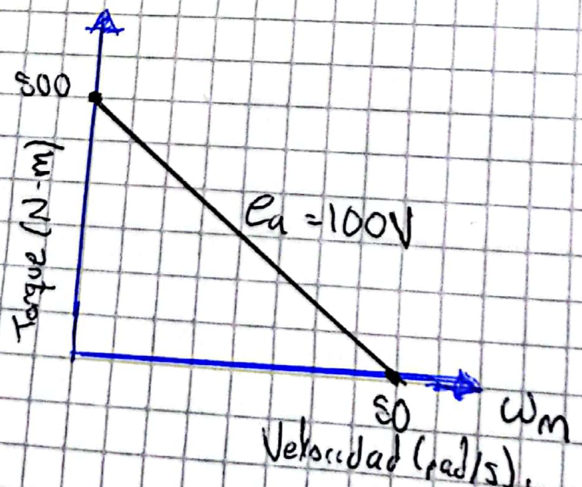
Ejercicio 3.

Ejercicio 2,23 – Libro

Motor DC y carga



Curva torque-Velocidad



Las constantes serian

$$J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 5+700\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 12.$$

$$D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 2+800\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 10$$

ahora encontramos las constantes electricas K_t/R_a y K_b de la curva torque-velocidad.

$$T_{(bloqueo)} = 500, \quad \omega_{sin\ carga} = 50, \quad e_a = 100.$$

~~Diagrama de Bloques~~

Las constantes electricas serian

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T}{e_a} = \frac{500}{100} = 5$$

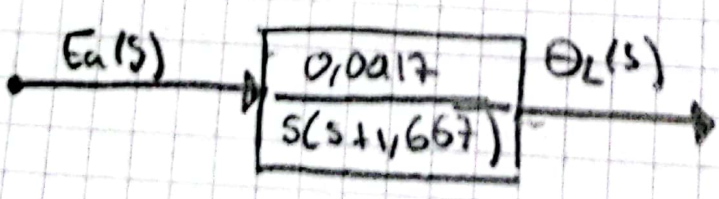
$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{sin\ carga}} = \frac{100}{50} = 2.$$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{5/12}{s\left\{s+\frac{1}{12}[10+(5)(2)]\right\}} = \frac{0{,}417}{s(s+1{,}667)}$$

por lo tanto $G(s) = \dfrac{\theta_L(s)}{E_a(s)}$, $N_1/N_2 = 1/10.$

$$\frac{\theta_L}{E_a(s)} = \frac{0{,}0417}{s(s+1{,}667)}$$

Diagrama de Bloques.

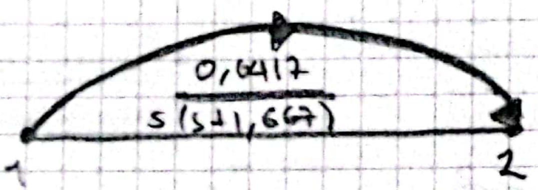


Espacio de Estados

$$\dot{x} = [0 \quad 10 \quad -1,667]\,x + [0 \quad 0,0917]\,u$$

$$y = [1 \quad 0]\,x$$

Diagrama de flujo de señal.



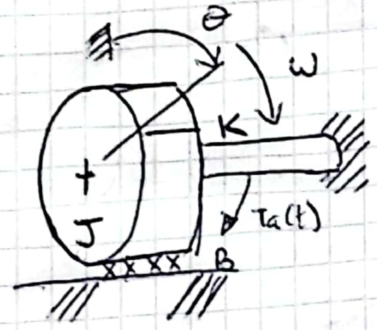
Punto 4. Comparación Entre Ejercicios.

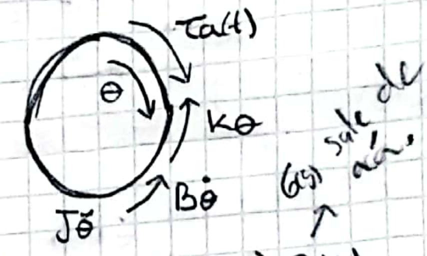
Ambos Ejercicios tratan el funcionamiento de un Servo motor DC la diferencia radica en el enfoque que se les da a ambos es distinto, El ejercicio A-3,9 describe detalladamente como los componentes del sistema interactuan para controlar la posición angular del eje de salida, Centrandose en la interacción de los elementos del sistema. El Ejemplo 2,23 se centra en derivar y conocer la relación entre la entrada de Voltaje y la carga del sistema, Este se enfoca más en modelar matemáticamente y tecnicamente la relación entre la entrada del sistema y la salida del mismo, ambos realizando un analisis profundo del sistema y sus elementos.

Segundo Parcial.

Adrian Camilo Tibaduiza Castillo - 20192005032.

1)





$$\tau_a(s) = (Js^2 + Bs + K)\,\Theta(s).$$

ΣF:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta = \tau_a \longrightarrow q_1 = \theta,\ q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta},\ \dot{q}_2 = \ddot{\theta}$$

$$J\dot{q}_2 + Bq_2 + Kq_1$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{K}{J}q_1 - \frac{B}{J}q_2 + \frac{\tau_a}{J}$$

Espacio de Estados

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} \tau_a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagrama de Bloques.

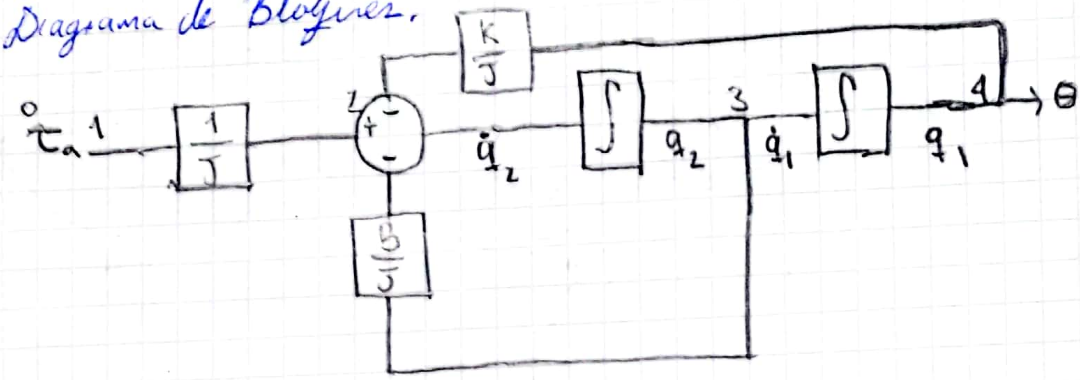
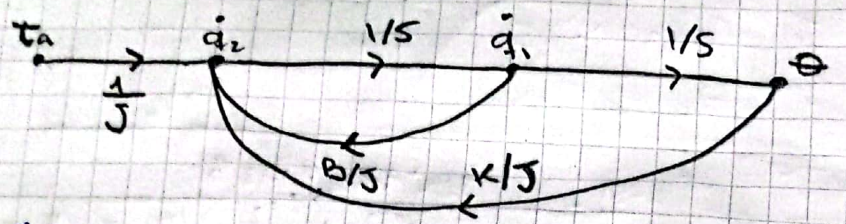


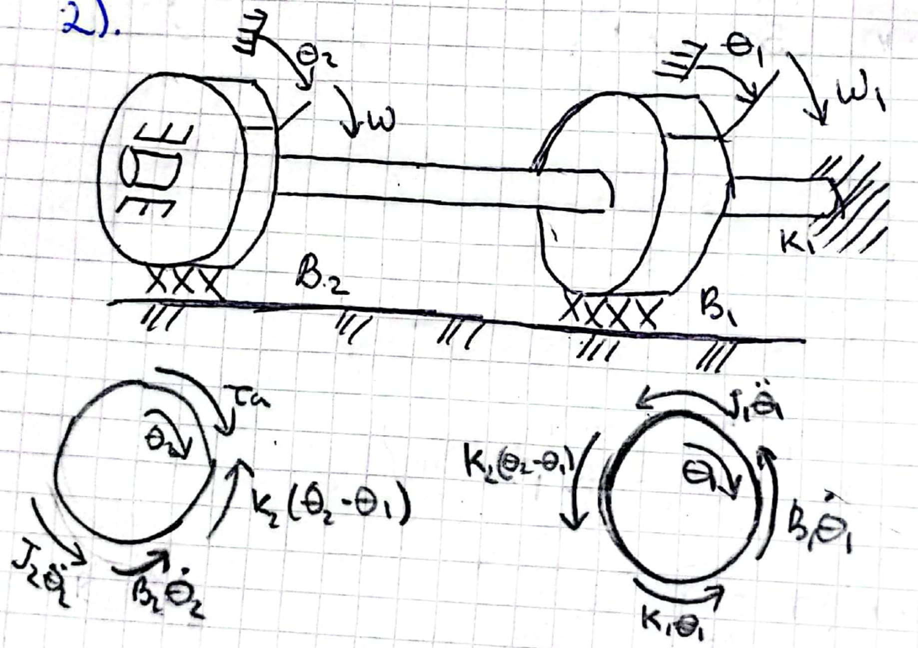
Diagrama de flujo.



Función de Transferencia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K}$$

2).



ΣF:

$$\tau_a = J_2\ddot{\theta}_2 + K_2\theta_2 + K_2\theta_1 + B_2\dot{\theta}_2$$

$$\tau_a(s) = J_2 s^2\theta_2(s) + K_2\theta_2(s) - K_2\theta_1(s) + B_2 s\theta_2(s)$$

$$K_2(\theta_2 - \theta_1) - J_1\ddot{\theta}_1 - K_1\theta_1 - B_1\ddot{\theta}_1 = 0$$

$$K_2\theta_2(s) - K_2\theta_1(s) - J_1 s^2\theta_1(s) - K_1\theta_1(s) - Bs\theta_1(s) = 0$$

$$\theta_1(s)(-Bs - K_1 - K_2 - J_1 s^2) + K\theta_2(s) = 0$$

$$T(s) = \Theta_2(s)(J_2 s^2 + K_2 + B_2 s) + \Theta_1(s)(K_2)$$

Función de Transferencia.

relacionando Θ_2 y τa.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = \boxed{\frac{J_2 s^2 + K_2 + B_2 s}{-K_2^2 (J_2 s^2 + K_2 + B_2 s)(B_1 s + K_1 + K_2 + J_1 s^2)}}$$

Espacio de Estados.

$q_1 = \Theta_1 \qquad \dot{q}_2 = \ddot{\Theta}_1$

$q_2 = \dot{\Theta}_1 \qquad \dot{q}_4 = \ddot{\Theta}_2$

$q_3 = \Theta_2$

$q_4 = \dot{\Theta}_2$

sabemos que.

$$K_2\Theta_2 - K_2\Theta_1 - J_1\ddot{\Theta}_1 - K_1\Theta_1 - B_1\dot{\Theta}_1 = \phi$$

$$\ddot{\Theta}_1 = \frac{K_2\Theta_2}{J_1} - \frac{K_2\Theta_1}{J_1} - \frac{K_1\Theta_1}{J_1} - \frac{B_1\dot{\Theta}_1}{J_1}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{K_2}{J_1}q_3 - \frac{K_2}{J_1}q_1 - \frac{K_1}{J_1}q_1 - \frac{B_1}{J_1}q_2$$

$$\tau a = J_2\ddot{\Theta}_2 + K_2(\Theta_2 - \Theta_1) + B_2\dot{\Theta}_2$$

$$\ddot{\Theta}_2 = \frac{\tau a}{J_2} - \frac{K_2}{J_2}\Theta_2 + \frac{K_2}{J_2}\Theta_1 - \frac{B_2}{J_2}\dot{\Theta}_2$$

$$\dot{q}_4 = \frac{\tau a}{J_2} - \frac{K_2}{J_2}q_3 + \frac{K_2}{J_2}q_1 - \frac{B_2}{J_2}q_4$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(K_2+K_1)}{J_1} & \frac{-B_1}{J_1} & K_2/J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_2/J_2 & 0 & -K_2/J_2 & -B_2/J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_2 \end{bmatrix} \tau_a$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

diagrama de Bloques.

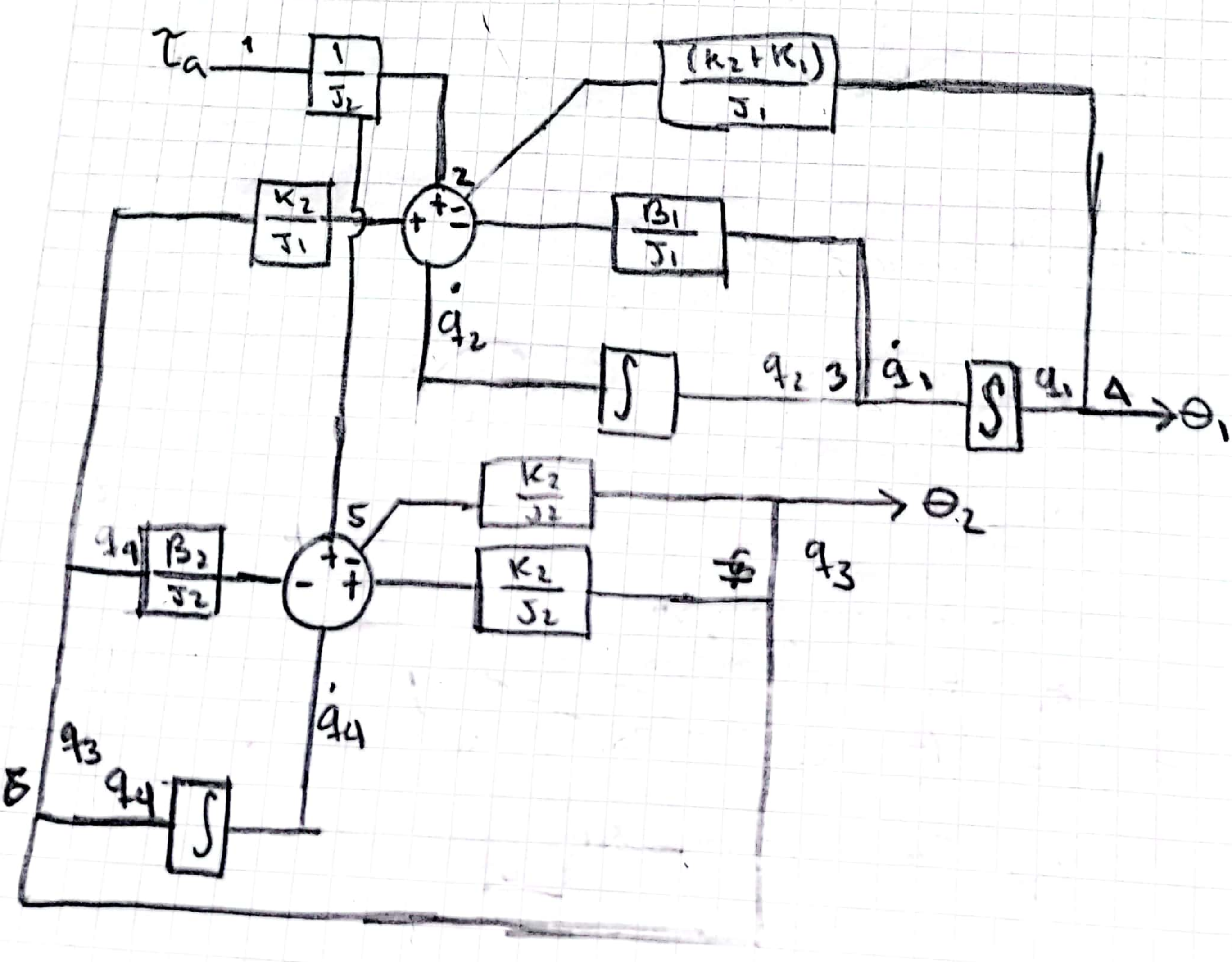
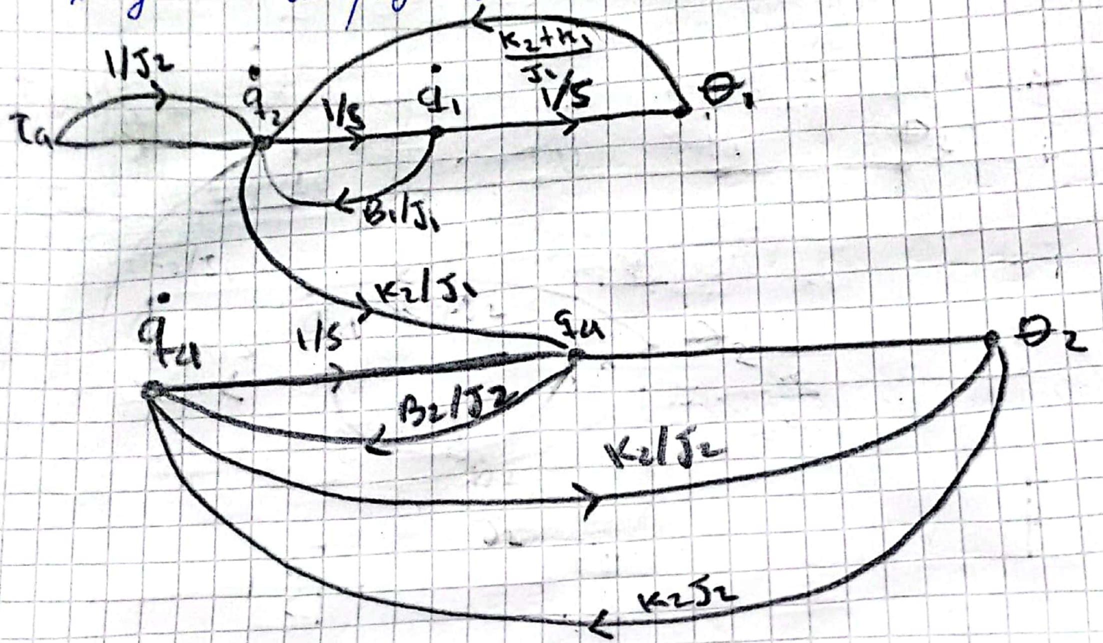
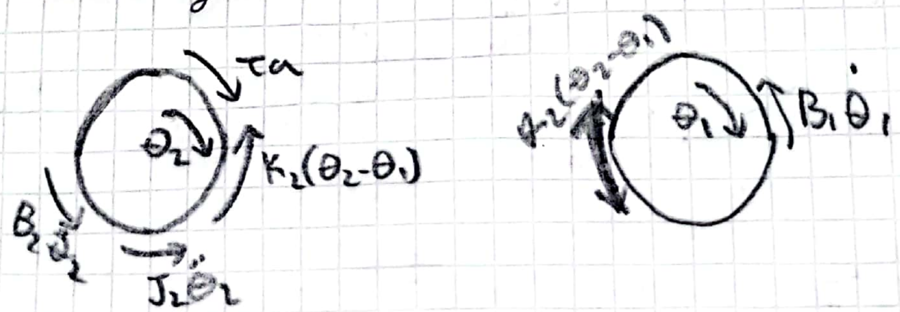


Diagrama de flujo de la señal.



3). mismo Ejercicio Tomando $K_1 = \emptyset$.



$$K_2\theta_2 - K_1\theta_1 - J_1\ddot{\theta}_1 - B_1\dot{\theta}_2 = \emptyset$$

$$T(s) = \theta_2(s)(J_2 s^2 + k_2 + B_2 s) + \theta_1(s)(-k_2)$$

Función de Transferencia.

$$\varphi(s) = \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{J_2 S^2 + K_2 + B_2 S}{-K_2^2 (J_2 s^2 + k_2 + B_2 S)(B_1 s + K_2 + J_1 s^2)}$$

Espacio de Estados.

$\theta_1 = q_1$

$q_2 = \dot{\theta}_1 \qquad \dot{q}_2 = \ddot{\theta}_1$

$\theta_2 = q_3 \qquad q_3 = \dot{\theta}_2 \qquad \dot{q}_3 = \ddot{\theta}_2$

$$\dot{q}_4 = \frac{\tau_a}{J_2} - \frac{K_2}{J_2} q_3 + \frac{K_2}{J_2} q_1 - \frac{B_2}{J_2} q_4$$

$$\dot{q}_2 = \frac{K_2}{J_1} q_3 - \frac{K_2}{J_1} q_1 - \frac{B_1}{J_1} q_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & 1 & 0 & 0 \\ -K_2/J_1 & -B_1/J_1 & K_2/J_1 & 0 \\ \varnothing & \varnothing & 0 & 1 \\ K_2/J_2 & \varnothing & -K_2/J_2 & -B_2/J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_2 \end{bmatrix} \tau_a$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

~~Diagr~~

Diagrama de Bloques.

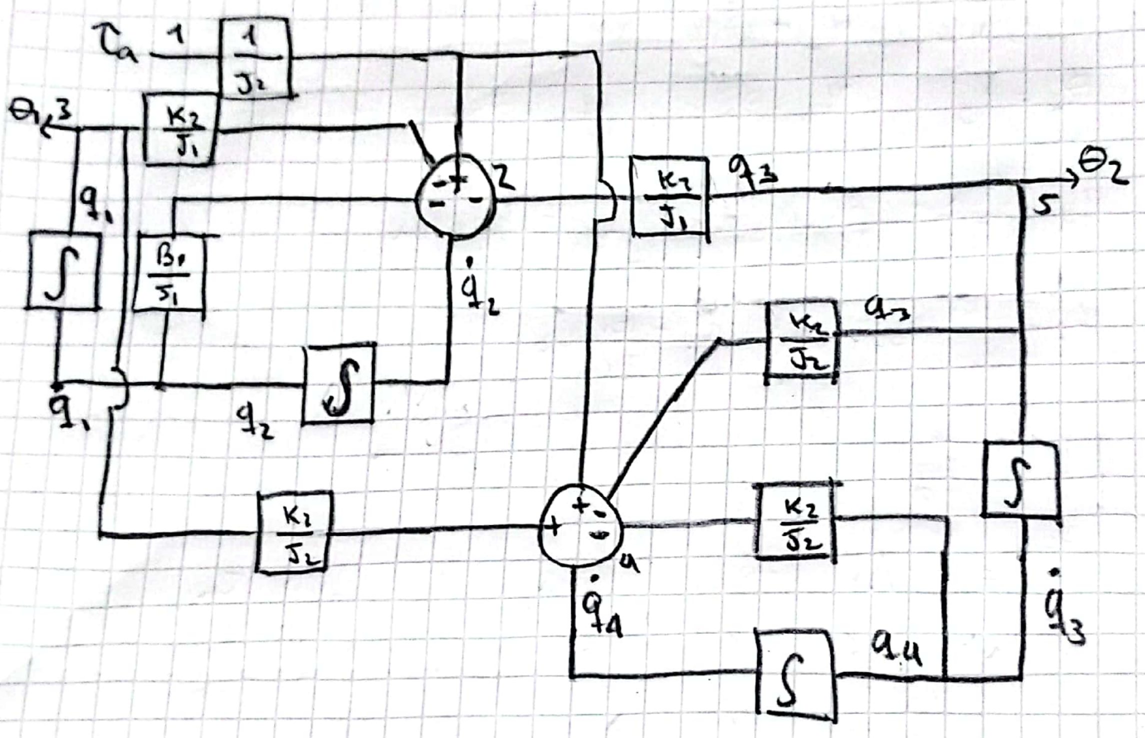
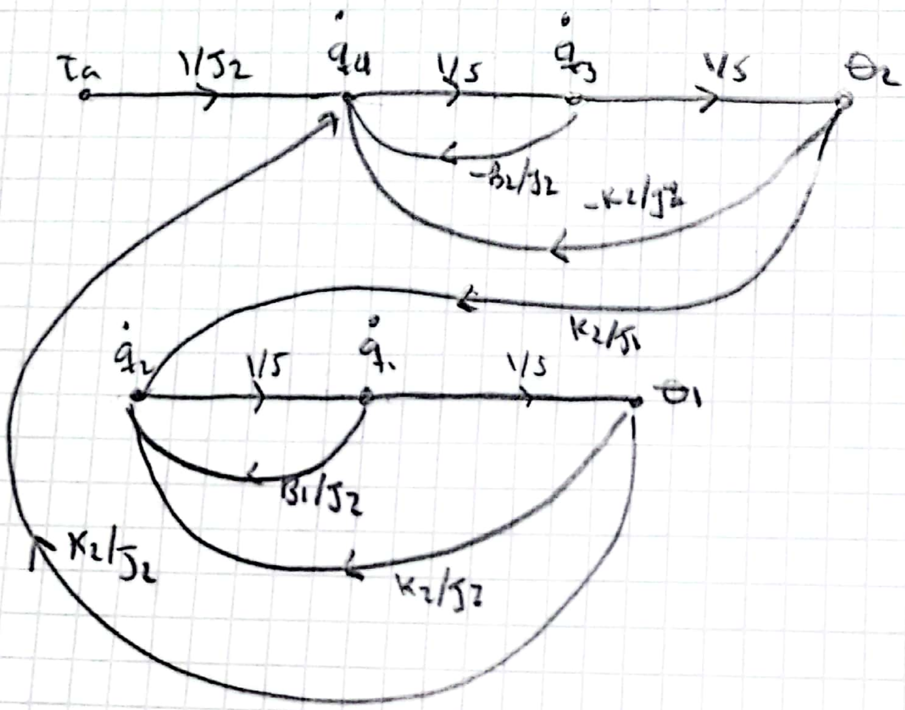
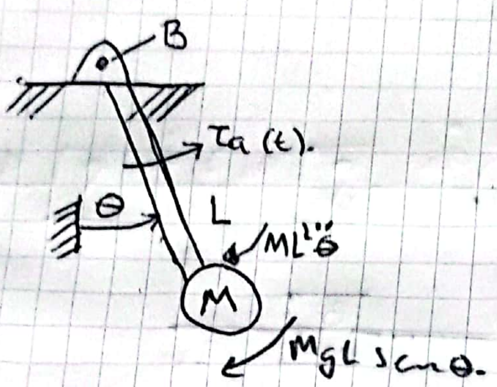


Diagrama de flujos.



4).



$ML^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + MgL\,sen\theta = \tau a(t)$

$\dot{\theta} = \omega$

$\ddot{\theta} = \dot{\omega}$

$\dot{\omega} = \frac{1}{ML^2}[-MgL\,sen\theta - B\omega + \tau a(t)]$

$\theta = 0{,}5\,rad.$

$ML^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + MgL\theta = \tau a(t)$

$\dot{\theta} = \omega$

$\dot{\omega} = \frac{1}{ML^2}[-MgL\theta - B\omega + \tau a(t)]$

$\theta = q_1 \qquad q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta} = \omega$

$\dot{q}_2 = \ddot{\theta} = \dot{\omega}$

$\dot{q}_2 = \frac{1}{ML^2}[-MgLq_1 - Bq_2 + \tau a(t)] \qquad \dot{q}_2 = -\frac{g}{L}q_1 - \frac{B}{ML^2}q_2 + \frac{\tau a(t)}{ML^2}$

Espacio de Estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{B}{ML^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/ML^2 \end{bmatrix} \tau a$$

$$\theta = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagrama de Bloques.

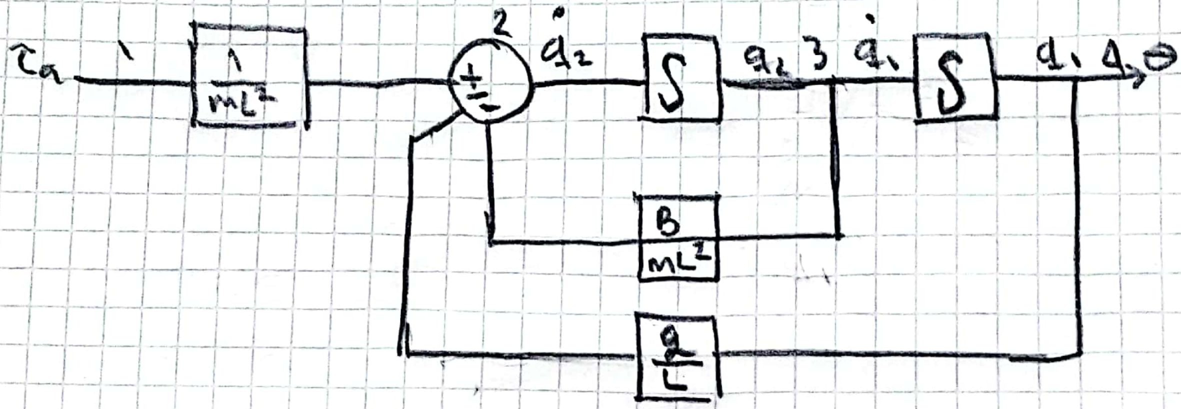


Diagrama de flujo.