Rapport de projet OS13
Analyse de politique de maintenance

TRAN Quoc Nhat Han & Adrien WARTELLE

3 janvier 2019

Sommaire

Résumé

Soient des données liées à la fonctionnement de système, nous déterminons un modèle approprié et puis choisir une politique de maintenance optimal.

1 Maintenance basant sur l'âge

1.1 Rappel

Considérons un système non maintenu. En l'observant, nous obtenons un liste des dates de panne, grâce auquel nous construirerons une politique de remplacement systématique basée sur l'âge : *Nous remplaçons lorsque le système tombe en panne ou qu'il survit une durée t_0.*

Le but est de minimiser le coût moyen cumulé.

$$\mathbb{E}(C) = \frac{\mathbb{E}(C(S))}{\mathbb{E}(S)} \tag{1}$$

Où S est la variable aléatoire représentant la date de remplacement et $C(S)$ est le coût de maintenance cumulé à l'instant S (sachant que $C(S)$ est $c_c(= 1200)$ si une maintenance corrective et $c_p(= 800)$ si préventive).

1.2 Modéliser la durée de vie du système

L'importation de données (l'annexe 2.1) nous montre que les dates de pannes sont de l'ordre grandement variée (300 à 27000) (l'annexe 2.2). Exponentiel des valeurs extrèmes résulteront Inf, ce qui est indésirable. Alors nous devons forcément les réduire en les divisant par un scalaire `scale`, prenons par example 1000. (Figure 1)

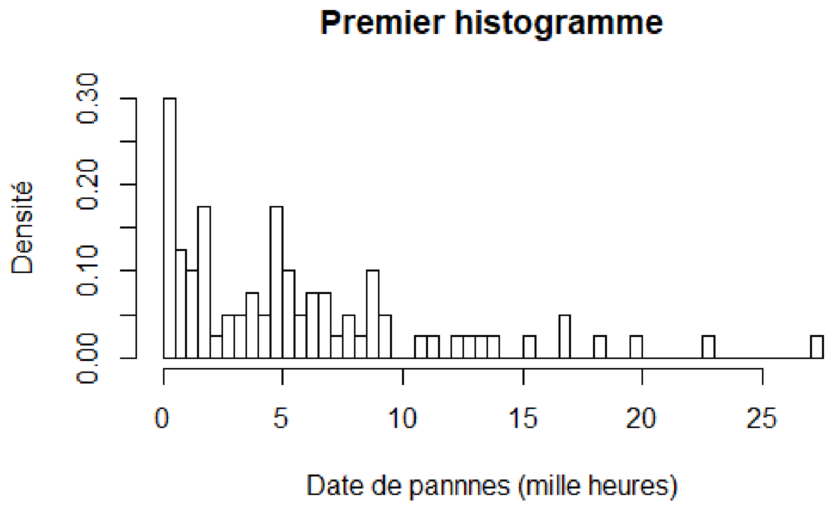

FIGURE 1 – Le premier histogramme de distribution de pannes

Les pannes se concentrent autour de 2 sommets, l'un à $[0; 0,5]$ et l'autre à $[4,5; 5]$. Ceci nous fait penser naturellement à un mixage de deux lois.

Comme les valeurs sont positives, et que l'un sommet se situe auprès de zéro et l'autre à une valeur non nulle, nous essayons d'estimer un mixage de loi *Exponentielle* et *Gamma*.

La fonction de densité avec le paramètre $\theta = (p_1, p_2, \lambda, \alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &= p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) \\ &= p_1 \lambda e^{-\lambda x} + p_2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \end{aligned} \tag{2}$$

Où f_1, f_2 désignent réspectivement $exp(\lambda)$ et $\Gamma(\alpha, \beta)$; $p_1, p_2 > 0 : p_1 + p_2 = 1$.

Nous allons utiliser l'algorithme EM, la méthode la plus efficace pour estimer le MLE de mixage fini.

Soit X la variable aléatoire de durée de vie du système. Soient $(x_1, ..., x_N)$ les observations.

Soit la matrice de probabilité d'appartenance (ζ_{ki}) : ζ_{ki} vaut la probabilité que x_i suive la loi f_k.

$$\zeta_{ki} = \frac{p_k f_k(x_i)}{p_1 f_1(x_i) + p_2 f_2(x_i)} \forall k = \overline{1,2} \forall i = \overline{1,N} \tag{3}$$

La fonction de vraisemblance :

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^{N} \ln f_\theta\left(x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(p_1 f_1\left(x_i\right) + p_2 f_2\left(x_i\right)\right) \tag{4}$$

Nous cherchons à maximiser $\ln \Lambda$ en la dérivant selon λ, α, β.
Pour λ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \Lambda &= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_1 e^{-\lambda x_i} - p_1 \lambda x_i e^{-\lambda x_i}}{p_1 f_1\left(x_i\right) + p_2 f_2\left(x_i\right)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_1 f_1\left(x_i\right)}{p_1 f_1\left(x_i\right) + p_2 f_2\left(x_i\right)} \left(\frac{1}{\lambda} - x_i\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \zeta_{1i} - \sum_{i=1}^{N} \zeta_{1i} x_i = 0 \\
\Leftrightarrow \lambda &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{1i} x_i} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Pour β :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Lambda &= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_2 x_i^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)} \frac{\alpha \beta^{\alpha-1} e^{-\beta x_i} - \beta^{\alpha} x_i e^{-\beta x_i}}{p_1 f_1\left(x_i\right) + p_2 f_2\left(x_i\right)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_2 f_2\left(x_i\right)}{p_1 f_1\left(x_i\right) + p_2 f_2\left(x_i\right)} \left(\frac{\alpha}{\beta} - x_i\right) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^{N} \zeta_{2i} - \sum_{i=1}^{N} \zeta_{2i} x_i = 0 \\
\Leftrightarrow \beta &= \alpha \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{2i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{2i} x_i} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Pour α :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Lambda &= \sum_{i=1}^{N}\frac{p_2 e^{-\beta x_i}}{p_1 f_1(x)+p_2 f_2(x)}\left(\frac{\beta(\ln\beta+\ln x_i)(\beta x_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}\frac{\Psi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{p_2 f_2(x_i)}{p_1 f_1(x)+p_2 f_2(x)}(\ln\beta+\ln x_i-\Psi(\alpha))\\
&= \left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\right)\ln\beta+\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\ln x_i-\Psi(\alpha)\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\right)=0\\
\Leftrightarrow 0 &= \ln\alpha+\ln\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}x_i}+\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}-\Psi(\alpha)\ \ \text{(substitué par (6))}\\
\Leftrightarrow 0 &= \ln\alpha-\Psi(\alpha)-c
\end{aligned}$$

Où $c=\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}x_i}{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}\right)-\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\ln(x_i)}{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}$; Ψ est la fonction digamma.

Selon la méthode de Newton-Rashphon, nous pouvons résoudre α numériquement avec ce formul itératif :

$$\alpha_{r+1}=\alpha_r-\frac{\ln\alpha_r+\Psi(\alpha_r)-c}{\frac{1}{\alpha_r}-\Psi'(\alpha_r)}$$

[1] propose un autre formule convergeant plus vite :

$$\frac{1}{\alpha_{r+1}}=\frac{1}{\alpha_r}+\frac{\ln(\alpha_r)-\Psi(\alpha_r)-c}{a_r^2\left(\frac{1}{\alpha_r}-\Psi'(\alpha_r)\right)} \tag{7}$$

Avec Ψ' la fonction trigamma. L'itération part avec $\alpha_0=\frac{0.5}{c}$.
Au final, pour p_k :

$$p_k=\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{ki}}{N}\forall k=\overline{1,2} \tag{8}$$

Etant donné (3), (5), (6), (7) et (8), nous définissons l'algorithme EM :

1. **Initialisation :** Choisir un θ_{vieux}.
2. **Etape E :** Evaluer (ζ_{ki}) sachant θ_{vieux} en utilisant (3).
3. **Etape M :** Calculer $\theta_{nouveau}$ à l'aide des équations (5), (6), (7) et (8).
   Note : Pour α, l'itération se termine quand $|\alpha_{r+1}-\alpha_r|<\varepsilon_\alpha$ où ε_α est un réel positif fixé à l'initialisation.
4. **Evaluation :** Si $\|\theta_{c+1}-\theta_c\|<\varepsilon_\theta$ (ε_θ est un réel positif fixé à l'initialisation), l'algorithme s'arrête et $\theta=\theta_{vieux}$.
   Sinon, reviens à l'étape E avec $\theta_{vieux}\leftarrow\theta_{nouveau}$.

Le résultat obtenu :

$$(p_1,p_2,\lambda,\alpha,\beta)=(0.2194518;0.7805482;1.56738;1.665659;0.2332427)$$

D'où nous traçons la fonction de densité f_θ trouvé (figure 2) et réalisons un test de Kolmogorov-Smirnov qui donne $p-value = 0,9663111$ signifiant $96,63\%$ de nous tromper si nous rejetons ce modèle. Nous l'acceptons alors, quoiqu'il ne génère pas 2 sommets comme la remarque initiale. Le code est trouvable à l'annexe 2.3.

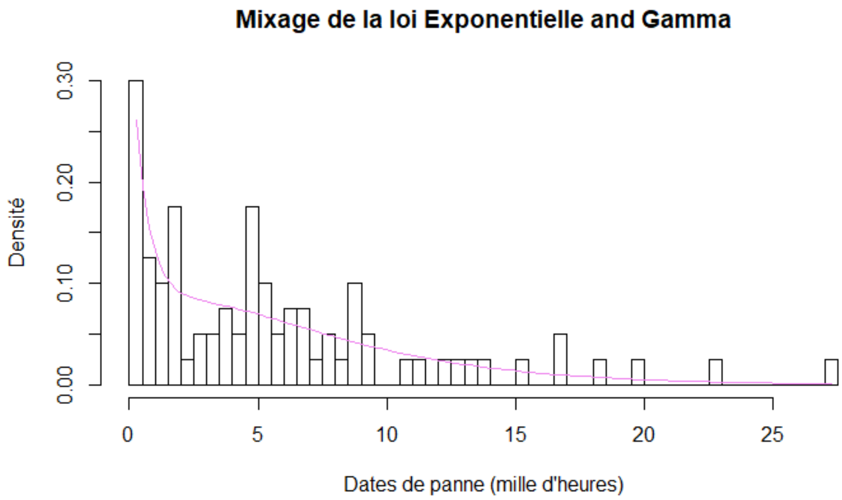

FIGURE 2 – Mixage de la loi Exponentielle et Gamma

1.3 La politique de maintenance basée sur l'âge

Avec la fonction f_θ trouvée, nous construirerons la politique optimale.

Nous avons par définition : $S = \min(X, t_0)$.

Autrement dit, $S = X\mathbb{I}_{\{X<t_0\}} + t_0\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}$.

Traduit au coût : $C(S) = C_c\mathbb{I}_{\{X<t_0\}} + C_p\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}$, avec C_c, C_p les coûts de maintenances correctives et préventives réspectivement.

Le coût moyen :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C(S)) &= c_c\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{X<t_0\}}\right) + c_p\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}\right) \\
&= c_cP(X<t_0) + c_pP(X\geqslant t_0) \\
&= c_cF_\theta(t_0) + c_p(1-F_\theta(t_0)) \\
&= (c_c - c_p)F_\theta(t_0) + c_p \qquad (9)
\end{aligned}$$

La durée moyenne :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}\left(X\mathbb{I}_{\{X<t_0\}}\right) + t_0\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}\right) \\
&= \int_0^{t_0} x f_\theta(x)\,dx + t_0 P(X \geqslant t_0) \\
&= xF_\theta(x)\,|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} F_\theta(x)\,dx + t_0\left(1 - F_\theta(t_0)\right) \\
&= t_0 - \int_0^{t_0} F_\theta(x)\,dx \qquad (10)
\end{aligned}
$$

De (9) et (10), nous détaillons le coût moyen sur une durée de temps (1) :

$$
\mathbb{E}(C) = \frac{\mathbb{E}(C(S))}{\mathbb{E}(S)} = \frac{(c_c - c_p)F_\theta(t_0) + c_p}{t_0 - \int_0^{t_0} F_\theta(x)\,dx} \qquad (11)
$$

L'annexe (2.4) montrer comment chercher l'optimum numériquement. La valeur minimum est $t_0 = 27,29639$ (mille heures), correspondant à un coût moyen de $210,6402$. Nous constatons que t_0^{min} est très proche du maximum de durée de vie, indiquant que l'optimisation de t_0 est inutile car le système ne viellit pas.

2 Annexe

2.1 L'importation de données de pannes

```r
pannes = read.csv(
    file = "FailureTimes_5.csv",
    header = TRUE,
    sep = ",",
    dec = ".",
    colClasses = c("NULL", NA)
)
scale = 1000
data = pannes$Heures / scale
N = length(data)
```

2.2 Le premier histogramme de distribution de pannes

```r
hist(
    data,
    breaks = 40,
    probability = TRUE,
    xlab = "Date de pannnes (mille heures)",
    ylab = "Densité",
    main = "Premier histogramme"
)
```

2.3 Estimer le mixage de la loi Exponentielle et Gamma

```r
# Fitting mixture of Exp and Gamma
# Algorithm EM
# Initialisation
k = 2 # number of components
p = c(0.5, 0.5)
```

```r
lambda = 1
alpha = 5
beta = 1
f = list(
    '1' = function(x) {
        dexp(x, rate = lambda)
    },
    '2' = function(x) {
        dgamma(x, shape = alpha, rate = beta)
    }
)
epsilon = list(
    alpha = 1e-4,
    theta = 1e-4
)
zeta = matrix(
    0,
    nrow = k,
    ncol = N
)
# Norm
normVec = function(x) sqrt(sum(x^2))
# New value
p_new = p
alpha_new = alpha
beta_new = beta
lambda_new = lambda
repeat {
    ## E Step
    # Calculate each proba
    for (l in 1:k) {
        zeta[l,] = p[[l]] * f[[l]](data)
    }
    # Normalize proba
    zeta = t(t(zeta) / rowSums(t(zeta)))
    ## M step
    # Lambda
    lambda_new = sum(zeta[1,]) / sum(zeta[1,] * data)
    # Alpha
    c = log(sum(zeta[2,] * data) / sum(zeta[2,])) - sum(zeta[2,] * log(data))
        / sum(zeta[2,])
    alpha_new = 0.5 / c
    alpha_temp = 0
    repeat {
        alpha_temp = 1 / (1 / alpha_new + (log(alpha_new) - digamma(alpha_new
            ) - c) / (alpha_new^2 * (1 / alpha_new - trigamma(alpha_new))))
        if (abs(alpha_temp - alpha_new) < epsilon$alpha) {
            break
        } else {
            alpha_new = alpha_temp
        }
    }
    alpha_new = alpha_temp
    # Beta
    beta_new = alpha_new * sum(zeta[2,]) / sum(zeta[2,] * data)
    # P
    for (l in 1:k) {
        p_new[[l]] = mean(zeta[l,])
    }
    ## Evaluation
    if (normVec(c(alpha, beta, lambda, p[[1]], p[[2]]) - c(alpha_new, beta_
        new, lambda_new, p_new[[1]], p_new[[2]])) < epsilon$theta) {
        break
    } else {
        alpha = alpha_new
        beta = beta_new
        lambda = lambda_new
        p = p_new
    }
}
# Final value update
alpha = alpha_new
beta = beta_new
lambda = lambda_new
```

```
p = p_new

# Illustration
f_theta = function(x) {
    p[[1]] * f[[1]](x) + p[[2]] * f[[2]](x)
}
h_theta = hist(
    data,
    breaks = 40,
    probability = TRUE,
    main = "Mixage de la loi Exponentielle et Gamma",
    xlab = "Dates de panne (mille d'heures)",
    ylab = "Densité"
)
curve(
    f_theta(x),
    add = TRUE,
    col = "violet",
    from = min(h_theta$mids),
    to = max(h_theta$mids)
)
# Kolmogorov-Smirnov test
F_theta = function(x) {
    p[[1]] * pexp(x, rate = lambda) + p[[2]] * pgamma(x, shape = alpha, rate = beta)
}
test = ks.test(data, F_theta, exact = TRUE)
```

2.4 Optimiser le coût moyenne sur une durée de temps

```
# Finding optimal t_0
# Given F_theta
c_c = 1200
c_p = 800
E_C_S = function(x) {
    (c_c - c_p) * F_theta(x) + c_p
}
E_S = function(x) {
    x - integrate(F_theta,0,x)$value
}
E_C = function(x) {
    E_C_S(x) / E_S(x)
}
o = optimize(
    E_C,
    c(min(data),max(data)),
    tol = 1e-5
)
d = seq(
        10,
        30,
        0.01
    )
plot(
    d,
    lapply(
        d,
        E_C
    ),
    main = "Coût moyenne sur une durée de temps",
    xlab = "t_0",
    ylab = "",
    type = "l"
)
```

Références

[1] Minka, Thomas P. (2002). "Estimating a Gamma distribution"

https://tminka.github.io/papers/minka-gamma.pdf