Rapport de projet OS13
Analyse de politique de maintenance

TRAN Quoc Nhat Han & Adrien WARTELLE

9 janvier 2019

Sommaire

Résumé

Soient des données liées à la fonctionnement de système, nous déterminons un modèle approprié et puis choisir une politique de maintenance optimal.

1 Maintenance basée sur l'âge

1.1 Rappel

Considérons un système non maintenu. En l'observant, nous obtenons un liste des dates de panne, grâce auquel nous construirerons une politique de remplacement systématique basée sur l'âge : *Nous remplaçons lorsque le système tombe en panne ou qu'il survit une durée* t_0.

Le but est de minimiser le coût moyen cumulé.

$$\mathbb{E}(C) = \frac{\mathbb{E}(C(S))}{\mathbb{E}(S)} \tag{1}$$

Où S est la variable aléatoire représentant la date de remplacement et $C(S)$ est le coût de maintenance cumulé à l'instant S (sachant que $C(S)$ est $c_c(= 1200)$ si une maintenance corrective et $c_p(= 800)$ si préventive).

1.2 Modéliser la durée de vie du système

L'importation de données de `FailureTimes_5.csv` (l'annexe 3.1) expose les dates de pannes de l'ordre grandement variée (300 à 27000) (l'annexe 3.2).

Exponentiel des valeurs extrêmes résulteront Inf, ce qui est indésirable. Alors nous devons forcément les réduire en les divisant par un scalaire `scale`, prenons par example 1000. (Figure 1)

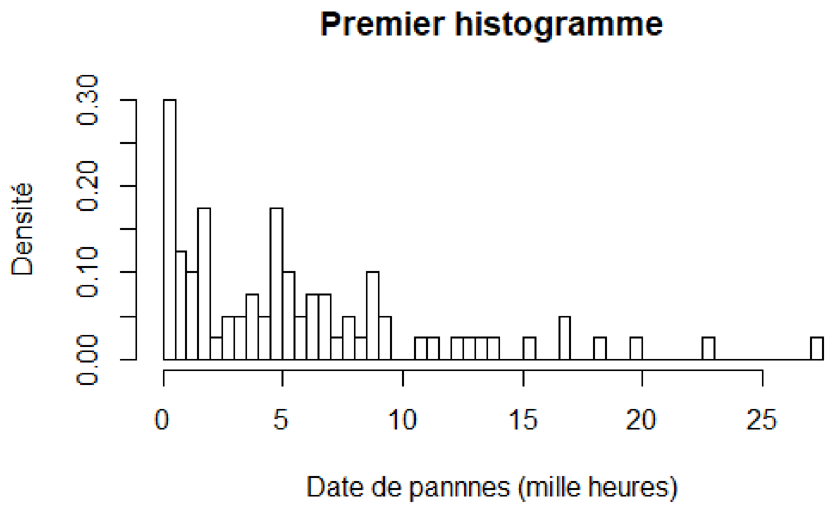


FIGURE 1 – Le premier histogramme de distribution de pannes

Les pannes se concentrent autour de 2 sommets, l'un à $[0; 0,5]$ et l'autre à $[4,5; 5]$. Ceci nous fait penser naturellement à un mixage de deux lois.

Nous pouvons remarquer que les valeurs sont positives (étant données que ce sont des temps) et que la distribution semble posséder deux parties importantes. Une dont le sommet se situe près de zéro et qui est suivi d'une pente forte, et l'autre sommet est à une valeur non nulle (5) que la distribution locale en forme de pic. Nous avons donc penser estimer un mixage de loi *Exponentielle* et *Gamma* afin de modéliser les données. En effet la première partie correspondrait à une loi exponentielle tandis que la seconde à une loi gamma (Et .

La fonction de densité avec le paramètre $\theta = (p_1, p_2, \lambda, \alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &= p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) \\ &= p_1 \lambda e^{-\lambda x} + p_2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \end{aligned} \tag{2}$$

Où f_1, f_2 désignent réspectivement $exp(\lambda)$ et $\Gamma(\alpha, \beta)$; $p_1, p_2 > 0 : p_1 + p_2 = 1$.

Nous allons utiliser l'algorithme EM, la méthode la plus efficace pour estimer le MLE de mixage fini.

Soit X la variable aléatoire de durée de vie du système. Soient $(x_1, ..., x_N)$ les observations.

Soit la matrice de probabilité d'appartenance (ζ_{ki}) : ζ_{ki} vaut la probabilité que x_i suive la loi f_k.

$$\zeta_{ki} = \frac{p_k f_k(x_i)}{p_1 f_1(x_i) + p_2 f_2(x_i)} \forall k = \overline{1,2} \forall i = \overline{1,N} \tag{3}$$

La fonction de vraisemblance :

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^{N} \ln f_\theta(x_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(p_1 f_1(x_i) + p_2 f_2(x_i)\right) \tag{4}$$

Nous cherchons à maximiser $\ln \Lambda$ en la dérivant selon λ, α, β.

Pour λ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \Lambda &= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_1 e^{-\lambda x_i} - p_1 \lambda x_i e^{-\lambda x_i}}{p_1 f_1(x_i) + p_2 f_2(x_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_1 f_1(x_i)}{p_1 f_1(x_i) + p_2 f_2(x_i)} \left(\frac{1}{\lambda} - x_i\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \zeta_{1i} - \sum_{i=1}^{N} \zeta_{1i} x_i = 0 \\
\Leftrightarrow \lambda &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{1i} x_i} && (5)
\end{aligned}$$

Pour β :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Lambda &= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_2 x_i^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\alpha \beta^{\alpha-1} e^{-\beta x_i} - \beta^\alpha x_i e^{-\beta x_i}}{p_1 f_1(x_i) + p_2 f_2(x_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{p_2 f_2(x_i)}{p_1 f_1(x_i) + p_2 f_2(x_i)} \left(\frac{\alpha}{\beta} - x_i\right) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^{N} \zeta_{2i} - \sum_{i=1}^{N} \zeta_{2i} x_i = 0 \\
\Leftrightarrow \beta &= \alpha \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{2i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \zeta_{2i} x_i} && (6)
\end{aligned}$$

Pour α :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Lambda &= \sum_{i=1}^{N}\frac{p_2 e^{-\beta x_i}}{p_1 f_1(x)+p_2 f_2(x)}\left(\frac{\beta(\ln\beta+\ln x_i)(\beta x_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \beta^{\alpha}x^{\alpha-1}\frac{\Psi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{p_2 f_2(x_i)}{p_1 f_1(x)+p_2 f_2(x)}(\ln\beta+\ln x_i-\Psi(\alpha))\\
&= \left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\right)\ln\beta+\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\ln x_i-\Psi(\alpha)\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\right)=0\\
\Leftrightarrow 0 &= \ln\alpha+\ln\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}{\sum\limits_{i=1}^{N}\zeta_{2i}x_i}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}-\Psi(\alpha)\ \ \text{(substitué par (6))}\\
\Leftrightarrow 0 &= \ln\alpha-\Psi(\alpha)-c
\end{aligned}$$

Où $c=\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}x_i}{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}\right)-\frac{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}\ln(x_i)}{\sum_{i=1}^{N}\zeta_{2i}}$; Ψ est la fonction digamma.

Selon la méthode de Newton-Rashphon, nous pouvons résoudre α numériquement avec ce formul itératif :

$$\alpha_{r+1}=\alpha_r-\frac{\ln\alpha_r+\Psi(\alpha_r)-c}{\frac{1}{\alpha_r}-\Psi'(\alpha_r)}$$

[1] propose un autre formule convergeant plus vite :

$$\frac{1}{\alpha_{r+1}}=\frac{1}{\alpha_r}+\frac{\ln(\alpha_r)-\Psi(\alpha_r)-c}{\alpha_r^2\left(\frac{1}{\alpha_r}-\Psi'(\alpha_r)\right)} \tag{7}$$

Avec Ψ' la fonction trigamma. L'itération part avec $\alpha_0=\frac{0.5}{c}$.
Au final, pour p_k :

$$p_k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\zeta_{ki}}{N}\forall k=\overline{1,2} \tag{8}$$

Etant donné (3), (5), (6), (7) et (8), nous définissons l'algorithme EM :

1. **Initialisation :** Choisir θ_0.
2. **Etape E :** Evaluer (ζ_{ki}) sachant θ_c en utilisant (3).
3. **Etape M :** Calculer θ_{c+1} à l'aide des équations (5), (6), (7) et (8).
   Note : Pour α, l'itération se termine quand $|\alpha_{r+1}-\alpha_r|<\varepsilon_\alpha$ où ε_α est un réel positif fixé à l'initialisation.
4. **Evaluation :** Si $\|\theta_{c+1}-\theta_c\|<\varepsilon_\theta$ (ε_θ est un réel positif fixé à l'initialisation), l'algorithme s'arrête et $\theta=\theta_{vieux}$.
   Sinon, reviens à l'étape E avec $\theta_{vieux}\leftarrow\theta_{nouveau}$.

Avant de lancer l'algorithme nous essayons d'obtenir un ensemble de paramètres initiaux θ_0 qui soient cohérent avec la distribution des données. Nous avons choisi

$$(p_{10},p_{20},\lambda_0,\alpha_0,\beta_0)=(0.5;0.5;1;10;2)$$

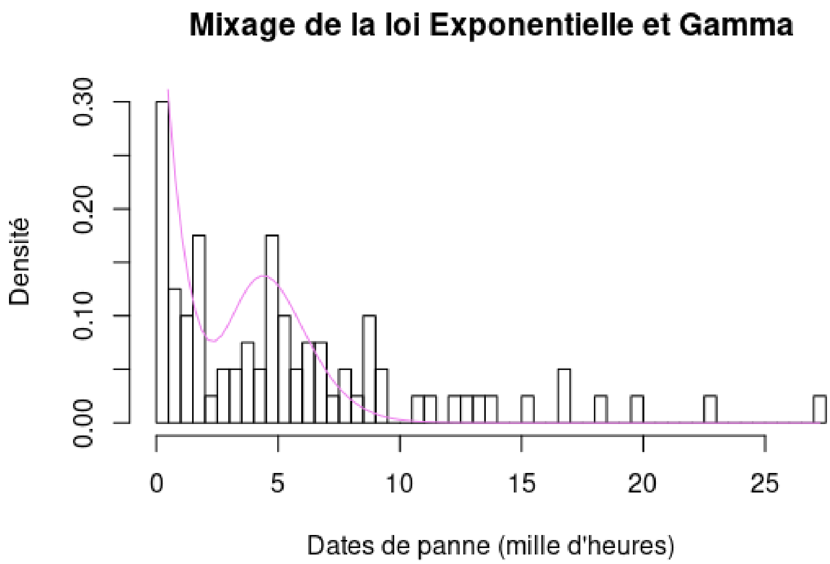


FIGURE 2 – Mixage de la loi Exponentielle et Gamma : paramètres initiaux

Après l'utilisation de l'algorithme EM, nous avons obtenu le résultat :

$$(p_1, p_2, \lambda, \alpha, \beta) = (0.2194518; 0.7805482; 1.56738; 1.665659; 0.2332427)$$

D'où nous traçons la fonction de densité f_θ trouvé (figure 3) et réalisons un test de Kolmogorov-Smirnov qui donne $p-value = 0,9663111$ signifiant $96,63\%$ de nous tromper si nous rejetons ce modèle. Nous l'acceptons alors, quoiqu'il ne génère pas 2 sommets comme la remarque initiale. Le code est trouvable à l'annexe 3.3.

1.3 La politique de maintenance basée sur l'âge

Avec la fonction f_θ trouvée, nous construirerons la politique optimale.
Nous avons par définition : $S = \min(X, t_0)$.
Autrement dit, $S = X\mathbb{I}_{\{X<t_0\}} + t_0\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}$.
Traduit au coût : $C(S) = C_c\mathbb{I}_{\{X<t_0\}} + C_p\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}$, avec C_c, C_p les coûts de maintenances correctives et préventives réspectivement.
Le coût moyen :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C(S)) &= c_c\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{X<t_0\}}\right) + c_p\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}\right)\\ &= c_cP(X<t_0) + c_pP(X\geqslant t_0)\\ &= c_cF_\theta(t_0) + c_p(1-F_\theta(t_0))\\ &= (c_c - c_p)F_\theta(t_0) + c_p \qquad (9)\end{aligned}$$

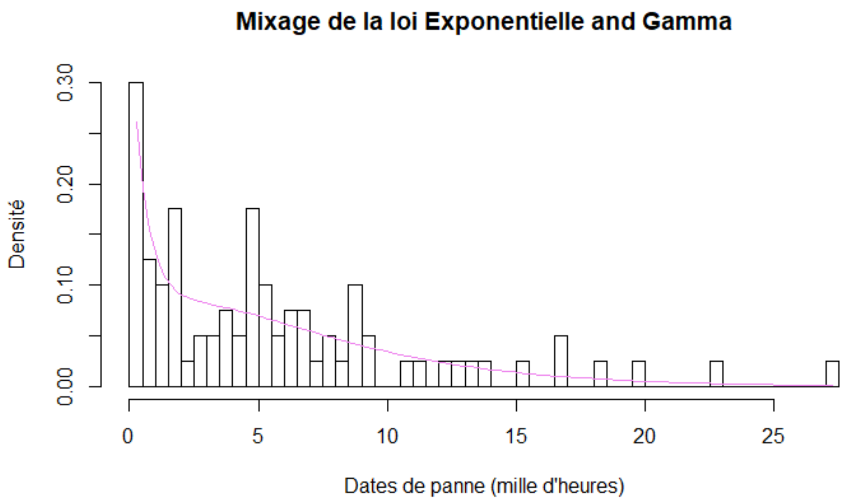


Figure 3 – Mixage de la loi Exponentielle et Gamma : paramètres finaux

La durée moyenne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}\left(X\mathbb{I}_{\{X<t_0\}}\right) + t_0\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{X\geqslant t_0\}}\right) \\
&= \int_0^{t_0} x f_\theta(x)\,dx + t_0 P(X \geqslant t_0) \\
&= xF_\theta(x)\,|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} F_\theta(x)\,dx + t_0\left(1 - F_\theta(t_0)\right) \\
&= t_0 - \int_0^{t_0} F_\theta(x)\,dx \qquad (10)
\end{aligned}$$

De (9) et (10), nous détaillons le coût moyen sur une durée de temps (1) :

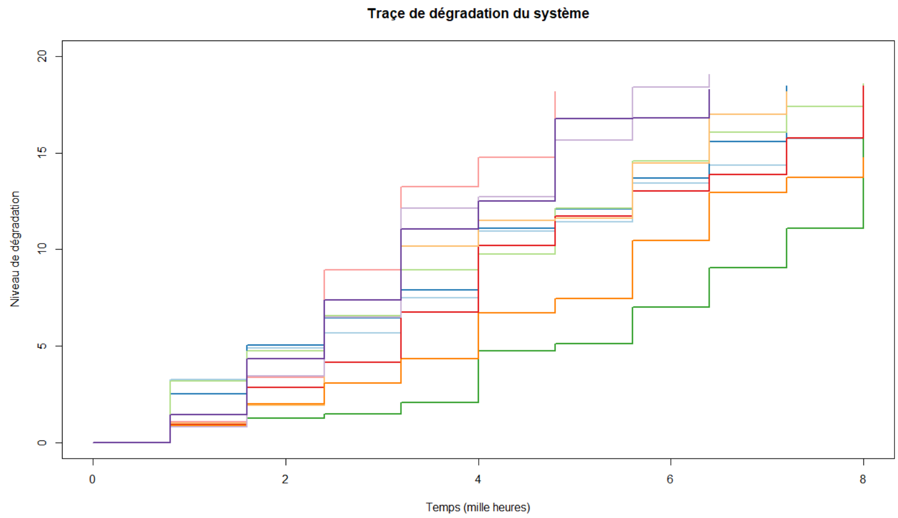
$$\mathbb{E}(C) = \frac{\mathbb{E}(C(S))}{\mathbb{E}(S)} = \frac{(c_c - c_p)F_\theta(t_0) + c_p}{t_0 - \int_0^{t_0} F_\theta(x)\,dx} \qquad (11)$$

L'annexe (3.4) montrer comment chercher l'optimum numériquement. La valeur minimum est $t_0 = 27,29639$ (mille heures), correspondant à un coût moyen de $210,6402$. Nous constatons que t_0^{min} est très proche du maximum de durée de vie, indiquant que l'optimisation de t_0 est inutile car le système ne viellit pas.

2 Maintenance basée sur dégradation

2.1 Rappel

En observant multiples systèmes identiques, nous effectuons des mesures de dégradation sur des intervalles de temps réguliers tout au long de leurs durée de vie.



La valeur limite de dégradation est $L = 20$. C'est-à-dire lorsque le niveau de dégradation dépasse L, le système tombe en panne et nous ne pourrons plus le mesurer.

On souhaite de mettre en place une politique de maintenance conditionnelle, basée sur un seuil M inférieur à L et l'intervalle de temps ΔT entre les inspections. Appellons X_t le niveau de dégradation à l'instant t (instant d'une inspection).

— Si $X_t < M$, nous laissons le système tel quel.
— Si $M \leq X_t < L$, un remplacement préventif est réalisé au coût c_p. Et puis X_t est remis à 0.
— Si $X_t \geq L$, un remplacement correctif est fait au coût c_c. Et puis X_t est remis à 0.

Le but est minimiser le coût moyen sur une durée de temps (1) en bien choisissant le seuil M et l'intervalle d'inspection ΔT.

2.2 Modéliser la dégradation du système

Soient les données de `DegradLevel_2.csv`, nous traçons leurs processus de dégrader (figure (2.2)). (Les annexes (3.5) et (3.6))

Comme les temps d'inspection sont de l'ordre millier, il vaudrait de les diviser par un scalaire (par example, $scale = 1000$) afin d'assurer la précision de calcul numérique.

Nous voyons les accroissements positifs, suggérant un modèle de processus Gamma.

Soit $X(t)$ la variable aléatoire de dégradation du système. Supposons que $X(t) - X(s) \sim \Gamma(a(t-s), b) \, \forall t > s > 0$. Nous allons estimer les paramètres a, b en modélisant la distribution des incréments entre deux moments successifs.

Fixons $t - s = \delta = 0.8$, car les mesures donnés sont effectués au bout de chaque intervalle de 0.8.

L'histogramme des incréments :

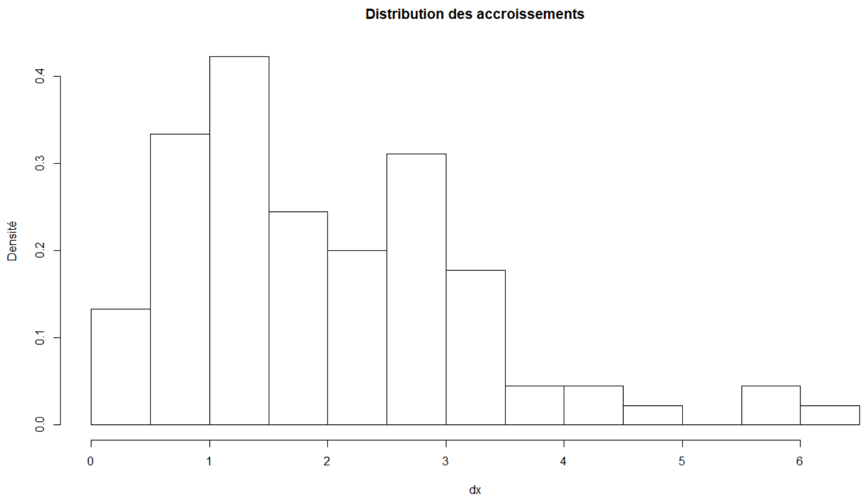


FIGURE 4 – Histogramme des incréments de l'intervalle $\delta = 0.8$

A l'aide du librairie MASS : $(a;b) = \left(\frac{\alpha}{\delta};\beta\right) = (2.843101; 1.140354)$ où (α,β) sont les paramètres estimés par MASS. Le code est mis à l'annexe (3.7).

Un test rapide de Kolmogorov-Smirnov nous donne $p - value = 0.8651934$, indiquant le modèle est acceptable.

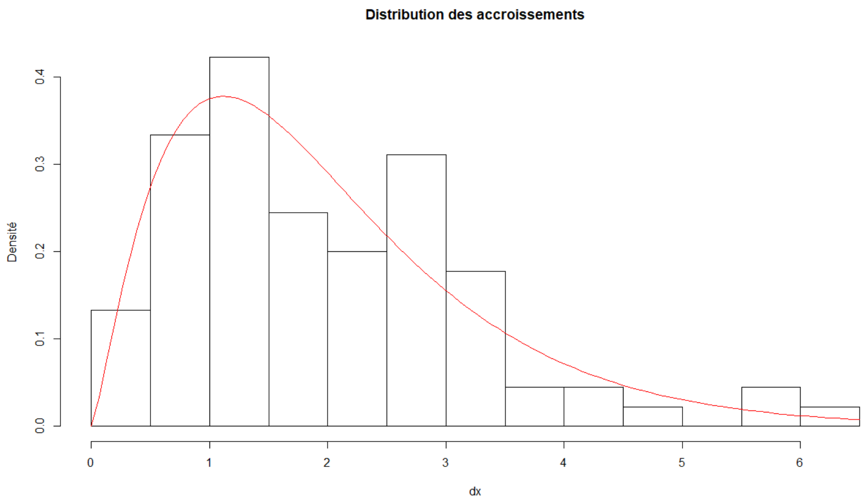


FIGURE 5 – Histogramme et la courbe de densité estimé des incréments de l'intervalle $\delta = 0.8$

D'autant plus, si nous refaisons les calculs ci-dessus avec $\delta = 1.6, 2.4, 3.2, etc.$, nous voyons les valeurs de a et b ne varient pas trop. Alors, nous choisissons le couple (a,b) avec p le plus grand. (δ trop grand réduira nombreux de données, résultant moins précision)

δ	a	b	p
0.8	2.8431009	1.1403540	0.8651934
1.6	3.0207719	1.2091646	0.9919939
2.4	3.0187497	1.1907719	0.1279252
3.2	2.997763	1.185547	0.300610
4.0	3.5036580	1.4061063	0.6307951

TABLE 1 – Calcul (a, b) avec différents δ

Au final, $X(t) - X(s) \sim \Gamma(a(t-s), b) \forall t > s > 0$ avec

$$(a, b) = (3.0207719; 1.2091646)$$

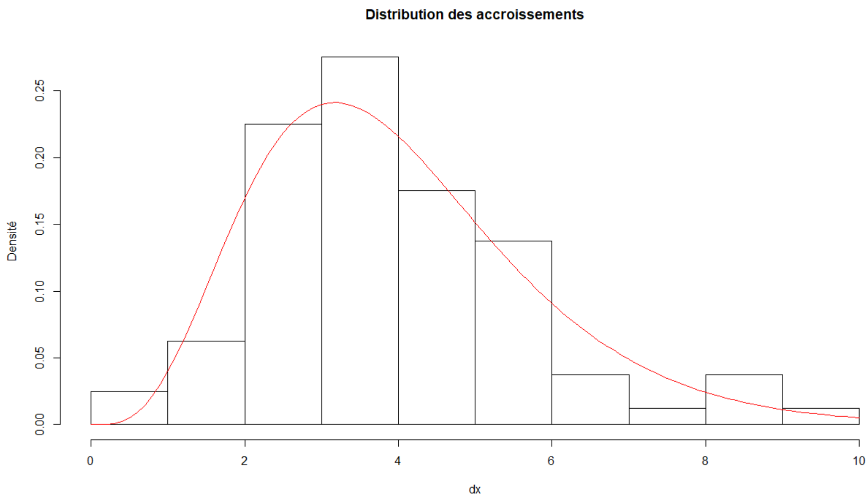


FIGURE 6 – Histogramme et la courbe de densité estimé des incréments de l'intervalle $\delta = 1.6$

2.3 La politique de maintenance basée sur dégradation

Cette politique, outre que $c_c = 1200$ et $c_p = 800$, introduit ainsi le coût d'inspection $c_i = 10$.

Soit S la variable aléatoire représentant la date de remplacement ; $C(S)$ est le coût de maintenance cumulé à l'instant S, et $N(S)$ le nombre d'inspections depuis la dernière remplacement jusqu'à S.

$$C(S) = c_i N(S) + c_p \mathbb{I}_{\{L > X_t \geqslant M\}} + c_c \mathbb{I}_{\{X_t \geqslant L\}} \tag{12}$$

3 Annexe

3.1 L'importation de données de pannes

```
pannes = read.csv(
    file = "FailureTimes_5.csv",
    header = TRUE,
    sep = ",",
    dec = ".",
    colClasses = c("NULL", NA)
)
scale = 1000
data = pannes$Heures / scale
N = length(data)
```

3.2 Le premier histogramme de distribution de pannes

```
hist(
    data,
    breaks = 40,
    probability = TRUE,
    xlab = "Date de pannnes (mille heures)",
    ylab = "Densité",
    main = "Premier histogramme"
)
```

3.3 Estimer le mixage de la loi Exponentielle et Gamma

```
# Fitting mixture of Exp and Gamma
# Algorithm EM
# Initialisation
k = 2 # number of components
p = c(0.5, 0.5)
lambda = 1
alpha = 10
beta = 2
f = list(
    '1' = function(x) {
        dexp(x, rate = lambda)
    },
    '2' = function(x) {
        dgamma(x, shape = alpha, rate = beta)
    }
)
# Illustration initial
f_theta = function(x) {
  p[[1]] * f[[1]](x) + p[[2]] * f[[2]](x)
}
h_theta = hist(
  data,
  breaks = 40,
  probability = TRUE,
  main = "Mixage de la loi Exponentielle et Gamma",
  xlab = "Dates de panne (mille d'heures)",
  ylab = "Densité"
)
curve(
  f_theta(x),
  add = TRUE,
  col = "violet",
  from = min(h_theta$mids),
  to = max(h_theta$mids)
)
epsilon = list(
    alpha = 1e-4,
    theta = 1e-4
```

```
)
zeta = matrix(
    0,
    nrow = k,
    ncol = N
)
# Norm
normVec = function(x) sqrt(sum(x^2))
# New value
p_new = p
alpha_new = alpha
beta_new = beta
lambda_new = lambda
repeat {
    ## E Step
    # Calculate each proba
    for (l in 1:k) {
        zeta[l,] = p[[l]] * f[[l]](data)
    }
    # Normalize proba
    zeta = t(t(zeta) / rowSums(t(zeta)))
    ## M step
    # Lambda
    lambda_new = sum(zeta[1,]) / sum(zeta[1,] * data)
    # Alpha
    c = log(sum(zeta[2,] * data) / sum(zeta[2,])) - sum(zeta[2,] * log(data)) / sum(zeta[2,])
    alpha_new = 0.5 / c
    alpha_temp = 0
    repeat {
        alpha_temp = 1 / (1 / alpha_new + (log(alpha_new) - digamma(alpha_new) - c) / (alpha_new^2 * (1 / alpha_new - trigamma(alpha_new))))
        if (abs(alpha_temp - alpha_new) < epsilon$alpha) {
            break
        } else {
            alpha_new = alpha_temp
        }
    }
    alpha_new = alpha_temp
    # Beta
    beta_new = alpha_new * sum(zeta[2,]) / sum(zeta[2,] * data)
    # P
    for (l in 1:k) {
        p_new[[l]] = mean(zeta[l,])
    }
    ## Evaluation
    if (normVec(c(alpha, beta, lambda, p[[1]], p[[2]]) - c(alpha_new, beta_new, lambda_new, p_new[[1]], p_new[[2]])) < epsilon$theta) {
        break
    } else {
        alpha = alpha_new
        beta = beta_new
        lambda = lambda_new
        p = p_new
    }
}
# Final value update
alpha = alpha_new
beta = beta_new
lambda = lambda_new
p = p_new
# Illustration final
f_theta = function(x) {
  p[[1]] * f[[1]](x) + p[[2]] * f[[2]](x)
}
h_theta = hist(
  data,
  breaks = 40,
  probability = TRUE,
  main = "Mixage de la loi Exponentielle et Gamma",
  xlab = "Dates de panne (mille d'heures)",
  ylab = "Densité"
)
curve(
```

```
  f_theta(x),
  add = TRUE,
  col = "violet",
  from = min(h_theta$mids),
  to = max(h_theta$mids)
)
# Kolmogorov-Smirnov test
F_theta = function(x) {
    p[[1]] * pexp(x, rate = lambda) + p[[2]] * pgamma(x, shape = alpha, rate
         = beta)
}
test = ks.test(data, F_theta, exact = TRUE)
```

3.4 Optimiser le coût moyenne sur une durée de temps

```
# Finding optimal t_0
# Given F_theta
c_c = 1200
c_p = 800
E_C_S = function(x) {
    (c_c - c_p) * F_theta(x) + c_p
}
E_S = function(x) {
    x - integrate(F_theta,0,x)$value
}
E_C = function(x) {
    E_C_S(x) / E_S(x)
}
o = optimize(
    E_C,
    c(min(data),max(data)),
    tol = 1e-5
)
d = seq(
        min(data),
        max(data),
        0.01
    )
plot(
    d,
    lapply(
        d,
        E_C
    ),
    main = "Coût moyenne sur une durée de temps",
    xlab = "t_0",
    ylab = "",
    type = "l"
)
```

3.5 Importer les valeurs de dégradation

```
# Import degradation
table = read.csv(
    file = "DegradLevel_2.csv",
    header = TRUE,
    sep = ",",
    dec = "."
)
scale = 1000
time = c(0, table$Temps / scale)
nbProcess = length(table) - 2
process = matrix(
    ,
    nrow = nbProcess,
    ncol = 1 + length(table[[3]])
)
for (i in 1:nbProcess) {
```

```
    process[i,] = c(0, table[[i + 2]]) # degrad = 0 at t = 0
}
```

3.6 Premiers traçes de dégradation

```
# Plot process curves
L = 20
# Colormap
library(RColorBrewer)
color = brewer.pal(nbProcess, "Paired")
# First process
plot(
    NULL,
    type = "n",
    main = "Traçe de dégradation du système",
    xlim = c(min(time), max(time)),
    xlab = "Temps (mille heures)",
    ylim = c(0, L),
    ylab = "Niveau de dégradation"
)
for (i in 1:nbProcess) {
    lines(
        x = time,
        y = process[i,],
        type = "s",
        col = color[[i]],
        lwd = 2
    )
}
```

3.7 Estimation de paramètres de dégradations

```
## Estimate parameters for process
lag = 2
delta = 0.8 * lag
d = t(diff(t(process), lag))
# Concatenate into one vector
increments = vector(
    mode = "numeric",
    length = length(d)
)
n = dim(d)[[1]]
l = dim(d)[[2]]
for (i in 1:n) {
    increments[((i - 1) * l + 1):(i * l)] = d[i,]
}
# Filter out NA values
increments = increments[!is.na(increments)]
# Histogram
hiso_degrad = hist(
    increments,
    breaks = 10,
    probability = TRUE,
    main = "Distribution des accroissements",
    xlab = "dx",
    ylab = "Densité"
)
# Estimate gamma distribution
library(MASS)
estim = fitdistr(
    increments,
    dgamma,
    list(
        shape = 1,
        rate = 1
    )
)
# Draw estimated density
```

```
a = estim$estimate[[1]] / delta
b = estim$estimate[[2]]
curve(
    dgamma(x, a * delta ,b),
    add = TRUE,
    col = "red"
)
# Kolmogorov-Smirnov test
test = ks.test(increments, "pgamma", a * delta, b)
c(delta, a, b, test$p.value)
```

Références

[1] Minka, Thomas P. (2002). "Estimating a Gamma distribution"
https://tminka.github.io/papers/minka-gamma.pdf