

Zadanie 45. Test

Adrian Rupala

28 maja 2018

Pewien student rozwiązując test jednokrotnego wyboru, w którym każdemu pytaniu przyporządkowano pięć odpowiedzi (w tym dokładnie jedną prawidłową), zna poprawne odpowiedzi lub zgaduje. Niech prawdopodobieństwo tego, że zna poprawną odpowiedź na dane pytanie wynosi $\frac{1}{2}$. Czyli na połowę pytań odpowiada „strzelając”. Ponieważ jest pięć odpowiedzi do wyboru, szansa, że odgadnie prawidłową odpowiedź wynosi $\frac{1}{5}$.

Jakie jest prawdopodobieństwo warunkowe tego, że student znał odpowiedź na dane pytanie, jeśli nie popełnił w tym pytaniu błędu?

Twierdzenie Bayesa to twierdzenie teorii prawdopodobieństwa, wiążące prawdopodobieństwa warunkowe dwóch zdarzeń warunkujących się nawzajem, sformułowane przez Thomasa Bayesa.

W podstawowej formie twierdzenie Bayesa mówi, że:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}, \text{ gdzie: } P(B) = \sum_{i \in J} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Gdzie A i B są zdarzeniami oraz $P(B) > 0$, przy czym:

- $P(A|B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe (prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A , o ile zajdzie zdarzenie B).
- $P(B|A)$ oznacza prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B , o ile zajdzie zdarzenie A .

Z treści zadania można odczytać następujące dane:

- A_1 - uczeń zna odpowiedź,
- A_2 - uczeń nie zna odpowiedzi,
- B - uczeń nie popełnił błędu.

Podstawiając dane do wzoru Bayesa:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)}$$

Z treści zadania wynika:

- $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$,
- $P(B|A_1) = 1$,
- $P(B|A_2) = \frac{1}{5}$.

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}$$

$$P(A_1|B) = \frac{1}{2(\frac{1}{5} + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2(\frac{1}{10} + \frac{1}{2})}$$

$$P(A_1|B) = \frac{1}{2 \cdot \frac{5+1}{10}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{6}{10}}$$

$$P(A_1|B) = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}}$$

$$P(A_1|B) = \frac{5}{2 \cdot 3}$$

$$P(A_1|B) = \frac{5}{6}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe tego, że student znał odpowiedź na pytanie, jeśli nie popełnił błędu, wynosi $\frac{5}{6}$.

Dziękuję za uwagę!