

Sprawozdanie 1

Zadanie 24. Przedstaw liczbę 100 jako sumę dwóch liczb całkowitych dodatnich, których iloczyn jest maksymalny

Adrian Rupala

8 maja 2018

Spis treści

1	Teoria	1
2	Rozwiązanie	1
3	Odpowiedź	2

1. Teoria

Każdy problem matematyczny należy rozpocząć od analizy treści pod kątem określenia sposobu rozwiązania. Zadanie to jest jednym z przykładów zadania optymalizacyjnego. Z treści wynika, że musimy odszukać pewne parametry, które są uwarunkowane inną zależną maksymalną. Schemat rozwiązania takich zadań wygląda następująco:

1. Utworzenie równania bazującego na treści zadania (zależności parametrów do wartości podanej).
2. Wyznaczenie wzoru funkcji $f(x)$ wynikającej z treści zadania.
3. Obliczenie pochodnej funkcji $f(x)$, którą stworzyliśmy.
4. Obliczenie ekstremum funkcji $f(x)$.
5. Wskazanie ekstremum, dla którego funkcja $f(x)$ osiąga szukaną wartość oraz w razie konieczności obliczenie drugiej szukanej wartości.

2. Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że potrzebujemy zdefiniować dwie liczby naturalne dodane, w przypadku tego rozwiązania zostały one zdefiniowane jako x oraz y . Ich suma musi być równa 100. Jesteśmy również w stanie za pomocą powstałego równania wyznaczyć jedną z wartości niewiadomych.

$$x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

Kolejnym krokiem jest utworzenie funkcji, która będzie opisywała stosunek dwóch liczb, których iloczyn jest maksymalny, podstawienie do niego obliczonej wartości y , którą obliczyliśmy przekształcając powyższe równanie.

$$f(x) = x \cdot y = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$$

Następnie, aby otrzymać wynik należy obliczyć pochodną funkcji pierwszego stopnia. Otrzymane w ten sposób równanie przyrównujemy do zera.

$$\frac{\partial}{\partial x}(100x - x^2) = 0$$

$$100 - 2x = 0$$

$$2x = 100$$

$$x = 50$$

W ten sposób obliczyliśmy wartość pierwszej szukanej przez nas liczby. Aby obliczyć kolejną wystarczy obliczoną liczbę wstawić do pierwszego wzoru opisującego stosunek dwóch liczb do liczby, jaką chcemy przedstawić.

$$y = 100 - 50 \Rightarrow y = 50$$

W ten sposób obliczyliśmy poszukiwane przez nas dwie maksymalne liczby naturalne, których iloczyn jest maksymalny.

Aby określić czy otrzymana przez nas liczba to maksimum lub minimum funkcji należy obliczyć miejsca, w których parabola przecina oś x oraz narysować parabolę dla równania funkcji $100x - x^2 = 0$ obliczonego wcześniej.

Wyciągając wspólny czynnik przed nawias otrzymamy równanie w postaci:

$$100x - x^2 = 0 \Rightarrow -x(x - 100) = 0$$

Następnie dzieląc obustronnie równanie przez -1 :

$$x(x - 100) = 0$$

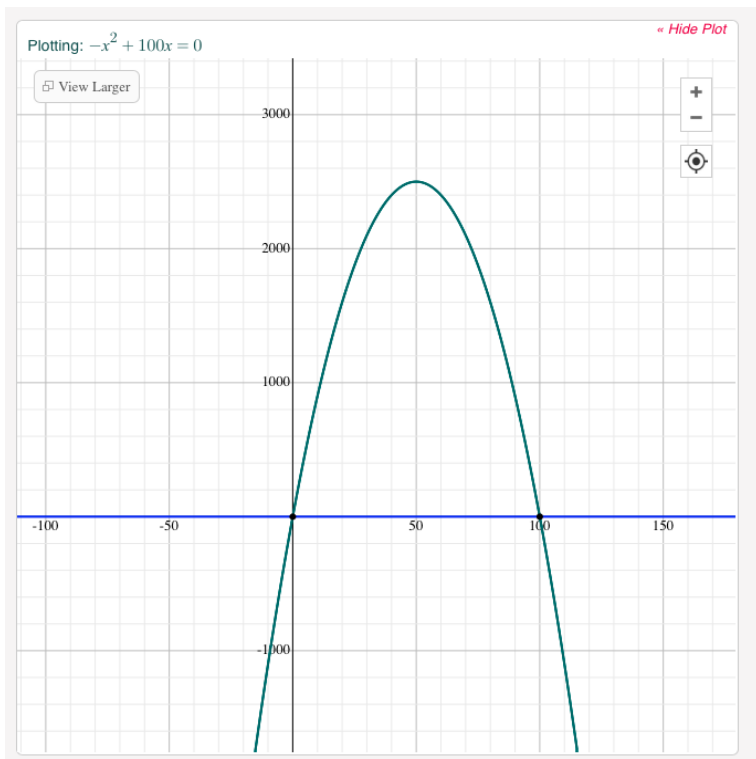
Powyższe równanie zachodzi gdy:
 $x - 100 = 0$ oraz $x = 0$

Dodając 100 obustronnie otrzymamy dwa miejsca, w których ramiona paraboli będą przecinały oś x :
 $x = 100$ oraz $x = 0$

Ramiona paraboli skierowane są w dół, ponieważ pierwszy współczynnik równania kwadratowego jest liczbą ujemną i wynosi -1 .

Z rysunku 1 wynika, że punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego liczba 50 jest lokalnym maksimum funkcji.

Wykres funkcji wygląda następująco:



Rys. 1. Wykres funkcji $100x - x^2 = 0$

3. Odpowiedź

Szukane przez nas dwie wartości dla liczby 100 to $x = 50$ oraz $y = 50$.