Sprawozdanie 3

Pewien student rozwiązując test jednokrotnego wyboru, w którym każdemu pytaniu przyporządkowano pięć odpowiedzi (w tym dokładnie jedną prawidłową), zna poprawne odpowiedzi lub zgaduje. Niech prawdopodobieństwo tego, że zna poprawną odpowiedź na dane pytanie wynosi $\frac{1}{2}$. Czyli na połowę pytań odpowiada „strzelając". Ponieważ jest pięć odpowiedzi do wyboru, szansa, że odgadnie prawidłową odpowiedź wynosi $\frac{1}{5}$.

Jakie jest prawdopodobieństwo warunkowe tego, że student znał odpowiedź na dane pytanie, jeśli nie popełnił w tym pytaniu błędu?

Adrian Rupala

19 maja 2018

Spis treści

1. Teoria

Celem zadania jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego. Twierdzenie Bayesa jest bezpośrednio związane z obliczaniem prawdopodobieństwa warunkowego i ma ono na celu jego korygowanie na podstawie uzyskanych później informacje o zachodzących zdarzeniach. W tym zadaniu mamy również do czynienia z dwoma zdarzeniami zachodzącymi po sobie. Pierwsze z nich to prawidłowa odpowiedź na pytanie, kolejne to niepopełnienie błędu przez uczenia.

W podstawowej formie twierdzenie Bayesa mówi, że:
$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_i)}{P(B)}$, gdzie: $P(B) = \sum_{i \in j} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$

Kiedy A i B są zdarzeniami oraz $P(B) > 0$, przy czym:

- $P(A|B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe (prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A o ile zajdzie zdarzenie B).
- $P(B|A)$ oznacza prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B, o ile zajdzie zdarzenie A.

2. Rozwiązanie

Z treści zadania można odczytać następujące dane:

- A_1 - uczeń zna odpowiedź,
- A_2 - uczeń nie zna odpowiedzi,
- B - uczeń nie popełnił błędu.

Szukaną przez nas wartością jest prawdopodobieństwo zakładające, że uczeń zna odpowiedź, oraz, że uczeń nie popełnił błędu $P(A_1|B)$, następnie podstawiając do wzoru Bayesa otrzymujemy równanie:
$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)}$

Z treści zadania wynika, że

- $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$,
- $P(B|A_1) = 1$,
- $P(B|A_2) = \frac{1}{5}$.

Następnie podstawiając wartości do wzoru można otrzymać następujące równanie:
$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}$

Upraszczając równanie:
$P(A_1|B) = \frac{1}{2(\frac{\frac{1}{5}}{2} + \frac{1}{2})} \Rightarrow P(A_1|B) = \frac{1}{2(\frac{1}{10} + \frac{1}{2})}$

Następnie można sprowadzić ułamki w mianowniku do wspólnego mianownika:
$P(A_1|B) = \frac{1}{2 \cdot \frac{5+1}{10}} \Rightarrow P(A_1|B) = \frac{1}{2 \cdot \frac{6}{10}}$

Kolejnym krokiem jest przeniesienie dwójki do licznika oraz uproszczenie postaci ułamka znajdującego się w mianowniku:
$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$

Mnożąc licznik przez odwrotność mianownika, otrzymamy równanie postaci:
$P(A_1|B) = \frac{5}{2 \cdot 3} \Rightarrow P(A_1|B) = \frac{5}{6}$

3. Odpowiedź

Prawdopodobieństwo warunkowe tego, że student znał odpowiedź na pytanie, jeśli nie popełnił błędu, wynosi $\frac{5}{6}$.