Sprawozdanie 1

Zadanie 24. Przedstaw liczbę 100 jako sumę dwóch liczb całkowitych dodatnich, których iloczyn jest maksymalny

Adrian Rupala

19 maja 2018

Spis treści

1. Teoria

Każdy problem matematyczny należy rozpocząć od analizy treści pod kątem określenia sposobu rozwiązania. Zadanie to jest jednym z przykładów zadania optymalizacyjnego. Z treści wynika, że musimy odszukać pewne parametry, które są uwarunkowane inną zależną maksymalną. Schemat rozwiązania takich zadań wygląda następująco:

1. Utworzenie równania bazującego na treści zadania (zależności parametrów do wartości podanej).
2. Wyznaczenie wzoru funkcji $f(x)$ wynikającej z treści zadania.
3. Obliczenie pochodnej funkcji $f(x)$, którą stworzyliśmy.
4. Obliczenie ekstremum funkcji $f(x)$.
5. Wskazanie ekstremum, dla którego funkcja $f(x)$ osiąga szukaną wartość oraz w razie konieczności obliczenie drugiej szukanej wartości.

2. Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że potrzebujemy zdefiniować dwie liczby naturalne dodanie, w przypadku tego rozwiązania zostały one zdefiniowane jako x oraz y. Ich suma musi być równa 100. Jesteśmy również w stanie za pomocą powstałego równania wyznaczyć jedną z wartości niewiadomych.
$x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

Kolejnym krokiem jest utworzenie funkcji, która będzie opisywała stosunek dwóch liczb, których iloczyn jest maksymalny, podstawienie do niego obliczonej wartości y, którą obliczyliśmy przekształcając powyższe równanie.
$f(x) = x \cdot y = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$

Następnie, aby otrzymać wynik należy obliczyć pochodną funkcji pierwszego stopnia. Otrzymane w ten sposób równanie przyrównujemy do zera.
$\frac{\partial}{\partial x}(100x - x^2) = 0$
$100 - 2x = 0$
$2x = 100$
$x = 50$

W ten sposób obliczyliśmy wartość pierwszej szukanej przez nas liczby. Aby obliczyć kolejną wystarczy obliczoną liczbę wstawić do pierwszego wzoru opisującego stosunek dwóch liczb do liczby, jaką chcemy przedstawić.
$y = 50 - 100 \Rightarrow y = 50$

W ten sposób obliczyliśmy poszukiwane przez nas dwie maksymalne liczby naturalne, których iloczyn jest maksymalny.

Aby określić czy otrzymana przez nas liczba to maksimum lub minimum funkcji należy obliczyć miejsca, w których parabola przecina oś x oraz narysować parabolę dla równania funkcji $100x - x^2 = 0$ obliczonego wcześniej.

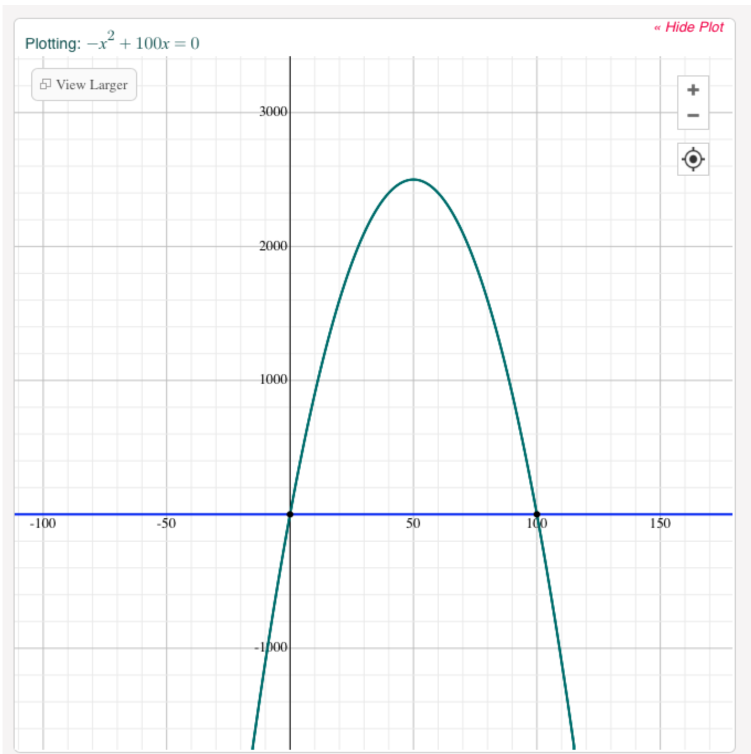
Wyciągając wspólny czynnik przed nawias otrzymamy równanie w postaci:
$100x - x^2 = 0 \Rightarrow -x(x - 100) = 0$

Następnie dzieląc obustronnie równanie przez -1:
$x(x - 100) = 0$

Powyższe równanie zachodzi gdy:
$x - 100 = 0$ oraz $x = 0$

Dodając 100 obustronnie otrzymamy dwa miejsca, w których ramiona paraboli będą przecinały oś x:
$x = 100$ oraz $x = 0$

Ramiona paraboli skierowane są w dół, ponieważ pierwszy współczynnik równania kwadratowego jest liczbą ujemną i wynosi -1.
Z rysunku 1 wynika, że punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego liczba 50 jest lokalnym maksimum funkcji.
Wykres funkcji wygląda następująco:



Rys. 1. Wykres funkcji $100x - x^2 = 0$

3. Odpowiedź

Szukane przez nas dwie wartości dla liczby 100 to $x = 50$ oraz $y = 50$.