CHAPITRE 08 : PRODUIT SCALAIRE

I. Définition et propriétés

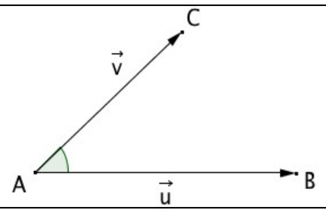
1) Norme d'un vecteur

Définition :
Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2) Définition du produit scalaire

Définition :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, dans le cas contraire.



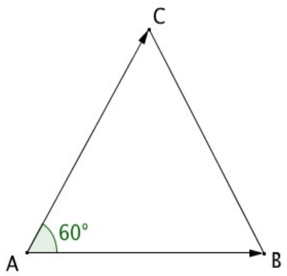
Remarques :
→ $\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$"
→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC}$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Soit un triangle équilatéral ABC de côté 2.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC}$
$= 2 \times 2 \times \cos 60°$
$= 4 \times 0{,}5$
$= 2$



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démonstration :
On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos\big(-(\vec{v}\,;\,\vec{u})\big)$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{v}\,;\,\vec{u})$
$= \vec{v}.\vec{u}$

4) Opérations sur les produits scalaires

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ 2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$, avec *k* un nombre réel.

5) Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1)$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :
$(\vec{u} - \vec{v})^2$=$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$
$= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$
$= \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

II. Produit scalaire et norme

1) Propriétés

Soit un vecteur $\vec{u}$, on a :
$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$
et $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$
On a ainsi :$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Démonstration de la première formule :
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2$
$= \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

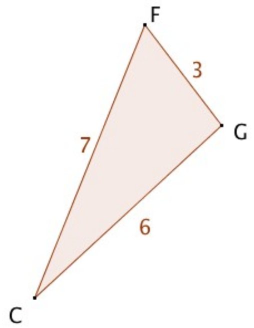
Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right)$
$= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

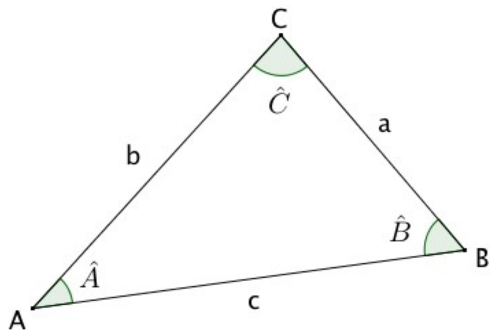
On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.
$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(CG^2 + CF^2 - GF^2)$
$= \frac{1}{2}(6^2 + 7^2 - 3^2)$
= 38



2) Théorème d'Al Kashi

Théorème :
Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



Démonstration au programme :

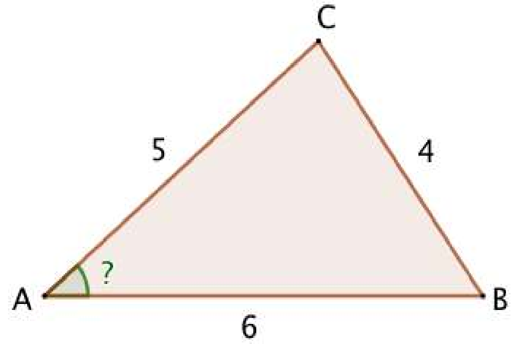
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\hat{A} = bc\cos\hat{A}$
Mais aussi
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$
Donc :$\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc\cos\hat{A}$
Soit :$b^2 + c^2 - a^2 = 2\,bc\cos\hat{A}$
Soit encore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos\widehat{BAC}$
$16 = 36 + 25 - 60\cos\widehat{BAC}$
$60\cos\widehat{BAC} = 36 + 25 - 16$
$60\cos\widehat{BAC} = 45$
$\cos\widehat{BAC} = \frac{45}{60}$
$\cos\widehat{BAC} = \frac{3}{4}$
$\widehat{BAC} \approx 41°$



III. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

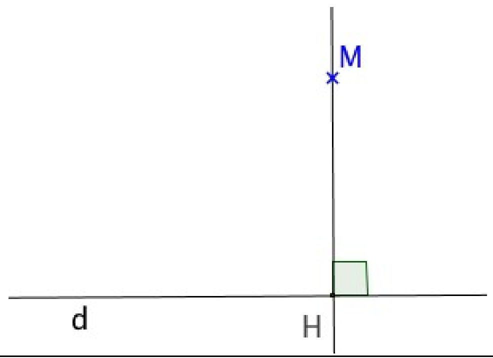
Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration :

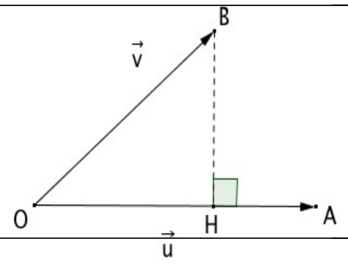
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.
$\vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2) Projection orthogonale

Définition :
Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



Démonstration :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB})$
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ (car les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux et donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$)

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

Soit un carré ABCD de côté *c*.
Calculer, en fonction de *c*, les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

a) Par projection, on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$

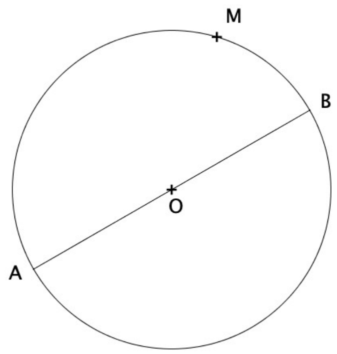
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -c^2$

3) Caractérisation d'un cercle avec le produit scalaire

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

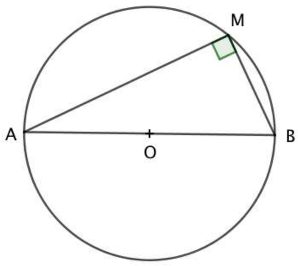
Démonstration au programme :



Soit O le milieu du segment [AB].
On a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = 0$
Comme O est le milieu de [AB], on a :$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$
Soit :
$\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0$ car $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$

Soit : $MO^2 = OA^2$
Soit encore $MO = OA$.
M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.



Justification:
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et$\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

IV. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives$(x\,;y)$ et$(x'\,;y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$
$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}$
$= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\|\vec{\jmath}\|^2$
$= xx' + yy'$

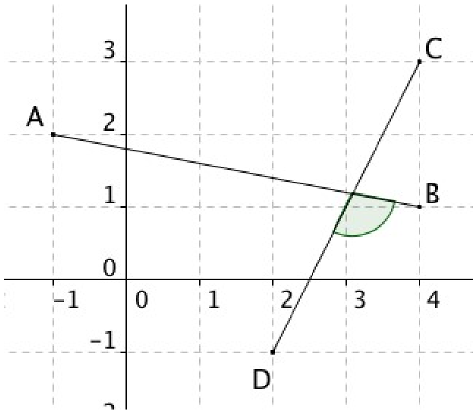
car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé,
et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Soit $\vec{u}(5\,;\,-4)$ et $\vec{v}(-3\,;\,7)$ deux vecteurs.
$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Calculer la mesure de l'angle$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.



On a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$
$= \sqrt{(4-(-1))^2 + (2-1)^2} \times \sqrt{(4-2)^2 + (3-(-1))^2} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$
$= \sqrt{520} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$
$= 2\sqrt{130} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$

On a également :$\overrightarrow{AB}(5\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2\ ;\ -4)$, donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ = 5 x (–2) + (–1) x (–4) = –6
On a ainsi : $2\sqrt{130} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = -6$
Et donc : $\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$
Et : $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) \approx 105{,}3°$