

正螺面上的圆柱螺线

陶雅, 张量

(安徽师范大学 数学与统计学院, 芜湖 241000)

摘要 本文主要证明了正螺面上与其同轴方向的一般螺线必为圆柱螺线, 确定了正螺面上所有圆柱螺线的参数表示. 此外, 通过示例说明了正螺面与圆柱面交线为圆柱螺线的条件.

关键词 正螺面; 圆柱螺线; 圆柱面

中图分类号 O186.11

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2024)01-0033-04

Circular Helices on a Helicoid

TAO Ya and ZHANG Liang

(School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu 241000)

Abstract In this paper, we prove that the general helix on a helicoid with the same axis direction must be a circular helix, and we determine the parametrization of all circular helices with the same axis direction on a helicoid. In addition, the condition that the intersection of the helicoid and the cylinder is a circular helix is illustrated by examples.

Keywords helicoid, circular helix, cylinder

1 引言

三维欧氏空间中一条曲率恒不为零的曲线称为一般螺线, 如果其切向量与某一固定方向成固定角^[1], 一般地, 我们称固定方向为一般螺线的轴方向, 固定角为一般螺线的倾斜角. 一般螺线的特征在于其挠率与曲率之比为常数. 熟知的圆柱螺线便是一种重要的一般螺线, 其曲率与挠率均为常数^[2]. 另一方面, 正螺面是直纹面中除平面以外仅有的极小曲面, 该曲面有两族渐近线, 其中一族为直母线, 另一族为圆柱螺线.

本文对正螺面上的一般螺线进行研究, 首先证明了正螺面上与其同轴方向的一般螺线必是圆柱螺线, 给出了正螺面上所有圆柱螺线的参数表示. 进

一步, 还得到了正螺面与圆柱面交线为圆柱螺线的充要条件. 对于本文中的主要结果, 都给出了具体例子加以验证, 并利用数学软件 Maple 绘制了相应的图形.

2 预备知识

首先回顾三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 中曲线的一些基本事实.

定义 2.1 设 $\alpha(t)$, $t \in (a, b)$ 为 C^∞ 参数曲线, 若对任意的 $t \in (a, b)$ 均有 $\alpha'(t) \neq 0$, 则称 $\alpha(t)$ 为正则参数曲线.

设 $\alpha(s)$ 是 \mathbb{R}^3 中以弧长为参数且曲率 κ 恒不为零的 C^∞ 曲线, $\{\alpha, T, N, B\}$ 为其 Frenet 标架^[3], 这里

$$T = \alpha', N = \frac{T'}{\kappa}, B = T \wedge N,$$

分别为 α 的切向量, 主法向量和副法向量. 关于 Frenet 标架, 有如下经典的 Frenet 公式

$$T' = \kappa N, N' = -\kappa T + \tau B, B' = -\tau N,$$

其中 τ 为 α 的挠率.

定理 2.1^[4] 设 $\alpha(t)$ 为正则参数曲线, 则 α 的曲率与挠率分别为

收稿日期: 2022-02-17

修改日期: 2023-10-25

基金项目: 安徽师范大学本科生优秀毕业论文(设计、创作)培育计划项目(pyjh2020252).

作者简介: 陶雅(2001-), 女, 安徽蚌埠人, 本科生, Email: 2634386418@qq.com

通讯作者: 张量(1979-), 男, 安徽芜湖人, 副教授, 主要从事微分几何研究, Email: zhliang43@163.com

$$\kappa = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \tau = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

定理 2.2^[4] (曲线论基本定理) 给定含 0 的区间 (a, b) 上连续可导的函数 $\tilde{\kappa}(s) > 0$ 及连续函数 $\tilde{\tau}(s)$, 则有

(1) (存在性) 必存在以弧长为参数的 R^3 中的 C^3 正则曲线 $x(s)$, 使得该曲线的曲率与挠率分别为 $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s), \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$.

(2) (唯一性) 如果给定了初始标架 $\{x; T, N, B\}$, 则存在唯一的一条曲线 $x(s)$, 使得它的曲率 $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$, 挠率 $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, 且在 $s=0$ 处有

$$\{x(0); T(0), N(0), B(0)\} = \{x; T, N, B\}.$$

一般螺线是 R^3 中一种特殊的曲线, 其定义为

定义 2.2^[1] 设曲线 α 是曲率恒不为零的曲线, 如果 α 的切向量 T 与空间中某一固定向量 l ($|l|=1$) 成固定角, 即 $\langle T, l \rangle = c$ (常数), 则称 α 为一般螺旋线.

注 2.1 为叙述方便起见, 在上述定义中我们将 R^3 中平行于 l 的向量均称为一般螺线的轴方向, 固定角称为一般螺线的倾斜角.

定理 2.3^[2] 设 α 是曲率恒不为零的曲线, 则 α 为一般螺旋线当且仅当其挠率与曲率之比为常数.

注 2.2 熟知的圆柱螺线就是一般螺线, 其曲率与挠率均为常数. 目前关于可展曲面上的一般螺线已有较多成果, 如: S. Izumiya 和 N. Takeuchi^[5] 证明测地线为斜螺旋线的可展曲面仅有下面三种情况: (i) 圆柱面上的圆柱螺线; (ii) 可展曲面为圆锥面; (iii) 可展曲面为圆柱螺线的切线面.

今本文对正螺面上的一般螺线进行研究. 熟知正螺面是一种非可展的直纹面, 它的一个参数表示为

$$r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu).$$

将上述直纹面记为 S , 显然 S 是以 z -轴为轴方向上的螺旋面. 正螺面有许多重要的性质, 如: 它是直纹面中除平面以外仅有的极小曲面; 正螺面过其上每一点有两条渐近线, 其中一条为直母线, 另一条为圆柱螺线.

3 正螺面上与其同轴方向一般螺线

本节将证明正螺面上与其同轴方向的一般螺线必为圆柱螺线, 同时指出对正螺面 S 上任意一点, 除 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 外的任意倾斜角, 均存在 S 上唯一一条对应的圆柱螺线.

定理 3.1 设 S 为正螺面, 其参数表示为

$$r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu),$$

则 S 上与其同轴方向的一般螺线必为圆柱螺线, 其以弧长为参数的参数表示为

$$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

其中三个坐标分量分别为

$$(C_1 \cos(\frac{\cos \theta}{b}s) + C_2 \sin(\frac{\cos \theta}{b}s)) \cos(\frac{\cos \theta}{b}s + C),$$

$$(C_1 \cos(\frac{\cos \theta}{b}s) + C_2 \sin(\frac{\cos \theta}{b}s)) \sin(\frac{\cos \theta}{b}s + C),$$

$$\cos \theta s + bC,$$

这里 $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 为倾斜角, 常数 C_1, C_2 满足

$$(C_1^2 + C_2^2) = \tan^2 \theta b^2.$$

证 设 $\alpha(s)$ 是 S 上以 $l = (0, 0, 1)$ 为轴方向, 倾斜角为 θ 的一般螺线. 又设 s 为弧长参数, 即 $|\alpha'(s)| = 1$, 由此可得

$$v'^2 + (v^2 + b^2)u'^2 = 1. \quad (3.1)$$

由 $\langle \alpha'(s), l \rangle = \cos \theta$ 知,

$$bu' = \cos \theta, \quad (3.2)$$

从而 $u = \frac{\cos \theta}{b}s + C$, 其中 C 为积分常数, 将 (3.2) 式代入 (3.1) 式有

$$v'^2 + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} v^2 = \sin^2 \theta. \quad (3.3)$$

上式两边关于 s 求导得

$$2vv'' + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} 2vv' = 0. \quad (3.4)$$

若 $v' = 0$, 则 $\alpha(s)$ 为熟知的正螺面上的圆柱螺线.

下设 $v' \neq 0$. 此时 (3.4) 式为

$$v'' + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} v = 0,$$

此为常系数线性微分方程, 其通解为

$$v = C_1 \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}s\right) + C_2 \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}s\right). \quad (3.5)$$

注意这里 v 要满足 (3.3) 式, 将 (3.5) 代入 (3.3) 式

$$v'^2 + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} v^2 = (C_1^2 + C_2^2) \frac{\cos^2 \theta}{b^2} = \sin^2 \theta. \quad (3.6)$$

下面分两种情形讨论:

(i) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 时, 上式无解, 故不存在倾斜角为 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 的一般螺线.

(ii) 当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 时, (3.6) 式即

$$(C_1^2 + C_2^2) = \tan^2 \theta b^2. \quad (3.7)$$

由 (3.2), (3.5), (3.7) 式得到 $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ 的三个坐标分量分别为

$$(C_1 \cos(\frac{\cos \theta}{b}s) + C_2 \sin(\frac{\cos \theta}{b}s)) \cos(\frac{\cos \theta}{b}s + C),$$

$$(C_1 \cos(\frac{\cos\theta}{b}s) + C_2 \sin(\frac{\cos\theta}{b}s)) \sin(\frac{\cos\theta}{b}s + C),$$

$$z(s) = \cos\theta s + bC,$$

其中 $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, 且

$$(C_1^2 + C_2^2) = \tan^2 \theta b^2.$$

如果 $\theta = 0, \pi$, 则 $C_1 = C_2 = 0$, 此时 $\alpha(s)$ 为直线.

如果 $\theta \neq 0, \pi$, 直接计算可得上述 $\alpha(s)$ 的曲率和挠率分别为

$$\kappa = 2\sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{b^2}}, \quad \tau = \frac{2 \cos^2 \theta}{b}, \quad (3.8)$$

均为常数, 故 $\alpha(s)$ 为圆柱螺线. 证毕.

推论 3.1 设正螺面 S 如定理 3.1 所述, 对任意的 $p \in S, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 均存在 S 上唯一一条圆柱螺线与 S 同轴方向, 经过点 p , 且以 θ 为倾斜角.

证 在正螺面 S 上任取一点 (u_0, v_0) , 令

$$C_1 \cos \omega s_0 + C_2 \sin \omega s_0 = v_0, \quad (3.9)$$

$$\omega s_0 + C = u_0, \quad (3.10)$$

其中 $\omega = \frac{\cos\theta}{b}$, $C_1^2 + C_2^2 = \tan^2 \theta b^2$. 由 (3.10) 式得

$$s_0 = \frac{u_0 - C}{\omega}. \quad (3.11)$$

又根据 (3.9) 及 (3.7) 式可得

$$|\tan \theta b| \sin(\omega s_0 + \varphi) = v_0,$$

其中

$$\cos \varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}. \quad (3.12)$$

进而

$$\sin(\omega s_0 + \varphi) = \frac{v_0}{|\tan \theta b|},$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{v_0}{|\tan \theta b|}\right) - \omega s_0. \quad (3.13)$$

综合 (3.11), (3.12), (3.13) 式, 可确定 C_1, C_2 的取值, 又根据定理 2.2, 由此可说明对正螺面上任一点, 对 $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, 存在唯一一条圆柱螺线. 证毕.

注 3.1 熟知正螺面上的一族渐近线 (即 S 上的 u -线) 为圆柱螺线, 上述结果告诉我们正螺面上还存在很多其它的圆柱螺线, 下面我们给出一个具体的例子.

例 3.1 设 C^∞ 参数曲线

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{3} \cos^2 \frac{s}{2}, \sqrt{3} \cos \frac{s}{2} \sin \frac{s}{2}, \frac{s}{2} \right),$$

容易验证 s 为 α 的弧长参数, 且根据定理 2.1, 直接计算可得 α 的曲率, 挠率分别为

$$\kappa(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tau(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

所以 α 为圆柱螺线.

另一方面, 可以验证 $\alpha(s)$ 是正螺面 $S: r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu)$, 与圆柱面 $x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$ 的交线. 显然 $\alpha(s)$ 不是正螺面 S 上的渐近线. 如图 3.1 所示.

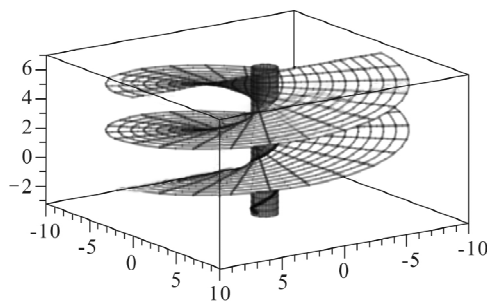


图 3.1

4 圆柱面与正螺面的交线

由第 3 节, 正螺面上与其同轴方向的诸多一般螺线均为圆柱螺线, 这些圆柱螺线既在正螺面也在圆柱面上, 是两者的交线. 一个自然的问题是: 正螺面与圆柱面的交线是否都是一般螺线, 下面的例子对此给出否定的回答.

例 4.1 曲线 $\beta(u) = ((\cos u + \sqrt{\cos^2 u + 1})$

$\cos u, (\cos u + \sqrt{\cos^2 u + 1}) \sin u, u)$ 是正螺面 $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ 与圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 的交线.

证 根据定理 2.1, 直接计算可得 β 的曲率为

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2} \sqrt{(18 \cos^5 u + 19 \cos^3 u + 4 \cos u) \sqrt{\cos^2 u + 1} + 18 \cos^6 u + 28 \cos^4 u + 11 \cos^2 u + 1}}{(5 \cos^2 u + 4 \cos u \sqrt{\cos^2 u + 1} + 3)^{\frac{3}{2}}},$$

故 β 不是圆柱螺线. 见下图 4.1.

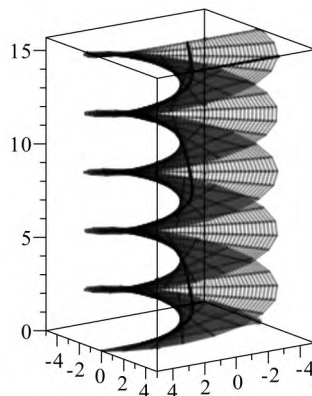


图 4.1

注 4.1 受到上例的启发, 一个有意思的问题是: 正螺面与哪些圆柱面的交线为与正螺面具有同轴方向的圆柱螺线. 对此, 我们有如下结果.

定理 4.1 设正螺面 S 和圆柱面 \bar{S} 的参数表示分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (v \cos u, v \sin u, bu), \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 &= R^2. \end{aligned}$$

(i) 当 $p=q=0$ 时, $\bar{S}: x^2+y^2=R^2$ 与 S 的交线为以 z -轴为轴的圆柱螺线.

(ii) 当 p, q 不全为 0 时, 如果 S 与 \bar{S} 的交线为与 S 同轴方向的圆柱螺线, 则 $R=\sqrt{p^2+q^2}$. 反之, 当 $R=\sqrt{p^2+q^2}$ 时, 交线为圆柱螺线及 z -轴.

证 (i) 当 $p=q=0$ 时, S 与 \bar{S} 的交线为

$$(R \cos u, R \sin u, bu).$$

显然这是以 z -轴为轴的圆柱螺线.

(ii) 由于 S 与 \bar{S} 的交线既满足 S 的方程也满足 \bar{S} 的方程, 故有

$$(v \cos u - p)^2 + (v \sin u - q)^2 = R^2,$$

即

$$v^2 - 2(p \cos u + q \sin u)v + p^2 + q^2 = R^2. \quad (4.1)$$

解此一元二次方程得

$$\begin{aligned} v_{\pm} &= p \cos u + q \sin u \\ &\quad \pm \sqrt{(p \cos u + q \sin u)^2 - p^2 - q^2 + R^2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

(\Rightarrow) 设 $\alpha(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ 为圆柱螺线, 且为 S 与 \bar{S} 的交线. 由定理 3.1 可知

$$v(s) = C_1 \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}s\right) + C_2 \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}s\right),$$

$$u(s) = \frac{\cos \theta}{b}s + C,$$

其中

$$(C_1^2 + C_2^2) = \tan^2 \theta b^2.$$

为方便起见, 记 $\bar{s} = s + \frac{b}{\cos \theta}C$, 则

$$v(\bar{s}) = C_1 \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s} - C\right) + C_2 \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s} - C\right),$$

$$u(\bar{s}) = \frac{\cos \theta}{b}\bar{s},$$

整理得

$$\begin{aligned} v(\bar{s}) &= (C_1 \cos C - C_2 \sin C) \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) \\ &\quad + (C_1 \sin C + C_2 \cos C) \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right). \end{aligned}$$

由 (4.2) 知

$$\pm \sqrt{(R^2 - p^2) \sin^2 \frac{\cos \theta}{b}\bar{s} + 2pq \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right)}$$

$$+ (R^2 - q^2) \cos^2 \frac{\cos \theta}{b}\bar{s} = (C_1 \cos C - C_2 \sin C - p) \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right)$$

$$+ (C_1 \sin C + C_2 \cos C - q) \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right),$$

上式两边平方得

$$\begin{aligned} &((C_1 \cos C - C_2 \sin C - p)^2 - R^2 + q^2) \cos^2\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) - \\ &2pq \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) + 2(C_1 \cos C - C_2 \sin C - p) \\ &(C_1 \sin C + C_2 \cos C - q) \cos\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) + \\ &((C_1 \sin C + C_2 \cos C - q)^2 - R^2 + p^2) \sin^2\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

取 $\bar{s}=0$, 有

$$(C_1 \cos C - C_2 \sin C - p)^2 - R^2 + q^2 = 0 \quad (4.4)$$

取 $\bar{s} = \frac{b}{\cos \theta} \frac{\pi}{2}$, 有

$$(C_1 \sin C + C_2 \cos C - q)^2 - R^2 + p^2 = 0 \quad (4.5)$$

这样 (4.3) 式化为

$$\begin{aligned} &((C_1 \cos C - C_2 \sin C - p)(C_1 \sin C + C_2 \cos C - q) - pq) \\ &\cos\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) \sin\left(\frac{\cos \theta}{b}\bar{s}\right) = 0, \end{aligned}$$

因此

$$(C_1 \cos C - C_2 \sin C - p)(C_1 \sin C + C_2 \cos C - q) = pq,$$

上式两边平方得

$$(C_1 \cos C - C_2 \sin C - p)^2 (C_1 \sin C + C_2 \cos C - q)^2 = (pq)^2,$$

将 (4.4), (4.5) 式代入上式得

$$R^4 - (p^2 + q^2)R^2 = 0,$$

从而

$$R = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

(\Leftarrow) 当 $R = \sqrt{p^2 + q^2}$ 时, (4.1) 式即

$$v^2 - (2p \cos u + 2q \sin u)v = 0,$$

故

$$v_+ = 2p \cos u + 2q \sin u, \quad v_- = 0,$$

因此, 两条交线为 $\alpha(u), (0, 0, bu)$, 其中

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= ((2p \cos u + 2q \sin u) \cos u, \\ &\quad (2p \cos u + 2q \sin u) \sin u, bu). \end{aligned}$$

根据定理 2.1, 直接计算可得

$$\kappa(\alpha) = \frac{4 \sqrt{(b^2 + 4p^2 + 4q^2)(p^2 + q^2)}}{(b^2 + 4p^2 + 4q^2)^{3/2}},$$

$$\tau(\alpha) = \frac{2b}{b^2 + 4p^2 + 4q^2},$$

均为非零常数, 故 α 为圆柱螺线, 显然另一条交线为 z -轴. 证毕.

下面是一个正螺面与圆柱面交线分别为圆柱螺线和
(下转第 107 页)

教师得分趋势-学生评价

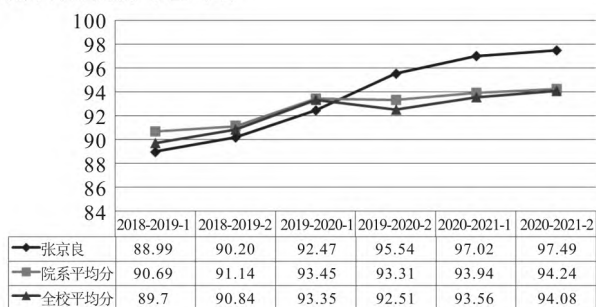


图 5 学生评教课程得分教务截图

(3)教学效果得到了专家的肯定. 与以前传统教学相比较, 学生学习积极性有提高: 到课者多、旷课者少; 抬头的多、低头的少; 动手的多、呆坐的少. 课堂气氛活跃、师生关系融洽(图 6). 课程参加学校教学评估时, 同行专家姚增善教授评价说“板书与 ppt 衔接紧密, 例题难易搭配合理”, 督导专家张永玲教授评价说“与学生互动好, 学生听讲认真”, 评估成绩是理科组第一名, 评估结果为“优秀”.



图 6 学生课后感言

(4)教学模式得到了推广. 本课程建设成果已经在我校《高等数学 II》课程组内进行了共享, 教学模式也进行了推广, 目前组内所有教师都采用了过程性评价与线上线下相结合的授课方式; 此外, 负责人曾被邀去海军潜艇学院做过高等数学课程教学与建

设指导, 教学模式得到了推广应用.

(5)获得了支持与肯定. 得益于课程教学改革, 近 5 年课程负责人发表教学研究论文 5 篇; 获批山东省面上教学项目 1 项、其它教学项目 4 项; 获全国高校微课竞赛华东赛区一等奖、山东省特等奖; 获山东省首届教师教学创新交流示范活动一等奖; 获学校本科教学优秀奖三等奖、东升教学卓越奖二等奖、教学创新大赛二等奖; 三次指导学生获大学生数学竞赛山东省一等奖.

4 结论

针对高等数学传统教学面临的“痛点”问题, 在我校《高等数学 II2》课程教学中从教学观念、教学内容、教学模式、教学手段、教学方法、考核评价等方面进行了改革创新, 取得了满意的教学效果. 但“学无止境、教无定法”, 今后, 我们将进一步加强学习交流, 继续完善课程教学模式, 持续提升教学效果, 在混合式教学实施、新形态教材编写、教学团队建设、教学效果实证研究、学优生培养与学困生帮扶等方面多做工作, 持续改进课程教学.

参考文献

- [1] 吴慧卓. 高等数学教学中渗透课程思政的探索与思考[J]. 大学数学, 2019, 35(5): 40—43.
- [2] 朱婧, 陈学慧, 司新辉. 疫情背景下微积分“课程思政”的教学探索与实践[J]. 大学数学, 2021, 37(1): 33—38.
- [3] 刘雄伟, 汪雄良. 格林公式与 GPS 面积测量仪[J]. 高等数学研究, 2015, 18(1): 109—111.
- [4] 龙汉, 何章鸣, 汪雄良. 高等数学图形启发式创新教学[J]. 大学数学, 2020, 36(1): 60—63.
- [5] 吴开宁, 王雪臣, 王黎明. 大学数学类课程授课模式思考: “雨课堂”形式. 大学数学[J]. 2021, 37(1): 27—32.
- [6] 山东省教育厅组编. 高等数学(下册)[M]. 修订版. 东营: 中国石油大学出版社, 2011.
- [7] 但琦. 高等数学军事应用案例[M]. 北京: 国防工业出版社, 2018: 153—156.

参考文献

- [1] Do Carmo M. Differential Geometry of curves and surface. Englewood Cliffs[M]. N. J.: Prentice-Hall, 1976: 246.
- [2] D. J. Struik. Lectures on Classical Differential Geometry (Second Edition)[M]. Dover, New York, 1988: 33—35.
- [3] 陈维桓. 微分几何初步[M]. 北京: 北京大学出版社. 1990: 10—45.
- [4] 徐森林, 纪永强, 金亚东, 等. 微分几何[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社. 2013: 53, 130—168.
- [5] S. Izumiya, N. Takeuchi. New special curves and developable surface[J]. Turk. J. Math., 2004, 28(2): 153—163.

(上接第 36 页)

z -轴的例子.

例 4.2 正螺面 $S: \mathbf{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$

与圆柱面 $\bar{S}: (x-R)^2 + y^2 = R^2$ 的两条交线分别为

$$\alpha_1(u) = (2R \cos u \cos u, 2R \cos u \sin u, u),$$

$$\alpha_2(u) = (0, 0, u),$$

α_2 为平行于 z -轴的直线, 根据定理 2.1, 直接计算可得 α_1 的曲率与挠率分别为

$$\kappa(\alpha_1) = \frac{4R}{(1+4R^2)^2}, \quad \tau(\alpha_1) = \frac{2}{1+4R^2}.$$

α_1 为圆柱螺线. 证毕.