# 关于圆柱螺线主法线曲面一些性质的研究

王雪梅[1]，梁　林[2,*]
（1.楚雄师范学院 教育学院，云南 楚雄 675000；2.楚雄师范学院 数学与计算机科学学院，云南 楚雄 675000）

**摘　要：**曲面的性质一直是微分几何研究的一个热点问题，而圆柱螺线又是几何学的最重要曲线。本文以圆柱螺线为对象，运用微分几何方法，对圆柱螺线的主法线曲面的有关几何性质进行了研究，获得了圆柱螺线的主法线曲面的渐近曲线、曲率线、法曲率、主曲率、高斯曲率、平均曲率等结论，为深入研究圆柱螺线的主法线曲面子流形奠定基础。

**关键词：**圆柱螺线；主法线曲面；平均曲率；高斯曲率；主曲率
**中图分类号：**O186.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1671－7406（2024）03－0060－07

圆柱螺线作为一种曲率和挠率均为常数的特殊的螺线。主法线曲面是指，一条曲线的主法线所产生的直纹曲面。本文受相关文献[1-5]的启发，利用类比方法讨论了圆柱螺线的主法线曲面的相关几何性质，其结论具有重要意义。

## 1　圆柱螺线主法线曲面性质研究所需预备知识

引理1[6,7]主法线曲面是由曲线$\vec{r}\,(t)$的主法线生成的直纹面。设$\vec{\beta}\,(t)$为曲线$\vec{r}\,(t)$上任意一点$P$的主法向量，则曲线$\vec{r}\,(t)$的主法线曲面$\sum$为

$$\vec{R}\,(t,v)=\vec{r}\,(t)+v\vec{\beta}\,(t) \tag{1}$$

定义圆柱螺线$\vec{r}\,(t)$:$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=bt\end{cases}$的主法线曲面是指$\vec{r}\,(t)$的主法线生成的直纹面，设$\vec{\beta}\,(t)$为曲线$\vec{r}\,(t)$上任意一点$P$的主法线向量，则曲线$\vec{r}\,(t)$的主法线曲面$\sum$为

$$\vec{R}\,(t,v)=\vec{r}\,(t)+v\vec{\beta}\,(t)$$

引理2[8]曲面的第一基本形式：

$$I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{2}$$

其中$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u\,F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\,G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$。

曲面的第二基本形式：

$$\Box=Ldu^2+2Mdudv+ndv^2 \tag{3}$$

其中$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n},M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n},N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}$。

引理3[8]曲面上的任意一点渐进线方程为

$$Ldu^2+2Mdudv+ndv^2=0 \tag{4}$$

引理4[8]曲面曲率线微分方程为

$$\begin{vmatrix}dv^2 & -dudv & du^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}=0 \tag{5}$$

**收稿日期：**2023－08－22

**作者简介：**王雪梅（1994－），女，助教，研究方向为非线性偏微分方程。E-mail：1749037312@qq.com，Tel. 18487383731
＊**通讯作者：**梁　林（1967－），男，教授，研究方向为微分几何。E-mail：1749037312@qq.com，Tel. 13987872618

引理5[8]曲面沿主方向$(d)$为

$$d\vec{n} = -K_N d\vec{r} \tag{6}$$

其中$K_N$为主曲率。

引理6[8] 曲面主曲率方程为：

$$(EG-F^2)k_N^2-(LG-2MF+NE)k_N+(LN-M^2)=0 \tag{7}$$

引理7[8] 曲面高斯曲率为：

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \tag{8}$$

平均曲率为：

$$H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)} \tag{9}$$

其中$k_1$、$k_2$为曲面上一点的两个主曲率。

## 2　圆柱螺线主法线曲面性质主要结论

### 2.1　圆柱螺线主法线曲面的微分方程

定理1 圆柱螺线$\vec{r}(t)$:$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$（$a,b$为常数，$t$为参数）的主法线曲面的微分方程为

$$R(t,v)=\{a\cos t,a\sin t,bt\}+v\{-\cos t,\sin t,0\}$$

证明：由曲线$\vec{r}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\}$得

$$\vec{r'}(t)=\{-a\sin t,a\cos t,b\}$$

$$\vec{r''}(t)=\{-a\sin t,-a\cos t,0\}$$

单位切向量为

$$\vec{\alpha}=\left\{-\frac{a\sin t}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}},\frac{a\cos t}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}},\frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\{-a\sin t,a\cos t,b\}$$

$$\left|\vec{r'}\right|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r'}\times\vec{r''}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -a\sin t & \alpha\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=\{ab\sin t,-ab\cos t,a^2\}$$

单位副法向量为

$$\vec{\gamma}=\frac{\vec{r'}\times\vec{r''}}{\left|\vec{r'}\times\vec{r''}\right|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{b\sin t,-b\cos t,a\}$$

单位主法向量为

$$\vec{\beta}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b\sin t & -b\cos t & a \\ -a\cos t & a\sin t & b \end{vmatrix}=\{-\cos t,\sin t,0\}$$

由主法线曲面的定义知，主法线曲面的微分方程为

$$\vec{R}(t,v)=\vec{r}(t)+v\vec{\beta}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\}+v\{-\cos t,\sin t,0\}$$

### 2.2　圆柱螺线的主法线曲面的基本形式

定理2圆柱螺线的主法线曲面的第一基本形式为

$$I=(v^2+a^2+b^2+2av\cos 2t)dt^2+2a\sin 2tdtdv+dv^2$$

证明:由定理1知,圆柱螺线$\vec{r}(t)$的主法线曲面为

$$\vec{R}(t,v)=\vec{r}(t)+v\vec{\beta}(t)=\{a\cos t-v\cos t,a\sin t+v\sin t,bt\}$$

对$t,v$分别求导得

$$\begin{aligned}\vec{R}_t&=\{-a\sin t+v\sin t,a\cos t+v\cos t,b\}\\ \vec{R}_v&=\{-\cos t,\sin t,0\}\end{aligned}\tag{10}$$

于是得第一类基本量为

$$\begin{aligned}E&=\vec{R}_t\times\vec{R}_t=v^2+a^2+b^2+2av\cos 2t\\ F&=\vec{R}_t\cdot\vec{R}_v=a\sin 2t\\ G&=\vec{R}_v\cdot\vec{R}_v=1\end{aligned}\tag{11}$$

把$E$、$F$、$G$代入(2)式,圆柱螺线的主法线曲面的第一基本形式为

$$I=Edt^2+2Fdtdv+Gdv^2=(v^2+a^2+b^2+2av\cos 2t)dt^2+2a\sin 2tdtdv+dv^2$$

定理3 圆柱螺线的主法线曲面的第二基本形式为

$$II=\frac{ab\sin 2t}{\sqrt{b^2+(v+a\cos 2t)^2}}dt^2-\frac{2b}{\sqrt{b^2+(v+a\cos 2t)^2}}dtdv$$

证明:对(10)中$\vec{R}_t$,$\vec{R}_v$再分别求导,得

$$\begin{aligned}\vec{R}_{tt}&=\{(v-a)\cos t,-(a+v)\sin t,0\}\\ \vec{R}_{tv}&=\{\sin t,\cos t,0\}\\ \vec{R}_{vv}&=\{0,0,0\}\end{aligned}$$

从而$D=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{b^2+(v+a\cos 2t)^2}$

$$\vec{R}_t\times\vec{R}_v=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ (v-a)\sin t & (\alpha+v)\cos t & b\\ -\cos t & \sin t & 0\end{vmatrix}=\{-b\sin t,-b\cos t,v+\cos 2t\}$$

设$\vec{n}$为圆柱螺线主法线曲面的单位法向量,把上式代入得

$$\vec{n}=\frac{\vec{R}_t\times\vec{R}_v}{D}=\frac{1}{D}\{-b\sin t,-b\cos t,v+a\cos 2t\}$$

从而第二类基本量为

$$L=\vec{R}_{tt}\cdot\vec{n}=\frac{ab\sin 2t}{\sqrt{b^2+(v+a\cos 2t)^2}}$$

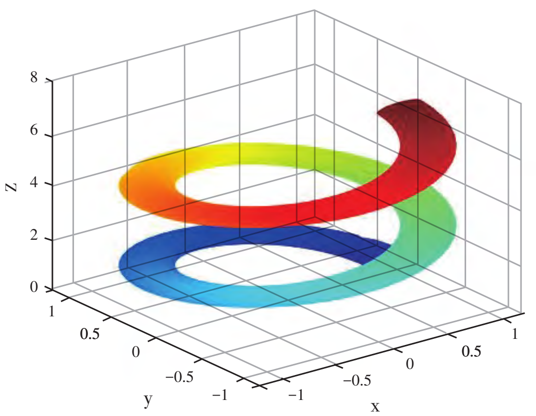


图1 圆柱螺线的主法线曲面

Fig. 1 Main normal surface of a cylindrical spiral

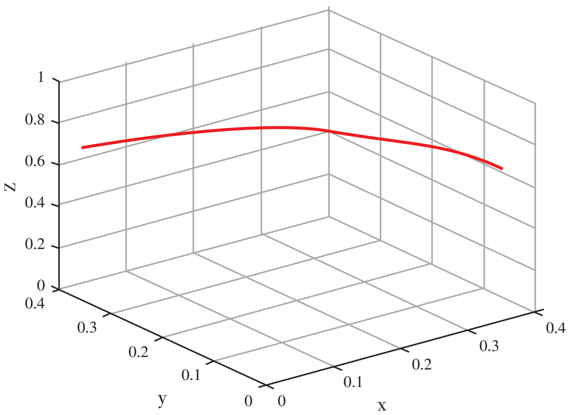


图2 主法线曲面上的曲率线

Fig. 2 Curvature lines on the main normal surface

$$M = \overrightarrow{R_{tv}} \cdot \vec{n} = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}} \tag{12}$$

$$N = \overrightarrow{R_{vv}} \cdot \vec{n} = 0$$

把$L$,M,$N$代入(3)式得

$$II = Ldt^2 + 2Mdtdv + Ndv^2 = \frac{ab\sin 2t}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}}dt^2 - \frac{2b}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}}dtdv$$

### 2.3　圆柱螺线的主法线曲面上的曲率线

定理4圆柱螺线的主法线曲面上的曲率线微分方程为

$$-(bv^2 + a^2b + b^3 + 2abv\cos 2t + a^2b\sin^2 2t)du^2 + bdv^2 - ab\sin 2tdudv = 0 \tag{13}$$

证明:由引理4得

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ v^2 + a^2 + b^2 + 2av\cos 2t & a\sin 2t & 1 \\ \dfrac{ab\sin 2t}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

化简得曲率线微分方程为

$$-(bv^2 + a^2b + b^3 + 2abv\cos 2t + a^2b\sin^2 2t)du^2 + bdv^2 - ab\sin 2tdudv = 0$$

定理5 圆柱螺线的主法线曲面的高斯曲率为

$$K = -\frac{b^2}{\left[b^2 + (v + a\cos 2t)^2\right]^2} \tag{14}$$

证明:把(11),(12)代入(8)式得

$$K = k_2k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-b^2}{\left[b^2 + (v + a\cos 2t)^2\right]^2}$$

即为圆柱螺线的主法线曲面的高斯曲率。

定理6圆柱螺线的主法线曲面的主曲率方程为

$$\left[b^2 + (v + a\cos 2t)^2\right]k^2 - \frac{3ab\sin 2t}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}}k - \frac{b^2}{b^2 + (v + a\cos 2t)^2} = 0 \tag{15}$$

证明 :把(11),(12)代入(7)式得

$$\left[b^2 + (v + a\cos 2t)^2\right]k^2 - \left(\frac{ab\sin 2t}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}} - 2\frac{-ab\sin 2t}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}}\right)k + \left(\frac{-b^2}{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}\right) = 0,$$

化简得

$$\left[b^2 + (v + a\cos 2t)^2\right]k^2 - \frac{3ab\sin 2t}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}}k - \frac{b^2}{b^2 + (v + a\cos 2t)^2} = 0$$

其中

$$k = \frac{3ab\sin 2t \pm b\sqrt{9a^2\sin 2t + 4\left[b^2 + (v + a\cos 2t)^2\right]}}{2(b^2 + (v + a\cos 2t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

即为圆柱螺线的主法线曲面的主曲率。

定理7[9]圆柱螺线的主法线曲面的平均曲率为

$$H = \frac{3ab\sin 2t}{2(b^2 + (v + a\cos 2t))^{\frac{3}{2}}} \tag{16}$$

证明:把(11),(12)代入(9)式得

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$$
$$=\frac{3ab\sin 2t}{2(b^2+(v+a\cos 2t))^{\frac{3}{2}}}$$

即为圆柱螺线的主法线曲面的平均曲率。

## 2.4 圆柱螺线的主法线曲面的渐近曲线

定理8 圆柱螺线的主法线曲面的另一族非直线渐近曲线的微分方程为

$$a\sin 2tdt-2dv=0 \tag{17}$$

证明:在圆柱螺线的主法线曲面上,由(12)知$LN-M^2<0$,那么该曲面上的点都是双曲点,曲面上存在两族渐近曲线,形成曲面上的渐近网,又因为圆柱螺线的主法线是直纹面,所以一族渐近线为直线,由引理3圆柱螺线的主法线曲面的渐近曲线的微分方程是

$$Ldt^2+2Mdtdv+Ndv^2=0$$

同时可求得另一族渐近曲线为

$$\frac{ab\sin 2tdt^2-2bdtdv}{\sqrt{b^2+(v+a\cos 2t)^2}}=0$$

故圆柱螺线的主法线曲面的另一族非直线渐近曲线的微分方程为$a\sin 2tdt-2dv=0$。

定理9 圆柱螺线的主法线曲面的渐近方向分别为

$$(d)=dt:dv=0:2$$
$$(\delta)=\delta t:\delta v=2:a\sin 2t$$

证明:由(17)得

$$a\sin 2t\frac{dt}{dv}-2=0$$

故得渐近方向分别为

$$(d)=dt:dv=0:2$$
$$(\delta)=\delta t:\delta v=2:a\sin 2t$$

定理10[7]圆柱螺线的主法线曲面的极小曲面不存在。

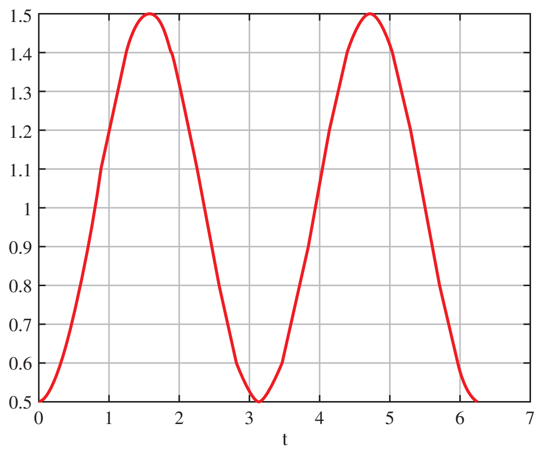


**图3 主法线曲面的渐近曲线**

Fig. 3 Asymptotic curve of the main normal surface

证明:假设极小曲面存在,即曲面上的每一点处的$H=0$,由(16)得,$ab\sin 2t=0$,则

$$\begin{cases} ab\neq 0 \\ \sin 2t=0 \end{cases}$$

当且仅当$t=k\pi(k\in Z)$时,$\sin 2t=0$,这与假设矛盾,故圆柱螺线的主法线曲面的极小曲面不存在。

定理11[7]圆柱螺线的主法线曲面不可能是平面或球面。

证明:若圆柱螺线的主法线曲面是平面或球面,则主曲率相等,即$k_1=k_2$,则

$$0<H^2=\left[\frac{1}{2}(k_1+k_2)^2=k_1^2=k_2^2=k_1k_2=K\right]$$

这与(14)中圆柱螺线的主法线曲面的$K<0$矛盾。

定理12 圆柱螺线的主法线曲面$\vec{R}(t,v)=\vec{r}(t)+v\vec{\beta}(t)=\{a\cos t-v\cos t,a\sin t+v\sin t,bt\}$的坐标网不是正交网。

证明:由公式(10)知:圆柱螺线的主法线曲面方程的一阶导为

$$\overrightarrow{R_t} = \{-a\sin t + v\sin t, a\cos t + v\cos t, b\}$$
$$\overrightarrow{R_v} = \{-\cos t, \sin t, 0\}$$

所以$F = \overrightarrow{R_t} \cdot \overrightarrow{R_v} = a\sin 2t \neq 0$。故圆柱螺线的主法线曲面的坐标网不是正交网。

定理13圆柱螺线的主法线曲面的曲纹坐标网不是共轭网。

证明:由公式(12)知,$M = \overrightarrow{R_{tv}} \cdot \vec{n} = \dfrac{-b}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}} \neq 0$,故圆柱螺线的主法线曲面的曲纹坐标网不是共轭网。

定理14 曲线$\vec{n}(s)$的主法线曲面的曲纹坐标网是渐进网的充分必要条件是

$$t = k\pi (k \in Z)$$

证明:曲纹坐标网是渐进网的充分必要条件为$L = N = 0$,由(12),得$ab\sin 2t = 0$,从而有$t = k\pi (k \in Z)$。

定理15圆柱螺线的主法线曲面的曲纹坐标网不是曲率线网。

证明:由公式(12)知,$M = \overrightarrow{R_{tv}} \cdot \vec{n} = \dfrac{-b}{\sqrt{b^2 + (v + a\cos 2t)^2}} \neq 0$。故圆柱螺线的主法线曲面的曲纹坐标网不是曲率线网。

### 2.5　圆柱螺线的主法线曲面的极小轨迹及正则性

定理16 圆柱螺线的主法线曲面$R(t,v) = \{a\cos t - v\cos t, a\sin t + v\sin t, bt\}$的极小轨迹为:

$$\sin 2t = 0 \tag{18}$$

证明:由公式(16)知:令$H = 0$,即

$$H = \frac{3ab\sin 2t}{2\left(b^2 + (v + a\cos 2t)\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{19}$$

从而圆柱螺线的主法线曲面的极小轨迹为:$\sin 2t = 0$。

定理17圆柱螺线的主法线曲面具有正则性。

证明:由于$\overrightarrow{R_t} = \{-a\sin t + v\sin t, a\cos t + v\cos t, b\}$,$\overrightarrow{R_v} = \{-\cos t, \sin t, 0\}$,

$$\overrightarrow{R_t} \times \overrightarrow{R_v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ (v-a)\sin t & (\alpha + v)\cos t & b \\ -\cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = \{-b\sin t, -b\cos t, v + \cos 2t\} \tag{20}$$

从而$\left|\vec{R}_t \times \vec{R}_v\right|^2 = b^2 + (v + a\cos 2t)^2 > 0$,定理得证。

定理18[10]圆柱螺线一定是它所在圆柱面上的测地线。

证明:设圆柱螺线的方程为$\vec{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$,则它所在的圆柱面方程为$\vec{r} = \{a\cos u, a\sin u, bv\}$,那么圆柱面的$E = a^2, F = 0, G = 1$。

又因为圆柱螺线的切向量和Z轴夹固定角,由Liouville公式得:圆柱螺线C的测地曲率

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\theta + \frac{G_U}{2G\sqrt{E}}\sin\theta = 0$$

故它是所在圆柱面上测地线。

## 参考文献:


[1]　梁林.曲线的副法线曲面及其性质研究[J].楚雄师范学院学报,2015,30(3):1-5

[2]　袁媛,刘立会.空间曲线的副法线曲面[J].东北大学学报,2012,33(10):1517-1520.

[3] Samanci K H, Kalkan O, Celik S. The Timelike Bezier spline in Minkowski 3-space[J]. Journal of Science and Arts, 2019,19(2):357–374.
[4] 孙建国,裴东河. 几类特殊曲线的微分几何理论研究[J].东北师大学报,2016,48(2):40–43.
[5] Huang J , Pei D. Singular special curves in 3-space forms[J]. Mathematics, 2020,8(5):846.
[6] 梅向明,黄敬之. 微分几何[M].北京:高等教育出版社,2001.
[7] 包弘,梁林.双曲螺线的主法线曲面的相关性质研究[J].楚雄师范学院学报,2016,31(03):1–5.
[8] 陈维桓. 微分几何初步[M].北京:北京大学出版社,2001.
[9] Fetcu D, Oniciuc C, Rosebberg H. Biharmonic submanifold with parallel mean curvature in $S^2 \times R$. [J]. Journal of Geometric Analysis, 2013,23(4),2158–2176.
[10] 姜国英,黄宣国. 微分几何一百例[M].北京:高等教育出版社,1992.

## A Study on Some Properties of the Main Normal Surface of a Cylindrical Spiral

**WANG Xuemei**[1] **& LIANG Lin**[2]
(1. School of Education, Chuxiong Normal University, Chuxiong, Yunnan Province 675000;
2. School of Mathematics and Computer Science, Chuxiong Normal University, Chuxiong, Yunnan Province 675000)

**Abstract:** The properties of surfaces have always been a hot issue in the study of differential geometry, and cylindrical solenoid is the most important curve in the geometry. In this paper, differential geometry methods are used to investigate the geometric properties related to the principal normal surfaces of cylindrical solenoids, with the cylindrical solenoid as the object. The study has obtained conclusions on the asymptotic curves, lines of curvature, normal curvature, principal curvature, Gaussian curvature and mean curvature of the principal normal surfaces of cylindrical solenoids. The results of the study provide a basis for deepening study on the main normal surface subfluidization of cylindrical solenoid.

**Key words:** cylindrical spiral; principal normal surface; average curvature; Gaussian curvature; principal curvature

（责任编辑：胡　钊）