质点沿对数螺线运动的速度和加速度

陈 彦，王 威
(扬州职业大学，江苏 扬州 225009)

摘 要：根据以时间为参数的平面曲线弧微分公式和曲率计算公式，导出了质点在任意时刻围绕极点等角速度转动，并沿着对数螺线运动的线速度、切向加速度、法向加速度以及全加速度计算公式，通过加速度在极坐标系中的投影式，判断出质点在任意时刻运动的全加速度方向始终与径矢方向关于内法线轴对称且指向曲线内凹一侧。以匀速转动的水平光滑直管内小球的离心运动为例，通过不同参考系将点的简单运动与合成运动充分地融合在一起，验证了计算结果的正确性。

关键词：对数螺线；全加速度；极坐标系；等角性；变速曲线运动

中图分类号：O 311.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1008－3693(2023)02－0054－04

DOI:10.15954/j.cnki.cn32-1529/g4.2023.02.008

The Velocity and Acceleration of a Particle Moving Along a Logarithmic Spiral

CHEN Yan, WANG Wei
(Yangzhou Polytechnic College, Yangzhou 225009, China)

Abstract: According to the arc differential formula and the curvature formula of the plane curve with time as the parameter, the formulas for calculating linear velocity, tangential acceleration, normal acceleration and total acceleration of a particle rotating around the pole at any time and moving along the logarithmic spiral are derived. Through the projection formula of acceleration in polar coordinate system, it is judged that the direction of the acceleration velocity of the particle at any time is always symmetric with the direction of the radial vector about the inner normal and points to the concave side of the curve. To take the centrifugal motion of a small ball in a horizontal, smooth, straight tube rotating at a uniform speed as an example, the simple motion of a point and the synthetic motion are fully integrated through different reference frames, which verifies the correctness of the calculation result.

Key words: logarithmic spiral; total acceleration; polar coordinate system; equiangularity; variable speed curve motion

《理论力学》中运动学部分关于点的变速曲线运动给出了点的速度、切向加速度、法向加速度和全加速度的一般计算公式[1]，但经典的例子不是很多，只有一道摆线(或旋轮线)和一道阿基米德螺线的例题。由于变速曲线运动本身的复杂性，所以必须和一般曲线的几何性质结合起来加以研究。对数螺线是质点切向、法向加速度均为常数的平面运动轨迹[2-3]。质点能不能以等角速度绕固定点转动的同时又沿着对数螺线运动？邵云以匀速转动的水平光滑直管内小球的离心运动

收稿日期：2022－11－10
作者简介：陈 彦(1984—)，男，扬州职业大学土木工程学院讲师，硕士；王 威(1975—)，男，扬州职业大学土木工程学院讲师，博士。
基金项目：国家自然科学基金(12102380)。

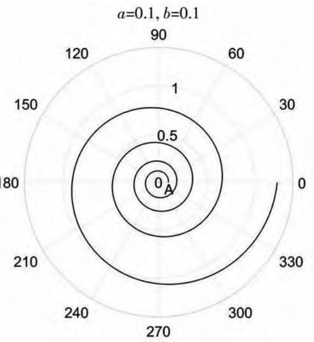
为例给出了肯定的答案[4]，但是并没有给出质点速度和加速度的一般计算公式，也没有清楚地阐明质点分别在自然轴系、极坐标系和动参考系中速度矢量和加速度矢量的内在统一性以及和对数螺线的几何性质有何关联，笔者针对这些问题进行分析讨论。

1　质点沿对数螺线运动的速度与加速度公式

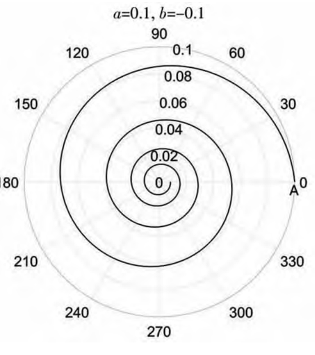
对数螺线在极坐标系(ρ,θ)下的一般方程为：

$$\rho = ae^{b\theta}\ (a>0, b\neq 0) \tag{1}$$

它的图形如图 1 所示，从起点$A(\rho=a,\theta=0)$出发，逆时针转向，随着极角的增大，当$b>0$时，越绕越远离极点；当$b<0$时，越绕越靠近极点而永远达不到极点。对数螺线最重要的几何性质就是等角性，即曲线上任意一点的切矢与径矢成固定角度$\alpha=\operatorname{arccot}(b)\ (0<\alpha<\pi, \alpha\neq\pi/2)$，$\alpha$为对数螺线的倾斜度，所以对数螺线又叫等角螺线。



(a)　$b>0, 0\leqslant\theta\leqslant 8\pi$



(b)　$b<0, 0\leqslant\theta\leqslant 8\pi$

图 1　对数螺线

1.1　质点沿对数螺线运动的速度

将对数螺线在极坐标系下的方程转化为直角坐标系下以θ为参数的参数方程[5]如下：

$$\begin{cases} x(\theta) = ae^{b\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = ae^{b\theta}\sin\theta \end{cases}\quad (\theta\in R) \tag{2}$$

如果质点从起点$A(\rho=a,\theta=0)$开始绕极点等角速度转动，并且沿着对数螺线运动，设角速度为ω，以逆时针转动为正，顺时针转动为负，从而$\theta=\omega t$，先将其代入方程(1)，得到极径ρ与时间t的关系式(3)，再代入方程(2)，转化为以时间t为参数的参数方程(4)，如下：

$$\rho(t) = ae^{b\omega t}\ (a>0, b\neq 0, t>0) \tag{3}$$

$$\begin{cases} x(t) = ae^{b\omega t}\cos\omega t \\ y(t) = ae^{b\omega t}\sin\omega t \end{cases}\quad (t>0) \tag{4}$$

已知参数方程形式的弧微分公式[5]如下：

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

将方程(4)代入式(5)并化简得

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{(b^2+1)}\,\omega e^{b\omega t}\mathrm{d}t \tag{6}$$

这样质点在任意时刻的线速度为：

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} = a\sqrt{b^2+1}\,\omega e^{b\omega t}\boldsymbol{\tau} \tag{7}$$

$\boldsymbol{\tau}$为切向单位矢量，指向与质点的运动方向一致，根据教材，公式有[6]

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}\right) \tag{8}$$

将方程(4)代入式(8)并化简得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\cos(\omega t+\operatorname{arccot} b), \sin(\omega t+\operatorname{arccot} b)) \\ &= (\cos(\omega t+\alpha), \sin(\omega t+\alpha)) \end{aligned} \tag{9}$$

根据《理论力学》中速度在极坐标系中的投影式，将方程(3)与$\theta=\omega t$代入，计算结果如下：

$$\begin{aligned} v_\rho &= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = ab\omega e^{b\omega t} \\ v_\theta &= \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = a\omega e^{b\omega t} \end{aligned} \tag{10}$$

1.2　质点沿对数螺线运动的加速度

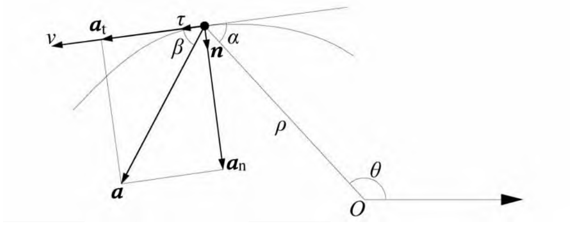
通过公式(6)，求得质点在任意时刻沿对数螺线运动的切向加速度为：

$$\boldsymbol{a}_t = \dot{v}\boldsymbol{\tau} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} = ab\sqrt{b^2+1}\,\omega^2 e^{b\omega t}\boldsymbol{\tau} \tag{11}$$

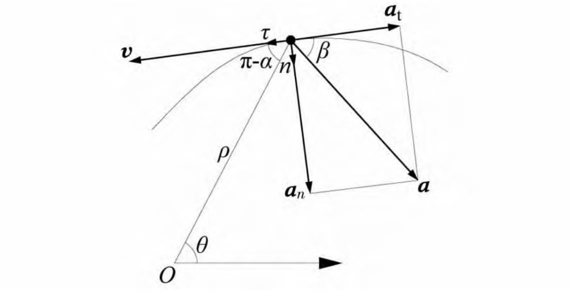
从速度(7)和切向加速度(11)的表达式可以看出，当$b\omega>0$时，二者符号相同，质点作变加速曲线运动(图 2(a))；当$b\omega<0$时，二者符号相反，质点作变减速曲线运动(图 2(b))。

已知参数方程形式的曲率公式如下：

$$K(t) = \frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{(3/2)}} \tag{12}$$



(a) 变加速曲线运动($\alpha=\beta,\omega>0,b>0$)



(b) 变减速曲线运动($\pi-\alpha=\beta,\omega>0,b<0$)

图 2 质点沿对数螺线运动

将方程(4) 代入式(12) ,求出质点在任意时刻所在位置的曲率,并化简得

$$K(t)=\frac{1}{a\sqrt{b^2+1}e^{b\omega t}} \tag{13}$$

从而求得质点在任意时刻沿对数螺线运动的法向加速度为

$$\boldsymbol{a}_n=K(t)v^2\boldsymbol{n}=a\sqrt{b^2+1}\omega^2e^{b\omega t}\boldsymbol{n} \tag{14}$$

$\boldsymbol{n}$ 为法向单位矢量,如图 2 所示,指向曲线内凹一侧,可由 $\boldsymbol{\tau}$ 旋转 90°得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=(-\sin(\omega t+\alpha),\cos(\omega t+\alpha))\ (\omega>0)\\ \boldsymbol{n}&=(\sin(\omega t+\alpha),-\cos(\omega t+\alpha))\ (\omega<0)\end{aligned} \tag{15}$$

所以全加速度大小

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=a(b^2+1)\omega^2e^{b\omega t} \tag{16}$$

如图 2 所示,它与切向加速度之间的夹角的余切为

$$\cot\beta=\left|\frac{a_t}{a_n}\right|=|b| \tag{17}$$

所以 $\beta=\operatorname{arccot}|b|(0<\beta<\pi/2)$,此角度恰好等于对数螺线的倾斜度或其补角,结合对数螺线的等角性得出结论: 全加速度的方向恰为径矢方向或者与之关于内法线轴对称的方向。

根据《理论力学》中加速度在极坐标系中的投影式,将方程(3) 与 $\theta=\omega t$ 代入,计算结果如下:

$$\begin{aligned}a_\rho&=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=a(b^2-1)\omega^2e^{b\omega t}\\ a_\theta&=2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}=2ab\omega^2e^{b\omega t}\end{aligned} \tag{18}$$

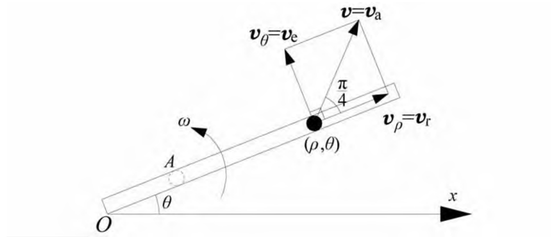
容易验证

$$\sqrt{a_\rho^2+a_\theta^2}=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=a \tag{19}$$

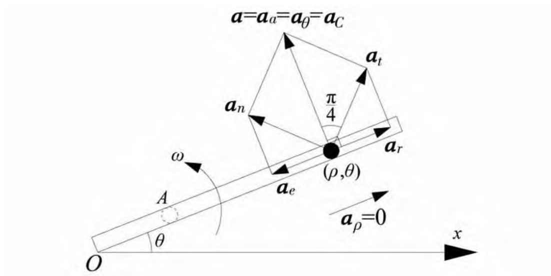
a_ρ 即为全加速度在径矢方向的投影,因为 a、b 和 ω 都不等于 0,所以 a_θ 肯定不为 0,也就是全加速度在 θ 方向必然有分量。假设质点沿着对数螺线逆时针转动($\omega>0$) ,不管作变加速运动($b>0$) 还是作变减速运动($b<0$) ,全加速度的方向一定是沿着与径矢关于内法线轴对称的方向,且指向曲线内凹一侧,如图 2 所示; 而顺时针转动($\omega<0$) 的情况正好相反。

2 应用实例

如图 3 所示,内壁光滑的直管在水平面内绕其端点 O 以匀角速度 ω 转动,设初始时刻 $t=0$,此时直管位于 Ox 轴,质量为 m 的小球相对静止于管内 A 点,$OA=k$。随着直管的转动,小球在离心力的作用下被甩出。



(a) 小球的速度



(b) 小球的加速度

图 3 匀速转动光滑直管内小球的离心运动

设 t 时刻小球的极坐标为(ρ,θ) ,如果以地面为定参考系,小球的绝对速度为 $\boldsymbol{v}_a$,绝对加速度即全加速度为 $\boldsymbol{a}_a$; 如果以转动的直管为动参考系,小球的相对速度为 $\boldsymbol{v}_r$,相对加速度为 $\boldsymbol{a}_r$。牵连点为 A 点,牵连速度为 $\boldsymbol{v}_e$,牵连加速度为 $\boldsymbol{a}_e$,由于

牵连运动为定轴转动，所以小球存在科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$。根据文献[4]中的结论，在直管旋转半圈后，即 $\theta > \pi$ 时，小球的运动轨迹近似为对数螺线，此时小球的运动轨迹方程为：

$$\rho(t) = \frac{ke^{\omega t}}{2} \ (k > 0, \omega > 0, \omega t > \pi) \tag{20}$$

对比方程(3)，显然 $a = k/2$，$b = 1$，所以此对数螺线的倾斜度 $\alpha = \pi/4$。

2.1　小球的速度

在定参考系中分析小球在 t 时刻的速度，将 a 和 b 代入式(7)，得小球的线速度即绝对速度：

$$v = v_a = \frac{\sqrt{2}}{2} k\omega e^{\omega t} = \sqrt{2}\ \rho(t)\ \omega\boldsymbol{\tau} \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = (\cos(\omega t + \pi/4), \sin(\omega t + \pi/4))$，从图 3(a)中可以看出小球的速度方向与直管径向的夹角即为此对数螺线的倾斜度。

在转动参考系中分析小球的速度，将 a 和 b 代入式(10)，并且小球的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 和牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 的大小与速度在极坐标系中的投影满足

$$\begin{aligned} v_r &= v_\rho = \frac{k\omega}{2} e^{\omega t} = \rho(t)\ \omega \\ v_e &= v_\theta = \frac{k\omega}{2} e^{\omega t} = \rho(t)\ \omega \end{aligned} \tag{22}$$

所以小球的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 刚好等于速度在极坐标系中的径向分量 $\boldsymbol{v}_\rho$，而牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 刚好等于速度在极坐标系中的环向分量 $\boldsymbol{v}_\theta$，方向如图 3(a)所示，结论和文献[4]一致。

如果从不同参考系的角度理解速度矢量的合成，即

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_\rho + \boldsymbol{v}_\theta = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e \tag{23}$$

2.2　小球的加速度

在定参考系中用自然轴系分析小球在 t 时刻的加速度，将 a 和 b 分别代入式(11)、式(14)和式(16)，得小球切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 的大小：

$$a_t = a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} k\omega^2 e^{\omega t} = \sqrt{2}\ \rho(t)\ \omega^2 \tag{24}$$

方向如图 3(b)所示，得小球全加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小即绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$ 的大小：

$$a = a_a = k\omega^2 e^{\omega t} = 2\rho(t)\ \omega^2 \tag{25}$$

根据上面的结论得知全加速度方向与速度方向夹角也等于 $\pi/4$，由于小球作变加速运动，如图 3(b)所示全加速度方向必然与直管垂直，指向极角增大的地方。

在转动参考系中分析小球的加速度，将 a 和 b 代入式(18)，得 $a_\rho = 0$，从式(18)中可以看出加速度的径向分量 $\boldsymbol{a}_\rho$ 中的第一项即相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$，第二项即牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$，二者大小相等，方向相反，如图 3(b)所示，即

$$a_r = a_e = \rho(t)\ \omega^2 \tag{26}$$

而式(18)中的环向分量 $\boldsymbol{a}_\theta$ 即为小球的科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$，所以

$$a_\theta = a_C = k\omega^2 e^{\omega t} = 2\omega v_r = 2\rho(t)\ \omega^2 \tag{27}$$

方向如图 3(b)所示，结论和文献[4]一致。

如果从不同参考系的角度理解加速度矢量的合成，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_\rho + \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_C \\ &= \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_C \end{aligned} \tag{28}$$

3　结语

对数螺线最重要的几何性质就是等角性，结论刚好验证了这一性质。可见在一般曲线运动中，质点的切向和法向加速度均为常数这个条件，只是运动轨迹为对数螺线的充分但非必要条件。以匀速转动的水平光滑直管内小球的离心运动为例，运用本文的计算公式，验证了文献[4]结论的正确性，并且清楚地阐明了质点分别在自然轴系、极坐标系和动参考系中速度矢量和加速度矢量的内在统一性。

参考文献：

[1]　哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学：I[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2009.

[2]　李力. 简证对数螺线的数理性质[J]. 大学物理，2015(7)：13－14.

[3]　严导淦. 对数螺线及其物理意义[J]. 物理与工程，2013(5)：5－9.

[4]　邵云. 匀速转动的水平光滑直管内小球的离心运动研究[J]. 安庆师范大学学报(自然科学版)，2022(2)：95－98.

[5]　同济大学应用数学系. 高等数学：上[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2002.

[6]　同济大学应用数学系. 高等数学：下[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2002.

(责任编辑：疆　涌)