

# 生产速率可调整时现货型生产系统的最优生产决策研究

陈柳鑫, 杨建超\*, 于 彤

(河海大学 商学院, 江苏 南京 211100)

**摘要:** 本文针对现货型生产系统, 研究其生产速率可调整情况下的最优库存决策问题。生产系统有高速率、低速率生产或者暂停生产这三种生产状况。本文以长期折扣利润最大化为目标, 研究其最优生产决策。假设需求过程为泊松过程, 生产时间间隔服从指数分布。本文首先将该问题抽象为连续时间下的马氏决策过程, 并构建无穷周期下的折扣生产利润最大化为目标的 HJB 方程。其次, 进一步对模型结构性质进行分析, 最终获得使利润最大化的动态库存控制决策, 即: 当库存量大于高存储点时, 系统停止生产; 当库存量小于低存储点时, 系统以高速率生产; 当库存量介于两个存储点之间时, 则以低速率生产。最后, 在最优策略分析的基础上进行模型算例分析。

**关键词:** 生产速率可调整; 现货型生产系统; 生产速率决策; HJB 方程; 阈值策略

**中图分类号:** C93      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1004-6062(2023)06-0257-010

**DOI:** 10.13587/j.cnki.jieem.2023.06.021

## 0 引言

中国是世界第一制造大国, 依据联合国工业发展组织数据, 中国 22 个制造业大类行业增加值居世界前列, 其中纺织、服装、皮革与基本金属等产业增加值占世界比重超过 30%<sup>[1]</sup>。中国制造业增加值占世界比重不断增大, 在制造业取得举世瞩目成就的同时, 应注意到我国与欧美等发达国家的差距, 我国制造业技术密集度不高, 仍属于中低技术密集型, 人力等资源要素投入成本仍占生产成本的比重较大, 由此可知, 我国大多劳动密集型制造业的生产厂商或企业(下文简称生产厂商或企业), 要提高其生产能力, 往往需要加大人力资源、设备资源等要素的投入<sup>[2]</sup>。

随着我国市场经济的深入发展, 生产厂商或企业针对当前需求订单的波动, 提出柔性制造的全新制造模式, 即生产厂商或企业依据当前的库存水平, 对其生产速率进行动态地调整, 与需方的订单量进行有效地匹配, 从而形成生产速率可柔性化调整的新型生产模式, 实现生产厂商或企业长期折扣利润最大化的目标。由于生产厂商或企业仍处于中低技术密集型, 在短时间内难以通过流程优化、技术创新等手段迅速提升其生产速率, 而只能通过增加(减少)资源要素的投入来缓解需求旺季(淡季)导致的库存短缺(积压)的失衡问题<sup>[2]</sup>。一方面, 在需求淡季, 生产厂商或企业减少生产要素的投入, 将生产速率降低至一定的水平, 以避免需求不足产生的库存积压问题; 另一方面, 在需求旺季, 生产压力增大、劳动力资源等供应紧张, 生产要素投入的增加虽然能够提高生产速率, 但是会导致生产成本进一步加大。相关学者研究指出, 需求旺季将影响订单合同生产周期的柔性, 部分生产厂商或企业会在生产周期不具柔性的情形下, 采取生产外包

的方式, 以期在短期内提升产能, 但这会导致生产成本的增加<sup>[3]</sup>。值得注意的是, 针对现货型生产系统, 受到生产厂商或企业生产产能, 以及不同生产速率下生产成本不同的双重约束, 如何对现货型生产系统的库存水平进行有效控制, 是生产厂商或企业实现长期折扣利润最大化目标的关键<sup>[4]</sup>。也就是说, 如何在生产厂商或企业内柔性地控制生产速率, 助力企业更好地应对淡旺季需求波动, 达到长期折扣利润最大化的目标, 是当前生产厂商或企业面临的主要问题。综上, 从生产厂商或企业生产速率动态控制的视角, 对生产厂商或企业的生产速率进行柔性地调整, 在不同生产速率下保持其盈利的能力, 是解决上述问题的主要途径(据全球纺织网对于 ZARA、Baleno 等服装品牌相关生产案例, 针对需求订单的波动, 提出增加或减少生产资源要素的投入来柔性地动态调控生产速率)。

本文进一步考虑生产厂商或企业的在生产过程中存在如下情形, 在订单生产任务下达后, 生产厂商或企业的生产单元无法在短期内通过流程优化、技术创新等手段, 达到既降低成本又提高生产速率的目标, 为此, 生产厂商或企业只能通过增加(减少)资源要素的投入来实现生产速率的提升(降低)。研究假设生产厂商或企业的生产单元可以依据当前的库存水平, 对生产速率在一定范围内进行柔性地动态调整, 即, 一方面, 当生产厂商或企业发现当前库存水平较高时, 将采取低生产速率或停止生产的方式进行生产; 另一方面, 当生产厂商或企业发现当前库存水平较低, 甚至出现缺货时, 将采取高生产速率的生产方式进行生产。生产厂商或企业的生产单元在提高生产速率进行生产时, 需要加大相关资源要素的投入, 其生产成本会随着生产速率的提升而增

**收稿日期:** 2021-06-11

**基金项目:** 国家社会科学基金资助项目(19BGL181、19ZDA084); 江苏省社会科学基金项目(21GLA001); 云南红云红河集团科技项目(HYHH2020XX02)

**\* 通讯作者:** 杨建超(1983—), 四川成都人; 河海大学商学院博士后; 研究方向: 物流与供应链管理。

加。例如,高生产速率进行生产,将导致生产设备或设施更高的损耗,员工加班增多或增加临时聘用人员等,将产生更高的生产成本(具体详见全球纺织网中 ZARA、Baleno 等服装品牌案例,其在销售旺季由于员工加班或为进一步增加产量而使用更昂贵的生产设备,导致边际生产成本增加)。此外,当生产厂商或企业的库存水平较高时,生产厂商或企业将选择减少相关资源要素的投入,使得生产单元降低生产速率来匹配外部市场订单需求。由此可见,劳动密集型生产厂商或企业会依据外部市场订单需求波动对其库存水平的影响,在生产过程中柔性地选择高速率生产、低速率生产或停止生产,以达到生产厂商或企业长期折扣利润最大化的目标。

本文以生产控制、库存控制、库存管理等为核心关键词,对国内外相关研究进行梳理与总结,国内外对于该领域的研究较为丰富。从生产制造系统中库存管理与库存控制的视角来看,研究一般以库存水平作为生产系统的状态变量,库存持有成本与缺货成本为主要的成本量化指标,以库存持有成本与缺货成本最小化为目标函数。即库存水平达到或超过一定的阈值水平后,生产厂商将停止生产;当库存水平低于一定的阈值水平后,生产厂商将开始生产,以达到最小化库存持有成本与缺货成本的目的<sup>[5-9]</sup>。Gavish 和 Graves、Sobel 是较早针对单一产品生产制造系统进行研究的学者,文中对单个产品的库存管理的阈值策略进行刻画,研究证明单个产品的库存控制的最优阈值策略的存在性<sup>[8-9]</sup>。在前述学者研究的基础上,Wein、Veach 和 Wein、Ha、Bertsimas 和 Paschalidis 等学者将单一产品库存管理的阈值策略扩展至多种类别产品库存管理中,研究进一步对多种类别产品库存管理的最优阈值水平进行分析<sup>[10-13]</sup>。Zheng 和 Zipkin 针对库存控制与生产速率间的关系进行研究,将生产系统中的订单需求抽象为队列中的排队队长,提出优先满足排队队长最大队列的生产策略(the longest queue first)<sup>[14]</sup>。Pang、Shen 和 Cheng 提出允许批量生产,以及设备会损坏情形下生产系统库存控制的最优策略<sup>[15]</sup>。也有学者针对易逝性产品库存控制问题进行研究,如,Chen、Li 和 Yang 等对易腐性产品的库存控制问题进行研究,提出易腐性产品库存的最优控制策略,并对模型的敏感性进行分析<sup>[16]</sup>。综上,前述研究主要针对最小化库存持有成本与缺货成本为目标函数,对单一产品或多种类别产品库存控制的最优策略进行分析,但是上述文献并未以生产厂商或企业生产利润最大化为目标进行研究,对于生产速率的动态控制,更多局限于不生产或生产两种决策,未涉及生产速率改变所引起的生产成本变化。为此,本文将在前述研究的基础上,以生产厂商或企业长期折扣利润最大化为目标,综合考虑不同生产速率导致的产生成本变化,以产品库存水平为状态变量,基于动态的视角,对生产厂商或企业生产速率如何柔性地动态调控进行决策,并获得生产速率动态调控的最优策略。

针对生产厂商或企业长期折扣利润最大化为目标的研究中,国内外的相关研究更多聚焦于最优的产品动态定价策略、生产策略与库存控制策略的研究<sup>[17]</sup>。比较具有代表性的有,Li 针对外部市场需求受不同销售价格波动的影响,以生产厂商或企业长期折扣利润最大化为目标,对实现生产厂商或企业长期折扣利润最大化的最优生产策略进行分

析<sup>[18]</sup>。Chen、Feng 和 Ou 针对离散化价格与需求间单调递减关系,对生产厂商与企业最优生产策略进行研究<sup>[19]</sup>。Chen、Chen 和 Pang 以现货型生产系统为研究对象,在市场信息透明化的前提下,对库存控制与动态定价的联合管理策略进行刻画<sup>[20]</sup>。Yang、Yu 和 Huang 研究运用短视策略(myopic policy)分析串行的库存系统,针对批量订购问题,研究提出短视策略最优的存在条件<sup>[21]</sup>。Chen、Feng 和 Hao 考虑批量需求的情形下,对最优的生产策略与库存控制策略进行研究<sup>[22]</sup>。Yang、Chen 和 Zhou 考虑单一产品的动态定价与库存控制问题,从产能不确定的视角,提出产品价格与产品库存的最优动态控制策略<sup>[23]</sup>。综上,前述研究虽然从产品定价对生产与库存水平的影响进行分析,但是缺乏从生产速率动态控制对需求与库存水平的影响进行分析,尤其鲜见在生产厂商或企业长期折扣利润最大化的目标下,如何通过生产速率的动态调整与库存水平间的相互作用关系分析,获得最优的生产速率控制策略。为此,本文将基于动态的视角,以生产厂商或企业长期折扣利润最大化为目标,基于不同的库存水平,分析最优的生产速率柔性动态控制策略。

针对生产厂商或企业生产速率控制的研究,国内外主要从生产系统生产速率静态与动态控制模型两个方面进行研究。从静态模型研究方面来看,夏西强和朱庆华通过外包再制造模式,利用博弈模型对再制造设计对制造与再制造生产系统的影响进行研究,提出生产收益最大化目标下再制造产品与新产品最优配比的阈值制造策略<sup>[24]</sup>。曹裕、吴堪和熊寿遥提出需求订单准入策略,利用理想点法(TOPSIS)评估订单与理想订单的接近程度,以此作为订单的综合收益,从而对新订单进行分层排序安排生产<sup>[25]</sup>。谢杏子和王秀丽提出针对不同类型订单的机器加工调度的拉格朗日松弛算法,该算法能够获得机器加工生产的近似最优解<sup>[26]</sup>。蔺宇、李雅娇和史英杰考虑产品缺货成本、库存持有成本与生产成本最小化的目标下,利用排队模型,分析最优看板数量与不同生产阶段中机器生产速率的单调关系<sup>[27]</sup>。李维及谭庆德研究生产时长期服从 Erlang 分布的生产系统,对其最优的生产策略进行研究<sup>[28]</sup>。郑睿及吕文元在生产设备可能损坏的情形下,提出生产与机器维修的联合控制策略<sup>[29]</sup>。田雪雁和潘尔顺研究指出在生产系统中存在机器损坏的情形,研究提出估计机器损坏与修复的概率,对生产系统的最优生产策略进行研究<sup>[30]</sup>。Yang、Hu 和 Zhou 针对生产与零售间的多层级关系,以及零售商具有厌恶风险的特征,运用报童模型与条件价值风险值(CVAR)分析技术,探讨生产、销售库存集中化的控制问题<sup>[31]</sup>。然而,上述研究更多是基于单周期模型的视角,对生产系统最优的生产控制策略进行研究,未基于时间维度,在不同的时间点,对生产速率进行柔性地动态调整,难以获得此类问题最优的生产速率控制策略。

从生产速率动态控制模型的研究来看,相关的研究更多聚焦于生产与不生产的决策,肖勇波、陈剑和吴鹏针对产能与需求不确定情形下,对按订单装配生产(assembly-to-order)系统的最优库存水平与生产策略进行研究<sup>[32]</sup>。Feng 和 Yan 考虑需求服从泊松流,在无穷周期下,提出基于库存水平的生产阈值策略,当库存水平超过阈值水平后,生产系统采取不生产的策略;当库存水平低于阈值水平后,生产系统采取

全速生产的策略<sup>[33]</sup>。Tan 针对需求的波动性,研究提出生产与不生产间的调整时长服从指数分布,以生产成本最小化为目标,提出生产最优的阈值策略<sup>[34]</sup>。Martinell 和 Valigi 指出库存容量有限的情形下,对单一设备的生产系统进行研究,研究提出最优安全库存策略对生产系统进行控制<sup>[35]</sup>。由此可见,对生产速率柔性动态调控的研究中,更多聚焦于生产与不生产两种情形的决策,这与生产厂商或企业的现实情况不符。此外,运用不同的生产速率进行生产,会产生不同的生产成本,仅关注高速率生产或不生产两种决策,难以实现生产厂商或企业长期折扣利润最大化的目标。在汲取前述理论研究成果的基础上,依托生产厂商或企业在生产过程中的现实情景,本文提出其生产过程中拥有高速率生产、低速率生产或不生产三种情形,以及采取不同的生产速率,将产生不同的生产成本。在需求不确定的情形下,为实现生产厂商或企业长期折扣利润最大化的目标,亟待对生产厂商或企业最优的生产动态调控策略进行研究。

综上,通过对国内外相关研究的梳理与总结,本文将聚焦于生产厂商或企业的生产单元,通过对生产单元的生产速率柔性地动态调控,实现生产厂商或企业长期折扣利润最大化的目标。不失一般性,本文将假设生产厂商或企业的生产单元在生产过程中存在高速率生产、低速率生产与不生产三种不同的生产决策,在无穷周期下,以生产厂商或企业折扣利润最大化为目标,将该问题抽象为连续时间下的马尔可夫决策模型(markov decision process),推导出汉密尔顿-雅可比-贝里曼(hamilton-jacobi-bellman, HJB)方程,应用算子理论对模型的结构性质与最优的生产速率柔性控制策略进行刻画,最终获得最优生产速率调控的阈值策略。

本文余下部分的组织如下:第二部分对模型假设、模型参数设置、模型目标函数等进行设置与描述;第三部分应用算子理论对模型结构性质进行分析,研究该生产系统生产速率最优的控制策略,以及模型算例分析等;第四部分对全文进行总结并提出未来研究的展望。

## 1 模型的构建

### 1.1 模型参数设置

$a_i$  其中  $i = 1, 2$ , 表示现货型生产系统的生产单元生产单位产品的时长服从参数为  $a_i$  的指数分布,其中平均生产时长为  $1/a_i$ ;

$\lambda$  表示现货型生产系统的需求到达服从参数为  $\lambda$  的泊松流,其中  $\lambda$  为到达率;

$c_i$  其中  $i = 1, 2$ , 表示现货型生产系统以  $a_i$  生产速率进行生产时,单位时间的生产成本为  $c_i$ ;

$x(t)$  表示现货型生产系统  $t$  时刻时的库存水平;

$c(x)$  表示库存水平  $x$  下,现货型生产系统的库存持有成本与缺货成本,即,  $c(x) = c^+ x^+ + c^- x^-$ , 其中  $x^+ = \max(0, x)$ ,  $x^- = \min(0, x)$ ;

$p$  表示现货型生产系统销售单位产品所获得的收益;

$\mu(t)$  表示现货型生产系统  $t$  时刻时生产单元的生产速率;

$N^u(t)$  表示现货型生产系统在  $t$  时刻时所到达的总的

需求量;

$P^u(t)$  表示现货型生产系统在  $t$  时刻时所生产的总产品量;

$\gamma$  表示折扣因子,其中,  $0 < \gamma < 1$ 。

### 1.2 模型假设

**假设 1** 现货型生产系统的生产单元拥有三种不同的生产速率,其中  $a_1$  表示高速率生产,  $a_2$  表示低速率生产,为分析的方便,设定  $a_3$  表示 0 速率生产(不生产),  $a_1 > a_2 > a_3 = 0$ ;

**假设 2** 现货型生产系统的生产单元采用不同的生产速率进行生产时,单位时间内的生产成本与生产速率呈单调递增的相关关系,即生产单元以高速率进行生产的单位时间成本大于生产单元以低速率生产的单位时间成本,为分析的方便,假设现货型生产系统的生产单元停止生产时的成本为 0, 即,  $c_1 > c_2 > c_3 = 0$ ;

**假设 3** 为使得本文研究的现货型生产系统能够达到稳态,假设  $a_2 > \lambda$ ;

**假设 4** 现货型生产系统生产单元从高速率生产切换为低速率生产的生产单位产品的边际成本小于单位产品的收益,即  $p > \frac{a_2 c_2 - a_1 c_1}{a_2 - a_1}$ , 现货型生产系统通过生产才能够获得更多的生产利润;

**假设 5** 当需求到达时,达到的需求均为一个单位产品。若当前现货型生产系统的库存水平非正,则需求加入等待队列,并按照先到先服务的规则,依次对等待队列中的需求供货;

**假设 6** 当需求到达时,若当前现货型生产系统的库存水平非正,本文为分析方便,提出需求加入等待队列后,生产厂商或企业也立即获得收益  $p$ ;

**假设 7** 现货型生产系统低速率的生产成本小于缺货的折扣成本  $c_2 < c^-/\gamma$ , 即,一旦出现缺货,生产厂商或企业生产单元需要进行生产,才能够使得利润函数值增加。

### 1.3 模型构建

鉴于不同需求到达的时间间隔与生产时长均服从指数分布,现货型生产系统具有无记忆性的特征,本文将该问题抽象为连续时间下的马尔可夫决策问题<sup>[36-38]</sup>。

假设  $u = \{\mu(t); t > 0\}$  为系统不可预见的现货型生产系统生产单元生产速率的柔性动态控制策略,  $U$  为所有控制策略的集合,其中,  $u \in U$ 。那么从初始库存水平  $x(0)$  开始,现货型生产系统在无穷周期下生产的折扣利润函数  $J^u(t)$  为:

$$J^u(x) = E \left\{ \int_0^\infty e^{-\gamma t} [p dN^u(t) - \sum_{i=1}^2 c_i dP^u(t) - c(x^u(t))] dt \right\} \quad (1)$$

若  $u^* \in U$  满足  $J^{u^*}(x) = \sup_{u \in U} J^u(x)$ , 则称  $u^* \in U$  为现货型生产系统生产单元生产速率的最优柔性动态控制策略。

本文利用 Lippman 变换,令  $\beta = \lambda + a_1 + a_2$ , 重新定义时间尺度(redefine the time scale),不失一般性,令  $\beta + \gamma = 1$ , 从而进一步简化模型<sup>[39]</sup>。由马尔可夫决策理论<sup>[40-41]</sup>,  $J(x)$  满足如下最优方程(HJB 方程),具体如公式(2)所示:



$$J(x) = -c(x) + \lambda[J(x-1) + p] + \max\{a_1[J(x+1) - c_1] + a_2J(x), a_1J(x) + a_2[J(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)J(x)\} \quad (2)$$

对于任意的函数  $J$ , 有  $J: \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}$ , 我们定义算子  $T_0$  如下:

$$T_0J(x) = \max\{a_1[J(x+1) - c_1] + a_2J(x), a_1J(x) + a_2[J(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)J(x)\} \quad (3)$$

由(2)与(3)式可知, 我们可以得到 HJB 方程:

$$J(x) = -c(x) + \lambda[J(x-1) + p] + T_0J(x) \quad (4)$$

同样的, 基于连续时间下的马尔可夫决策理论<sup>[40-41]</sup>, 我们所研究的 HJB 方程可以表述如下:

$$J(x) = TJ(x)$$

其中, 算子  $T$  对于任意的函数  $J, J: \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}$ , 定义如下:

$$TJ(x) = -c(x) + \lambda[J(x-1) + p] + T_0J(x) \quad (5)$$

在等式(5)中,  $-c(x)$  表示在库存水平  $x$  的状态下,  $t$  时刻系统地持有(缺货)成本;  $\lambda[J(x-1) + p]$  表示需求到达后, 库存水平将减少一个单位, 若库存水平  $x$  为正, 需方直接获得一个单位的产品, 生产厂商或企业获得收益  $p$ ; 库存水平  $x$  为负时(缺货), 相当于需求进入等待队列, 生产厂商或企业按照先到先服务的规则进行生产, 并获得预先支付的收益  $p$ ;  $T_0J(x)$  表示在生产单元生产制造环节, 生产厂商或企业的生产单元选择以何种速率进行生产的最优决策, 当选择生产速率  $a_1$  时, 表示在算子  $T_0$  作用下, 生产单元选择高生产速率进行生产, 能够最大化利润函数; 当选择生产速率  $a_2$  时, 表示在算子  $T_0$  作用下, 生产单元选择低生产速率进行生产, 能够最大化利润函数; 当选择不生产时, 表示在算子  $T_0$  作用下, 生产单元选择不生产能够最大化利润函数。

## 2 最优生产速率柔性动态控制策略的分析

### 2.1 模型结构性质

在本小节中, 我们将进一步刻画关于模型的结构性质, 具体内容如下:

**引理 1** 令函数  $f$ , 有  $f: \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}$ , 定义范数为  $\|f\| = \sup_x^{-1st} |f(x)| < \infty$ , 且  $f(x) \in W$ , 函数空间  $W$  是完备赋范空间, 且存在算子  $T$ , 对于任意的  $f(x) \in W$ , 有  $J = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n f$ .

**证明:** 依据 Porteus 中的定理 5.1<sup>[41]</sup>.

对于任意的函数  $f(x)$ , 我们定义一阶差分为:

$$Df(x) = f(x+1) - f(x) \quad (6)$$

以及二阶差分:

$$D^2f(x) = Df(x+1) - Df(x) \quad (7)$$

**定义 2** 我们定义  $W$  为  $\mathbf{Z}$  上的函数集合, 如果  $J \in W$ , 则有如下的条件成立:

①  $J(x+1) - J(x) \leq J(x) - J(x-1)$ , 即,  $DJ(x)$  是关于  $x$  的减函数;

② 当  $x \leq 0$  时,  $DJ(x) \geq 0$ .

接下来, 引理 2 将说明算子  $T$  保持条件①与②成立。

**引理 2** 如果  $J(x) \in W$ , 则  $TJ(x) \in W$ .

**证明:** 令函数  $f$ , 有  $f: \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}$ , 且满足条件①与条件②, 即:  $f(x+1) - f(x) \leq f(x) - f(x-1)$ ; 当  $x \leq 0$  时,  $Df(x) \geq 0$ .

令  $Tf(x) = -c(x) + \lambda[f(x-1) + p] + T_0f(x)$ ,

其中,  $T_0f(x) = \max\{a_1[f(x+1) - c_1] + a_2f(x), a_1f(x)$

$+ a_2[f(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)f(x)\}$ .

为证明成立  $Tf(x) \in W$ , 我们首先需要证明算子  $T_0$  能够保持条件①与②成立, 即:

$$\begin{aligned} DT_0f(x) &= T_0f(x+1) - T_0f(x) \\ &= \max\{a_1[f(x+2) - c_1] + a_2f(x+1) \\ &\quad + a_1f(x+1) + a_2[f(x+2) - c_2], (a_1 + a_2)f(x+1)\} \\ &\quad - \max\{a_1[f(x+1) - c_1] + a_2f(x) \\ &\quad + a_1f(x) + a_2[f(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)f(x)\} \\ &= \max\{a_1[f(x+2) - f(x+1) - c_1] \\ &\quad + a_2[f(x+2) - f(x+1) - c_2], 0\} \\ &\quad + \min\{a_1c_1 + a_2[f(x+1) - f(x)], a_1[f(x+1) - f(x)] \\ &\quad + a_2c_2, (a_1 + a_2)[f(x+1) - f(x)]\} \\ &= \max\{a_1[Df(x+1) - c_1], a_2[Df(x+1) - c_2], 0\} \\ &\quad + \min\{a_1c_1 + a_2Df(x), a_1Df(x) + a_2c_2, (a_1 + a_2)Df(x)\} \end{aligned}$$

上述表达式由于  $f(x) \in W$ , 且满足条件①与②成立, 由此可知,  $DT_0f(x)$  使得条件①与②成立, 即,  $T_0f(x) \in W$ .

其次, 由定义 1 与公式(5)可以发现, 算子  $T_0$  能够保持条件①与②成立。由定义 1,  $W$  在我们定义的范数  $\|J\| = \sup_x^{-1st} |J(x)| < \infty$  下为完备赋范空间, 因此有  $J = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n f$ ,  $J(x) \in W$ , 即,  $DTJ(x)$  是关于  $x$  的减函数, 以及当  $x \leq 0$  时,  $DJ(x) \geq 0$ .

最后, 当库存水平  $x$  趋于无穷大时, 当  $DJ(x)$  有极限存在, 能够证明  $DTJ(x)$  在当库存水平  $x$  趋于无穷大时, 亦有极限存在, 则有  $TJ(x) \in W$  成立, 具体证明详见性质 1。

其中引理 2 表示生产厂商或企业的边际收益函数会随着库存量的增加而减少, 即库存量越大, 给生产厂商或企业带来更多的持有成本, 且单位库存所带来的边际收益会呈现递减的趋势。

### 2.2 最优生产速率柔性动态控制策略分析

依据引理 2, 函数空间  $W$  是完备赋范空间, 我们需要证明空间中存在柯西序列, 使得压缩映射  $T$  作用于  $\{J^{(n)}, n \geq 0\} \subset W$  函数序列上, 有  $J^*(x) \in W$ , 即, 存在唯一的不动点  $J^*(x)$  为该 HJB 方程的最优解。

**定理 1** 若  $J^*(x)$  是模型的最优利润函数, 则满足  $J^*(x) \in W$ .

**证明:** 当  $n \geq 0$  时,

$$\begin{aligned} J^{(n)}(x) &= -c(x) + \lambda[J^{(n-1)}(x-1) + p] \\ &\quad + \max\{a_1[J^{(n-1)}(x+1) - c_1] + a_2J^{(n-1)}(x), a_1J^{(n-1)}(x) \\ &\quad + a_2[J^{(n-1)}(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)J^{(n-1)}(x)\} \end{aligned}$$

如果, 当  $J^{(n-1)}(x) \in W$  时, 在  $J^{(n)}(x)$  定义的基础上, 进一步可知  $J^{(n)}(x) \in W$ , 于是有

$$\begin{aligned} J^{(n)}(x) - J^{(n-1)}(x) &= -c(x) + \lambda[J^{(n-1)}(x-1) + p] \\ &\quad + \max\{a_1[J^{(n-1)}(x+1) - c_1] + a_2J^{(n-1)}(x), a_1J^{(n-1)}(x) \\ &\quad + a_2[J^{(n-1)}(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)J^{(n-1)}(x)\} + c(x) \\ &\quad - \lambda[J^{(n-2)}(x-1) + p] - \max\{a_1[J^{(n-2)}(x+1) - c_1] \\ &\quad + a_2J^{(n-2)}(x), a_1J^{(n-2)}(x) + a_2[J^{(n-2)}(x+1) - c_2] \\ &\quad + (a_1 + a_2)J^{(n-2)}(x)\} \leq \lambda[J^{(n-1)}(x-1) - J^{(n-2)}(x-1)] \\ &\quad + \max\{a_1[J^{(n-1)}(x+1) - J^{(n-2)}(x+1)] \\ &\quad + a_2[J^{(n-1)}(x) - J^{(n-2)}(x)], a_1[J^{(n-1)}(x) - J^{(n-2)}(x)] \\ &\quad + a_2[J^{(n-1)}(x+1) - J^{(n-2)}(x+1)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2) [J^{(n-1)}(x) - J^{(n-2)}(x)] \} \\ & \leq (1 - \gamma) \sup |J^{(n-1)}(x) - J^{(n-2)}(x)| e^{-|x|} \\ & \leq (1 - \gamma) \sup |J^{(n-1)}(x) - J^{(n-2)}(x)| \end{aligned}$$

从上述分析可知,压缩映射  $T$  作用于  $\{J^{(n)}, n \geq 0\} \subset W$  函数序列上,进一步获得完备赋范空间中存在唯一的不动点,  $J^*(x)$  为该 HJB 方程的最优解。

其中定理 1 表示生产厂商或企业的最优利润函数在函数空间  $W$  内,且是前文 HJB 方程的最优解。在引理 2 与定理 1 的基础上,进一步可以获得生产厂商或企业生产单元生产速率的最优阈值控制策略,具体内容如下:

**定理 2** 最优策略是通过库存水平的阈值点来进行刻画,  $(D_1^*, D_2^*)$  由如下式子所决定:

$$\begin{aligned} D_1^* &= \max \left\{ x \in \mathbf{Z}; DJ(x) \geq \frac{a_2 c_2 - a_1 c_1}{a_2 - a_1} \right\} \\ D_2^* &= \max \{ x \in \mathbf{Z}; DJ(x) \geq c_2 \} \end{aligned}$$

其中,有如下性质成立:

- (1)  $D_1^*$  满足  $DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(D_1^*) > \frac{a_2 c_2 - a_1 c_1}{a_2 - a_1}$   
 $> DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(D_1^* + 1)$ ;
- (2)  $D_2^*$  满足  $DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(D_2^*) > c_2 > DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(D_2^* + 1)$ ;
- (3) 利润函数  $J^{(D_1^*, D_2^*)}(x)$  满足条件①与条件②,且  $D_2^* \geq 0$

**定理 3** 若  $(D_1^*, D_2^*)$  策略为最优的  $(D_1, D_2)$  策略,则其利润函数  $J^{(D_1^*, D_2^*)}(x)$  满足 HJB 方程,即表明  $(D_1^*, D_2^*)$  为全局最优策略。

**证明:**若  $(D_1^*, D_2^*)$  策略为最优  $(D_1, D_2)$  策略,则由引理 2 可知  $J^{(D_1^*, D_2^*)}(x)$  满足条件①与条件②,即  $DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(x)$  随着  $x$  的增加而减少,于是有

$$\begin{aligned} \forall x < D_1, DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(x+1) &\geq DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(D_1^*) \geq \frac{a_2 c_2 - a_1 c_1}{a_2 - a_1}; \\ \forall x \geq D_2, DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(x+1) &\leq DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(D_2^* + 1) < c_2 < c_1; \text{ 并且,} \\ D_1 &\leq x \leq D_2 - 1, \end{aligned}$$

$$c_2 \leq DJ^{(D_1^*, D_2^*)}(x+1) < \frac{a_2 c_2 - a_1 c_1}{a_2 - a_1}$$

其中定理 3 表明,  $J^{(D_1^*, D_2^*)}(x)$  满足 HJB 方程,即存  $(D_1^*, D_2^*)$  策略为全局最优策略。

**性质 1** 对于利润函数  $J(x)$  的一阶差分  $DJ(x)$ , 有下列性质成立:

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} DJ(x) &= -\frac{c^+}{\gamma}; \\ (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} DJ(x) &= \frac{c^-}{\gamma}. \end{aligned}$$

**证明:**令函数  $f$ , 有  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ , 且满足条件①与条件②, 有下列性质成立, 即:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Df(x) = -\frac{c^+}{\gamma}, \lim_{x \rightarrow -\infty} Df(x) = \frac{c^-}{\gamma}.$$

$$\begin{aligned} \text{令 } Tf(x) &= -c(x) + \lambda[f(x-1) + p] + T_0 f(x), \\ \text{其中, } T_0 f(x) &= \max \{ a_1[f(x+1) - c_1] + a_2 f(x), a_1 f(x) \\ &+ a_2[f(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)f(x) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } DT_0 f(x) &= T_0 f(x+1) - T_0 f(x) \\ &= \max \{ a_1[f(x+2) - c_1] + a_2 f(x+1) \\ &+ a_1 f(x+1) + a_2[f(x+2) - c_2], (a_1 + a_2)f(x+1) \} \\ &- \max \{ a_1[f(x+1) - c_1] + a_2 f(x) \\ &+ a_1 J(x) + a_2[f(x+1) - c_2], (a_1 + a_2)f(x) \} \\ &= \max \{ a_1[f(x+2) - f(x+1) - c_1] \\ &+ a_2[f(x+2) - f(x+1) - c_2], 0 \} + (a_1 + a_2)f(x+1) \\ &- \max \{ a_1[f(x+1) - f(x) - c_1] \\ &+ a_2[f(x+1) - f(x) - c_2], 0 \} - (a_1 + a_2)f(x) \\ &= \max \{ a_1[Df(x+1) - c_1], a_2[Df(x+1) - c_2], 0 \} \\ &- \max \{ a_1[Df(x) - c_1], a_2[Df(x) - c_2], 0 \} \\ &+ (a_1 + a_2)Df(x) \end{aligned}$$

在当库存水平  $x$  趋向于正无穷时, 即

$$x \rightarrow +\infty, \text{ 有 } DT_0 f(x) \rightarrow -(a_1 + a_2) \frac{c^+}{\gamma};$$

在当库存水平  $x$  趋于负无穷时, 即

$$x \rightarrow -\infty, \text{ 有 } DT_0 f(x) \rightarrow (a_1 + a_2) \frac{c^-}{\gamma}.$$

由(5)式可知,在当库存量  $x$  趋于正无穷时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} DTf(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-c^+ + \lambda Df(x-1) + DT_0 f(x)) \\ &= -c^+ - (\lambda + a_1 + a_2) \frac{c^+}{\gamma} = -\frac{c^+}{\gamma} \end{aligned}$$

由(4)式可知,在当库存量  $x$  趋于负无穷时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} DTf(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-c^- + \lambda Df(x-1) + DT_0 f(x)) \\ &= -c^- + (\lambda + a_1 + a_2) \frac{c^-}{\gamma} = \frac{c^-}{\gamma} \end{aligned}$$

上述表明算子保持的极限性质(iv)与(v), 由  $J(x) \in W$ ,  $W$  在我们定义的范数  $\|J\| = \sup_x |J(x)| < \infty$  下为完备赋范空间, 因此有  $J = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n f$ . 于是有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} DJ(x) = -\frac{c^+}{\gamma}$  与  $\lim_{x \rightarrow -\infty} DJ(x) = \frac{c^-}{\gamma}$  成立。

上述性质 1 说明: 当  $x \rightarrow +\infty$ , 即, 利润函数  $J(x)$  在库存水平  $x$  取足够大的正数时, 其一阶差分趋于常数  $-\frac{c^+}{\gamma}$ ; 当  $x \rightarrow -\infty$ , 即, 利润函数  $J(x)$  在库存水平  $x$  取足够小的负数时, 其一阶差分趋于常数  $\frac{c^-}{\gamma}$ 。

### 2.3 最优生产速率柔性动态控制策略的模型算例分析

由于生产厂商或企业的生产单元采用高生产速率时会产生更高的生产成本, 那么生产厂商或企业更关注高生产速率发生改变, 其对最优的生产速率调控策略产生的影响。为此, 本文将进一步对生产厂商或企业的生产单元高生产速率发生改变时, 其对最优的阈值策略影响的灵敏度进行分析, 具体内容如下:

**性质 2** 假设  $\lambda, a_2, c_1, c_2, p$ , 以及  $c^+, c^-$  固定, 但是生产系统的最高生产速率  $a_1$  可变, 则有如下性质成立:

对于任意  $a'_1 > a_1$ , 如果  $J(x, a'_1), J(x, a_1) \in W$ , 以及

$J(x, a'_1), J(x, a_1)$  满足如下不等式:

$$DJ(x, a'_1) - DJ(x, a_1) \geq 0,$$

则  $DTJ(x, a'_1) - DTJ(x, a_1) \geq 0$  同样满足上述不等式。

**证明:** 由  $TJ(x) = -c(x) + \lambda[J(x-1) + p] + T_0J(x)$ , 故而只需要证明算子保持上述不等式成立。

其中由公式(3),

$$\begin{aligned} DT_0J(x, a'_1) &= T_0J(x+1, a'_1) + T_0J(x, a'_1) \\ &= \max\{a'_1[J(x+2, a'_1) - c_1] \\ &\quad + a_2J(x+1, a'_1), a'_1J(x+1, a'_1) \\ &\quad + a_2[J(x+2, a'_1) - c_2], (a'_1 + a_2)J(x+1, a'_1)\} \\ &\quad - \max\{a'_1[J(x+1, a'_1) - c_1] + a_2J(x, a'_1) \\ &\quad + a'_1J(x, a'_1) + a_2[J(x+1, a'_1) - c_2], (a'_1 + a_2)J(x, a'_1)\} \\ &= \max\{a'_1[DJ(x+1, a'_1) - c_1] \\ &\quad + a_2[DJ(x+1, a'_1) - c_2], 0\} \\ &\quad - \max\{a'_1[DJ(x, a'_1) - c_1] + a_2[DJ(x, a'_1) - c_2], 0\} \\ &\quad + (a'_1 + a_2)DJ(x, a'_1) \end{aligned} \quad (8)$$

同理可得  $DT_0J(x, a_1)$ , 即

$$\begin{aligned} DT_0J(x, a_1) &= \max\{a_1[DJ(x+1, a_1) - c_1], \\ &\quad a_2[DJ(x+1, a_1) - c_2], 0\} - \max\{a_1[DJ(x, a_1) - c_1], \\ &\quad a_2[DJ(x, a_1) - c_2], 0\} + (a_1 + a_2)DJ(x, a_1) \end{aligned} \quad (9)$$

进一步, 由(8)减去(9)得

$$\begin{aligned} DT_0J(x, a'_1) - DT_0J(x, a_1) &= \max\{a'_1[DJ(x+1, a'_1) - c_1] \\ &\quad + a_2[DJ(x+1, a'_1) - c_2], 0\} - \max\{a'_1 \\ &\quad [DJ(x, a'_1) - c_1], a_2[DJ(x, a'_1) - c_2], 0\} \\ &\quad - \max\{a_1[DJ(x+1, a_1) - c_1], a_2[DJ(x+1, a_1) - c_2], 0\} \\ &\quad + \max\{a_1[DJ(x, a_1) - c_1], a_2[DJ(x, a_1) - c_2], 0\} \\ &\quad + DJ(x, a'_1) - DJ(x, a_1) \\ &\geq -\max\{a'_1[DJ(x, a'_1) - c_1] \\ &\quad + a_2[DJ(x, a'_1) - c_2], 0\} + \max\{a_1[DJ(x, a_1) - c_1] \\ &\quad + a_2[DJ(x, a_1) - c_2], 0\} \\ &\quad + DJ(x, a'_1) - DJ(x, a_1) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, 当  $DJ(x, \cdot) \leq c_2$ , 其中  $c_1 \geq c_2$ , 由(10)可得  $DJ(x, a'_1) - DJ(x, a_1) \geq 0$ ;

当  $c_2 < DJ(x, \cdot) \leq c_1$ , 由(10)可得  $DJ(x, a'_1) - DJ(x, a_1) \geq 0$ ;

当  $DJ(x, \cdot) > c_1$ , 由(10)可知:

**情形 1:** 若  $DJ(x, \cdot) - c_1 \geq DJ(x, \cdot) - c_2$ , (10) 式为:

$$a'_1c_1 - a_2c_2 > 0;$$

**情形 2:** 若  $DJ(x, \cdot) - c_1 < DJ(x, \cdot) - c_2$ , 当  $a'_1[DJ(x, a'_1) - c_1] \leq a_2[DJ(x, a'_1) - c_2]$ , (10) 等于  $DJ(x, a'_1) - DJ(x, a_1) \geq 0$ ;

当  $a_1[DJ(x, a_1) - c_1] \geq a_2[DJ(x, a_1) - c_2]$ , (10) 等于  $a'_1c_1 - a_2c_2 > 0$ ;

当  $a'_1[DJ(x, a'_1) - c_1] > a_2[DJ(x, a'_1) - c_2]$ , 且  $a_1[DJ(x, a_1) - c_1] < a_2[DJ(x, a_1) - c_2]$ , (10) 等于  $a'_1c_1 - a_2c_2 + a_2DJ(x, \cdot) - a_1DJ(x, \cdot) \geq 0$ , 其余情形类似证明。

综上, 有  $DT_0J(x, a'_1) - DT_0J(x, a_1) \geq 0$  成立, 则  $DTJ(x, a'_1) - DTJ(x, a_1) \geq 0$  同样使不等式成立。

性质 2 说明, 在生产厂商或企业生产单元的最高生产速

率提升, 且生产成本保持不变的情形下, 单位产品的边际利润将呈现递增的趋势。

进一步基于性质 2, 下面对参数赋值, 进行模型的数值算例分析, 假设  $a_2 = 15, p = 75, \lambda = 15, a_1$  在  $(15, 27)$  范围内变化, 关于费用的参数如下:  $c_1 = 25, c_2 = 20, c^+ = 20, c^- = 50$ 。注意到对于范围  $(15, 27)$  里的  $a_1$  总有  $p > \frac{a_2c_2 - a_1c_1}{a_2 - c_2}$ , 那么对于所有的  $a_1$ , 最佳存储点如图 1 所示。

如图 1 所示, 库存水平  $D_2$  会随着生产单元生产速率  $a_1$  的增大而减小, 在现实生产厂商或企业的实际案例中可以发现, 当生产速率持续增高, 表明生产厂商或企业的生产单元拥有较高的生产能力, 那么生产厂商或企业就不需要预留更多的安全库存, 以应对需求的波动对当前库存水平的影响。此外, 在生产单元生产速率  $a_1$  增大后, 库存水平  $D_1$  会随之而增大, 即生产单元生产能力提升后, 生产厂商或企业为了节约生产成本, 会更多选择生产单元以低速率来进行生产, 这与实际情形相吻合。

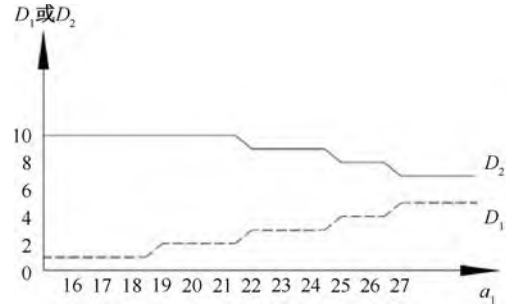


图 1 模型算例

Figure 1 A numerical study

### 3 多个生产速率情形下的最优长期折扣策略

#### 3.1 模型参数设置

$a_i$  其中  $i = 1, 2, \dots, n$ , 表示现货型生产系统生产单位产品的时长服从参数为  $a_i$  的指数分布, 其中平均生产时长为  $1/a_i$ ;

$c_i$  其中  $i = 1, 2, \dots, n$ , 表示现货型生产系统以  $a_i$  生产速率进行生产时, 单位时间的生产成本;

其余模型参数设置与 1.1 节一致。

#### 3.2 模型假设

**假设 8** 现货型生产系统的生产单元能够有  $n$  种不同的生产速率, 为分析的方便, 设定  $a_{n+1}$  表示 0 速率生产 (停止生产), 即,  $a_1 > a_2 > \dots > a_{n+1} = 0$ ;

**假设 9** 现货型生产系统的生产单元采用不同的生产速率进行生产时, 单位时间内的生产成本与生产速率呈单调递增的相关关系, 即生产单元以高速率进行生产的单位时间成本大于生产单元以低速率生产的单位时间成本, 其中,  $c_{n+1} = 0$ , 此外,  $c_1 > c_2 > \dots > c_{n+1} = 0$ ;

**假设 10** 现货型生产系统的生产单元随着生产速率的提升, 其边际生产成本呈现单调递增的关系, 即

$$\frac{a_1c_1 - a_2c_2}{a_1 - a_2} > \frac{a_2c_2 - a_3c_3}{a_2 - a_3} > \dots > \frac{a_nc_n - a_{n+1}c_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$$

其余模型假设与 1.2 节一致。

### 3.3 模型构建

利用 Lippman 变换,令  $\beta = \lambda + a_1 + \dots + a_n$ , 重新定义时间尺度 (Redefine the time scale), 不失一般性, 令  $\beta + \gamma = 1$  [39]。从而进一步简化模型, 类似地, 我们可以得到无穷周期下, 生产厂商或企业折扣生产利润函数  $J^u(x)$  满足如下 HJB 方程:

$$J(x) = -c(x) + \lambda[J(x-1) + p] + \max\{a_1[J(x+1) - c_1] + (a_2 + \dots + a_n)J(x), \dots, a_n[J(x+1) - c_n] + (a_1 + \dots + a_{n-1})J(x), (a_1 + \dots + a_n)J(x)\} \quad (11)$$

### 3.4 最优生产速率柔性动态控制策略

基于前述 2.2 节分析的结果, 我们可以获得最优生产速率柔性动态控制策略为阈值策略, 即, 存在  $n$  个阈值点  $(D_1, D_2, \dots, D_n)$ , 其中  $D_1$  表示高速率生产与低速率生产的速率切换点,  $D_n$  表示最大库存水平, 若当前库存水平小于等于  $D_1$  时, 生产厂商或企业的生产单元采取最高生产速率  $a_1$  进行生产; 若当前库存水平大于等于  $D_n$  时, 生产厂商或企业的生产单元采取停止生产; 当库存水平介于  $D_{i-1}$  与  $D_i$  之间时, 生产厂商或企业的生产单元采取速率  $a_i$  进行生产, 具体如 (12) 式所示:

$$\begin{cases} \mu(t) = 0 & x(t) \geq D_n \\ \dots\dots\dots \\ \mu(t) = a_i & D_{i-1} < x(t) \leq D_i \\ \dots\dots\dots \\ \mu(t) = a_1 & x(t) \leq D_1 \end{cases} \quad (12)$$

类似地, 由 HJB 方程 (12) 我们可以获得最优生产速率柔性动态控制策略为阈值策略, 同样最优生产速率的阈值控制策略满足 HJB 方程 (11), 具体如定理 4 所示:

**定理 4** 若  $(D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*)$  策略同时满足以下三个性质:

- (1)  $D_n^*$  满足  $DJ^{(D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*)}(D_n^*) > c_n$   
 $\geq DJ^{(D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*)}(D_n^* + 1),$
- (2)  $D_i^*$  满足  $DJ^{(D_1^*, D_2^*, \dots, D_i^*, \dots, D_n^*)}(D_i^*)$   
 $> \frac{a_{i+1}c_{i+1} - a_i c_i}{a_{i+1} - a_i} \geq DJ^{(D_1^*, D_2^*, \dots, D_i^*, \dots, D_n^*)}(D_i^* + 1)$
- (3)  $J^{(D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*)}(x)$  满足条件 ① 与条件 ②, 且  $D_n^* \geq 0,$

则  $(D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*)$  策略为最优的  $(D_1, D_2, \dots, D_n)$  策略, 且为全局最优策略。

## 4 结束语

在无穷周期下, 以生产厂商或企业折扣生产利润最大化为目标, 对生产厂商或企业生产单元最优的生产速率柔性调控策略进行研究。研究假设生产厂商或企业的生产单元生产产品的时长服从指数分布, 需求到达为泊松流, 生产厂商或企业生产单元能够以高速率、低速率或停止生产三种策略进行生产, 单位生产成本随着生产速率提升而增高。我们将该问题进一步抽象为连续时间下的马尔可夫决策模型, 通过推导出的 HJB 方程, 对最优生产速率柔性动态控制策略的结

构性质进行分析, 研究最终获得最优生产速率柔性动态控制策略为阈值策略, 即存在 2 个阈值点  $(D_1^*, D_2^*)$ , 其中  $D_1^*$  表示高速率生产与低速率生产的速率切换点,  $D_2^*$  表示最大库存水平, 当前库存水平小于等于  $D_1^*$  时, 生产厂商或企业的生产单元采取最高生产速率  $a_1$  进行生产; 当前库存水平大于等于  $D_2^*$  时, 生产厂商或企业的生产单元采取停止生产; 当库存水平介于  $D_1^*$  与  $D_2^*$  之间时候, 生产厂商或企业的生产单元采取低速率  $a_2$  进行生产。研究进一步对模型关键参数的性质进行理论分析, 以及模型数值算例分析。在研究的最后, 我们将高速率生产、低速率生产与停止生产的情形推广至具有  $n$  种不同的生产速率的情形, 同样获得最优生产速率柔性动态调控策略为阈值策略。

在后续的研究中, 可以将生产厂商或企业所生产产品从单一产品拓展至多种类型的产品, 将单一的需求拓展至多种类型的需求, 并综合考虑生产厂商或企业生产单元对生产不同产品的生产速率柔性动态控制问题与生产产品的动态定价问题, 进一步使研究的模型更具普适性与推广性。

## 参 考 文 献

- [1] 王家庭, 李艳旭, 马洪福, 等. 中国制造业劳动生产率增长动能转换: 资本驱动还是技术驱动 [J]. 中国工业经济, 2019, 374(5): 99-117.  
Wang J T, Li Y X, Ma H F, et al. What drives the transformation of labor productivity growth in China's manufacturing industry [J]. China Industrial Economics, 2019, 374(5): 99-117.
- [2] 李峥峰, 于小忠, 张国辉, 等. 考虑生产过程时间的柔性作业车间调度优化 [J]. 工业工程, 2020, 23(2): 26-33.  
Li Z F, Yu X Z, Zhang G H, et al. Optimization for the flexible job shop scheduling problems with production process time [J]. Industrial Engineering Journal, 2020, 23(2): 26-33.
- [3] Yang Y, Wang J, Chen Y, et al. Optimal procurement strategies for contractual assembly systems with fluctuating procurement price [J]. Annals of Operations Research, 2020, 291(1): 1027-1059.
- [4] Yang Y, Yuan Q, Xue W, et al. Analysis of batch ordering inventory models with setup cost and capacity constraint [J]. International Journal of Production Economics, 2014, 155: 340-350.
- [5] 代文强, 左永恒, 孙朝苑, 等. Make-to-Order 模式下多产品占线生产策略研究 [J]. 管理科学学报, 2020, 23(8): 101-108.  
Dai W Q, Zuo Y H, Sun C Y, et al. Multiproduct online production strategy in a make-to-order system [J]. Journal of Management Sciences in China, 2020, 23(8): 101-108.
- [6] 代建生. 两种订货模式下订购和促销联合优化策略 [J]. 管理工程学报, 2021, 35(1): 104-116.  
Dai J S. Joint optimization of ordering and promoting in two ordering modes [J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2021, 35(1): 104-116.
- [7] 常珊, 胡斌, 汪婷婷, 等. 柔性产能下按订单生产型供应链的协调研究 [J]. 系统工程学报, 2020, 35(5): 610-622.  
Chang S, Hu B, Wang T T, et al. Coordination of make-to-order supply chain with volume flexibility [J]. Journal of Systems Engineering, 2020, 35(5): 610-622.
- [8] Gvish B, Graves S. A one-product production/inventory problem under continuous review policy [J]. Operations Research, 1980,



- 28(5): 1228-1236.
- [9] Sobel M J. The optimality of full service policies[J]. *Operations Research*, 1982, 30(4): 636-649.
- [10] Wein L M. Dynamic scheduling of a multiclass make-to-stock queue[J]. *Operations Research*, 1992, 40(4): 724-735.
- [11] Veatch M H, Wein L M. Scheduling a make-to-stock queue: Index policies and hedging points[J]. *Operations Research*, 1996, 44(4): 634-647.
- [12] Ha Y. Optimal dynamic scheduling policy for a make-to-stock production system[J]. *Operations Research*, 1997, 45: 42-53.
- [13] Bertsimas D, Paschalidis I C. Probabilistic service level guarantees in make-to-stock manufacturing systems[J]. *Operations Research*, 2001, 49(1): 119-133.
- [14] Zheng Y S, Zipkin P. A queueing model to analyze the value of centralized inventory information[J]. *Operations Research*, 1990, 38(2): 296-307.
- [15] Pang Z, Shen H, Cheng T C E. Inventory rationing in a make-to-stock system with batch production and lost sales[J]. *Production and Operations Management*, 2014, 23(7): 1243-1257.
- [16] Chen S, Li Y, Yang Y, et al. Managing perishable inventory systems with age-differentiated demand[J]. *Production and Operations Management*, 2021, 30(10): 3784-3799.
- [17] 苏秦,王灿友. 考虑消费者定制的企业产品定价及生产方式决策[J]. *系统工程学报*, 2020, 35(5): 588-600.
- Su Q, Wang C Y. Enterprise product pricing and production mode decision by considering consumer customization[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2020, 35(5): 588-600.
- [18] Li L. A stochastic theory of the firm[J]. *Mathematics of operations research*, 1988, 13(3): 447-466.
- [19] Chen L, Feng Y, Ou J. Coordinating batch production and pricing of a make-to-stock product[J]. *IEEE Transaction on automatic control*, 2009, 54(7): 1674-1680.
- [20] Chen L, Chen Y, Pang Z. Dynamic pricing and inventory control in a make-to-stock queue with information on the production status[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2010, 8(2): 361-373.
- [21] Yang Y, Yu Y, Huang T. Myopic analysis for multi-echelon inventory systems with batch ordering and nonstationary/time-correlated demands[J]. *Production and Operations Management*, 2017, 26(1): 31-46.
- [22] Chen L, Feng Y, Hao G. Optimal pricing and sequencing in a make-to-order system with batch demand[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 60(6): 1455-1470.
- [23] Yang Y, Chen Y, Zhou Y. Coordinating inventory control and pricing strategies under batch ordering[J]. *Operations Research*, 2014, 62(1): 25-37.
- [24] 夏西强,朱庆华. 外包再制造下再制造设计对制造/再制造影响[J]. *管理科学学报*, 2019, 22(9): 97-112.
- Xia X Q, Zhu Q H. Study on the effect of design for remanufacturing on manufacturing/remanufacturing competition based on the outsourcing remanufacturing pattern[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(9): 97-112.
- [25] 曹裕,吴堪,熊寿遥. 基于分层 MTO 订单的准入策略研究[J]. *管理科学学报*, 2017, 20(8): 50-62.
- Cao Y, Wu K, Xiong S Y. Admission decision based on hierarchical MTO order[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(8): 50-62.
- [26] 谢杏子,王秀利. 单机订单接受与加工调度问题的拉格朗日松弛算法[J]. *系统管理学报*, 2020, 29(5): 874-881.
- Xie X Z, Wang X L. Lagrangian relaxation algorithm for order acceptance and scheduling in a single machine environment[J]. *Journal of Systems & Management*, 2020, 29(5): 874-881.
- [27] 蔺宇,李雅娇,史英杰. 基于排队论的两阶段生产系统看板数量优化[J]. *工业工程*, 2017, 20(1): 71-76.
- Lin Y, Li Y J, Shi Y J. Optimizing the number of Kanbans for two-stage production system based on queuing theory[J]. *Industrial Engineering Journal*, 2017, 20(1): 71-76.
- [28] 李稚,谭德庆. 爱尔兰型按订单装配系统最优生产——库存控制策略研究[J]. *中国管理科学*, 2016, 24(6): 61-69.
- Li Z, Tan D Q. Research on optimal production-inventory control policy for Erlang assemble-to-order system[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2016, 24(6): 61-69.
- [29] 郑睿,吕文元. 考虑故障停机的生产控制与维修计划联合决策模型[J]. *中国管理科学*, 2016, 24(8): 116-122.
- Zheng R, Lv W Y. Modelling of simultaneous decision making of production control and maintenance schedule in the context of failure downtime[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2016, 24(8): 116-122.
- [30] 田雪雁,潘尔顺. 基于综合性能退化的生产系统缓存配置及维护更新策略[J]. *工业工程与管理*, 2020, 25(3): 1-9.
- Tian X Y, Pan E S. Strategy of buffer allocation, maintenance and replacement for manufacturing systems based on comprehensive performance deterioration[J]. *Industrial Engineering and Management*, 2020, 25(3): 1-9.
- [31] Yang C, Hu Z, Zhou S X. Multilocation newsvendor problem: Centralization and inventory pooling[J]. *Management science*, 2021, 67(1): 185-200.
- [32] 肖勇波,陈剑,吴鹏. 产能和需求不确定情形下 ATO 系统最优库存和生产决策研究[J]. *中国管理科学*, 2007, 15(5): 56-64.
- Xiao Y B, Chen J, Wu P. Optimal inventory and production decisions for a single-period ATO system with uncertain capacity and uncertain demand[J]. *Chinese Journal of Management*, 2007, 15(5): 56-64.
- [33] Feng Y, Yan H. Optimal production control in a discrete manufacturing system with unreliable machines and random demands[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2280-2296.
- [34] Tan B. Production control of a pull system with production and demand uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 779-783.
- [35] Martinelli F, Valigi P. Hedging point policies remain optimal under limited backlog and inventory space[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(10): 1863-1871.
- [36] Shi X, Shen H, Wu T. Production planning and pricing policy in a make-to-stock system with uncertain demand subject to machine breakdowns[J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, 238(1): 122-129.
- [37] Benjaafar S, Elhafi M. Production and inventory control of a single product assemble-to-order system with multiple customer



- classes[J]. Management science, 2006, 52(12): 1896-1912.
- [38] Kebblis M F, Feng Y. Optimal pricing and production control in an assembly system with a general stockout cost [J]. IEEE transactions on automatic control, 2011, 57(7): 1821-1826.
- [39] Lippman S A. Applying a new device in the optimization of exponential queuing systems[J]. Operations research, 1975, 23 (4): 687-710.
- [40] Bertsekas D P. Dynamic programming and optimal control. Vol 1. [M]. Belmont, MA: Athena scientific, 1995.
- [41] Porteus E L. Foundations of stochastic inventory theory[M]. CA: Stanford University Press, 2002.

## Optimal production decision study for a make-to-stock system with an adjustable production rate

CHEN Liuxin, YANG Jianchao\*, YU Tong

(Business School, Hohai University, Nanjing 211100, China)

**Abstract:** China is a major manufacturing country, which is increasing share of manufacturing value-added in the world, and achieving world-renowned achievements. However, in contrast to developed countries such as Europe and the United States, China's manufacturing industry is still mainly labor-intensive, and the input cost of resource factors such as manpower accounts for a large proportion of production costs. Producers increase production capacity, mostly by increasing factor inputs such as manpower and equipment resources.

Under market economy, Manufacturers respond to fluctuations in order demand, implementing flexible production strategies. Producers based on current inventory levels, dynamic adjustment of its production rate, and efficient matching of order volume with demand side. This results in a new production model with a flexible production rate and deciding the optimal production policy to maximize the long-run discounted profits. Because China's manufacturing industry is still mainly labor-intensive, and Short-term failure to enhance production capacity through technological innovation and process optimization. On the one hand, periodically, or at the beginning of some selling season, producers increase production capacity, mostly by increasing factor inputs such as manpower and equipment resources; on the other hand, in the low season of order demand, producers decrease production capacity, mostly by decreasing factor inputs such as manpower and equipment resources. It follows that the application of high production rates by producers will lead to higher production costs due to the increase in resource factors. The application of low production rate by producers will lead lower production costs due to the decrease in resource factor. In a real-life case, manufacturers often adjust production rates with different production costs to consider both demand and inventory. We study the production decision of a make-to-stock manufacturing system with an adjustable production rate. With Poisson arrivals and exponential production times, we aim at deciding the optimal production policy to maximize the long-run discounted profits.

The study begins with a review of relevant domestic and international research in this area, The study points out that domestic and international research on spot-based production systems focuses on dynamic product pricing strategies, product production strategies, and inventory control strategies. For the study of product policy, previous studies have only two control strategies, i. e. full production and no production scenarios. Different production strategies such as high-speed production, low-speed production, and no production have not been studied. For this reason, our study considers the production process of manufacturers in production which has three strategies of high rate production, low rate production, and no production. We study the production decision of a make-to-stock manufacturing system with an adjustable production rate. With Poisson arrivals and exponential production times, we aim at deciding the optimal production policy to maximize the long-run discounted profits.

Secondly, the study abstracts this problem as a Markov decision model in continuous time for the problem and derives the Hamilton-Jacobi-Berriman equation, applies operator theory, and states that the revenue function decreases as the inventory level increases, and the first-order difference of the revenue function is monotonically bounded. Using Banach's space fixed point theorem, prove that the derived Hamilton-Jacobi-Berriman equation has a unique global optimal point, existence of optimal production control strategies for this production systems.

Thirdly, the study proves that the optimal production policy for spot-based production systems is a threshold policy, i. e. , their existence of the threshold point  $(D_1^*, D_2^*)$ , where  $D_1^*$  indicates the rate switching point between high-rate production and low-rate production, and  $D_2^*$  denotes the maximum inventory level. When the current inventory level is no larger than  $D_1^*$ , the production unit of the producer or company takes the highest production rate  $a_1$  for production; when the current inventory level is no less than  $D_2^*$ , the production unit of the producer or company takes a halt to production; when the current inventory level between  $D_1^*$  and  $D_2^*$ , the production unit of the producer or company takes low-rate  $a_2$  for production. On this basis, further theoretical analysis of the properties

of the key parameters of the model and numerical example analysis of the model are carried out.

Finally, we extend the cases of high-rate production, low-rate production, and no production to cases with  $n$  different production rates, and obtain the optimal production policy which is also the threshold policy.

In the future research, the manufacturers or companies can possibly expand from producing a single product to multiple types of products or to expand a single demand to multiple types of demands, and comprehensively consider the flexible dynamic control of production rate of different products and the dynamic pricing of products, so as to further makes the model of the study more generalizable.

**Key words:** Adjustable production rate; Make-to-stock manufacturing system; Inventory control policy; HJB equation; Threshold policy

---

**Received Date:** 2021-06-11

**Funded Project:** Supported by the Natural Social Science Foundation of China (19ZDA084, 19BGL181), the supported by the Social Science Foundation of Jiangsu Province (21GLA001) and the Hongyun Honghe Tobacco Co., LTD. Technical consulting project (HYHH2020XX02).

\* Corresponding author