

doi: 10.3969/j.issn.1007-0834.2011.01.003

地面搜索路径的“S式”折线模型和螺线模型

刘晓妍, 吕濯纓, 高国成

(山东科技大学 公共课部, 山东 济南 250031)

摘要: 2008 年全国大学生数学建模竞赛 C 题是关于汶川大地震的地面搜索问题. 为寻找用时最短的搜索路径, 主要从缩短不搜索时的行进路线考虑, 建立了“S 式”折线模型和螺线模型, 并对模型结果进行理论验证, 其中螺线模型的方法构思巧妙, 结果合理且较优.

关键词: 地面搜索; 曲线积分; “S 式”折线模型; 螺线模型

中图分类号: O141.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-0834(2011)01-0007-03

1 问题重述

需要解决的问题是: 震后受灾地区地面搜索路线设计问题. 通过对搜索问题^[1-2]的简化, 确定了 1 个大小为 $11\,200\text{ m} \times 7\,200\text{ m}$ 的平面矩形目标区域 (如图 1). 搜索过程的条件及要求如下:

- (1) 以区域中心 O 为出发点, 搜索完成后, 搜索队伍在左侧短边中点 P 处集结;
- (2) 每个人的可探测半径为 20 m . 搜索时行进速度为 0.6 m/s 无需搜索时行进速度为 1.2 m/s
- (3) 搜索队伍若干人为 1 组, 每组有 1 名组长;
- (4) 设备配置情况为: GPS 定位仪每人 1 台, 步话机每人 1 部 (通信半径为 $1\,000\text{ m}$), 组长配有卫星电话 1 部. 搜索过程中, 每个人搜索到目标, 都需要用步话机及时向组长报告, 组长再用卫星电话向指挥部报告搜索的最新结果.

问题 有 1 支 20 人 1 组的搜索队伍, 拥有 1 台卫星电话. 需要设计 1 种耗时最短的搜索路径, 并求出搜索完整个区域的时间. 看能否在 48 h 内完成搜索任务, 若不能, 需要增加多少人才可在 48 h 内完成搜索任务.

2 模型假设

- (1) 假设搜索区域内任 2 点之间都可直线抵达, 即行进过程中无障碍物阻挡;
- (2) 假设搜索过程中, 搜索人员一直处在行进状态中, 不会因通话或其他情况而延误时间;
- (3) 假设搜索过程中 2 队员间距始终保持 40 m 不变.

3 模型建立和求解

3.1 “S 式”折线模型

3.1.1 思路分析

根据题意给出如下搜索方式: 搜索队员统一行动, 站成 1 排, 一起平移. 每个队员互相间隔 40 m , 则最远两队员之间间隔为 760 m . 在步话机通信半径 $1\,000\text{ m}$ 内, 而 1 排队员横向探测距离可达 800 m . 考虑用“S 式”折线型搜索路线, 搜索队行进路线如图 2

首先直接从 O 点徒步到 A 点, 在行进过程中队员边走边散开排成 1 排, 待全体队员到达后一起向 B 搜索, 而后转弯沿“S 式”折线行进. 由矩形边长 $7\,200\text{ m}$ 可知, 搜索队员共走了 9 行及 8 段转弯距离, 最终队员一起走到 C 处, 然后徒步走到终点 P. 其中, 搜索队员在边界上转弯时每人要徒步直线行进 800 m .

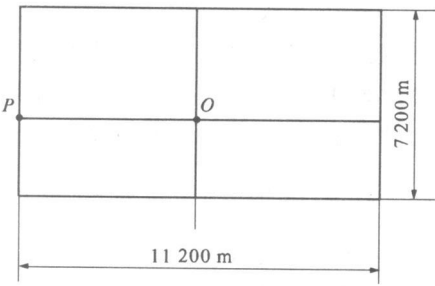


图 1 搜索区域
Fig 1 Searching area

收稿日期: 2010-10-26

基金项目: 山东科技大学教育教学研究“群星计划”资助项目 (QX102175)

作者简介: 刘晓妍 (1976-), 女, 山东威海人, 山东科技大学公共课部讲师.

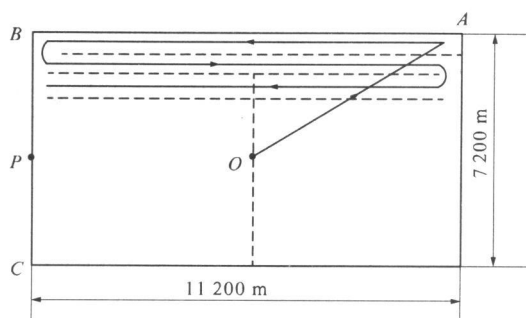


图 2 “S式”折线型搜索路线

Fig 2 “S-style” broken line searching path

3.1.2 模型的建立与求解

搜索队伍由出发点 O 到 A 用时 $t = \frac{\sqrt{3\,600^2 + 5\,600^2}}{1.2}$ s 搜索每 1 行用时 $t = \frac{11\,200}{0.6}$ s 转弯平移用时 $t = \frac{800}{1.2}$ s 最后回到终点用时 $t = \frac{3\,600}{1.2}$ s 计算得总用时 $T = t + 9t + 8t + t = 50.52$ h

3.1.3 结果检验

针对搜索此目标区域的问题,我们给出计算搜索时间下限的方法,让搜索队员仍一字排开按“S式”折线行进,但徒步行进时间不计.搜索 1 行用时 $t = \frac{11\,200}{0.6}$ s 由 7 200 m 宽的边长可知共搜索 9 次,则总耗时间为 $9t = 9 \times \frac{11\,200}{0.6 \times 3\,600} = 46.67$ h 由于“S式”折线模型的结果大于 46.67 h 故该模型具有一定的合理性和可行性.

3.2 螺线模型

3.2.1 思路分析

由于“S式”折线模型中的多处转弯平移浪费时间,故考虑搜索队员沿某连续曲线从中心向外进行搜索时,搜索完整个矩形区域的用时情况.因每个人搜索时的可探测半径为 20 m, 20 人一字排开可探测的横向距离为 800 m, 此距离在步话机通信半径 1 000 m 之内,所以可让 20 人沿等距螺线 $\rho = a\theta$ 向外依次放大搜索.为满足要求,螺距 $2\pi a$ 应接近于 800 m, 于是有 $2\pi a = 800$ m 可得 $a \approx 127$ m. 若在中心处就按螺线搜索,重复路径较多,因此先在 $400\text{ m} \times 800\text{ m}$ 的范围内沿直线搜索,后从 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 处向外沿螺线 $\rho = 127\theta$ 搜索.搜索至 $\theta = 10\pi$ 后再进入右侧未搜索区域,按“S式”折线型搜索,搜索完成后进入螺旋线左侧未搜索区域仍按“S式”折线型搜索,最后回集结点.

3.2.2 模型建立与求解

(1) 模型准备

为描述方便,借助平面螺线的参数方程,利用 Mathematic 作图^[3],将矩形搜索区域分成 4 部分进行讨论(图 3).

区域 I: $400\text{ m} \times 800\text{ m}$ 的矩形区域,位于整个搜索区域中心部分(注:螺线所在坐标系的坐标原点位于搜索区域中心上方 200 m 处);

区域 II: 螺旋线区域, $\rho = 127\theta$, $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 10\pi$;

区域 III: 螺旋线区域右侧 $1\,600\text{ m} \times 7\,200\text{ m}$ 的矩形区域;

区域 IV: 螺旋线区域左侧 $2\,000\text{ m} \times 7\,200\text{ m}$ 的矩形区域.

(2) 模型建立

搜索队伍从 O 点徒步行至中心矩形区域左边界,一字

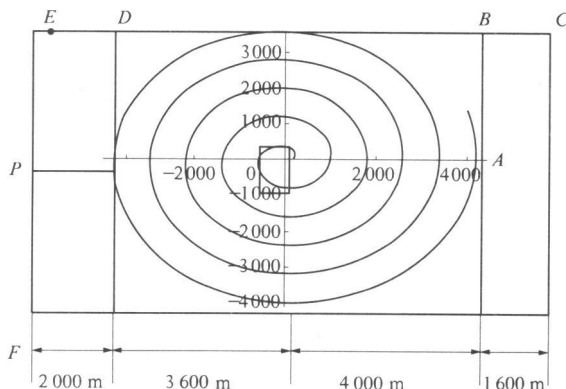


图 3 螺线模型搜索路线

Fig 3 Spiral model searching path

排开向右搜索 400 m 至区域 I 右边界,完成区域 I 的搜索;然后于 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 处沿螺旋线搜索至 A 处 ($\theta=10\pi$),完成区域 II 的搜索;从 A 徒步沿直线至 B,向下搜索 7 200 m 至整个区域下边界,再折向上搜索 7 200 m 至整个区域上边界 C 处,完成区域 III 的搜索;从 C 处沿直线徒步至 D 处,行程 $11\,200-2\,000=9\,200\text{ m}$,D 处距左边界 2 000 m,从 D 处向下搜索至整个区域边界,再折向上搜索至上边界 E 处,由于 E 处距左边界 400 m,因此将搜索队员平均分为 2 组,分别记为甲组和乙组,让 2 组队员同时出发,甲组先搜索 1 800 m 后徒步行进 1 800 m,而乙组则先徒步行进 1 800 m 后搜索 1 800 m,对于剩下的区域甲乙组重复上述过程,同一时间到达 F 点后 2 组再一起徒步行进 3 600 m 到达集结点 P 处,从而完成区域 IV 的搜索.

(3)模型求解

$$\begin{aligned} \text{区域 I 用时 } t_1 &= \frac{400}{1.2} + \frac{400}{0.6} \text{ s} \quad \text{区域 II 用时 } t_2 = \left[\frac{10\pi}{\frac{3\pi}{2}} \int \sqrt{(127\theta)^2 + 127^2} d\theta \right] / 0.6 \text{ s} \quad \text{区域 III 用时 } t_3 = \frac{3\,600}{1.2} + \\ &\frac{7\,200 \times 2}{0.6} + \frac{800}{1.2} \text{ s} \quad \text{区域 IV 用时 } t_4 = \frac{1\,1200-2\,000}{1.2} + \frac{7\,200 \times 2}{0.6} + \frac{800+400}{1.2} + \left[\frac{1\,800}{0.6} + \frac{1\,800}{1.2} \right] \times 2 + \frac{3\,600}{1.2} \text{ s} \end{aligned}$$

Mathematic 计算得总用时

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 48.73 \text{ h}$$

3.2.3 结果检验

由 3.1.3 知,搜索时间下限为 46.67 h,由于螺旋线模型的结果 48.73 h 大于 46.67 h,故该模型具有一定的合理性和可行性,同时该模型的结果较“S式”折线模型的结果 (50.52 h)改进很多.

3.3 增加人数的确定

由计算结果可知,该搜索小组不能在 48 h 内完成搜索任务,需增加搜索人员.现引入 1 个参数 k,记 k 为每位搜索人员在每小时内搜索的面积,则有 $k = \frac{\text{总面积}}{\text{总人数} \times \text{总时间}} = \frac{S}{n \times t}$,要保证在 48 h 内完成搜索任务,则应有 $48 \times k \times n \geq S$,由此可得 $n \geq 20.31$,即需要增加到 21 人才能在 48 h 内完成搜索任务.

4 模型评价

(1)模型优点 通过一些合理的假设,采用了由简单到复杂、逐步深入的方法进行分析,建立“S式”折线模型和螺旋线模型,其中采用螺旋线模型进行搜索的方法构思巧妙.

(2)模型不足 螺旋线模型中对螺旋线区域的 4 个边角处的搜索进行了忽略,故搜索区域不能覆盖整个目标区域,对结果必然产生一定的影响.

(3)模型推广 以上模型可广泛应用到大规模的农业播种收割、广场的清洁工作等,能够提高工作效率.

参 考 文 献

[1] 姜启源.数学模型 [M]. 2 版.北京:高等教育出版社,1993.
[2] 叶其孝.大学生数学建模竞赛辅导教材 [M].长沙:湖南教育出版社,1997.
[3] 万福永,戴浩晖.数学实验教程 [M].北京:科学出版社,2003.

“S-Style” Broken Line Model and Spiral Model About Ground Searching Path

LIU Xiao-yan, LV Zhuo-ying, GAO Guo-cheng

(Department of Public Courses, Shandong University of Science and Technology, Jinan 250031, China)

Abstract: The question C in 2008 National Undergraduate Mathematical Contest in Modeling is about the Wenchuan Earthquake ground searching problem. To find the search path with the shortest time, mainly consider to shorten the route of non-searching, establish “S-style” broken line model and spiral model, and verify the models theoretically. Spiral model is ingenious and its result is reasonable and better.

Key words: ground search; curve integral; “S-style” broken line model; spiral model