



系统工程与电子技术
Systems Engineering and Electronics
ISSN 1001-506X, CN 11-2422/TN

《系统工程与电子技术》网络首发论文

题目：基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率贝叶斯估计
作者：刘昊邦，陈童，胡涛，李明贵，杜凯
收稿日期：2023-08-21
网络首发日期：2024-07-11
引用格式：刘昊邦，陈童，胡涛，李明贵，杜凯. 基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率贝叶斯估计[J/OL]. 系统工程与电子技术.
<https://link.cnki.net/urlid/11.2422.TN.20240709.1004.008>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率 贝叶斯估计

刘昊邦¹, 陈童^{1,*}, 胡涛¹, 李明贵^{1,2}, 杜凯³

(1. 海军工程大学管理工程与装备经济系, 湖北 武汉 430033; 2. 宇航动力学国家重点实验室, 海南 三亚 572000; 3. 陆军步兵学院石家庄校区, 河北 石家庄 050081)

摘要：针对现有舰空导弹命中概率估计方法主要从单批次试验角度研究，而未能考虑命中概率多批次增长试验特点的问题，致使命中概率准确估计较为困难。对此本文以舰空导弹二维正态射弹散布现象为切入点，基于贝叶斯方法选取正态-逆伽马分布作为射弹散布参数的先验分布，融合先验信息弥补小样本试验数据量不足问题，在各批次试验的射弹散布参数值之间建立顺序约束关系，并利用马尔科夫链-蒙特卡洛 (Markov chain-Monte Carlo, MCMC) 方法结合吉布斯 (Gibbs) 抽样进行贝叶斯求解，从而实现融合多批次增长试验信息的目的。研究结果表明该方法相比现有单批次试验命中概率估计方法能够考虑多批次增长试验的特点，为舰空导弹命中概率估计提供借鉴。

关键词：舰空导弹；命中概率；多批次增长试验；射弹散布；贝叶斯；马尔科夫链-蒙特卡洛

中图分类号：E917

文献标识码：A

Bayesian estimation of ship-to-air missile hit probability based on multiple batches growth tests

LIU Haobang¹, CHEN Tong^{1,*}, HU Tao¹, LI Minggui^{1,2}, DU Kai³

(1. Department of Management Engineering and Equipment Economics, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China; 2. State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Sanya 572000, China; 3. Shijiazhuang Division of PLAA Infantry College, Shijiazhuang 050081, China)

Abstract: The existing ship-to-air missile hit probability estimation methods are mainly studied from the perspective of single batch tests, but fail to consider the characteristics of multiple batches growth tests, which makes it difficult to accurately estimate the hit probability. In this paper, the two-dimensional normal projectile dispersion phenomenon of ship-to-air missile is taken as the entry point, the normal-inverse gamma distribution is selected as the prior distribution of projectile dispersion parameters based on Bayesian method, and the prior information is merged to make up for the insufficient data in the small sample tests. The sequential constraint relationship is established between the projectile dispersion parameter values of each batch of tests, and the Markov chain-Monte Carlo (MCMC) method is combined with Gibbs sampling for Bayesian solution, so as to achieve the purpose of fusing multiple batches growth tests information. The research results show that this method can consider the characteristics of multiple batches growth tests compared with the existing single batch tests hit probability estimation method, and provide reference for ship-to-air missile hit probability estimation.

Keywords: ship-to-air missile; hit probability; multiple batches growth tests; projectile dispersion; Bayesian; Markov chain-Monte Carlo

0 引言

舰空导弹命中概率试验通常进行多个批次,且每批次试验之后会对舰空导弹性能进行改进,导弹命中概率呈现增长趋势。舰空导弹命中概率试验具有多批次增长试验的特点^[1]。现有舰空导弹命中概率估计主要从单批次试验角度进行研究,即只利用最新批次导弹射击试验数据,对之前批次试验信息利用较少。对于小样本舰空导弹外场试验来说,只利用单批次试验信息估计命中概率得到的结果存在较大误差风险。因此亟需研究出适合舰空导弹多批次增长试验的命中概率估计方法。

现有导弹命中概率估计研究方法主要包括数理统计方法、蒙特卡洛仿真方法、贝叶斯统计推断方法等。数理统计方法最为简单常用,该方法采用经典的数理统计方法直接利用导弹命中与否的成败型试验数据或者利用弹着点的射弹散布试验数据进行命中概率估计^[2-3]。数理统计方法对导弹命中概率外场射击试验的数据量要求较高,当外场试验数据量较少时,会使得导弹命中概率估计存在较大误差风险。近些年蒙特卡洛仿真方法在导弹命中概率估计领域应用较为广泛,该方法通过获取导弹攻击目标的飞行轨迹以及作战机理等信息数据,采用蒙特卡洛仿真方法模拟出导弹的命中规律进而估计出其命中概率^[4-6]。蒙特卡洛仿真方法对导弹飞行轨迹以及作战机理等信息数据的准确度要求较高,否则极大影响估计结果的精度。贝叶斯统计推断方法在导弹命中概率估计领域也逐步发展起来。李康等^[7]以反巡航导弹在靶平面上的射弹散布服从二维正态分布为基础,选择正态-逆伽马分布作为先验分布进行导弹命中概率贝叶斯估计。刘昊邦等^[8]考虑地空导弹射弹散布X轴、Y轴两向相关特点,选择正态-逆威沙特分布作为贝叶斯先验分布对导弹命中概率进行估计。贝叶斯统计推断方法能够将小样本导弹命中概率外场试验中的先验信息进行利用。当前基于贝叶斯统计方法的导弹命中概率估计主要考虑导弹单批次试验的结果,对导弹多批次试验考虑较少,且较少考虑导弹命中概率随批次逐步增长的特点,降低了这些方法的适用性。融合舰空导弹命中概率多批次增长试验信息有利于降低导弹命中概率估计的误差风险。

综合上述分析,本文考虑舰空导弹命中概率多批次增长试验的特点,在各批次试验的射弹散布参数值之间建立顺序约束关系,采用贝叶斯方法融合各批次增长试验信息。为克服后验积分困难问题,采用马尔科夫链-蒙特卡洛(Markov chain-Monte Carlo, MCMC)方法结合吉布斯(Gibbs)抽样进行求解。最终求出基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率估计结果。

1 舰空导弹武器射击效力分析

1.1 舰空导弹射击误差分析

舰空导弹发射后,一般需要根据目标和导弹的运动信息及各种约束条件,按选定的制导规律、舰面制导系统或弹上制导系统导引和控制导弹运动轨迹,以尽可能高的精度接近目标,飞至离目标最近点(遭遇点),在导弹引信作用下,引爆战斗部,靠战斗部破片或其爆炸产生的极大瞬间冲击力将目标摧毁^[9-10]。

在舰空导弹向目标射击的过程中,由于各种内外部因素,如战场环境、目标探测、射元解算、制导和射击等的综合作用,使导弹制导回路形成控制信号不准确、传递有变形、执行有偏差和延迟,从而产生了射击误差^[11]。

在舰空导弹整个飞行过程中的每一瞬时,导弹的实际弹道(舰空导弹在实际飞行中的质心运动轨迹)与理想弹道(舰空导弹完全按理想导引规律飞行的质点,其质心在空间的运动轨迹,即运动学弹道)之间都存在偏差,称为制导误差^[12-13]。但最终影响射击效果的是导弹与目标遭遇时的制导误差。为了便于分析问题,在靶平面上讨论制导误差。

靶平面,是指过目标的质心且与舰空导弹相对速度矢量相垂直的平面,如图1所示。

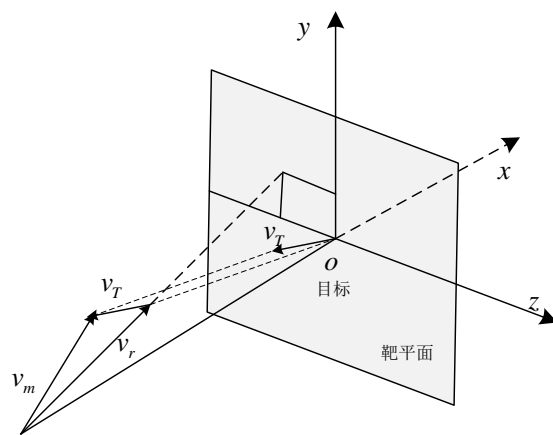


图1 舰空导弹靶平面

Fig. 1 The target plane of ship-to-air missile

图中， v_m 是舰空导弹的飞行速度， v_T 是舰空目标的飞行速度。将 v_T 平移至与 v_m 箭头相交的地方，并以 v_m 箭尾指向 v_T 箭尾，得到速度矢量 v_r ， v_r 是舰空导弹相对于舰空目标的速度，为 v_m 与 v_T 的矢量之差。在分析舰空导弹武器射击效力时，选取过目标质心 O 且垂直于舰空导弹相对速度 v_r 的平面作为靶平面。

脱靶量又称制导偏差，表示靶平面上的弹着点与目标质心位置的偏差大小。实际弹道的平均弹道与靶平面的交点称为散布中心，实际弹道与靶平面的交点围绕散布中心散布，如图 2 所示。

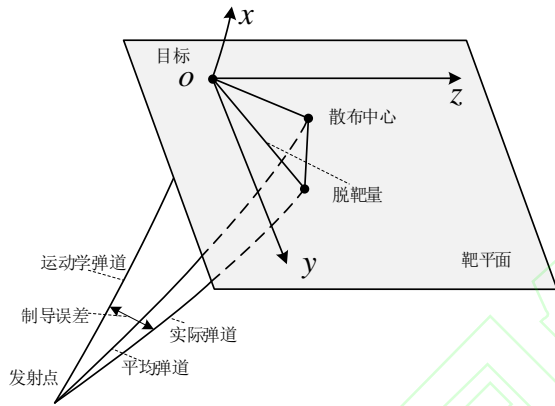


图 2 舰空导弹制导误差与靶平面

Fig. 2 The guidance error and target plane of ship-to-air missile

舰空导弹在靶平面内的弹着点分布称为射弹散布。通过收集以往的舰空导弹发射试验数据可知在靶平面内导弹的射弹散布服从二维正态分布：

$$f(y, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_z\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(y-u_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(y-u_y)(z-u_z)}{\sigma_y\sigma_z} + \frac{(z-u_z)^2}{\sigma_z^2} \right] \right\} \quad (1)$$

式中， u_y ， σ_y ， u_z ， σ_z 分别为靶平面内 Y 轴， Z 轴方向上舰空导弹射弹散布的均值和标准差，反映射弹散布的偏差程度以及密集程度；相关系数 ρ 反映舰空导弹射弹散布的主要倾向与靶平面内 Y 轴， Z 轴的偏离程度。

根据舰空导弹射弹散布函数在有效目标区域 T 上积分可以估计出舰空导弹的命中概率：

$$P_{\text{hit}} = P((y, z) \in T) = \iint_T f(y, z) dydz \quad (2)$$

计算出舰空导弹射弹散布参数 u_y ， σ_y ，

u_z ， σ_z ， ρ 的估计值是进行舰空导弹命中概率估计的关键。

1.2 舰空导弹射弹散布去相关处理

当 $\rho \neq 0$ 时，此时无法将舰空导弹射弹散布 Y 、 Z 向单独分开讨论，给后续利用贝叶斯方法求解舰空导弹命中概率带来不便。为了得到更为简洁的舰空导弹射弹散布函数，采用正交变换方法对弹着点坐标进行去相关处理。根据舰空导弹射弹散布的两向标准差 σ_y, σ_z 以及相关系数 ρ ，将原有坐标系进行旋转，使新坐标轴分别位于导弹射弹散布最大、最小标准差的方向上。坐标系逆时针旋转所需的角 θ 为：

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\rho\sigma_y\sigma_z}{\sigma_y^2 - \sigma_z^2}\right) \quad (3)$$

则 $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ，正交变换矩阵为

$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ，此时可通过新坐标系 $Y'OZ'$ 下的落点坐标 $(y'_i, z'_i)^T$ 计算正态分布参数 $u'_y, u'_z, \sigma'_y, \sigma'_z$ ，其中：

$$\begin{aligned} (y'_i, z'_i)^T &= C(y_i, z_i)^T \\ (u'_y, u'_z)^T &= C(u_y, u_z)^T \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma'^2_{y'} = \sigma_y^2 \cos^2\theta + \sigma_z^2 \sin^2\theta + \rho\sigma_y\sigma_z \sin(2\theta)$$

$$\sigma'^2_{z'} = \sigma_y^2 \sin^2\theta + \sigma_z^2 \cos^2\theta - \rho\sigma_y\sigma_z \sin(2\theta)$$

设 $\sigma'_{\max}, \sigma'_{\min}$ 分别为新坐标系下舰空导弹射弹散布 Y' 轴， Z' 轴方向上标准差的最大值和最小值，则：

$$\sigma'^2_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_z^2)^2 + 4\rho^2\sigma_y^2\sigma_z^2})$$

$$\sigma'^2_{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_z^2)^2 + 4\rho^2\sigma_y^2\sigma_z^2})$$

(5)

若 $\sigma_y \geq \sigma_z$ ，则 $\sigma'_y \geq \sigma'_z$ ，也即 $\sigma'_y = \sigma'_{\max}$ ， $\sigma'_z = \sigma'_{\min}$ 。若 $\sigma_y < \sigma_z$ ，则 $\sigma'_y < \sigma'_z$ ，也即 $\sigma'_y = \sigma'_{\min}$ ， $\sigma'_z = \sigma'_{\max}$ 。

此外，若将 Y 轴、 Z 轴分别旋转到舰空导弹射弹散布最大和最小的标准差方向上，则可计算出坐标系按照逆时针旋转所需的角 θ ：

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\rho\sigma_y\sigma_z}{\sigma_y^2 - \sigma_z^2}\right), \sigma_y^2 > \sigma_z^2 \\ \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\rho\sigma_y\sigma_z}{\sigma_y^2 - \sigma_z^2}\right) + \text{sgn}(\rho)\frac{\pi}{2}, \sigma_y^2 < \sigma_z^2 \\ \text{sgn}(\rho)\frac{\pi}{4}, \sigma_y^2 = \sigma_z^2 \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。

新坐标系下舰空导弹射弹散布的弹着点坐标 $(y'_i, z'_i)^T$ 和射弹散布参数 $u'_y, u'_z, \sigma'_{\max}, \sigma'_{\min}$ 均可根据 θ 得到。注意, 此时有 $\sigma'_y = \sigma'_{\max}$, $\sigma'_z = \sigma'_{\min}$ 。

通过对舰空导弹射弹散布进行去相关处理, 可求得新坐标系 $Y'OZ'$ 下的舰空导弹射弹散布函数:

$$f(y', z') = \frac{1}{2\pi\sigma'_y\sigma'_z} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y' - u'_y)^2}{\sigma'^2_y} + \frac{(z' - u'_z)^2}{\sigma'^2_z}\right]\right\} \quad (7)$$

此时可将 Y' 轴、 Z' 轴两向单独分开讨论, 舰空导弹射弹散布在 Y' 轴、 Z' 轴上的分布均服从一维正态分布。将有效目标区域 T 边界上的顶点的坐标经过相同的正交变换, 从而得到新坐标系 $Y'OZ'$ 下的有效目标区域 T' 。令新的射弹散布函数 $f(y', z')$ 在新的有效目标区域 T' 上积分可以估计出舰空导弹的命中概率:

$$P_{\text{hit}} = P((y', z') \in T') = \iint_{T'} f(y', z') dy' dz' \quad (8)$$

2 舰空导弹命中概率贝叶斯估计

2.1 利用外场射击试验数据估计舰空导弹命中概率

舰空导弹射弹散布经过去相关处理之后, $\rho = 0$ 。此时射弹散布参数只剩 $u_y, \sigma_y, u_z, \sigma_z$, 可将射弹散布 Y 、 Z 向分开讨论。根据舰空导弹外场射击试验的弹着点数据 (y_i, z_i) , $i=1, 2, \dots, n$, 则可计算出射弹散布参数 $u_y, \sigma_y, u_z, \sigma_z$ 的估计值:

$$\begin{aligned} \hat{u}_y &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{\sigma}_y &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{u}_y)^2} \\ \hat{u}_z &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \\ \hat{\sigma}_z &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{u}_z)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

为了测量估计值 $\hat{u}_y, \hat{\sigma}_y^2, \hat{u}_z, \hat{\sigma}_z^2$ 的误差程度, 采用其均方误差进行表示:

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{u}_y) &= \frac{\sigma_y^2}{n} \\ \text{MSE}(\hat{\sigma}_y^2) &= \frac{2\sigma_y^4}{n-1} \\ \text{MSE}(\hat{u}_z) &= \frac{\sigma_z^2}{n} \\ \text{MSE}(\hat{\sigma}_z^2) &= \frac{2\sigma_z^4}{n-1} \end{aligned} \quad (10)$$

由均方误差公式可以看出, 当舰空导弹外场射击试验数量 n 较少时, 射弹散布参数估计值的误差就越大。通常情况下对于外场条件下的舰空导弹试验来说, 由于试验成本和试验环境的限制, 只能进行少量的外场发射试验, 采用经典统计方法仅利用外场发射试验数据进行命中概率估计得到的结果存在较大误差可能。

2.2 利用贝叶斯方法估计舰空导弹命中概率

贝叶斯方法常用于小子样试验评估研究, 对于价值高昂、试验环境复杂的舰空导弹命中概率估计试验, 可采用这一方法进行研究。

由前一节分析可知舰空导弹射弹散布 Y 向、 Z 向落点坐标均服从一维正态分布, 假设进行 n 枚导弹发射试验, 则可获取 n 个弹着点数据 (y_i, z_i) , $i=1, 2, \dots, n$, 则有:

$$\begin{aligned} Y_i &\sim N(u_y, \sigma_y^2) \\ Z_i &\sim N(u_z, \sigma_z^2) \end{aligned} \quad (11)$$

舰空导弹的准确度与密集度越高则命中概率越高。重点采用贝叶斯方法对舰空导弹射弹散布参数 $u_y, \sigma_y^2, u_z, \sigma_z^2$ 进行估计。贝叶斯方法将参数视为随机变量而不是固定值。以舰空导弹射弹散布 Y 向为例, 记射弹散布参数 u_y, σ_y^2 的联合先验分布为 $r(u_y, \sigma_y^2)$, 则有:

$$r(u_y, \sigma_y^2) = r(u_y | \sigma_y^2) r(\sigma_y^2) \quad (12)$$

式中：\$r(\sigma_y^2)\$ 为 \$\sigma_y^2\$ 的先验分布，\$r(u_y | \sigma_y^2)\$ 为条件 \$\sigma_y^2\$ 下 \$u_y\$ 的先验分布。

通过查阅共轭先验分布族可知：正态分布特征参数 \$u_y, \sigma_y^2\$ 均未知条件下的共轭先验分布为正态-逆伽马分布^[14-17]。则有：

$$u_y | \sigma_y^2 \sim N(u_{y0}, \sigma_y^2 / k_{y0})$$

$$\sigma_y^2 \sim \text{IGa}(v_{y0} / 2, v_{y0} \sigma_{y0}^2 / 2)$$

$$\begin{aligned} r(u_y, \sigma_y^2) &= r(u_y | \sigma_y^2) r(\sigma_y^2) \\ &= N(u_{y0}, \sigma_y^2 / k_{y0}) \text{IGa}(v_{y0} / 2, v_{y0} \sigma_{y0}^2 / 2) \\ &= \frac{\sqrt{k_{y0}} (v_{y0} \sigma_{y0}^2 / 2)^{(v_{y0}/2)}}{\sqrt{2\pi} \Gamma(v_{y0} / 2)} \sigma_y^{-v_{y0}-3} \cdot \\ &\quad \exp \left\{ \frac{-(u_y - u_{y0})^2 k_{y0} + v_{y0} \sigma_{y0}^2}{2\sigma_y^2} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

进行舰空导弹命中概率贝叶斯估计的首要关键是确定射弹散布参数的先验分布。令 \$\hat{\alpha}_y\$ 为 \$v_{y0}/2\$ 的估计量，\$\hat{\beta}_y\$ 为 \$v_{y0}\sigma_{y0}^2/2\$ 的估计量。依据先验信息参数样本数据 \$(u_{yj}, \sigma_{yj}^2), j=1, 2, \dots, m\$ 求解超参数 \$\alpha_y\$ 和 \$\beta_y\$ 的极大似然估计。

已知 \$\sigma_y^2 \sim \text{IGa}(\alpha_y, \beta_y)\$，则有：

$$f(\sigma_y^2) = \frac{\beta_y^{\alpha_y}}{\Gamma(\alpha_y)} \sigma_y^{-2(\alpha_y+1)} \exp\left(-\frac{\beta_y}{\sigma_y^2}\right) \quad (14)$$

构建似然函数：

$$L(\alpha_y, \beta_y) = \frac{\beta_y^{\alpha_y m}}{\Gamma^m(\alpha_y)} \prod_{j=1}^m \sigma_{yj}^{-2(\alpha_y+1)} \exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{\beta_y}{\sigma_{yj}^2}\right) \quad (15)$$

构建对数似然函数 \$\ln L(\alpha_y, \beta_y)\$，并令对数似然函数一阶偏导为0，通过计算求解可得超参数 \$\alpha_y\$ 和 \$\beta_y\$ 的极大似然估计值：

$$\left\{ \begin{aligned} \ln(\hat{\alpha}_{y\text{MLE}}) - \frac{(\Gamma(\hat{\alpha}_{y\text{MLE}}))'}{\Gamma(\hat{\alpha}_{y\text{MLE}})} &= \frac{\sum_{j=1}^m \ln(\sigma_{yj}^2)}{m} + \\ \ln\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{yj}^2}\right) - \ln m & \\ \hat{\beta}_{y\text{MLE}} &= \frac{m \hat{\alpha}_{y\text{MLE}}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{yj}^2}} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

已知 \$u_y \sim N(u_{y0}, \sigma_y^2 / k_{y0})\$，则有：

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{u}_{y0} &= \frac{\sum_{j=1}^m u_{yj}}{m} \\ (\hat{\sigma}_y^2 / k_{y0})' &= \frac{\sum_{j=1}^m (u_{yj} - \sum_{j=1}^m u_{yj} / m)^2}{m-1} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

利用先验信息参数样本数据 \$\sigma_{yj}^2\$ 可得 \$\sigma_y^2\$ 的估计值：

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_{yj}^2}{m} \quad (18)$$

联立公式(17)~(18)可以求出 \$k_{y0}\$ 的估计值：

$$\hat{k}_{y0} = \frac{(m-1) \sum_{j=1}^m \sigma_{yj}^2}{m \sum_{j=1}^m (u_{yj} - \sum_{j=1}^m u_{yj} / m)^2} \quad (19)$$

上述过程可以求出舰空导弹射弹散布参数 \$u_y, \sigma_y^2\$ 的先验分布的超参数，进而可以确定先验分布 \$r(u_y, \sigma_y^2)\$。

获取到舰空导弹外场射击试验的弹着点数据 \$y_1, y_2, \dots, y_n\$ 之后，可以求出试验样本的似然函数 \$L(y|u_y, \sigma_y^2)\$。通过贝叶斯公式融合舰空导弹射弹散布的先验信息和外场发射试验信息，进而求出其参数的后验分布^[18]：

$$\pi(u_y, \sigma_y^2 | y) = \frac{L(y|u_y, \sigma_y^2) r(u_y, \sigma_y^2)}{\iint L(y|u_y, \sigma_y^2) r(u_y, \sigma_y^2) du_y d\sigma_y^2} \quad (20)$$

可化简为：

$$\pi(u_y, \sigma_y^2 | y) \propto (\sigma_y^2)^{-(v_{ym}/2+3/2)} e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2} [v_{ym}\sigma_{ym}^2 + k_{ym}(u_y - u_{ym})^2]} \quad (21)$$

式中，

$$\begin{aligned}
 k_{yn} &= k_{y0} + n \\
 v_{yn} &= v_{y0} + n \\
 u_{yn} &= \frac{k_{y0}}{k_{y0} + n} u_{y0} + \frac{n}{k_{y0} + n} \bar{y} \\
 \sigma_{yn}^2 &= \frac{v_{y0} \sigma_{y0}^2 + (n-1) S_y^2 + \frac{k_{y0} n}{k_{y0} + n} (u_{y0} - \bar{y})^2}{v_{y0} + n}
 \end{aligned} \quad (22)$$

$k_{yn}, v_{yn}, u_{yn}, \sigma_{yn}^2$ 为后验分布中的参数, 由此可以得到舰空导弹射弹散布参数 u_y, σ_y^2 的贝叶斯分布。同理也可以求出射弹散布Z向参数 u_z, σ_z^2 的贝叶斯分布。

3 多批次增长试验舰空导弹命中概

率贝叶斯估计

3.1 多批次增长试验舰空导弹命中概率贝叶斯推断

舰空导弹通常进行多个批次的命中概率试验, 且其命中概率具有多批次增长的试验特点。根据该特点构建出各批次试验舰空导弹命中概率值之间的约束关系。设舰空导弹命中概率试验共进行 r 批次, 以舰空导弹射弹散布 Y 向为例, 随着批次试验进行, 舰空导弹打击目标的准确性能和密集度逐渐提升, 则可建立出如下的射弹散布参数顺序约束关系:

$$\begin{cases} \infty > u_{y1} > u_{y2} > \cdots > u_{yr} > 0 \\ \infty > \sigma_{y1}^2 > \sigma_{y2}^2 > \cdots > \sigma_{yr}^2 > 0 \end{cases} \quad (23)$$

根据顺序约束关系构建多批次增长试验的舰空导弹射弹散布参数 u_y, σ_y^2 的贝叶斯推断公式:

式中, $L(y_j | u_{yj}, \sigma_{yj}^2)$ 为第 j 批次外场射击试验样本的似然函数。 $h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2)$ 为第 j 批次试验的先验分布。 n_j 为第 j 批次试验发射的导弹数量。 y_{ij} 为第 j 批次试验发射的第 i 枚导弹的弹着点数据。 Θ 为舰空导弹射弹散布参数 u_{yj}, σ_{yj}^2 的边缘分布的积分区域, 积分区域为公式 (23) 规定的顺序约束关系区域。

该模型涉及的参数较多, 计算过程复杂, 不易求出多批次增长试验的舰空导弹射弹散布参数的贝叶斯值, 此时采用 MCMC 方法进行求解。

3.2 多批次增长试验舰空导弹命中概率 MCMC 方法求解

MCMC方法可以解决高维、复杂的非常见贝叶斯后验分布的计算问题^[19-22]。建立MCMC的关键是设法构造合适的转移核, 不同的转移核对应不同的MCMC方法。根据转移核的不同, MCMC方法主要有两种: Gibbs抽样和Metropolis-Hastings算法^[23-28]。Metropolis-Hastings算法对建议密度函数要求过高, 选择的建议密度函数可能出现“过宽”和“过窄”两种情况, 从而影响抽样结果的性能。Gibbs抽样方法对建议密度函数的要求不那么严格, 它能更快“找到”目标的后验分布, 且仿真数据中

$$\begin{aligned}
 & p(u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{yr}, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{yr}^2 | y) \\
 &= \frac{\prod_{j=1}^r L(y_j | u_{yj}, \sigma_{yj}^2) h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2)}{\iint_{\Theta} \prod_{j=1}^r L(y_j | u_{yj}, \sigma_{yj}^2) h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2) du_{yj} d\sigma_{yj}^2} \\
 &= \frac{\prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{yj}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{yj}^2}(y_{ij} - u_{yj})^2\right] h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2)}{\iint_{\Theta} \prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{yj}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{yj}^2}(y_{ij} - u_{yj})^2\right] h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2) du_{yj} d\sigma_{yj}^2} \\
 &= \frac{\prod_{j=1}^r (\sigma_{yj}^2)^{-n_j/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{yj}^2} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - u_{yj})^2\right] h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2)}{\iint_{\Theta} \prod_{j=1}^r (\sigma_{yj}^2)^{-n_j/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{yj}^2} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - u_{yj})^2\right] h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2) du_{yj} d\sigma_{yj}^2} \\
 &= \frac{\prod_{j=1}^r (\sigma_{yj}^2)^{-n_j/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{yj}^2} [(n_j - 1)s_j^2 + n_j(u_{yj} - \bar{y}_j)^2]\right\} h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2)}{\prod_{j=1}^r \int_{u_{y(j+1)}}^{u_{y(j-1)}} \int_{\sigma_{y(j+1)}^2}^{\sigma_{y(j-1)}^2} (\sigma_{yj}^2)^{-n_j/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{yj}^2} [(n_j - 1)s_j^2 + n_j(u_{yj} - \bar{y}_j)^2]\right\} h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2) du_{yj} d\sigma_{yj}^2}
 \end{aligned} \tag{24}$$

连续值之间的相关性较小，能够获得更好的仿真性能。因此，选择Gibbs抽样方法进行求解。

多批次增长试验舰空导弹弹散布参数包含 $u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{yr}, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{yr}^2$ 。每个参数的条件后验分布为：

$$\begin{cases} p_1(u_{y1} | y, u_{y2}, \dots, u_{yr}, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{yr}^2) \\ p_2(\sigma_{y1}^2 | y, u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{yr}, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{yr}^2) \\ p_3(u_{y2} | y, u_{y1}, u_{y3}, \dots, u_{yr}, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{yr}^2) \\ p_4(\sigma_{y2}^2 | y, u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{yr}, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y3}^2, \dots, \sigma_{yr}^2) \\ \vdots \\ p_{2r-1}(u_{yr} | y, u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{y(r-1)}, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{yr}^2) \\ p_{2r}(\sigma_{yr}^2 | y, u_{y1}, u_{y2}, \dots, u_{yr}, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2, \dots, \sigma_{y(r-1)}^2) \end{cases} \tag{25}$$

选取每个参数的一个初始值 $u_{y1}^{(0)}, u_{y2}^{(0)}, \dots, u_{yr}^{(0)}, \sigma_{y1}^{2(0)}, \sigma_{y2}^{2(0)}, \dots, \sigma_{yr}^{2(0)}$ ，若 k 次迭代开始时参数的值为 $u_{y1}^{(k-1)}, u_{y2}^{(k-1)}, \dots, u_{yr}^{(k-1)}, \sigma_{y1}^{2(k-1)}, \sigma_{y2}^{2(k-1)}, \dots, \sigma_{yr}^{2(k-1)}$ ，则第 k 次迭代过程如下：

step1.从满条件分布 $p_1(u_{y1} | y, u_{y2}^{(k-1)}, \dots, u_{yr}^{(k-1)}, \sigma_{y1}^{2(k-1)}, \sigma_{y2}^{2(k-1)}, \dots, \sigma_{yr}^{2(k-1)})$ 中抽取一个样本 $u_{y1}^{(k)}$ ；

step2.从满条件分布 $p_2(\sigma_{y1}^2 | y, u_{y1}^{(k)}, u_{y2}^{(k-1)}, \dots, u_{yr}^{(k-1)}, \sigma_{y1}^{2(k-1)}, \sigma_{y2}^{2(k-1)}, \dots, \sigma_{yr}^{2(k-1)})$ 中抽取一个样本 $\sigma_{y1}^{2(k)}$ ；

step3.从满条件分布 $p_3(u_{y2} | y, u_{y1}^{(k)}, u_{y3}^{(k-1)}, \dots, u_{yr}^{(k-1)}, \sigma_{y1}^{2(k)}, \sigma_{y2}^{2(k-1)}, \dots, \sigma_{yr}^{2(k-1)})$ 中抽取一个样本 $u_{y2}^{(k)}$ ；若 $u_{y2}^{(k)}$ 小于 $u_{y1}^{(k)}$ ，则转为 step4；若 $u_{y2}^{(k)}$ 大于 $u_{y1}^{(k)}$ ，说明不符合多批次增长试验的约束条件，则重新进行 step3；

step4.从满条件分布 $p_4(\sigma_{y2}^2 | y, u_{y1}^{(k)}, u_{y2}^{(k)}, u_{y3}^{(k-1)}, \dots, u_{yr}^{(k-1)}, \sigma_{y1}^{2(k)}, \sigma_{y3}^{2(k-1)}, \dots, \sigma_{yr}^{2(k-1)})$ 中抽取一个样本 $\sigma_{y2}^{2(k)}$ ；若 $\sigma_{y2}^{2(k)}$ 小于 $\sigma_{y1}^{2(k)}$ ，则转为 step5；若 $\sigma_{y2}^{2(k)}$ 大于 $\sigma_{y1}^{2(k)}$ ，说明不符合多批次增长试验的约束条件，则重新进行 step4；

.....

step2r-1.从满条件分布 $p_{2r-1}(u_{yr} | y, u_{y1}^{(k)}, u_{y2}^{(k)}, \dots, u_{y(r-1)}^{(k)}, \sigma_{y1}^{2(k)}, \sigma_{y2}^{2(k)}, \dots, \sigma_{y(r-1)}^{2(k)}, \sigma_{yr}^{2(k-1)})$ 中抽取一个样本 $u_{yr}^{(k)}$ ；若 $u_{yr}^{(k)}$ 小于 $u_{y(r-1)}^{(k)}$ ，则转为 step2r；若 $u_{yr}^{(k)}$ 大于 $u_{y(r-1)}^{(k)}$ ，说明不符合多批次增长试验的约束条件，则重新进行 step2r-1；

step2r.从满条件分布 $p_{2r}(\sigma_{yr}^2 | y, u_{y1}^{(k)}, u_{y2}^{(k)}, \dots, u_{yr}^{(k)}, \sigma_{y1}^{2(k)}, \sigma_{y2}^{2(k)}, \dots, \sigma_{y(r-1)}^{2(k)})$

中抽取一个样本 $\sigma_{yr}^{2(k)}$ ；若 $\sigma_{yr}^{2(k)}$ 小于 $\sigma_{y(r-1)}^{2(k)}$ ，则完成生成一组样本数据 $u_{y1}^{(k)}, u_{y2}^{(k)}, \dots, u_{yr}^{(k)}, \sigma_{y1}^{2(k)}, \sigma_{y2}^{2(k)}, \dots, \sigma_{yr}^{2(k)}$ ，并转为 step1 进行新一轮抽样；若 $\sigma_{yr}^{2(k)}$ 大于 $\sigma_{y(r-1)}^{2(k)}$ ，说明不符合增长试验的约束条件，则重新进行 step2r；

重复以上步骤，可以得到射弹散布参数的后验样本。

上述多批次增长试验舰空导弹射弹散布参数的 MCMC 方法的 Gibbs 抽样流程如图 3 所示。

选择马尔科夫链达到平稳状态时段的点序列，由遍历性定理得参数 u_y, σ_y^2 的贝叶斯后验期望的估计值：

$$\begin{aligned}\hat{u}_{y1} &= \frac{u_{y1}^{(k+1)} + u_{y1}^{(k+2)} + \dots + u_{y1}^{(M)}}{M-k} \\ \hat{\sigma}_{y1}^2 &= \frac{\sigma_{y1}^{2(k+1)} + \sigma_{y1}^{2(k+2)} + \dots + \sigma_{y1}^{2(M)}}{M-k} \\ \hat{u}_{y2} &= \frac{u_{y2}^{(k+1)} + u_{y2}^{(k+2)} + \dots + u_{y2}^{(M)}}{M-k} \\ \hat{\sigma}_{y2}^2 &= \frac{\sigma_{y2}^{2(k+1)} + \sigma_{y2}^{2(k+2)} + \dots + \sigma_{y2}^{2(M)}}{M-k} \\ &\vdots \\ \hat{u}_{yr} &= \frac{u_{yr}^{(k+1)} + u_{yr}^{(k+2)} + \dots + u_{yr}^{(M)}}{M-k} \\ \hat{\sigma}_{yr}^2 &= \frac{\sigma_{yr}^{2(k+1)} + \sigma_{yr}^{2(k+2)} + \dots + \sigma_{yr}^{2(M)}}{M-k}\end{aligned}\quad (26)$$

以最终批次试验的舰空导弹射弹散布参数的后验期望的估计值 $\hat{u}_{yr}, \hat{\sigma}_{yr}^2$ 作为贝叶斯估计值。同理，可以求出舰空导弹射弹散布 Z 向参数的贝叶斯估计值 $\hat{u}_z, \hat{\sigma}_z^2$ 。将估计值代入公式 (1)~(2)，便能够对基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率进行估计。

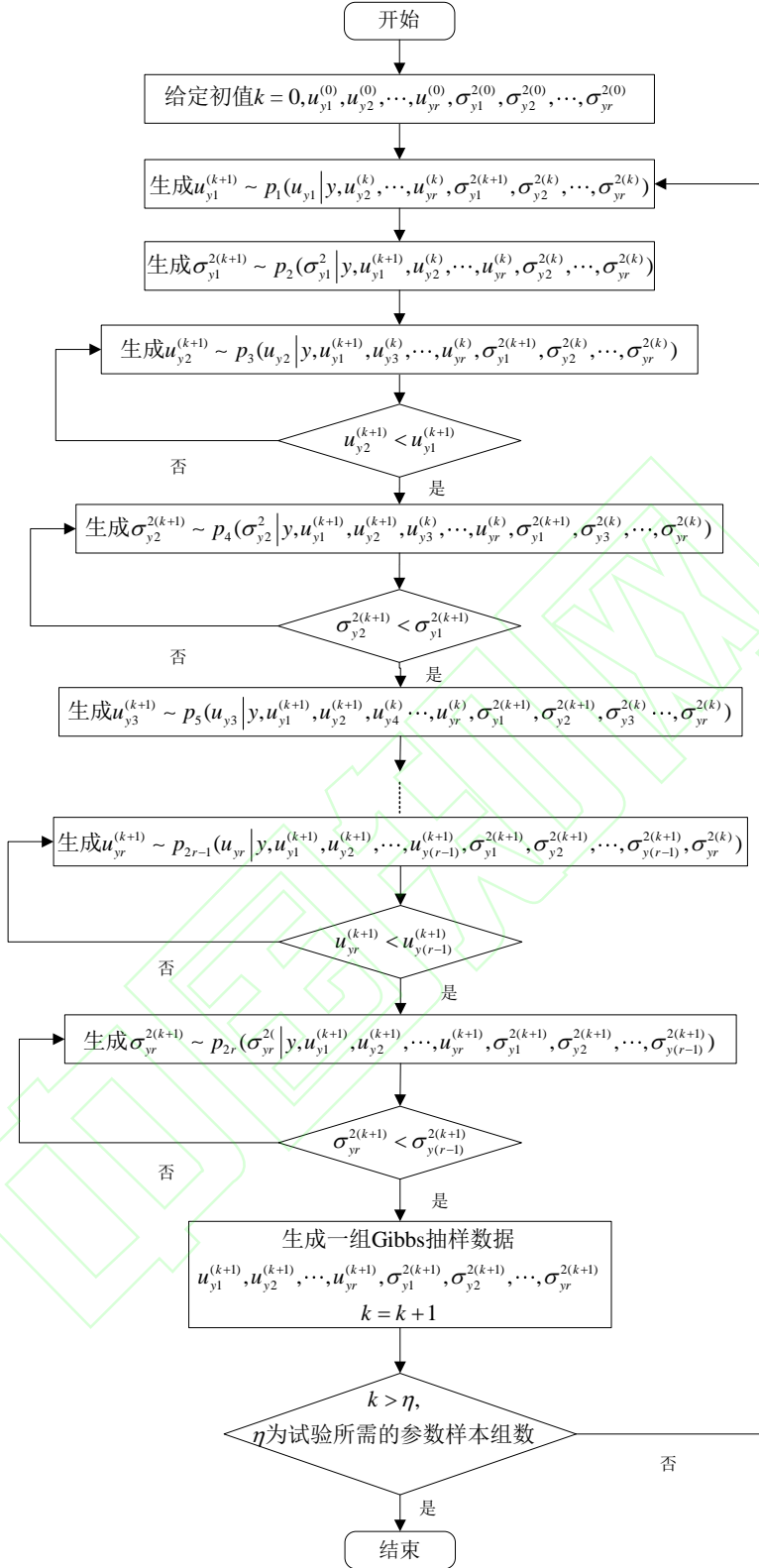


图 3 多批次增长试验舰空导弹射弹散布参数 Gibbs 抽样流程

Fig. 3 Gibbs sampling process of ship-to-air missile projectile dispersion parameters based on multiple batches growth tests

4 试验分析

为了准确估计出某型号舰空导弹的命中概率，共分三个批次，每批次 10 枚舰空导弹进行

打击目标的试验。舰空导弹的性能会在每批次试验之后有所改进，其命中概率会随着试验进行而提高。表 1 给出已经获取到的舰空导弹射

弹散布外场发射试验数据和先验信息数据。

表 1 舰空导弹射弹散布外场发射试验数据和先验信息数据

舰空导弹射弹散布外场发射试验数据		舰空导弹射弹散布先验信息数据	
(y_i, z_i)		$h(u_{yj}, \sigma_{yj}^2)$	$h(u_{zj}, \sigma_{zj}^2)$
		$N(u_{y0}, \sigma_y^2 / k_{y0}) \bullet$ $IGa(v_{y0} / 2, v_{y0} \sigma_{y0}^2 / 2)$	$N(u_{z0}, \sigma_z^2 / k_{z0}) \bullet$ $IGa(v_{z0} / 2, v_{z0} \sigma_{z0}^2 / 2)$
初始批次试验	$(8.869, 7.447) \cdot (6.338, 4.557) \cdot (8.377, 8.556)$		
	$(10.155, 8.134) \cdot (8.773, 7.334) \cdot (4.508, 5.667)$	$N(8.488, \sigma_y^2 / 2.135) \bullet$	$N(6.363, \sigma_z^2 / 2.073) \bullet$
	$(8.446, 7.421) \cdot (9.883, 6.233) \cdot (7.722, 4.584)$ $(9.362, 5.663)$	$IGa(12.247, 40.414)$	$IGa(9.078, 21.812)$
第二批次试验	$(4.776, 3.586) \cdot (6.527, 4.832) \cdot (5.324, 4.432)$		
	$(4.337, 5.253) \cdot (3.882, 3.237) \cdot (4.118, 5.229)$	$N(5.915, \sigma_y^2 / 1.783) \bullet$	$N(3.938, \sigma_z^2 / 1.926) \bullet$
	$(7.553, 3.793) \cdot (5.753, 2.507) \cdot (7.133, 1.891)$ $(5.975, 2.736)$	$IGa(8.523, 17.284)$	$IGa(7.883, 13.971)$
第三批次试验	$(2.569, 2.667) \cdot (2.477, 1.556) \cdot (3.435, 1.137)$		
	$(4.932, 3.016) \cdot (1.893, 2.669) \cdot (2.223, 2.891)$	$N(2.753, \sigma_y^2 / 1.385) \bullet$	$N(1.917, \sigma_z^2 / 1.471) \bullet$
	$(2.464, 1.667) \cdot (2.662, 2.349) \cdot (3.255, 0.951)$ $(1.875, 1.533)$	$IGa(4.444, 3.548)$	$IGa(4.381, 2.965)$

本研究采用贝叶斯专用 WinBUGS 软件进行多批次增长试验舰空导弹射弹散布参数 MCMC 求解^[29-32]。基于 Gibbs 抽样迭代抽取舰空导弹射弹散布的参数 $u_{yj}, \sigma_{yj}^2, u_{zj}, \sigma_{zj}^2$ ，产生马尔科夫链。得到舰空导弹初始批次试验射弹散布参数 $u_{y1}, \sigma_{y1}^2, u_{z1}, \sigma_{z1}^2$ 的迭代迹图，迭代 3000 次，结果

如图 4 所示。生成第二批次试验舰空导弹射弹散布参数 $u_{y2}, \sigma_{y2}^2, u_{z2}, \sigma_{z2}^2$ 的迭代迹图，迭代 3000 次，结果如图 5 所示。生成第三批次试验舰空导弹射弹散布参数 $u_{y3}, \sigma_{y3}^2, u_{z3}, \sigma_{z3}^2$ 的迭代迹图，迭代 3000 次，结果如图 6 所示。

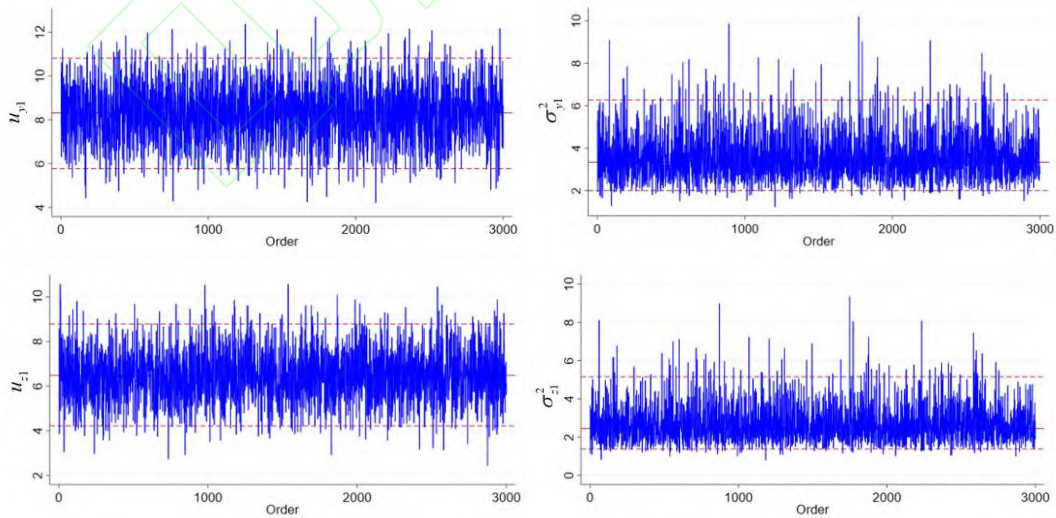


图 4 初始批次试验舰空导弹射弹散布参数的迭代迹图

Fig. 4 The iterative trace of the initial batch tests of ship-to-air missile projectile dispersion parameters

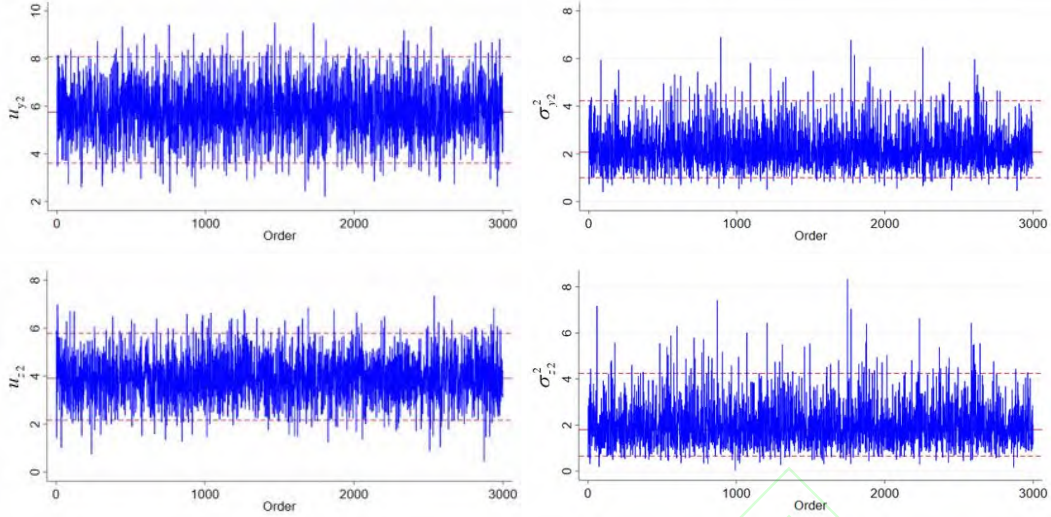


图 5 第二批次试验舰空导弹射弹散布参数的迭代迹图

Fig. 5 The iterative trace of the second batch tests of ship-to-air missile projectile dispersion parameters

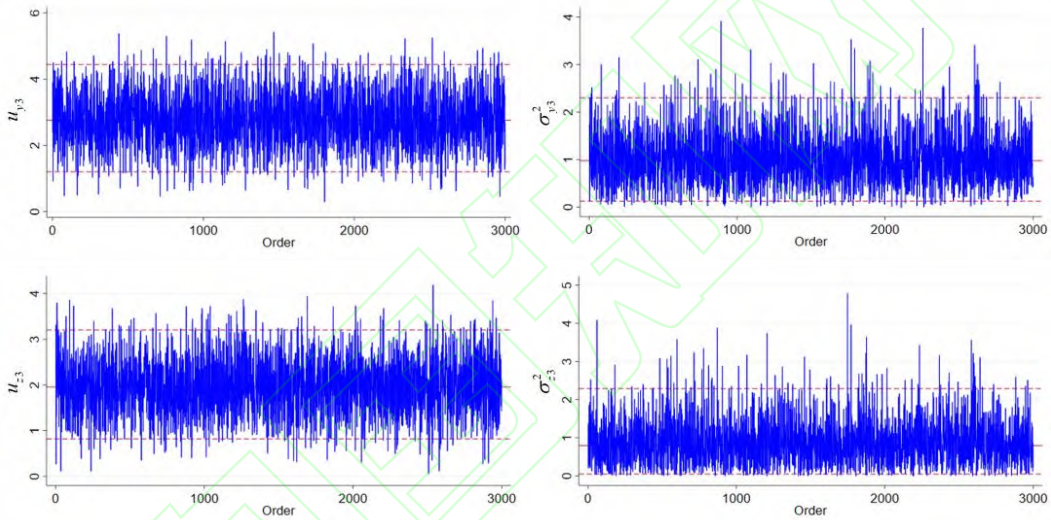


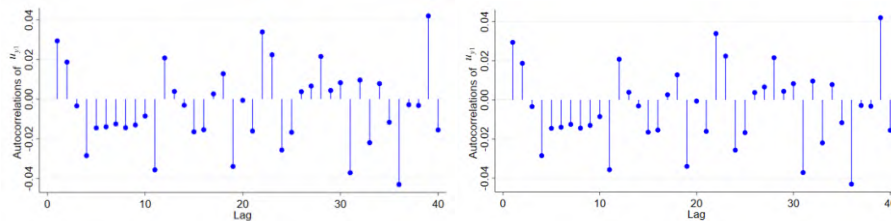
图 6 第三批次试验舰空导弹射弹散布参数的迭代迹图

Fig. 6 The iterative trace of the third batch tests of ship-to-air missile projectile dispersion parameters

从图 4~6 各批次试验舰空导弹射弹散布参数的迭代迹图中可以看出, 初始批次试验舰空导弹射弹散布参数 $u_{y1}, \sigma_{y1}^2, u_{z1}, \sigma_{z1}^2$ 的迭代值最大。第二批次试验舰空导弹射弹散布参数 $u_{y2}, \sigma_{y2}^2, u_{z2}, \sigma_{z2}^2$ 的迭代值次之。第三批次试验舰空导弹射弹散布参数 $u_{y3}, \sigma_{y3}^2, u_{z3}, \sigma_{z3}^2$ 的迭代值最小。说明导弹射弹散布随着试验进行逐渐变小, 其命

中精度逐渐变高, 符合多批次增长试验的特点。

观察各批次试验舰空导弹射弹散布参数 $u_{yj}, \sigma_{yj}^2, u_{zj}, \sigma_{zj}^2$ 的自相关图, 如图 7 所示。舰空导弹射弹散布参数 $u_{yj}, \sigma_{yj}^2, u_{zj}, \sigma_{zj}^2$ 的自相关系数均位于 -0.1 至 0.1 之间, 数值偏小说明马尔科夫链达到收敛状态, 抽样结果能够真实描述参数后验分布情况。



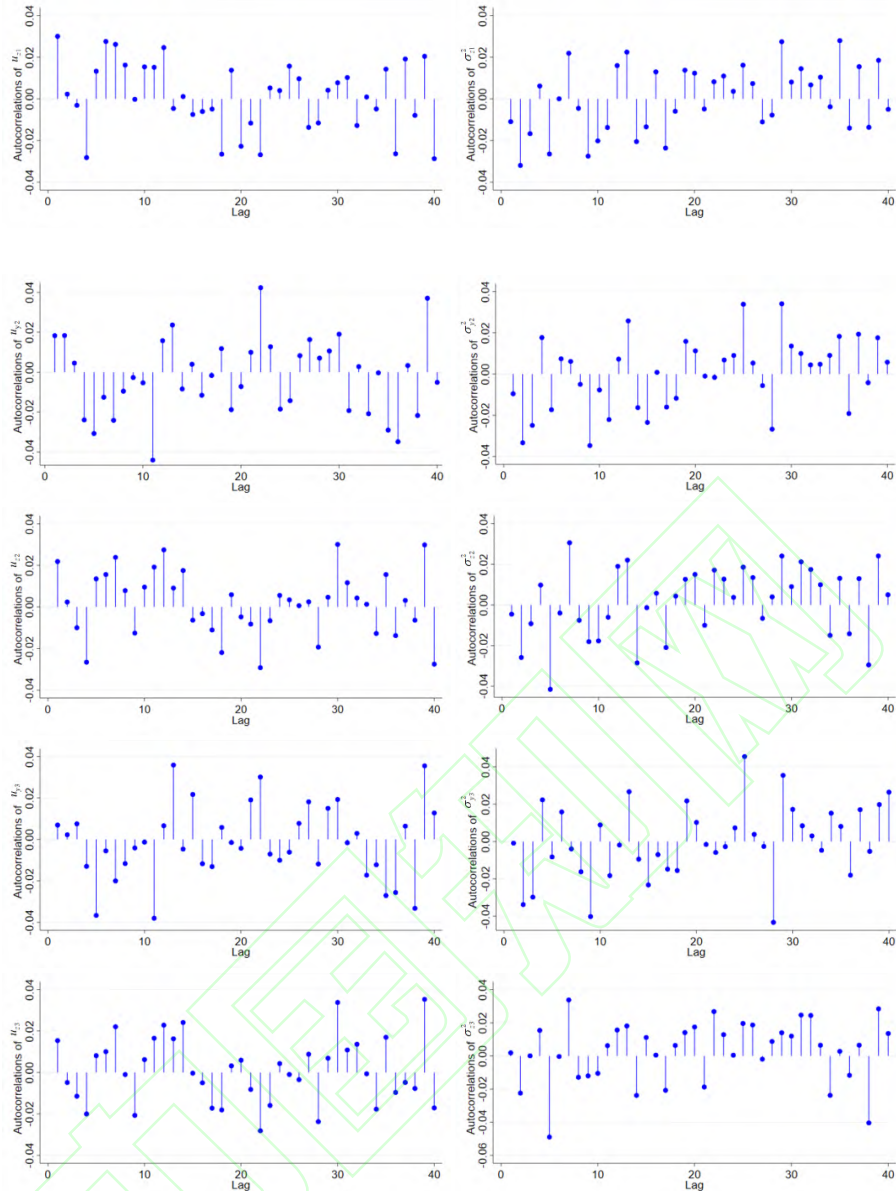


图 7 各批次试验舰空导弹射弹散布参数的自相关图

Fig. 7 The autocorrelations diagrams of each batch tests of ship-to-air missile projectile dispersion parameters

对多批次增长试验舰空导弹射弹散布参数 2 所示。
的贝叶斯马尔科夫链结果进行统计, 结果如表

表 2 多批次增长试验舰空导弹射弹散布参数贝叶斯马尔科夫链统计结果

Table 2 The statistical results of Bayesian Markov chains of ship-to-air missile dispersion parameters in multiple batches growth tests

node	sample	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%
u_{y1}	3000	8.324	1.763	3.125E-4	5.825	8.346	10.866
σ_{y1}^2	3000	3.567	1.232	2.306E-4	2.084	3.396	6.155
u_{z1}	3000	6.453	1.288	2.663E-4	4.126	6.404	8.631
σ_{z1}^2	3000	2.663	1.017	2.137E-4	1.643	2.548	5.284
u_{y2}	3000	5.783	1.256	2.442E-4	3.675	5.698	8.012
σ_{y2}^2	3000	2.216	0.812	1.885E-4	0.963	2.032	4.086
u_{z2}	3000	3.887	1.013	2.255E-4	2.056	3.882	5.892

σ_{z2}^2	3000	1.974	0.663	1.866E-4	0.843	1.906	4.175
u_{y3}	3000	2.768	0.746	1.623E-4	1.276	2.811	4.453
σ_{y3}^2	3000	1.027	0.434	1.114E-4	0.127	0.985	2.336
u_{z3}	3000	1.973	0.588	1.339E-4	0.878	1.986	3.240
σ_{z3}^2	3000	0.864	0.323	1.003E-4	0.086	0.873	2.255

依据表 2 中的基于多批次增长试验的舰空导弹射弹散布参数贝叶斯估计结果可以看出：各批次试验舰空导弹射弹散布参数的值逐渐降低，表明射弹散布幅度减小，舰空导弹命中精度增加。最终批次试验的舰空导弹射弹散布参数贝叶斯估计结果既融合了舰空导弹射弹散布的先验信息和外场射击试验信息，又能够考虑到多批次增长试验的特点，所得结果利用的信息更为充分。因此，选择最终批次试验的弹散布参数贝叶斯估计结果作为多批次增长试验的弹散布参数贝叶斯估计结果。最终批次试验的舰空导弹射弹散布参数 u_{y3} 的均值为 2.768，方差为 0.746；参数 σ_{y3}^2 的均值为 1.027，方差为

0.434；参数 u_{z3} 的均值为 1.973，方差为 0.588；参数 σ_{z3}^2 的均值为 0.864，方差为 0.323。确定好有效目标区域之后，将射弹散布参数值代入公式（8）中即可求出基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率贝叶斯估计值。

最后，为体现本研究方法的先进性，对单批次试验数据下的舰空导弹命中概率进行估计，单批次试验的命中概率估计主要利用最新批次的试验信息，即本研究中第三批次试验信息。采用第二节提出的舰空导弹命中概率贝叶斯估计方法并结合 MCMC 方法进行求解，并运用 Gibbs 抽样方法进行迭代抽样，所得结果统计如表 3 所示。

表 3 单批试验舰空导弹射弹散布参数贝叶斯马尔科夫链统计结果

Table 3 The statistical results of Bayesian Markov chains of ship-to-air missile dispersion parameters in a single batch tests

node	sample	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%
u_y	3000	2.953	0.833	1.771E-4	1.355	2.887	4.558
σ_y^2	3000	1.066	0.448	1.157E-4	0.132	0.992	2.388
u_z	3000	2.008	0.672	1.557E-4	0.922	2.018	3.378
σ_z^2	3000	0.897	0.374	1.083E-4	0.086	0.912	2.305

选择观察多批次增长试验的参数 u_{y2} 、 u_{y3} 与单批次试验的参数 u_y 的迭代迹图，并进行对比，观察 u_{y2} 、 u_{y3} 、 u_y 迭代次数为第 1501 次至 1550 次的迭代情况，结果如图 8 所示。

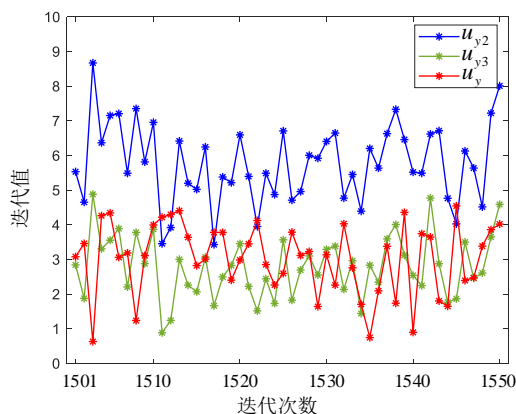


图 8 参数 u_{y2} 、 u_{y3} 、 u_y 迭代迹图对比

Fig. 8 Parameters u_{y2} , u_{y3} , u_y iteration trace comparison

从图 8 中可以发现，仅利用第三批次试验信息的单批次试验参数 u_y 在迭代过程中存在一些数值大于第二批次试验参数 u_{y2} 的情况，这是由于没有构建顺序约束条件的结果，与多批次增长试验的假设不符，未能满足舰空导弹命中概率多批次增长试验的特点。单批次试验迭代过程中未能构建顺序约束条件，因此如表 3 所示，其所得结果要高于多批次试验结果。同时单批次试验数据下的命中概率估计无法对之前批次试验数据进行利用，信息利用不充分，给小样本试验命中概率估计的准确性带来误差风险。此外，若舰空导弹命中概率试验进行的批次较多时，则初始阶段批次试验的命中概率数据信息与最终命中概率估计的结果存在较大差异，此时去除掉初始阶段批次试验的命中概率试验数据，仅利用与最终批次试验较近的批次试验数据进行命中概率估计会更有利于提高舰空导弹命中概率估计的精度。

综合上述对比分析,本研究基于多批次增长试验的命中概率贝叶斯估计方法要优于单批次试验的命中概率贝叶斯估计方法。

5 结论

本研究提出的基于多批次增长试验的舰空导弹命中概率贝叶斯估计方法以舰空导弹射弹散布服从二维正态分布为基础,通过去相关处理简化射弹散布函数。通过贝叶斯方法将舰空导弹射弹散布的先验信息进行利用,增加小样本试验的信息量。同时,考虑到舰空导弹命中概率多批次增长试验的特点,在贝叶斯推断过程中构建顺序约束关系,并采用 MCMC 方法结合 Gibbs 抽样进行贝叶斯求解。该方法利用信息充分,能够考虑到舰空导弹命中概率试验特点,所得命中概率贝叶斯估计结果可为一些舰空导弹数值仿真实验提供借鉴。

参考文献

- [1] 闫志强,蒋英杰,谢红卫.基于顺序约束的命中概率多批次试验统计评定方法[J].宇航学报,2010,31(04):1206-1211.
YAN Z Q, JIANG Y J, XIE H W. Statistical Evaluation method of hit probability for multi-batch tests based on sequence constraints [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(04):1206-1211.
- [2] ZHAI C L, CHEN X W. Simulation model for studying the effect of function distribution on the evaluation of building damage caused by missile attack[J]. Defence Science Journal, 2023, 73(05):541-550.
- [3] HUANG J, WU P F, LI X B. Research on dynamically corrective hit probability model of anti-air missile integrated in war game system[J]. Engineering Letters, 2022, 30 (02):57-68.
- [4] QIU X Q, GAO C S, JING W X. Maneuvering penetration strategies of ballistic missiles based on deep reinforcement learning [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G-Journal of Aerospace Engineering, 2022, 236(16):3494-3504.
- [5] CORRIVEAU D, RABBATH C, GOUDREAU A. Effect of the firing position on aiming error and probability of hit[J]. Defence Technology, 2019,15(05):111-126.
- [6] KHAIKOV L V. Assessment of the single shot hit probability as a function of the horizontal range taking into account different target types and points of aim[J]. Vojnotehnički Glasnik,2019,67(01):55-68.
- [7] 李康,史宪铭,李广宁等.基于正态-逆伽马分布的反巡航导弹命中概率估计方法[J].系统工程与电子技术,2022,44(08):2621-2627.
LI K, SHI X M, LI G N et al. Estimation method of anti-cruise missile hit probability based on normal-inverse gamma Distribution [J]. Systems Engineering and Electronics, 2022,44(08):2621-2627.
- [8] 刘昊邦,史宪铭,赵美等.基于正态-逆威沙特分布的地空导弹命中概率贝叶斯估计[J/OL].兵工学报:1-10[2023-07-19].
LIU H B, SHI X M, ZHAO M et al. Bayesian estimation of surface-to-air missile hit probability based on normal-inverse Wishart distribution [J/OL]. Acta Armamentarii: 1-10 [2023-07-19].
- [9] SUN Y L. Research on ship-to-air missile fire distribution method based on improved genetic algorithm[J]. Computer Informatization and Mechanical System, 2023,6(05):78-92.
- [10] WANG Y T, WANG H Y, LIANG H M, et al. Research on Horizontal Damage Zone Airspace of Ship-to-Air Missile Under Cooperative Operation[J]. Advances in Computer Science and Ubiquitous Computing, 2018,07(02):654-660.
- [11] 赵永涛,焦纲领,王军生等.舰舰协同制导舰空导弹中末目标交班问题研究[J].北京理工大学学报,2022,42(09):953-960.
ZHAO Y T, JIAO G L, WANG J S, et al. Research on midpoint shift of Ship-to-air guided Missile [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2022,42(09):953-960.
- [12] 刘泽乾,纪义国,杨林等.制导化改进的常规航空炸弹命中精度分析[J].系统工程与电子技术,2020,42(09): 2071-2076.

- LIU Z Q, JI Y G, YANG L, et al. Analysis of hit accuracy of conventional aerial bomb with improved guidance [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2020,42(09): 2071-2076.
- [13] LIU S T, WANG L T, WEI B Y. Modeling and Simulation Method of Flight Trajectory for Ship-To-Air Missile Based on Vector Rotation[J]. *Journal of Physics: Conference Series*,2018,10 (01):60-78.
- [14] CIVEK B C, ERTIN E. Bayesian sparse blind deconvolution using MCMC methods based on normal-inverse-gamma prior[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70 (06):1256-1269.
- [15] ZHOU Q, GUAN Y T. On the null distribution of Bayes factors in linear regression.[J].*Journal of the American Statistical Association*,2018,13(23):112-126.
- [16] ZHANG Y Y, RONG T Z, LI M M, et al. The empirical Bayes estimators of the mean and variance parameters of the normal distribution with a conjugate normal-inverse-gamma prior by the moment method and the MLE method [J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2019, 48 (09): 2286-2304.
- [17] CAI M Y, VAN B S, VINK G. Joint distribution properties of fully conditional specification under the normal linear model with normal inverse-gamma priors [J]. *Scientific Reports*, 2023, 13 (01): 33-46.
- [18] LIU H B, SHI X M, CHEN X J, et al. Bayesian Inference of Ammunition Consumption Based on Normal-Inverse Gamma Distribution[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*,2022,12(03):44-56.
- [19] SHANA S, JOHAANNES K, ANDREAS B, et al. Bayes post est: An r package to generate postestimation quantities for Bayesian MCMC estimation[J]. *Journal of Open Source Software*,2019,4(42):90-101.
- [20] KHARAZMI O, HAMEDANI G G, CORDEIRO G M. Log-mean distribution: applications to medical data, survival regression, Bayesian and non-Bayesian discussion with MCMC algorithm[J]. *Journal of Applied Statistics*,2023,5(05):63-72.
- [21] MINH N N, MINH N T, ROHITASH C. Sequential reversible jump MCMC for dynamic Bayesian neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2023,7(03):156-168.
- [22] NGOC N T, HOANG B N. Nexus between tourism and ecological footprint in RCEP: Fresh evidence from Bayesian MCMC random-effects sampling[J]. *Cogent Business Management*,2023,10(1):34-45.
- [23] THEODORE P. Approximate blocked Gibbs sampling for Bayesian neural networks[J]. *Statistics and Computing*,2023,33(5):122-134.
- [24] JUN K, SHINTARO H. Approximate Gibbs sampler for Bayesian Huberized lasso[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*,2023,93(1):55-63.
- [25] PAUL L D M. Bayesian networks: regenerative Gibbs samplings[J]. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*,2022,51(12):113-124.
- [26] BUMENG Z, CHAO G. Mixing time of Metropolis-Hastings for Bayesian community detection[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2021, 22(03):99-108.
- [27] REUSCHEN S, XU T, NOWAK W. Bayesian inversion of hierarchical geostatistical models using a parallel-tempering sequential Gibbs MCMC[J]. *Advances in Water Resources*,2020,14 (05):92-102.
- [28] SHENG Y. Bayesian estimation of the four-parameter IRT model using Gibbs sampling[J]. *Quantitative Research in Education*,2015,2(3):72-88.
- [29] THOMPSON J, PALMER T, MORENO S. Bayesian analysis in Stata with WinBUGS[J]. *Stata Journal*, 2006, 06 (04):530-549.
- [30] WILLIAMS M S, EBEL E D, Hoeting, JA. Bayesian Analysis for Food-Safety Risk Assessment: Evaluation of Dose-Response Functions within WinBUGS[J]. *JOURNAL OF STATISTICAL SOFTWARE*, 2011, 43 (CS2):1-14.

- [31] JEVDJEVIC M, YOUN J H, PETERSOHN S, et al. MSR110 A Comparison of stan versus WinBUGS software for conducting Bayesian hazard ratio-based network meta-analysis[J]. Value in Health, 2022, 25 (12S): 50-62.
- [32] PERRAKIS K, NTZOUFRAS I. Bayesian variable selection using the hyper - g prior in WinBUGS[J]. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2018, 10 (6):73-81.

作者简介

刘昊邦（1998-），男，博士研究生，主要研究方向为装备管理与保障、系统工程。

陈童（1980-），男，副教授，博士，主要研究方向为装备管理与保障、系统工程。

胡涛（1970-），男，教授，博士，主要研究方向为装备管理与保障、系统工程。

李明贵（1984-），男，工程师，硕士研究生，主要研究方向为装备管理与保障、质量管理、系统工程。

杜凯（1991-），男，讲师，硕士，主要研究方向为装备供应保障。