

# 等距螺旋的原理与计算

刘崇军

(民航西北空管局, 陕西 西安 710082)

**摘 要:** 阿基米德螺线与渐开线是两种典型的螺旋曲线, 风螺旋线是介于二者之间的一种螺旋形态. 它们三者工业设计、航空计算中发挥着非常重要的作用. 通过引入飞行程序设计计算原理, 在等距螺旋的框架下对三者进行对比分析, 可以得到统一的运动原理及计算公式, 并且更为简便地开展基本规律、切线计算相关的讨论.

**关键词:** 螺线; 阿基米德; 渐开线; 风螺旋线; 公式

在对飞行程序设计中使用的风螺旋线进行分析研究时<sup>[1]</sup>, 发现风螺旋线与传统的阿基米德螺线以及渐开线有着非常多的相似性. 因此, 尝试对这三种螺线做进一步的分析, 最终发现这三种螺线可以采用统一的运动形式来进行描述, 并且可以借用统一的计算公式加以实现. 若将这一公式所绘制的螺线统称为等距螺旋, 在此概念框架之下, 阿基米德螺线、风螺旋线、渐开线将是等距螺旋的三种典型特例.

## 1 运动形式的对比分析

阿基米德螺线的运动形式描述为: 一个端点保持固定的直线在平面内匀速旋转一周, 同时有一动点从固定的端点出发, 沿直线匀速移动, 则该动点在平面上将描出一条螺线.

渐开线的运动形式描述为: 当一直线 BK 沿一圆周作纯滚动时, 直线上任意点 K 的轨迹 AK 就是该圆的渐开线 (involute)<sup>[2]</sup>. 该圆称为渐开线的基圆 (base circle).

渐开线中的 K 点可以看作是按照与基圆旋转方向相反的方向做匀速直线运动, 直线运动的速度等于圆周上位置点的转速, 于是基圆每旋转一周, K 点沿直线移动一个基圆周长的距离.

风螺旋线的运动形式描述为: 航空器在转弯的过程中由于不断受到侧风影响, 在理想飞行航迹之上增加风的影响量  $E_\theta$  而得到的一种螺旋状外边界<sup>[3]</sup>.

风螺旋线中所述的理想飞行航迹是根据特定的真空速 (TAS) 和转弯坡度计算得到的半径绘制而来, 它与渐开线中的基圆是相同的含义. 风的影响量  $E_\theta$  始终与理想圆弧上对应的半径之间有一个固定的夹角, 该夹角的大小等于偏流角 DA. 航空器在转弯过程中按照  $E_\theta$  方向进行外扩, 每一个旋转周期外扩相同的距离.

通过三种螺线运动形式的对比可以发现, 匀速直线运动与匀速圆周运动的叠加, 可以形成等距离外扩的螺旋曲线. 直线与圆周的位置关系是这三种螺线形态上的主要区别, 每个旋转周期, 沿直线移动相同的距离, 是三种螺线的共同特征.

收稿日期: 2017-10-21

阿基米德螺线中的直线穿过圆心,基圆的概念在这里并未得到充分的体现.阿基米德螺线实际上使用了射线运动的概念:完整的直线运动应包含从无限远处运动至圆心,再由圆心向无限远处运动,这两部分之间是平滑连接的关系.若其中一部分显示为顺时针外扩,则另外一部分显示为逆时针外扩.

渐开线中的直线与基圆相切,直线运动的速度等于圆周运动的速度,因此,每旋转一周,直线上移动的距离等于一个基圆的周长.

风螺旋线中的直线与基圆相交,通常仅使用基圆以外的螺线部分.风螺旋线对于直线运动与圆周运动的速度和方向有精确的要求.直线运动的速度相当于转弯过程中所考虑的风速,圆周运动的速度对应于航空器的真空速(TAS).风速向量(Ws)与真空速向量的合向量为地速向量(GS),风速向量与地速向量相垂直,地速向量与真空速向量之间的夹角为偏流角(DA)<sup>[4]</sup>.

以水平直线运动为例,直线与圆周的位置关系可分为:相切于圆周下部、相交与圆周下半部、穿过圆心、相交于圆周上半部、相切于圆周上部;直线运动的方向可以是左到右,或从右到左;圆周的旋转方向分为顺时针和逆时针.通过将水平直线运动与圆周运动的方向及位置进行排列组合,可以发现相同的位置搭配,在不同的运动方向下螺线的形态有着较大的差异.

阿基米德螺线中的直线穿过圆心,因此,顺时针旋转或是逆时针旋转,得到的“完整螺线”形状是相同的,但角度相差180°.直线与基圆的下半部分相交,顺时针旋转得到的螺线,与直线相交基圆于上半部分并逆时针旋转的效果相同,角度相差180°.若动点运动方向相反,为了得到同样的轨迹,旋转方向需要相反.

如果对直线运动与圆周运动之间的速度关系不加限定,仅按照匀速直线运动与匀速圆周运动来考虑,则可以得到更多的更具普遍性质的螺线,这些螺线均能够按照直线运动的方向实现等距离外扩,按照这种等距离外扩的属性来为这些螺线命名,可统称为等距螺旋.阿基米德螺线、风螺旋线、渐开线由于受位置或速度上的条件约束,因而是等距螺旋的特例.

## 2 计算公式的对比分析

由于阿基米德螺线公式中未考虑基圆的参数,因此,它的公式与渐开线公式之间存在不相融合的情况.风螺旋线的位置关系更具一般性,因而它的公式可以体现出等距螺旋的主要特征.

### 2.1 风螺旋线公式的推导

风螺旋线公式是基于航行速度三角形来进行推导的,航行速度中的要素与风螺旋线的位置关系如图1所示.

对图1中风螺旋线的角度关系按照余弦函数计算 $\rho$ 值,可以得到极坐标系下的函数表达式(1)(2)(3)<sup>[5]</sup>.该表达式是以标称圆圆心为中心点,水平轴向左为零度轴,顺时针方向角度增大为基础的极坐标系公式, $\theta$ 角的起点是螺线与基圆相交的一点:

$$E_{\theta} = \frac{WS}{R} * \theta \quad (1)$$

$$\rho = \sqrt{E_{\theta}^2 + r^2 + 2 * E_{\theta} * r * \cos DA'} \quad (2)$$

$$\alpha = \theta - \beta = \theta - \arcsin \left( \frac{E_{\theta} * \sin DA'}{\sqrt{E_{\theta}^2 + r^2 + 2 * E_{\theta} * r * \cos DA'}} \right) \quad (3)$$

在一个稳定的转弯计算中, 转弯 (基圆) 半径  $r$ , 风速  $WS$ , 转弯率  $R$ , 偏流角  $DA$  均可以看作是常数. 风螺旋线角度关系中  $DA' = DA$ ,  $DA$  的值等于  $\arcsin(WS/TAS)$ , 这里的风速总是小于真空速的, 对于更普通的等距螺旋不需要遵循这样的设定.

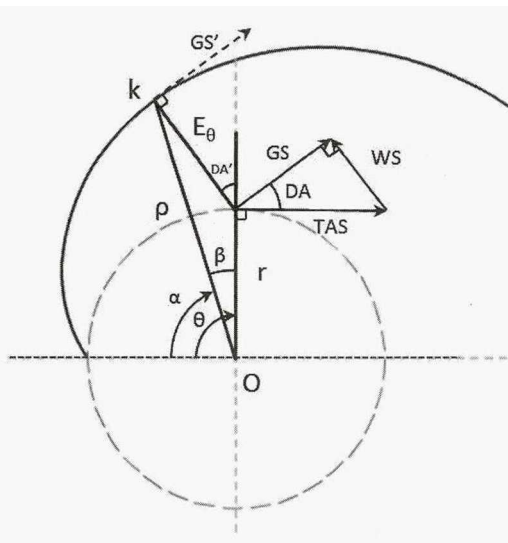


图 1 航行速度三角形与风螺旋线的角度关系

当旋转的角度  $\theta$  增大时, 累积的  $E_{\theta}$  值 (直线上的运动距离) 会成比例增加, 因此, 风螺旋线的等距外扩是沿着  $E_{\theta}$  的方向进行的, 外扩距离可以与旋转角度进行互相换算<sup>[6]</sup>.  $\theta$  值还会间接影响到极坐标系中的极径  $\rho$  和极角  $\alpha$  的大小.

## 2.2 风螺旋线公式与圆弧的极坐标公式的关系

若风速为零, 则航空器的转弯轨迹必为标准的圆弧. 从公式上看,  $WS$  为零时,  $E_{\theta}$  为零,  $\rho = r$ ,  $\alpha = \theta$ , 正是圆弧的极坐标公式.

## 2.3 风螺旋线公式与阿基米德螺线公式的关系

按照阿基米德螺线的位置关系, 风速向量穿过基圆的圆心,  $DA'$  等于零. 将  $DA'$  值代入前述公式可以得到阿基米德螺线公式 (4):

$$\begin{cases} \rho = E_{\theta} + r = \frac{WS}{R} * \theta + r = a * \theta + b \\ \alpha = \theta \end{cases} \quad (4)$$

公式 (4) 中将  $WS/R$  及  $r$  看作是常数  $a$  和  $b$ . 从阿基米德螺线公式的对比可以看到, 当  $DA'$  角为零时, 基圆半径在表达式中可以合并为  $\theta$  角的一部分  $\rho = a(\theta + b/a)$ . 阿基米德螺线  $\theta$  角的起点通常为圆心点,  $b/a$  实际上就是从圆心移动到圆周上所经过的旋转角度. 通过阿基米德螺线简化公式  $\rho = a * \theta$  无法准确知道基圆半径的大小.

系数  $a$  代表了直线运动的速度除以转弯率, 转弯率可以按弧度单位表示为公式 (5):

$$R = \frac{2\pi}{2\pi r / TAS} \quad (5)$$

因此, 系数  $a$  又可以表示为  $r * (WS/TAS)$ , 即转弯半径乘以直线运动的速度除以圆周运

动的速度.

## 2.4 风螺旋线公式与渐开线公式的关系

按照渐开线螺旋的位置关系, 风速向量与基圆相切, 即  $DA'$  等于  $90^\circ$ . 将  $DA'$  值代入前述公式可以得到渐开线的函数公式 (6):

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{E_\theta^2 + r^2} = \frac{r}{\cos \beta} \\ \alpha = \theta - \arcsin \left( \frac{E_\theta}{\sqrt{E_\theta^2 + r^2}} \right) = \theta - \arcsin (\sin \beta) = \theta - \beta \end{cases} \quad (6)$$

渐开线中的角度关系如图 2 所示:

传统渐开线中直线运动速度与圆周的旋转速度相同,  $\theta$  角对应的基圆上的弧长 (用  $\widehat{ab}$  来表示) 等于相应的  $E_\theta$  长度,  $\theta$  角的弧度值可通过公式 (7) 来表示.

$$\theta = \frac{\widehat{ab}}{r} = \frac{E_\theta}{r} = \tan \beta \quad (7)$$

于是, 当  $DA'$  为  $90^\circ$ , 直线运动速度与圆周运动速度相同时, 风螺旋线公式可以转化为典型的渐开线齿廓公式 (8):

$$\begin{cases} \rho = \frac{r}{\cos \beta} \\ \alpha = \tan \beta - \beta \end{cases} \quad (8)$$

渐开线齿廓公式中的角度参数如图 3 所示.

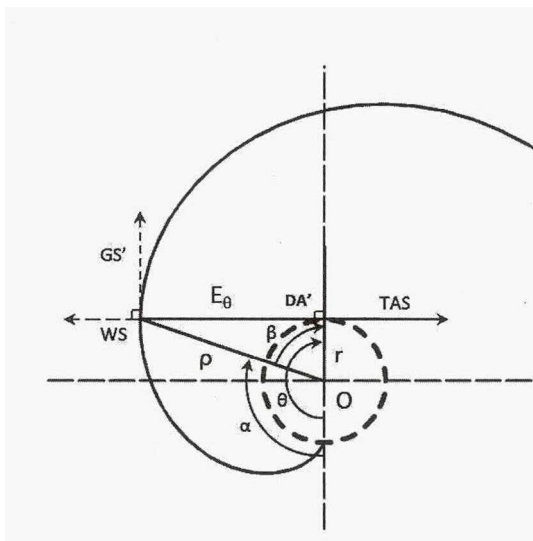


图 2 渐开线中的角度关系

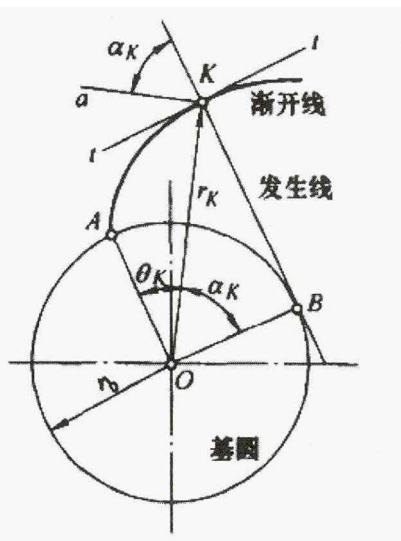


图 3 渐开线齿廓公式中的角度关系

风螺旋线公式与渐开线齿廓公式中的参数对应关系如表 1 所示:

由于航空速度计算中的图符系统更加全面和复杂, 在对螺旋曲线进行描述时, 使用到了更多的参数, 对于等距螺旋的通用公式而言需要做进一步的简化.

表 1 螺旋线公式参数对应关系

参数名称	风螺旋线公式	渐开线公式
极角	$\alpha$	$\theta_K$
极径	$\rho$	$r_K$
基圆半径	$r$	$r_b$
压力角	$\beta$	$\alpha_K$
转弯角度	$\theta$	$\theta_K + \alpha_K$
直线运动速度	$WS$	无
圆周运动速度	$TAS$	无
转弯率	$R$	无
偏流角	$DA$	无
直线运动的距离	$E_\theta$	无

在数学软件 Mathematica 中提供了另外一种形式的渐开线方程, 如公式 (9) 所示:

$$\begin{cases} x(t) = a(t \sin(t) + \cos(t)) \\ y(t) = a(\sin(t) - t \cos(t)) \end{cases} \quad (9)$$

方程中的  $t$  是按照直线与圆周相切位置的半径为起点开始计算的角度, 它与  $\beta$  角的关系为  $t = \tan(\beta)$ , 代入前述的渐开线极坐标公式得到公式 (10):

$$\begin{cases} \rho = \frac{r}{\cos(\arctan(t))} \\ \alpha = t - \arctan(t) \end{cases} \quad (10)$$

将公式 (10) 转为直角坐标系并化简后, 可得到与 Mathematica 软件中相同的直角坐标系公式.

### 3 等距螺旋的参数设定

风螺旋线公式中使用的参数较多, 并且多个参数之间具有可替代关系, 因此, 在构建等距螺旋公式时, 应进行适当的简化, 控制自变量的数目, 从而对公式的分析与推广起到积极的促进作用.

#### 3.1 速度参数与转弯半径的设定

在航空计算中, 真空速可以用  $v$  来表示, 风速以  $w$  来表示, 它们代表以米/秒为单位的速度. 在等距螺旋公式中可以用  $v$  来表示圆周上的运动速度,  $w$  表示直线上的运动速度, 这样与航空速度三角形具有对应的关系, 在分析时, 可参考风螺旋线的参数设定.

真空速与转弯半径的换算在航空计算中有较为严格的计算方法, 在等距螺旋中半径与圆周速度并不需要遵循特定的比例关系, 因此, 转弯半径做为一个独立的自变量来考虑, 为简化讨论, 圆周速度可以按  $2\pi r/T$  来表示.

#### 3.2 转弯率 $R$ 和 $E_\theta$ 的简化

转弯率在航空计算中是必须的环节, 因为在转弯过程中需要对转弯率进行限制, 不得大于  $3^\circ/\text{秒}$ . 在等距螺旋概念框架下, 转弯率可以用  $v/r$  来代替, 单位为弧度/秒, 转弯率的大小不需要做特殊限制. 飞程序设计人员在使用等距螺旋公式时, 需要对转弯率做相应检查.

$E_\theta$  是转弯过程中由风速所产生的距离, 等于风速除以转弯率再乘以转弯所经过的角度  $\theta$ . 将转弯率用  $v/r$  来代替,  $E_\theta$  可表示为  $r * (w/v) * \theta$ .

### 3.3 偏流角 $DA'$ 的优化

风螺旋线中的  $DA$  角是通过风速与真空速之比, 再按反正弦函数计算得到, 由于反正弦函数的参数取值最大为 1, 因此限定了风速必须小于等于真空速, 限制了风速的使用范围. 根据风螺旋线的角度关系可以发现, 若将圆心到直线的垂直距离定义为  $D$ ,  $DA'$  可以通过半径与  $D$  的比值来获得, 即  $DA' = \arcsin(D/r)$ .

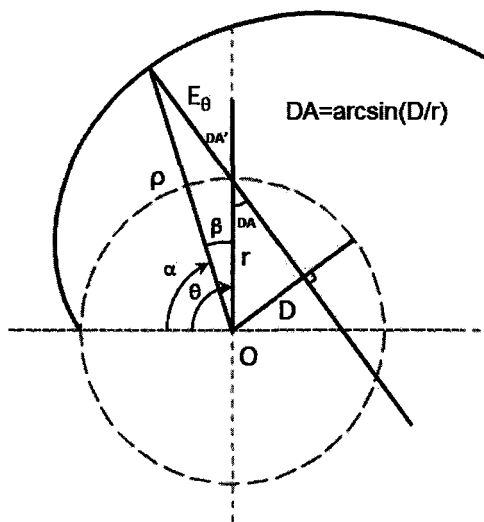


图 4 等距螺旋  $DA$  角位置关系

如图 4 所示, 圆心至直线的垂点相当于直线轨道上最靠近圆心的位置, 可以用“近地点”来定义,  $D$  的取值区间为  $[0, r]$ . 通常所讨论的典型螺旋均指的是从近地点开始绘制的螺旋的一部分. 例如当  $D$  为零时, 近地点与圆心重合, 从近地点开始绘制的等距螺旋是阿基米德螺旋线; 当  $D$  等于  $r$ , 直线速度等于圆周速度且方向相反时, 从近地点开始绘制将得到渐开线螺旋. 在等距螺旋中可以沿用  $DA$  角概念, 做为中间变量, 或可直接用  $\arcsin(D/r)$  来代替. 对于风螺旋线公式来说,  $DA$  需严格等于  $\arcsin(w/v)$ .

### 3.3 转弯角度 $\theta$ 角的设定

风螺旋线公式中的  $\theta$  角是以直线与圆周的交点为初始位置, 当  $\theta$  值为零时,  $\rho$  的长度等于转弯半径, 等距螺旋公式可以沿用这样的设定. 简化后的  $\rho$  值表达式如公式 (11) 所示:

$$\rho = r * \sqrt{\left(\frac{w}{v}\right)^2 \theta^2 + 2 \left(\frac{w}{v}\right) \theta \cos(DA) + 1} \quad (11)$$

从直线与圆周的交点移动到近地点所需的时间为  $t = r * \cos(DA) / w$ , 在这个时间段内圆周旋转过的角度  $\sigma = R * t = (v/r) * t = v * \cos(DA) / w$ , 螺旋线从进入基圆至再次走出基圆之间相差  $2\sigma$  (或  $\pi - 2 * DA - 2 * \sigma$ , 取决于运动的方向) 的角度. 通过对螺旋线初始角按照  $\sigma - DA$  (或  $\sigma + DA$ , 取决于运动的方向) 进行修正, 可以精确控制螺旋线与坐标轴的位置关系.

## 4 等距螺旋的特性

### 4.1 等距螺旋与速度三角形结构的关系

若按照风速、真空速、地速三者的三角形关系来表示不同的等距螺旋, 可以发现: 典型螺旋线均是由直角三角形结构构成. 当真空速与风速相垂直时, 会形成阿基米德螺旋线; 当地速与风速相垂直时, 会形成风螺旋线; 当风速与真空速方向相反速度相等时, 可看做是风螺旋线的极限情况, 此时会形成渐开线 (等距螺旋是两种运动方式的叠加, 速度方向相反时, 并不会产生静止或减速的效果); 地速与真空速相垂直时所形成的螺旋线是从未被提及和分析的一种情况, 暂时以 C 螺旋来加以命名, 渐开线也可以看做是 C 螺旋在极限条件 ( $GS = 0$ ,  $WS = TAS$ ) 下的特例.

### 4.2 等距螺旋中的运动关系

根据前文的分析, 阿基米德螺旋线中的系数  $a$  可以表示为  $r * (w/v)$ , 简化公式可以表示为  $\rho = r * (w/v) * \theta$ . 通过公式可以发现, 当  $w$  与  $v$  成倍增加时, 阿基米德螺旋线的参数不会发生改变, 即螺旋线的形态与速度值无关, 而与速度的比值有关. 若直线运动与圆周运动同时处于加速状态, 而速度比保持不变, 则可以得到同样的螺旋轨迹. 从这个意义上说, 螺旋线是一种运动轨迹, 不代表实际的速度值. 阿基米德螺旋线经常又被称为“等速螺旋”, 从表述形式上看, “等速螺旋”的概念符合阿基米德螺旋线的设定, 但并不符合等距螺旋的数学特征. 从数学特征来看, 称为“等速度比螺旋”更为合适, 未来“等速螺旋”的概念应该逐渐淡化.

渐开线经常被描述为: 从圆柱上剥离一根细线, 假定细线一直处于拉直的状态, 则细线端头所形成的轨迹是渐开线螺旋. 从这个描述中同样可以得到一个结论: 剥离的速度快慢并不会对渐开线形态产生任何影响, 因为每周期固定外扩相同的距离才是核心的前提条件.

风螺旋公式中, 速度值通过比值关系转换为  $E_\theta$  参数, 速度并不单独出现在风螺旋线的公式中. 对比这三者的公式与描述, 可得到这样的结论: 等距螺旋是速度比为固定值的直线运动与圆周运动相叠加所产生的轨迹, 与单独的某一项运动速度没有直接关系, 而与速度的比值有紧密的联系. 举例来说, 若旋转速度增大一倍, 则周期减小一倍, 为了在一个周期内直线运动相同的距离, 则直线运动的速度需要增大一倍, 最后速度比仍然保持相同.

改变直线运动的方向及系统的旋转方向, 可以得到与原运动形式下形状相同的螺旋线, 因此, 从螺旋线的形状来分析, 是不能判定真实的运动方向与旋转方向的, 这同样也说明了螺旋线是一种运动轨迹.

从螺旋线的形态来分析, 渐开线与风螺旋线中直线运动的方向总是与系统的旋转方向相逆, 即  $v$  与  $w$  运动方向的夹角大于  $90^\circ$ . 若直线运动与系统旋转方向相同, 即使直线与圆周是相切关系, 也不会形成渐开线的形态.

### 4.3 取值区间内的突变分析

对风螺旋线公式中的  $\theta$  角的从  $-2\pi$  至  $2\pi$  取值时, 可以看到在某个位置处, 螺旋线形态会有一个较大的突变, 突变发生的位置会随着速度比的不同而变化.

出现这种情况的原因首先是螺旋线过近地点后, 角度的计算关系会发生变化, 由  $\alpha = \theta - \beta$  变为  $\alpha = \theta + \beta$ . 另外一个原因是  $\rho$  值始终按正值来计算, 过近地点后  $\rho$  值开始逐渐增加, 与角度的变化关系不一致, 导致螺旋线进入到反向旋转的螺旋轨迹上去.

通过观察发现当突变发生时, 若按照  $\alpha = \theta + \beta + \pi$  进行计算, 则可以平滑延续之前的螺

旋曲线. 联立求解可知当  $\beta = -\pi/2$  时, 是突变发生的位置. 将风螺旋线公式中  $\beta$  角的表达式代入等式, 化简可得  $r \cdot (w/v) \cdot \theta \cdot \cos(DA) + r = 0$  时发生突变, 可知当  $\theta = -v / (w \cdot \cos(DA))$  (弧度单位) 时是突变发生的位置.

在 Mathematica 软件<sup>[7]</sup> 中对以上计算内容进行验证, 代码如图 5 所示.

```

In[272]:= 等距螺旋测试代码
r = 100; (*基础参数一: 基圆半径*);
w = 3*Pi*r; (*基础参数二: 直线运动速度*);
v = 2*Pi*r; (*基础参数三: 圆周运动速度*);
DA = Pi/6; (*基础参数四: 偏流角 弧度单位*)
(*DA典型取值: 0:阿基米德螺旋, ArcSin[w/v]:风螺旋, Pi/2:渐开线*)
E0 = (w/v)*r*0; (*每弧度的风偏移量*)
ρ = Sqrt[E0*E0 + r*r + 2*E0*r*Cos[DA]]; (*螺旋线至圆心的距离*)
β = ArcSin[E0*Sin[DA]/ρ];
α1 = θ - β;
α2 = θ + β + Pi;
t = -v / (w*Cos[DA]); (*等距螺旋突变点θ角度, 不适用于渐开线*)
cor1 = v*Cos[DA] / w - DA; (*旋转角度修正, 运动旋转同向*)
cor2 = v*Cos[DA] / w + DA; (*旋转角度修正, 运动旋转反向*)
Ws1PartA = ParametricPlot[{ρ*Cos[α1 + cor1], ρ*Sin[α1 + cor1]}, {θ, -2 Pi, t},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[2]];
Ws1PartB = ParametricPlot[{ρ*Cos[α2 + cor1], ρ*Sin[α2 + cor1]}, {θ, t, 2 Pi},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[2]];
Ws2PartA = ParametricPlot[{ρ*Cos[α2 + cor2], ρ*Sin[α2 + cor2]}, {θ, -2 Pi, t},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.05, 0.02}], AbsoluteThickness[2]}];
Ws2PartB = ParametricPlot[{ρ*Cos[α1 + cor2], ρ*Sin[α1 + cor2]}, {θ, t, 2 Pi},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.05, 0.02}], AbsoluteThickness[2]}];
baseCircle = ParametricPlot[{r*Cos[θ], r*Sin[θ]}, {θ, -Pi, Pi},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.02, 0.01}], AbsoluteThickness[2]}];
Show[Ws1PartA, Ws1PartB, Ws2PartA, Ws2PartB, baseCircle]

```

图 5 等距螺旋的代码验证

角度的计算公式共分两类  $\alpha = \theta - \beta$  与  $\alpha = \theta + \beta + \pi$ , 根据具体情况按区间范围来使用, 可得到平滑衔接的完整的螺旋线. 按照图 5 代码执行后可得到如图 6 所示的图形.

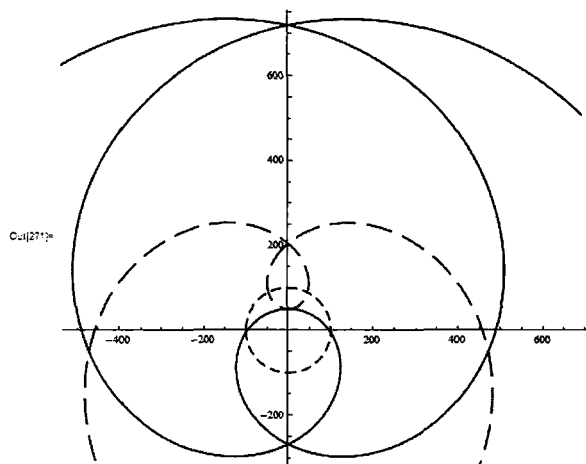


图 6 等距螺旋突变点的修正



图 6 中的实线螺旋线包含了顺时针外扩部分和逆时针外扩部分, 两部分之间为平滑衔接关系. 尽管两部分螺线的函数表达式上存在差别, 但运动形式是完全一致的. 从图 6 中还可以看到, 通过对不同的计算表达式设定指定的区间范围, 可以准确实现等距螺旋的平滑绘制. 图 6 中虚线螺旋与实线螺旋分别按照不同的修正角进行了修正, 两种螺旋的主要区别是它们所对应的系统旋转方向是相反的.

突变点的计算对于渐开线并不适用, 因为  $DA$  取  $90^\circ$  时,  $\cos(DA)$  值为零不能做分母. 根据突变位置点  $t$  的计算公式, 在  $DA$  逐渐接近  $90^\circ$  的过程中, 突变点会逐渐远离圆心点, 直到无限远位置. 从图形上观察,  $\alpha = \theta - \beta$  与  $\alpha = \theta + \beta + \pi$  在渐开线螺旋中分别代表了两个旋转方向上的螺旋, 它们各自的区间范围内无突变点的出现.

#### 4.4 等距螺旋镜像公式的分析

极坐标系公式向直角坐标系公式进行转换时,  $x$  坐标函数值 ( $\cos$  函数) 不受  $\alpha$  值的正负性影响, 而  $y$  坐标函数值 ( $\sin$  函数) 与  $\alpha$  的正负性保持一致. 因此, 若在函数公式中使用  $-\alpha$  值, 可以得到外扩方向相反的螺旋线, 也就是与原螺旋线呈镜像关系的螺旋线.

从完整的等距螺旋形态上来分析, 它包含顺时针外扩与逆时针外扩两部分, 整体为轴对称图形, 对称轴为过圆心及近地点的直线. 从对称轴向两侧观察, 分别取  $\alpha$  和  $-\alpha$  角度, 则在顺、逆时针外扩的部分中能够分别找到互相对应的镜像位置点.

对于单一区间 (例如  $\alpha > 0$ ) 的等距螺旋, 使用镜像公式, 可以得到单一区间的反向螺旋, 有助于简化计算、方便实际应用. 但若将镜像公式的区间扩大, 则取值区间的突变情况依然可能会出现. 因此, 合理使用镜像公式可以规避突变的发生, 但不能完全避免突变的发生. 镜像公式本质上仍属于区间拆分的计算方法, 这样的区间特性不能完整体现等距螺旋的运动特征.

#### 4.5 等距螺旋的切线计算

切线计算是螺旋曲线计算中的重要内容, 阿基米德螺旋的切线与渐开线的切线计算已经得到了较多的验证, 因此, 本文不再赘述. 高等数学中采用求导数的方法可以得到极坐标系曲线的切线公式, 该方法同样适用于等距螺旋的切线计算.

利用导数求切线的计算步骤大致分为以下三步:

- 1) 将极坐标系公式转换为直角坐标系公式.
- 2) 对  $f(x)$ 、 $f(y)$  函数分别求导数得到  $f'(x)$  和  $f'(y)$ , 切线的斜率就等于  $f'(y)/f'(x)$ .
- 3) 根据斜率公式和指定点的坐标  $(x_0, y_0)$ , 构建切线公式 (12):

$$y - y_0 = (f'(y_0)/f'(x_0)) * (x - x_0) \quad (12)$$

当  $DA = \arcsin(w/v)$  的情况下 (风螺旋线条件下), 对以上步骤计算出的斜率按照反正切函数转换为角度值, 该角度值与  $\theta - DA$  的值相差  $90^\circ$  (或  $270^\circ$ ), 即风螺旋线的切线与直线运动方向相垂直. 若按照  $\theta$  每增加  $2\pi$  弧度, 绘制一条切线, 得到的切线将互相平行, 这是风螺旋线所特有的一个特性. 渐开线可以看做是风螺旋线的极限情况, 因此也符合此特性. 当  $v$  与  $w$  的比例不符合风螺旋线条件时, 间隔  $2\pi$  周期的切线之间不能做到相互平行.

由于风螺旋线切线与  $\theta$  角之间存在固定的换算关系, 可以利用这一特性来进行公切线的精确计算, 相关公切线算法已经在飞行程序设计模板中得到了充分的验证<sup>[8]</sup>. 随着风螺旋线切线、公切线精确算法的广泛应用, 将有效提高飞行程序设计的自动化水平, 提高运算精度.

和效率.

## 5 结束语

等距螺旋的概念是在公式推导的基础上,对几种典型螺旋线按照运动方式进行归纳总结而得到的,它的公式是基于风螺旋线公式,对风螺旋线概念进行泛化得到.等距螺旋与传统的螺旋线在理解上存在较大的差异,传统的螺旋线通常仅为等距螺旋在局部区间内的呈现,等距螺旋是将运动形态由射线运动扩充为直线运动进而得到的一种整体形态.

对等距螺旋进行深入分析,将有助于在几何和数学领域对螺旋线的研究做进一步的深化.比如,在渐开线齿轮的设计中,结合运动形式的分析,齿轮的加工方式是否会得到改善?对比风螺旋线的外扩效率,发动机扇页的螺旋曲线是否可以进一步优化?非等距螺旋是否是由于直线运动与圆周运动的速度比连续性的变化而形成?这些问题都可以在等距螺旋的基础上做进一步的研究和分析,并在众多的行业应用中发挥重要的作用.

由于等距螺旋的概念在几何和数学领域未曾得到深入的研究和探讨,相关的理论和认识相对欠缺,概念的描述与定义可能存在不足.本文旨在抛砖引玉,提供一种新的思路供大家参考,文中可能存在认识或理解上的偏差,敬请批评指正.

## 参考文献

- [1] 刘崇军,王岁文.飞行程序设计转弯区外边界画法比较[J].航空计算技术,2015,45(6):113-116.
- [2] 孙恒,陈作模,葛文杰.机械原理[M].北京:高等教育出版社,2006:177-178.
- [3] ICAO. Doc8168 OPS/611, Aircraft Operation - Construction of Visual and Instrument Flight Procedures (Sixth edition)[S]. ICAO, 2014.
- [4] 程攀,江波.领航学[M].成都:西南交通大学出版社,2010:73-80.
- [5] 刘崇军.风螺旋线的深度分析[J].空中交通,2014(8):80-84.
- [6] 刘崇军,王岁文,杨润静.基线转弯模板的自动化算法分析[J].中国民航飞行学院学报,2017,28(1):33-37.
- [7] 章美月,刘海媛,金花. Mathematica 数学软件与数学实验[M].徐州:中国矿业大学出版社,2013:67-82.
- [8] 刘崇军,赵航.风螺旋线精确算法在程序转弯模板中的应用[J].航空计算技术,2017,47(3):62-65.

# The Theory and Calculation of Equidistant Spiral

LIU Chong-jun

(Northwest Air Traffic Management Bureau Xi'an 710082 Shaanxi China)

**Abstract:** Archimedes' spiral, involute and wind spiral are three typical spirals which play a very important role in the industrial design and aeronautical calculation. By introducing the calculation method of flight procedure design, the unified motion theory and formula could be achieved with the concept of Equidistant Spiral. It will be more clearly to analysis and compare of these typical spirals and help the study of spiral go further more.

**Keywords:** spiral; archimedes; involute; wind-spiral; formula