

# 基于贝叶斯滤波理论的目标命中概率估计与判决方法研究

井沛良<sup>1</sup>, 段 宇<sup>2</sup>, 蒋双双<sup>1</sup>, 高 宏<sup>1</sup>

(1. 中国人民解放军 32180 部队, 北京 100072;  
2. 中国人民解放军 第四军医大学 空军特色医学中心, 北京 100037)

**摘要:** 为了降低兵器试验中目标命中概率指标的判决错误率,提出了基于贝叶斯滤波理论的目标命中概率估计和判决方法。该方法构建了目标命中概率与试验观测数据的统计数学模型,依据贝叶斯滤波理论推导了目标命中概率后验概率密度函数、后验均值估计以及均方误差的解析表达式,并给出了基于目标命中概率后验均值估计的判决方法。依据不同的真实目标命中概率生成观测数据,分别利用传统方法和所提方法进行了估计和判决试验。结果表明:所提方法判决错误率仅为传统方法的 1/3,证明所提方法具有可行性。

**关键词:** 几何量测量; 目标命中概率; 序列概率比检验; 贝叶斯滤波理论

中图分类号: TB92

文献标识码: A

文章编号: 1000-1158(2024)02-0300-05

## The Research on Target Hit Probability Estimation and Judging Method Using Bayesian Filtering Theory

JING Peiliang<sup>1</sup>, DUAN Yu<sup>2</sup>, JIANG Shuangshuang<sup>1</sup>, GAO Hong<sup>1</sup>

(1. Troop 32180, PLA, Beijing 100072, China; 2. Air Force Medical Center,  
The Fourth Military Medical University, PLA, Beijing 100037, China)

**Abstract:** In order to depress the wrong judging rate of the target hit probability during the ordnance test, a target hit probability estimation and judging method using Bayesian filtering theory is proposed. Through this method, the statistical mathematical model of target hit probability and experimental observation data is constructed. Then, based on Bayesian filtering theory, analytical expressions of posterior probability density function, posterior mean estimation and mean square error of hit probability are derived. We generate observation data based on different real target hit probabilities, and carry out estimation and decision experiments using traditional methods and the proposed methods respectively. The results show that the decision error rate of the proposed method is only 1/3 of that of the traditional method, which proves that the proposed method is feasible.

**Key words:** geometric measurement; target hit probability; sequential probability ratio test; Bayesian filtering theory

## 1 引 言

作为攻击类武器打击精度的重要评估指标之一,目标命中概率指标<sup>[1-3]</sup>在武器装备试验与评估活动中被广泛应用。目前工程中大量采用假设检验方法,比如序列概率比检验方法<sup>[4-7]</sup>,对目标命中概率指标进行评估。这些方法存在一个显著缺陷,即仅在目标命中概率可能取值区间 $[0,1]$ 上选取 2 个数值点构建假设进而依据观测进行判决。而仅选取

2 个数值点难以构成完备假设空间<sup>[8-13]</sup>(目标命中概率在区间 $[0,1]$ 上任一取值对应一个假设,其取满区间 $[0,1]$ 上所有点的假设集合,即为假设空间)。现实中目标命中概率恰好为所选的 2 个参数点之一的概率极低,这意味着假设检验操作依据观测事实仅对假设空间中无穷多个假设中的有限个假设进行可能性计算和判决,其结果缺乏严密的理论支撑。因此,传统假设检验类方法在对目标命中概率指标进行判决时其错误率较高。

针对上述问题,首先对目标命中概率问题进

行了分析,假设目标命中概率为一先验分布未知的随机变量,并给出了统计数学建模;其次基于贝叶斯滤波理论<sup>[14~17]</sup>,推导了目标命中概率这一指标参数的后验概率密度函数的解析表达式,并进一步推导得到目标命中概率的最小均方误差估计量的解析表达式;最后提出了基于最小均方误差估计量的目标命中概率判决方法。与传统假设检验类判决方法相比,所提方法判决错误率有明显的降低。

## 2 实验原理及过程

### 2.1 目标命中概率统计建模

影响目标命中概率的因素除了特定装备和目标命中条件外,还包括气候环境、装备随时间的磨损老化等,以上因素均可作为试验条件进行明确。使用变量  $x \in [0, 1]$  来表征目标命中概率,  $x$  为一个可能取值遍布于区间  $[0, 1]$  的随机变量。

观测结果仅依附于目标命中这一事件的相关要求和条件。每一次射击试验或目标定位试验结束后,便依据目标命中事件的要求和条件对试验结果进行判定,得出目标命中与否的观测结果。用  $z[n]$  表征第  $n$  次试验的观测结果,  $z[n] = 1$  表示目标命中,  $z[n] = 0$  表示目标未命中。

使用伯努利试验对目标命中概率与观测结果的逻辑关系进行建模,具体关系如下:

$$p(z[n]) = \begin{cases} x, & z[n] = 1 \\ 1-x, & z[n] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

假设不同次试验观测结果间是统计独立的,即当  $m \neq n$  时,  $z[m]$  和  $z[n]$  之间是统计独立的。对于多次观测(设观测总次数为  $N$ ),目标命中概率  $x$  与观测结果之间的逻辑关系可以使用二项分布进行表达,即:

$$\begin{aligned} p(z[1], z[2], \dots, z[N], N; x) \\ = x^{\sum_{n=1}^N z[n]} (1-x)^{\left(N - \sum_{n=1}^N z[n]\right)} \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.3 最小均方误差估计量的求解

贝叶斯相关理论已经证明待估计参数的最小均方误差估计量就是后验均值估计量<sup>[10]</sup>。因此,为了求取最小均方误差估计量,必须首先求解其后验概率密度函数。其先验概率密度函数可设置为:

$$f(x) = 1, \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

式(3)为固定观测结果时,目标命中概率的似然函数,依据贝叶斯后验概率式可以求解目标命中概率的后验概率密度函数,具体过程如下:

$$\begin{aligned} f(x|z[1], z[2], \dots, z[N], N) \\ = \frac{p(z[1], z[2], \dots, z[N], N; x) \cdot f(x)}{\int_0^1 p(z[1], z[2], \dots, z[N], N; x) \cdot f(x) dx} \\ = \frac{x^{\sum_{n=1}^N z[n]} (1-x)^{\left(N - \sum_{n=1}^N z[n]\right)}}{\int_0^1 x^{\sum_{n=1}^N z[n]} (1-x)^{\left(N - \sum_{n=1}^N z[n]\right)} dx} \\ x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (4)$$

依据二项式定理,对任意的非负整数  $m$ , 有下列式子成立:

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^m C_m^r (-x)^r \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x^{\sum_{n=1}^N z[n]} (1-x)^{\left(N - \sum_{n=1}^N z[n]\right)} \\ = \sum_{r=0}^{N - \sum_{n=1}^N z[n]} C_{N - \sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r x^{\left(r + \sum_{n=1}^N z[n]\right)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\sum_{n=1}^N z[n]} (1-x)^{\left(N - \sum_{n=1}^N z[n]\right)} dx \\ = \left\{ \sum_{r=0}^{N - \sum_{n=1}^N z[n]} C_{N - \sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r \frac{x^{\left(r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1\right)}}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1} \right\} \Big|_0^1 \\ = \sum_{r=0}^{N - \sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N - \sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1} \end{aligned} \quad (7)$$

将式(6)和式(7)分别代入式(4),可得求解目标命中概率的后验概率密度函数为:

$$\begin{aligned} f(x|z[1], z[2], \dots, z[N], N) \\ = \frac{\sum_{r=0}^{N - \sum_{n=1}^N z[n]} C_{N - \sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r x^{\left(r + \sum_{n=1}^N z[n]\right)}}{\sum_{r=0}^{N - \sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N - \sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1}} \\ x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (8)$$

目标命中概率后验均值估计量为:

$$\begin{aligned} x_{\text{EAP}} &= \int_0^1 x \cdot f(x|z[1], z[2], \dots, z[N], N) dx \\ &= \frac{\int_0^1 \sum_{r=0}^{N - \sum_{n=1}^N z[n]} C_{N - \sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r x^{\left(r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1\right)} dx}{\sum_{r=0}^{N - \sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N - \sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{N-\sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N-\sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 2} \\ &= \frac{\sum_{r=0}^{N-\sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N-\sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1}}{\sum_{r=0}^{N-\sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N-\sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1}} \end{aligned} \quad (9)$$

及估计量  $x_{\text{EAP}}$  的均方误差为:

$$\begin{aligned} & e_{\text{MS}}(x_{\text{EAP}}) \\ &= \int_0^1 (x - x_{\text{EAP}})^2 \cdot f(x | z[1], z[2], \dots, z[N], N) dx \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot f(x | z[1], z[2], \dots, z[N], N) dx + \\ & \quad x_{\text{EAP}}^2 \cdot \int_0^1 f(x | z[1], z[2], \dots, z[N], N) dx - \\ & \quad 2 \cdot x_{\text{EAP}} \cdot \int_0^1 x \cdot f(x | z[1], z[2], \dots, z[N], N) dx \\ &= \frac{\sum_{r=0}^{N-\sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N-\sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 3}}{\sum_{r=0}^{N-\sum_{n=1}^N z[n]} \frac{C_{N-\sum_{n=1}^N z[n]}^r (-1)^r}{r + \sum_{n=1}^N z[n] + 1}} + x_{\text{EAP}}^2 - 2 \cdot x_{\text{EAP}} \cdot x_{\text{EAP}} \end{aligned} \quad (10)$$

依据式(10), 以  $N = 8$  为例, 使目标命中总次数  $\sum_{n=1}^N z[n]$  从 0 到 8 依次取值, 可得不同目标命

中总次数情况下  $x$  的后验概率密度函数曲线如图 1 所示。

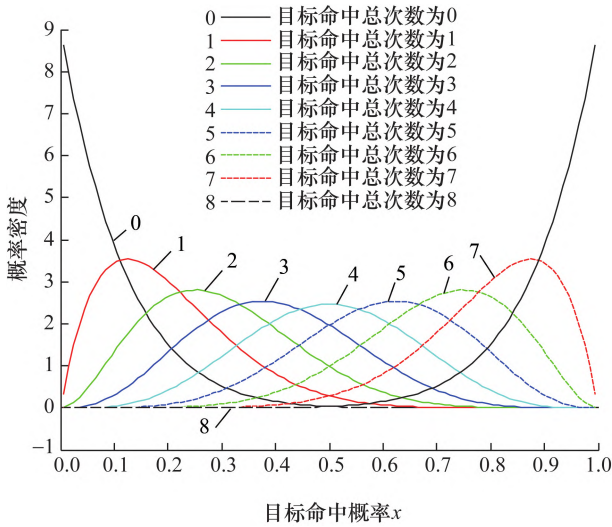


图 1 不同观测结果求取概率密度函数曲线

Fig. 1 The derived probability density function curves of different observation results

对应的最小均方误差估计量及其均方误差分别如表 1 和表 2 所示。

### 2.4 基于后验均值估计的判决方法

相较于序列概率比检验方法, 基于目标命中概率后验均值估计的判决操作较为简单。对于预先设置的目标命中概率最低可接受门限值  $p$ , 当依据公式(9)求解  $x_{\text{EAP}}$  大于等于  $p$  时, 即可判决目标命中概率指标合格; 反之则判决不合格。

表 1 不同观测结果下最小均方误差估计量估计结果

Tab. 1 The minimum mean square error estimation results of different observation results

$N$	$\sum_{n=1}^N z[n]$								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.333 3	0.666 7							
2	0.250 0	0.500 0	0.750 0						
3	0.200 0	0.400 0	0.600 0	0.800 0					
4	0.166 7	0.333 3	0.500 0	0.666 7	0.833 3				
5	0.142 9	0.285 7	0.428 6	0.571 4	0.714 3	0.857 1			
6	0.125 0	0.250 0	0.375 0	0.500 0	0.625 0	0.750 0	0.875 0		
7	0.111 1	0.222 2	0.333 3	0.444 4	0.555 6	0.666 7	0.777 8	0.888 9	
8	0.100 0	0.200 0	0.300 0	0.400 0	0.500 0	0.600 0	0.700 0	0.800 0	0.900 0

表 2 不同观测结果下最小均方误差估计量的均方误差

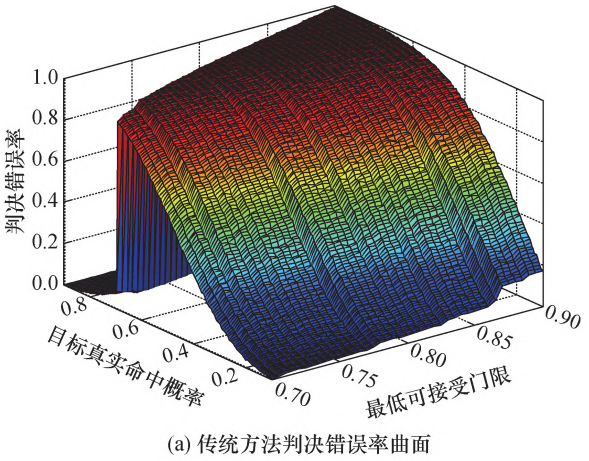
Tab. 2 The minimum mean square error of the estimation results of different observation results

$N$	$\sum_{n=1}^N z[n]$								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.055 6	0.055 6							
2	0.037 5	0.050 0	0.037 5						
3	0.026 7	0.040 0	0.040 0	0.026 7					
4	0.019 8	0.031 7	0.035 7	0.031 7	0.019 8				
5	0.015 3	0.025 5	0.030 6	0.030 6	0.025 5	0.015 3			
6	0.012 2	0.020 8	0.026 0	0.027 8	0.026 0	0.020 8	0.012 2		
7	0.009 9	0.017 3	0.022 2	0.024 7	0.024 7	0.022 2	0.017 3	0.009 9	
8	0.008 2	0.014 5	0.019 1	0.021 8	0.022 7	0.021 8	0.019 1	0.014 5	0.008 2

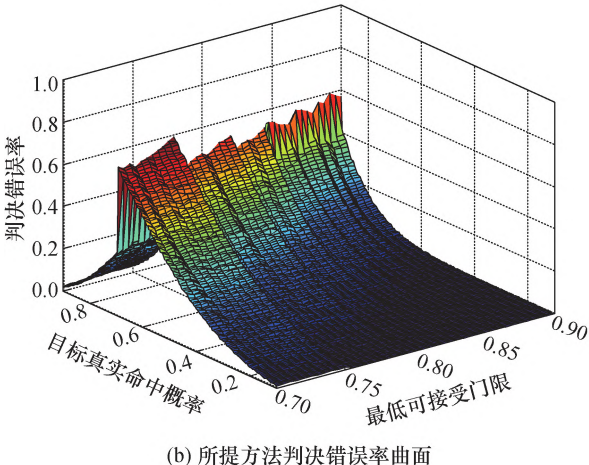
3 试验结果与分析

为了评估所提方法的应用性能,以文献[7, 8]为参照进行了对比实验。文献[7, 8]中算法设置鉴别比为 1.3,生产方风险为 0.26,使用方风险为 0.26。依据不同的真实目标命中概率生成观测数据(观测总次数  $N=8$ ),设置不同的最低可接受门限值  $p$ ,得到传统方法与所提方法的判决错误率分别如图 2 和图 3 所示。判决错误包含 2 种情况:1) 真实目标命中概率大于等于  $p$ ,但判决方法依据生成观测数据判决目标命中概率指标不合格;2) 真实目标命中概率小于  $p$ ,但判决方法依据生成观测数据判决目标命中概率指标合格。进行多次判决试验,并把判据错误次数与判决试验总次数的比值即定义为判决错误率。为了保证判决错误率的统计精度,在每一真实目标命中概率与最低可接受门限组合条件下,均对 2 种对比算法进行了 20 000 次试验。同时为了保证对比的公平性,使用了完全相同的生成数据对 2 种算法进行试验。在生成观测数据时,真实的目标命中概率取值范围为  $[0.1, 0.9]$ ,步长为 0.005。最低可接受门限值  $p$  取值范围为  $[0.7, 0.9]$ ,步长为 0.005。

对比图 2(a)和图 2(b)可发现,图 2(a)中曲面高度整体要高于图 2(b)中曲面高度,这说明传统算法的判决错误率整体大于本文所提算法。对图 2(a)和图 2(b)中曲面分别进行积分,并除以曲面在水平面上的投影面积,从而得曲面平均高度分别为 0.542 4 和 0.154 3,即传统算法和本文所提算法在平均意义上的判决错误率分别是 54.91% 和 15.43%,说明所提算法的平均判决错误率约为传统算法的 1/3 ( $0.5491/0.1543=3.5594$ ),性能优势较为明显。



(a) 传统方法判决错误率曲面



(b) 所提方法判决错误率曲面

图 2 传统方法与所提方法在不同命中概率与最低可接受门限组合条件下的错误曲面图

Fig. 2 The wrong judging rate surf of the proposed method and the traditional method under different target hit probability and the lowest acceptable threshold

4 结 论

通过分析传统序列概率比检验方法在目标命中



概率估计时所存在的理论缺陷,基于目标命中概率为先验未知随机变量的前提假设和贝叶斯滤波理论,推导了目标命中概率后验概率密度函数和后验均值估计的解析表达式,提出了基于目标命中概率后验均值估计的判决方法。与传统序列概率比检验方法相比,所提方法的判决错误率明显降低。

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] 井沛良, 段宇, 韩超, 等. 基于高斯混合模型和期望最大化算法的非高斯分布圆概率误差估计方法研究[J]. 兵工学报, 2019, 40 (2): 369–376.  
JING P L, DUAN Y, HAN C, *et al.* The Circular Error Probable Estimation Method Based on Gaussian Mixture Model and Expectation Maximum Algorithm for Non-Gaussian Distribution [J]. *Acta Armamentarii*, 2019, 40 (2): 369–376.
- [2] DURSAN T, UTLU G, OZKAN N. Effects of Tank Gun Structural Components on the First Shot Hit Probability [J]. *Defence Science Journal*, 2018, 68 (3): 273–281.
- [3] 李晓斌, 贾旭山, 席如冰. 反舰导弹射击精度评估研究[J]. 装备环境工程, 2018, 15 (1): 26–30.  
LI X B, JIA X S, XI R B. Firing Accuracy Evaluation of Anti-ship Missile [J]. *Equipment Environmental Engineering*, 2018, 15 (1): 26–30.
- [4] ZHAO J, LIU Q, WANG X, *et al.* Scheduled Sequential Compressed Spectrum Sensing for Wideband Cognitive Radios [J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2018, 17 (4): 913–926.
- [5] GAO Y, LIU Y, LI X R. Tracking-Aided Classification of Targets Using Multi-Hypothesis Sequential Probability Ratio Test [J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 2018, 54 (1): 233–245.
- [6] 于录, 曲宝忠, 时维科. 反舰导弹单发命中概率检验方法[J]. 海军航空工程学院学报, 2012, 27 (1): 23–26.  
YU L, QU B Z, SHI W K. The Single Hit Probability Test Method of Anti-ship Missile [J]. *Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University*, 2012, 27 (1): 23–26.
- [7] 余闯, 王晓红, 李秋茜. 计数型序贯截尾试验方案的计算与选择[J]. 北京航空航天大学学报, 2014, 40 (4): 575–578.  
YU C, WANG X H, LI Q X. Calculation and selection of sequentially truncated test scheme [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2014, 40 (4): 575–578.
- [8] 段亚. 基于序贯截尾检验的激光制导炸弹精度评估方法研究[J]. 电光与控制, 2020 (7): 91–94.  
DUAN Y. A Sequential Truncated Test Based Method for Delivery Precision Evaluation of Laser-Guided Bomb [J]. *Electronics Optics & Control*, 2020 (7): 91–94.
- [9] 王信峰. 概率论与数理统计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.
- [10] 刘杰, 张立民, 方君. 二进制缩短 BCH 码识别新方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2017, 44 (6): 92–98.  
LIU J, ZHANG L M, FANG J. New recognition method for binary shortened BCH codes [J]. *Journal of XIDIAN University*, 2017, 44 (6): 92–98.
- [11] REN X Q, YAN J Q, MO Y L. Binary Hypothesis Testing With Byzantine Sensors: Fundamental Tradeoff Between Security and Efficiency [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66 (6): 1454–1468.
- [12] 刘书君, 杨婷, 唐明春, 等. 基于贝叶斯准则的随机共振算法研究[J]. 电子与信息学报, 2017, 39 (2): 293–300.  
LIU S J, YANG T, TANG M C, *et al.* Study on Stochastic Resonance Algorithm Based on Bayesian Criterion [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39 (2): 293–300.
- [13] GAJIVARADHAN P, PARTHIBAN S. Two sample statistical hypothesis test for trapezoidal fuzzy interval data [J]. *International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences*, 2018, 4 (5): 11–23.
- [14] 罗鹏飞. 统计信号处理[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [15] KAY S M M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, vol I: Estimation Theory [J]. *Technometrics*, 1988, 37 (4): 465–466.
- [16] 井沛良. 复杂条件下多目标跟踪关键技术研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2016.
- [17] 陈立娟, 杜建丽, 陈俊宇. 基于有限单元的贝叶斯滤波估计算法[J]. 系统工程与电子技术, 2017, 39 (10): 2305–2311.  
CHEN L J, DU J L, CHEN J Y. Bayesian filtering estimation approach based on finite element method [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39 (10): 2305–2311.



**第一作者:** 井沛良(1987–), 河南南阳人, 中国人民解放军 32180 部队, 博士, 工程师, 主要从事基于统计信号理论的无人机试验评估方法等方面的研究。

Email: jingpeiliang1987@163.com



**通讯作者:** 段宇(1988–), 山东泰安人, 中国人民解放军第四军医大学空军特色医学中心, 博士, 助理研究员, 主要从事航空人机功效理论方面的研究。

Email: shawujingdy@126.com