作业2：线性回归参数的递推更新与卡尔曼滤波思想

在回归问题中，我们通常考虑如下线性模型：

$$y = X^\top \theta = \theta^\top X,$$

其中

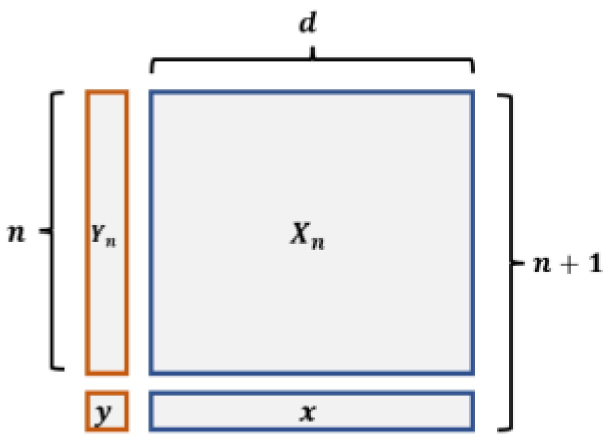
- $X \in \mathbb{R}^{n\times d}$,$y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
- $\theta \in \mathbb{R}^d$：待估参数向量

利用普通最小二乘法（LS）可得参数估计：

$$\theta_n = (X_n^\top X_n)^{-1} X_n^\top y_n.$$

在实际应用中，数据往往是**动态到达**的：可能新增样本，也可能新增特征。若每次重新计算上述逆矩阵，计算开销较大。我们希望借助**递推公式**高效更新参数估计 θ。请分别就以下两种情形展开理论推导与讨论。

问题一：新增样本（$n \to n+1$）



已有数据集

$$\mathcal{D}_n = (X_n, y_n),$$

新获得一个样本 (x_{n+1}, y_{n+1})，其中

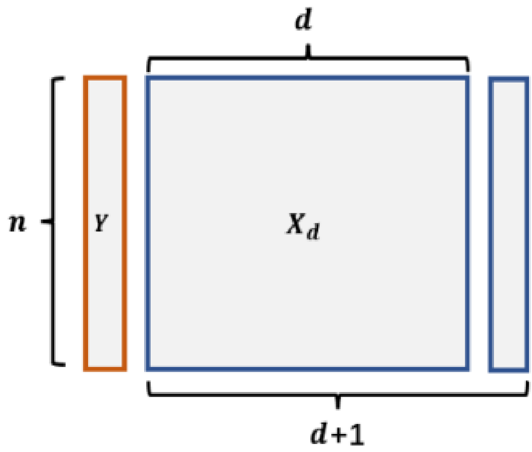
- $x_{n+1} \in \mathbb{R}^{1\times d}$,
- $y_{n+1} \in \mathbb{R}$。

于是新的数据集为

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad y_{n+1} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}.$$

任务1：　新增样本情况下如何利用已有参数 θ_n 来得到新参数 θ_{n+1}

问题二：新增特征（$d \to d+1$）



原始模型为

$$y = X_n \theta_n + \varepsilon,$$

现对每个样本新增一维特征，得到新设计矩阵

$$X_n' = [X_n \quad z], \quad z \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

对应的新参数向量记为

$$\theta'_{n+1} = \begin{bmatrix} \theta'_n \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

任务2：新增特征的情况下如何利用已有参数 θ_n 来得到新参数 θ'_{n+1}