CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE LOGIQUE ET LANGAGE ENSEMBLISTE

I- Quelques éléments de logique

I-1 Connecteurs

- Une proposition mathématique P est une phrase formelle qui est soit vraie, soit fausse :
  - Lorsque P est une proposition vraie, on lui attribue la valeur logique 1 ou V.
  - Lorsque P est une proposition fausse, on lui attribue la valeur logique 0 ou F.

- A partir de propositions données, on peut en former d'autres à l'aide de signes logiques qu'on appelle connecteurs logiques. Dans ce paragraphe, on va étudier les différents types de ces connecteurs.

I-1-1 Equivalence

- Deux propositions P et Q sont dites équivalentes si elles ont la même valeur logique : elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses. On note par $P \Leftrightarrow Q$ ou par $Q \Leftrightarrow P$.
- La proposition $P \Leftrightarrow Q$ (ou $Q \Leftrightarrow P$) est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

a) Tableau de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

I-1-2 Négation

- La négation d'une proposition P c'est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. On note $nonP$ ou $\overline{P}$.

a) Négation de la négation :

$$\boxed{(non(non(P))) \Leftrightarrow (P)}$$

b) Tableau de vérité :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

I-1-3 Conjonction et disjonction

a) Conjonction

- La conjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies et fausse si l'une des deux propositions P et Q est fausse (les deux propositions peuvent être fausses). On note $(P \text{ et } Q)$.

b) Disjonction

- La disjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si l'une des deux propositions P et Q est vraie (les deux propositions peuvent être vraies) et fausse si les deux propositions P et Q sont simultanément fausses. On note $(P \text{ ou } Q)$.

c) Tableaux de vérité :

P	Q	$(P \text{ et } Q)$		$(P \text{ ou } Q)$
V	V	V		V
V	F	F		V
F	V	F		V
F	F	F		F

d) Propriétés

i) Commutativité :

$$\boxed{\begin{cases} (P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P) \\ (P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P) \end{cases}}$$

ii) Loi de Morgan :

↳ $\boxed{\left(non(P \text{ ou } Q)\right) \Leftrightarrow \left(nonP \text{ et } nonQ\right)}$

P	Q	$nonP$	$nonQ$	$P \text{ ou } Q$	$non(P \text{ ou } Q)$	$(nonP) \text{ et } (nonQ)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

$$\boxed{\left(non\left(P \text{ et } Q\right)\right) \Leftrightarrow \left(nonP \text{ ou } nonQ\right)}$$

P	Q	$nonP$	$nonQ$	P et Q	$non(P$ et $Q)$	$(nonP)$ ou $(nonQ)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

iii) Distributivité :

<u>**Distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction**</u> $\boxed{\left(P \text{ et } \left(Q \text{ ou } R\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(P \text{ et } Q\right) \text{ou } \left(P \text{ et } R\right)\right)}$

P	Q	R	Q ou R	P et Q	P et R	$(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$	P et $(Q$ ou $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

<u>**Distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction**</u> $\boxed{\left(P \text{ ou } \left(Q \text{ et } R\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(P \text{ ou } Q\right) \text{et } \left(P \text{ ou } R\right)\right)}$

P	Q	R	Q et R	P ou Q	P ou R	$(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$	P ou $(Q$ et $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

I-1-4 Implication

a) Définition

- Le sens d'une phrase formelle $(P \Rightarrow Q)$ qu'on lit P implique Q est le suivant : Si la proposition P est vraie alors il en est de même pour la proposition Q.
- $(P \Rightarrow Q)$ ne suppose pas que la proposition P est vraie, mais :
  - Si la proposition P est vraie alors la proposition Q est vraie.
  - Si la proposition P est fausse, la proposition Q peut être vraie ou fausse.
- D'où : $\boxed{(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonP \text{ ou } Q)}$

b) Tableau de vérité :

P	Q	$nonP$	$(nonP \text{ ou } Q)$	$(P \Rightarrow Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

c) Transitivité d'une implication

- Si $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ alors $(P \Rightarrow R)$

d) Réciproque d'une implication

- $\boxed{\text{La réciproque de la proposition } (P \Rightarrow Q) \text{ c'est la proposition } (Q \Rightarrow P)}$.
- Une proposition $(P \Rightarrow Q)$ et sa réciproque $(Q \Rightarrow P)$ n'ont pas nécessairement la même valeur logique.

e) Contraposée d'une implication

- $\boxed{\text{La contraposée de la proposition } (P \Rightarrow Q) \text{ c'est la proposition } (nonQ \Rightarrow nonP)}$.
- Une proposition $(P \Rightarrow Q)$ et sa contraposée $(nonQ \Rightarrow nonP)$ sont équivalentes (ont toujours la même valeur logique) : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonQ \Rightarrow nonP)$

f) Condition nécessaire (CN) et condition suffisante (CS)

- La phrase formelle $(P \Rightarrow Q)$ signifie que si la proposition P est vraie alors la proposition Q est vraie :
  - Il suffit alors que P soit vraie pour que Q soit vraie.
  - On dit que P est une condition suffisante (CS) pour Q.

- La phrase formelle $(P \Rightarrow Q)$ équivalente à $(nonQ \Rightarrow nonP)$ signifie que si la proposition Q est fausse ($nonQ$ est vraie) alors la proposition P est fausse (puisque $nonP$ est vraie) :
  - Pour que P soit vraie il faut alors que Q soit vraie.
  - On dit que Q est une condition nécessaire (CN) pour P.

g) Equivalence et implication

- Les deux propositions $(P \Leftrightarrow Q)$ et $((P \Rightarrow Q) \text{et} (Q \Rightarrow P))$ sont équivalentes.
  - P est alors une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour Q
  - Q est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour P.
  - Transitivité de l'équivalence : Si $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$ alors $(P \Leftrightarrow R)$

h) Tableau de vérité :

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow P)$	$((P \Rightarrow Q) \text{et} (Q \Rightarrow P))$	$(P \Leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

I-2 Quantificateurs

- Les quantificateurs sont les signes qui expriment dans le langage mathématique la quantification, c.à.d. la quantité d'objets (aucun, tous, certains) pour les quels une proposition est vraie.

I-2-1 Quantificateur existentiel

$\exists x \in E / P(x)$: Se lit il existe au moins un x dans E tel que $P(x)$

- Cette phrase formelle signifie qu'il y a au moins un x dans E qui vérifie la propriété (P) (Il peut y avoir plusieurs).
- S'il n'y a qu'un seul x dans E qui vérifie (P), on écrit $\exists! x \in E / P(x)$ et on lit il existe un unique x dans E tel que $P(x)$.
- Les expressions $(\exists x \in E / P(x))$ et $(\exists y \in E / P(y))$ signifient exactement la même chose. x et y sont des variables muettes.

I-2-2 Quantificateur universel

$\forall x \in E, P(x)$: Se lit pour tout x de E, on a $P(x)$

- Cette phrase formelle signifie que tous les x de E vérifient la propriété (P).
- Les expressions $(\forall x \in E, P(x))$ et $(\forall y \in E, P(y))$ signifient exactement la même chose. x et y sont des variables muettes.

I-2-3 Ordre d'écriture dans une phrase avec quantificateurs

- L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental pour le sens d'une phrase formelle :
  - Quand on écrit $(\forall x \in E), \quad (\exists y \in F) / \quad P(x,y)$, cela veut dire que pour chaque x dans E, il y a un y dans F qui dépend de ce x tel que $P(x,y)$
  - Quand on écrit $(\exists y \in F) / \quad (\forall x \in E), \quad P(x,y)$, cela veut dire que il y a un y dans F, le même pour tous les x de E, tel que $P(x,y)$.

I-2-4 Négation d'une phrase avec quantificateurs

- **Négation d'une phrase formelle**
  - **<u>avec quantificateur universel</u>** : $\boxed{(Non(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E / nonP(x))}$
  - **<u>avec quantificateur existentiel</u>** : $\boxed{(Non(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E / nonP(x))}$
- En général, pour nier une phrase formelle qui comporte plusieurs quantificateurs :
  - On commence par écrire la phrase formelle tout en respectant l'ordre d'écriture des quantificateurs.
  - On change le quantificateur $\forall$ en $\exists$ et le quantificateur $\exists$ en $\forall$.
  - On remplace la propriété P par sa négation $nonP$

I-3 Introduction à la démonstration

I-3-1 Démonstration par la contraposée

- Parfois, il n'est pas simple de démontrer que $P \Rightarrow Q$ par une méthode directe. Dans ce cas, il convient d'utiliser la méthode de contraposée, qui revient à démontrer la contraposée de la proposition $P \Rightarrow Q$, soit $nonQ \Rightarrow nonP$ $\left((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonQ \Rightarrow nonP)\right)$. Pour cela, on suppose que la proposition $nonQ$ est vraie et on montre que la proposition $nonP$ est vraie.

I-3-2 Démonstration par l'absurde

- Démontrer que $P \Rightarrow Q$ par l'absurde revient à considérer les propriétés P et $nonQ$ comme hypothèses et d'aboutir à une contradiction : On suppose que les propositions P et $nonQ$ sont vraies et on trouve une conclusion impossible, par exemple, de type $(R \text{ et } nonR)$.

I-3-3 Démonstration par récurrence

- C'est une démonstration propre aux propositions répétitives, de type : $P(n), n \geq n_0$ $(n \in IN)$, qui se fait en deux étapes :

  - 1ère étape : consiste à vérifier que la proposition est vraie pour le premier ordre : $P(n_0)$ est vraie
  - 2ème étape : consiste à montrer que si $P(n)$ est vraie alors il en est de même pour $P(n+1)$.
    - $P(n)$ c'est l'hypothèse de récurrence.
    - $P(n+1)$ c'est la conclusion de récurrence.

Remarque :

- Supposer que $P(n)$ est vraie est équivalent à supposer que $P(m)$ est vraie pour tout $m \leq n$.

II- Ensembles

II-1 Notion d'ensemble

Définition :

- Un ensemble peut être défini comme une collection d'objets, dits éléments de cet ensemble.

Exemples :

- IN c'est l'ensemble des entiers naturels et tout entier naturel est un élément de IN.
- IR c'est l'ensemble des réels et les nombres réels sont les éléments de IR.
- Une droite c'est un ensemble de points et ses points sont les éléments d'une droite.

II-1-1 Appartenance à un ensemble

- Si x est un élément d'un ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.
- Sinon, on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$.

II-1-2 Ensemble vide

- C'est l'unique ensemble qui ne contient aucun élément. On le note ϕ.

II-1-3 Ensemble fini, infini

- Si E est un ensemble constitué d'un nombre fini n d'éléments alors E est dit ensemble fini. Ce nombre n s'appelle le cardinal de l'ensemble E. On note $card(E) = n$
- Sinon, on dit que E est un ensemble infini.

II-2 Écriture d'un ensemble

- Il y a deux manières d'écrire un ensemble :

II-2-1 Écriture en extension

- Quand on énumère les éléments d'un ensemble E, on dit qu'on a défini ou écrit l'ensemble E en extension.
- Cette définition n'est pas toujours utilisable : on ne peut pas toujours énumérer les éléments d'un ensemble.

II-2-2 Écriture en compréhension

- Quand on caractérise les éléments d'un ensemble E par une ou plusieurs propriétés, on dit qu'on a écrit ou défini l'ensemble E par compréhension.
- C'est l'écriture des ensembles la plus utilisée.

II-3 Inclusion et égalité

II-3-1 Inclusion

a) Définition :

- Si tout élément d'un ensemble F appartient à un ensemble E, on dit que l'ensemble F est inclus dans l'ensemble E. On dit aussi que F est un sous ensemble ou partie de E :
- On dit qu'on a une inclusion large si l'ensemble F peut être égal à l'ensemble E. On note $F \subseteq E$: $\boxed{F \subseteq E \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \in E)}$.
- Sinon, on dit qu'on a une inclusion stricte. On note $F \subset E$.
- Un ensemble F n'est pas inclus dans un ensemble E s'il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E. On note $F \not\subset E$: $\boxed{(F \not\subset E) \Leftrightarrow (\exists x \in F / x \notin E)}$

b) Propriétés

- Tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subseteq E$
- L'ensemble vide est inclus tout ensemble E : $\phi \subseteq E$
- Si E, F et G sont trois ensembles, alors : $((E \subseteq F)\ et\ (F \subseteq G)) \Rightarrow (E \subseteq G)$

II-3-2 Égalité

- Deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. On note $E \equiv F$ ou simplement $E = F$: $(E \equiv F) \Leftrightarrow ((E \subseteq F)\ et\ (F \subseteq E))$

II-3-3 Ensemble fini

- Si E et F sont deux ensembles finis alors:
  - $\boxed{E \subseteq F \Rightarrow card(E) \leq card(F)}$
  - $\boxed{(E \subseteq F\ et\ card(E) = card(F)) \Rightarrow E \equiv F}$

II-4 Ensembles de parties d'un ensemble

- L'ensemble de parties d'un ensemble E, qu'on note $P(E)$, c'est l'ensemble de tous les sous ensembles de E.
- Les éléments de $P(E)$ sont les sous ensembles de E : $\boxed{P(E)=\{F\,/\,F\subseteq E\}}$

Remarques :

- Si x est un élément d'un ensemble E, alors il faut distinguer entre les différentes écritures :
  - $x\in E$: x est un élément de E.
  - $\{x\}\subset E$: $\{x\}$ est un sous ensemble de E, appelé singleton.
  - $\{x\}\in P(E)$: $\{x\}$ est un élément de $P(E)$.
  - $x\in\{x\}$: x est un élément du singleton $\{x\}$.
- Si E est un ensemble fini, $card(E)=n$, alors : $card(P(E)=2^n$

II-5 Réunion et intersection

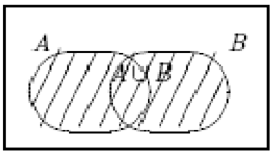
II-5-1 Réunion

a) Définition

- La réunion de deux ensembles E et F c'est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles E et F.
- On note $E\cup F$: $\boxed{E\cup F=\{x\,/\,x\in E \text{ ou } x\in F\}}$:

$$\boxed{x\in E\cup F \Leftrightarrow (x\in E \text{ et } x\in F)\, ou\, (x\notin E \text{ et } x\in F)\, ou\, (x\in E \text{ et } x\notin F)}$$

- Par négation, on a : $\boxed{x\notin E\cup F \Leftrightarrow (x\notin E \text{ et } x\notin F)}$



b) Propriétés

i) Le plus petit ensemble qui contienne à la fois les éléments de E et de F :

- $[(A\subset A\cup B) \text{ et } (B\subset A\cup B)]$ et $[(A\subset C \text{ et } B\subset C)\Rightarrow A\cup B\subset C\,]$

ii) Idempotence :

- Soit E un ensemble : $E\cup E=E$

iii) Commutativité :

- Soient E et F deux ensembles : $E \cup F = F \cup E$

iv) Associativité :

- Soient E, F et G trois ensembles : $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$
- On note alors par $E \cup F \cup G$: $E \cup F \cup G = \{x / x \in E \text{ ou } x \in F \text{ ou } x \in G\}$

c) Généralisation :

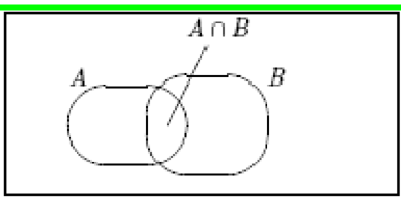
- Soient $E_1, \cdots, E_n$ n ensembles : $E_1 \cup \cdots \cup E_n = \{x / x \in E_1 \text{ ou} \cdots \text{ou } x \in E_n\}$

II-5-2 Intersection

a) Définition

- L'intersection de deux ensembles E et F c'est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles E et F.
- On note $E \cap F$: $\boxed{E \cap F = \{x / x \in E \text{ et } x \in F\}}$:
- Par négation, on a : $x \notin E \cap F \Leftrightarrow (x \notin E \text{ ou } x \notin F)$

$$\boxed{x \notin E \cap F \Leftrightarrow (x \notin E \text{ et } x \notin F)\, ou\, (x \notin E \text{ et } x \in F)\, ou\, (x \in E \text{ et } x \notin F)}$$



b) Propriétés

i) Le plus grand ensemble qui est contenu à la fois dans E et F :

- $[(A \cap B \subset A) \text{et} (A \cap B \subset B)]$ et $[(C \subset A \text{ et } C \subset B) \Rightarrow C \subset A \cap B]$

ii) Idempotence :

- Soit E un ensemble : $E \cap E = E$

iii) Commutativité :

- Soient E et F deux ensembles : $E \cap F = F \cap E$

iv) Associativité :

- Soient E, F et G trois ensembles : $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$
- On note alors par $E \cap F \cap G$: $E \cap F \cap G = \{x / x \in E \text{ et } x \in F \text{ et } x \in G\}$

c) Généralisation :

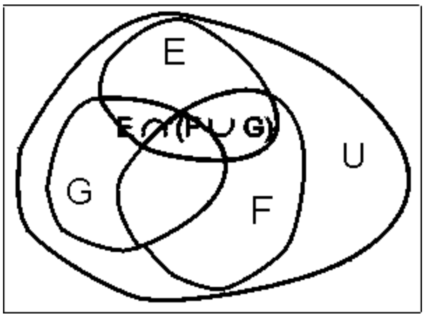
- Soient $E_1, \cdots, E_n$ n ensembles : $E_1 \cap \cdots \cap E_n = \{x / x \in E_1 \text{ et} \cdots \text{et } x \in E_n\}$

II-5-3 Distributivité

a) Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion

Conséquence de la distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction

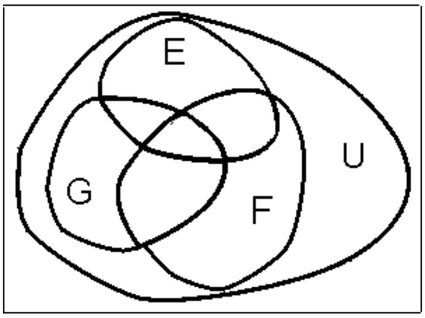
$$\boxed{E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)}$$



b) Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection

Conséquence de la distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction

$$\boxed{E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)}$$



II-5-4 Ensemble fini

- Si E et F sont deux ensembles finis alors $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$
- Si $E_1, \cdots, E_m$ des sous ensembles d'un ensemble fini E alors $card(\bigcup_{i=1}^{i=m} E_i) \leq \sum_{i=1}^{i=m} card(E_i)$

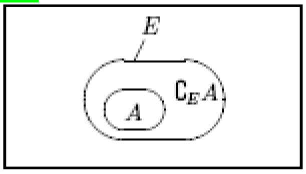
II-6 Complémentaire et partition d'un ensemble

II-6-1 Complémentaire

a) Définition

- Le complémentaire d'un sous ensemble E d'un ensemble U dans U c'et l'ensemble de tous les éléments de U qui n'appartiennent pas à E. On note C_U^E

$C_U^E = \{x \in U \,/\, x \notin E\}$: $\qquad x \in C_U^e \Leftrightarrow (x \in U \text{ et } x \notin E)$



b) Propriétés

- Si le sous ensemble E est défini par la propriété (P) alors son complémentaire est défini par la propriété $(nonP)$.

- Soient E et F deux sous ensembles d'un ensemble U, alors :

1) $C_U^{C_U^E} = E$
2) $E \cup C_U^E = U$
3) $E \cap C_U^E = \phi$
4) $E \subseteq F \Rightarrow C_U^F \subseteq C_U^E$
5) $C_U^{E \cup F} = C_U^E \cap C_U^F$
6) $C_U^{E \cap F} = C_U^E \cup C_U^F$

II-6-2 Partition d'un ensemble

a) Définition

- Une partition d'un ensemble U est un sous ensemble $\{E_1, \cdots E_n\}$ de $P(U)$ formé de parties $E_1, \cdots E_n$ vérifiant :

1) $E_i \neq \phi, \ \forall i = 1, \cdots, n$
2) $E_i \cap E_j = \phi, \ \forall i \neq j$
3) $E_1 \cup \cdots \cup E_n = U$

Remarque :

- Si E est un sous ensemble d'un ensemble U, alors $\{E, C_U^E\}$ est une partition de U

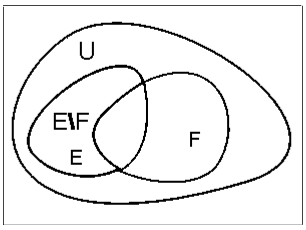
b) Ensemble fini

- Si $\{E_1, \cdots E_n\}$ une partition d'un ensemble fini U alors $card(\bigcup_{i=1}^{i=m} E_i) = \sum_{i=1}^{i=m} card(E_i) = card(U)$

II-7 Différence et différence symétrique

II-7-1 Différence

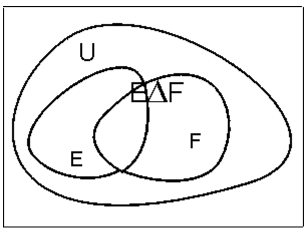
- Soient E et F deux sous ensembles de U.
  - La différence E "moins" F c'est l'ensemble des éléments de U qui sont dans E et qui ne sont pas dans F. On note $E \setminus F$: $\boxed{E \setminus F = \{x \in U \,/\, x \in E \text{ et } x \notin F\} = E \cap C_U^F}$



  - La différence F "moins" E c'est l'ensemble des éléments de U qui sont dans F et qui ne sont pas dans E : $\boxed{F \setminus E = \{x \in U \,/\, x \in F \text{ et } x \notin E\} = F \cap C_U^E}$

II-7-2 Différence symétrique

- Soient E et F deux sous ensembles de U.
- La différence symétrique entre les deux sous ensembles E et F c'est la réunion des deux différences $E \setminus F$ et $F \setminus E$. On note $E \Delta F$: $\boxed{E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)}$
- $\boxed{E \Delta F = \{x \in U \,/ (x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E)\} = (E \cap C_U^F) \cup (F \cap C_U^E)}$

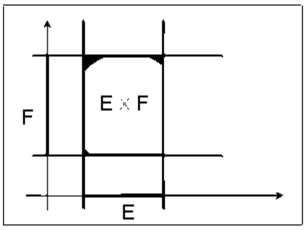


II-8 Produit d'ensembles

II-8-1 Définition

- Le produit de deux ensembles E par F c'est l'ensemble des couples (x,y), où x est un élément de E et y est un élément de F. On note $E\times F$:

$$\boxed{E\times F=\{x\in U, y\in U / x\in E \text{ et } y\in F\}}$$



II-8-2 Propriétés

- Soient x est un élément de E et y est un élément de F.
  - Il ne faut confondre entre le couple (x,y) et la paire $\{x,y\}$:
  - Il ne faut confondre entre le couple (x,y) et le couple (y,x):
    - (x,y) est un élément de $E\times F$
    - (y,x) est un élément de $F\times E$
- En général : $E\times F\neq F\times E$
- $E\times E$ ($E=F$) est appelé produit carré et est noté E^2.
- Si les ensembles E et F sont finis, alors $card(E\times F)=card(E)\times card(F)$

II-8-3 Généralisation :

- Par généralisation de la définition du produit de deux ensembles, le produit de n ensembles $E_1,\cdots,E_n$ est défini par : $E_1\times\cdots\times E_n=\{(x_1,\cdots,x_n)/x_1\in E_1 \text{ et}\cdots \text{ et } x_n\in E_n\}$