

Figura 3.23

Si, en lugar de graficar la población *real* se grafica la población *relativa* en cada clase, surge un patrón diferente. Para hacer esto, es necesario calcular la fracción de la población en cada clase etárea en cada año; esto es, es necesario dividir cada vector de distribución por la suma de sus componentes. Por ejemplo, después de 1 año, se tiene

$$\frac{1}{250} \mathbf{x}_1 = \frac{1}{250} \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88 \\ 0.08 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

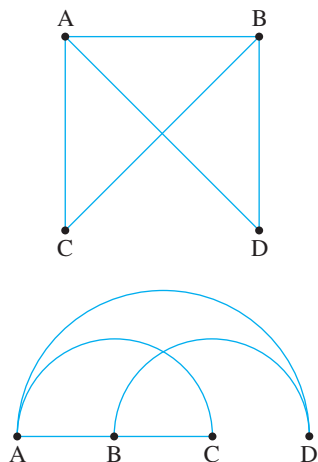
la cual dice que 88% de la población consiste de jóvenes, 8% de juveniles y 4% de adultas. Si este tipo de datos se grafican contra el tiempo, se obtiene una gráfica como la de la figura 3.23, que muestra claramente que la proporción de la población en cada clase se aproxima a un estado estable. Se evidencia que el vector de estado estacionario en este ejemplo es

$$\begin{bmatrix} 0.72 \\ 0.24 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

Esto es, a largo plazo, 72% de la población será de jóvenes, 24% de juveniles y 4% de adultas. (En otras palabras, la población se distribuye entre las tres clases etáreas en la razón 18 : 6 : 1.) En el capítulo 4 se verá cómo determinar esta razón con exactitud.

Grafos y digrafos

Existen muchas situaciones en las que es importante poder modelar las interrelaciones entre un conjunto finito de objetos. Por ejemplo, acaso quiera describir varios tipos de redes (carreteras que conectan ciudades, rutas de aerolíneas que conectan ciudades, ligas de comunicación que conectan satélites, etcétera) o relaciones entre grupos o individuos (relaciones de amistad en una sociedad, relaciones depredador-presa en un ecosistema,

**Figura 3.24**

Dos representaciones del mismo grafo

El término **vértice** viene del verbo latino *vertere*, que significa “volver”. En el contexto de los grafos (y la geometría), un vértice es una esquina, un punto donde una arista “se vuelve” una arista diferente.

relaciones de dominio en un deporte, etcétera). Los grafos son idealmente adecuados para modelar tales redes y relaciones, y es evidente que las matrices son una herramienta útil en su estudio.

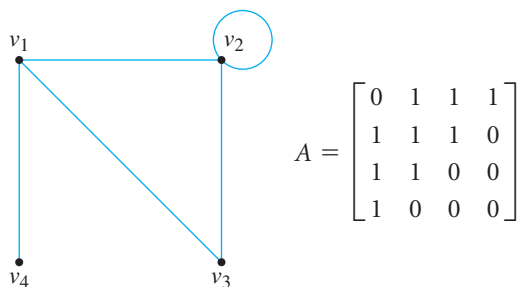
Un **grafo** consiste de un conjunto finito de puntos (llamados *vértices*) y un conjunto finito de *aristas*, cada una de las cuales conecta dos vértices (no necesariamente distintos). Se dice que dos vértices son *adyacentes* si son los puntos finales de una arista. La figura 3.24 muestra un ejemplo del mismo grafo dibujado en dos formas diferentes. Los grafos son “iguales” en el sentido de que todo por lo que debe preocuparse es por las relaciones de adyacencia que identifican las aristas.

Es posible registrar la información esencial acerca de un grafo en una matriz y usar álgebra matricial para ayudar a responder ciertas preguntas acerca del grafo. Esto es particularmente útil si los grafos son grandes, pues las computadoras pueden manejar los cálculos muy rápidamente.

Definición Si G es un grafo con n vértices, entonces su **matriz de adyacencia** es la matriz A [o $A(G)$] de $n \times n$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe una arista entre los vértices } i \text{ y } j \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

La figura 3.25 muestra un grafo y su matriz de adyacencia asociada.

**Figura 3.25**

Un grafo con matriz de adyacencia A



Comentario Observe que la matriz de adyacencia de un grafo necesariamente es una matriz simétrica. (¿Por qué?) Note también que una entrada diagonal a_{ii} de A es cero a menos que haya un bucle en el vértice i . En algunas situaciones, un grafo puede tener más de una arista entre un par de vértices. En tales casos, puede tener sentido modificar la definición de la matriz de adyacencia de modo que a_{ij} sea igual al **número** de aristas entre los vértices i y j .

Una **trayectoria** en un grafo es una secuencia de aristas que permiten viajar de un vértice a otro de manera continua. La **longitud** de una trayectoria es el número de aristas que contiene, y a una trayectoria con k aristas se le denominará **k -trayectoria**. Por ejemplo, en el grafo de la figura 3.25, $v_1v_3v_2v_1$ es una 3-trayectoria, y $v_4v_1v_2v_2v_1v_3$ es una 5-trayectoria. Note que la primera de éstas es **cerrada** (comienza y termina en el mismo vértice); a tal trayectoria se le llama **circuito**. La segunda usa las aristas entre v_1 y v_2 dos veces; una trayectoria que **no** incluye la misma arista más de una vez se llama trayectoria **simple**.

Es posible usar las potencias de la matriz de adyacencia de un grafo para obtener información acerca de las trayectorias de varias longitudes en el grafo. Considere el cuadrado de la matriz de adyacencia en la figura 3.25:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Qué representan las entradas de A^2 ? Observe la entrada $(2, 3)$. A partir de la definición de multiplicación matricial, se sabe que

$$(A^2)_{23} = a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} + a_{24}a_{43}$$

La única manera en que esta expresión puede resultar en un número distinto de cero es si al menos uno de los productos $a_{2k}a_{k3}$ que constituyen la suma es distinto de cero. Pero $a_{2k}a_{k3}$ es distinto de cero si y sólo si tanto a_{2k} como a_{k3} son distintos de cero, lo que significa que hay una arista entre v_2 y v_k , así como una arista entre v_k y v_3 . Por tanto, habrá una 2-trayectoria entre los vértices 2 y 3 (vía el vértice k). En el ejemplo, esto ocurre para $k = 1$ y para $k = 2$, de modo que

$$\begin{aligned} (A^2)_{23} &= a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} + a_{24}a_{43} \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$



la cual dice que hay dos 2-trayectorias entre los vértices 2 y 3. (Compruebe para ver que las entradas restantes de A^2 correctamente dan 2-trayectorias en el grafo.) El argumento que acaba de darse puede generalizarse para producir el siguiente resultado, cuya demostración se deja como ejercicio 72.

Si A es la matriz de adyacencia de un grafo G , entonces la entrada (i, j) de A^k es igual al número de k -trayectorias entre los vértices i y j .

Ejemplo 3.68

¿Cuántas 3-trayectorias hay entre v_1 y v_2 en la figura 3.25?

Solución Se necesita la entrada $(1, 2)$ de A^3 , que es el producto punto del renglón 1 de A^2 y la columna 2 de A . El cálculo produce

$$(A^3)_{12} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 6$$

de modo que hay seis 3-trayectorias entre los vértices 1 y 2, lo que puede comprobarse con facilidad.

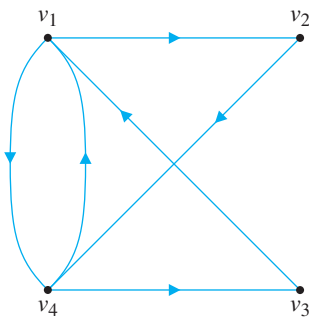


Figura 3.26

Un digrafo

En muchas aplicaciones que pueden modelarse mediante un grafo, los vértices se ordenan mediante algún tipo de relación que impone una dirección a las aristas. Por ejemplo, las aristas dirigidas pueden usarse para representar rutas de una vía en un grafo que modela una red de transporte o relaciones depredador-presa en un grafo que modela un ecosistema. Un grafo con aristas dirigidas se llama **digrafo**. La figura 3.26 muestra un ejemplo.

Una sencilla modificación de la definición de las matrices de adyacencia permite usarlas con digrafos.

Definición Si G es un digrafo con n vértices, entonces su **matriz de adyacencia** es la matriz A [o $A(G)$] de $n \times n$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe una arista del vértice } i \text{ al vértice } j \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Por tanto, la matriz de adyacencia para el digrafo en la figura 3.26 es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



No es de sorprender que la matriz de adyacencia de un digrafo no sea simétrica en general. (¿Cuándo lo sería?) El lector no debe tener dificultad para ver que A^k ahora contiene los números de k -trayectorias *dirigidas* entre vértices, donde se insiste que todas las aristas a lo largo de una trayectoria fluyen en la misma dirección. (Vea el ejercicio 72.) El siguiente ejemplo ofrece una aplicación de esta idea.

Ejemplo 3.69

Cinco tenistas (Djokovic, Federer, Nadal, Roddick y Safin) compiten en un torneo con el sistema *round-robin* en el que cada jugador compite con todos los demás una vez. El digrafo en la figura 3.27 resume los resultados. Una arista dirigida del vértice i al vértice j significa que el jugador i venció al jugador j . (Un digrafo en el que existe exactamente una arista dirigida entre cada par de vértices se llama **torneo**.)

La matriz de adyacencia para el digrafo de la figura 3.27 es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

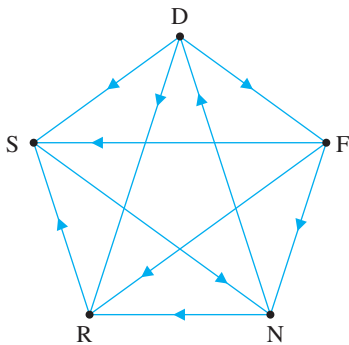


Figura 3.27

Un torneo

donde el orden de los vértices (y por tanto, los renglones y columnas de A) se determina alfabéticamente. Por tanto, Federer corresponde a renglón 2 y columna 2, por ejemplo.

Suponga que se quiere clasificar a los cinco jugadores con base en los resultados de sus partidos. Una forma de hacer esto puede ser contar el número de triunfos de cada jugador. Observe que el número de triunfos de cada jugador es justo la suma de las entradas en el renglón correspondiente; de manera equivalente, el vector que contiene todas las sumas de renglón está dado por el producto $A\mathbf{j}$, donde

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En este caso se tiene

$$A\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que produce la siguiente clasificación:

Primero: Djokovic, Federer (empatados)

Segundo: Nadal

Tercero: Roddick, Safin (empatados)

¿Los jugadores empatados en esta clasificación son igualmente fuertes? Djokovic puede argumentar que, puesto que venció a Federer, él merece el primer lugar. Roddick usaría el mismo tipo de argumento para romper el empate con Safin. Sin embargo, Safin podría argumentar que él tiene dos victorias “indirectas” porque venció a Nadal, quien venció a otros *dos*; más aún, él puede puntualizar que Roddick sólo tiene *una* victoria indirecta (sobre Safin, quien venció a Nadal).

Dado que en un grupo de empates puede no haber un jugador que venciera a todos los demás en el grupo, la notación de victorias indirectas parece más útil. Más aún, una victoria indirecta corresponde a una 2-trayectoria en el digrafo, de modo que puede usar el cuadrado de la matriz de adyacencia. Para calcular tanto los triunfos como las victorias indirectas para cada jugador, se necesitan las sumas de renglón de la matriz $A + A^2$, que están dadas por

$$\begin{aligned} (A + A^2)\mathbf{j} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia, los jugadores se clasificarían en el siguiente orden: Djokovic, Federer, Nadal, Safin, Roddick. Por desgracia, este planteamiento no garantiza romper todos los empates.



Códigos de corrección de error

En la sección 1.4 se estudiaron ejemplos de códigos de detección de error. Ahora se aborda el problema de diseñar códigos que puedan *corregir* así como detectar ciertos tipos de errores. El mensaje será un vector \mathbf{x} en \mathbb{Z}_2^k para alguna k , y se le codificará usando

una transformación matricial $T: \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ para algún $n > k$. El vector $T(\mathbf{x})$ se llamará **vector código**. Un ejemplo simple servirá para ilustrar el enfoque a tomar, que es una generalización de los vectores de control de paridad del ejemplo 1.37.

Ejemplo 3.70

Suponga que el mensaje es un solo dígito binario: 0 o 1. Si el mensaje se codifica al simplemente repetirlo dos veces, entonces los vectores código son $[0, 0]$ y $[1, 1]$. Este código puede detectar errores individuales. Por ejemplo, si se transmite $[0, 0]$ y ocurre un error en el primer componente, entonces se recibe $[1, 0]$ y se detecta un error, porque este no es un vector código legal. Sin embargo, el receptor no puede corregir el error, pues $[1, 0]$ también sería resultado de un error en el segundo componente si se hubiese transmitido $[1, 1]$.

Este problema se puede resolver al hacer los vectores código más largos: repetir el dígito de mensaje tres veces en lugar de dos. Por tanto, 0 y 1 se codifican como $[0, 0, 0]$ y $[1, 1, 1]$, respectivamente. Ahora, si ocurre un solo error, no sólo se puede detectar, sino también corregir. Por ejemplo, si se recibe $[0, 1, 0]$, entonces se sabe que debe ser el resultado de un solo error en la transmisión de $[0, 0, 0]$, pues un solo error en $[1, 1, 1]$ no se habría producido.



Note que el código en el ejemplo 3.70 puede lograrse mediante una transformación matricial, aunque en una particularmente trivial. Sea $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y defina $T: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ mediante $T(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}$. (Aquí los elementos de \mathbb{Z}_2 se consideran matrices de 1×1 .) La matriz G se llama **matriz generadora** del código.

Para decir si un vector recibido es un vector código, se realiza no una, sino *dos* comprobaciones de paridad. Se requiere que el vector recibido $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ satisfaga $c_1 = c_2 = c_3$. Estas ecuaciones pueden escribirse como un sistema lineal sobre \mathbb{Z}_2 :

$$\begin{array}{rcl} c_1 = c_2 & \text{o} & c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 = c_3 & & c_1 + c_3 = 0 \end{array} \quad (1)$$

Si se hace $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces (1) es equivalente a $P\mathbf{c} = \mathbf{0}$. La matriz P se llama **matriz de control de paridad** para el código. Observe que $PG = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

Para ver cómo estas matrices entran en juego para la corrección de errores, suponga que se envía 1 como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1]^T$, pero un solo error hace que se reciba como

$\mathbf{c}' = [1 \ 0 \ 1]^T$. Se calcula

$$P\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

de modo que se sabe que \mathbf{c}' no puede ser un vector código. ¿Dónde está el error? Note que $P\mathbf{c}'$ es la segunda columna de la matriz de control de paridad P ; ésta dice que el error está en el segundo componente de \mathbf{c}' (lo que se probará adelante en el Teorema 3.37) y permite corregir el error. (Desde luego, en este ejemplo podría encontrar el error más rápidamente sin usar matrices, pero la idea es útil.)

Para generalizar las ideas en el último ejemplo, se hacen las siguientes definiciones.

Definiciones Si $k < n$, entonces cualquier matriz de $n \times k$ de la forma $G = \begin{bmatrix} I_k \\ A \end{bmatrix}$, donde A es una matriz de $(n - k) \times k$ sobre \mathbb{Z}_2 , se llama **matriz generadora estándar** para un **código binario** (n, k) $T: \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$. Cualquier matriz de $(n - k) \times n$ de la forma $P = [B \ I_{n-k}]$, donde B es una matriz de $(n - k) \times k$ sobre \mathbb{Z}_2 , se llama **matriz de comprobación de paridad estándar**. Se dice que el código tiene **longitud** n y **dimensión** k .

He aquí lo que se necesita saber: (a) ¿Cuándo es G la matriz generadora estándar para un código binario de corrección de error? (b) Dada G , ¿cómo se encuentra una matriz de control de paridad estándar asociada P ? Es evidente que las respuestas son bastante sencillas, como se muestra mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.37

Si $G = \begin{bmatrix} I_k \\ A \end{bmatrix}$ es una matriz generadora estándar y $P = [B \ I_{n-k}]$ es una matriz de control de paridad estándar, entonces P es la matriz de control de paridad asociada con G , si y sólo si $A = B$. El correspondiente código binario (n, k) es de corrección de error (sencillo) si y sólo si las columnas de P son distintas de cero y diferentes.

Antes de demostrar el teorema, considere otro ejemplo menos trivial que lo ilustra.

Ejemplo 3.71

Suponga que quiere diseñar un código de corrección de error que use tres ecuaciones de control de paridad. Dado que dichas ecuaciones dan lugar a los renglones de P , se tiene $n - k = 3$ y $k = n - 3$. Los vectores de mensaje vienen de \mathbb{Z}_2^k , así que se buscaría que k (y por tanto n) fuese tan largo como sea posible, con la finalidad de poder transmitir tanta información como sea posible. Por el Teorema 3.37, las n columnas de P deben ser distintas de cero y diferentes así que el máximo ocurre cuando ellas consisten de todos los $2^3 - 1 = 7$ vectores distintos de cero de $\mathbb{Z}_2^{n-k} = \mathbb{Z}_2^3$. Uno de tales candidatos es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto significa que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y por tanto, por el Teorema 3.37, una matriz generadora estándar para este código es

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ejemplo de cómo funciona la matriz generadora, suponga que se codifica $\mathbf{x} = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ para obtener el vector código

$$\mathbf{c} = G\mathbf{x} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

Si se recibe este vector, se ve que es correcto, pues $P\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Por otra parte, si se recibe $\mathbf{c}' = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ se calcula

$$P\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que se reconoce como la columna 3 de P . Por tanto, el error está en el tercer componente de \mathbf{c}' , y al cambiarlo se recupera el vector código correcto \mathbf{c} . También se sabe que los primeros cuatro componentes de un vector código son el vector mensaje original, así que en este caso se decodifica \mathbf{c} para obtener el original $\mathbf{x} = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$.



El código del ejemplo 3.71 se llama código de Hamming (7, 4). Cualquier código binario construido de esta forma se llama **código de Hamming** (n, k) . Observe que, por construcción, un código de Hamming (n, k) tiene $n = 2^{n-k} - 1$.

Demostración del Teorema 3.37 (A lo largo de esta demostración se denota mediante \mathbf{a}_i la i -ésima columna de una matriz A .) Con P y G como en el enunciado del teorema, primero suponga que son matrices de control de paridad estándar y generadora para el mismo código binario. Por tanto, para toda \mathbf{x} en \mathbb{Z}_2^k , $PG\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En términos de multiplicación de bloques,

$$\begin{bmatrix} B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{para toda } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{Z}_2^k$$

De manera equivalente, para toda \mathbf{x} en \mathbb{Z}_2^k , se tiene

$$B\mathbf{x} + A\mathbf{x} = (B + A)\mathbf{x} = (BI + IA)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

o
$$B\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

Si ahora toma $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, el i -ésimo vector base estándar en \mathbb{Z}_2^k , se ve que

$$\mathbf{b}_i = B\mathbf{e}_i = A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i \quad \text{para toda } i$$

Por tanto, $B = A$.

Por el contrario, es fácil comprobar que si $B = A$, entonces $PG\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para toda \mathbf{x} en \mathbb{Z}_2^k (vea el ejercicio 92).

Para ver que tal par determina un código de corrección de error si las columnas de P son distintas de cero y diferentes, sea \mathbf{x} un vector mensaje en \mathbb{Z}_2^k y sea el correspondiente vector código $\mathbf{c} = G\mathbf{x}$. Entonces $P\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Suponga que hay un error en el i -ésimo componente, que resulta en el vector \mathbf{c}' . Se tiene que $\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \mathbf{e}_i$. Ahora calcule

$$P\mathbf{c}' = P(\mathbf{c} + \mathbf{e}_i) = P\mathbf{c} + P\mathbf{e}_i = \mathbf{0} + \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i$$

que localiza el error en el i -ésimo componente.

Por otra parte, si $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$, entonces un error en el i -ésimo componente no se detectará (es decir, $P\mathbf{c}' = \mathbf{0}$), y si $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j$, entonces no se puede determinar si ocurrió un error en el i -ésimo o el j -ésimo componente (ejercicio 93).

A continuación se resumen las ideas principales de esta sección.

1. Para $n > k$, una matriz G de $n \times k$ y una matriz P de $(n - k) \times n$ (con entradas en \mathbb{Z}_2) son una matriz generadora estándar y una matriz de control de paridad estándar, respectivamente, para un código binario (n, k) si y sólo si, en forma de bloque,

$$G = \begin{bmatrix} I_k \\ A \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{bmatrix} A & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

para alguna matriz A de $(n - k) \times k$ sobre \mathbb{Z}_2 .

2. G codifica un vector mensaje \mathbf{x} en \mathbb{Z}_2^k como un vector código \mathbf{c} en \mathbb{Z}_2^n vía $\mathbf{c} = G\mathbf{x}$.
3. G es de corrección de error si y sólo si las columnas de P son distintas de cero y diferentes. Un vector \mathbf{c}' en \mathbb{Z}_2^n es un vector código si y sólo si $P\mathbf{c}' = \mathbf{0}$. En este caso, el correspondiente vector mensaje es el vector \mathbf{x} en \mathbb{Z}_2^k que consiste de los primeros k componentes de \mathbf{c}' . Si $P\mathbf{c}' \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{c}' no es un vector código y $P\mathbf{c}'$ es una de las columnas de P . Si $P\mathbf{c}'$ es la i -ésima columna de P , entonces el error está en el i -ésimo componente de \mathbf{c}' y se puede recuperar el vector código correcto (y en consecuencia el mensaje) al cambiar este componente.

Richard W. Hamming (1915–1998) recibió su doctorado en matemáticas de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign en 1942. Sus intereses de investigación en matemáticas fueron los campos de las ecuaciones diferenciales y el análisis numérico. De 1946 a 1976, trabajó en los Laboratorios Bell, luego de lo cual se unió al cuerpo docente en la Escuela de Posgraduados Navales de Estados Unidos, en Monterey, California. En 1950 publicó su ensayo fundamental acerca de los códigos de corrección de errores, lo que proporcionó una construcción explícita para los códigos óptimos que Claude Shannon probó teóricamente posibles en 1948.

Ejercicios 3.7

Cadenas de Markov

En los ejercicios 1-4, sea $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$ la matriz de

transición para una cadena de Markov con dos estados. Sea

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ el vector de estado inicial para la población.

1. Calcule \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 .
2. ¿Qué proporción de la población del estado 1 estará en el estado 2 después de dos pasos?
3. ¿Qué proporción de la población del estado 2 estará en el estado 2 después de dos pasos?
4. Encuentre el vector de estado estacionario.

En los ejercicios 5-8, sea $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ la matriz de

transición para una cadena de Markov con tres estados. Sea

$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \\ 90 \end{bmatrix}$ el vector de estado inicial para la población.

5. Calcule \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 .
6. ¿Qué proporción de la población del estado 1 estará en el estado 1 después de dos pasos?
7. ¿Qué proporción de la población del estado 2 estará en el estado 3 después de dos pasos?
8. Encuentre el vector de estado estacionario.
9. Suponga que el clima en una región particular se comporta de acuerdo con una cadena de Markov. Específicamente, suponga que la probabilidad de que mañana será un día húmedo es de 0.662 si hoy es húmedo y de 0.250 si hoy es seco. La probabilidad de que mañana sea un día seco es de 0.750 si hoy es seco y de 0.338 si hoy es húmedo. [Este ejercicio se basa en un estudio real de lluvias en Tel Aviv durante un periodo de 27 años. Veá K. R. Gabriel y J. Neumann, "A Markov Chain Model for Daily Rainfall Occurrence at Tel Aviv", *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 88 (1962), pp. 90-95.]
 - (a) Escriba la matriz de transición para esta cadena de Markov.
 - (b) Si el lunes es un día seco, ¿cuál es la probabilidad de que el miércoles sea húmedo?

(c) A largo plazo, ¿cuál será la distribución de días húmedos y secos?

10. Se han acumulado datos acerca de las estaturas de niños en relación con sus padres. Suponga que las probabilidades de que un padre alto tenga un hijo alto, de mediana estatura o bajo son 0.6, 0.2 y 0.2, respectivamente; las probabilidades de que un padre de talla media tenga un hijo alto, de estatura media o bajo son 0.1, 0.7 y 0.2, respectivamente; y las probabilidades de que un padre bajo tenga un hijo alto, mediano o bajo son 0.2, 0.4 y 0.4, respectivamente.
 - (a) Escriba la matriz de transición para esta cadena de Markov.
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona baja tenga un nieto alto?
 - (c) Si 20% de la población actual es alta, 50% es de estatura media y 30% es baja, ¿cuál será la distribución en tres generaciones?
 - (d) Si los datos del inciso (c) no cambian con el tiempo, ¿qué proporción de la población será alta, de estatura mediana y baja a largo plazo?
11. Un estudio de cultivos de pino piñonero en el sureste estadounidense, de 1940 a 1947, planteó la hipótesis que la producción de pinos seguía una cadena de Markov. [Veá D. H. Thomas, "A Computer Simulation Model of Great Basin Shoshonean Subsistence and Settlement Patterns", en D. L. Clarke ed., *Models in Archaeology* (Londres: Methuen, 1972).] Los datos sugirieron que si la cosecha de un año era buena, entonces la probabilidad de que el cultivo del siguiente año fuera bueno, adecuado o pobre eran de 0.08, 0.07 y 0.85, respectivamente; si la cosecha de un año era adecuada, entonces las probabilidades de que la cosecha del siguiente año fuera buena, adecuada y pobre eran de 0.09, 0.11 y 0.80, respectivamente; si la cosecha de un año era pobre, entonces las probabilidades de que la cosecha del siguiente año fuera buena, adecuada o pobre eran de 0.11, 0.05 y 0.84, respectivamente.
 - (a) Escriba la matriz de transición para esta cadena de Markov.
 - (b) Si la cosecha de pino piñonero fue buena en 1940, encuentre las probabilidades de una buena cosecha en los años 1941 a 1945.
 - (c) A largo plazo, ¿qué proporción de las cosechas será buena, adecuada y pobre?
12. Se han programado robots para recorrer el laberinto que se muestra en la figura 3.28 y en cada unión eligen cuál camino seguir en forma aleatoria.

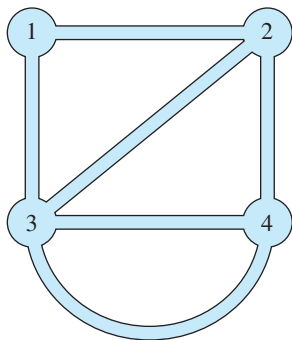


Figura 3.28

- (a) Construya la matriz de transición para la cadena de Markov que modela esta situación.
- (b) Suponga que comienza con 15 robots en cada unión. Encuentre la distribución de estado estacionario de robots. (Suponga que a cada robot le toma la misma cantidad de tiempo recorrer la distancia entre dos uniones adyacentes.)
13. Sea \mathbf{j} un vector renglón que consiste por completo de números 1. Demuestre que una matriz P no negativa es una matriz estocástica si y sólo si $\mathbf{j}P = \mathbf{j}$.
14. (a) Demuestre que el producto de dos matrices estocásticas de 2×2 también es una matriz estocástica.
- (b) Demuestre que el producto de dos matrices estocásticas de $n \times n$ también es una matriz estocástica.
- (c) Si una matriz estocástica P de 2×2 es invertible, demuestre que P^{-1} también es una matriz estocástica.

Suponga que se quiere conocer el número promedio (o esperado) de pasos que se darán para ir del estado i al estado j en una cadena de Markov. Se puede demostrar que el siguiente cálculo responde esta pregunta: borre el renglón j -ésimo y la columna j -ésima de la matriz de transición P para obtener una nueva matriz Q . (Mantenga los renglones y columnas de Q etiquetadas como lo estaban en P .) El número esperado de pasos del estado i al estado j está dado por la suma de las entradas en la columna de $(I - Q)^{-1}$ marcada i .

15. En el ejercicio 9, si el lunes es un día seco, ¿cuál es el número esperado de días hasta un día húmedo?
16. En el ejercicio 10, ¿cuál es el número esperado de generaciones hasta que una persona baja tenga un descendiente alto?
17. En el ejercicio 11, si la cosecha de pino piñonero es adecuada un año, ¿cuál es el número esperado de años que deben pasar hasta que ocurre una buena cosecha?
18. En el ejercicio 12, a partir de cada una de las otras uniones, ¿cuál es el número esperado de movimientos hasta que un robot llegue a la unión 4?

Modelos económicos lineales

En los ejercicios 19-26, determine cuáles de las matrices son de intercambio. Para las que lo sean, encuentre un vector de precio no negativo que satisfaga la ecuación (1).

19. $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.9 & 0.4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 3/2 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.70 & 0.35 \\ 0.25 & 0.30 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.40 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 27-30, determine si la matriz de consumo dada es productiva.

27. $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 0.20 & 0.10 & 0.10 \\ 0.30 & 0.15 & 0.45 \\ 0.15 & 0.30 & 0.50 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0.35 & 0.25 & 0 \\ 0.15 & 0.55 & 0.35 \\ 0.45 & 0.30 & 0.60 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 31-34, se proporcionan una matriz de consumo C y un vector de demanda \mathbf{d} . En cada caso, encuentre un vector de producción factible \mathbf{x} que satisfaga la ecuación (2).

31. $C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

32. $C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

33. $C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

CAS 34. $C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 3.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$

35. Sea A una matriz de $n \times n$ y $A \geq O$. Suponga que $A\mathbf{x} < \mathbf{x}$ para alguna \mathbf{x} en \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Demuestre que $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

36. Sean A, B, C y D matrices de $n \times n$ y \mathbf{x}, \mathbf{y} vectores en \mathbb{R}^n . demuestre las siguientes desigualdades:

- (a) Si $A \geq B \geq O$ y $C \geq D \geq O$, entonces $AC \geq BD \geq O$.
 (b) Si $A > B$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $A\mathbf{x} > B\mathbf{x}$.

Crecimiento poblacional

37. Una población con tres clases etáreas tiene una matriz

de Leslie $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$. Si el vector de población inicial es $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$, calcule $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y \mathbf{x}_3 .

38. Una población con cuatro clases etáreas tiene una

matriz de Leslie $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$. Si el vector de población inicial es $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$, calcule $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y \mathbf{x}_3 .

39. Cierta especie con dos clases etáreas de 1 año de duración tiene una probabilidad de supervivencia de 80% de la clase 1 a la clase 2. Evidencia empírica demuestra que, en promedio, cada hembra pare cinco hembras por año. En consecuencia, dos posibles matrices de Leslie son

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) A partir de $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$, calcule $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{10}$ en cada caso.
 (b) Para cada caso, grafique el tamaño relativo de cada clase etárea contra el tiempo (como en la figura 3.23). ¿Qué sugieren sus gráficas?

40. Suponga que la matriz de Leslie para el escarabajo VW

es $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$. A partir de un \mathbf{x}_0 arbitrario, determine el comportamiento de esta población.

41. Suponga que la matriz de Leslie para el escarabajo VW

es $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$. Investigue el efecto de variar la

probabilidad de supervivencia s de los escarabajos jóvenes.

- CAS** 42. Los caribúes se encuentran principalmente en las provincias occidentales de Canadá y el noroeste estadounidense. La vida promedio de una hembra es de alrededor de 14 años. Las tasas de natalidad y supervivencia para cada grupo etáreo se proporcionan en la tabla 3.4, que muestra que las hembras de caribú no dan a luz durante sus primeros 2 años y paren aproximadamente una cría por año durante sus años intermedios. La tasa de mortalidad para las crías jóvenes es muy alta.

Tabla 3.4

Edad (años)	Tasa de natalidad	Tasa de supervivencia
0–2	0.0	0.3
2–4	0.4	0.7
4–6	1.8	0.9
6–8	1.8	0.9
8–10	1.8	0.9
10–12	1.6	0.6
12–14	0.6	0.0

Los números de caribúes reportados en el Jasper National Park de Alberta en 1990 se muestran en la tabla 3.5. Con un CAS, prediga la población de caribúes para 1992 y 1994. Luego proyecte la población para los años 2010 y 2020. ¿Qué concluye? (¿Qué su-

Tabla 3.5 Población de caribúes en el Jasper National Park, 1990

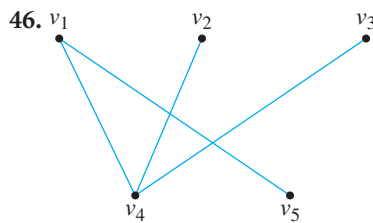
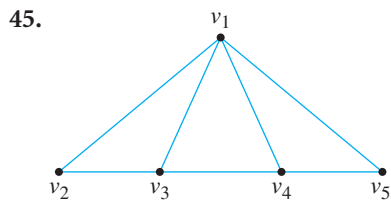
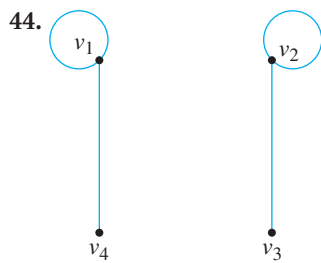
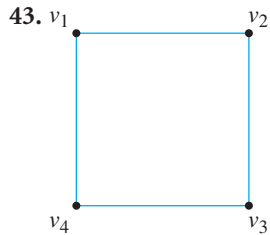
Edad (años)	Número
0–2	10
2–4	2
4–6	8
6–8	5
8–10	12
10–12	0
12–14	1

Fuente: World Wildlife Fund Canada

posiciones hace este modelo y cómo podría mejorarlo?)

Grafos y digrafos

En los ejercicios 43-46, determine la matriz de adyacencia del grafo dado.



En los ejercicios 47-50, dibuje un grafo que tenga la matriz de adyacencia dada.

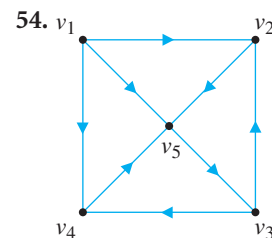
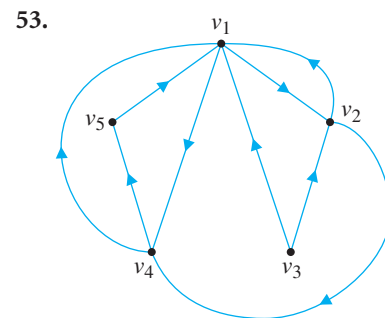
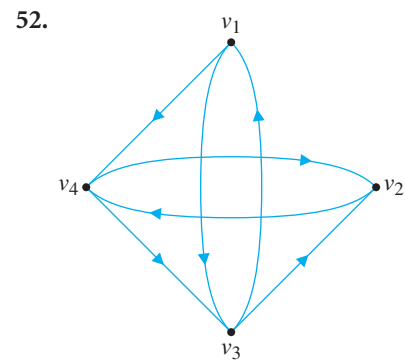
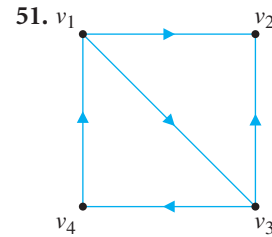
47.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

48.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

49.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

50.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 51-54, determine la matriz de adyacencia del digrafo dado.



En los ejercicios 55-58, dibuje un digrafo que tenga la matriz de adyacencia dada.

$$55. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$56. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$57. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$58. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 59-66, use potencias de matrices de adyacencia para determinar el número de trayectorias de la longitud especificada entre los vértices dados.

59. Ejercicio 48, longitud 2, v_1 y v_2

60. Ejercicio 50, longitud 2, v_1 y v_2

61. Ejercicio 48, longitud 3, v_1 y v_3

62. Ejercicio 50, longitud 4, v_1 y v_2

63. Ejercicio 55, longitud 2, v_1 a v_3

64. Ejercicio 55, longitud 3, v_4 a v_1

65. Ejercicio 58, longitud 3, v_4 a v_1

66. Ejercicio 58, longitud 4, v_1 a v_4

67. Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G .

(a) Si el renglón i de A es todo ceros, ¿qué implica esto acerca de G ?

(b) Si la columna j de A es toda ceros, ¿qué implica esto acerca de G ?

68. Sea A la matriz de adyacencia de un digrafo D .

(a) Si el renglón i de A^2 es todo ceros, ¿qué implica esto acerca de D ?

(b) Si la columna j de A^2 es toda ceros, ¿qué implica esto acerca de D ?

69. La figura 3.29 es el digrafo de un torneo con seis jugadores, P_1 a P_6 . Con matrices de adyacencia, clasifique a los jugadores primero al determinar sólo victorias, y luego al usar la noción de victorias combinadas y victorias indirectas, como en el ejemplo 3.69.

70. La figura 3.30 es un digrafo que representa una cadena alimenticia en un pequeño ecosistema. Una arista dirigida de a a b indica que a tiene a b como fuente de alimento. Construya la matriz de adyacencia A para este digrafo y úsela para responder las siguientes preguntas.

(a) ¿Cuál especie tiene las fuentes de alimento más directas? ¿Cómo muestra A esto?

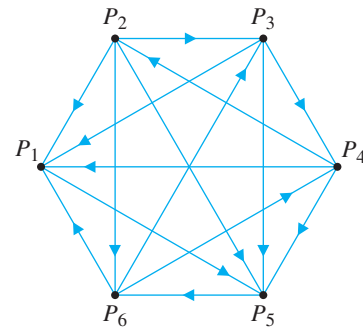


Figura 3.29

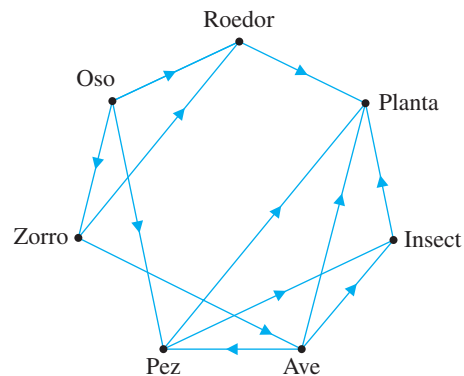


Figura 3.30

(b) ¿Cuál especie es una fuente directa de alimento para la mayoría de las otras especies? ¿Cómo muestra A esto?

(c) Si a come a b y b come a c , se dice que a tiene a c como una fuente indirecta de alimento. ¿Cómo puede usar A para determinar cuál especie tiene más fuentes indirectas de alimento? ¿Cuál especie tiene más fuentes de alimento directas e indirectas combinadas?

(d) Suponga que los contaminantes matan a las plantas en esta cadena alimenticia y quiere determinar el efecto que tendrá este cambio sobre el ecosistema. Construya una nueva matriz de adyacencia A^* a partir de A , al borrar el renglón y la columna correspondientes a planta. Repita los incisos (a) a (c) y determine cuáles especies son las más y menos afectadas por el cambio.

(e) ¿Cuál será el efecto a largo plazo de la contaminación? ¿Qué cálculos matriciales demostrarán esto?

71. Cinco personas se conectan todas mediante correo electrónico. Siempre que una de ellas escucha un trozo de chismorreo interesante, lo envía por correo electrónico a alguien más en el grupo, de acuerdo con la tabla 3.6.

(a) Dibuje el digrafo que modela esta "red de chismorreos" y encuentre su matriz de adyacencia A .

Tabla 3.6

Remitente	Destinatarios
Ann	Carla, Ehaz
Bert	Carla, Dana
Carla	Ehaz
Dana	Ann, Carla
Ehaz	Bert

- (b) Defina un *paso* como el tiempo que una persona tarda en enviar correo electrónico a todos los de su lista. (Por tanto, en un paso, el chisme va de Ann tanto a Carla como a Ehaz.) Si Bert escucha un rumor, ¿cuántos pasos transcurrirán para que todos los demás escuchen el rumor? ¿Qué cálculo matricial revela esto?
- (c) Si Ann escucha un rumor, ¿cuántos pasos transcurrirán para que los demás escuchen el rumor? ¿Qué cálculo matricial revela esto?
- (d) En general, si A es la matriz de adyacencia de un digrafo, ¿cómo puede decir si el vértice i está conectado al vértice j mediante una trayectoria (de cierta longitud)?

[La red de chismorreos en este ejercicio recuerda la noción de “seis grados de separación” (que se encuentra en la obra y la película del mismo nombre), que sugiere que cualesquiera dos personas están conectadas mediante una trayectoria de conocidos cuya longitud es cuando mucho 6. El juego “Six Degrees of Kevin Bacon” asevera más frívolamente que todos los actores están conectados al actor Kevin Bacon en tal forma.]

72. Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G .
- (a) Por inducción, pruebe que, para toda $n \geq 1$, la entrada (i, j) de A^n es igual al número de n -trayectorias entre los vértices i y j .
- (b) ¿Cómo deben modificarse el enunciado y la demostración del inciso (a) si G es un digrafo?
73. Si A es la matriz de adyacencia de un digrafo G , ¿qué representa la entrada (i, j) de AA^T si $i \neq j$?

Un grafo se llama **bipartita** si sus vértices pueden subdividirse en dos conjuntos U y V tales que toda arista tiene un punto final en U y el otro punto final en V . Por ejemplo, el grafo del ejercicio 46 es bipartita con $U = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $V = \{v_4, v_5\}$. En los ejercicios 74-77, determine si un grafo con la matriz de adyacencia dada es bipartita.

74. La matriz de adyacencia en el ejercicio 47

75. La matriz de adyacencia en el ejercicio 50

76. La matriz de adyacencia en el ejercicio 49

$$77. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

78. (a) Demuestre que un grafo es bipartita si y sólo si sus vértices pueden etiquetarse de modo que su matriz de adyacencia pueda particionarse como

$$A = \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix}$$

- (b) Con el resultado del inciso (a), demuestre que un grafo bipartita no tiene circuitos de longitud impar.

Códigos de corrección de error

79. Suponga que los cuatro vectores en \mathbb{Z}_2^2 se codifican al repetir el vector dos veces. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} [0, 0] &\rightarrow [0, 0, 0, 0] \\ [0, 1] &\rightarrow [0, 1, 0, 1] \\ [1, 0] &\rightarrow [1, 0, 1, 0] \\ [1, 1] &\rightarrow [1, 1, 1, 1] \end{aligned}$$

Demuestre que este código no es de corrección de error.

80. Suponga que codifica los dígitos binarios 0 y 1 al repetir cada dígito cinco veces. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow [0, 0, 0, 0, 0] \\ 1 &\rightarrow [1, 1, 1, 1, 1] \end{aligned}$$

Demuestre que este código puede corregir errores dobles.

¿Cuál es el resultado de codificar los mensajes en los ejercicios 81-83 usando el código de Hamming (7, 4) del ejemplo 3.71?

$$81. \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 82. \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 83. \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuando se usa el código de Hamming (7, 4) del ejemplo 3.71, suponga que se reciben los mensajes \mathbf{c}' en los ejercicios 84-86.