RELAZIONE 1

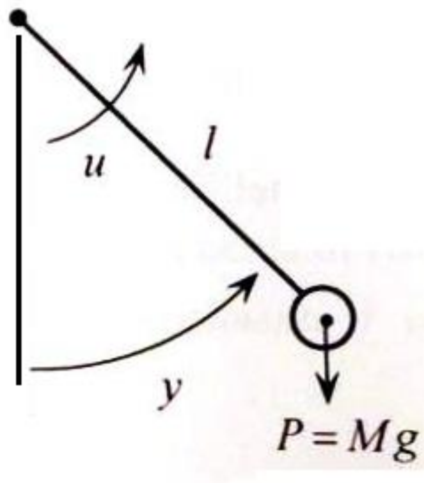
FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

Prof.: G. Celentano

Studente: Yuri Spaziani

Matricola: N46003377

PENDOLO



Il modello matematico del pendolo in figura risulta:

$$Ml^2\ddot{y} + K_a\dot{y} + Mgl\sin y = u.$$

Ponendo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, si ottiene $\dot{x_1} = x_2$.
Risulta quindi:

$$\ddot{y} = \dot{x_2} = \frac{-g}{l}\sin x_1 - \frac{K_a}{Ml^2}x_2 + \frac{u}{Ml^2}.$$

Per $u = \hat{u}\, cost$ lo stato di equilibrio, se $\left|\frac{\hat{u}}{Mgl}\right| \leq 1$, vale

$$\widehat{x_1} = sin^{-1}\left(\frac{\hat{u}}{Mgl}\right), \quad \widehat{x_2} = 0.$$

Scrivendo tali relazioni in forma matriciale risulta

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g\cos\widehat{x_1}}{l} & -\frac{K_a}{Ml^2} \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}\delta u, \quad \delta y = [1 \ \ 0]\ \delta x.$$

Il modello linearizzato è valido solo per piccole oscillazioni del pendolo.

Nel caso in cui sul pendolo non agiscano altre forze esterne oltre alla gravità e all'attrito (u=0), ricaviamo un'espressione per i punti di equilibrio delle equazioni di stato. Imponendo la condizione $\dot{x_1} = x_2$=0 si ottengono le due condizioni di equilibrio:

$$0=x_2, \qquad 0 = -\frac{g}{l} sinx_1 - \frac{K_a}{Ml^2} x_2 + \frac{u}{Ml^2}$$

da cui $\widehat{x_2}$ $\quad all'equilibrio\ la\ velocit$à $angolare\ deve\ essere\ nulla.$

$\sin \widehat{x_1} = 0$

da cui si ricava $\widehat{x1} = k\pi, \;\; k = 0,1,2, \dots$

Ci avvaliamo a questo punto di MATLAB per simulare il sistema ricavato. In particolare, il programma dpendolo.m fornisce i dati per la simulazione:

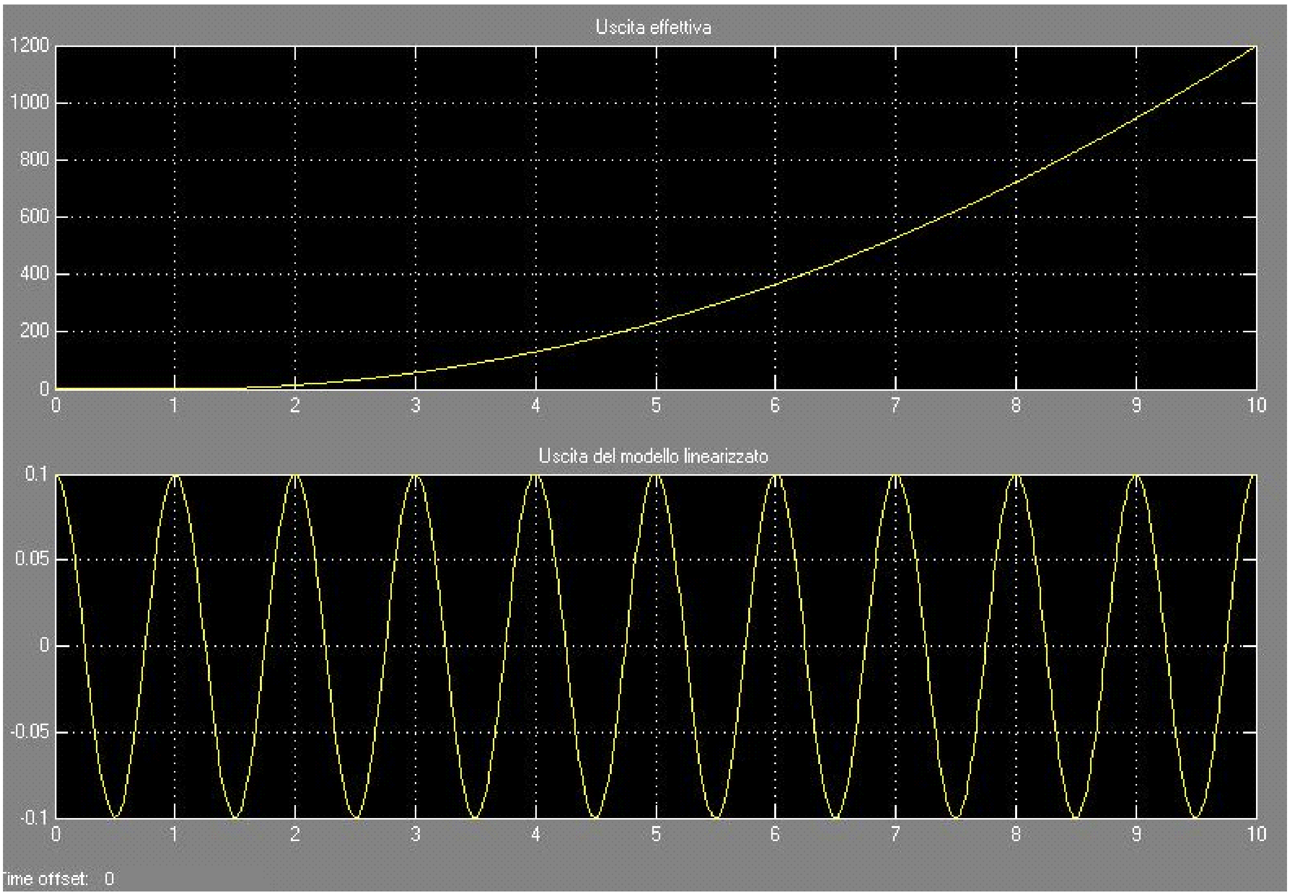
```
clc, close, clear

global M g l Ka

M=1                    % massa del pendolo
g=9.81                 % accelerazione di gravità
l=9.81/(4*pi^2)        % lunghezza del pendolo
Ka=0                   % coefficiente di attrito

un=0                   % ingresso nominale
yn=asin(un/(M*g*l))    % uscita nominale
```

mentre la simulazione è effettuata dal programma fpendolo.m:

```
function Y=fpendolo(U)

global M g l Ka

u=U(1);
x1=U(2);
x2=U(3);

xp1=x2;
xp2=-9.81/l*sin(x1)+(u-Ka*x2)/(M*l^2);
```

```
y=x1;

Y=[y xp1 xp2]';
```

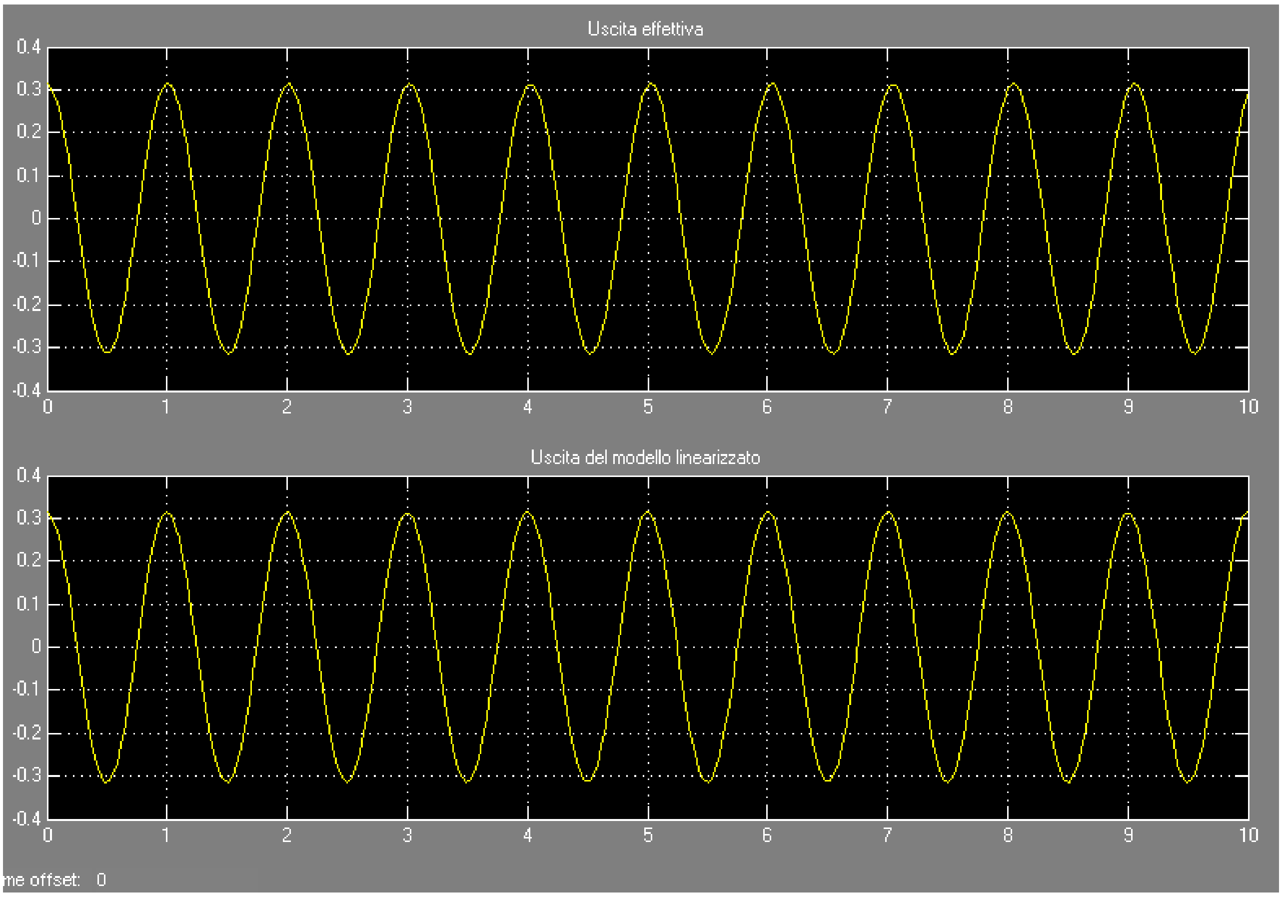
Se si applica coppia costante (u=1.85) al modello non lineare e se essa supera un certo valore si ottiene



Il pendolo dunque continua a girare in senso antiorario.

Applicando invece una coppia nulla e ponendo come stato iniziale

$x_0 = [0.314 \quad 0]^T$, ovvero circa 18°



il modello non lineare e quello lineare coincidono.

Invece per oscillazioni del pendolo grandi e con $x_0 = [2.1 \quad 0]^T$, circa 120