

# Метод инженерного расчета областей совместного покрытия спутниковой системы

## Ключевые слова:

негеостационарные спутниковые системы, области покрытия, оценка покрытия, Iridium, Globalstar, GPS.

Иванов В.И.,

аспирант МТУСИ, ivanovvi89@gmail.com

## Постановка задачи

Целью работы является определение всех областей совместного покрытия спутниковой системы. Метод нахождения областей совместного покрытия спутниковой системы заключается в следующем:

1. Найти границу области покрытия каждого спутника системы. Определить точки пересечения границ. Для каждого спутника выделить точки пересечения, которые находятся в его области покрытия. Определить сегменты границ областей покрытия между точками пересечения.

2. Определить на основе совокупности сегментов и точек пересечения границы областей совместного покрытия внутри области покрытия каждого спутника.

3. Собрать все области совместного покрытия и удалить повторяющиеся.

Задача определения областей рассматривается с точки зрения вычислительной геометрии. Метод не учитывает распространение радиоволн и влияние рельефа местности и антропогенных объектов на линии видимости спутников.

## Описание метода нахождения областей совместного покрытия

### Определение границы области покрытия спутника.

Поверхность земли представлена референц-эллипсоидом в системе координат ECEF [1]. Совокупность лучей спутника представлена конусом с вершиной в точке с координатами спутника, осью, направленной к центру Земли, и половиной угла раскрытия равной максимальному углу зенита спутника. Граница области покрытия спутника – это линия пересечения конуса и эллипсоида.

Для расчета линии пересечения используется параметрическое уравнение конуса в каноническом для конуса базисе и уравнение эллипсоида в том же базисе. Поэтому сначала определяем канонический базис конуса и матрицу преобразования из базиса системы ECEF в канонический базис конуса [1]. Затем на основе матрицы преобразования исходное уравнение эллипсоида в канонической форме в системе ECEF преобразуем в общее уравнение эллипсоида в базисе конуса:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Ex + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

Рассмотрена методика расчета границ областей совместного покрытия спутниковой системы. Поверхность земли представлена эллипсоидом. Совокупность лучей спутника представлена конусом. Элемент поверхности эллипсоида, который ограничен кривой пересечения конуса и эллипсоида, определяет область покрытия спутником поверхности земли. Кривая пересечения является границей области покрытия. Границы областей покрытия спутников пересекаются при наложении областей. Между двумя точками пересечения образуется сегмент границы области покрытия спутника. Область совместного покрытия – это элемент поверхности эллипсоида, ограниченный сегментами границ областей покрытия спутников. С помощью предложенной методики определяется набор сегментов для каждой области совместного покрытия, который определяет границы области совместного покрытия. На основе рассчитанных областей оценивается соотношение площадей областей с разным количеством видимых спутников, непрерывность покрытия спутниковой системы, частота одновременной видимости заданного количества спутников. Представлены результаты оценки покрытия спутниковой системы Iridium, Globalstar и GPS.

Параметрическое уравнение конуса:

$$\begin{aligned} x &= v \cos(\theta) \cos(u) \\ y &= v \cos(\theta) \sin(u) \\ z &= v \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $v \in (-\infty; +\infty)$ ,  $u \in [0; 2\pi]$ ,  $\theta \in (0; \pi)$  – максимальный угол зенита спутника.

Подставляем уравнение (2) в уравнение (1), группируем по степеням  $v$ . В результате получаем квадратное уравнение:

$$av^2 + bv + c = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a &= Aa_1^2b_1^2 + Ba_1^2b_2^2 + Ca_2^2 + 2Da_1^2b_1b_2 + 2Ea_1b_2a_2 + 2Fa_1b_1a_2, \\ b &= 2Ga_1b_1 + 2Ha_1b_2 + 2Ja_2, \\ c &= K \end{aligned}$$

где  $a_1 = \cos(\theta)$ ,  $b_1 = \cos(u)$ ,  $a_2 = \sin(\theta)$ ,  $b_2 = \sin(u)$

Решением являются два корня, которые определяют зависимость  $v(u, \theta)$ . Подставляем поочередно в уравнение (2) полученные решения  $v(u, \theta)$  вместо  $v$ . Меняя параметр  $u$  в диапазоне  $[0, 2\pi]$  при фиксированном значении  $\theta$ , получаем точки двух линий пересечения конуса и эллипсоида (рис. 1). Выбираем только то решение, которое соответствует цельной линии, т.е.  $v(u, \theta) = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ .

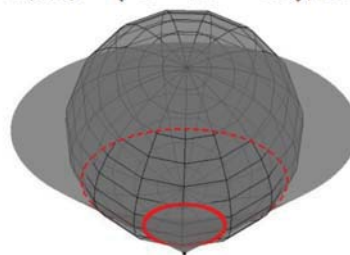


Рис. 1. Линии пересечения конуса и эллипсоида

Преобразовываем координаты точек линии в координаты системы ECEF. В результате получаем границу области покрытия спутника. Если изменять параметр  $u$  в диапазоне меньше  $2\pi$ , то получим сегмент границы.

**Определение точек пересечения границ областей покрытия двух спутников.** Граница покрытия спутника является кривой линией, которая описывается уравнением четвертого порядка. Аналитических методов определения точек пересечения линий четвертого порядка не существует. Поэтому, чтобы найти точки пересечения двух границ покрытия используется численный метод.



спутников. Отбираем только те точки, что находятся внутри области покрытия обеих спутников. Находим пары ближайших из них. Если расстояние между ними удовлетворяет погрешности, то оставляем две выбранные точки (рис. 2). Если нет, то создаем новые точки в окрестности найденных и повторяем поиск. Таким образом, вместо точки пересечения находим две ближайшие к ней точки из границы области покрытия каждого спутника. Для дальнейших расчетов сохраняем параметр  $n$  найденных точек. Поиск точек пересечения проводится для всех спутников системы.

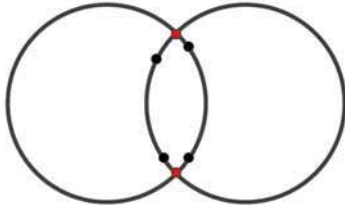


Рис. 2. Точки пересечения контуров областей покрытия

**Выделение точек пересечения внутри области покрытия.** Затем выделяются точки пересечения, принадлежащие границе области покрытия спутника и точки пересечения, которые находятся внутри области покрытия спутника (рис. 3).

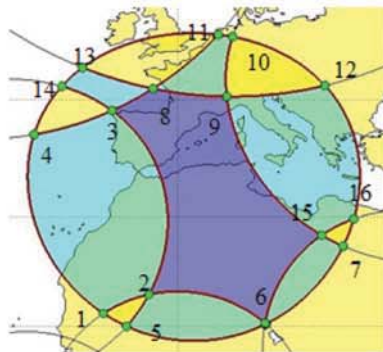


Рис. 3. Точки пересечения и сегменты внутри области покрытия спутника

Выделяем сегменты границ покрытия. В результате получаем совокупность точек и сегментов внутри области покрытия спутника, которую можно рассматривать как граф, где точки – это вершины, а сегменты – ребра.

**Определение границ областей совместного покрытия.** Рассмотрим границу области покрытия, состоящую из сегментов, которые проходят через точки 1–2–3–4 (рис. 3). Чтобы найти границу, нужно взять сегмент 1–4 и найти путь, состоящий из минимального количества сегментов, между точкой 1 и 4, который не проходит через сегмент 1–4. В результате получим путь, который проходит через сегменты 1–2, 2–3, 3–4. Начальный сегмент и сегменты пути определяют границу области совместного покрытия.

На описанном выше методе основан алгоритм определения границы области совместного покрытия. Сначала выбирается начальный сегмент. Одна точка сегмента задается как начальная точка поиска, другая точка – как конечная точка поиска. Затем находятся все сегменты, которые соединены с начальной точкой. Среди найденных отбираются только те, которые удовлетворяют набору условий:

- Сегмент всегда добавляется, если в пройденном пути еще не было сегмента спутника, границе покрытия которого принадлежит рассматриваемый сегмент.
- Сегмент не добавляется, если находится в максимальном количестве найденных границ областей покрытия. (Внешние сегменты (рис. 3), например, 1–4, состоят в границе только одной области покрытия, внутренние, например, 2–3, находятся в составе границ двух областей покрытия. Если во время поиска пути находится внутренний сегмент, состоящий в двух границах, то в третьей границе он не может состоять, поэтому этот сегмент не выбирается.)
- Один и тот же сегмент не может состоять в границе области дважды.
- Два сегмента, принадлежащие границе покрытия одного спутника, не могут идти подряд.

Путь найден, если отобранный сегмент содержит конечную точку. Поэтому проверяется, содержат ли отобранные сегменты конечную точку. Если да, то поиск завершается. Если нет, то последняя точка сегмента задается в качестве начальной точки поиска и повторяется поиск сегментов.

Может быть отобрано ноль, один или два сегмента. Если не найдено ни одного сегмента, то поиск не может быть продолжен. Если найден один, то путь увеличивается на этот сегмент и поиск продолжается дальше (при условии, что он не содержит конечную точку). Если найдено два, то появляются два отдельных пути, вдоль которых продолжается поиск (при условии, что ни один из этих сегментов не содержит конечную точку). Чем дальше, тем больше путей образовывается. Графически это можно представить в виде дерева поиска (рис. 4). На рис. 4 изображено дерево поиска для области покрытия 1–2–3–4. В результате поиска найдено два пути: 1–2–3–8–13–14–4 и 1–2–3–4. Если найдено два или несколько путей, выбирается путь с наименьшим количеством сегментов. В данном случае путь 1–2–3–4.

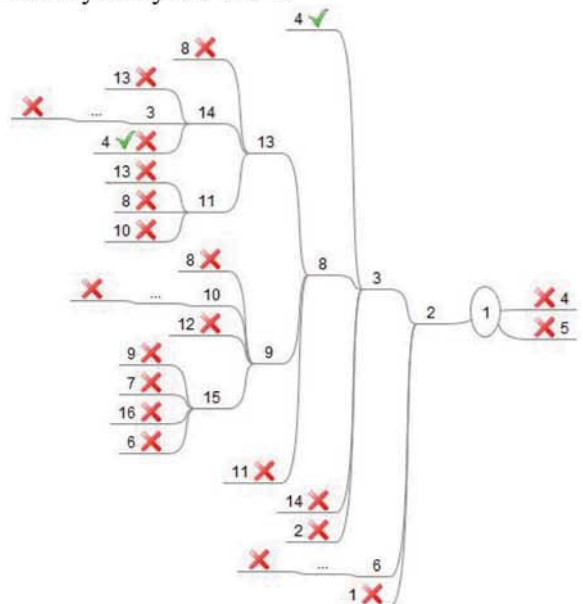


Рис. 4. Дерево поиска

На рис. 4 есть ветви, отмеченные многоточием. В этих местах сегменты продолжают дальше расходиться, поэтому образуется большое количество путей. В связи с этим, чтобы уменьшить время поиска, максимальное ко-



личество сегментов в пройденном пути ограничивается заданным числом. Если не найдено ни одного пути между точками начального сегмента, то максимальное количество сегментов увеличивается, и процесс поиска повторяется. Таким образом, в результате работы алгоритма определяется совокупность сегментов границы области покрытия (таблица 1).

Таблица 1

Сегменты границы области покрытия

№ сегмента	№ спутника
1–2	1
2–3	2
3–4	3
4–1	4

Каждый сегмент определяется начальной точкой, конечной точкой и номером спутника, границе покрытия которого принадлежит. Параметры  $u$  и  $v$  двух точек определяют диапазон для определения точек, из которых состоит сегмент. Подставляем диапазон в уравнение определения границы области покрытия соответствующего спутника и получаем набор точек. Таким же образом определяем точки для каждого сегмента. Объединяем точки. В результате получаем последовательность точек, которая определяет границу области совместного покрытия.

Блок-схема алгоритма изображена на рис. 5-6. Когда найдена граница одной области покрытия, выбирается сегмент, для которого не найдены все границы областей, в которых он состоит. С него начинается поиск границы другой области покрытия. Поиск продолжается до тех пор, пока для всех сегментов не будут найдены все границы областей, в которых они состоят. Затем, когда границы всех областей найдены, берется точка внутри области совместного покрытия и определяется количество видимых спутников в этой точке. В результате получаются границы всех областей совместного покрытия внутри области покрытия одного спутника и набор видимых в этих областях спутников.

**Выделение уникальных конфигураций.** Чтобы оценить покрытие системы, из совокупности найденных областей совместного покрытия удаляются повторяющиеся. В результате получается набор областей покрытия, который определяет покрытие всей спутниковой системы.

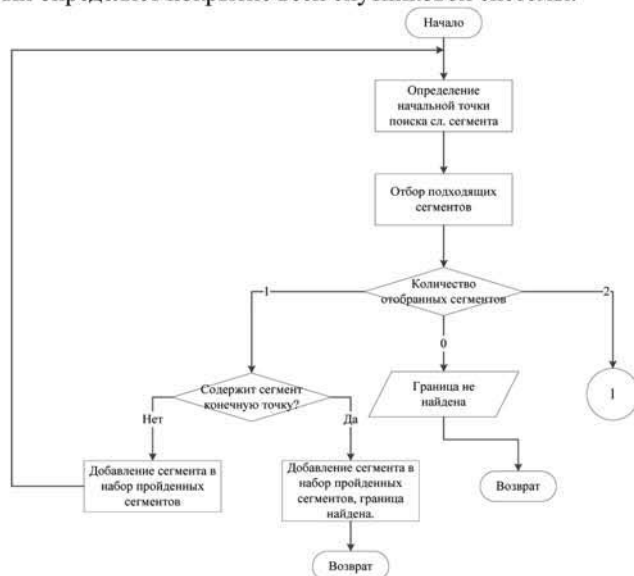


Рис. 5. Блок-схема алгоритма поиска граница области совместного покрытия

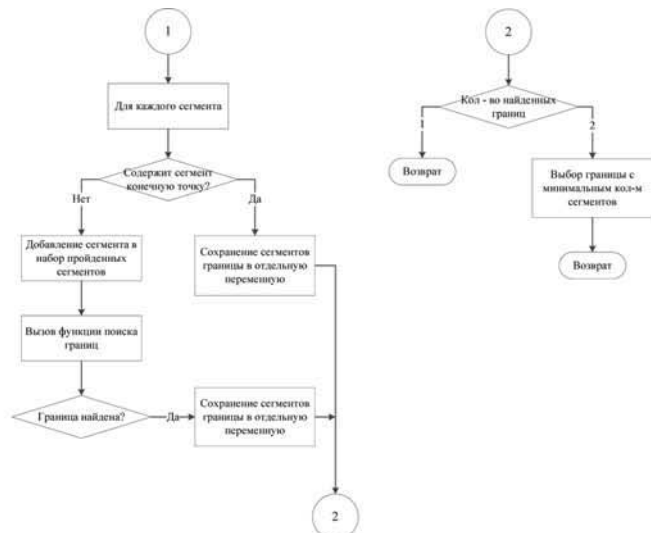


Рис. 6. Блок-схема алгоритма поиска границы области совместного покрытия (продолжение)

### Характеристики покрытия спутниковых систем

**Соотношение площадей областей покрытия.** Области совместного покрытия системы Iridium изображены на рис. 7. Суммарная площадь покрытия системы составляет 99,9984% от площади поверхности Земли, так как вблизи экватора у системы Iridium есть незначительные участки с отсутствием покрытия [2–4].

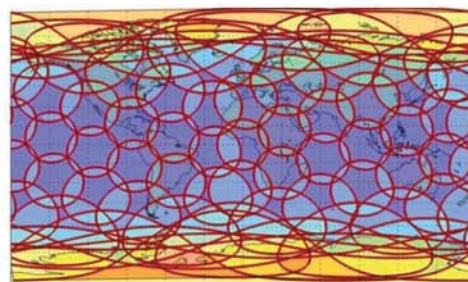


Рис. 7. Покрытие спутниковой системы Iridium

В таблице 2 показано отношение суммарных площадей областей с одинаковым количеством видимых спутников к площади покрытия системы и площади поверхности Земли. Как видно из таблицы, на территории около 78% поверхности Земли видны только один или два спутника. На остальной территории обеспечивается покрытие вплоть до девятикратного.

Таблица 2

Соотношение площадей областей совместного покрытия для системы Iridium

Количество видимых спутников	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Отношение суммарной площади к площади покрытия системы, %	42,435 2	35,5403	10,1736	4,0430	2,0559	1,5500	2,5849	1,2824	0,3347
Отношение суммарной площади к площади поверхности Земли, %	42,434 5	35,539	10,1734	4,0430	2,0559	1,5499	2,5849	1,2824	0,3347



Области совместного покрытия системы Globalstar изображены на рис. 8. Отношение площади покрытия системы к площади поверхности Земли составляет 97,188%, так как у Globalstar отсутствует постоянное покрытие после 72° широты [5].

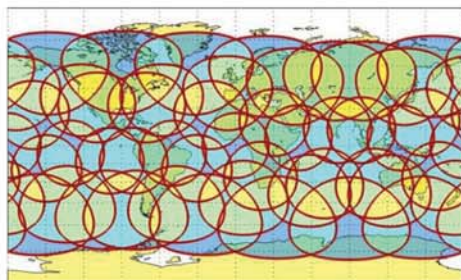


Рис. 8. Покрытие спутниковой системы Globalstar

В таблице 3 указано соотношение площадей областей. На площади около 75% покрытия системы видно от двух до трех спутников. Около 9% занимает однократное покрытие. Эти области примыкают к полярным широтам. И от четырех до пяти спутников видно на площади около 15% от всей площади покрытия.

Таблица 3  
Соотношение площадей областей совместного покрытия для системы Globalstar

Количество видимых спутников	1	2	3	4	5
Отношение суммарной площади к площади покрытия системы, %	8,6035	37,8921	38,8569	14,5800	0,0674
Отношение суммарной площади к площади поверхности Земли, %	8,3616	36,8266	37,7643	14,1700	0,0656

Области совместного покрытия системы GPS изображены на рис. 9. Суммарная площадь покрытия системы составляет 100% от площади поверхности Земли. Это подтверждает, что GPS полностью глобальная система.

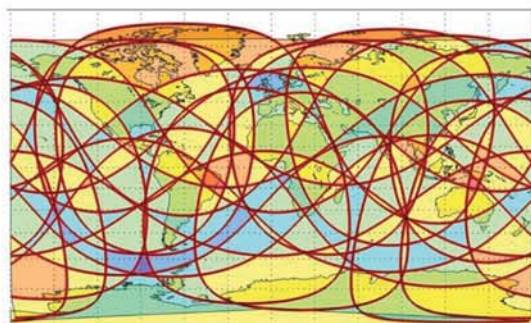


Рис. 9. Покрытие спутниковой системы GPS

В таблице 4 указано соотношение площадей с одинаковым количеством видимых спутников. Как видно из таблицы, в любой точке на поверхности земли видно, по крайней мере, четыре спутника (в геометрическом смысле). Около 71% площади поверхности земли занимают области с семикратным и восьмикратным покрытием. 19% составляют области с покрытием от четырех до шести спутников. И 10% составляют области с видимостью от 9 до 10 спутников.

Таблица 4

Соотношение площадей областей совместного покрытия для системы GPS

Количество видимых спутников	4	5	6	7	8	9	10
Отношение суммарной площади к площади покрытия системы, %	0,0961	2,1048	17,5943	40,6091	30,1639	8,9512	0,4807
Отношение суммарной площади к площади поверхности Земли, %	0,0961	2,1048	17,5943	40,6091	30,1639	8,9512	0,4807

Соотношение площадей областей покрытия в зависимости от широт. На рис. 10 изображена зависимость соотношения площадей от широты для системы Iridium. Как видно из графика, на широте 58° полностью исчезает однократное покрытие. Двукратное покрытие исчезает после 70° широты, трехкратное – после 74°. Четырехкратное покрытие и более появляется, начиная с 55° широты. Начиная с 74° широты, составляет 100%.

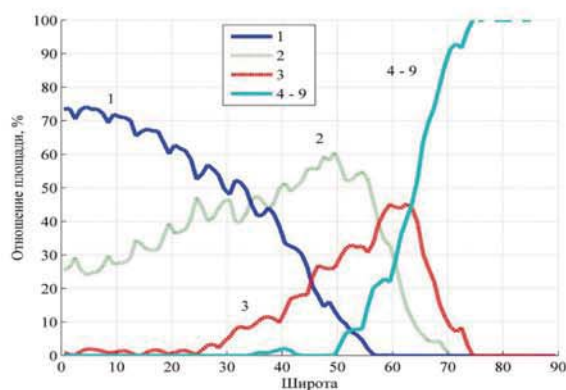


Рис. 10. Зависимость соотношения площадей покрытия от широты для системы Iridium

На рис. 11 изображена зависимость соотношения площадей покрытия от широты для системы Globalstar. В диапазоне широт от 20° до 60° преобладает трехкратное и четырехкратное покрытие. От 33° до 45° существует незначительное пятикратное покрытие. В диапазоне от 0° до 20° и от 60° до 80° преобладает однократное и двукратное покрытие.

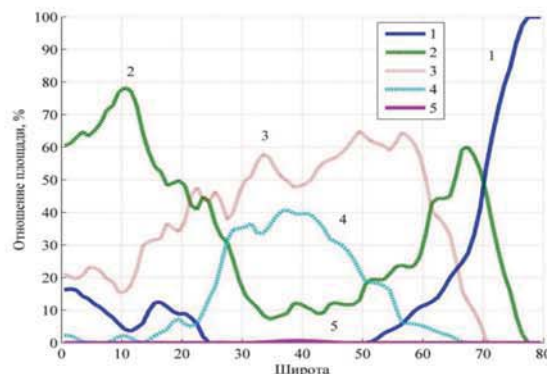


Рис. 11. Зависимость соотношения площадей покрытия от широты для системы Globalstar



На рис. 12 изображена зависимость для системы GPS. В диапазоне широт от 0° до 65° преобладают области с 6–8 кратным покрытием. В диапазоне от 70° до 88° широты, преобладают области с девяти- и десятикратным покрытием. При этом от 80° до 88° они составляют 100%. На широте 90° обеспечивается семикратное покрытие. Доля областей с 4–5 кратным покрытием минимальна на всем диапазоне широт.

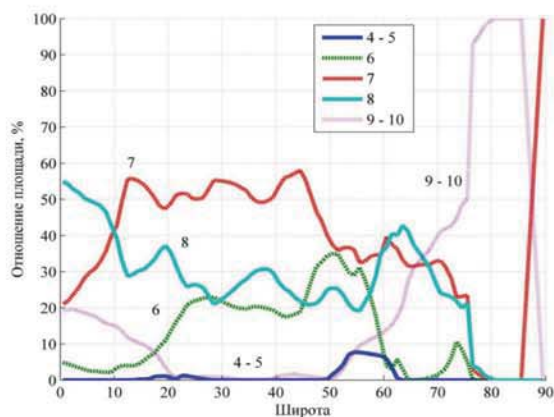


Рис. 12. Зависимость соотношения площадей покрытия от широты для системы GPS

**Частота видимости заданного количества спутников.** На рис. 13 показана зависимость частоты появления определенного количества спутников от широты для системы Iridium. Частота видимости одного спутника практически равна нулю. Частота видимости двух спутников начинается с 72% на экваторе и плавно уменьшается до 0 на широте 60°. Частота видимости трех спутников плавно возрастает с 27% на экваторе до 56% на широте 50°, затем практически линейно спадает до 0 на широте 70°. Частота видимости трех и более спутников постоянно возрастает с увеличением широты: сначала очень медленно от 0% на экваторе до 5% на широте 30°, затем быстро до 98% на широте 70°, и снова медленно до 100% на широте 90°.

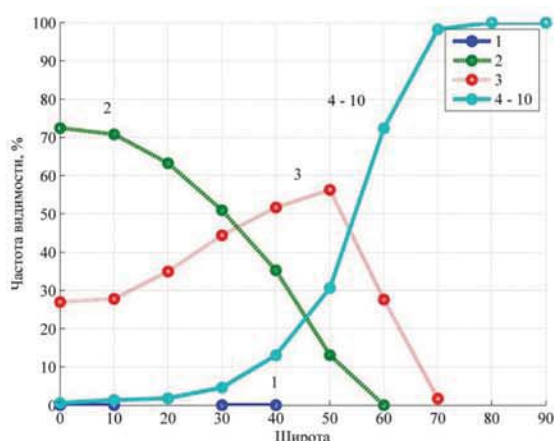


Рис. 13. Частота видимости спутников в зависимости от широты для системы Iridium

На рис. 14 показана зависимость частоты появления определенного количества спутников от широты для системы Globalstar. Видимость только одного спутника практически равна 0. В полосе широт от 20° до 60° преобладает видимость от четырех до пяти спутников. После

60° и до 20° широты преобладает видимость трех спутников. Частота видимости двух спутников убывает с 18% на экваторе до 0 на 30° широты. После этого на широте 58° частота видимости перестает быть равной 0 и возрастает до 45% на широте 70°.

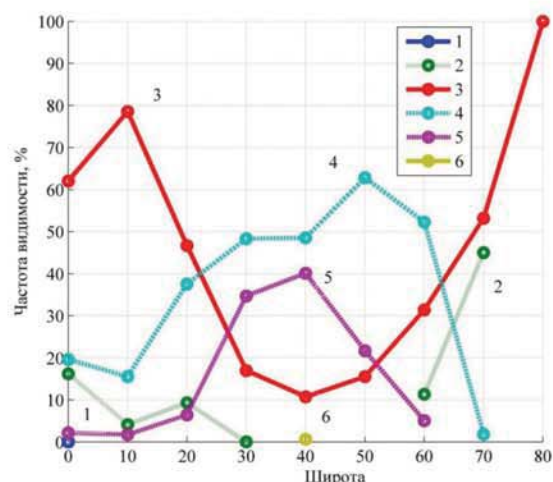


Рис. 14. Частота видимости спутников в зависимости от широты для системы Globalstar

На рис. 15 показана зависимость частоты появления определенного количества спутников от широты для системы GPS. В диапазоне широт от 20° до 60° частота видимости от пяти до восьми спутников выше по сравнению с остальными. Частота видимости от 9 до 11 спутников выше в диапазонах частот от 0° до 20° и от 60° до 90°.

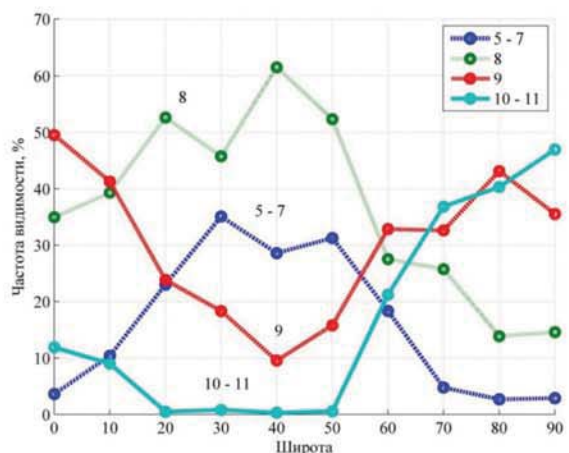


Рис. 15. Частота видимости спутников в зависимости от широты для системы GPS

## Литература

1. Машибиц Л.М. Компьютерная картография и зоны спутниковой связи. — М.: Радио и связь, 2000.
2. Акимов А.А. Методика исследования устойчивости системы спутниковой связи «Иридиум» к отказу КА // Материалы 4 международной конференции «Спутниковая связь». Т.2. Москва, 2000.
3. Акимов А.А., Шевчук Д.В. Оценка интегральной доступности связи потребителей спутниковой системы "Иридиум" при выходе из строя космических аппаратов. — Радиотехника, 2011, №1.
4. Pratt S.R. et al. An Operational And Performance Overview Of The Iridium Low Earth Orbit Satellite System // IEEE Communications Surveys, Second Quarter 1999.
5. Description of the Globalstar System, Revision E.
6. GPS Standard 4th Edition. <http://www.gps.gov/technical/ps>.