ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آزمون میان‌ترم ۲

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

نام و نام خانوادگی: محمدجواد علاءالدینی

۱۸ اردی‌بهشت ۱۳۹۹

شماره‌ی دانش‌جویی: ۹۸۱۷۰۹۵۷

زمان: ۲/۵ ساعت

۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای $n+۲$ عضوی از مجموعه‌ی $\{-n, -n+۱, \ldots, ۰, \ldots, n-۱, n\}$ باشد. ثابت کنید سه عضو متمایز a، b و c در A وجود دارند طوری که $a+b=c$.

۲. تمام اعداد اول مانند p و q را بیابید که عدد p^q+q^p نیز اول باشد. [راهنمایی: بر اساس باقی‌مانده بر ۲ و ۳ حالت‌بندی کنید.]

۳. ثابت کنید با شمارا خط مستقیم دل‌خواه در صفحه‌ی دوبعدی نمی‌توان کل صفحه را پوشاند.

۴. فرض کنید C مجموعه‌ای از بازه‌ی $(۰, ۱)$ باشد که در آن برای هر $x \in C$ می‌دانیم که نمایش x در مبنای ۱۰ شامل حداقل یک رقم ۷ است.

الف) نشان دهید $|C| = |(۰, ۱)|$.

ب) ثابت کنید $(۰, ۱) - C$ شمارا است.

۵. ثابت کنید به ازای هر عدد فرد اول p، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $n۲^n+۱$ بر p بخش‌پذیر باشد.

\# بدین منظور از آنجا که A زیرمجموعه‌ای با $n+2$ عضو است از تکنیکی استفاده می‌کنیم :

ابتدا مجموعه اصلی را به $n+1$ دسته تقسیم می‌کنیم که اعضای هر دسته شرط $a+b=c$ را داشته باشند

چون $n+2$ عضو در مجموعه A انتخاب شده است در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری حداقل سه عدد در یکی از دسته ها وجود دارد که دارای شرط گفته شده است

پس باید بتوانیم اعداد $-n$ تا $+n$. را در $n+1$ دسته با ویژگی مطرح شده قرار دهیم در نتیجه ثابت می‌شود سه عضو متمایز مثل a,b,c در A وجود دارند به طوری که $a+b=c$ باشد

$p^q + q^p$

واضح است که با یک فرض ساده می‌توانیم به جواب برسیم

$(p \overset{3}{\equiv} 2 \text{ و } n \overset{3}{\equiv} 1)$

$(q \overset{3}{\equiv} 1 \text{ و } p \overset{3}{\equiv} 2)$

پس برای q و p داریم یکی مضرب ۳ و یا هر دو باید مضرب ۳ باشند

هر دو این اعداد نمی‌توانند زوج مثبت به داشته باشند زیرا جواب نهایی زوج شده و خلاف حکم مسئله است

پس در حال اگر $\underline{q, 3, p, 2}$ جواب ۱۷ شده و به ازای این جواب حکم مسئله برقرار است

(۳)

می دانیم که صفحه دوبعدی ما مجموعه ای از تعداد خطوط ناشمارا می باشد و می توان آن را در تناظر با مجموعه $\mathbb{R}$ گرفت یعنی به هر خط عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را نسبت داد

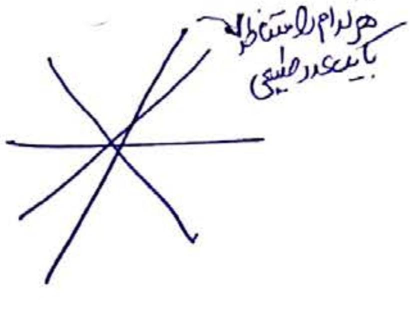
از طرفی دیگر می دانیم اجتماع شمارا تا مجموعهٔ شمارا اندازه ای حداکثر با جمع تعداد اعضا همهٔ این مجموعه ها دارد

و همچنین می دانیم که نمی توان مجموعه ای ناشمارا را با مجموعه ای شمارا پر کرد

طور دیگری به مسئله می نگریم می توانیم خط ها را متناظر با اعداد طبیعی در نظر بگیریم و صفحه را متناظر با اعداد حقیقی

از آنجا که هر عدد طبیعی را نمی توان به اعداد حقیقی map کرد یا بهتر است بگوییم تناظر یک به یک میان آن ها برقرار نیست حتی این دو مجموعه هم کاردینالیتی نمی باشند

و با این مدلسازی حکم اثبات می شود



که اثبات متناظر نبودن اعداد طبیعی و اعداد حقیقی با استفاده از قضیه کانتور ثابت می شود

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ (قضیه قطری کانتور)

الف] مجموعهٔ D را که دربردارندهٔ بازه‌ای مانند $(0.7, 0.8)$ است را درنظر می‌گیریم حال باید به دنبال برقراری تناظری یک به یک بین مجموعهٔ درنظر گرفته و $(0,1)$ برقرار کنیم

تابع $f(x) = (x-0.7) \times 10$ را که یک تناظر یک به یک بین D و $(0,1)$ است را درنظر گرفته پس داریم

$$|D| = |(0,1)|$$

پس واضح است که $D \subseteq C$ پس نتیجه می‌شود که $|C| \geq |(0,1)|$ از طرف دیگر داریم:

$$|C| \leq |(0,1)| \Leftarrow C \subset |(0,1)|$$

از مفروضات و اثبات‌های بالا حکم نتیجه می‌شود یعنی $|C| = |(0,1)|$

ب] مجموعه‌ای مانند $(0,1)-C$ را S می‌نامیم این مجموعه شامل تمام اعداد بازهٔ $(0,1)$ است که نشان دادن آن‌ها در مبنای 10 شامل رقم 7 نمی‌باشد. حال مجموعه Z را از روی مجموعه S به گونه‌ای تشکیل می‌دهیم که به ازای هر عضو S از تمام 9 هایش را با 7 جایگزین می‌کنیم و این عضو را در Z قرار می‌دهیم

خب حال با این روش تشکیل مجموعهٔ فوق واضح است که تناظری یک به یک بین S و Z وجود دارد

درنتیجه $|S| = |Z|$

از طرفی مجموعه Z برابر است با نمایش اعداد بازهٔ $(0,1)$ در مبنای 9 پس $|Z| = |(0,1)|$ و نتیجه می‌شود که $|S| = |(0,1)|$ پس S ناشمارا می‌باشد

پس باید تعداد بی‌نهایت n بیابیم که به گونهٔ زیر باشند

$$n \times 2^n \overset{p}{\equiv} -1$$

حال داریم $\Leftarrow$ $2^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

درنتیجه داریم $\leftarrow$ $2^{(p-1)k} \overset{p}{\equiv} 1$

حال فرض می‌کنیم n به صورت $(p-1)k$ باشد در این صورت باید در نظر داشته باشیم که $\left((p-1)k \times 2^{(p-1)k} \overset{p}{\equiv} -1\right)$ که معادل آن است که $k \overset{p}{\equiv} 1$.

پس برای هر عدد طبیعی مانند s، $n = (p-1)(ps+1)$ در معادله (هم‌نهشتی) $n2^n \overset{p}{\equiv} -1$ صادق است و به نتیجه مطلوب رسیدیم