7.1 定积分的概念和微积分基本定理

Def：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，对于区间 $[a,b]$ 上的一个分割 Δ：$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$。

记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=1\sim n)$，$\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。在每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取 ξ_i

作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。若当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时，上述和式存在极限 I，且 I 不依赖分

割 Δ 的选取及 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1\sim n)$ 的任取。则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积

同时称 I 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分。$I=\int_a^b f(x)\,dx$。a,b 分别为下、上限。

$f(x)$ 被积函数，x 积分变量。

Def：对于分割 Δ，在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取 ξ_i $(i=1\sim n)$，称和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为 $f(x)$ 关于 Δ 的黎曼和

用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述更严谨：

Def：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义。若 $\exists$ 常数 $I\in\mathbb{R}$，使 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $[a,b]$ 的任何分割 Δ，

当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时，在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取 ξ_i 都有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$，则称

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积。用 $f(x)\in R[a,b]$ 表示。

$\lambda(\Delta)\to 0$ 时，该极限过程有两个任意性，分割的…和 ξ_i 选取的…

Thm：if $f(x)\in C[a,b]$，then $f(x)\in R[a,b]$

Pf：对 $\forall$ 分割 Δ，$m(b-a)\le\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i\le M(b-a)$

其中，m、M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的最小、大值。m_i、M_i 分别为 $[x_{i-1},x_i]$ 的最小、大值。

Key：下面的证明和柯西收敛准则的核心是相同的。

特别之处在于这里的两个自由度，让取极限下的讨论更复杂

考查一种特殊的分割方法和ξ取法：将$[a,b]$ n等分，再统取ξ_i（右端点）

此时记 $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 有 $S_n\in[m(b-a),\ M(b-a)]$ 有界

由聚点定理，存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$使$\{S_{n_k}\}$收敛于S

下证：$S=\int_a^b f(x)\,dx$

由于 $f(x)\in C[a,b]$ 故 $f(x)$ 在$[a,b]$上一致连续

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ 使 $\forall x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 均有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\exists k_0$ 使 $|S_{n_{k_0}}-S|<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\frac{b-a}{n_{k_0}}<\frac{\delta}{2}$

则此时考查任意满足 $\lambda(\Delta)<\frac{\delta}{2}$ 的 Δ 有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i - S_{n_{k_0}}\right| < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2}$$

故 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i - S\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ □.

Analysis is just so delicate and vivid.

Thm：牛顿—莱布尼茨公式 / 微积分基本定理：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且 (1) 在区间 $[a,b]$ 上可积

(2) 在区间 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$

则有 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \triangleq F(x)\Big|_a^b$

Pf：任意 Δ，有 $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))$

由拉格朗日微分中值定理，$\exists \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ s.t. $F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i$

则 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = F(x)\Big|_a^b$ 与 Δ，ξ_i 选取无关.

又 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时 LHS $\to \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$ □.

SP 7.1.1：$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1 x^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$