Chapter 2 随机变量和概率分布

2.1 随机变量及其独立性

定义：设$(\Omega, \mathcal{F})$为可测空间，若Ω上的函数$X(\omega)$满足：$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$

称$X(\omega)$是可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$上的随机变量. 简记X, 用$\{X \le x\}$表示$\{\omega \mid X(\omega) \le x\}$

用$\mathcal{C}$表示$\mathbb{R}$上左开右闭子区间全体. $\mathcal{B}$表示$\mathcal{C}$中子区间经交、余、可列并得到集合全体.

$\mathcal{B}$为σ域，称为Borel域，$\mathcal{B}$中元素称为Borel集.

o X为$(\Omega, \mathcal{F})$上的随机变量，对$\forall$ Borel集A有$\{X \in A\} \overset{\text{def}}{=} \{\omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$

随机变量的独立性

定义：$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \cdot P(X_2 \le x_2) \cdots P(X_n \le x_n) \quad \forall x_1 \sim x_n \in \mathbb{R}$

则$X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立.

2.2 离散型随机变量

△ 若随机变量 X 只取有限个值 $x_1, x_2, \dots x_n$ 或可列个值，称 X 为离散随机变量

△ 设 X 为离散型随机变量，称 $P(X_k = x_k) = p_k,\ k\geq 1$ 为 X 的概率分布 $\{p_k\}$ 概率分布列（分布列）

分布列必有性质：① $p_k \geq 0$ ② $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

伯努利分布：$Bino(1,p)$：$P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p$

游程，游程长度

$$Bino(n,p):\ P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

泊松分布：$Poiss(\lambda)$ $\quad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k=0,1,\dots$

可用 Taylor 展开验证和为 1

物理意义：
$$P(X=k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} C_n^k \cdot \left(\frac{\mu t}{n}\right)^k \left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(\mu t)^k}{n^k} \left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} \qquad 记\ \mu t = \lambda$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

当 n 很大 p 很小时 $Bino(n,p) \approx Poiss(np)$ 尤其无 n 时用 Poiss

超几何分布 $H(N,M,n)$

$$P(X=m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m=0,1,\dots,M$$ 产品一次品的模型

几何分布

$$P(X=k) = q^{k-1}p \quad k=1,2,\dots$$ 射击模型

$\Leftrightarrow$ 无后效性 $P(X=k+1 \mid X>k) = P(X=1)$

帕斯卡分布

$$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}\,q^{k-r}p^{r}\quad(q+p=1),\ k\geq r$$

射击：直到中r次停止.

负二项分布

$$P(Y=k)=C_{k+r-1}^{r-1}\,q^{k}p^{r}$$

射击：直到中r次停止. k为没中

验证：$\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+r-1}^{r-1}\,q^{k}p^{r}=p^{r}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+r-1}^{r-1}\,q^{k}\overset{\text{Taylor}}{=\!=}p^{r}\cdot(1-q)^{-r}=1$

2.3 连续型随机变量

- 如果存在非负函数 $f(x)$ 使对 $\forall a<b$, $P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)dx$, 则称 X 为连续型随机变量, $f(x)$ 为 X 的概率密度.

有: ① $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

② $P(X=a)=0$, 于是 $P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$

③ 对 R 的子集 A, $P(X\in A)=\int_A f(x)\,dx$

均匀分布: $Unif(a,b)$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0\end{cases}$

指数分布: $Exp(\lambda)$, $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\ge0$

⇔ 无记忆性 $P(X\ge s+t\mid X\ge t)=P(X\ge s)$

例 2.3.3 / 2.3.4: 标准模型 (可联系物理中衰变和热学模型)

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

当 $X\sim N(0,1)$ 时, 称标准正态分布 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

验证归一性: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}dr^2=1$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$

引入 $\Phi(a)=\int_{-\infty}^{a}\varphi(x)\,dx$ 有 $P(X\le a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{a}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$\Gamma(\alpha,\beta)$ 伽马分布: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

泊松分布关联 (例 2.3.5)

2.4 概率分布函数

△ 对随机变量 X, 称 $F(x)=P(X\le x)$ 为 X 的概率分布函数.

X 离散: $F(x)=\sum\limits_{j:x_j\le x} p_j$; X 连续, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

○ $F(x)$ 为 X 的分布函数, 有 (1) F 单调不减 右连续.

(2) $F(+\infty)=1$, $F(-\infty)=0$

(3) F 在 x 点处连续 $\Leftrightarrow P(X=x)=0$

证: (1) $x<y$ 时, $F(y)-F(x)=P(x<X\le y)\ge 0$

$$\lim_{x'\to x^+} F(x')=\lim_{n\to+\infty} F(x+\tfrac{1}{n})=\lim_{n\to+\infty} P(X\le x+\tfrac{1}{n})$$

用到单调序列的结论.

$$=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X\le x+\tfrac{1}{n}\}\right)=P(X\le x)=F(x)$$

(3) $$P(X=x)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x-\tfrac{1}{n}<X\le x\}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(F(x)-F(x-\tfrac{1}{n})\right)$$

$$=F(x)-F(x^-)$$

本质上左可能不连续,右必连续源于: $x'\to x^-$ 和 x 的差距有一个确定的 x, $x'\to x^+$ 和 x 差距中没有一个确定的数.

○ 设 $F(x)=P(X\le x)$ 是连续函数, 导数分段存在且连续, 则 $f(x)=\begin{cases} F'(x) & \text{存在} \\ 0 & \end{cases}$ 为 X 的概率密度

必要的, 否则 X 不为连续型随机变量

不唯一, 可改变点的值

2.5 随机变量函数的分布

若 $h(y)=x$ 则 $P(Y=y) = P(X=h(y)) = f(h(y))\,dx = f(h(y))|h'(y)|\,dy$

注意一定包含所有情况(比如±号)

Y有概率密度 $f_Y(y) = f(h(y))|h'(y)|$

2.6 随机变量的分位数

○ 对于 $p\in(0,1)$ 定义 $F^{-1}(p) = \sup\{x \mid F(x)<p\}$ 称为 $F^{-1}(p)$ 为 F 或 X 的 p 分位数,用 ξ_p 表示