4.2 数学期望的性质

○ 随机向量 $\vec{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 有：(1) $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$d\vec{x}=dx_1 dx_2\cdots dx_n$ 若有，

$E|g(\vec{X})|=\int_{\mathbb{R}^n}|g(\vec{x})|f(\vec{x})\,d\vec{x}<\infty$，则 $g(\vec{X})$ 有数学期望

(2) $g(\vec{X})$ 数学期望 $E[g(\vec{X})]=\int_{\mathbb{R}^n}g(\vec{x})f(\vec{x})\,d\vec{x}$

离散型情况：$E|g(\vec{X})|=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n}|g(\vec{X}(j_1,j_2,\ldots,j_n))|\,p_{j_1j_2\ldots j_n}<\infty$ 时 $Eg(\vec{X})$ 数学期望 $E[g(\vec{X})]=\ldots\ldots$

一定注意那个 $E|g(\vec{X})|$ 的条件，和数学分析的内容有关（暂时不会）

在不引起混淆情况下，$E(X)$ 的括号可省略。

X的数学期望存在的充要条件是 $E|X|<\infty$

○ 设 $E|X_j|<\infty$ $(1\le j\le n)$，$C_0\sim C_n$ 为常数，则 (1) 线性组合 $Y=C_0+C_1X_1+\ldots+C_nX_n$ 数学期望存在，

$EY=C_0+C_1EX_1+\ldots+C_nEX_n$

(2) 若 $\{X_j\}$ 相互独立，$Z=X_1\cdot X_2\cdots X_n$ 数学期望存在

$EZ=EX_1\cdot EX_2\cdots EX_n$

值得关注的是线性组合并不要求互相独立，乘法组合要求相互独立。

线性组合不要求独立总是成立的性质 做题时非常有用

例 4.2.9：技巧 使用示性函数和数学期望证明概率公式

示性函数避开了乘积分解需要独立性的问题

4.2.10：使用联合分布函数的方法更方便

○ m为正整数，若 $E|X|^m<\infty$，则称 EX^m 为X的m阶原点矩，称 $E|X-EX|^m$ 为X的m阶中心矩

当 $m>2$ 时 原点矩、中心矩统称为高阶矩

习 4.2.3：将 $|X|^m$ 视为新的随机变量。

形式上的变量代换有助于看清。

4.3 随机变量的方差

○ 若 X 有数学期望 $\mu=EX$，则称 $E(X-\mu)^2$ 为 X 的方差，记作 $Var(X)$ 或 σ_X^2

当 $Var(X)<\infty$ 时，称 X 的方差有限，称 $\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$ 为 X 的标准差

常见概率分布的方差：

(1) 伯努利分布：$X\sim Bino(1,p)$，$Var(X)=p(1-p)$

(2) 二项分布：$X\sim Bino(n,p)$，$Var(X)=np(1-p)$

(3) 泊松分布：$X\sim Poiss(\lambda)$，$Var(X)=\lambda$

(4) 几何分布：$Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$

离散随机变量，求和而非积分

(5) 均匀分布：$X\sim Unif(a,b)$，$Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

(6) 指数分布：$X\sim Exp(\lambda)$，$Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

(7) 正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Var(X)=\sigma^2$ (需要用到一个目前还不会的 Γ 积分)

(8) Γ 分布：$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$，$Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$

方差的性质：

(1) $Var(a+bX)=b^2Var(X)$

(2) $Var(X)=E(X-\mu)^2<E(X-c)^2$ (只要 $c\neq\mu$)

(3) $Var(\sum_{j=1}^{n}X_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(E(X_iX_j)-\mu_i\mu_j)$

(4) 当 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，$Var(\sum_{j=1}^{n}X_j)=\sum_{j=1}^{n}Var(X_j)$ 很好用而很常用的结论.

○ 设 $\sigma^2=Var(X)<\infty$ 则称 $Y=\frac{X-EX}{\sigma}$ 为 X 的标准化.

此时有，$EY=0$，$Var(Y)=1$ 当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时有 $Y\sim N(0,1)$

例4.3.3 设 $X_1,X_2,\ldots X_n$ 相互独立，有共同的方差 $\sigma^2<\infty$ 则 $Var(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j)=\frac{\sigma^2}{n}$

本结论在处理数据时用处极大(比如多次测量取平均来减小不确定度)

例4.3.4、4.3.5. 一堆项之和的方差只与两两关联有关