1.7 事件的独立性.

定义：称 $A_1, A_2 \ldots A_n$ 相互独立，若对 $\forall\, 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$

这个定义是必要的

$$P(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_n}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_n})$$

A_1, A_3；A_2, A_3 分别独立不能推出 A_1A_2 和 A_3 独立.

比如：抛两次币：$A_1 = \{$第一次正$\}$. $A_2 = \{$第二次正$\}$. $A_3 = \{$两次相同$\}$

独立是一个很弱的条件，集合上推独立要求很高

1.8 全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式：$A_1, A_2, \dots A_n$ 互不相容，$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$，$P(B)=\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)$

$A_1 \sim A_n$ 互不相容且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，称 $A_1 \sim A_n$ 完备事件组.

例 8.1：好题，归纳的方法通用

8.3：Polya 模型知道

贝叶斯公式：若事件 $A_1 \sim A_n$ 互不相容，$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 当 $P(B)>0$ 有

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad 1 \le j \le n$$

最常用：
$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

1.9.

概率&频率: S 重复 N 次, 其中 A 发生 N_A, 若 $\lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N}=p$, A 为 S 的事件, p 为 A 的概率

赌徒破产模型: 甲本金 a 元, 赌赢 b 元收手, 破产停. 一次一元. 破产概率 $q(a)$.

设 A: 甲第一局 win. B_k: k 元本金破产事件. 有 $q(0)=1$, $q(a+b)=0$

$$q(k)=p(B_k)=p(A)\,p(B_k|A)+p(\bar{A})\,p(B_k|\bar{A})$$

$$=\frac{1}{2}q(k+1)+\frac{1}{2}q(k-1)$$

$$\Rightarrow q(k+1)-q(k)=q(k)-q(k-1)=\dots=q(1)-q(0)$$

$$\Rightarrow q(a)=1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}$$