3.1 随机向量及其联合分布

- 如果 $X_1, X_2, \dots X_n$ 都为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量. 称 $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 n 维随机向量

- 对随机向量 $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$, 称 n 元函数 $F(x_1, x_2, \dots x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots X_n \leq x_n)$ 为 X 的联合分布函数.

  联合分布 $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的右连续函数

  $F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots x_k, \infty, \infty, \dots)$

- 对于 $\{1, 2, \dots n\}$ 的真子集 $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ 称 $(X_{i_1}, \dots X_{i_k})$ 的联合分布为边缘分布

  - $X_1, X_2, \dots X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ 对任何 $(x_1, x_2, \dots x_n)$ 有 $F(x_1, x_2, \dots x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$

3.2 离散型随机向量及其概率分布

◦ 设离散型的 $\vec{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$，则 $X_1\sim X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ 对任何 $(x_1(j_1),x_2(j_2),\dots,x_n(j_n))$ 有

$$P(X_1=x_1(j_1),X_2=x_2(j_2),\dots,X_n=x_n(j_n))=P(X_1=x_1(j_1))\cdot P(X_2=x_2(j_2))\cdots P(X_n=x_n(j_n))$$

证：$n=2$ 时，下证：X,Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\forall(x_i,y_j)$ 有 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$

由 X,Y 相互独立性 $P(X\le x_i,Y\le y_j)=P(X\le x_i)\cdot P(Y\le y_j)$

设 $x_i'<x_i$，$y_j'<y_j$ 且 x_i',y_j' 与 x_i,y_j 之间无其它数

$$\begin{cases}P(X\le x_i,Y\le y_j')=P(X\le x_i)\cdot P(Y\le y_j'),\\ P(X\le x_i',Y\le y_j)=P(X\le x_i')\cdot P(Y\le y_j),\\ P(X\le x_i',Y\le y_j')=P(X\le x_i')\cdot P(Y\le y_j')\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(X=x_i,Y=y_j)&=P(X\le x_i,Y=y_j)-P(X\le x_i',Y=y_j)\\&=(P(X\le x_i,Y\le y_j)-P(X\le x_i,Y\le y_j'))-(P(X\le x_i',Y\le y_j)-P(X\le x_i',Y\le y_j'))\\&=(P(X\le x_i)-P(X\le x_i'))(P(Y\le y_j)-P(Y\le y_j'))\\&=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)\end{aligned}$$

以此类推，任何 n 均成立.

3.3 连续型随机向量及其联合密度

- 若有 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可积 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 对 $\mathbb{R}^n$ 的任何子立方体 $D=\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_i < x_i \le b_i,\ 1\le i\le n\}$

  有 $P(\vec{X}\in D)=\int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$ 则称 $\vec{X}$ 为连续型随机向量.

- $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})$ 的概率密度为 $g(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})=\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x)\,dx_{i_{k+1}}\cdots dx_{i_n}$

- $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt\right)ds$

- 设 (X,Y) 有连续的分布函数 $F(x,y)$，定义 $D=\left\{(x,y) \mid \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ 存在且连续}\right\}$

  $$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$ 且当 $P((X,Y)\in D)=1$ 时，$f(x,y)$ 为 (X,Y) 联合密度

- $X_1 \sim X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $x\in\mathbb{R}^n$，$f(x)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$ （$f_i(x_i)$ 为 X_i 的概率密度）

没有细扣严谨性，preview只搭了知识框架.

3.4 随机向量函数的概率分布

$Y_i = g_i(\vec{X})$. 设 $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$ 引入集合 $C = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) \le y_i, i = 1 \sim m\}$

$$P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2, \dots, Y_m \le y_m) = P(g_1(\vec{X}) \le y_1, \dots, g_m(\vec{X}) \le y_m) = P(\vec{X} \in C) = \int_C f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n$$

○ $F_Y(\vec{y})$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上连续函数, 定义 $D = \{y \mid \frac{\partial^m F_Y(\vec{y})}{\partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_m}$ 存在且连续$\}$

$$f_Y(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{\partial^m F_Y(\vec{y})}{\partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_m} & \vec{y} \in D \\ 0 & \vec{y} \notin D \end{cases}$$ $P(\vec{y} \in D) = 1$ 时, $f_Y(\vec{y})$ 为 $\vec{Y}$ 的联合密度

更进一步地有, 对 $(u, v) \in D$ 有 $\{U = u, V = v\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{X = x_i, Y = y_i\}$

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i(u, v), y_i(u, v)) \left|\frac{\partial(x_i, y_i)}{\partial(u, v)}\right|$$ 雅可比行列式

$$|J_i| = \left|\frac{\partial(x_i, y_i)}{\partial(u, v)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\| \ne 0 \quad (dx\, dy = |J|\, du\, dv)$$

用哪组替哪组 须小心

2. (1) $g(u, v) = f(x, y) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = f(x, y)|J| = \frac{1}{2} f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$

(2) $f_u(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v)\, dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, u-t)\, dt$

(3) $f_v(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+v, t)\, dt$

5. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \Rightarrow g(R, \theta) = f(x, y) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)}\right| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}} |J|$$

$$|J| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{matrix}\right\| = R \Rightarrow g(R, \theta) = \frac{R}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}}$$

$$g_R(R) = \int_0^{2\pi} g(R, \theta)\, d\theta = R e^{-\frac{R^2}{2}},$$

$$g_\theta(\theta) = \int_0^{+\infty} g(R, \theta)\, dR = \int_0^{+\infty} \frac{R}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}}\, dR = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2\pi}$$

在分别算出 $g_u(u)$, $g_v(v)$ 后再验证 $g(u, v) = g_u(u) \cdot g_v(v)$ 独立性

。设 (X_1, Y_1)，(X_2, Y_2) 同分布. $g(x,y)$, $h(x,y)$ 为二元函数，则

(1) $(g(X_1, Y_1), h(X_1, Y_1))$ 和 $(g(X_2, Y_2), h(X_2, Y_2))$ 同分布　⇒ $g(X_1, Y_1)$, $g(X_2, Y_2)$ 同分布.

若 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 相互独立且有相同的概率分布，称它们独立同分布.

二元到多元。设 $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$：$P(\vec{X} = \vec{x}) = g(\vec{x})\, d\vec{x}$，$g(\vec{x})$ 为联合密度

$$\vec{Y} = (u_1(\vec{X}), u_2(\vec{X}), \ldots, u_n(\vec{X})), \quad g(\vec{y}) = f(x_1(\vec{y}), \ldots, x_n(\vec{y}))\,|J| \quad (|J| \neq 0)$$

3.5 条件分布和条件密度

离散:

设 (X,Y), 有 $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$, $i,j=1,2,\dots$

X,Y 有边缘分布: $p_i=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$, $q_j=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$

固定 j, 有 $P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{q_j}$ $i=1,2,\dots$

称 $P(X=x_i|Y=y_j)$ 为条件 $Y=y_j$ 下, X 的条件概率分布, 简称条件分布

X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ 任何 $i,j\geq 1$, $P(X=x_i|Y=y_j)=p_i$

连续:

(X,Y) 有联合密度 $f(x,y)$, Y 有边缘密度 $f_Y(y)$

若 $f_Y(y)>0$, 称 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为条件 $Y=y$ 下, X 的条件密度.

称 $P(X\leq x|Y=y)=\frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds$ 为条件 $Y=y$ 下, X 的条件分布函数.

对固定的 y, $f_{X|Y}(x|y)$ 为 x 的函数且和联合密度函数只相差常数因子 $\frac{1}{f_Y(y)}$

○ 设 (X,Y) 有联合密度 $f(x,y)$, 则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ 任何 y 有 $f_Y(y)>0$ 则 $X|\{Y=y\}$ 的概率分布与 y 无关.

3.6 二维正态分布

3.7 次序统计量

见书中公式即可