ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»
Физико-технический институт (структурное подразделение)

Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

конспект (резюме) лекции №8

**«Численные методы многомерной оптимизации непрерывных функций»**

по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»

Выполнил:
студент 1 курса
группы ПИ-б-о-241(1)
Коробка Илья Леонидович

Проверил:
Заведующий
кафедрой компьютерной
инженерии и моделирования
Милюков В. В.

Симферополь, 2025

Оптимизация — это процесс нахождения наилучшего решения в рамках заданных ограничений. Формально задача оптимизации ставится как поиск минимума целевой функции на заданном множестве допустимых решений. При этом различают дискретные и непрерывные задачи оптимизации, для которых применяются разные подходы.

В дискретной оптимизации множество допустимых решений конечно или счетно. Одним из классических примеров является задача коммивояжера. Для решения таких задач часто используется метод ветвей и границ , который основан на систематическом переборе возможных вариантов с отсечением заведомо неоптимальных подмножеств. Также популярны генетические алгоритмы , имитирующие процессы естественного отбора: формируется популяция решений, к которой применяются операции селекции, скрещивания и мутации. Простым и быстрым подходом являются жадные алгоритмы , выбирающие на каждом шаге локально оптимальное решение. Например, при решении задачи о рюкзаке предметы выбираются исходя из соотношения их ценности и веса.

Для непрерывной оптимизации, где переменные могут принимать любые значения из некоторого диапазона, чаще всего используются градиентные методы. Градиентный спуск представляет собой итерационную процедуру, в которой на каждом шаге текущее приближение корректируется в направлении наибольшего убывания функции — против градиента. Важным условием сходимости является выбор подходящего размера шага. Более эффективным, особенно в окрестности оптимума, является метод Ньютона , использующий информацию о второй производной функции. Он обеспечивает более высокую скорость сходимости за счет учета кривизны функции. Еще один мощный метод — метод сопряженных градиентов , особенно хорошо зарекомендовавший себя при решении квадратичных задач. Он строит последовательность направлений поиска, которые являются сопряженными относительно матрицы системы.

Среди стохастических методов выделяют стохастический градиентный спуск , широко применяемый в машинном обучении. Он позволяет работать с большими объемами данных, обновляя параметры на основе случайно выбранного подмножества информации. Это снижает вычислительную нагрузку и помогает избежать переобучения. Также рассматриваются методы случайного поиска , которые позволяют находить приближенные решения с определенной вероятностью, зависящей от числа итераций и доли допустимых решений, близких к оптимальным.

Задачи оптимизации также тесно связаны с решением дифференциальных уравнений в частных производных. Например, уравнение Пуассона может быть представлено как задача минимизации некоторого функционала. Для численного решения таких задач используется метод конечных элементов , сводящий задачу к минимизации квадратичной формы, включающей матрицу жесткости и вектор правой части.

Выбор конкретного метода оптимизации зависит от типа задачи, характера функции и ограничений, требуемой точности и вычислительных ресурсов. Современные подходы часто сочетают детерминированные и стохастические компоненты, что позволяет находить баланс между скоростью работы и качеством получаемых решений.