

Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

конспект (резюме) лекции №5

«Аппроксимация тригонометрическими функциями. Ряды Фурье»

по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»

Выполнил:

студент 1 курса

группы ПИ-б-о-241(1)

Коробка Илья Леонидович

Проверил:

Заведующий

кафедрой компьютерной

инженерии и моделирования

Милюков В. В.

Введение

В вычислительной математике важными методами для приближённого представления данных являются интерполяция и аппроксимация.

Кривые Безье

Кривые Безье представляют собой параметрические кривые, которые описываются формулой:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), 0 < t < 1$$

Где базисные функции — это полиномы Бернштейна:

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Здесь n обозначает степень полинома, а i — номер контрольной точки.

Из-за своей высокой вычислительной эффективности и простоты управления через контрольные точки, кривые Безье стали широко использоваться в таких областях, как векторная графика и графические редакторы, включая Photoshop.

Численное дифференцирование

Метод численного дифференцирования не является идеальным из-за своей нестабильности. Проблема заключается в том, что даже небольшие ошибки в исходных данных, при делении на очень малый шаг, могут привести к значительным погрешностям. Чем более точно мы пытаемся вычислить производную, тем больше проявляются проблемы с входными данными и ошибки округления.

Ряд Фурье

Ряд Фурье — это способ представить периодическую функцию как бесконечную сумму синусоидальных и косинусоидальных функций с увеличивающимися частотами. Коэффициенты этого ряда вычисляются с помощью интегралов, которые включают исходную функцию и соответствующие синусы и косинусы, что позволяет проводить анализ частотных характеристик сигналов. Этот подход находит широкое применение в решении дифференциальных уравнений, анализе колебаний и обработке периодических процессов.

Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) — это алгоритм, который позволяет вычислить дискретное преобразование Фурье за $O(N \log N)$ операций, в отличие от $O(N^2)$. Он использует рекурсивный подход, разделяя задачу на более мелкие подзадачи и применяя симметрию комплексных экспонент для комбинирования результатов. БПФ является важным инструментом в спектральном анализе, обработке сигналов и решении дискретных дифференциальных уравнений.

Основная концепция заключается в разбиении спектра на две части. БПФ схож с методом быстрой сортировки (QuickSort), поскольку оба используют стратегию "разделяй и властвуй", рекурсивно разбивая задачу на более мелкие подзадачи (в случае БПФ — по четным и нечетным частотам, а в QuickSort — по опорному элементу), что позволяет существенно снизить вычислительные затраты.

Заключение

В данной работе были рассмотрены важные математические методы, используемые в современной вычислительной математике: кривые Безье, основанные на полиномах Бернштейна, которые позволяют точно моделировать сложные траектории; интегральное преобразование Фурье и его дискретный аналог — БПФ, обеспечивающие спектральный анализ сигналов с оптимальной вычислительной эффективностью; а также были проанализированы проблемы численного дифференцирования, требующие особых подходов для достижения устойчивых решений.