ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»
Физико-технический институт (структурное подразделение)

Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

конспект (резюме) лекции №3

«Метод градиентного спуска. Численные методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ): Метод дихотомии.»

по дисциплине «Алгоритмы и методы вычислений»

Выполнил:
студент 1 курса
группы ПИ-б-о-241(1)
Коробка Илья Леонидович

Проверил:
Заведующий
кафедрой компьютерной
инженерии и моделирования
Милюков В. В.

Симферополь, 202

Основные подходы к решению СЛАУ

Прямые методы

Прямые методы позволяют находить точное решение системы за конечное число шагов. Они эффективны для систем небольшой и средней размерности.

Метод градиентного спуска

Метод градиентного спуска применяется для нахождения минимума функции. В случае решения системы линейных уравнений ($Ax = b$), невязка (r) определяется как ($r = b - Ax$). Основная цель этого метода — минимизировать невязку.

Градиент: Это вектор, который показывает скорость изменения невязки. Для функции ($f(x)$) градиент вычисляется по формуле ($\nabla f(x) = A^T r$).

Антиградиент: Направление, противоположное градиенту, указывает, куда следует двигаться для уменьшения невязки: ($-\nabla f(x)$).

Шаг: Двигаемся в сторону антиградиента для уменьшения невязки:
$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x)$$
где (α) — это величина шага, которая должна быть небольшой. Этот процесс повторяется до тех пор, пока невязка не станет приемлемо малой.

Метод золотого сечения — это численный способ нахождения экстремума функции одной переменной на заданном интервале. Основной принцип заключается в делении отрезка в определённой пропорции, соответствующей золотому сечению, что позволяет эффективно сокращать интервал поиска на каждой итерации и обеспечивает высокую скорость сходимости.

Метод сопряжённых градиентов — это улучшенная версия метода градиентного спуска, предназначенная для решения систем линейных уравнений и задач оптимизации. Он особенно эффективен для симметричных и положительно определённых матриц. Главное отличие заключается в использовании сопряжённых направлений, что позволяет достигать сходимости быстрее.

Метод дихотомии — это численный способ нахождения корней уравнений, основанный на делении отрезка пополам и использовании свойств непрерывности функций. **Основные шаги этого метода:**

1. Выбор интервала: Начинаем с отрезка ([a, b]), где функция (f(x)) принимает разные знаки: (f(a) · f(b) < 0). Это гарантирует наличие хотя бы одного корня между (a) и (b).

2. Деление отрезка: Находим середину отрезка: (c = frac{a + b}{2}).

3. Проверка знака: Вычисляем значение функции в середине: (f(c)). Сравниваем его со значениями на концах отрезка:

- Если (f(c) = 0), то (c) — искомый корень.
- Если (f(a) · f(c) < 0), корень находится в ([a, c]); устанавливаем (b = c).
- Если (f(c) · f(b) < 0), корень находится в ([c, b]); устанавливаем (a = c).

4. Повторение процесса: Повторяем шаги 2 и 3, пока длина отрезка (|b - a|) не станет меньше заданной точности (ϵ).

5. Получение корня: Когда достигнута необходимая точность, (c) будет приближением к корню уравнения.

Функционал Тихонова

Функционал Тихонова — это метод, который помогает находить оптимальные решения в задачах оптимизации, особенно в условиях наличия шумных данных.

Идея: Мы стремимся минимизировать ошибку между моделью и данными, не позволяя решению быть слишком сложным.

Формула: Обычно представляется в виде:
[J(x) = |Ax - b|^2 + lambda |x|^2]
где:
- (|Ax - b|^2) — ошибка,
- (|x|^2) — сложность решения,
- **λ** — коэффициент, регулирующий важность сложности.

Регуляризация: Этот метод помогает избежать переобучения, то есть излишней подстройки под шум в данных.

Заключение

Метод градиентного спуска позволяет находить оптимальные решения для системы уравнений ($Ax = b$), уменьшая разницу между данными и моделью, двигаясь в сторону антиградиента. Метод золотого сечения используется для поиска экстремумов функции