Testo

Sakurai, Esercizio 1.3

Dimostrare che il determinante di una matrice 2×2, $\sigma \cdot a$ è invariante rispetto alla trasformazione

$$\sigma \cdot a \to \sigma \cdot a' := \exp\left(\tfrac{i\sigma \cdot n\phi}{2}\right) \sigma \cdot a \exp\left(\tfrac{-i\sigma\cdot n\phi}{2}\right)$$

Esprimere la relazione fra a e a' quando n è nella direzione dell'asse z e interpretare il risultato.

Soluzione

Noto prima di tutto che il risultato può essere applicato al calcolo del valore atteso

$$a = \langle \psi | \sigma a | \psi \rangle$$

ruotando il sistema di coordinate dell'angolo ϕ sull'asse n ottengo:

$$a' = \langle \psi' | \sigma a | \psi' \rangle = \langle \psi | R^\dagger \sigma a R | \psi \rangle = \langle \psi | \sigma a' | \psi \rangle$$

che dà la legge di trasformazione per a. Siccome $R^\dagger R = \mathbb{I}$ ottengo che il determinante di R è uguale a $\left[\det\left(R^\dagger\right)\right]^{-1}$, di conseguenza la trasformazione è di similarità, che preserva il determinante. Ora mi concentro più sull'espressione esplicita di $\exp(i\sigma b)$, ricordandomi che:

$$(\sigma b)(\sigma c) = \tfrac{1}{2}\{\sigma b, \sigma c\} + \tfrac{1}{2}[\sigma b, \sigma c] = bc\mathbb{I} + i\,(b \times c)\,\sigma$$

e ciò implica che

$$\begin{aligned}\exp\left(i\sigma b\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} i^j (\sigma b)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j!}(-1)^j \alpha^{2j}\mathbb{I} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!}(-1)^j i\alpha^{2j}\sigma b \\ &= \cos\alpha\mathbb{I} + i\sin\alpha\sigma u_\alpha\end{aligned}$$

dove $u_\alpha = \frac{b}{\alpha}$. Ora mi definisco alcune notazioni per comodità personale:

$$\text{Sia } \cos\frac{\phi}{2} = \kappa$$

$$\text{Sia } \sin\frac{\phi}{2} = \zeta$$

Applicando queste sostituzioni ottengo:

$$\sigma a' = (\kappa\mathbb{I} + i\zeta\sigma n)\,\sigma a\,(\kappa\mathbb{I} - i\zeta\sigma n) = \kappa^2\sigma a + i\zeta\kappa\,[\sigma n, \sigma a] + \zeta^2(\sigma n)(\sigma a)(\sigma n)$$

Splittando a in un vettore parallelo ad n e uno perpendicolare ho queste relazioni:

$$\begin{aligned} a &= a_{\parallel} + a_{\perp} \\ a_{\parallel} &= (an)n \\ a_{\perp} &= a - a_{\parallel} \end{aligned}$$

quindi usando l'equazione scritta sopra e sostituendo arrivo alla conclusione:

$$\begin{aligned} [\sigma n, \sigma a] &= i(n \times a)\sigma \\ (\sigma n)(\sigma a)(\sigma n) &= \{(\sigma n), (\sigma a)\}(\sigma n) - (\sigma a)(\sigma n)(\sigma n) = (na)(\sigma n) - \sigma a = 2\sigma a_{\parallel} - \sigma a \\ &= \sigma a_{\parallel} - \sigma a_{\perp} \\ \sigma a' &= \sigma a_{\parallel} + \cos\phi\sigma a_{\perp} + \sin\phi(n \times a_{\perp})\sigma \end{aligned}$$

In altre parole, a' è la rotazione di a di un angolo ϕ attorno all'asse n. Se $a\sigma$ è un hamiltoniano (con $a \sim B$, proporzionale a un campo magnetico costante, per esempio), ciò è coerente con l'osservazione che $\langle H \rangle$ è indipendente dal sistema di riferimento scelto, a condizione che B venga ruotato in modo coerente. In questa considerazione, si può trascurare il contributo del momento angolare orbitale $\exp(-i\phi nL)$ alla rotazione, poiché L commuta con σB (per B costante), di conseguenza:

$$R^\dagger \exp(i\phi nL)\sigma B \exp(-i\phi nL)R = R^\dagger \exp(i\phi nL)\exp(-i\phi nL)\sigma BR = R^\dagger\sigma BR$$