Testo

Cohen-Tannoudji, Esercizio LIII.7

Sia $\psi(x, y, z) = \psi(\mathbf{r})$ la funzione d'onda normalizzata di una particella. Esprimere in termini di $\psi(\mathbf{r})$ la probabilità che:

(a) una misura dell'ascissa X fornisca un risultato compreso tra x_1 e x_2;

(b) una misura della componente P_x della quantità di moto fornisca un risultato compreso tra p_1 e p_2;

(c) misure simultanee di X e P_z forniscano:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad p_z \geq 0;$$

(d) misure simultanee di P_x, P_y, P_z forniscano:

$$p_1 \leq p_x \leq p_2, \quad p_3 \geq p_y \leq p_4, \quad p_5 \geq p_z \leq p_6.$$

Dimostrare che questa probabilità è uguale al risultato di (b) quando $p_3, p_5 \to -\infty$ e $p_4, p_6 \to +\infty$.

(e) una misura della componente $U = \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z)$ della posizione fornisca un risultato compreso tra u_1 e u_2.

Soluzione

Lo stato quantistico del sistema è rappresentato dal ket

$$|\psi\rangle = \psi(x, y, z) \, |x, y, z\rangle$$

dove $|x, y, z\rangle$ rappresenta un autostato degli operatori di posizione, tale che

$$\hat{X} \, |x, y, z\rangle = x \, |x, y, z\rangle \, , \quad \hat{Y} \, |x, y, z\rangle = y \, |x, y, z\rangle \, , \quad \hat{Z} \, |x, y, z\rangle = z \, |x, y, z\rangle$$

La densità di probabilità associata alla misura delle coordinate spaziali (x, y, z) è espressa da

$$\mathcal{P}(x, y, z) = \langle x, y, z|\psi|x, y, z|\psi\rangle = |\psi(x, y, z)|^2$$

(a)

Il quesito richiede di determinare la probabilità che una misura di X fornisca un valore compreso nell'intervallo $[x_1, x_2]$, senza specificare i valori di y e z. È necessario quindi integrare la densità di probabilità $\mathcal{P}(x, y, z)$ su tutti i possibili valori di y e z, e limitatamente all'intervallo $[x_1, x_2]$ per la variabile x:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(x \in [x_1, x_2]) &= \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \ \mathcal{P}(x, y, z) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \ |\psi(x, y, z)|^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

(b)

Per questo punto è necessario determinare la probabilità di misurare la componente x della quantità di moto nell'intervallo $[p_1, p_2]$. La densità di probabilità nello spazio della quantità di moto è data da:

$$\mathcal{P}(p_x, y, z) = |\left\langle p_x, y, z|\psi|p_x, y, z|\psi\right\rangle|^2$$

Per esprimere questa probabilità in termini della funzione d'onda nella rappresentazione delle coordinate, occorre effettuare una trasformazione di base. Inserendo l'operatore identità nella rappresentazione delle coordinate:

$$\begin{aligned}
\langle p_x, y, z|\psi|p_x, y, z|\psi\rangle &= \left\langle p_x, y, z \middle| \left(\int \left|x', y', z'\right\rangle \left\langle x', y', z'\right| \mathrm{d}x' \ \mathrm{d}y' \ \mathrm{d}z'\right) \middle| \psi \middle| p_x, y, z \middle| \left(\int \left|x', y', z'\right\rangle \left\langle x', y', z'\right| \mathrm{d}x' \ \mathrm{d}y' \ \mathrm{d}z'\right) \middle| \psi \right\rangle \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip_x x'} \delta(y - y')\delta(z - z')\psi(x', y', z') \ \mathrm{d}x' \ \mathrm{d}y' \ \mathrm{d}z' \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip_x x'} \psi(x', y, z) \ \mathrm{d}x'
\end{aligned}$$

La densità di probabilità risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(p_x, y, z) = |\left\langle p_x, y, z|\psi|p_x, y, z|\psi\right\rangle|^2 = \\
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-ip_x(x_a - x_b)} \psi(x_a, y, z)\psi^*(x_b, y, z) \, \mathrm{d}x_a \, \mathrm{d}x_b \qquad (2)
\end{aligned}$$

La probabilità richiesta è data dall'integrale:

$$\mathcal{P}(p_x \in [p_1, p_2]) = \int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathcal{P}(p_x, y, z)$$

(c)

Per determinare la probabilità di misure simultanee di X e P_z negli intervalli specificati, procedo in modo simile al caso precedente. La densità di probabilità per misure simultanee di x, y e p_z è data da:

$$\mathcal{P}(x,y,p_z) = |\,\langle x,y,p_z|\psi|x,y,p_z|\psi\rangle\,|^2 = \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-ip_z(z_a-z_b)}\psi(x,y,z_a)\psi^*(x,y,z_b)\,\mathrm{d}z_a\,\mathrm{d}z_b \quad (3)$$

La probabilità di ottenere valori di x nell'intervallo $[x_1,x_2]$ e valori di p_z nell'intervallo $[p_1,p_2]$ è espressa da:

$$\mathcal{P}(x\in[x_1,x_2],p_z\in[p_1,p_2]) = \int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}p_z\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\mathcal{P}(x,y,p_z)$$

Nel caso specifico in cui $p_z \geq 0$, la probabilità diventa:

$$\mathcal{P}(x\in[x_1,x_2],p_z\geq 0) = \int_{0}^{\infty}\mathrm{d}p_z\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\mathcal{P}(x,y,p_z)$$

(d)

In modo analogo ai casi precedenti, la densità di probabilità per la misura simultanea delle tre componenti della quantità di moto è data da:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(p_x,p_y,p_z) &= |\,\langle p_x,p_y,p_z|\psi|p_x,p_y,p_z|\psi\rangle\,|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-ip_x(x_a-x_b)}e^{-ip_y(y_a-y_b)}e^{-ip_z(z_a-z_b)} \\ &\quad\times\psi(x_a,y_a,z_a)\psi^*(x_b,y_b,z_b)\,\mathrm{d}x_a\,\mathrm{d}x_b\,\mathrm{d}y_a\,\mathrm{d}y_b\,\mathrm{d}z_a\,\mathrm{d}z_b \qquad (4)\end{aligned}$$

La probabilità di ottenere valori delle componenti della quantità di moto negli intervalli specificati è:

$$\mathcal{P}(p_x\in[p_1,p_2],p_y\in[p_3,p_4],p_z\in[p_5,p_6]) = \\ \int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}p_x\int_{p_3}^{p_4}\mathrm{d}p_y\int_{p_5}^{p_6}\mathrm{d}p_z\,\mathcal{P}(p_x,p_y,p_z) \quad (5)$$

Considero ora il limite per $p_3,p_5\to-\infty$ e $p_4,p_6\to\infty$. In questo caso:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}(p_x,p_y,p_z)\,\mathrm{d}p_z &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ip_z(z_a-z_b)}\chi(p_x,p_y,z_a)\chi^*(p_x,p_y,z_b)\,\mathrm{d}z_b\,\mathrm{d}z_a\,\mathrm{d}p_z \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\chi(p_x,p_y,z_a)^2\,\mathrm{d}z_a = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}(p_x,p_y,z_a)\,\mathrm{d}z_a\end{aligned}$$

dove χ rappresenta una funzione ausiliaria che può essere derivata dall'equazione precedente ed è indipendente da p_z. Procedendo in modo analogo per p_y, ottengo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)\, \mathrm{d}p_y\, \mathrm{d}p_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(p_x, y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Questo risultato dimostra che, integrando su tutti i possibili valori di p_y e p_z, si ottiene la stessa probabilità calcolata nel punto (b), ovvero la probabilità di misurare p_x nell'intervallo $[p_1, p_2]$. Tale risultato è una conseguenza del principio secondo cui, quando si integra su tutti i possibili valori di alcune osservabili, la probabilità risultante non dipende dalla base di rappresentazione scelta per tali osservabili.

(e)

Per determinare la probabilità che una misura della componente $U = \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z)$ fornisca un risultato nell'intervallo $[u_1, u_2]$, è necessario integrare la densità di probabilità sul dominio definito da tale condizione:

$$\mathcal{P}(u \in [u_1, u_2]) = \int_{D_u} \mathcal{P}(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

dove D_u rappresenta il dominio di integrazione definito dalla condizione $\sqrt{3}u_1 \leq x + y + z \leq \sqrt{3}u_2$. Per semplificare il calcolo dell'integrale, è opportuno effettuare una rotazione delle variabili di integrazione mediante la trasformazione

$$\begin{pmatrix} u \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dopo questo cambio di variabili:

$$\mathcal{P}(u \in [u_1, u_2]) = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{-\infty}^{+\infty} dw_1 dw_2 \mathcal{P}(u, w_1, w_2)$$

Il cambiamento di coordinate è una rotazione, quindi il Jacobiano è pari a uno. Diviene quindi palese che qualsiasi altra scelta di w_1 e w_2, normalizzati a lunghezza unitaria, ortogonali a u e tra loro, condurrebbe allo stesso risultato.