Trasformazioni di Parità

$$|\hat{x}\rangle = |-\hat{x}\rangle$$

Equivalente a scrivere:

$$\hat{\vec{x}} \to -\hat{\vec{x}}$$

Se applico di nuovo Π:

$$|-\hat{x}\rangle = \Pi|\hat{x}\rangle \quad \Rightarrow \quad \Pi^2|\hat{x}\rangle = |\hat{x}\rangle$$

Capisco quindi che:

$$\Pi^2 = \mathbb{I}$$

Gli autostati $\psi(x)$ si comportano come segue:

$$\psi_+(x) = \psi_+(-x), \quad \psi_-(x) = -\psi_-(-x)$$

Operatori Hermitiani e Parità

Dato un operatore Hermitiano A, posso scrivere:

$$\Pi^\dagger A \Pi = A \quad \Rightarrow \quad A \text{ pari}$$

$$\Pi^\dagger A \Pi = -A \quad \Rightarrow \quad A \text{ dispari}$$

Trasformazione di Parità su un'Autofunzione

Applico una trasformazione di parità:

$$\langle \psi | A | \psi \rangle \xrightarrow{\Pi} \langle \psi | \Pi^\dagger A \Pi | \psi \rangle$$

Suppongo di avere:

$$\langle \psi_+ | A | \psi_- \rangle \xrightarrow{\Pi} \langle \psi_+ | \Pi^\dagger A \Pi | \psi_- \rangle$$

Dato che:

$$\langle \psi_+ | \Pi^\dagger A \Pi | \psi_- \rangle = \langle \psi_+ | A | \psi_- \rangle$$

Per A_+ e A_-:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_+ A_+ \psi_- \, dx = 0$$

Ciò accade perché l'unico numero che è uguale a meno se stesso è lo 0.