Mathématiques R213 CR2 du 15/06/2023
R&T Saint Malo –FI1A
Tout document est interdit, la calculatrice est interdite. Durée : 1h
On numérotera les questions, mais on pourra les traiter dans l'ordre que l'on souhaite.

Rappel : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Ainsi $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Nom Prénom :

exercice 1 : On considère les deux matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Parmi les calculs suivants, faites ceux qui sont possibles, et expliquez pourquoi les autres ne sont pas possibles :

$A + 2I$ $A + B$ AB BA, A^2 B^2

exercice 2 :
Les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

Utilisez-les pour résoudre (*S*) le système d'équations suivant :

$$(S) \begin{cases} -2x - y + 4z = 1 \\ x - z = 2 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

exercice 3 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que la matrice A est nilpotente *(c'est-à-dire qu'il existe un entier n>0 tel que A^n =O).*
2) Soit la matrice $B = A + I$. Ecrire les coefficients de la matrice B.
3) Calculer $B \times (I - A + A^2)$. En déduire que B est inversible. Donnez les coefficients de l'inverse de B.
4) En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(A + I)^n$, pour tout entier n. En déduire l'expression de B^n sous la forme d'une somme de 3 matrices.
5) En déduire les coefficients de B^n

Tournez la feuille SVP →

exercice 4 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1{,}5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrez que $Q = P^{-1}$.
2) On appelle D la matrice $P^{-1}.A.P$. Vérifiez que la matrice D est une matrice <u>diagonale</u>.
3) En déduire les coefficients de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) Justifier que $A = PDP^{-1}$. Donnez, en justifiant, une relation entre A^n et D^n. En déduire que l'on a : $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2^n} - 2 & \frac{-3}{2^n} + 3 \\ \frac{2}{2^n} - 2 & \frac{-2}{2^n} + 3 \end{pmatrix}$
5) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1\ et\ v_0 = 2$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = -0{,}5u_n + 1{,}5v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

   Ecrivez ce système sous forme d'une relation matricielle faisant intervenir la matrice A.
6) En déduire une relation entre $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$
7) En déduire l'expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 = 1\ et\ v_0 = 2$. Quelles sont dans ce cas les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?