1 Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное и их свойства

Определение.
$a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\{d | \forall i \;\; a_i \,\vdots\, d\}$ d - общий делитель$(a_1, ..., a_n)$ НОД$(a_1, ...a_n) = max\, d$

s - общее кратное$(a_1, ..., a_n)$ НОК$(a_1, ...a_n) = min\, s$

1.1 Свойства НОД и НОК

Утверждение 1
$a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$

$m =$ НОК$(a_1, ..., a_n) \Rightarrow c \,\vdots\, m$
c - ОК$(a_1, ..., a_n)$

Доказательство:
$\urcorner$ c *не* $\vdots$ *на* m *(от противного)*
$c = qm + r$ $\quad 0 < r < m$
$\forall i \quad c \,\vdots\, a_i \quad m \,\vdots\, a_i$
$c - qm \,\vdots\, a_i$
$r \,\vdots\, a_i \quad r$ *- ОК*$(a_1, ..., a_n)$

Утверждение 2
$a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$
$d_1, ..., d_k$ *- все натуральные ОД* $(a_1, ..., a_n)$
НОД$(a_1, ..., a_n) =$ *НОК*$(d_1, ..., d_k)$

Доказательство:
$d_k =$ *НОД* $(a_1, ..., a_n)$
$a_i \,\vdots\, d_j$
$a_i \,\vdots$ *НОК* $(d_1, ..., d_k)$
$d_k \geq$ *НОК* $(d_1, ..., d_k)$
НОК$(d_1, ..., d_k) \,\vdots\, d_k$
НОК$(d_1, ..., d_k) \geq d_k$

Следствие 2-1:
$a_1 \,\vdots\, d$
$\ldots \quad \Rightarrow \quad$ *НОД* $(a_1, ..., a_n) \,\vdots\, d$
$a_n \,\vdots\, d$
Доказательство следствия:
НОК $(d_1, ..., d_k) \,\vdots\, d_i$
$\|$
НОД $(a_1, ..., a_n)$
Утверждение 3.

1. $a \,\vdots\, d,\; b \,\vdots\, d \Rightarrow$ *НОД* $(a, b) \,\vdots\, d$

2. $s \,\vdots\, a,\; s \,\vdots\, b \Rightarrow s \,\vdots$ *НОК* (a, b)

3. $\text{НОД}\,(a,b),\ \text{НОК}\,(a,b) = ab$

4. $bc \vdots a \quad \text{НОД}\,(a,b) = d \Rightarrow c \vdots \frac{a}{d}$

5. $bc \vdots a \quad \text{НОД}\,(a,b) = 1 \Rightarrow c \vdots a$

6. $\text{НОД}\,(ma, mb) = m\ \text{НОД}\,(a,b)$

7. $a \vdots d,\ b \vdots d \Rightarrow \text{НОД}\,(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{HOD(a,b)}{d}$

8. $\text{НОД}\,(a,b) = d \Rightarrow \text{НОД}\,(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

9. $\text{НОД}\,(a,b) = b \Leftarrow a \vdots b \quad a, b \in \mathbb{N}$

10. $\text{НОД}\,(a + kb, b) = \text{НОД}\,(a,b) \quad \forall k$

Доказательства:

1. *- следствие 2-1*

2. *- утверждение 1*

3. $$\left.\begin{array}{l} ab \vdots a \\ \\ ab \vdots b \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow \quad ab \vdots \text{НОК}\,(a,b) \qquad \frac{ab}{HOK(a,b)} - d \\ \frac{a}{d} = \frac{HOK(a,b)}{b} \in \mathbb{Z} \quad \frac{b}{d} = \frac{HOK(a,b)}{a} \in \mathbb{Z} \end{array}$$

   $\sqsupset d‘$ - $\text{ОД}\,(a,b)$

   $a \vdots d‘$

   $b \vdots d‘$

   $\frac{ab}{d‘} = \frac{a}{d‘} b \vdots b \qquad \frac{ab}{d‘} = \frac{b}{d‘} a \vdots a$

   $\frac{ab}{d‘} = k\ \text{НОК}\,(a,b) = k\frac{ab}{d} \mid \Rightarrow (a,b) = 1$ *и* $\text{НОД}\,(a,c) = 1$

   $d = kd‘ \vdots d‘$

   $|d| \geqslant |d‘|$

   $d = \text{НОК}\,(a,b)$

4. $bc \vdots a \qquad HOK(a,b) = \frac{ab}{d} \qquad HOD(a,b) = d$

   $$\left.\begin{array}{l} bc \vdots a \\ \\ bc \vdots b \\ \\ \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} bc \vdots HOK(a,b) \\ \\ \quad bc \vdots \frac{ab}{d} \\ \quad c \vdots \frac{a}{d} \end{array}$$

5. *без доказательтсва*

6. $a \vdots \text{НОД}\,(a,b)$

   $ma \vdots m\ \text{НОД}\,(a,b)$

   $mb \vdots m\ \text{НОД}\,(a,b)$

   $\text{НОД}\,(ma, mb) \vdots m\ \text{НОД}\,(a,b)$

   d - $\text{ОД}\,(ma, mb)$

   $\frac{mab}{d} = \frac{ma}{d} b = \frac{mb}{d} a$

$\frac{mab}{d}$ - *ОК* (a, b)

$\frac{mab}{d} \vdots$ *НОК* $(a, b) = \frac{ab}{HOK(a,b)}$

mab *НОД* $(a, b) \vdots abd$

m *НОД* $(a, b) \vdots d$

m *НОД* $(a, b) =$ *НОД* (ma, mb)

7. d *НОД* $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) =$ *НОД* (a, b) ***через 6***

8. *НОД* $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{HOD(a,b)}{d} = \frac{d}{d} = 1$

9. $a \vdots b$

   $b \vdots b$

   b - *ОД* (a, b)

   d - *ОД* (a, b) $\quad d > b$

   $b \vdots d$ $\quad b \geqslant d\,(?)$

10. $d =$ *НОД* (a, b)

    $b \vdots d$

    $a \vdots d$ $\quad a + kb \vdots d$

    d - *ОД*$(a + kb, b)$

    d‘ - *ОД*$(a + kb, b)$

    $a + kb \vdots d$‘

    $b \vdots d$‘

    $a + kb - kb \vdots d$‘

    $a \vdots d$‘

    d‘ - *ОД*(a, b)

    $d \geqslant d$‘

Утверждение 4.
НОД $(a, HOD(b, c)) =$ *НОД* (a, b, c)
Доказательство:
НОД $(b, c) = f$
НОД $(a, f) = g$

$a \vdots g$ $\quad \sqsupset d$ - *ОД* (a, b, c)

$b \vdots f \vdots g$ $\quad b \vdots d$

$\Rightarrow$ *НОД* $(f, c) \vdots d$

$c \vdots f \vdots g$ $\quad c \vdots d$ $\quad f \vdots d$

$\Rightarrow$ *НОД* $(a, f) \vdots d$

$c \vdots d$ $\quad g \vdots d$

Утверждение 5. *НОК* $(a,$ *НОК* $(b, c)) =$ *НОК* (a, b, c)
нет доказательства

1.2 Алгоритм нахождения НОД

1.2.1 Способ 1

Поиск всех возможных делителей двух чисел и в выбор наибольшего из них. Пример на числах 12 и 9.
$12 : 1 = 12$
$12 : 2 = 6$
$12 : 3 = 4$
$12 : 4 = 3$
$12 : 5 = 2$ *(2 остаток)*
$12 : 6 = 2$
$12 : 7 = 1$ *(5 остаток)*
$12 : 8 = 1$ *(4 остаток)*
$12 : 9 = 1$ *(3 остаток)*
$12 : 10 = 1$ *(2 остаток)*
$12 : 11 = 1$ *(1 остаток)*
$12 : 12 = 1$
Теперь для числа 9 сделаем то же самое.
$9 : 1 = 9$
$9 : 2 = 4$*(1 остаток)*
$9 : 3 = 3$
$9 : 4 = 2$*(1 остаток)*
$9 : 5 = 1$*(4 остаток)*
$9 : 6 = 1$*(3 остаток)*
$9 : 7 = 1$*(2 остаток)*
$9 : 8 = 1$*(1 остаток)*
$9 : 9 = 1$
Выпишем делите обоих чисел (те, что без остатка).
Делители числа 12 - (1 2 3 4 6 12)
Делители числа 9 - (1 3 9)
Согласно определению, НОДом чисел 12 и 9, является число, на которое 12 и 9 делятся без остатка.
НОДом чисел 12 и 9 является число 3.

1.2.2 Способ 2

Суть данного способа заключается в том, чтобы разложить оба числа на простые множители и перемножить общие из них. Пример на числах 24 и 18.

Разложим оба числа на множители.

24	*2*	*18*	*2*
12	*2*	*9*	*3*
6	*2*	*3*	*3*
3	*3*	*1*	
1			

Теперь перемножим их общие множители. Смотрим на разложение числа 24. Первый его множитель это 2. Ищем такой же множитель в разложении числа 18 и видим, что он там тоже есть.

Снова смотрим на разложение числа 24. Второй его множитель тоже 2. Ищем такой же множитель в разложении числа 18 и видим, что его там второй раз уже нет.

Следующая двойка в разложении числа 24 также отсутствует в разложении числа 18.

Переходим к последнему множителю в разложении числа 24. Это множитель 3. Ищем такой же множитель в разложении числа 18 и видим, что там он тоже есть.

Итак, общими множителями чисел 24 и 18 являются множители 2 и 3. Чтобы получить НОД, эти множители необходимо перемножить: $2 \times 2 = 6$

Значит НОД (24 и 18) = 6

1.2.3 Способ 3

Суть данного способа заключается в том, что числа подлежащие поиску наибольшего общего делителя раскладывают на простые множители. Затем из разложения первого числа вычеркивают множители, которые не входят в разложение второго числа. Оставшиеся числа в первом разложении перемножают и получают НОД. Рассмотрим на примере чисел 28 и 16.

В первую очередь, раскладываем числа 28 и 16 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Получили два разложения: $2 \times 2 \times 7$ *и* $2 \times 2 \times 2 \times 2$

Теперь из разложения первого числа вычеркнем множители, которые не входят в разложение второго числа. В разложение второго числа не входит семёрка. Её и вычеркнем из первого разложения.

Теперь перемножаем оставшиеся множители и получаем НОД: $2 \times 2 = 4$

Число 4 является наибольшим общим делителем чисел 28 и 16. Оба этих числа делятся на 4 без остатка:

$28 : 4 = 7$
$16 : 4 = 7$
НОД $(26, 4) = 4$

1.3 Алгоритм нахождения НОК

1.3.1 Способ 1

Можно выписать первые кратные двух чисел, а затем выбрать среди этих кратных такое число, которое будет общим для обоих чисел и маленьким. Рассмотрим на примере числа 9 и 12.

В первую очередь, найдем первые кратные для числа 9. Чтобы найти кратные для 9, нужно эту девятку поочерёдно умножить на числа от 1 до 9. Получаемые ответы будут кратными для числа 9.

$9 \times 1 = 9$
$9 \times 2 = 18$
$9 \times 3 = 27$
$9 \times 4 = 36$
$9 \times 5 = 45$
$9 \times 6 = 54$
$9 \times 7 = 63$
$9 \times 8 = 72$
$9 \times 9 = 81$

Теперь находим кратные для числа 12. Для этого поочерёдно умножим число 12 на все числа 1 до 12:

$12 \times 1 = 12$
$12 \times 2 = 24$
$12 \times 3 = 36$
$12 \times 4 = 48$
$12 \times 5 = 60$
$12 \times 6 = 72$
$12 \times 7 = 84$
$12 \times 8 = 96$
$12 \times 9 = 108$
$12 \times 10 = 120$
$12 \times 11 = 132$
$12 \times 12 = 144$

Теперь выпишем кратные обоих чисел:

9: 9 18 27 36 45 54 63 72 81

12: 12 24 36 48 60 72 84 96 108 120 132 144

Найдём общие кратные обоих чисел.

Общими кратными для чисел 9 и 12 являются кратные 36 и 72. Наименьшим же из них является 36.

Значит наименьшее общее кратное для чисел 9 и 12 это число 36. Данное число делится на 9 и 12 без остатка:

$36 : 9 = 4$

$36 : 12 = 3$

НОК(9 и 12) = 36

1.3.2 Способ 2

Второй способ заключается в том, что числа для которых ищется наименьшее общее кратное раскладываются на простые множители. Затем выписываются множители, входящие в первое разложение, и добавляют недостающие множители из второго разложения. Полученные множители перемножают и получают НОК.

Применим данный способ для предыдущей задачи. Найдём НОК для чисел 9 и 12.

Разложим на множители число 9 и 12:

9	3	12	2
3	3	6	2
1		3	3
		1	

Выпишем первое разложение и допишем множители из второго разложения, которых нет в первом разложении. В первом разложении нет двух двоек. Допишем и перемножим: $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$

Получили ответ 36. Значит наименьшее общее кратное чисел 9 и 12 это число 36. Данное число делится на 9 и 12 без остатка:

$36 : 9 = 4$

$36 : 12 = 3$

НОК (9 и 12) = 36

Говоря простым языком, всё сводится к тому, чтобы организовать новое разложение куда входят оба разложения сразу. Разложением первого числа 9 являлись множители 3 и 3, а разложением второго числа 12 являлись множители 2, 2 и 3.

Наша задача состояла в том, чтобы организовать новое разложение куда входило бы разложение числа 9 и разложение числа 12 одновременно. Для этого мы выписали разложение первого числа и дописали туда множители из второго разложения, которых не было в первом разложении. В результате получили новое разложение 3 × 3 × 2 × 2. Нетрудно увидеть воочию, что в него одновременно входят разложение числа 9 и разложение числа 12.

1.3.3 Способ 3

Он работает при условии, что его ищут для двух чисел и при условии, что уже найден наибольший общий делитель этих чисел.

Данный способ разумнее использовать, когда одновременно нужно найти НОД и НОК двух чисел.

К примеру, пусть требуется найти НОД и НОК чисел 24 и 12. Сначала найдем НОД этих чисел:

24	2	12	2
12	2	6	2
6	2	3	3
3	3	1	
1			

Теперь для нахождения наименьшего общего кратного чисел 24 и 12, нужно перемножить эти два числа и полученный результат разделить на их наибольший общий делитель.

Итак, перемножим числа 24 и 12. (288)

Разделим полученное число 288 на НОД чисел 24 и 12. (288 : 12 = 24)

Получили ответ 24. Значит наименьшее общее кратное чисел 24 и 12 равно 24
НОК(24 и 12) = 24.

2 Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД(?)

2.1 Алгоритм Евклида

$a, b \in \mathbb{N}$
НОД(a, b) *- ?*
while $b \neq 0$ $(a, b) = (b, a\%b)$
return a
НОД$(a, b) =$ *НОД*$(a + kb, b)$
$k = -[\frac{a}{b}]$
НОД$(a, b) =$ *НОД*$(a - [\frac{a}{b}]b, b) =$ *НОД*$(a\%b, b)$
$a \vdots b:$ *НОД*$(a, b) = b$

2.2 Бинарный алгоритм Евклида

$a, b \in \mathbb{N}$
$i = 0; j = 0;$
while $(!(a\&1))\{$
    $a \gg= 1;$
    $i++;$
$\}$
while $(!(b\&1))\{$
    $b \gg= 1;$
    $j++;$
$\}$
if$(a > b)\{t = a; a = b; b = t;\}$
while$(a! = 0)\{$
    $b- = a;$
    while $(!(b\&1))$ $b \gg= 1;$
    if $(a > b)\{$
        t = a;
        a = b;
        b = t;
    $\}$
$\}$
return $b \ll$ *std::min*$(i, j);$

2.3 Расширенный алгоритм Евклида

$a, b \in \mathbb{N}$
while $b \neq 0$
    $q = a/b$
    $(a, b) = (b, a - qb)$
    $(x, y) = (y, x - qy)$
    $a-$ *НОД*
    a, b
    $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$
while $b \neq 0$
    $q = a/b$

$(a, b) = (b, a - qb)$
$(x, y, u, v) = (u, v, x - qu, y - qv)$
return (a, x, y)

3 Континуанта

3.1 Определение

Введенные понятия цепной дроби и подходящих дробей оказываются очень полезными для анализа работы алгоритма Евклида. Дадим необходимые обозначения. Рассмотрим трехдиагональный определитель:

$$\begin{pmatrix} q_0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & q_1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & q_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & q_{n-1} \end{pmatrix} = K_n(q_0, q_1, ..., q_{n-1})$$

Определитель называют континуантой n-го порядка или индекса.

Континуанта индекса n есть многочлен $K_n(x_1, ..., x_n)$ определяемый рекуррентным соотношением:

$K_{-}1 = 0$, $K_0 = 1$

Разложим континуанту n-го порядка по последнему столбцу:

$K_n(x_1, ..., x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, ..., x_{n-2})$

Соотношение очень напоминает рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей. Это не случайно и две следующие леммы подтверждают предположение о связи континуант и цепных дробей.

3.2 Лемма 1

***Континуанта $K_n(q_0, q_1, ..., q_{n-1})$ равна сумме всевозможных произведений элементов $q_0, q_1, ..., q_{n-1}$, одно из которых содержит все эти элементы, а другие получаются из него выбрасыванием одной или нескольких пар сомножителей с соседними номерами (если выброшены все сомножители, то считаем, что осталась 1)**.*

Доказательство. Индукция по n. База индукции:

$$K_1(q_0) = q_0, K_2(q_0, q_1) = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ -1 & q_1 \end{pmatrix} = q_0 q_1 + 1$$

и утверждение леммы справедливо для континуант первого и второго порядков. Шаг индукции. Пусть утверждение леммы справедливо для континуант (n−2)-го и (n−1)-го порядков. Применив разложение , получим требуемое.

Пример

$K_6(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = q_0q_1q_2q_3q_4q_5 + q_2q_3q_4q_5 + q_0q_3q_4q_5 + q_0q_1q_4q_5 + q_0q_1q_2q_5 + q_0q_1q_2q_3 + q_4q_5 + q_2q_5 + q_0q_5 + q_2q_3 + q_0q_3 + q_0q_1 + 1$

Явная связь континуант и цепных дробей впервые была установлена Эйлером.

3.3 Лемма Эйлера

Справедливо тождество

$[q_0; q_1, ..., q_{n-1}] = \frac{K_n(q_0, q_1, ..., q_{n-1})}{K_{n-1}(q_1, q_2, ..., q_{n-1})}$

Доказательство. Индукция по n. База индукции:

$[q_0; q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{K_2(q_0, q_1)}{K_1(q_1)}$

Шаг индукции. Пусть тождество верно для дробей с n−1 звеном включительно. Представим n-звенную дробь $(q_0, q_1, ..., q_{n-1})$ дробью с n−1 звеном, где последнее звено имеет вид $q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}$. Применив к этой дроби индукционное предположение, с учетом разложения , имеем

$[q_0; q_1, ..., q_{n-1}] = [q_0, q_1, ..., q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}] = \frac{K_{n-1}(q_0, q_1, ..., (q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}))}{K_{n-2}(q_1, q_2, ..., (q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}))} = \frac{(\frac{1}{q_{n-1}})K_{n-2}(q_0, q_1, ..., q_{n-3}) + K_{n-3}(q_0, q_1, ..., q_{n-4})}{(\frac{1}{q_{n-1}})K_{n-3}(q_1, q_2, ..., q_{n-3}) + K_{n-4}(q_1, q_2, ..., q_{n-4})} = \frac{K_{n-1}(q_0, q_1, ..., q_{n-2}) + \frac{K_{n-2}(q_0, q_1, ..., q_{n-3})}{q_{n-1}}}{K_{n-2}(q_1, q_2, ..., q_{n-2}) + \frac{K_{n-3}(q_1, q_2, ..., q_{n-3})}{q_{n-1}}} = \frac{K_n(q_0, q_1, ..., q_{n-1})}{K_{n-1}(q_1, q_2, ..., q_{n-1})}$

Перейдем к анализу алгоритма Евклида. Нас будет интересовать наихудший случай — когда алгоритм Евклида работает особенно долго. Сформулируем вопрос точнее: для каких двух наименьших чисел надо применить алгоритм Евклида, чтобы он работал в точности заданное число шагов? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

3.4 Теорема Ламе

Пусть n *— произвольное натуральное число, и* $a > b > 0$ *такие, что алгоритму Евклида для обработки* a *и* b *необходимо выполнить точно n шагов (делений с остатком), причем a — наименьшее натуральное число с таким свойством. Тогда*

fi *=ф так как сайт шлёт нахуй с римскими буквами*

$a = fi_{n+2}, b = fi_{n+1}$

где $fi_k - k - e$ *число Фибоначчи.*

Доказательство. Разложим a/b в цепную дробь. Согласно лемме Эйлера получаем,

$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, ..., q_{n-1}] = \frac{K_n(q_0, q_1, ..., q_{n-1})}{K_{n-1}(q_1, q_2, ..., q_{n-1})}$

где $q_0; q_1, ..., q_{n-1}$ *— неполные частные из алгоритма Евклида. По условию теоремы, их ровно n. Принимая во внимание несократимость подходящих дробей становится очевидно, что континуанты* $q_0; q_1, ..., q_{n-1}$ *и* $q_1; q_2, ..., q_{n-1}$ *взаимно просты. Пусть D(a, b) = d. Тогда*

$$\begin{cases} a = K_n(q_0, q_1, ..., q_{n-1}) \\ b = K_{n-1}(q_1, q_2, ..., q_{n-1}) \end{cases} \tag{1}$$

В силу единственности разложения в цепную дробь, в случае a > b > 0 справедливы неравенства $q_0, q_1, ..., q_{n-2} > 1, q_{n-1} > 2$. *Очевидно, что d > 1. По лемме 1, континуанта есть многочлен с неотрицательными коэффициентами от переменных* $q_0, q_1, ...$ *Его минимальное значение очевидно достигается при* $q_0 = q_1 = \cdots = q_{n-2} = 1, q_{n-1} = 2$. *Положив d = 1 и подставив эти значения* q_i, *получим требуемое.*

4 Цепные дроби. Наилучшие приближения

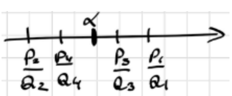
4.1 Бесконечные цепные дроби

$\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, ...]$

$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{... + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \cdots}}}} = \alpha$

$.. + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \cdots}} = \eta_n$

$\eta_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+1}, ...] \to \alpha = [a_0, a_1, ..., \eta_n]$



! α *между* $\frac{P_s}{Q_s}$ *и* $\frac{P_{s+1}}{Q_{s+1}}$

Доказательство:

$\alpha = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\eta_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$

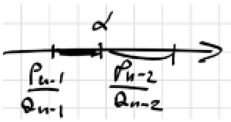
$1) \alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\eta_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\eta_n P_{n-1} Q_{n-1} + P_{n-2} Q_{n-1} - \eta_n P_{n-1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2}}{Q_{n-1}(\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2})} =$

$\frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(\eta_n Q_{n-1}+Q_{n-2})}$

$2)\alpha - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{\eta_n P_{n-1}+P_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1}+Q_{n-2}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{\eta_n P_{n-1}Q_{n-2}+P_{n-2}Q_{n-2}-\eta_n P_{n-2}Q_{n-1}-P_{n-2}Q_{n-2}}{Q_{n-2}(\eta_n Q_{n-1}+Q_{n-2})} =$

$= \frac{\eta_n(P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1})}{Q_{n-2}(\eta_n Q_{n-1}+Q_{n-2})} = \frac{\eta_n(-1)^{n-2}}{Q_{n-2}(\eta_n Q_{n-1}+Q_{n-2})}$

$3)|\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}| = \frac{Q_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1}}(<1)|\alpha - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}| \quad Q_{n-2} < Q_{n-1} \leq \eta_n Q_{n-1}| \to |\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}| < |\alpha - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}|$



$\to$ *Следствие:*$|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}| < \frac{1}{Q_n^2}$

Доказательство: $|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}| \leq |\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}$

$Q_{n+1} > Q_n$
$\frac{1}{Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n}$
Пример: $\sqrt{28} = 5 + (\sqrt{28}-5) = 5 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{28}-5}} = 5 + \frac{1}{\frac{\sqrt{28}+5}{3}} = 5 + \frac{1}{3+\frac{\sqrt{28}-4}{3}} = 5 + \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{28}-4}}}$

$\frac{3}{\sqrt{28}-4} = \frac{3(\sqrt{28}+4)}{12} = 2 + \frac{\sqrt{28}-4}{4} = |\frac{4}{\sqrt{28}-4}\frac{\sqrt{28}+4}{3} = 3 + \frac{\sqrt{28}-5}{3}|$
$\frac{3}{\sqrt{28}-5} = \sqrt{28}+5 = 10(\sqrt{28}-5)...$ *итого:* $\sqrt{28} = [5; 3, 2, 3, 10] = [5; (3, 2, 3, 10)]$

4.2 Цепные дроби. Непр. дроби

$[a_0, a_1, a_2, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{...+\frac{1}{a_n}}}}; a_0 \in Z; a_1, ..., a_n \in N; a_n > 1$

$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_1 + \frac{1}{q_2+\frac{r_2}{r_1}} = ... = [q_1, q_2, q_3, ..., q_{k+1}]$

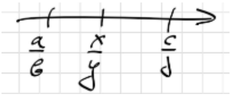
$-\frac{48}{109} = [-1, 1, 1, 3, 1, 2, 4]$
$-48 = 109(-1) + 61$
$109 = 61 * 1 + 48$
$61 = 48 * 1 + 13$
$48 = 13 * 3 + 9$
$13 = 9 * 1 + 4$
$9 = 4 * 2 + 1$
$4 = 1 * 4$
$\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n]$
Подходящая дробь
$\delta_k = [a_0, a_1, ..., a_k]$
$\delta_0 = [-1] = \frac{P_0}{Q_0}$
$\delta_1 = [-1, 1] = \frac{P_1}{Q_1}$
$\delta_2 = [-1, 1, 1] = \frac{P_2}{Q_2}$
$\delta_3 = [-1, 1, 1, 3] = \frac{P_3}{Q_3}$
$P_0 = Q_0 \ Q_0 = 1$
$\delta_0 = [a_0] = \frac{a_0}{0} = \frac{P_0}{Q_0}$
$\delta_1 = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1+1}{a_1} \quad P_1 = a_0 a_1 + 1 \ Q_1 = a_1$
$\delta_k = [a_0, a_1, ..., a_k] = \frac{P_k(a_0,...,a_k)}{Q_k(a_0,..,a_k)}$
$\delta_{k+1} = [a_0, a_1, ..., a_k, a_{k+1}] = [a_0, a_1, ..., a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] = \frac{P_k(a_0,...,a_k+\frac{1}{a_{k+1}})}{Q_k(a_0,..,a_k+\frac{1}{a_{k+1}})} =$

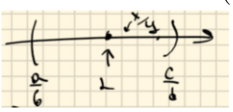
$= \frac{(a_k+\frac{1}{a_{k+1}})P_{k\text{-}1}+P_{k\text{-}2}}{(a_k+\frac{1}{a_{k+1}})Q_{k\text{-}1}+Q_{k\text{-}2}} == \frac{a_k q_{k+1}P_{k\text{-}1}+P_{k\text{-}1}+q_{k+1}P_{k\text{-}2}}{a_k q_{k+1}Q_{k\text{-}1}+Q_{k\text{-}1}+q_{k+1}P_{k\text{-}2}} = \frac{a_{k+1}(a_kP_{k\text{-}1}+P_{k\text{-}2})+P_{k\text{-}1}}{a_{k+1}(a_kQ_{k\text{-}1}+Q_{k\text{-}2})+Q_{k\text{-}1}} =$
$= \frac{a_{k+1}P_k+P_{k\text{-}1}}{a_{k+1}Q_k+Q_{k\text{-}1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \quad P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k\text{-}1}; \quad Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k\text{-}1}$

$\delta_2 = [a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1a_2+1} = \frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}$
$P_2 = a_0a_1a_2 + a_0 + a_3$
$Q_2 = a_1a_2 + 1$
$[-1; 1, 1, 3, 1, 2, 4]$
$k \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$
$a_n \quad\quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 4$
$P_n \quad 1 - 1 \quad 0 - 1 - 3 - 4 - 11 - 48$
$Q_n \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 7 \quad 9 \quad 25 \quad 109$
$\delta_0 = -1; \delta_1 = 0; \delta_2 = -\frac{1}{2}; \delta_3 = -\frac{3}{7}; \delta_4 = -\frac{4}{9}; \delta_5 = -\frac{11}{25}; \delta_6 = \alpha = -\frac{48}{109}$
Утв. $\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s\text{-}1}}{Q_{s\text{-}1}} = \frac{(-1)^{s+1}}{Q_sQ_{s\text{-}1}}$
Док-во: $\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s\text{-}1}}{Q_{s\text{-}1}} = \frac{P_sQ_{s\text{-}1}-P_{s\text{-}1}Q_s}{Q_sQ_{s\text{-}1}}$
$h_s = P_sQ_{s\text{-}1} - P_{s\text{-}1}Q_s = (a_sP_{s\text{-}1} + P_{s\text{-}2})Q_{s\text{-}1} - P_{s\text{-}1}(a_sQ_{s\text{-}1} + Q_{s\text{-}2}) = P_{s\text{-}2}Q_{s\text{-}1} - P_{s\text{-}1}Q_{s\text{-}2} =$
$= -(P_{s\text{-}1}Q_{s\text{-}2} - P_{s\text{-}2}Q_{s\text{-}1}) = -h_{s\text{-}1} = h_{s\text{-}2} = -h_{s\text{-}3} = ... = (-1)^{s-1}h_1 = (-1)^{s-1}(P_1Q_0 - P_0Q_1) = (-1)^{s-1}(a_0a_1 + 1 - a_0a_1) = (-1)^{s-1}$
Следствие: НОД$(P_s, Q_s) = 1$ *(все подходящие дроби несократимы/ взаим. просты)*
Следствие: $\lim_{s\to\infty} |\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s\text{-}1}}{Q_{s\text{-}1}}| = 0$ *(последов. подходящ. дробей фундамент.)*

4.3 Наилучшие приближения

$|\alpha - \frac{x}{y}|$

Опр. $\frac{a}{b}$ *- наилучш. приближ. к числу* α*, если не сущ. другой дроби* $\frac{x}{y}$*:* $\begin{cases} |\alpha - \frac{x}{y}| \le |\alpha - \frac{a}{b}| \\ 0 < y < b \end{cases}$
Утв. $\frac{x}{y} \in (\frac{a}{b}; \frac{c}{d})$ *и* $bc - ad = 1 \to y > b$ *и* $y > d$
Доказательство: $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd}$ *(по услов.)*


$\frac{bx-ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \le \frac{1}{bd}|bdy; \quad xbd - ady < y; \quad d \le (bx - ay)d < y$
$xbd \le (ad + 1)y; \quad y \ge \frac{xbd}{ad+1}; \quad cy - dx \ge 1$
$0 < \frac{c}{d} - \frac{x}{y} < \frac{1}{bd}; \quad 0 < \frac{cy-dx}{dy} < \frac{1}{bd}(\frac{cy-dx}{dy} \le \frac{1}{dy}); \quad \frac{1}{dy} < \frac{1}{bd}; b < y$
Следствие: $\alpha \in (\frac{a}{b}; \frac{c}{d})$ *и* $dc - ad = 1 \to$ *та из* $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$*, кто ближе к* α *- наилю приближение.*

Следствие: $\frac{P_s}{Q_s}$ *- наил. прибл к* α
$\frac{P_{s\text{-}1}}{Q_{s\text{-}1}}$ *и* $\frac{P_s}{Q_s}$ $: P_{s\text{-}1}Q_s - P_sQ_{s\text{-}1}$

5 Простые числа. Основная теорема арифметики.

5.1 Определение

$p \in \mathbb{N}$ *простое, если есть 2 натуральных делителя.*

5.2 Определение

$a \in \mathbb{N}$ *составное, если есть* > 2 *натуральных делителей*

5.3 Утверждение

p *- простое,* $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ *или* $b \vdots p$

5.3.1 Доказательство

Пусть a *не делится на* p*, НОД*(a, p) *= 1* $\Rightarrow b \vdots p$

5.4 Утверждение

НОД(a, b, c) *= 1 <=> НОД*(a, b) *= 1 и НОД*(a, c) *= 1*

5.4.1 Доказательство

$| => /$ *НОД*(a, b) = d

$a \vdots d$

$bc \vdots b \vdots d$

НОД$(a, b, c) \vdots d$

$1 \vdots d$

d = 1

$| <= |$ *НОД*$(a, b, c) = d$

$a \vdots d \vdots f \qquad a \vdots d \vdots \frac{d}{f}$

$bc \vdots d$

НОД$(b, d) = f \qquad c \vdots \frac{d}{f}$

$b \vdots f$

НОД$(a, b) \vdots f$

$1 \vdots f \qquad \frac{d}{f}$ = 1

$f = 1 \qquad d = 1$

5.5 Утверждение

НОД(a, b) *= 1*

$a \vdots b$*,* $a \vdots c \Rightarrow a \vdots bc$

5.5.1 Доказательство

$a \vdots$ *НОК*$(b, c) = \frac{bc}{gcd(a,b)} = bc$ *(gcd = НОД)*

5.6 Утверждение

НОД(b, c) = 1 => НОД(a, bc) = НОД(a, b)НОД(a, c)

5.6.1 Доказательсто

НОД(НОД(a, b), НОД(a, c)) = d

$b \vdots НОД(a, b) \vdots d$

$c \vdots НОД(a, c) \vdots d$

$НОД(b, c) \vdots d$

$d = 1$

$bc \vdots НОД(a, b), bc \vdots НОД(a, c) \Rightarrow bc \vdots НОД(a, b)НОД(a, c)$

$f - ОД(a, bc) \qquad a \vdots f \qquad bc \vdots f$

$НОД(a, b) = g, НОД(\frac{b}{g}, \frac{f}{g}) = 1 \qquad c \vdots \frac{f}{g}$

$a \vdots f \vdots g \qquad b \vdots g \qquad НОД(a, b) \vdots g$

$a \vdots f \vdots \frac{f}{g}, c \vdots \frac{f}{g} \Rightarrow$ *НОД(a, c)* $\vdots \frac{f}{g}$

$НОД(a, b)НОД(a, c) \vdots f$

5.7 Утверждение

$\forall a \in \mathbb{N},\ a > 1 \Rightarrow \exists\, p$ *простое* $a \vdots p$

5.7.1 Доказательство

$1, d_1, ..., d_k$ *- делители a*

d_1 *простое* $d_1 \vdots f \qquad a \vdots d_1 \vdots f$

5.8 Утверждение(основная теорема арифметики)

$\forall a \in \mathbb{N},\ a > 1, \qquad a = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_i = 0$

5.8.1 Доказательство

$a = a \qquad a = bc \qquad a = bc = p_1^{\beta_1}...p_1^{\beta_1}p_3^{\beta_3}...p_k^{\beta_k}$

$a = p_1^{\alpha_k}...p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1}...q_l^{\beta_l}$

$p_1 = q_1 a = p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1 - 2}...q_l^{\beta_l}$

5.9 Утверждение

$\alpha = p_1^{\gamma_1}...p_k^{\gamma_k} \qquad \beta = p_1^{\delta_1}...p_k^{\delta_k}$

$\gamma_i \geq 0 \qquad \delta_i \geq 0 \qquad p_i -$ *простое*

$НОД(\alpha, \beta) = p_1^{min(\gamma_1, \delta_1)}...p_k^{min(\gamma_k, \delta_k)}$

$НОК(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{max(\gamma_i, \delta_l)}$

5.9.1 Доказательство

$]d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{min(\gamma_i, \gamma_i)}$

$\alpha \vdots d,\ \beta \vdots d,\ ]d' - ОД(\alpha, \beta)$

$\alpha \vdots q_1^{\epsilon_1}...q_s^{\epsilon_s}$

$]|q_1 \neq p_1,\ q_1 \neq p_2, ..., q_1 \neq p$

$p_1^{\gamma_1}...p_k^{\gamma_k} \vdots q_1, НОД(p_1^{\gamma}, q_1) = 1 \Rightarrow\ p_2^{\gamma_2}...p_k^{\gamma_k} \vdots q_1 \Rightarrow p_k^{\gamma_k} \vdots q_1$

$d' = p_1^{\epsilon_1}...p_k^{\epsilon_k}$

$]|\epsilon_1 > \gamma_1 \quad \alpha \vdots d' \vdots p_1^{\epsilon_1} \quad p_1^{\gamma_1} \vdots p_1^{\epsilon}$
$p_1^{\gamma_1 - \epsilon} \in \mathbb{Z} \quad \gamma_1 - \epsilon \geq 0 \quad \epsilon_1 \leq \gamma_1 \quad \epsilon_1 \leq \delta_1 \quad \epsilon_1 \leq min(\gamma_1, \delta_1) \quad d' \leq d$
$НОД(\alpha, \beta) НОК(\alpha, \beta) = \alpha\beta$
$НОК(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{gcd(\alpha,\beta)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\gamma_i} p_i^{\delta_i}}{min(\gamma_i, \delta_i)} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{max(\gamma_i, \delta_i)}$

5.9.2 Пример

$24 = 2^3 * 3 * 5^0$
$90 = 2 * 3^2 * 5$
$НОД(24, 90) = 2^{min(3,1)} 3^{min(1,2)} 5^{min(0,1)} = 2^1 * 3^1 * 5^0 = 6$

6 Кольца вычетов. Полная система вычетов. Теорема о кольцах вычетов по простому модулю

6.1 Кольца вычетов

$< x, +, * >$

$$\textit{Кольцо}\begin{cases} \textit{Абелева группа}\begin{cases} \textit{Группа}\begin{cases} \textit{Полугруппа}\begin{cases} 1^\circ \quad (a+b)+c = a+(b+c) \end{cases} \\ 2^\circ \quad \exists 0 : a + 0 = a \\ 3^\circ \quad \forall a \quad \exists(-a) : a + (-a) = 0 \end{cases} \\ 4^\circ \quad a + b = b + a \end{cases} \\ 5^\circ \quad \begin{cases} (a+b)*c = (a*c)+(b*c) \\ c*(a+b) = (c*a)+(c*b) \end{cases} \end{cases}$$

6.1.1 Свойства колец

- *Кольцо ассоциативно:* $(a * b) * c = a * (b * c)$
- *Кольцо коммутативно:* $a * b = b * a$
- *Кольцо с единицей:* $\exists 1 : 1 * a = a$
- *Область целостности:* $\exists a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a * b \neq 0$

6.1.2 Примеры колец

- *Кольцо целых чисел* $\mathbb{Z}$*, кольцо рациональных чисел* $\mathbb{Q}$*, кольцо вещественных чисел* $\mathbb{R}$
- *Кольцо* $\mathbb{Z}[i]$ *целых гауссовых чисел вида* $a + bi$*, где* $a, b \in \mathbb{Z}$
- *Кольцо* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *вещественных чисел вида* $a + b\sqrt{2}$ *с целыми* a, b

6.1.3 Поле

Поле - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей в котором $\forall a \neq 0 \quad \exists a^{-1} : a * (a^{-1}) = 1$

6.1.4 Множество классов вычетов

Множество классов вычетов (обозначают $\mathbb{Z}_m$*) является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей*

6.1.5 Примеры полей

- *Числовые поля* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- *Поле* $\mathbb{Q}[i]$ *рациональных чисел вида* $a + bi$*, где* $a, b \in \mathbb{Q}$
- *Поле* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *вещественных чисел вида* $a + b\sqrt{2}$ *с рациональными* a, b

6.2 Полная система вычетов

Классом вычетов по модулю m называют множество чисел с одинаковым остатком при делении на m

6.2.1 Определение

Если взять по одному представителю из каждого класса вычетов, то эти m чисел образуют полную систему вычетов по модулю m

6.2.2 Примеры простейших полных систем вычетов

- $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ *наименьшие положительные вычеты*
- $\{0, -1, -2, \ldots, -(m-1)\}$ *наименьшие отрицательные вычеты*
- *для произвольного* $a \in \mathbb{Z} \quad \{a, a+1, a+2, \ldots, a+(m-1)\}$
- *если* $D(a, m) = 1$*, то* $\{0, a, 2a, \ldots, (m-1)a\}$

6.3 Теорема о кольцах вычетов по простому модулю

Китайская теорема об остатках утверждает, что система сравнений с попарно взаимно простыми модулями $m_1, m_2, \ldots, m_k$*:*

$$\begin{cases} x \equiv c_1 (mod\, m_1) \\ x \equiv c_2 (mod\, m_2) \\ \ldots \\ x \equiv c_k (mod\, m_k) \end{cases}$$

всегда разрешима и имеет единственное решение по модулю $(m_1 m_2 \ldots m_k)$

Другими словами, китайская теорема об остатках утверждает, что кольцо вычетов по модулю произведения нескольких попарно взаимно простых чисел является прямым произведением соответствующих множителям колец вычетов

6.3.1 Теорема

Если модуль m *- составное число, то* $\mathbb{Z}_m$ *не является полем*

Доказательство

Пусть $\quad m = p_1 p_2, \qquad 1 < p_1, p_2 < m$

Будем считать, что $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}_m$ *- классы вычетов, которым принадлежат* p_1, p_2*. Тогда:*

$P_1 P_2 = 0, \quad P_1, P_2 \neq 0$ *и элементы* P_1, P_2 *необратимы.*

Следовательно, $\mathbb{Z}_m$ *- не поле*

7 Линейные сравнения

Теорема: *Если НОД*$(a, b) = d$*, то уравнение* $a * x \equiv b \pmod m$ *имеет решение тогда и только тогда, когда* $b \vdots d$.

Доказательство ————————————————————

$\Rightarrow ax \equiv b \pmod m$*, то* $ax - b \vdots m \vdots d$*, так как* $ax \vdots d$ *и* $b \vdots d$.

$\Leftarrow \frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$

НОД $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ *и* $\left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)} \equiv 1 \pmod{\frac{m}{d}}$.

$\left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)} x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} \pmod m$

$x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$

$\left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \cdot \frac{b}{d} \equiv d \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)} \cdot \frac{b}{d} \pmod m = d\left[k\frac{m}{d} + 1\right]\frac{b}{d} = [km + d]\frac{b}{d} \equiv d\frac{b}{d} \pmod m = b.$

——————————————————————————

1)$ax \equiv b \pmod m$

НОД$(a, m) = 1!$ *решение*$\Rightarrow x \equiv a^{\phi(m)-1}b \pmod m$

2)*НОД*$(a, m) = d; b \vdots d$

$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$

$x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$, *где* $\left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} = x_0$

d реш: $\left[\begin{array}{l} x \equiv x_0 \pmod m \\ x \equiv x_0 + \frac{m}{d} \pmod m \\ x \equiv x_0 + (d-1)\frac{m}{d} \pmod m \end{array}\right.$

3)*НОД*$(a, m) = d; b \not\vdots d$ => $\emptyset$

4)$ax \equiv b \pmod m$

$ax - b \vdots m$

$ax - b = my$

$b = ax - my$

$x = x_0 + t\frac{m}{d}$

Утв: *p-простое*, $a < p$

Решение $x \equiv \frac{C_p^a}{p} * b * (-1)^k \pmod m$,*где k = a -1*

Доказательство:

$C_p^a = \frac{p!}{a!(p-a)!} = \frac{p(p-1)....(p-a+1)}{1*2...a}$

$\frac{C_p^a}{p} == \frac{p(p-1)....(p-a+1)}{1*2...(a-1)a}$

$(p-1)(p-2)...(p-a+1) \equiv (-1)(-2)....(-a+1) = (-1)^k * 1 * 2.... * (a-1)$,*где k=a-1*

$a\frac{C_p^a}{p} \equiv (-1)^k \pmod p$,*где k=a-1*

$ab\frac{C_p^a}{p} * (-1)^k \equiv b \pmod p$,*где k=a-1*

Теорема Критерий Вильсона

p-простое $<=> (p-1)! \equiv -1 \pmod p$

Доказательство:
$| => |(p-1)! = 1(p-1)$
$a^2 \equiv 1 \pmod{p}$
$a^2 - 1 \vdots p$
$(a-1)(a+1) \vdots p$

$$\left[\begin{array}{l} a-1 \equiv p \\ a+1 \equiv p \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} a \equiv 1 \pmod{p} \\ a \equiv -1 \pmod{p} \end{array}\right. \quad | <= |p\text{- не простое } p = mn$$

$(p-1)! \vdots m$
$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
$(p-1)! + 1 \vdots m \vdots p$

Теорема Китайскаяя теорема об остатках
$m_1, .., m_n$*- попарно взаимно простые*

$$d \text{ имеет ! реш: } \begin{cases} x \equiv C_1 \pmod{m1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv C_n \pmod{m_n} \\ \qquad\qquad\qquad . \end{cases}$$

$x \equiv C \pmod{M}$*, где*$M = m_1, ...m_n$

Доказательство:
$M_i = \frac{M}{m_i}$

НОД$(M_i, m_i) = 1$

$x * M_i \equiv 1 \pmod{m_i} => x \equiv a_i \pmod{m_i}$

$x = \sum_{i=1}^{n} M_i * a_i * C_i \equiv M_i * a_i * C_i \pmod{m_i} \equiv C_i \pmod{m_i}$
$|!| x \not\equiv y \pmod{M}$
$x \equiv C_i \pmod{m_i} \equiv y \pmod{m_i}$
$x - y \vdots m_i => x - y \vdots M$
$x = (C_1, ...C_n)$*-китайский код числа X*
$y = (d_1, ..d_n)$
$x + y = (C_1 + d_1, ...C_n + d_n)$

8 Функция Эйлера и её свойства

8.1 Определение

Функция Эйлера $\varphi(n)$ ставит в соответствие каждому натуральному n количество чисел, меньших n и взаимно простых с n. Будем полагать $\varphi(1) = 1$.

8.2 Свойства

1. $p \in P : \varphi(p) = p - 1$, *- Функция Эйлера для простого числа*

2. $p \in P : k \in N : \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, *- Функция Эйлера для простого числа в степени*

3. $\exists$*НОД*$(a, b) = 1 => \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, *при* $a, b \in \mathbb{N}$ *- мультипликативность функции Эйлера*

8.3 Утверждение

Для простого p *значение функции Эйлера задаётся формулой:*

$$\varphi(p) = p - 1,$$

которая следует из определения. Если p *- простое, то все числа, меньшие* p*, взаимно просты с ним, а их ровно* $p - 1$ *штук.*

Для вычисления функции Эйлера от степени простого числа используют следующую формулу:

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

Доказательство. Подсчитаем количество чисел от 1 *до* p^n*, которые не взаимно просты с* p^n*. Все они, очевидно, кратны* p*, то есть, имеют вид:* $p, 2p, 3p, \ldots, p^{n-1}p$*. Всего таких чисел* p^{n-1}*. Поэтому количество чисел, взаимно простых с* p^n*, равно* $p^n - p^{n-1}$*.*

8.4 Следствие

Если НОД$(a, b) = 1$*, тогда* $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$*.*

Доказательство. В полной системе вычетов по модулю a *существует* $\varphi(a)$ *значений* x*, таких, что НОД*$(a, x) = 1$*. Также и для полной системы вычетов по модулю* b *существует* $\varphi(b)$ *значений* y*, таких, что НОД*$(b, y) = 1$*. Следовательно, всего имеется* $\varphi(a)\varphi(b)$ *значений* z*, взаимно простых с* ab*. Но значения* z *образуют полную систему вычетов по модулю* ab*, и чисел, взаимно простых с* ab*, в ней* $\varphi(ab)$*.*

8.4.1 Пример

Для иллюстрации доказательства следствия составлена таблица 1 величин (x,y) при $a = 4$ *и* $b = 5$*. Возможные значения для x - числа* $0, 1, 2, 3$*, возможные значения для y - числа* $0, 1, 2, 3, 4$*. Из них для* x *имеется два значения (1 и 3) взаимно простых с a (так как* $\varphi(4) = 2$*). Соответственно для* y *также есть четыре значения (1,2,3 и 4) взаимно простых с b (так как* $\varphi(5) = 4$*). Эти значения помещены в кружочки, как и соответствующие им значения* $z = ay + bx$*.*

Выделенные значения z *дают 8 чисел, меньших 20 и взаимно простых с ним, Таким образом:*

$$\varphi(20) = \varphi(4)\varphi(5) = 2 * 4 = 8.$$

	y				
x	0	1	2	3	4
0	0	4	8	12	16
1	5	9	13	17	1
2	10	14	18	2	6
3	15	19	3	7	11

Таблица 1: **Доказательство мультипликативности**

8.5 Следствие

Всякое натуральное число n>1 представляется в виде:

$$n = p_1^{\alpha_1} * \dots * p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1 < \dots < p_k$ *- простые числа,* $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$ *- натуральные числа.*

Тогда $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) * p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) * \dots = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) * \left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right)$

8.5.1 Пример

Для доказательства следствия приведён пример вычисления:

1. $\varphi(49) = \varphi(7^2) = 7^2 - 7 = 42,$
2. $\varphi(30) = \varphi(2 * 3 * 5) = \varphi(2)\varphi(3)\varphi(5) = (2-1)(3-1)(5-1) = 8,$
3. $\varphi(60) = 60\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) * \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) * \left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 16.$

8.6 Следствие

Функция Эйлера $\varphi(n)$ *принимает только чётные значения при* $n > 2$. *Причём, если* n *имеет* k *различных нечётных простых делителей, то* $2^k \mid \varphi(n)$.

Доказательство. Если $\exists p > 2$ *и* p *- простое число, тогда*

$$\varphi(n) \vdots (p-1) \vdots 2.$$

Тогда если $n = 2^k$, *то*

$$\varphi(n) = 2^k\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{k-1} \vdots 2.$$

8.7 Теорема Формула Гаусса

8.8 Определение

Пусть d пробегает все делители числа m. Тогда

$$m = \sum_{d|m} \varphi(d).$$

Доказательство. $\sqsupset$ p *- простое число. Тогда*

$$\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1).$$

Таким образом

$$1 + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \dots + \varphi(p^\alpha) = 1 + (p-1) + \dots + (p^\alpha - p^{\alpha-1}) = p^\alpha$$

Пусть $m = p_1^{\alpha_1} * \dots * p_k^{\alpha_k}$, *тогда*

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + \varphi(p_i) + \dots + \varphi(p_i^{\alpha_i})) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} = m.$$

Исходя из этого

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\alpha_i}\varphi(p_i^j) = \sum_{\substack{0 \le j_1 \le \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \le j_k \le \alpha_k}} \varphi(p_1^{j_1}) * \varphi(p_2^{j_2}) * \dots * \varphi(p_k^{j_k}) = \sum_{\substack{0 \le j_1 \le \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \le j_k \le \alpha_k}} \varphi(p_1^{j_1}) * \dots * p_k^{j_k}) = \sum_{d|m}\varphi(d)$$

8.8.1 Пример

$$\sum_{d|30}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(5)+\varphi(6)+\varphi(10)+\varphi(15)+\varphi(30)=1+1+2+4+2+4+8+8=30$$

8.9 Теорема Эйлера

Пусть НОД$(a,m)=1$*, тогда* $a^{\varphi(m)}\equiv_m 1$.

Доказательство. Пусть НОД$(a,m)=1$*. Тогда классов вычетов взаимно простых с* m *будет* $\varphi(m)$*. Пусть* $\{x_1,x_2,\dots,x_{\varphi(m)}\}$ *- представители классов, то* $\{ax_1,ax_2,\dots,ax_{\varphi(m)}\}$ *будут также взаимно просты с* m*. Также, если* $ax_i\equiv_m ax_j$*, то* $x_i\equiv_m x_j$*. Следовательно, числа* ax_i *- также представители классов вычетов, взаимно простых с* m*. Тогда каждое* ax_i *сравнимо с одним и только одним* a_j*.*

$$x_i*\dots*x_{\varphi(m)}\equiv_m ax_i*\dots*ax_{\varphi(m)}.$$

После сокращения получаем нужное сравнение:

$$1\equiv_m a^{\varphi(m)}.$$

8.10 Следствие: Малая теорема Ферма

Если p *- простое число, то* $a^p\equiv_p a$

Доказательство.

Если НОД$(a,p)=1$*, то* $a^{\varphi(p)}\equiv_p 1$*,* $a^{p-1}\equiv_p 1$*,* $a^p\equiv_p a\equiv_p 0$.

Если $a\,\vdots\,p$*, то* $a\equiv_p 0$*,* $a^p\equiv_p a\equiv_p 0$.

8.11 Следствие

Если p - простое число, то $(a+b)^p\equiv_p a^p+b^p$

Доказательство. $(a+b)^p\equiv_p a+b\equiv_p a^p+b^p$

8.12 Следствие

Если

$$\left.\begin{aligned} a\equiv_m b\\ c\equiv_{\varphi(m)} d\\ \text{НОД}(a,m)=1\end{aligned}\right| => a^c\equiv_m b^d$$

Доказательство. $a^c\equiv_m b^c\equiv_m b^{k\varphi(m)+d}=(b^{\varphi(m)})^k*b^d\equiv_m b^d$

$c\equiv_{\varphi(m)} d => c=k\varphi(m)+d$

НОД$(a,m)=1 =>$ *НОД*$(b,m)=1$

НОД$(a,m)=$ *НОД*$(a-\widetilde{k}m,m)$

8.12.1 Пример

$25^{11^{35}}\equiv_{34}(-9)^3=81*(-9)\equiv_{34}-13*9=-117\equiv_{34}19$

НОД$(25,34)=1$

$11^{35}\equiv_{16}11^3\equiv_{16}(-5)^3=-125\equiv_{16}3$

$\varphi(34)=34\left(1-\dfrac{1}{2}\right)*\left(1-\dfrac{1}{17}\right)=16$

НОД$(11,16)=1$

$\varphi(16)=8$

$35\equiv_8 3$

9 Система шифрования RSA

Определение 1: *Функция f называется односторонней, если для любого x существует эффективный алгоритм вычисления $f(x)$, но не существует эффективного алгоритма решения уравнения $f(x) = a$.*

Определение 2: *Функция $f_k(x)$ называется функцией с секретом, если для любого k и x существует эффективный алгоритм вычисления $f_k(x)$, такой что $f_k(x) = a$, но не существует эффективного алгоритма решения уравнения $f_k(x) = a$. Однако, если значение k известно, то существует эффективный алгоритм решения уравнения $f_k(x) = a$.*

RSA, разработанная Райвестом, Шамиром и Адлеманом, определяется функцией $f(x) = x^e \mod m$, где m - произведение двух больших простых чисел p и q. Для выбора открытого ключа e необходимо выбрать число, взаимно простое с функцией Эйлера $\varphi(m) = (p-1)(q-1)$. Закрытый ключ d находится из уравнения $e \cdot d \equiv 1 \mod \varphi(m)$.

Для шифрования сообщения x отправитель (Алиса) использует открытый ключ (m, e) получателя (Боба) и преобразует сообщение в зашифрованное сообщение c с помощью формулы $c \equiv x^e \mod m$. Зашифрованное сообщение c отправляется Бобу.

Для расшифровки сообщения Боб использует свой закрытый ключ d и преобразует зашифрованное сообщение c обратно в исходное сообщение x с помощью формулы $x \equiv c^d \mod m$.

RSA также может использоваться для создания электронных подписей. Электронная подпись используется для подтверждения подлинности и целостности данных. Она создается путем хеширования сообщения и шифрования полученного хеша закрытым ключом отправителя. Получатель может проверить подлинность сообщения, расшифровав подпись с помощью открытого ключа отправителя и сравнив полученный хеш с хешем исходного сообщения.

10 Определение деления многочленов с остатком. Теорема Безу. Схема Горнера

10.1 Определение деления многочленов с остатком:

10.2 Определение:

Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, $g(x) \neq 0$ существуют $q(x)$ и $r(x)$, такие что: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, при этом степень $r(x)$ строго меньше степени $g(x)$

10.3 Свойства:

- $f(x) \div g(x), g(x) \div h(x) \Rightarrow f(x) \div h(x)$
- $f(x) \div g(x), g(x) \div h(x) \Rightarrow f(x) \pm g(x) \div h(x)$
- $f(x) \div h(x) \Rightarrow f(x)g(x) \div h(x)$
- $f(x) \div c, c \neq 0$
- $f(x) \div g(x) \Rightarrow f(x) \div cg(x), c \neq 0$

10.4 Теорема Безу:

10.4.1 Теорема:

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен значению многочлена $P(a)$

10.4.2 Доказательство:

$P(x) = (x\text{–}a)Q(x) + r$, следовательно, $P(a) = r$

10.4.3 Следствие:

$P(x)\vdots(x-a) \Rightarrow P(a) = 0$

10.5 Схема Горнера:

10.5.1 Определение:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
$P(x) = (x-b)Q(x) + r$
$Q(x) = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + ... + C_1 x + C_0$
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = (x-b)(C_{n-1}x^{n-1} + ... + C_0) + r$
$x^n : a_n = C_{n-1}$
$x^{n-1} : a_{n-1} = C_{n-2} - bC_{n-1}$
$x^{n-2} : a_{n-2} = C_{n-3} - bC_{n-2}$
.
.
.
$x : a_1 = C_0 - bC_1$
$x^0 : a_0 = r - bC_0$
$C_{n-1} = a_{n-1}$
$C_i = bC_{i+1} + a_{i+1}$
.
.
.
$r = bC_0 + a_0$

10.5.2 Пример:

Найти остаток от деления $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$ *на* $x - 2$
$b = 2$

a_n	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
b	C_3	C_2	C_1	C_0	r

Далее подставив значения мы можем найти $C_{n-1}...C0$ *и* r

a_n	1	0	-3	1	-5
2	C_3	C_2	C_1	C_0	r

Используя формулу $C_{n-1} = b * C_{n-1} + a_{n-1}, C_{n-1} = a_n$ *получим*

a_n	1	0	-3	1	-5
2	1	2	1	3	1

Ответ $p(x) = (x_3 + 2x_2 + x + 3)(x-2) + 1$

11 Интерполяционная формула Лагранжа

11.1 Формула Лагранжа

$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$
$l_i(x) = \frac{x-x_0}{x_i-x_0} \times \frac{x-x_1}{x_i-x_1} \times ... \times \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \times \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$

11.2 Пример

Найти многочлен $P(x)$ минимальной степени, используя формулу Лагранжа:
$P(-3) = -36$
$P(0) = -9$
$P(5) = -44$
Для удобства пронумеруем многочлены от 0 до 2, где $P_0(-3)$, $P_1(0)$, $P_2(5)$
$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \times \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-0}{-3-0} \times \frac{x-5}{-3-5} = \frac{x(x-5)}{(-3)*(-8)} = \frac{x(x-5)}{24}$
$l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \times \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x+3}{0+3} \times \frac{x-5}{0-5} = \frac{(x+3)(x-5)}{3*(-5)} = \frac{(x+3)(x-5)}{-15}$
$l_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \times \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x+3}{5+3} \times \frac{x-0}{5-0} = \frac{x(x+3)}{5*8} = \frac{x(x+3)}{40}$
Обозначим многочлен минимальной степени $L(x)$:
$L(x) = -36\frac{x(x-5)}{24} + (-9)\frac{(x+3)(x+5)}{-15} + (-44)\frac{x(x+3)}{40}$
Чтобы найти многочлен минимальной степени, преобразуем многочлен к стандартному виду:
$L(x) = -\frac{3}{2}x(x-5) + \frac{3}{5}(x+3)(x-5) - \frac{11}{10}x(x+3) =$
$= -\frac{3}{2}(x^2-5x) + \frac{3}{5}(x^2+3x-5x-15) - \frac{11}{10}(x^2+3x) =$
$= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - 9 - \frac{11}{10}x^2 - \frac{33}{10}x =$
$= \frac{-15+6-11}{10}x^2 + \frac{75-12-33}{10}x - 9 = -2x^2 + 3x - 9$
Итоговый вид многочлена: $L(x) = -2x^2 + 3x - 9$

12 (Билет 12) Разложение многочленов на свободные от квадратов множетели.

12.1 Определение:

Пусть K - поле
$P(x) \in K[x]$ ***неприводим*** *if не $\exists$ нетривиальный делитель: не $\exists$ $Q(x) \in K[x] : 0 < deg(Q) < deg(P)$ и*
$P(x) \vdots Q(x)$;
$P(x) \vdots$ C
$P(x) \vdots cP(x)$
$x^2 - 2$ *над* $\mathbb{Q}$
$\exists| \; x^2 - 2 \vdots x - a$
$a^2 - 2 = 0$
$a^2 = 2$
$x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
То есть
$x^2 + 1$ *над* $\mathbb{Q}$ ***неприводим!***
над $\mathbb{R}$ ***неприводим!***
$x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ *над* $\mathbb{C}$
$x^2 + 1 = (x^2+1)$ *над* $\mathbb{Z}$

12.2 Определение: $P(x)$ свободный от квадратов

не $\exists$ $Q(x)$: $deg(Q) > 0$
$P(x) \vdots Q(x)^2$
$P(x) = P_1(x)P_2(x)^2P_3(x)^3...P_n(x)^n$
$P_1(x),...,P_n(x)$ *попарно взаимно/пр. и свободны от квадратов*

12.3 Утверждение: $P(x) = Q(x)^k M(x)$

$NOD(Q(x), M(x)) = 1$ *и* $Q(x)$ *неприводим =>* $P'(x) = Q(x)^{k-1}N(x)$
$NOD(Q(x), N(x)) = 1$
Доказательство:
$P'(x) = kQ(x)^{x-1}Q'(x)M(x) + Q(x)M'(x)$
$P'(x) = Q(x)^{x-1}(kQ'(x)M(x) + Q(x)M'(x))$
$kQ'(x)M(x) = N(x) - Q(x)M'(x) \vdots Q(x)$
$kQ'(x) \vdots Q(x)$ *?! Противоречие*
Это работает при Z_k *k характ поля, p - характ. k if* $\forall a \in K a + a + ... + a = 0$
K*-поле характеристики ноль*

12.4 Следствие:

$P(x) = Q_1(x)^{k_1}...Q_m(x)^{k_n}$,$Q_i$*- неприводимы =>* $P'(x) = Q_1(x)^{k_1-1}...Q_m(x)^{k_n-1}$,$Q$ *вз./пр. с* Q_i
Доказательство:
$P'(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} K_i Q_1(x)^{k_1}...Q_m(x)^{k_n}Q_i'(x) = Q_1(x)^{k_1-1}...Q_m(x)^{k_m-1}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{k_i Q_1(x)...Q_m(x)}{Q_i(x)}Q_i'(x)$
$NOD(Q_1, Q_i) \neq 1$
$NOD(Q_1, Q_i) = Q_i$
$Q \vdots Q_i$
$Q(x) = k_1 Q_2 Q_3 ... Q_m Q_1' + k_2 Q_1 Q_3 ... Q_m Q_2' + ... + ... Q_{m-1} Q_m' \vdots Q_i$
$k_i Q_i' \vdots Q_i$
$Q_i' \vdots Q_i =>$ *Противоречие*

12.5 Алгоритм разложения на свободные от квадратов множ.:

На языке программирования питон:
$j = 1$
$while\ degP > 0$
$p' = diff(P)$
$S = NOD(P, P')$
$r = \frac{P}{S}$
$t = NOD(r, P')$
$P_j = \frac{r}{t}$
$P := \frac{P}{r}$
$j++$
$return\ P_1 P_2^2 ... P_{j-1}$

Где:

$P = P_1 P_2^2 P_3^3 ... P_n^n$
$P' = P_2 P_3^2 ... P_n^{n-1}$
$NOD(P, P') = P_2 P_3^2 ... P_n^{n-1}$
$r = \frac{P}{NOD(P,P')} = P_1 P_2 ... P_n$
$NOD(r, P') = P_2 ... P_n$
$\frac{r}{NOD(r,P')} = P_1$

Пример:
$P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
$P'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$NOD(P(x), P'(x)) = x + 1 = S(x)$
$r(x) = P/S = x^2 - 1$
$NOD(r, P') = x + 1 = t(x)$
$P_1 = x - 1$
new $P = x + 1$
$P' = 1$
$S = 1$
$r = x + 1$
$t = 1$
$P_2 = x + 1$
$P(x) = P_1(x)P_2(x)^2P_3(x)^3...P_n(x)^n$
$P_1(x), ..., P_n(x)$ *попарно вз./пр. и свободные от квадратов множетели*

12.6 $P(x) \in \mathbb{Z}P(x) \vdots x - \frac{p}{q}$ $NOD(p, q) = 1 => a_n \vdots q$, где $p(v) = a_n(x^n) + ... + a_0$

12.7 Теорема Безу

$P(x) \vdots x - \frac{p}{q} => p(\frac{p}{q} = 0)$
Доказательство:
$\frac{a_n P^n}{q_n} + \frac{a_{n-1} P^{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{a_1 P}{q} + a_0 = 0$
$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} q + ... + a_n P q^{n-1} + a_0 q^n = 0$
$a_n p^n \vdots q => a_n \vdots q$
$a_0 p^n \vdots p => a_0 \vdots q$

12.8 Критерий Эзерштейна

$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$
$P(x) = a_n x^n + ... + a_0$
$a_{n-1} \vdots P, a_{n-2} \vdots P, ..., a_0 \vdots P$ *и* a_n *не*$\vdots P =>$ *неприводима над* Q
Доказательство:
Пусть $P(x) = f(x)g(x)$
$f(x) = b_m x^m + ... + b_0$
$g(x) = C_{n-m} x^{n-m} + ... + C_0$
$P(x) = a_n x^n + ... + a_0 = (b_m x^n + ... + b_0)(C_{n-m} x^{n-m} + ... + C_0)$
$a_0 = b_0 C_0 \qquad b_0 \vdots P$
. $\qquad C_0$ *не*$\vdots P$
$a_1 = b_0 C_2 + b_1 C_1 + b_2 C_0 => b_2 \vdots P$
$a_m = b_n C_m + ... + b_m C_0 => b_{n-1} \vdots P$

13 Неприводимые многочлены. Поля Галуа

13.1 Неприводимые многочлены

13.1.1 Определение

Пусть K *— поле. Тогда* $P(x) \in K[x]$ *неприводим, если не существует нетривиальный делитель* $Q(x) \in K[x]$*, такой, что его степень больше 0, меньше степени многочлена* P *и* $P(x)$ *делится на* $Q(x)$*:*

$$\nexists Q(x) \in K[x] : 0 < \deg Q < \deg P \text{ и } P(x) \vdots Q(x)$$

13.1.2 Определение

$P(x)$ свободный от квадратов, если не существует $Q(x)$, такой, что $\deg Q >$ и $P(x)\vdots Q^2(x)$.

13.1.3 Утверждение

$P(x) = Q^k(x)M(x)$

НОД$(Q(x), M(X)) = 1$ *и* $Q(x)$ *неприводим* $\Rightarrow P'(x) = Q^{k-1}(x)N(x)$

НОД$(Q(x), N(x)) = 1$

13.1.4 Доказательство

$P'(x) = kQ^{k-1}(x)Q'(x)M(x) + Q^k(x)M'(x)$

$P'(x) = Q^{k-1}(x)(kQ'(x)M(x) + Q(x)M'(x))$, *где* $kQ'(x)M(x) + Q(x)M'(x) = N(x)$

$kQ'(x)M(x) = N(x) - Q(x)M'(x) \vdots Q(x)$

$kQ'(x) \vdots Q(x)$ — *противоречие*

$\deg Q' = \deg Q - 1$

Это работает при $\mathbb{Z}_k$ *(k $\not\vdots$ характериситку поля).*

13.1.5 Следствие

$P(x) = Q_1^{k_1}(x)...Q_m^{k_m}(x)$, Q_i — *неприводимы* $\Rightarrow$ $P'(x) = Q_1^{k_1-1}(x)...Q_m^{k_m-1}Q(x)$, Q *взаимно прост с* Q_i

13.1.6 Критерий Эйзенштейн

$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$P(x) = a_n x^n + ... + a_0$

$a_{n-1}\vdots p,\ a_{n-2}\vdots p,\ ..., a_0 \vdots p,\ a_n \not\vdots p \Rightarrow$ *неприводима над* Q

13.1.7 Доказательство

Рассмотрим $P(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = b_m x^m + ... + b_0$

$g(x) = c_{n-m}x^{n-m} + ... + c_0$

$p(x) = a_n x^n + ... + a_0 = (b_m x^m + ... + b_0) \cdot (c_{n-m}x^{n-m} + ... + c_0)$

$a_0 = b_0 c_0 \vdots p \qquad b_0 \vdots p \qquad c_0 \not\vdots p$

$a_1 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \vdots p \Rightarrow b_2 \vdots p$

$\vdots$

$a_m = b_0 c_m + ... + b_m c_0 \vdots p \Rightarrow b_{m-1} \vdots p$

$a_n = b_n c_{n-m} \vdots p$ — *противоречие*

13.2 Поля Галуа

13.2.1 Определение

Конечное поле, или поле Галуа в общей алгебре — поле, состоящее из конечного числа элементов. Обозначается $\mathbb{F}_q$ *или* $\mathbf{GF}(q)$ *или* $< \mathbf{GF}(q), +, * >$*, где* $q = |\mathbf{GF}(q)|$ *— порядок поля. Порядком поля называется количество входящих в него элементов. Пример:* $\mathbb{Z}_p,\ p \in \mathbb{P}$.

13.2.2 Определение

Характериситка поля F *— наименьшее* n*, такое, что* $\forall a \in F$ *выполняется следующее равенство:*

$$\underbrace{a + a + ... + a}_{n\ \text{раз}} = 0$$

Если такого n *не существует, то* n *считается равным* 0.

13.2.3 Лемма

Характериситка поля — простое или 0.

13.2.4 Доказательство

Рассмотрим $n = \alpha\beta$.

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n\ \text{раз}} = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\alpha\ \text{раз}} + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\alpha\ \text{раз}} + ... + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\alpha\ \text{раз}}}_{\beta\ \text{раз}} = 0$$

$$\underbrace{\alpha + \alpha + ... + \alpha}_{\beta\ \text{раз}} = 0 \qquad \Rightarrow \ \textit{характеристика} - \mathbb{P}$$

13.2.5 Свойства

$f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ *(*$f(x)$ *принадлежит множеству многочленов с целыми коэффициентами по модулю* p*)*
$\mathbb{Z}_p[x]/f(x)$ *(кольцо вычетов многочленов с целыми коэффициентами по модулю* $f(x)$*)*

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x) \equiv_{f(x)} h_1(x) \\ g_2(x) \equiv_{f(x)} h_2(x) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} g_1 + g_2 \equiv_{f(x)} h_1 + h_2 \\ g_1 g_2 \equiv_{f(x)} h_1 h_2 \end{array}$$

13.2.6 Теорема

$\mathbb{Z}_p[x]/f(x) \ \Leftrightarrow\ f(x)$ *неприводим над* $\mathbb{Z}_p$.
$\deg f = m\ \mathbf{GF}(p^m)$

13.2.7 Доказательство

Прямое. *Рассмотрим* $f(x) = g(x)h(x)$
$g(x)h(x) \equiv_{f(x)} 0 \qquad | \cdot g^{-1}(x)$
$h(x) \equiv_{f(x)} 0| \Rightarrow f(x) = 0$
От обратного. $\forall g(x) \neq 0\ \deg g < \deg p$
НОД$(g(x), f(x)) = 1\ \Rightarrow$ *по расширенному алгоритму Евклида:*
$a(x)g(x) + b(x)f(x) = 1$
$a(x)g(x) \equiv_{f(x)} 1\ \Rightarrow\ a = g^{-1}\ \Rightarrow\ \mathbb{Z}_p -$ *поле*

13.2.8 Связь с линейным пространством

Поле Галуа образует линейное (векторное) пространство. Его аксиомы:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $\exists 0 : a + 0 = a$
- $\forall a\ \exists(-a) : a + (-a) = 0$
- $a + b = b + a$
- $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
- $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
- $\exists 1 : 1 \cdot a = a$

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$, F *— линейное пространство.* $m = \dim F$.

13.2.9 Определение

α *— примитивный элемент, если* $\forall b \neq 0 \in F \qquad b = \alpha^i$.

14 Кодирование с исправлением ошибок. Граница Хэмминга. Полиномиальное кодирование

14.1 Кодирование с исправлением ошибок. Граница Хэмминга

$d : MxM \to \mathbb{R}$ *- функция расстояния*

1. $d(a, b) \geq 0; \quad d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, b) + d(b, c) = d(a, c)$

$M = \mathbb{Z}_2^m$
$a \in M,\ a = (a_0, a_1, ..., a_{m-1})$
$d(a, b) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} |a_i - b_i|$ *- кодовое расстояние Хэмминга (КХР)*
$a \bigoplus b = (a_0 \bigoplus b_0, ..., a_{m-1} \bigoplus b_{m-1})$

Теорема КРХ - формула расстояния на $\mathbb{Z}_2^m$
$d(a, b) + d(b, c) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i - b_i| + \sum\limits_{i=0}^{n-1} |b_i - c_i| = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (|a_i - b_i| + |b_i - c_i|) \geq \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i - b_i + b_i - c_i| =$
$= \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i - c_i| = d(a, c)$
$A = \{\underset{\uparrow}{a^{(0)}}, a^{(1)}, ..., a^{(k)}\} \leq \mathbb{Z}_2^m$
кодовое слово

Теорема. Если $\forall i \neq j$
$d(a^{(i)}, a^{(j)} \geq 2r + 1 \Rightarrow$ *можно исправить* $\leq r$ *ошибок*

Доказательство: $a \in \mathbb{Z}_2^m$
$A_i = \{b/d(a^{(i)}, b) \le r\}$
$\sqsupset \mid A_i \cap A_j = \{c\}$
$$\left.\begin{array}{l} c \subset A_i \\ \\ c \subset A_j \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \Rightarrow \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} d(c, a^{(i)}) \le r \\ \\ d(c, a^{(j)}) \le r \end{array}$$
$d(a^{(i)}, a^{(j)}) \le d(a^{(j)}, c) + d(c, a^{(i)}) \le 2r \quad ?!$
A_i *- область декодирвоания* $a^{(i)}$
$a^{(i)} + e \quad d(a^{(i)} + e, a^{(j)}) \le r \mid \Rightarrow a^{(i)} + e \in A_i \mid \Rightarrow$ *декодирование однознач.*
$|A_i| = 1 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^r \qquad |\mathbb{Z}_2^m| = 2^m$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1} |A_i| \le |\mathbb{Z}_2^m|; \qquad k = |A| \qquad k|A_i| \le |\mathbb{Z}_2^m| \mid \Rightarrow k = \frac{2^m}{\sum\limits_{i=0}^{r} C_m^i}$ *- граница Хэмминга*
$M = \{0, 1\} \mid \to A = \{000, ..., 111\}$
$m = 3 \Rightarrow r = 1 \qquad d(a^0, a^1) = 3 \ge 2r + 1 \qquad k \le \frac{2^3}{C_3^0 + C_3^1} = \frac{8}{1+3} = 2$

Определение. *Код называется совершенным (или плотно упакованным), если* $\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} A_i = \mathbb{Z}_2^m$

14.2 Полиномиальное кодирование

$M \Rightarrow \widetilde{M}$
$M \to C \Rightarrow \widetilde{C} \to M$
$\uparrow \qquad \uparrow$
сообщ. код. слово
Код линейный if $\forall a, b \in A$
Вес Хэмминга $W(a)$
$a \in A \le \mathbb{Z}_2^m$
$a = (a_0, ..., a_{m-1})$
$W(a) =$ *количество ненулевых* a_i
Минимальное кодовое расстояние $d^* = \min\limits_{i \ne j} d(a^{(i)}, a^{(j)})$
Лемма. $d^* = \min\limits_{a \ne 0} W(a)$
Доказательство: $W(a) = d(a, 0) \ge d^*$
$d(a, b) = d(a + b, b + b) = d(a + b, 0) = W(a + b)$
$d^* = \min\limits_{a \ne b} d(a, b) = \min\limits_{a \ne b} W(a + b) = \min\limits_{a \ne 0} W(a)$
$a = (a_0, a_1, ..., a_{m-1}) \mid \to a_0 + a_1 k + ... + a_{m-1} x^{m-1}$

Код циклический
$if (a_0, a_1, ..., a_{m-1}) \in A \Rightarrow (a_{m-1}, ..., a_{m-2}) \in A$
$$\begin{array}{l} a \to A(x) \\ \\ b \to B(x) \end{array} \qquad a + b \to A(x) + B(x)$$

$$\begin{array}{r} a \to a_0 + a_1 x + ... + a_{m-1} x^{m-1} \\ a_2 \to a_{m-1} + a_0 x + ... + a_{m-2} x^{m-1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} xA(x) \, mod(x^m + 1) \\ x^m \equiv 1 \, mod(x^m + 1) \end{array}$$

$A(x)$ *- количество кодов* $\Rightarrow P(x)A(x)$ *- кодов*
Порождающий многочлен - ненулевое приведение мн. наименьшей степени в коде.
$A = \{...\}$

Теорема. $G(x)$ *- порождающий многочлен*

минимальный цикл кода $\Leftrightarrow x^m+1 \,\vdots\, G(x)$
Доказательство:
$\Leftarrow\ x^m+1 \,\vdots\, G(x)$
$A(x), B(x)$
$A=\{P(x)G(x)\,mod(x^m+1)\}$

$$A(x)=P_A(x)G(x) \qquad A(x)+B(x)=(P_A(x)+P_B(x))G(x)$$
$$B(x)=P_B(x)G(x) \qquad \alpha A(x)=(\alpha P_A(x))G(x)$$

$xA(x)\,mod(x^m+1)$
$xA(x)=xP_A(x)G(x)$

$r(x)=xA(x)\equiv_{x^m+1}Q(x)G(x)+R(x)$
$xA(x)=S(x)(x^m+1)+r(x)=S(x)(x^n+1)+Q(x)G(x)+R(x)$
$P(x)G(x)=Q(x)(x^m+1)+R(x)$

$$P(x)G(x)\,mod(x^m+1) \qquad 0\equiv_{(x^m+1)}Q(x)G(x)+R(x)$$
$$x^m+1 \,\vdots\, G(x) \qquad degR<degG\,?!\Rightarrow$$
$x^m+1=Q(x)G(x)+R(x)$ ***обязательно делится***

x^m+1
$G(x)$
$d^*=\min\limits_{P(x)\neq 0}W(P(x)G(x)\,mod x^m+1)$
$d^*>2r+1 \qquad r<\frac{d^*}{2}$

$M\to C$
$M(x)\to C(x)$
$C(x)=M(x)G(x)$
$C(x)+E(x)$
$\widetilde{C}(x)=C(x)+E(x)$ *- многочлен ошибок*
$W(E(x))\leq r$
$\widetilde{C}(x)\,mod(G(x))=S(x)$ *- синдром*

Теорема. $E_1(x)\neq E_2(x)\Rightarrow E_1(x)\,modG(x)\neq E_2(x)\,modG(x)$
$W(E_1(x))\leq r$
$W(E_2(x))\leq r$

Доказательство:
$E_1(x)+E_2(x)\neq 0$
$W(E_1(x)+E_2(x))\leq 2r$

$\sqsupset\ E_1(x)\equiv E_2(x)\,modG(x)$
$E_1(x)+E_2(x) \,\vdots\, G(x)$, $W(E_1+E_2)\geq d^*\geq 2r+1$
$\widetilde{C}(x)=C(x)+E(x)=M(x)G(x)+E(x)$
$modG(x):$

$S(x)\equiv E(x)$, $C(x)=\widetilde{C}+E(x)$
$M(x)=\frac{C}{G}$

Если все ошибки в $degG$ послед. разр.
$x^iS(x)\equiv_{G(x)}T(x)$
$i\in[0;m-1]$
$W(T(x))\leq r$
$x^mS(x)\equiv_{G(x)}x^{m-i}T(x)$
$|||$

$x^m + 1 \equiv_{G(x)} 0$

Теорема. $G(x) \vdots x+1 \geq W(P(x)G(x)) \vdots 2$

Доказательство: $G(x) = (x+1)A(x)$
$P(x)G(x) \vdots x+1$
$P(1)G(1) = 0$
$W(P(x)G(x)) \vdots 2$

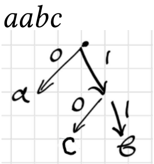
Следствие. $G(x) \vdots x+1 \geq$ *детект.* $\forall$ *на ошиб.*
$C(x) + E(x)$

15 15. Префиксные коды.Неравенство Крафта.Алгоритм Хаффмана.

15.1 Префиксные коды

$$A = a_1, \dots, a_n \text{ - алфавит } n \leq 2^k \to \begin{cases} a_1 \sim \underbrace{0\dots0}_{k} - c_1 \\ a_2 \sim \underbrace{0\dots0}_{k} 1 - c_2 \\ \dots \end{cases}$$

$l_1 = l_2 = l_k$; $M : a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$; $\alpha = ks \geq s \log n$
Шеннон-Фано
aabc



$\underbrace{0}_{a}\underbrace{0}_{a}\underbrace{11}_{b}\underbrace{01}_{c}$

$$\begin{cases} a \sim 0 \\ b \sim 11 \\ c \sim 01 \end{cases}$$

15.1.1 Определение

Код называется префиксным, если ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

15.2 Неравенство Крафта

Для префиксного кода с длинами $l_1, \dots, l_s$
$\sum\limits_{i=1}^{s} 2^{-l_i} \leq 1$

15.2.1 Доказательство

$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_s = q$
$A_i = \{ \quad \underbrace{(\dots)}_{q \text{ двоичных чисел}} \quad) | \text{нач. с } l_i \}$
$A_i \cap A_j = \emptyset$

15.2.2 Замечание

$\cup A_i \leq \{\underbrace{(\dots)}_{q\ \textit{раз}\ p}\}$

$\sum\limits_{i=1}^{s} 2^{q-l_i} \leq 2^q$

15.2.3 Теорема

$p_1, \dots, p_n$ - вер, с которой встречаются $a_1, \dots, a_n$

Сред. длин. код. слова $L = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i p_i$; $L \geq H(p_1, \dots, p_s)$

15.2.4 Доказательство

$\exists\ q_i = \frac{2^{-l_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{l_i}}$; $L - H(p_1, \dots, p_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i p_i + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log_2 (p_i 2^{l_i}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} p_i log \frac{p_i}{2^{-l_i}} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{p_i \sum\limits_{j=1}^{n} 2^{-l_j}}{2^{-l_i}} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{p_i}{q_i} = D(p||q) \geq 0$

$\to L \geq H(p_1, \dots, p_n) + D(p||q)$

15.3 Алгоритм Хаффмана

$a_1, \dots, a_n$ с $p_1, \dots, p_n$

$p_i = \frac{N(a_i)}{N}$

$p_1, p_2, \dots, p_s$

$p_i \geq p_j \to l_i \leq l_j$

$\sum\limits_{i=1}^{s} 2^{-l_i} \leq 1 (*)$

p_{n-1}, p_n - *наим.вер* $\to l_{n-1} = l_n$

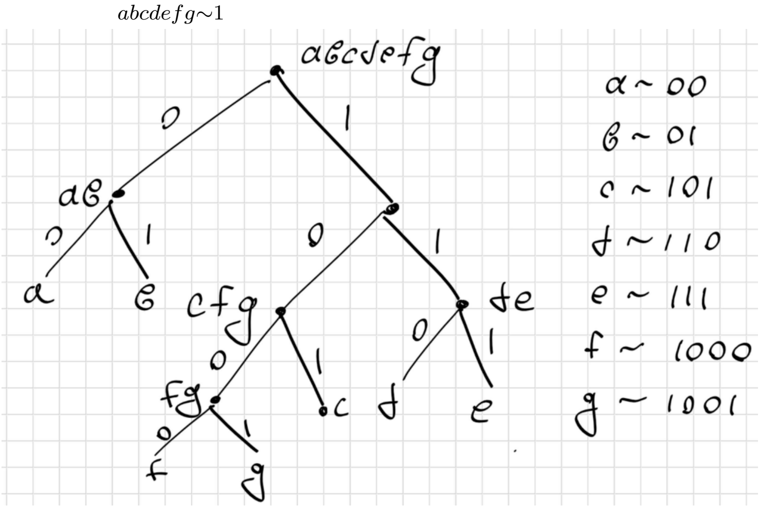
[чтобы знам $(*)$ сокращался]

15.3.1 Пример

$\underbrace{a \sim 0,22\ ;\ b \sim 0,2}_{ab \sim 0{,}42}\ ; c \sim 0,15; \underbrace{d \sim 0,13\ ;\ e \sim 0,12}_{de \sim 0{,}25}\ ; \underbrace{f \sim 0,1\ ;\ g \sim 0,18}_{fg \sim 0{,}18}$

$\underbrace{cfg \sim 0,33\ ;\ de \sim 0,25}_{cdefg \sim 0{,}58}\ ; ab \sim 0,42$

$\underbrace{ab \sim 0,42\ ;\ cdefg \sim 0,58}_{abcdefg \sim 1}$



16 Коды Рида-Соломона:

Рассмотрим алгоритм на примере:
Поле $GF(16)$ *порождается присоединением к* $GF(2)$ *корня* a *многочлена* $P(x)$, $P(x) = x^4 + x^3 + 1$
Пусть порождающий много член имеет вид $G(x) = (x - a)(x - a^2)(x - a^3)(x - a^4)$, *тогда количество ошибок многочлена которое исправит код Рида-Соломона* $2t = deg(G(x)) \Rightarrow t = 4/2 = 2$.
Принятое сообщение $S(x) = a^9x^14 + a^5x^{13} + a^{12}x^{12} + a^{10}x^{11} + a^7x^9 + a^5x^8 + a^7x^7 + a^{13}x^6 + a^3x^5 +$
$+a^{11}x^4 + a^3x^3 + a^{10}x^2 + a^8x + a$
Вырази все a *пока они не зациклятся, т.е.* $a_n = a_0$
$a^0 = a^0 = 1$
$a^1 = a$
$a^2 = a^2$
$a^3 = a^3$
$a^4 = a^3 + 1$
$a^5 = a * a^4 = a^4 + a = a^3 + a + 1$
$a^6 = a^3 + a^2 + a + 1$
$a^7 = a^2 + a + 1$
$a^8 = a^3 + a^2 + a$
$a^9 = a^2 + 1$
$a^{10} = a^3 + a$
$a^{11} = a^3 + a^2 + 1$
$a^{12} = a + 1$
$a^{13} = a^2 + a$
$a^{14} = a^3 + a^2$
$a^{15} = a^4 + a^3 = 1$
И так как у нас поле $GF(16)$ *то* $a^{15} = a^0 = 1$
Из порождающего многочлена выразим корни уравнения и подставим их в принятое сообщение S(x).
$S_1(a) = a^4$
$S_2(a^2) = 0$
$S_3(a^3) = a^2$
$S_4(a^4) = a^2$
Теперь строим систему уравнений вида

$$\begin{pmatrix} S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+t-1} \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{n+t} \\ . & . & . & . \\ S_{n+t-1} & S_{n+t} & \dots & S_{n+2t-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \lambda_{t-1} \\ . \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{n+t} \\ S_{n+t+1} \\ . \\ S_{n+2t-2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Где $n = 1, t = 2$, *подставим значения в матрицу и получим:*

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Решив систему мы получим что $\lambda_2 = a^{13}, \lambda_1 = 1$.

$L(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_t x^t$. *Подставим значения от* 1 *до* a^{15} *и найдем такие значения* a *что* $L(a^n) = 0$. *В нашем случае такими значениями являются* a^3 *и* a^{14}. *Найдем обратные к этим значениям* $\gamma_1 = \frac{a^{15}}{a^3} = a^{12}, \gamma_2 = a$.

$$\begin{pmatrix} {\gamma_1}^s & {\gamma_2}^s & \dots & {\gamma_t}^s \\ {\gamma_1}^{s+1} & {\gamma_2}^{s+1} & \dots & {\gamma_t}^{s+1} \\ . & . & . & . \\ {\gamma_1}^{s+t-1} & {\gamma_2}^{s+t-1} & \dots & {\gamma_t}^{s+t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ e_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n \\ S_{n+1} \\ . \\ S_{n+t-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Подставим значения и получим:

$$\begin{pmatrix} a^{12} & a \\ a^{24} & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Используя метод Крамера найдем e_1 *и* e_2*:*

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} a^4 & a \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^{12} & a \\ a^{24} & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{a^6}{a^{13}} = a^8 \tag{7}$$

$$e_2 = \frac{\begin{vmatrix} a^{12} & a^4 \\ a^{24} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^{12} & a \\ a^{24} & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{-a^{28}}{a^{13}} = a^{15} = 1 \tag{8}$$

Найдем многочлен ошибок $E(x) = e_1x^{i_1} + e_2x^{i_2} + e_3x^{i_3} + ... + e_tx^{i_t}$, $\gamma_1 = a^{i_1}, ...\gamma_t = a^{i_t}$, $E(x) = a^8x^{12} + x$. *Теперь найдем правильный код* $V(x) + E(x)$*, в нашем случае правильный код* $V(x) + E(x) = a^9x^{14} + a^5x^{13} + a^{11}x^{12} + a^{10}x^{11} + a^7x^9 + a^5x^8 + a^7x^7 + a^{13}x^6 + a^3x^5 + a^{11}x^4 + a^3x^3 + a^{10}x^2 + a^6x^1 + a$ *далее используя схему Горнера находим исходное сообщение* $A(x)$.

17 Алгоритм Берлекемпа

$\exists F$ *- многочлен, свободный от квадратов. Разложим* $F = f_1 * f_2 * f_3, ..., f_s(f_i$ *- неприводим над* $\mathbb{Z}_p)$

17.1 Алгоритм:

Составить матрицу A, которая имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x^0 & x^{1*p} & x^{2*p} & ... & x^{(deg(f)-1)*p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^{deg(f)-1} \end{array}$$

Каждый столбец матрицы соответствует векторному разложению многочленов из множества $\{x^0, x^{1*p}, x^{2*p}, ..., x^{(deg(f)-1)*p}\}$ *(1)*
в базисе $\{x^0, x^1, x^2, ..., x^{deg(f)-1}\}$

Для получения векторного представления каждого из многочленов множества (1) необходимо привести их по модулю f.
$x_0 \equiv_{f(x)} x^0$
$x_1 \equiv_{f(x)} \cdots$
$x_2 \equiv_{f(x)} \cdots$

Далее необходимо найти собственные векторы матрицы A. Для этого получим матрицу $B = A - E$*, где E - единичная матрица. Далее нужно привести матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса или же любым другим методом и найти ранг матрицы.*

Если $rankB = 1$, *то f - неразложим над* $\mathbb{Z}_p$.
Если $1 < rankB$ *и* $< deg(f) - 1$, *то f - разложим над* $\mathbb{Z}_p$

Далее решим уравнение для нахождения собственных векторов h_i:

$$B * h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Количество подходящих векторов h можно найти по формуле:
Кол-во $h_i = degf - rankB$

h_1 *всегда имеет вид* $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

h_2, h_3 *и т.д. необходимо найти аналитическим методом либо другим методом для нахождения собственных векторов матрицы.*

После нахождения всех векторов h_i *приведем их к виду многочлена.*
Пример:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 * x^0 + 0 * x^1 + 0 * x^2 + 1 * x^3 + 0 * x^4 = x^3 + 1$$

Итоговое разложение будет иметь вид:

$$f(x) = \prod_{c \in \mathbb{Z}_p} \text{НОД}\,(f(x), h_i - c)$$

Примечание: h_1 *в формуле разложения не рассматривается, т.к. НОД = 1 или* $f(x)$ *нас не интересует.*

17.2 Пример

$f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$ *над* $\mathbb{Z}_2$

Шаг 1: *Проверить, свободен ли f(x) от квадратов*
Шаг 2: *Составить матрицу А.*
Для этого приведем элементы из множества $\{x^0, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}, x^{12}\}$ *по модулю* $f(x)$.
$x^0 \equiv_{f(x)} x^0$
$x^2 \equiv_{f(x)} x^2$
$x^4 \equiv_{f(x)} x^4$
$x^6 \equiv_{f(x)} x^6$
$x^8 \equiv_{f(x)} x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x \equiv x^3 + x^2 + 1$
$x^{10} \equiv_{f(x)} x^8 * x^2 \equiv x^2 * (x^3 + x^2 + 1) \equiv x^5 + x^4 + x^2$
$x^{12} \equiv_{f(x)} x^{10} * x^2 \equiv x^7 + x^6 + x^4 \equiv x^5 + x^3 + x + 1$
Тогда А имеет вид:

$$
A = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} x^0 & x^2 & x^4 & x^6 & x^8 & x^{10} & x^{12} \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{array}
\end{array}
$$

Шаг 3*: Найти собственные векторы матрицы A*

$$
B = A - E = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} x^0 & x^2 & x^4 & x^6 & x^8 & x^{10} & x^{12} \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{array}
\end{array}
$$

Приведенная матрица B будет иметь вид:

$$
B = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} x^0 & x^2 & x^4 & x^6 & x^8 & x^{10} & x^{12} \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{array}
\end{array}
$$

$rankB = 5$

Решим уравнение: $B * h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Кол-во $h_i = deg(f) - rankB = 7 - 5 = 2$

$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h_1 = 1$
$h_2 = x^5 + x^2$
Шаг 4: *Найдем итоговое разложение*

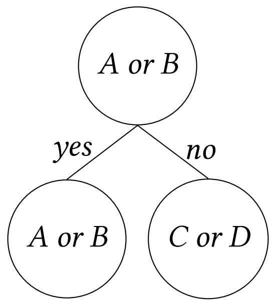
$f(x) = \prod_{c \in \mathbb{Z}_2}$ *НОД* $(f(x), h_i - c)$
НОД $(f(x), x^5 + x^2 - 0)$ = $x^2 + x + 1$
НОД $(f(x), x^5 + x^2 - 1)$ = $x^5 + x^2 + 1$

Ответ: $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$

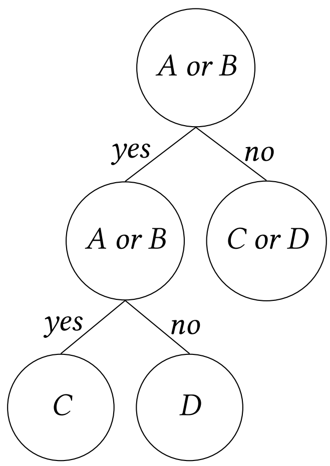
18 Энтропия. Информационное неравенство

18.1 Пример

Рассмотрим две чёрных коробки, одна и вторая может генерировать символы A,B,C и D.
В первой вероятности появления символов: $p(A) = 0.25, p(B) = 0.25, p(C) = 0,25, p(D) = 0,25$
Во второй: $p(A) = 0.5, p(B) = 0.125, p(C) = 0,125, p(D) = 0,25$ *Зададимся вопросом сколько вопросов да или нет нужно задать, чтобы узнать следующий символ, который появится*
В первом случае сначала надо можно разделить символы на две равновероятные группы, AB и CD или любые другие по два символа. Мы должны спросить являтся ли A или B

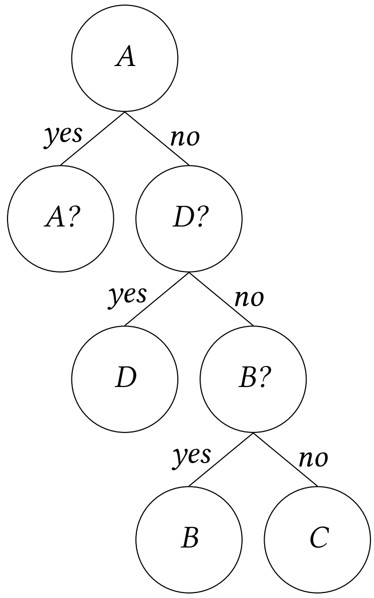


если да,то выбираем из A и B



В среднем количество вопрос для определение - 2

Во втором случае выгоднее сначала спросить является ли это A, т.к. у появление A вероятность 0.5 В случае отрицательного ответа необходимо спросить самое вероятное - D, B и C равновероятны.

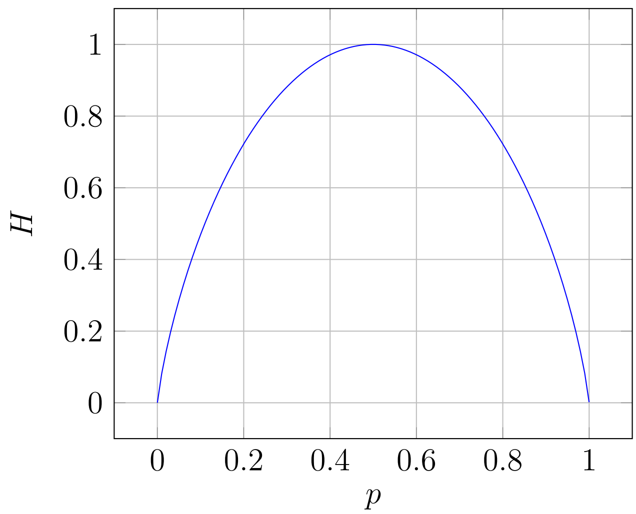


Вычислим количество вопросов: $\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot amount_i = 1 \cdot p(A) + 2 \cdot p(D) + 3 \cdot p(C) + 3 \cdot p(B) = 1,75$

Вторая коробка генерирует меньше информации, так как генерирует меньше неопределённости, меньше неожиданности. Это и есть энтропия. Обозначается как $H(p_1, p_2, \cdots, p_n)$
За единицу измерения был выбран бит - неопределённость о броске монеты, что эквивалентно одному вопросу
$H = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot amount_i$
Количество вопросов$= \log_2($***количество исходов***$)$
Количество исходов$= \frac{1}{p}$
Количество вопросов$= \log_2(\frac{1}{p})$
$H = \sum_{i=1}^{n} \log_2(\frac{1}{p})$ *или* $H = -\sum_{i=1}^{n} log_2(p_i)$

18.2 Максимум энтропии

Энтропия максимальна когда вероятности вероятности одинаковы.
Данный график для двух исходов, из вероятности p *и* $1 - p$



18.3 Свойства функции энтропии

- $H(p_1, \cdots, p_n)$ *определена и непрерывна для всех* $p_1, \cdots, p_n$*, где* $p_i \in [0,\ 1]$ *для всех* $i = 1, \cdots, n$ ***и*** $p_1 + \cdots + p_n = 1$

- $H\underbrace{\left(\frac{1}{n},\ \dots,\ \frac{1}{n}\right)}_{n} < H\underbrace{\left(\frac{1}{n+1},\ \dots,\ \frac{1}{n+1}\right)}_{n+1}$ *для целых, положительных* n *должно это должно выполняться*
- $H\underbrace{\left(\frac{1}{n},\ \dots,\ \frac{1}{n}\right)}_{n} = H\left(\frac{b_1}{n},\ \dots,\ \frac{b_k}{n}\right) + \sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{n}H\underbrace{\left(\frac{1}{b_i},\ \dots,\ \frac{1}{b_i}\right)}_{b_i}.$

  Для целых положительных b_i, *Если* $\sum_{i=1}^{n} b_i = n$

Шенон показал, что функция выглядит так: $-K\sum_{i=1}^{n} p(i)\log_2 p(i)$
Коэффицент K нужен для перевода в другую систему исчисления, из бит в нат(основание логарифма e), трит(3), хартли

18.4 Th:$H = -K\sum_{i=1}^{n} p(i)\log_2 p(i)$

$$S^m \le t^n \le S^{m+1}$$
$$H(\frac{1}{S^m}\cdots) \le H(\frac{1}{t^n}\cdots) < H(\frac{1}{S^{m+1}}\cdots)$$
$$]A(n) \equiv H(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$$
$$A(S^m) \le A(t^n) < A(S^{m+1})$$
$$A(S^m) = A(S) + \sum_{i=1}^{s} = A(S) + A(S^{m-1}) = 2A(S) + A(S^{m-2}) = \cdots = (m+1)A(S) \qquad |: nA(S)$$
$$\frac{m}{n} \le \frac{A(t)}{A(S)} \le \frac{m+1}{n} \qquad | -\frac{m}{n}$$
$$0 \le \frac{A(t)}{A(S)} - \frac{m}{n} \le \frac{1}{n}$$
$m \cdot log(s) \le n \cdot \log(t) < (m+1)\cdot\log(s) \qquad |: n\cdot\log(s)$ *- Из начальных условий*
$$\frac{m}{n} \le \frac{\log(t)}{\log(s)} < \frac{m+1}{n} \qquad | -\frac{m}{n}$$
$$0 \le \frac{\log(t)}{\log(s)} - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$
Заметим, что $\left|\frac{A(t)}{A(S)} - \frac{\log(t)}{\log(s)}\right| < \frac{1}{n}$
$$\frac{A(t)}{A(S)} = \frac{\log(t)}{\log(s)}; \frac{A(t)}{\log(t)} = \frac{A(S)}{\log(s)} \implies A(s) = k\log(s) \qquad \sum_{i=1}^{s} k = N$$
$$p_1 = \frac{k_1}{N},\dots,p_s = \frac{k_s}{N}$$
$$A(N) = H(p_1,\dots,p_n) + \sum_{i=1}^{s} p_i \cdot\ A(k_i)$$
$$k\cdot\log N = H(p_1,\dots,p_n) + \sum_{i=1}^{s} p_i\cdot k\cdot\log(k_i)$$
$$H(p_1,\dots,p_n) = k\cdot\left(\log(N) - \sum_{i=1}^{s} p_i\cdot\log(k_i)\right)$$
$k\cdot\left(\log(N) - \sum_{i=1}^{s} p_i\cdot\log(p_i) - \sum_{i=1}^{s} p_i\cdot\log(N)\right) = -k\cdot\sum_{i=1}^{s} p_i\cdot\log(p_i)$ *ч.т.д.*

19 Относительная энтропия

$$D(p \mid\mid q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{p_i}{q_i}$$

19.1 Th:$D(p \mid\mid q) \geq 0$ и $D(p \mid\mid q) = 0 \Leftrightarrow p \equiv q$ - Информационное неравенство

$f\big(\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i\big) \geq \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i$ - *Неравенство Иенсона*

$-f\big(\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i\big) \leq -\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i \Leftrightarrow -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{q_i}{p_i} \geq -\log \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{q_i}{p_i} = 0$*ч.т.д.*

19.2

$H(p_1, \ldots, p_n) \qquad q_1 = \ldots = q_n = \frac{1}{n} D(p \mid\mid q) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{p_i}{q_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log(n \cdot p_i) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log n + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log(p_i) = \log n + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i = A(n) - H(p_1, \ldots, p_n)$

Так как $A(n) \geq H(p_1, \ldots, p_n) \implies$ *максимум достигается при равновероятных событиях*