Подготовка к контрольной работе на получение 4-5 по МатАнализу

Студент группы 2305 Макурин Александр

3 июня 2023

1. Определение неопределённого интеграла

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется семейство первообразных $\{F(x)+C\}$. Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$.

2. Свойства неопределённого интеграла

1. $(\int f(x)dx)'=f(x)$
2. $\int f'(x)dx=f(x)+C$
3. $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$, $A-\mathrm{const.}$
4. $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

3. Формулы для основных неопределённых интегралов

1. $\displaystyle\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\neq-1$
2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
3. $\displaystyle\int\ln x dx=x\ln x-x+C$
4. $\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$
5. $\displaystyle\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
6. $\displaystyle\int\cos x dx=\sin x+C$
7. $\displaystyle\int\sin x dx=-\cos x+C$
8. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$
9. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$
10. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
11. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
12. $\displaystyle\int\cosh x dx=\sinh x+C$
13. $\displaystyle\int\sinh x dx=\cosh x+C$
14. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cosh^2 x}=\tanh x+C$
15. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sinh^2 x}=-\coth x+C$
16. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$
17. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

4. Достаточные условия интегрируемости

Функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на этом отрезке.

5. Формула замены переменной в неопределённом интеграле (строгая формулировка)

Пусть $g(t)$ непрерывна и дифференцируема, $g(t) = x$. Тогда:

$$\int f(x)dx = \left[\begin{array}{c} g(t) = x \\ d(g(t)) = dx \end{array} \right] = \int f(g(t))d(g(t)) = \int f(g(t))g'(t)dt$$

6. Формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле (строгая формулировка). Примеры

Обозначим:

$$u = U(x);\ v = V(x)$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx \xrightarrow[u'dx=du]{v'dx=dv} uv + C = \int vdu + \int udv$$

Так как константы будут и в результатах двух оставшихся интегралов, C можно сократить. В результате получим:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Примеры:

- $\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C$

7. Вывод рекурсивной формулы для интеграла $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ с помощью метода интегрирования по частям

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} \right) = \frac{1}{a^2} \left(I_{n-1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} \right)$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{xd(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n} & v = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}(1-n)} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+a^2)^{n-1}(1-n)} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{2(x^2+a^2)^{n-1}(1-n)} - \frac{I_{n-1}}{2-2n}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \frac{I_{n-1}}{2n-2} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}(2n-2)}\right) =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1}\frac{2n-3}{2n-2} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}(2n-2)}\right)$$
$$I_n = \frac{1}{a^2(2n-2)}\left(I_{n-1}(2n-3) + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)$$

8. Зацикливающиеся интегралы типа $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$ (формулы и вывод)

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \begin{bmatrix} u = \sin bx & du = b\cos bx dx \\ dv = e^{ax}dx & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{bmatrix} = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = \cos bx & du = -b\sin bx dx \\ dv = e^{ax}dx & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx$$
$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \begin{bmatrix} u = \cos bx & du = -b\sin bx dx \\ dv = e^{ax}dx & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{bmatrix} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = \sin bx & du = b\cos bx dx \\ dv = e^{ax}dx & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx dx$$
$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$$

9. Интегрирование рациональных функций. Типы элементарных интегралов. Сведение общего случая к элементарным (в общем виде)

Все интегралы рациональных функций посредством разложения на простейшие сводятся к 4 типам элементарных интегралов:

I $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}$

II $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}$

III $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

IV $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$

Разложение на простейшие — рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представляется в виде $G(x)+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$, где $G(x)$ — многочлен, выделенный из $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, а $\dfrac{P_i(x)}{Q_i(x)}$ — простейшие дроби.

Дробь называется простейшей, если её знаменатель представляет собой степень некоторого неприводимого многочлена, а числителем является многочлен степени меньше, чем степень неприводимого многочлена.

Простейшие дроби находятся по методу неопределённых коэффициентов.

Любой многочлен можно свести к виду:

$$Q(x)=(Q_1(x))^{m_1}(Q_2(x))^{m_2}...(Q_n(x))^{m_n}$$

где $Q_i(x)$ — неприводимые многочлены.

Тогда *правильная* рациональная дробь $\dfrac{F(x)}{Z(x)}$, где $Z(x)$ раскладывается в $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(Z_i(x))^{m_i}$ и может быть представлена как:

$$\frac{F(x)}{Z(x)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{H_{ij}(x)}{(Z_i(x))^j} \tag{1}$$

где

$$H_{ij}(x)=\begin{cases}A,\text{ если } Z_i=ax-b\\ Ax+B,\text{ если } Z_i=ax^2+bx+c\end{cases}$$

Соответственно, разложение на простейшие сводится к поиску всех коэффициентов a_{ik}. Так как для равенства двух многочленов необходимо, чтобы коэффициенты при соответствующих степенях совпадали, можно домножить обе стороны уравнения (1) на $Z(x)$ и получить:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}H_{ij}(x)\prod_{k\neq i}^{n}(Z_k(x))^{m_k} \tag{2}$$

10. Метод интегрирования иррациональных функций (общая идея). Конкретные подстановки (с доказательством рационализации исходного интеграла после выполненной замены)

Основные виды иррациональных выражений и соответствующие подстановки (замены):

1. $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$

   Замена $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

2. $R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\dfrac{1}{S_1}},\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\dfrac{1}{S_2}},...,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\dfrac{1}{S_n}}\right)$

   Замена $t=\sqrt[\lambda]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, где λ — общее кратное $S_1,S_2,...,S_n$.

3. $x^m(a+bx^n)^p$, где $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Тогда возможны варианты:

   3.1 $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ — общее кратное знаменателей m, n.

   3.2 $p \notin \mathbb{Z}, \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \sqrt[\lambda]{a+bx^n}$, где λ — знаменатель p.

   3.3 $p \notin \mathbb{Z}, \dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}, p + \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \sqrt[\lambda]{ax^{-n}+b}$, где λ — знаменатель p.

   3.4 Иначе, интеграл не берущийся.

11. Тригонометрические подстановки в иррациональных интегралах (интегралы типа $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$)

$$x = \frac{a}{\sin t}$$
$$dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$
$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a^2\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{a\cos t}{\sin t}$$

12. Интегрирование тригонометрических функций (общая идея). Возможные подстановки с обоснованием их применения

Общая идея состоит в применении тригонометрических преобразований. Либо, использование тригонометрических замен:

1. В самом общем виде ($\int R(\sin x, \cos x)dx$) используется универсальная тригонометрическая подстановка

$$t = \tan\frac{x}{2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

2. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тогда можно взять более удобную подстановку

$$\cos x = t$$
$$\sin x = \sqrt{1-t^2}$$
$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

3. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тогда можно взять более удобную подстановку

$$\sin x = t$$
$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$
$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

4. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тогда можно взять более удобную подстановку

$$\begin{aligned} t &= \tan x \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \\ \sin x &= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \\ dt &= (1-\tan^2 x)dx \\ dx &= \frac{dt}{1-t^2} \end{aligned}$$

13. Неберущиеся интегралы

Неберущийся интеграл — интеграл, который не выражается через элементарные функции.
Интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ — неберущийся, если $F(x)$ не относится к элементарным функциям.

14. Определение определённого интеграла

$f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$, $f(x) \geq 0$. Разобъём $[a, b]$ на n частей. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Зафиксируем точку $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ — сумма Римана. $\tau = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$ — меткость разбиения. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} S_n$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

15. Свойства определённого интеграла

1. Если функция терпит конечное количество разрывов первого рода в точках $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$, лежащих на отрезке $[a, b]$ то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \sum_{i=2}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

2. $\forall c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. $\forall c \in D(f)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. $f(x), g(x)$ — непрерывны на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

5. A — const

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

6. Пусть $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7. Теорема о среднем:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ непрерывна на } [a,b] \\ m = \min\limits_{a\leq x\leq b} f(x) \\ M = \max\limits_{a\leq x\leq b} f(x) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ \exists \xi \in [a,b] : f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

8. $f(x)$ — непрерывна на $[a,b]$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx$$

16. Формула Ньютона-Лейбница (строгая формулировка)

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = f(x) \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x)$ — первообразная $f(x)$.

$$\Phi(x) + C = \int f(x)dx$$

$$\int_a^x f(t)dt + C = \int f(x)dx$$

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Отсюда:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

17. Обоснование существования первообразной у некоторого класса функций

Все непрерывные функции имеют первообразные.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = f(x)\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

18. Формула замены переменной в определённом интеграле (строгая формулировка)

Пусть $\phi(t)$ — непрерывна и дифференцируема на $[a, b]$. $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$. $F(x)$ — первообразная $f(x)$. Очевидно, что $F(\phi(t))$ является первообразной для выражения $f(\phi(t))\phi'(t)$.

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))d(\phi(t)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Отсюда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt, \text{ где } \alpha = \phi^{-1}(a), \beta = \phi^{-1}(b)$$

19. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле (строгая формулировка)

Пусть функции $U(x), V(x)$ непрерывны и дифференцируемы на $[a, b]$, $u = U(x), v = V(x)$. Тогда:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu, \text{ где } uv|_a^b = U(b)V(b) - U(a)V(a)$$

Доказательство:

$$d(U(x)V(x)) = U(x)d(V(x)) + V(x)d(U(x)) = U(x)V'(x)dx + V(x)U'(x)dx$$

$$\int_a^b d(U(x)V(x)) = \int_a^b (U(x)V'(x) + V(x)U'(x))dx$$

$$\int_a^b d(U(x)V(x)) = U(x)V(x)\Big|_a^b = uv\Big|_a^b$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Что и требовалось доказать.

20. Геометрические приложения определённого интеграла (вычисление площадей в декартовых и полярных координатах)

В декартовых координатах (S — площадь между графиком функции $f(x)$ и осью O_x на промежутке $[a, b]$):

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Вычисление площади в декартовых координатах, заданных параметрически:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

В полярных координатах (S — площадь криволинейного сектора между лучами α и β, точкой $(0, 0)$ и графиком $r(\phi)$):

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)d\phi$$

21. Геометрические приложения определённого интеграла (вычисление длин дуг кривых в декартовых и полярных координатах)

Длина кривой в декартовых координатах, заданных параметрически. Пусть задано n-мерное декартово пространство, в которой задана кривая:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(t) \end{cases}$$

Тогда длина кривой:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((x_i)'_t\right)^2} dt$$

В полярных координатах (легко выводится через составление уравнений, выражающих полярные в декартовых):

$$l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{(r'(\phi))^2 + r^2(\phi)} d\phi$$

На плоскости при $y = f(x)$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

22. Геометрические приложения определённого интеграла (вычисление объемов тел вращения)

Вращение вокруг оси O_x при $y = f(x)$:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

23. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Определение, способы вычисления

Пусть функция $f(x)$ определена на $(a, b]$ и терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом и вычисляется как:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx$$

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$ и терпит бесконечный разрыв в точке $x = b$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом и вычисляется как:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

Пусть функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = c$, $c \in (a, b)$ тогда $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом и вычисляется как:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

24. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Признаки сходимости

Если результат вычисления несобственного интеграла является конечным, то про такой несобственный интеграл говорят, что он сходится. Иначе говорят, что он расходится.

Пусть $f(x)$ определена на $(a, b]$ и терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ сходится, если $\displaystyle\lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx$ существует и конечен.

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b)$ и терпит бесконечный разрыв в точке $x = b$. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ сходится, если $\displaystyle\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ существует и конечен.

Пусть $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $c \in [a, b]$ и определена в остальных точках $[a, b]$. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ сходится, если $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ и $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ сходятся.

24.1. Критерий Коши

Пусть $f(x)$ определена на $(a, b]$ и терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сходится, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall (0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta) \Rightarrow \left| \int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

25. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Определение, способы вычисления

Интегралы вида $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ называются интегралами с бесконечными пределами интегрирования. Вычисление таких интегралов сводится к вычислению пределов:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

26. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Признаки сходимости

27. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Условная сходимость несобственных интегралов

28. Дифференциальные уравнения. Определение. Основные типы ДУ

29. Решение ДУ. Общее решение, частное решение

30. Задача Коши

31. ДУ с разделяющимися переменными. Общий вид, метод решения

32. Однородные ДУ. Общий вид, метод решения

33. Линейные ДУ первого порядка. Общий вид. Метод решения

34. Уравнение Бернулли. Общий вид, метод решения

35. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (ЛДУ). Общий вид

36. Решение ЛДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Сначала решается ЛДУ в общем виде, потом находится частное решение. Общим решением ЛДУ со специальной правой частью будет сумма этих двух решений.

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$$

где $y_{\text{о.н.}}$ — общее решение неоднородного ЛДУ (ЛДУ со специальной правой частью), $y_{\text{о.о.}}$ — общее решение ЛОДУ, составленого из этого ЛДУ за счёт замены правой части нулём, и $y_{\text{ч.н.}}$ — частное решение неоднородного.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n)} = f(x)$$

где $y^{(0)} = y$.

Посредством подстановки $y = e^{\lambda x}$ и замены правой части на 0 составляем характеристическое уравнение:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (e^{\lambda x})^{(n)} = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = 0$$

Решая уравнение получим корни $\lambda_1, ..., \lambda_k, k \leq n$. Они могут быть комплексными. Кратностью корня назовём степень, в которой стоит неприводимый многочлен с этим корнем при разложении исходного многочлена на произведение неприводимых.

Общее решение неоднородного ЛДУ будет представлять собой:

$$y_{\text{о.н.}} = \sum_{i=0}^{k} y_i(x)$$

где $y_i(x)$ – решение, соответствующее i-му корню.

$$y_i(x) = \begin{cases} P_{mi}(x)e^{\lambda_i x}, \text{ если } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ e^{\text{Re}(\lambda_i)x}(P_{mi}(x)\cos(\text{Im}(\lambda_i)x) + Q_{mi}(x)\sin(\text{Im}(\lambda_i)x)), \text{ если } \lambda_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

где

$$P_{mi}(x) = \sum_{j=0}^{m} C_{Pij}x^i$$

$$Q_{mi}(x) = \sum_{j=0}^{m} C_{Q_{ij}}x^i$$

где C – константа.

37. Числовые ряды. Вычисление суммы. Необходимое условие сходимости

38. Признаки сходимости положительных числовых рядов

39. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

40. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов