

АиГ. ДЗ к 2023-06-01. Дифференциальные уравнения. Вариант №14

Студент группы 2305 Александр Макурин

29 мая 2023

1 $y'' - 6y' + 13y = e^{2x}(15x - 21), y(0) = -6, y'(0) = -10$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = 3 \pm 2i$$

$$y_0 = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$y_{\text{ч}} = (D_1 x + D_0)e^{2x} \quad y'_{\text{ч}} = (2D_1 x + 2D_0 + D_1)e^{2x} \quad y''_{\text{ч}} = (4D_1 x + 4D_0 + 4D_1)e^{2x}$$

$$4D_1 x + 4D_1 + 4D_0 - 12D_1 x - 12D_0 - 6D_1 + 13D_1 x + 13D_0 = 15x - 21$$

$$5D_1 x - 2D_1 + 5D_0 = 15x - 21$$

$$\begin{cases} 5D_1 = 15 \\ 5D_0 - 2D_1 = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 3 \\ D_0 = -3 \end{cases}$$

$$y_{\text{ч}} = (3x - 3)e^{2x}$$

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{3x} + 3(x - 1)e^{2x}$$

$$y' = (3C_1 \cos 2x + 3C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)e^{3x} + 3(2x - 1)e^{2x}$$

$$\begin{cases} C_1 - 3 = -6 \\ 3C_1 + 2C_2 - 3 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $y = (-3 \cos 2x + \sin 2x)e^{3x} + 3(x - 1)e^{2x}$

2 $y'' - 5y' + 4y = e^x(2 \cos 2x - 16 \sin 2x), y(0) = -6, y'(0) = -13$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1, 4$$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

$$y_{\text{ч}} = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$$

$$y'_{\text{ч}} = (A \cos 2x + B \sin 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x)e^x$$

$$y''_{\text{ч}} = (-3A \cos 2x - 3B \sin 2x - 4A \sin 2x + 4B \cos 2x)e^x$$

$$\cos 2x(-3A + 4B - 5A - 10B + 4A) + \sin 2x(-4A - 3B - 5B + 10A + 4B) = 2 \cos 2x - 16 \sin 2x$$

$$\begin{cases} -4A - 6B = 2 \\ 6A - 4B = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2}B - \frac{1}{2} \\ -9B - 3 - 4B = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$y_{\text{и}} = (-2 \cos 2x + \sin 2x)e^x$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x$$

$$y' = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x} + e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x + 2e^x \cos 2x + 4e^x \sin 2x$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2 = -6 \\ C_1 + 4C_2 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -4 - C_2 \\ 3C_2 - 4 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

Ответ: $y = -e^x - 3e^{4x} + e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x$

3

$$\begin{cases} x' = 14x - 15y \\ y' = 6x - 5y \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 8 \\ y(0) = 5 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 14 - \lambda & -15 \\ 6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = -70 - 14\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 90 = \lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4, 5$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -15 \\ 6 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$$

$$\begin{cases} x(t) = 3C_1 e^{4t} + 5C_2 e^{5t} \\ y(t) = 2C_1 e^{4t} + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$