МатАн. Подготовка к КР

Студент группы 2305 Александр Макурин

20 декабря 2022

1 Найти $y' = f'(x)$:

1.1 $y = (\arctan(\sin(x^3)))^{x^2+1}$

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x) \Rightarrow \frac{1}{y} y' = g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = y(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x))$$

$$y' = \arctan^{x^2+1}\left(\sin(x^3)\right) \left(2x \ln\left(\arctan(\sin(x^3))\right) + \frac{x^2+1}{\arctan(\sin(x^3))} \cdot \frac{1}{1+\sin^2\left(x^3\right)} \cdot \cos\left(x^3\right) \cdot 3x^2\right)$$

1.2 $\arcsin(x+y) - \arccos^2(y^2) = 5 + x$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}(1+y') - 2\arccos\left(y^2\right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^4}} \cdot 2yy' = 1$$

$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} + 4\arccos\left(y^2\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^4}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$$

$$y' = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} + 4\arccos\left(y^2\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^4}}}$$

1.3 $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1+\cos t}{\cos t - t\sin t}$$

1.4 $y = \sinh(x + \arccos 8x) + \arctan^3(x+x^3)$

$$y' = \cosh(x + \arccos 8x) \cdot (1 - \frac{8}{\sqrt{1-64x^2}}) + 3\arctan^2\left(x+x^3\right)\frac{1}{1+(x+x^3)^2} \cdot (1+3x^2)$$

1.5 $y = \operatorname{arcctg}^{-1}(x+8) - \log_5(2x+10)$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arcctg}^2(x+8)\cdot(1+(x+8)^2)} - \frac{2}{(2x+10)\ln 5}$$

1.6 $e^{x+\sin y} + \sin(\pi x + y) = \log_5 107$

$$(y'\cos y + 1)e^{x+\sin y} + \cos(\pi x + y)\cdot(\pi + y') = 0$$

$$y'(e^{x+\sin y}\cos y + \cos(\pi x + y)) = -(e^{x+\sin y} + \pi\cos(\pi x + y))$$

$$y' = \frac{-(e^{x+\sin y} + \pi\cos(\pi x + y))}{e^{x+\sin y}\cos y + \cos(\pi x + y)}$$

1.7 $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(x + \dfrac{10}{x}\right)^x$

$$y' = 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x+\frac{10}{x}\right)^x + \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(x+\frac{10}{x}\right)^x\left(\ln\left(x+\frac{10}{x}\right) + \frac{x}{x+\frac{10}{x}}\cdot\left(1-\frac{10}{x^2}\right)\right)$$

$$y' = \left(x+\frac{10}{x}\right)^x\cdot\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(\ln\left(x+\frac{10}{x}\right) + \frac{x}{x+\frac{10}{x}}\cdot\left(1-\frac{10}{x^2}\right)\right)\right)$$

2 Вычислить с помощью правила Лопиталя:

2.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan 3x - 6\tan x}{3\arctan x - \arctan 3x}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{\ln^3(1+x)}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{x^2 \cdot \arctan x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^2 \cdot \arctan x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{2x\arctan x + \dfrac{x^2}{1+x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x}{2\arctan x + \dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x}{\dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{2}{(1+x^2)^2} + \dfrac{2-4x^2-6x^4}{(1+x^2)^4}} = \left[\frac{-8}{6}\right] = -\frac{4}{3}$$

2.5 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \cdot e^{-x^3}$

Если n - натуральное, то:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \cdot e^{-x^3} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{3x^2 e^{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{3^n x^{2n} e^{x^3}} = \left[\frac{const}{+\infty}\right] = 0$$

3 Исследовать функции на непрерываность:

3.1 $f(x) = \begin{cases} x+4,\ x<-1 \\ x^2+2,\ -1 \le x < 1 \\ 2x,\ x \ge 1 \end{cases}$

Все функции непрерывны на своих областях определения. Требуется проверить на непрерывность только крайние точки интервалов.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1-0} f(x) = 3 \\ \lim_{x\to -1+0} f(x) = 3 \\ f(-1) = 3 \end{aligned}\right| \Rightarrow x_0 = -1 \text{ не является точкой разрыва, функция в точке } x_0 \text{ непрерывна}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1-0} f(x) = 3 \\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow x_0 = 1 \text{ является точкой неустранимого разрыва первого рода}$$

3.2 $\begin{cases} x+1,\ x \le 0 \\ (x+1)^2,\ 0 < x \le 2 \\ -x+4,\ x > 2 \end{cases}$

Все функции непрерывны на своих областях определения. Требуется проверить на непрерывность только крайние точки интервалов.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0-0} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow x_0 = 0 \text{ не является точкой разрыва, функция в точке } x_0 \text{ непрерывна}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2-0} f(x) = 9 \\ \lim_{x\to 2+0} f(x) = 2 \\ f(2) = 9 \end{aligned}\right| \Rightarrow x_0 = 2 \text{ является точкой неустранимого разрыва первого рода}$$

3.3 $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1$ **в точках** $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3-0} f(x) &= 1 \\ \lim_{x\to 3+0} f(x) &= +\infty \\ \nexists f(3) \end{aligned}\right| \Rightarrow x_1 = 3 \text{ является неустранимой точкой разрыва второго рода}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 4-0} f(x) &= 3 \\ \lim_{x\to 4+0} f(x) &= 3 \\ f(4) &= 3 \end{aligned}\right| \Rightarrow x_2 = 4 \text{ не является точкой разрыва, функция в точке } x_2 \text{ непрерывна}$$

3.4 $f(x) = \dfrac{x+7}{x-2}$ **в точках** $x_1 = 2$ **и** $x_2 = 3$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2-0} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 2+0} f(x) &= +\infty \\ \nexists f(2) \end{aligned}\right| \Rightarrow x_1 = 2 \text{ является неустранимой точкой разрыва второго рода}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3-0} f(x) &= 10 \\ \lim_{x\to 3+0} f(x) &= 10 \\ f(3) &= 10 \end{aligned}\right| \Rightarrow x_2 = 3 \text{ не является точкой разрыва, функция в точке } x_2 \text{ непрерывна}$$

3.5 $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$ **в точках** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0-0} f(x) &= 3 \\ \lim_{x\to 0+0} f(x) &= 3 \\ f(0) &= 3 \end{aligned}\right| \Rightarrow x_1 = 0 \text{ не является точкой разрыва, функция в точке } x_1 \text{ непрерывна}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2-0} f(x) &= 5 \\ \lim_{x\to 2+0} f(x) &= 5 \\ \nexists f(2) \end{aligned}\right| \Rightarrow x_2 = 2 \text{ является неустранимой точкой разрыва второго рода}$$

4 Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в указанной точке:

Касательная:

$$k = f'(x_0)$$
$$b = f(x) - x_0 f'(x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x)$$

Нормаль:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x)$$

4.1 $y = \sqrt{3 + x^2}$, $x_0 = 1$