# АиГ. ДЗ к 2023-04-14. Вариант №14

Студент группы 2305 Александр Макурин

07 апреля 2023

## 1 Найдите собственные числа и собственные вектора матриц

### 1.1 $\begin{pmatrix} -7 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -7-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -6-\lambda & 1 \\ -4 & -5 & 0-\lambda \end{vmatrix} &= -(7+\lambda)(\lambda(\lambda+6)+5) - 4(-2+12+2\lambda) = \\ &= -(7\lambda^2+42\lambda+35+\lambda^3+6\lambda^2+5\lambda) - 8\lambda - 40 = \\ &= -\lambda^3 - 13\lambda^2 - 55\lambda - 75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda^3 - 13\lambda^2 - 55\lambda - 75 &= 0 \\ \lambda^3 + 13\lambda^2 + 55\lambda + 75 &= 0 \\ \lambda_1 &= -3 \\ (\lambda+3)(\lambda^2+10\lambda+25) &= 0 \\ D = 10^2 - 4\cdot 1\cdot 25 &= 0 \\ \lambda_{2,3} = \frac{-10}{2} &= -5 \end{aligned}$$

Нахождение $u_1$ — первого собственного вектора

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Нахождение $u_{2,3}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = -5;\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

**1.2** $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 2 & 10 & 3 \\ -4 & -10 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -7 & -3 \\ 2 & 10-\lambda & 3 \\ -4 & -10 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)((10-\lambda)(-1-\lambda)+30)+7(-2-2\lambda+12)-3(-20+40-4\lambda) =$$
$$= (1-\lambda)(-10-10\lambda+\lambda+\lambda^2+30)+70-14\lambda-60+12\lambda =$$
$$= 20-9\lambda+\lambda^2-20\lambda+9\lambda^2-\lambda^3+10-2\lambda =$$
$$= -\lambda^3+10\lambda^2-31\lambda+30$$

$$-\lambda^3+10\lambda^2-31\lambda+30=0$$
$$\lambda^3-10\lambda^2+31\lambda-30=0$$
$$\lambda_1=2$$
$$(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+15)=0$$
$$D=8^2-4\cdot 1\cdot 1=4$$
$$\lambda_{2,3}=\frac{8\pm 2}{2}=3;5$$

Нахождение $u_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 8 & 3 \\ -4 & -10 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=-2x_2 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Нахождение $u_2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & -3 \\ 2 & 7 & 3 \\ -4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1=-x_2 \\ 2x_2=-x_3 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Нахождение $u_3$

$$\begin{pmatrix} -4 & -7 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_2=-x_3 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \lambda_1=2;\ \lambda_2=3;\ \lambda_3=5;\ u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix};\ u_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$