АиГ. ДЗ к 2023-06-03. Группы 1. Вариант №14

Студент группы 2305 Александр Макурин

30 мая 2023

1 Пусть $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ задано формулой $\phi(z) = \dfrac{z}{|z|}$. Докажите, что ϕ — гомоморфизм групп. Найдите его ядро и образ. Является ли ϕ мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

Пусть $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$. Тогда, если ϕ является гомоморфизмом должно соблюдаться следующее равенство:

$$\phi(z_1 * z_2) = \phi(z_1) * \phi(z_2)$$

$$\frac{ac - bd + (ad + bc)i}{\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}} = \frac{a + bi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{c + di}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Упростим левую и правую часть по отдельности:

$$\frac{ac - bd + (ad + bc)i}{\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}} = \frac{ac - bd + (ad + bc)i}{\sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}}$$

$$\frac{a + bi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{c + di}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{ac - bd + (ad + bc)i}{\sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}}$$

Левая и правая части равны, следовательно ϕ — гомоморфизм групп $\mathbb{C}^*$ и $\mathbb{C}^*$.

Нейтральным элементов в $\mathbb{C}^*$ является 1. Отсюда, ядро:

$$\frac{a + bi}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \Rightarrow \frac{a}{|a|} = 1 \text{ — верно при } \forall a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

Ядро — $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Так как мы делим комплексные числа на длину их векторов, мы получаем комплексные числа, длина которых всегда равна единице. Тогда образ: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

ϕ не ивляется ни эпиморфизмом, ни мономорфизмом, ни изоморфизмом, т. к.:

- Образ не совпадает с множеством $\mathbb{C}$.
- Бесконечное количество векторов множества комплексных чисел переходит в один и тот же вектор единичной длины.
- Невозможно создать морфизм, обратный данному. Т. е. $\nexists \phi^{-1} : \phi^{-1}(\phi(z)) = z$.

> Ответ:
> Ядро: $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
> Образ: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
> ϕ не является мономорфизмом, изоморфизмом и эпиморфизмом.

2 Пусть $\mathbb{C}[x]$ обозначает аддитивную группу многочленов от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{C}$, а H — подмножество многочленов, имеющих корень 3. Докажите, что $\mathbb{C}[x]/H \cong \mathbb{C}$.

Нейтральный элемент группы $\mathbb{C}[x]$ $e_{\mathbb{C}[x]}$ равен 0 (многочлен нулевой степени).
Нейтральный элемент группы $\mathbb{C}^+$ $e_{\mathbb{C}^+}$ равен 0.
Возьмём морфизм $f : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}^+$, такой, что $f(c) = c(3)$.
Докажем, что это гомоморфизм:

$$f(P+Q) = f(P) + f(Q)$$

Т. к. значение многочлена в точке это подстановка чисел во все его члены, то значение суммы многочленов равно сумме значений многочленов. Следовательно, f — это гомоморфизм.

$P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, Q_l = \sum_{k=0}^{l} b_k x^k$ — многочлены степеней n и l соответственно на комплексном множестве ($a_k, b_k \in \mathbb{C}$). $n \geq l$. $\forall k \in \{l+1, l+2, ..., n\}, b_k = 0$. Так как сложение как многочленов, так и комплексных чисел коммутативно, можно поменять местами P и Q. Следовательно, под ограничение $n \geq l$ подходят любые два многочлена, если расположить их в нужном порядке. На результат это не повлияет.

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

$$f(P+Q) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) 3^k$$

$$f(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k 3^k$$

$$f(Q) = \sum_{k=0}^{n} b_k 3^k$$

$$f(P) + f(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k 3^k + \sum_{k=0}^{n} b_k 3^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) 3^k = f(P+Q) \text{ — следовательно, гомоморфизм}$$

Ядром этого гомоморфизма f будет множество H (элементы $\mathbb{C}[x]$, такие, что $f(c) = e_{\mathbb{C}^+} = 0$, а это и есть множество H):

$$\mathrm{Ker}(f) = H$$

Образом будет всё множество комплексных чисел:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}$$

По теореме о том, что факторгруппа по ядру гомоморфизма изоморфна его образу:

$$\mathbb{C}[x]/H \cong \mathbb{C}^+$$

Что и требовалось доказать.

$\boxed{\text{Ответ: } f : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}^+,\ f(c) = c(3) \text{ — изоморфизм}}$