

1 Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное и их свойства

Определение.

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\{d | \forall i \quad a_i : d\} \quad d - \text{общий делитель}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{НОД}(a_1, \dots, a_n) = \max d$$

$$\{s | \forall i \quad s : a_i\} \quad s - \text{общее кратное}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{НОК}(a_1, \dots, a_n) = \min s$$

1.1 Свойства НОД и НОК

Утверждение 1

$$\left. \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} \\ m = \text{НОК}(a_1, \dots, a_n) \\ c = \text{ОК}(a_1, \dots, a_n) \end{array} \right| \Rightarrow c : m$$

Доказательство:

\square c не $:$ на m (от противного)

$$c = qm + r \quad 0 < r < m$$

$$\forall i \quad c : a_i \quad m : a_i$$

$$c - qm : a_i$$

$$r : a_i \quad r - \text{ОК}(a_1, \dots, a_n)$$

Утверждение 2

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$$

d_1, \dots, d_k - все натуральные ОД (a_1, \dots, a_n)

$$\text{НОД}(a_1, \dots, a_n) = \text{НОК}(d_1, \dots, d_k)$$

Доказательство:

$$d_k = \text{НОД}(a_1, \dots, a_n)$$

$$a_i : d_j$$

$$a_i : \text{НОК}(d_1, \dots, d_k)$$

$$d_k \geq \text{НОК}(d_1, \dots, d_k)$$

$$\text{НОК}(d_1, \dots, d_k) : d_k$$

$$\text{НОК}(d_1, \dots, d_k) \geq d_k$$

Следствие 2-1:

$$a_1 : d$$

$$\dots \Rightarrow \text{НОД}(a_1, \dots, a_n) : d$$

$$a_n : d$$

Доказательство следствия:

$$\text{НОК}(d_1, \dots, d_k) : d_i$$

\parallel

$$\text{НОД}(a_1, \dots, a_n)$$

Утверждение 3.

$$1. \quad a : d, b : d \Rightarrow \text{НОД}(a, b) : d$$

2. $s \vdots a, s \vdots b \Rightarrow s \vdots \text{НОК}(a, b)$
3. $\text{НОД}(a, b), \text{НОК}(a, b) = ab$
4. $bc \vdots a \quad \text{НОД}(a, b) = d \Rightarrow c \vdots \frac{a}{d}$
5. $bc \vdots a \quad \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow c \vdots a$
6. $\text{НОД}(ma, mb) = m \text{НОД}(a, b)$
7. $a \vdots d, b \vdots d \Rightarrow \text{НОД}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{\text{НОД}(a, b)}{d}$
8. $\text{НОД}(a, b) = d \Rightarrow \text{НОД}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$
9. $\text{НОД}(a, b) = b \Leftarrow a \vdots b \quad a, b \in \mathbb{N}$
10. $\text{НОД}(a + kb, b) = \text{НОД}(a, b) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Доказательства:

1. - следствие 2-1
2. - утверждение 1

$$3. \left. \begin{array}{l} ab \vdots a \\ ab \vdots b \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} ab \vdots \text{НОК}(a, b) \\ \frac{a}{d} = \frac{\text{НОК}(a, b)}{b} \in \mathbb{Z} \quad \frac{b}{d} = \frac{\text{НОК}(a, b)}{a} \in \mathbb{Z} \end{array} \quad d = \frac{ab}{\text{НОК}(a, b)}$$

$$\square d^* \text{ — ОД}(a, b)$$

$$a \vdots d^*$$

$$b \vdots d^*$$

$$\frac{ab}{d^*} = \frac{a}{d^*} b \vdots b \quad \frac{ab}{d^*} = \frac{b}{d^*} a \vdots a$$

$$\frac{ab}{d^*} = k \text{НОК}(a, b) = k \frac{ab}{d} \mid \Rightarrow d = kd^* \vdots d^*$$

$$|d| \geq |d^*|$$

$$d = \text{НОД}(a, b)$$

$$4. bc \vdots a \quad \text{НОД}(a, b) = d \quad \text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{d}$$

$$\left. \begin{array}{l} bc \vdots a \\ bc \vdots b \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} bc \vdots \text{НОК}(a, b) \\ bc \vdots \frac{ab}{d} \\ c \vdots \frac{a}{d} \end{array}$$

5. без доказательства

$$6. a \vdots \text{НОД}(a, b)$$

$$ma \vdots m \text{НОД}(a, b)$$

$$mb \vdots m \text{НОД}(a, b)$$

$$\text{НОД}(ma, mb) \vdots m \text{НОД}(a, b)$$

$$d \text{ — ОД } (ma, mb)$$

$$\frac{mab}{d} = \frac{ma}{d}b = \frac{mb}{d}a$$

$$\frac{mab}{d} \text{ — ОК } (a, b)$$

$$\frac{mab}{d} : \text{НОК } (a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$mab \text{ НОД}(a, b) : abd$$

$$m \text{ НОД}(a, b) : d$$

$$m \text{ НОД}(a, b) = \text{НОД}(ma, mb)$$

$$7. d \text{ НОД}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \text{НОД}(a, b) \text{ через } 6$$

$$8. \text{НОД}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{\text{НОД}(a, b)}{d} = \frac{d}{d} = 1$$

$$9. a : b$$

$$b : b$$

$$b \text{ — ОД } (a, b)$$

$$d \text{ — ОД } (a, b) \quad d > b$$

$$b : d \quad b \geq d \text{ (противоречие)}$$

$$10. d = \text{НОД}(a, b)$$

$$b : d$$

$$a : d \quad a + kb : d$$

$$d \text{ — ОД}(a + kb, b)$$

$$d^* \text{ — ОД}(a + kb, b)$$

$$a + kb : d^*$$

$$b : d^*$$

$$a + kb - kb : d^*$$

$$a : d^* \Rightarrow d^* \text{ — ОД}(a, b)$$

$$d \geq d^*$$

Утверждение 4.

$$\text{НОД}(a, \text{НОД}(b, c)) = \text{НОД}(a, b, c)$$

Доказательство:

$$\text{НОД}(b, c) = f$$

$$\text{НОД}(a, f) = g$$

$$a : g$$

$$b : f : g$$

$$c : f : g$$

$$\square d \text{ — ОД}(a, b, c)$$

$$\left. \begin{array}{l} b : d \\ c : d \end{array} \right| \Rightarrow \text{НОД}(b, c) = f : d$$

$$\left. \begin{array}{l} a : d \\ f : d \end{array} \right| \Rightarrow \text{НОД}(a, f) = g : d \Rightarrow g = \text{НОД}(a, b, c)$$

Утверждение 5. $\text{НОК}(a, \text{НОК}(b, c)) = \text{НОК}(a, b, c)$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 4

1.2 Алгоритм нахождения НОД

1.2.1 Способ 1

Поиск всех возможных делителей двух чисел и в выбор наибольшего из них. Пример на числах 12 и 9.

$$12 : 1 = 12$$

$$12 : 2 = 6$$

$$12 : 3 = 4$$

$$12 : 4 = 3$$

$$12 : 5 = 2 \text{ (2 остаток)}$$

$$12 : 6 = 2$$

$$12 : 7 = 1 \text{ (5 остаток)}$$

$$12 : 8 = 1 \text{ (4 остаток)}$$

$$12 : 9 = 1 \text{ (3 остаток)}$$

$$12 : 10 = 1 \text{ (2 остаток)}$$

$$12 : 11 = 1 \text{ (1 остаток)}$$

$$12 : 12 = 1$$

Теперь для числа 9 сделаем то же самое.

$$9 : 1 = 9$$

$$9 : 2 = 4 \text{ (1 остаток)}$$

$$9 : 3 = 3$$

$$9 : 4 = 2 \text{ (1 остаток)}$$

$$9 : 5 = 1 \text{ (4 остаток)}$$

$$9 : 6 = 1 \text{ (3 остаток)}$$

$$9 : 7 = 1 \text{ (2 остаток)}$$

$$9 : 8 = 1 \text{ (1 остаток)}$$

$$9 : 9 = 1$$

Выпишем делители обоих чисел (те, что без остатка).

Делители числа 12 - (1 2 3 4 6 12)

Делители числа 9 - (1 3 9)

Согласно определению, НОДом чисел 12 и 9, является число, на которое 12 и 9 делятся без остатка.

НОДом чисел 12 и 9 является число 3.

1.2.2 Способ 2

Суть данного способа заключается в том, чтобы разложить оба числа на простые множители и перемножить общие из них. Пример на числах 24 и 18.

Разложим оба числа на множители.

| Делимое | Делитель | Делимое | Делитель |
|---------|----------|---------|----------|
| 24 | 2 | 18 | 2 |
| 12 | 2 | 9 | 3 |
| 6 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | |
| 1 | | | |

Теперь перемножим их общие множители. Смотрим на разложение числа 24. Первый его множитель это 2. Ищем такой же множитель в разложении числа 18 и видим, что он там тоже есть.

Снова смотрим на разложение числа 24. Второй его множитель тоже 2. Ищем такой же множитель в разложении числа 18 и видим, что его там второй раз уже нет.

Следующая двойка в разложении числа 24 также отсутствует в разложении числа 18.

Переходим к последнему множителю в разложении числа 24. Это множитель 3. Ищем такой же множитель в разложении числа 18 и видим, что там он тоже есть.

Итак, общими множителями чисел 24 и 18 являются множители 2 и 3. Чтобы получить НОД, эти множители необходимо перемножить: $2 \times 3 = 6$

Значит $\text{НОД}(24, 18) = 6$

1.2.3 Способ 3

Суть данного способа заключается в том, что числа подлежащие поиску наибольшего общего делителя раскладывают на простые множители. Затем из разложения первого числа вычеркивают множители, которые не входят в разложение второго числа. Оставшиеся числа в первом разложении перемножают и получают НОД. Рассмотрим на примере чисел 28 и 16.

В первую очередь, раскладываем числа 28 и 16 на простые множители:

| Делимое | Делитель | Делимое | Делитель |
|---------|----------|---------|----------|
| 28 | 2 | 16 | 2 |
| 14 | 2 | 8 | 2 |
| 7 | 7 | 4 | 2 |
| 1 | | 2 | 2 |
| | | 1 | |

Получили два разложения: $2 \times 2 \times 7$ и $2 \times 2 \times 2 \times 2$

Теперь из разложения первого числа вычеркнем множители, которые не входят в разложение второго числа. В разложение второго числа не входит семёрка. Её и вычеркнем из первого разложения.

Теперь перемножаем оставшиеся множители и получаем НОД: $2 \times 2 = 4$

Число 4 является наибольшим общим делителем чисел 28 и 16. Оба этих числа делятся на 4 без остатка:

$$28 : 4 = 7$$

$$16 : 4 = 4$$

$$\text{НОД}(28, 16) = 4$$

1.3 Алгоритм нахождения НОК

1.3.1 Способ 1

Можно выписать первые кратные двух чисел, а затем выбрать среди этих кратных такое число, которое будет общим для обоих чисел и маленьким. Рассмотрим на примере числа 9 и 12.

В первую очередь, найдем первые кратные для числа 9. Чтобы найти кратные для 9, нужно эту девятку поочерёдно умножить на числа от 1 до 9. Получаемые ответы будут кратными для числа 9.

$$9 \times 1 = 9$$

$$9 \times 2 = 18$$

$$9 \times 3 = 27$$

$$9 \times 4 = 36$$

$$9 \times 5 = 45$$

$$9 \times 6 = 54$$

$$9 \times 7 = 63$$

$$9 \times 8 = 72$$

$$9 \times 9 = 81$$

Теперь находим кратные для числа 12. Для этого поочерёдно умножим число 12 на все числа 1 до 12:

$$12 \times 1 = 12$$

$$12 \times 2 = 24$$

$$12 \times 3 = 36$$

$$12 \times 4 = 48$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$12 \times 6 = 72$$

$$12 \times 7 = 84$$

$$12 \times 8 = 96$$

$$12 \times 9 = 108$$

$$12 \times 10 = 120$$

$$12 \times 11 = 132$$

$$12 \times 12 = 144$$

Теперь выпишем кратные обоих чисел:

9: 9 18 27 36 45 54 63 72 81

12: 12 24 36 48 60 72 84 96 108 120 132 144

Найдём общие кратные обоих чисел.

Общими кратными для чисел 9 и 12 являются кратные 36 и 72. Наименьшим же из них является 36.

Значит наименьшее общее кратное для чисел 9 и 12 это число 36. Данное число делится на 9 и 12 без остатка:

$$36 : 9 = 4$$

$$36 : 12 = 3$$

$$\text{НОК}(9 \text{ и } 12) = 36$$

1.3.2 Способ 2

Второй способ заключается в том, что числа для которых ищется наименьшее общее кратное раскладываются на простые множители. Затем выписываются множители, входящие в первое разложение, и добавляют недостающие множители из второго разложения. Полученные множители перемножают и получают НОК.

Применим данный способ для предыдущей задачи. Найдём НОК для чисел 9 и 12.

Разложим на множители число 9 и 12:

| Делимое | Делитель | Делимое | Делитель |
|---------|----------|---------|----------|
| 9 | 3 | 12 | 2 |
| 3 | 3 | 6 | 2 |
| 1 | | 3 | 3 |
| | | 1 | |

Выпишем первое разложение и допишем множители из второго разложения, которых нет в первом разложении. В первом разложении нет двух двоек. Допишем и перемножим: $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$

Получили ответ 36. Значит наименьшее общее кратное чисел 9 и 12 это число 36. Данное число делится на 9 и 12 без остатка:

$$36 : 9 = 4$$

$$36 : 12 = 3$$

$$\text{НОК}(9 \text{ и } 12) = 36$$

Говоря простым языком, всё сводится к тому, чтобы организовать новое разложение куда входят оба разложения сразу. Разложением первого числа 9 являлись множители 3 и 3, а разложением второго числа 12 являлись множители 2, 2 и 3.

Наша задача состояла в том, чтобы организовать новое разложение куда входило бы разложение числа 9 и разложение числа 12 одновременно. Для этого мы выписали разложение первого числа и дописали туда множители из второго разложения, которых не было в первом разложении. В результате получили новое разложение $3 \times 3 \times 2 \times 2$. Нетрудно увидеть воочию, что в него одновременно входят разложение числа 9 и разложение числа 12.

1.3.3 Способ 3

Он работает при условии, что его ищут для двух чисел и при условии, что уже найден наибольший общий делитель этих чисел.

Данный способ разумнее использовать, когда одновременно нужно найти НОД и НОК двух чисел.

К примеру, пусть требуется найти НОД и НОК чисел 24 и 12. Сначала найдем НОД этих чисел:

| Делимое | Делитель | Делимое | Делитель |
|---------|----------|---------|----------|
| 24 | 2 | 12 | 2 |
| 12 | 2 | 6 | 2 |
| 6 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | |
| 1 | | | |

Теперь для нахождения наименьшего общего кратного чисел 24 и 12, нужно перемножить эти два числа и полученный результат разделить на их наибольший общий делитель.

Итак, перемножим числа 24 и 12. (288)

Разделим полученное число 288 на НОД чисел 24 и 12. ($288 : 12 = 24$)

Получили ответ 24. Значит наименьшее общее кратное чисел 24 и 12 равно 24

$\text{НОК}(24 \text{ и } 12) = 24$.

2 Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД(?)

2.1 Алгоритм Евклида

$a, b \in \mathbb{N}$

$\text{НОД}(a, b)$ - ?

while $b \neq 0$

$(a, b) = (b, a \% b)$

return a

$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a + kb, b)$

$k = -\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$

$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b, b) = \text{НОД}(a \% b, b)$

$a : b : \text{НОД}(a, b) = b$

2.2 Бинарный алгоритм Евклида

$a, b \in \mathbb{N}$

$i = 0; j = 0;$

while $!(a \& 1)$ {

$a \gg= 1;$

$i ++;$

}

while $!(b \& 1)$ {

$b \gg= 1;$

$j ++;$

}

if $(a > b)$ { $t = a; a = b; b = t;$ }

while $(a \neq 0)$ {

$b -= a;$

while $!(b \& 1)$ $b \gg= 1;$

if $(a > b)$ {

$t = a;$

$a = b;$

$b = t;$

}

}

return $b \ll \text{std::min}(i, j);$

2.3 Расширенный алгоритм Евклида

```

 $a, b \in \mathbb{N}$ 
while  $b \neq 0$ 
     $q = a/b$ 
     $(a, b) = (b, a - qb)$ 
     $(x, y) = (y, x - qy)$ 
 $a \leftarrow \text{НОД}$ 
 $a, b$ 
 $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ 
while  $b \neq 0$ 
     $q = a/b$ 
     $(a, b) = (b, a - qb)$ 
     $(x, y, u, v) = (u, v, x - qu, y - qv)$ 
return  $(a, x, y)$ 

```

3 Континуанта

3.1 Определение

Введенные понятия цепной дроби и подходящих дробей оказываются очень полезными для анализа работы алгоритма Евклида. Дадим необходимые обозначения. Рассмотрим трехдиагональный определитель:

$$\begin{vmatrix} q_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & q_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & q_{n-1} \end{vmatrix} = K_n(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$$

Определитель называют континуантой n -го порядка или индекса.

Континуанта индекса n есть многочлен $K_n(x_1, \dots, x_n)$

Разложим континуанту n -го порядка по последнему столбцу:

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})$$

Отсюда можно задать континуанту рекуррентным соотношением:

$$K_{-1} = 0, K_0 = 1, K_n = x_n K_{n-1} + K_{n-2}$$

Соотношение очень напоминает рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей. Это не случайно и две следующие леммы подтверждают предположение о связи континуант и цепных дробей.

3.2 Лемма 1

Континуанта $K_n(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$ равна сумме всевозможных произведений элементов q_0, q_1, \dots, q_{n-1} , одно из которых содержит все эти элементы, а другие получаются из него выбрасыванием одной или нескольких пар сомножителей с соседними номерами (если выброшены все сомножители, то считаем, что осталась 1).

Доказательство. Индукция по n . База индукции:

$$K_1(q_0) = q_0, K_2(q_0, q_1) = \begin{vmatrix} q_0 & 1 \\ -1 & q_1 \end{vmatrix} = q_0 q_1 + 1$$

и утверждение леммы справедливо для континуант первого и второго порядков. Шаг индукции. Пусть утверждение леммы справедливо для континуант $(n-2)$ -го и $(n-1)$ -го порядков. Применив разложение, получим требуемое.

Пример

$$K_6(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = q_0q_1q_2q_3q_4q_5 + q_2q_3q_4q_5 + q_0q_3q_4q_5 + q_0q_1q_4q_5 + q_0q_1q_2q_5 + q_0q_1q_2q_3 + q_4q_5 + q_2q_5 + q_0q_5 + q_2q_3 + q_0q_3 + q_0q_1 + 1$$

Явная связь континуант и цепных дробей впервые была установлена Эйлером.

3.3 Лемма Эйлера

Справедливо тождество

$$[q_0; q_1, \dots, q_{n-1}] = \frac{K_n(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})}{K_{n-1}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}$$

Доказательство. Индукция по n . База индукции:

$$[q_0; q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0q_1 + 1}{q_1} = \frac{K_2(q_0, q_1)}{K_1(q_1)}$$

Шаг индукции. Пусть тождество верно для дробей с $n-1$ звеном включительно. Представим n -звенную дробь $(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$ дробью с $n-1$ звеном, где последнее звено имеет вид $q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}$. Применив к этой дроби индукционное предположение, с учетом разложения, имеем

$$\begin{aligned} [q_0; q_1, \dots, q_{n-1}] &= [q_0, q_1, \dots, q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}] = \frac{K_{n-1}(q_0, q_1, \dots, (q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}))}{K_{n-2}(q_1, q_2, \dots, (q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}))} = \frac{(\frac{1}{q_{n-1}})K_{n-2}(q_0, q_1, \dots, q_{n-3}) + K_{n-3}(q_0, q_1, \dots, q_{n-4})}{(\frac{1}{q_{n-1}})K_{n-3}(q_1, q_2, \dots, q_{n-3}) + K_{n-4}(q_1, q_2, \dots, q_{n-4})} = \\ &= \frac{K_{n-1}(q_0, q_1, \dots, q_{n-2}) + \frac{K_{n-2}(q_0, q_1, \dots, q_{n-3})}{q_{n-1}}}{K_{n-2}(q_1, q_2, \dots, q_{n-2}) + \frac{K_{n-3}(q_1, q_2, \dots, q_{n-3})}{q_{n-1}}} = \frac{K_n(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})}{K_{n-1}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})} \end{aligned}$$

Перейдем к анализу алгоритма Евклида. Нас будет интересовать наихудший случай — когда алгоритм Евклида работает особенно долго. Сформулируем вопрос точнее: для каких двух наименьших чисел надо применить алгоритм Евклида, чтобы он работал в точности заданное число шагов? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

3.4 Теорема Ламе

Пусть n — произвольное натуральное число, и $a > b > 0$ такие, что алгоритму Евклида для обработки a и b необходимо выполнить точно n шагов (делений с остатком), причем a — наименьшее натуральное число с таким свойством. Тогда

$$a = \varphi_{n+2}, b = \varphi_{n+1}$$

где φ_k — k -ое число Фибоначчи ($\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_i = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}$).

Доказательство. Разложим a/b в цепную дробь. Согласно лемме Эйлера получаем,

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \dots, q_{n-1}] = \frac{K_n(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})}{K_{n-1}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}$$

где $q_0; q_1, \dots, q_{n-1}$ — неполные частные из алгоритма Евклида. По условию теоремы, их ровно n . Принимая во внимание несократимость подходящих дробей становится очевидно, что континуанты $q_0; q_1, \dots, q_{n-1}$ и $q_1; q_2, \dots, q_{n-1}$ взаимно просты. Пусть $\text{НОД}(a, b) = d$. Тогда

$$\begin{cases} a = K_n(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}) \\ b = K_{n-1}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}) \end{cases} \quad (1)$$

В силу единственности разложения в цепную дробь, в случае $a > b > 0$ справедливы неравенства $q_0, q_1, \dots, q_{n-2} > 1, q_{n-1} > 2$. Очевидно, что $d > 1$. По лемме 1, континуанта есть многочлен с неотрицательными коэффициентами от переменных q_0, q_1, \dots . Его минимальное значение очевидно достигается при $q_0 = q_1 = \dots = q_{n-2} = 1, q_{n-1} = 2$. Положив $d = 1$ и подставив эти значения q_i , получим требуемое.

4 Цепные дроби. Наилучшие приближения

4.1 Цепные дроби. Непрерывные дроби

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}; a_0 \in \mathbb{Z}; a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}; a_n > 1$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}} = \dots = [q_1; q_2, q_3, \dots, q_{k+1}]$$

$$-\frac{48}{109} = [-1; 1, 1, 3, 1, 2, 4]$$

$$-48 = 109(-1) + 61$$

$$109 = 61 * 1 + 48$$

$$61 = 48 * 1 + 13$$

$$48 = 13 * 3 + 9$$

$$13 = 9 * 1 + 4$$

$$9 = 4 * 2 + 1$$

$$4 = 1 * 4$$

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

Подходящая дробь

$$\delta_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$$

$$\delta_0 = [-1] = \frac{P_0}{Q_0}$$

$$\delta_1 = [-1; 1] = \frac{P_1}{Q_1}$$

$$\delta_2 = [-1; 1, 1] = \frac{P_2}{Q_2}$$

$$\delta_3 = [-1; 1, 1, 3] = \frac{P_3}{Q_3}$$

$$P_0 = a_0 \quad Q_0 = 1$$

$$\delta_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}$$

$$\delta_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \quad P_1 = a_0 a_1 + 1 \quad Q_1 = a_1$$

$$\delta_k = [a_0; a_1, \dots, a_k] = \frac{P_k(a_0, \dots, a_k)}{Q_k(a_0, \dots, a_k)}$$

$$\delta_{k+1} = [a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] = \frac{P_k(a_0, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}})}{Q_k(a_0, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}})} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{a_k q_{k+1} P_{k-1} + P_{k-1} + q_{k+1} P_{k-2}}{a_k q_{k+1} Q_{k-1} + Q_{k-1} + q_{k+1} P_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{a_{k+1}(a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} = \\ &= \frac{a_{k+1} P_k + P_{k-1}}{a_{k+1} Q_k + Q_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \quad P_{k+1} = a_{k+1} P_k + P_{k-1}; \quad Q_{k+1} = a_{k+1} Q_k + Q_{k-1} \end{aligned}$$

$$\delta_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

$$P_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_3$$

$$Q_2 = a_1 a_2 + 1$$

$$[-1; 1, 1, 3, 1, 2, 4]$$

$$k \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$a_n \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 4$$

$$P_n \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad -3 \quad -4 \quad -11 \quad -48$$

$$Q_n \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 7 \quad 9 \quad 25 \quad 109$$

$$\delta_0 = -1; \delta_1 = 0; \delta_2 = -\frac{1}{2}; \delta_3 = -\frac{3}{7}; \delta_4 = -\frac{4}{9}; \delta_5 = -\frac{11}{25}; \delta_6 = \alpha = -\frac{48}{109}$$

$$\text{УТВ. } \frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \frac{(-1)^{s+1}}{Q_s Q_{s-1}}$$

$$\text{ДОК-ВО: } \frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \frac{P_s Q_{s-1} - P_{s-1} Q_s}{Q_s Q_{s-1}}$$

$$h_s = P_s Q_{s-1} - P_{s-1} Q_s = (a_s P_{s-1} + P_{s-2}) Q_{s-1} - P_{s-1} (a_s Q_{s-1} + Q_{s-2}) = P_{s-2} Q_{s-1} - P_{s-1} Q_{s-2} = \\ = -(P_{s-1} Q_{s-2} - P_{s-2} Q_{s-1}) = -h_{s-1} = h_{s-2} = -h_{s-3} = \dots = (-1)^{s-1} h_1 = (-1)^{s-1} (P_1 Q_0 - P_0 Q_1) = \\ (-1)^{s-1} (a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1) = (-1)^{s-1}$$

Следствие: НОД(P_s, Q_s) = 1 (все подходящие дроби несократимы/ взаимно просты)

Следствие: $\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} \right| = 0$ (последовательность подходящих дробей фундаментальна)

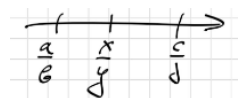
4.2 Наилучшие приближения

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right|$$

Опр. $\frac{a}{b}$ - наилучш. приближ. к числу α , если не сущ. другой дроби $\frac{x}{y}$: $\begin{cases} \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \\ 0 < y < b \end{cases}$

УТВ. $\frac{x}{y} \in \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \right)$ и $bc - ad = 1 \Rightarrow y > b$ и $y > d$

Доказательство: $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd}$ (по услов.)

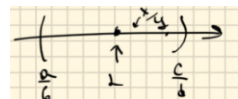


$$\frac{bx - ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \leq \frac{1}{bd} \cdot bdy; \quad xbd - ady \leq y; \quad d \leq (bx - ay)d < y$$

$$xbd \leq (ad + 1)y; \quad y \geq \frac{xbd}{ad + 1}; \quad cy - dx \geq 1$$

$$0 < \frac{c}{d} - \frac{x}{y} < \frac{1}{bd}; \quad 0 < \frac{cy - dx}{dy} < \frac{1}{bd} \left(\frac{cy - dx}{dy} \leq \frac{1}{dy} \right); \quad \frac{1}{dy} < \frac{1}{bd}; \quad b < y$$

Следствие: $\alpha \in \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \right)$ и $dc - ad = 1 \rightarrow$ та из $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right)$, кто ближе к α - наилучшее приближение.



Следствие: $\frac{P_s}{Q_s}$ - наил. приibl к α

$$\frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} \text{ и } \frac{P_s}{Q_s} : P_{s-1} Q_s - P_s Q_{s-1}$$

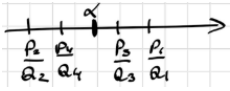
4.3 Бесконечные цепные дроби

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}}}} = \alpha$$

$$\eta_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}$$

$$\eta_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+1}, \dots] \rightarrow \alpha = [a_0; a_1, \dots, \eta_n]$$



Утверждение α между $\frac{P_s}{Q_s}$ и $\frac{P_{s+1}}{Q_{s+1}}$

Доказательство:

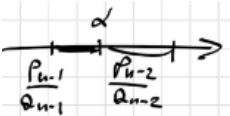
$$\alpha = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\eta_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$

$$1. \alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\eta_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\eta_n P_{n-1} Q_{n-1} + P_{n-2} Q_{n-1} - \eta_n P_{n-1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2}}{Q_{n-1}(\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2})} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2})}$$

$$2. \alpha - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{\eta_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{\eta_n P_{n-1} Q_{n-2} + P_{n-2} Q_{n-2} - \eta_n P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-2} Q_{n-2}}{Q_{n-2}(\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2})} = \frac{\eta_n (P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1})}{Q_{n-2}(\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2})} = \frac{\eta_n (-1)^{n-2}}{Q_{n-2}(\eta_n Q_{n-1} + Q_{n-2})}$$

$$3. \left| \alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = \frac{Q_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1}} \left| \alpha - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} \right| \Rightarrow \left| \alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| < \left| \alpha - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} \right|$$

$\frac{Q_{n-2}}{\eta_n Q_{n-1}} < 1$
 $Q_{n-2} < Q_{n-1} \leq \eta_n Q_{n-1}$



\Rightarrow Следствие: $\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}$

Доказательство: $\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}$

$$Q_{n+1} > Q_n$$

$$\frac{1}{Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n}$$

4.4 Пример

4.4.1 Действие:

ты берёшь и смотришь хмммм к какому числу $\sqrt{28}$ ближе СНИЗУ то есть $\sqrt{28}$ это примерно 5.хххх значит пишем 5+ и 5-

$$\sqrt{28} = 5 + (\sqrt{28} - 5)$$

4.4.2 Действие:

Мы переворачиваем дробь тупо берём и переворачиваем

$$5 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{28} - 5}}$$

4.4.3 Действие:

Теперь мы домножаем на сопряжённые верхнюю и нижнюю часть, то есть $\frac{1 * (\sqrt{28} + 5)}{(\sqrt{28} - 5)(\sqrt{28} + 5)}$ (Надеюсь, все знают что такое сопряжённые и как на них домнажать)

$$5 + \frac{1}{\frac{\sqrt{28} + 5}{3}}$$

4.4.4 Действие:

И последенее действие после которого весь алгоритм заиклиивается

Мы должны вынести целую часть то есть у нас есть $\frac{\sqrt{28} + 5}{3}$ наверху у нас примерно получится 10.xxxx значит мы выносим целую часть, которая равна 3 наверху у нас остаётся 1.xxxx и чтобы это получить из корня который равен $\sqrt{28} = 5.xxxx$ мы вычитаем 4. Таким образом у нас получается

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{28} - 4}{3}}$$

4.4.5 Действие:

Мы снова переварачиваем дробь и получаем уже

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{28} - 4}}}$$

и опять домножаем на сопряжённые получаем

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3(\sqrt{28} + 4)}{12}}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{28} + 4}{4}}}$$

Выносим целую часть

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{28} - 4}{4}}}$$

И так далее. Каждое целое число это значение в цепной дроби. Сейчас мы дошли до $[5; 3, 2]$. Продолжать можно пока не захотите остановиться или пока не начнётся уже период тогда уже нет смысла считать одно и тоже будет.

5 Простые числа. Основная теорема арифметики.

5.1 Определение

$p \in \mathbb{N}$ простое, если есть ровно 2 натуральных делителя.

5.2 Определение

$a \in \mathbb{N}$ составное, если есть > 2 натуральных делителей

5.3 Утверждение

p - простое, $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ или $b \vdots p$

5.3.1 Доказательство

Пусть a не делится на p , $\text{НОД}(a, p) = 1 \Rightarrow b \vdots p$

5.4 Утверждение

$\text{НОД}(a, bc) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$ и $\text{НОД}(a, c) = 1$

5.4.1 Доказательство

$| \Rightarrow | \text{НОД}(a, b) = d$

$a \vdots d$

$bc \vdots b \vdots d$

$\text{НОД}(a, bc) \vdots d$

$1 \vdots d$

$d = 1$

$| \Leftarrow | \text{НОД}(a, bc) = d$

$\text{НОД}(b, d) = f$

$a \vdots d \vdots f \quad a \vdots d \vdots \frac{d}{f}$

$bc \vdots d$

$b \vdots f$

$c \vdots \frac{d}{f}$

$\text{НОД}(a, b) \vdots f$

$1 \vdots f \quad \frac{d}{f} = 1$

$f = 1 \quad d = 1$

5.5 Утверждение

$\text{НОД}(b, c) = 1$

$a \vdots b, a \vdots c \Rightarrow a \vdots bc$

5.5.1 Доказательство

$a \vdots \text{НОК}(b, c) = \frac{bc}{\text{НОД}(b, c)} = bc$

5.6 Утверждение

$\text{НОД}(b, c) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a, bc) = \text{НОД}(a, b) \text{НОД}(a, c)$

5.6.1 Доказательство

$\text{НОД}(\text{НОД}(a, b), \text{НОД}(a, c)) = d$

$b \vdots \text{НОД}(a, b) \vdots d$

$c \vdots \text{НОД}(a, c) \vdots d$

$\text{НОД}(b, c) \vdots d$

$$\begin{aligned}
d &= 1 \\
bc &\vdots \text{НОД}(a, b), bc \vdots \text{НОД}(a, c) \Rightarrow bc \vdots \text{НОД}(a, b)\text{НОД}(a, c) \\
f &\text{— ОД}(a, bc) \quad a \vdots f \quad bc \vdots f \\
\text{НОД}(a, b) &= g, \text{НОД}\left(\frac{b}{g}, \frac{f}{g}\right) = 1 \quad c \vdots \frac{f}{g} \\
a \vdots f \vdots g \quad b \vdots g \quad \text{НОД}(a, b) &\vdots g \\
a \vdots f \vdots \frac{f}{g}, c \vdots \frac{f}{g} &\Rightarrow \text{НОД}(a, c) \vdots \frac{f}{g} \\
\text{НОД}(a, b)\text{НОД}(a, c) &\vdots f
\end{aligned}$$

5.7 Утверждение

$$\forall a \in \mathbb{N}, a > 1 \Rightarrow \exists p \text{ простое } a \vdots p$$

5.7.1 Доказательство

$$\begin{aligned}
1, d_1, \dots, d_k &\text{ - делители } a \\
d_1 \text{ простое } d_1 \vdots f \quad a \vdots d_1 \vdots f
\end{aligned}$$

5.8 Утверждение(основная теорема арифметики)

$$\forall a \in \mathbb{N}, a > 1, \quad a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_i = 0$$

5.8.1 Доказательство

$$\begin{aligned}
a &= a \quad a = bc \quad a = bc = p_1^{\beta_1} \dots p_1^{\beta_1} p_3^{\beta_3} \dots p_k^{\beta_k} \\
a &= p_1^{\alpha_k} \dots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l} \\
p_1 &= q_1 a = p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1-2} \dots q_l^{\beta_l}
\end{aligned}$$

5.9 Утверждение

$$\begin{aligned}
\alpha &= p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k} \quad \beta = p_1^{\delta_1} \dots p_k^{\delta_k} \\
\gamma_i &\geq 0 \quad \delta_i \geq 0 \quad p_i \text{— простое} \\
\text{НОД}(\alpha, \beta) &= p_1^{\min(\gamma_1, \delta_1)} \dots p_k^{\min(\gamma_k, \delta_k)} \\
\text{НОК}(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^k p_i^{\max(\gamma_i, \delta_i)}
\end{aligned}$$

5.9.1 Доказательство

$$\begin{aligned}
]d &= \prod_{i=1}^k p_i^{\min(\gamma_i, \delta_i)} \\
\alpha \vdots d, \beta \vdots d,]d' &\text{— ОД}(\alpha, \beta) \\
\alpha \vdots q_1^{\epsilon_1} \dots q_s^{\epsilon_s} \\
]q_1 &\neq p_1, q_1 \neq p_2, \dots, q_1 \neq p \\
p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k} \vdots q_1, \text{НОД}(p_1^{\gamma_1}, q_1) &= 1 \Rightarrow p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k} \vdots q_1 \Rightarrow p_k^{\gamma_k} \vdots q_1 \\
d' &= p_1^{\epsilon_1} \dots p_k^{\epsilon_k} \\
]|\epsilon_1 &> \gamma_1 \quad \alpha \vdots d' \vdots p_1^{\epsilon_1} \quad p_1^{\gamma_1} \vdots p_1^{\epsilon_1} \\
p_1^{\gamma_1-\epsilon_1} &\in \mathbb{Z} \quad \gamma_1 - \epsilon \geq 0 \quad \epsilon_1 \leq \gamma_1 \quad \epsilon_1 \leq \delta_1 \quad \epsilon_1 \leq \min(\gamma_1, \delta_1) \quad d' \leq d \\
\text{НОД}(\alpha, \beta)\text{НОК}(\alpha, \beta) &= \alpha\beta \\
\text{НОК}(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha\beta}{\text{gcd}(\alpha, \beta)} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\gamma_i} p_i^{\delta_i}}{\min(\gamma_i, \delta_i)} = \prod_{i=1}^k p_i^{\max(\gamma_i, \delta_i)}
\end{aligned}$$

5.9.2 Пример

$$24 = 2^3 * 3 * 5^0$$

$$90 = 2 * 3^2 * 5$$

$$\text{НОД}(24, 90) = 2^{\min(3,1)} 3^{\min(1,2)} 5^{\min(0,1)} = 2^1 * 3^1 * 5^0 = 6$$

6 Кольца вычетов. Полная система вычетов. Теорема о кольцах вычетов по простому модулю

6.1 Кольца вычетов

$$\langle x, +, * \rangle$$

$$\text{Кольцо} \left\{ \begin{array}{l} \text{Абелева группа} \left\{ \begin{array}{l} \text{Полугруппа} \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \quad (a+b)+c = a+(b+c) \\ 2^\circ \quad \exists 0 : a+0 = a \\ 3^\circ \quad \forall a \quad \exists (-a) : a+(-a) = 0 \\ 4^\circ \quad a+b = b+a \end{array} \right. \\ 5^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} (a+b)*c = (a*c) + (b*c) \\ c*(a+b) = (c*a) + (c*b) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

6.1.1 Свойства колец

- Кольцо ассоциативно: $(a * b) * c = a * (b * c)$
- Кольцо коммутативно: $a * b = b * a$
- Кольцо с единицей: $\exists 1 : 1 * a = a$
- Область целостности: $\exists a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a * b \neq 0$

6.1.2 Примеры колец

- Кольцо целых чисел \mathbb{Z} , кольцо рациональных чисел \mathbb{Q} , кольцо вещественных чисел \mathbb{R}
- Кольцо $\mathbb{Z}[i]$ целых гауссовых чисел вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$
- Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ вещественных чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a, b

6.1.3 Поле

Поле - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей в котором $\forall a \neq 0 \quad \exists a^{-1} : a * (a^{-1}) = 1$

6.1.4 Множество классов вычетов

Множество классов вычетов (обозначают \mathbb{Z}_m) является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей

6.1.5 Примеры полей

- Числовые поля \mathbb{Q}, \mathbb{R}
- Поле $\mathbb{Q}[i]$ рациональных чисел вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Q}$
- Поле $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ вещественных чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a, b

6.2 Полная система вычетов

Классом вычетов по модулю m называют множество чисел с одинаковым остатком при делении на m

6.2.1 Определение

Если взять по одному представителю из каждого класса вычетов, то эти m чисел образуют полную систему вычетов по модулю m

6.2.2 Примеры простейших полных систем вычетов

- $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ наименьшие положительные вычеты
- $\{0, -1, -2, \dots, -(m-1)\}$ наименьшие отрицательные вычеты
- для произвольного $a \in \mathbb{Z}$ $\{a, a+1, a+2, \dots, a+(m-1)\}$
- если $D(a, m) = 1$, то $\{0, a, 2a, \dots, (m-1)a\}$

6.3 Теорема о кольцах вычетов по простому модулю

Китайская теорема об остатках утверждает, что система сравнений с попарно взаимно простыми модулями m_1, m_2, \dots, m_k :

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv c_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

всегда разрешима и имеет единственное решение по модулю $(m_1 m_2 \dots m_k)$

Другими словами, китайская теорема об остатках утверждает, что кольцо вычетов по модулю произведения нескольких попарно взаимно простых чисел является прямым произведением соответствующих множителей колец вычетов

6.3.1 Теорема

Если модуль m - составное число, то \mathbb{Z}_m не является полем

Доказательство

Пусть $m = p_1 p_2$, $1 < p_1, p_2 < m$

Будем считать, что $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}_m$ - классы вычетов, которым принадлежат p_1, p_2 . Тогда:

$P_1 P_2 = 0$, $P_1, P_2 \neq 0$ и элементы P_1, P_2 необратимы.

Почему p_1 и p_2 необратимы:

$\forall i \in [1, p_2) \quad p_1 \cdot i < m, p_1 \neq 1$

$p_1 * p_2 = 0 \neq 1$

$p_1 * (p_2 + 1) = p_1 \pmod{m} \neq 1 \Rightarrow$ у p_1 нет обратного

Следовательно, \mathbb{Z}_m - не поле

7 Линейные сравнения

Теорема: Если $\text{НОД}(a, b) = d$, то уравнение $a * x \equiv b \pmod{m}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $b:d$.

Доказательство _____

$\Rightarrow ax \equiv b \pmod{m}$, то $ax - b:m:d$, так как $ax:d$ и $b:d$.

$$\Leftrightarrow \frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$\text{НОД}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \text{ и } \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)} \equiv 1 \pmod{\frac{m}{d}}.$$

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)} x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} \pmod{m}$$

$$x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \cdot \frac{b}{d} \equiv d \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)} \cdot \frac{b}{d} \pmod{m} = d \left[k\frac{m}{d} + 1\right] \frac{b}{d} = [km + d] \frac{b}{d} \equiv d \frac{b}{d} \pmod{m} = b.$$

$$1) ax \equiv b \pmod{m}$$

$$\text{НОД}(a, m) = 1! \text{ решение} \Rightarrow x \equiv a^{\phi(m)-1} b \pmod{m}$$

$$2) \text{НОД}(a, m) = d; b:d$$

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}, \text{ где } \left(\frac{a}{d}\right)^{\phi\left(\frac{m}{d}\right)-1} \frac{b}{d} = x_0$$

$$d \text{ реш: } \begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{m} \\ x \equiv x_0 + \frac{m}{d} \pmod{m} \\ x \equiv x_0 + (d-1)\frac{m}{d} \pmod{m} \end{cases}$$

$$3) \text{НОД}(a, m) = d; b \not\equiv d \Rightarrow \emptyset$$

$$4) ax \equiv b \pmod{m}$$

$$ax - b:m$$

$$ax - b = my$$

$$b = ax - my$$

$$x = x_0 + t\frac{m}{d}$$

Утв: p -простое, $a < p$

$$\text{Решение } x \equiv \frac{C_p^a}{p} * b * (-1)^k \pmod{m}, \text{ где } k = a - 1$$

Доказательство:

$$C_p^a = \frac{p!}{a!(p-a)!} = \frac{p(p-1)\dots(p-a+1)}{1*2\dots a}$$

$$\frac{C_p^a}{p} = \frac{p(p-1)\dots(p-a+1)}{1*2\dots(a-1)a}$$

$$(p-1)(p-2)\dots(p-a+1) \equiv (-1)(-2)\dots(-a+1) = (-1)^k * 1 * 2\dots * (a-1), \text{ где } k=a-1$$

$$a \frac{C_p^a}{p} \equiv (-1)^k \pmod{p}, \text{ где } k=a-1$$

$$ab \frac{C_p^a}{p} * (-1)^k \equiv b \pmod{p}, \text{ где } k=a-1$$

Теорема Критерий Вильсона

$$p\text{-простое} \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Доказательство:

$$| \Rightarrow |(p-1)! = 1(p-1)$$

$$a^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$a^2 - 1 \vdots p$$

$$(a-1)(a+1) \vdots p$$

$$\begin{cases} a-1 \vdots p \\ a+1 \vdots p \\ a \equiv 1 \pmod{p} \\ a \equiv -1 \pmod{p} \end{cases} \quad | \leq |p \text{ не простое } p = mn$$

$$(p-1)! \vdots m$$

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

$$(p-1)! + 1 \vdots m \vdots p$$

Теорема Китайская теорема об остатках

m_1, \dots, m_n - попарно взаимно простые

$$d \text{ имеет ! реш: } \begin{cases} x \equiv C_1 \pmod{m_1} \\ \dots \\ x \equiv C_n \pmod{m_n} \end{cases} .$$

$$x \equiv C \pmod{M}, \text{ где } M = m_1, \dots, m_n$$

Доказательство:

$$M_i = \frac{M}{m_i}$$

$$\text{НОД}(M_i, m_i) = 1$$

$$x * M_i \equiv 1 \pmod{m_i} \Rightarrow x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

$$x = \sum_{i=1}^n M_i * a_i * C_i \equiv M_i * a_i * C_i \pmod{m_i} \equiv C_i \pmod{m_i}$$

$$|| x \not\equiv y \pmod{M}$$

$$x \equiv C_i \pmod{m_i} \equiv y \pmod{m_i}$$

$$x - y \vdots m_i \Rightarrow x - y \vdots M$$

$$x = (C_1, \dots, C_n) \text{-китайский код числа } X$$

$$y = (d_1, \dots, d_n)$$

$$x + y = (C_1 + d_1, \dots, C_n + d_n)$$

8 Функция Эйлера и её свойства

8.1 Определение

Функция Эйлера $\varphi(n)$ ставит в соответствие каждому натуральному n количество чисел, меньших n и взаимно простых с n . Будем полагать $\varphi(1) = 1$.

8.2 Свойства

1. $p \in P : \varphi(p) = p - 1$, - Функция Эйлера для простого числа

2. $p \in P : k \in N : \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, - Функция Эйлера для простого числа в степени
3. $\exists \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, при $a, b \in \mathbb{N}$ - мультипликативность функции Эйлера

8.3 Утверждение

Для простого p значение функции Эйлера задаётся формулой:

$$\varphi(p) = p - 1,$$

которая следует из определения. Если p - простое, то все числа, меньшие p , взаимно просты с ним, а их ровно $p - 1$ штук.

Для вычисления функции Эйлера от степени простого числа используют следующую формулу:

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

Доказательство. Подсчитаем количество чисел от 1 до p^n , которые не взаимно просты с p^n . Все они, очевидно, кратны p , то есть, имеют вид: $p, 2p, 3p, \dots, p^{n-1}p$. Всего таких чисел p^{n-1} . Поэтому количество чисел, взаимно простых с p^n , равно $p^n - p^{n-1}$.

8.4 Следствие

Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, тогда $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Доказательство. В полной системе вычетов по модулю a существует $\varphi(a)$ значений x , таких, что $\text{НОД}(a, x) = 1$. Также и для полной системы вычетов по модулю b существует $\varphi(b)$ значений y , таких, что $\text{НОД}(b, y) = 1$. Следовательно, всего имеется $\varphi(a)\varphi(b)$ значений z , взаимно простых с ab . Но значения z образуют полную систему вычетов по модулю ab , и чисел, взаимно простых с ab , в ней $\varphi(ab)$.

8.4.1 Пример

Для иллюстрации доказательства следствия составлена таблица 1 величин (x, y) при $a = 4$ и $b = 5$. Возможные значения для x - числа 0, 1, 2, 3, возможные значения для y - числа 0, 1, 2, 3, 4. Из них для x имеется два значения (1 и 3) взаимно простых с a (так как $\varphi(4) = 2$). Соответственно для y также есть четыре значения (1, 2, 3 и 4) взаимно простых с b (так как $\varphi(5) = 4$). Эти значения помещены в кружочки, как и соответствующие им значения $z = ay + bx$.

Выделенные значения z дают 8 чисел, меньших 20 и взаимно простых с ним, Таким образом:

$$\varphi(20) = \varphi(4)\varphi(5) = 2 * 4 = 8.$$

| | y | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| x | 0 | ① | ② | ③ | ④ |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 |
| ① | 5 | ⑨ | ⑬ | ⑰ | ① |
| 2 | 10 | 14 | 18 | 2 | 6 |
| ③ | 15 | ⑲ | ③ | ⑦ | ⑪ |

Таблица 1: Доказательство мультипликативности

8.5 Следствие

Всякое натуральное число $n > 1$ представляется в виде:

$$n = p_1^{\alpha_1} * \dots * p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1 < \dots < p_k$ - простые числа, $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$ - натуральные числа.

$$\text{Тогда } \varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) * p_2^{\alpha_2-1}(p_2 - 1) * \dots = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) * \left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

8.5.1 Пример

Для доказательства следствия приведён пример вычисления:

1. $\varphi(49) = \varphi(7^2) = 7^2 - 7 = 42$,
2. $\varphi(30) = \varphi(2 * 3 * 5) = \varphi(2)\varphi(3)\varphi(5) = (2 - 1)(3 - 1)(5 - 1) = 8$,
3. $\varphi(60) = 60 \left(1 - \frac{1}{2}\right) * \left(1 - \frac{1}{3}\right) * \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16$.

8.6 Следствие

Функция Эйлера $\varphi(n)$ принимает только чётные значения при $n > 2$. Причём, если n имеет k различных нечётных простых делителей, то $2^k \mid \varphi(n)$.

Доказательство. Если $\exists p > 2$ и p - простое число, тогда

$$\varphi(n) \vdots (p - 1) \vdots 2.$$

Тогда если $n = 2^k$, то

$$\varphi(n) = 2^k \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{k-1} \vdots 2.$$

8.7 Теорема Формула Гаусса

8.8 Определение

Пусть d пробегает все делители числа m . Тогда

$$m = \sum_{d \mid m} \varphi(d).$$

Доказательство. \square p - простое число. Тогда

$$\varphi(p^n) = p^{n-1}(p - 1).$$

Таким образом

$$1 + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \dots + \varphi(p^\alpha) = 1 + (p - 1) + \dots + (p^\alpha - p^{\alpha-1}) = p^\alpha$$

Пусть $m = p_1^{\alpha_1} * \dots * p_k^{\alpha_k}$, тогда

$$\prod_{i=1}^k (1 + \varphi(p_i) + \dots + \varphi(p_i^{\alpha_i})) = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} = m.$$

Исходя из этого

$$\prod_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\alpha_i} \varphi(p_i^j) = \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \leq j_k \leq \alpha_k}} \varphi(p_1^{j_1}) * \varphi(p_2^{j_2}) * \dots * \varphi(p_k^{j_k}) = \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \leq j_k \leq \alpha_k}} \varphi(p_1^{j_1} * \dots * p_k^{j_k}) = \sum_{d \mid m} \varphi(d)$$

8.8.1 Пример

$$\sum_{d|30} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(10) + \varphi(15) + \varphi(30) = 1 + 1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 8 + 8 = 30$$

8.9 Теорема Эйлера

Пусть $\text{НОД}(a, m) = 1$, тогда $a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$.

Доказательство. Пусть $\text{НОД}(a, m) = 1$. Тогда классов вычетов взаимно простых с m будет $\varphi(m)$. Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(m)}\}$ - представители классов, то $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_{\varphi(m)}\}$ будут также взаимно просты с m . Также, если $ax_i \equiv_m ax_j$, то $x_i \equiv_m x_j$. Следовательно, числа ax_i - также представители классов вычетов, взаимно простых с m . Тогда каждое ax_i сравнимо с одним и только одним a_j .

$$x_i * \dots * x_{\varphi(m)} \equiv_m ax_i * \dots * ax_{\varphi(m)}.$$

После сокращения получаем нужное сравнение:

$$1 \equiv_m a^{\varphi(m)}.$$

8.10 Следствие: Малая теорема Ферма

Если p - простое число, то $a^p \equiv_p a$

Доказательство.

Если $\text{НОД}(a, p) = 1$, то $a^{\varphi(p)} \equiv_p 1$, $a^{p-1} \equiv_p 1$.

Если $a \equiv_p 0$, то $a \equiv_p 0$, $a^p \equiv_p a \equiv_p 0$.

8.11 Следствие

Если p - простое число, то $(a + b)^p \equiv_p a^p + b^p$

Доказательство. $(a + b)^p \equiv_p a + b \equiv_p a^p + b^p$

8.12 Следствие

Если

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv_m b \\ c \equiv_{\varphi(m)} d \\ \text{НОД}(a, m) = 1 \end{array} \right| \Rightarrow a^c \equiv_m b^d$$

Доказательство. $a^c \equiv_m b^c \equiv_m b^{k\varphi(m)+d} = (b^{\varphi(m)})^k * b^d \equiv_m b^d$

$$c \equiv_{\varphi(m)} d \Rightarrow c = k\varphi(m) + d$$

$$\text{НОД}(a, m) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(b, m) = 1$$

$$\text{НОД}(a, m) = \text{НОД}(a - km, m)$$

8.12.1 Пример

$$25^{11^{35}} \equiv_{34} (-9)^3 = 81 * (-9) \equiv_{34} -13 * 9 = -117 \equiv_{34} 19$$

$$\text{НОД}(25, 34) = 1$$

$$11^{35} \equiv_{16} 11^3 \equiv_{16} (-5)^3 = -125 \equiv_{16} 3$$

$$\varphi(34) = 34 \left(1 - \frac{1}{2}\right) * \left(1 - \frac{1}{17}\right) = 16$$

$$\text{НОД}(11, 16) = 1$$

$$\varphi(16) = 8$$

$$35 \equiv_8 3$$

9 Система шифрования RSA

Определение 1: Функция f называется односторонней, если для любого x существует эффективный алгоритм вычисления $f(x)$, но не существует эффективного алгоритма решения уравнения $f(x) = a$.

Определение 2: Функция $f_k(x)$ называется функцией с секретом, если для любого k и x существует эффективный алгоритм вычисления $f_k(x)$, такой что $f_k(x) = a$, но не существует эффективного алгоритма решения уравнения $f_k(x) = a$. Однако, если значение k известно, то существует эффективный алгоритм решения уравнения $f_k(x) = a$.

RSA, разработанная Райвестом, Шамиром и Адлеманом, определяется функцией $f(x) = x^e \bmod m$, где m - произведение двух больших простых чисел p и q . Для выбора открытого ключа e необходимо выбрать число, взаимно простое с функцией Эйлера $\varphi(m) = (p-1)(q-1)$. Закрытый ключ d находится из уравнения $e \cdot d \equiv 1 \bmod \varphi(m)$.

Для шифрования сообщения x отправитель (Алиса) использует открытый ключ (m, e) получателя (Боба) и преобразует сообщение в зашифрованное сообщение c с помощью формулы $c \equiv x^e \bmod m$. Зашифрованное сообщение c отправляется Бобу.

Для расшифровки сообщения Боб использует свой закрытый ключ d и преобразует зашифрованное сообщение c обратно в исходное сообщение x с помощью формулы $x \equiv c^d \bmod m$.

RSA также может использоваться для создания электронных подписей. Электронная подпись используется для подтверждения подлинности и целостности данных. Она создается путем хеширования сообщения и шифрования полученного хеша закрытым ключом отправителя. Получатель может проверить подлинность сообщения, расшифровав подпись с помощью открытого ключа отправителя и сравнив полученный хеш с хешем исходного сообщения.

P. S. e в данном случае коэффициент, а не число Эйлера.

10 Определение деления многочленов с остатком. Теорема Безу. Схема Горнера

10.1 Определение деления многочленов с остатком:

10.2 Определение:

Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, $g(x) \neq 0$ существуют $q(x)$ и $r(x)$, такие что: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, при этом степень $r(x)$ строго меньше степени $g(x)$

10.3 Свойства:

- $f(x) : g(x), g(x) : h(x) \Rightarrow f(x) : h(x)$
- $f(x) : g(x), g(x) : h(x) \Rightarrow f(x) \pm g(x) : h(x)$
- $f(x) : h(x) \Rightarrow f(x)g(x) : h(x)$
- $f(x) : c, c \neq 0$
- $f(x) : g(x) \Rightarrow f(x) : cg(x), c \neq 0$

10.4 Теорема Безу:

10.4.1 Теорема:

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен значению многочлена $P(a)$

10.4.2 Доказательство:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + r, \text{ следовательно, } P(a) = r$$

10.4.3 Следствие:

$$P(x) : (x-a) \Rightarrow P(a) = 0$$

10.5 Схема Горнера:

10.5.1 Определение:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P(x) = (x-b)Q(x) + r$$

$$Q(x) = C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + \dots + C_1 x + C_0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x-b)(C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_0) + r$$

$$x^n : a_n = C_{n-1}$$

$$x^{n-1} : a_{n-1} = C_{n-2} - bC_{n-1}$$

$$x^{n-2} : a_{n-2} = C_{n-3} - bC_{n-2}$$

.

.

.

$$x : a_1 = C_0 - bC_1$$

$$x^0 : a_0 = r - bC_0$$

$$C_{n-1} = a_{n-1}$$

$$C_i = bC_{i+1} + a_{i+1}$$

.

.

.

$$r = bC_0 + a_0$$

10.5.2 Пример:

Найти остаток от деления $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$ на $x - 2$
 $b = 2$

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_n | a_4 | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 |
| b | C_3 | C_2 | C_1 | C_0 | r |

Далее подставив значения мы можем найти $C_{n-1} \dots C_0$ и r

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| a_n | 1 | 0 | -3 | 1 | -5 |
| 2 | C_3 | C_2 | C_1 | C_0 | r |

Используя формулу $C_{n-1} = b * C_{n-1} + a_{n-1}$, $C_{n-1} = a_n$ получим

| | | | | | |
|-------|---|---|----|---|----|
| a_n | 1 | 0 | -3 | 1 | -5 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 |

Ответ $p(x) = (x_3 + 2x_2 + x + 3)(x - 2) + 1$

11 Интерполяционная формула Лагранжа

11.1 Формула Лагранжа

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$
$$l_i(x) = \frac{x-x_0}{x_i-x_0} \times \frac{x-x_1}{x_i-x_1} \times \dots \times \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \times \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$$

11.2 Пример

Найти многочлен $P(x)$ минимальной степени, используя формулу Лагранжа:

$$P(-3) = -36$$

$$P(0) = -9$$

$$P(5) = -44$$

Для удобства пронумеруем многочлены от 0 до 2, где $P_0(-3)$, $P_1(0)$, $P_2(5)$

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \times \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-0}{-3-0} \times \frac{x-5}{-3-5} = \frac{x(x-5)}{(-3)*(-8)} = \frac{x(x-5)}{24}$$

$$l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \times \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x+3}{0+3} \times \frac{x-5}{0-5} = \frac{(x+3)(x-5)}{3*(-5)} = \frac{(x+3)(x-5)}{-15}$$

$$l_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \times \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x+3}{5+3} \times \frac{x-0}{5-0} = \frac{x(x+3)}{5*8} = \frac{x(x+3)}{40}$$

Обозначим многочлен минимальной степени $L(x)$:

$$L(x) = -36 \frac{x(x-5)}{24} + (-9) \frac{(x+3)(x-5)}{-15} + (-44) \frac{x(x+3)}{40}$$

Чтобы найти многочлен минимальной степени, преобразуем многочлен к стандартному виду:

$$\begin{aligned} L(x) &= -\frac{3}{2}x(x-5) + \frac{3}{5}(x+3)(x-5) - \frac{11}{10}x(x+3) = \\ &= -\frac{3}{2}(x^2-5x) + \frac{3}{5}(x^2+3x-5x-15) - \frac{11}{10}(x^2+3x) = \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - 9 - \frac{11}{10}x^2 - \frac{33}{10}x = \\ &= \frac{-15+6-11}{10}x^2 + \frac{75-12-33}{10}x - 9 = -2x^2 + 3x - 9 \end{aligned}$$

Итоговый вид многочлена: $L(x) = -2x^2 + 3x - 9$

12 (Билет 12) Разложение многочленов на свободные от квадратов множители.

12.1 Определение:

Пусть K - поле

$P(x) \in K[x]$ **неприводим** if не \exists нетривиальный делитель: не $\exists Q(x) \in K[x] : 0 < \deg(Q) < \deg(P)$ и $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$;

$P(x) \in \mathbb{C}$

$P(x) \in \mathbb{C}P(x)$

$x^2 - 2$ над \mathbb{Q}

$\square \mid x^2 - 2 : x - a$

$$a^2 - 2 = 0$$

$$a^2 = 2$$

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

То есть

$x^2 + 1$ над \mathbb{Q} **неприводим!**

над \mathbb{R} **неприводим!**

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i) \text{ над } \mathbb{C}$$

$$x^2 + 1 = (x^2 + 1) \text{ над } \mathbb{Z}$$

12.2 Определение: $P(x)$ свободный от квадратов

не $\exists Q(x): \deg(Q) > 0$

$$P(x) \div Q(x)^2$$

$$P(x) = P_1(x)P_2(x)^2P_3(x)^3 \dots P_n(x)^n$$

$P_1(x), \dots, P_n(x)$ попарно взаимно/пр. и свободны от квадратов

12.3 Утверждение: $P(x) = Q(x)^k M(x)$

$\text{НОД}(Q(x), M(x)) = 1$ и $Q(x)$ неприводим $\Rightarrow P'(x) = Q(x)^{k-1} N(x)$

$$\text{НОД}(Q(x), N(x)) = 1$$

Доказательство:

$$P'(x) = kQ(x)^{x-1}Q'(x)M(x) + Q(x)M'(x)$$

$$P'(x) = Q(x)^{x-1}(kQ'(x)M(x) + Q(x)M'(x))$$

$$kQ'(x)M(x) = N(x) - Q(x)M'(x) \div Q(x)$$

$kQ'(x) \div Q(x)$?! Противоречие

Это работает при Z_k k характ поля, p - характ. k if $\forall a \in K a + a + \dots + a = 0$

K -поле характеристики ноль

12.4 Следствие:

$P(x) = Q_1(x)^{k_1} \dots Q_m(x)^{k_n}, Q_i$ - неприводимы $\Rightarrow P'(x) = Q_1(x)^{k_1-1} \dots Q_m(x)^{k_n-1}, Q$ вз./пр. с Q_i

Доказательство:

$$P'(x) = \sum_{i=1}^m K_i Q_1(x)^{k_1} \dots Q_m(x)^{k_n} Q'_i(x) = Q_1(x)^{k_1-1} \dots Q_m(x)^{k_m-1} \sum_{i=1}^n \frac{k_i Q_1(x) \dots Q_m(x)}{Q_i(x)} Q'_i(x)$$

$$\text{НОД}(Q_1, Q_i) \neq 1$$

$$\text{НОД}(Q_1, Q_i) = Q_i$$

$$Q \div Q_i$$

$$Q(x) = k_1 Q_2 Q_3 \dots Q_m Q'_1 + k_2 Q_1 Q_3 \dots Q_m Q'_2 + \dots + \dots Q_{m-1} Q'_m \div Q_i$$

$$k_i Q'_i \div Q_i$$

$$Q'_i \div Q_i \Rightarrow \text{Противоречие}$$

12.5 Алгоритм разложения на свободные от квадратов множ.:

На языке программирования питон:

$$j = 1$$

while $\deg P > 0$

$$p' = \text{diff}(P)$$

$$S = \text{НОД}(P, P')$$

$$r = \frac{P}{S}$$

$$t = \text{НОД}(r, P')$$

$$P_j = \frac{r}{t}$$

$$P = \frac{P}{r}$$

$$j+ = 1$$

$$\text{return } P_1 P_2^2 \dots P_{j-1}$$

Где:

$$P = P_1 P_2^2 P_3^3 \dots P_n^n$$

$$\begin{aligned}
P' &= P_2 P_3^2 \dots P_n^{n-1} \\
\text{НОД}(P, P') &= P_2 P_3^2 \dots P_n^{n-1} \\
r &= \frac{P}{\text{НОД}(P, P')} = P_1 P_2 \dots P_n \\
\text{НОД}(r, P') &= P_2 \dots P_n \\
\frac{r}{\text{НОД}(r, P')} &= P_1
\end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^3 + x^2 - x - 1 \\
P'(x) &= 3x^2 + 2x - 1 \\
\text{НОД}(P(x), P'(x)) &= x + 1 = S(x) \\
r(x) &= P/S = x^2 - 1 \\
\text{НОД}(r, P') &= x + 1 = t(x) \\
P_1 &= x - 1 \\
\text{new } P &= x + 1 \\
P' &= 1 \\
S &= 1 \\
r &= x + 1 \\
t &= 1 \\
P_2 &= x + 1 \\
P(x) &= P_1(x) P_2(x)^2 P_3(x)^3 \dots P_n(x)^n \\
P_1(x), \dots, P_n(x) &\text{ попарно вз./пр. и свободные от квадратов множители}
\end{aligned}$$

$$12.6 \quad P(x) \in \mathbb{Z}P(x) : x - \frac{p}{q}$$

$$NOD(p, q) = 1 \Rightarrow a_n : q, \text{ где } p(v) = a_n(x^n) + \dots + a_0$$

12.7 Теорема Безу

$$P(x) : x - \frac{p}{q} \Rightarrow p\left(\frac{p}{q} = 0\right)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n P^n}{q^n} + \frac{a_{n-1} P^{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{a_1 P}{q} + a_0 &= 0 \\
a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} q + \dots + a_1 P q^{n-1} + a_0 q^n &= 0 \\
a_n p^n : q &\Rightarrow a_n : q \\
a_0 p^n : p &\Rightarrow a_0 : q
\end{aligned}$$

12.8 Критерий Эйзенштейна

$$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$a_{n-1} : P, a_{n-2} : P, \dots, a_0 : P \text{ и } a_n \text{ не } : P \Rightarrow P(x) \text{ неприводим над } Q$$

Доказательство:

$$\text{Пусть } P(x) = f(x)g(x)$$

$$f(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

$$g(x) = C_{n-m} x^{n-m} + \dots + C_0$$

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = (b_m x^m + \dots + b_0)(C_{n-m} x^{n-m} + \dots + C_0)$$

$$a_0 = b_0 C_0 \quad b_0 : P$$

$$\cdot \quad C_0 \text{ не } : P$$

$$a_1 = b_0 C_2 + b_1 C_1 + b_2 C_0 \Rightarrow b_2 : P$$

$$a_m = b_n C_m + \dots + b_m C_0 \Rightarrow b_{n-1} : P$$

13 Неприводимые многочлены. Поля Галуа

13.1 Неприводимые многочлены

13.1.1 Определение

Пусть K — поле. Тогда $P(x) \in K[x]$ неприводим, если не существует нетривиальный делитель $Q(x) \in K[x]$, такой, что его степень больше 0, меньше степени многочлена P и $P(x)$ делится на $Q(x)$:

$$\nexists Q(x) \in K[x] : 0 < \deg Q < \deg P \text{ и } P(x) \vdots Q(x)$$

13.1.2 Определение

$P(x)$ свободный от квадратов, если не существует $Q(x)$, такой, что $\deg Q > 1$ и $P(x) \vdots Q^2(x)$.

13.1.3 Утверждение

$$P(x) = Q^k(x)M(x)$$

$$\text{НОД}(Q(x), M(x)) = 1 \text{ и } Q(x) \text{ неприводим} \Rightarrow P'(x) = Q^{k-1}(x)N(x)$$

$$\text{НОД}(Q(x), N(x)) = 1$$

13.1.4 Доказательство

$$P'(x) = kQ^{k-1}(x)Q'(x)M(x) + Q^k(x)M'(x)$$

$$P'(x) = Q^{k-1}(x)(kQ'(x)M(x) + Q(x)M'(x)), \text{ где } kQ'(x)M(x) + Q(x)M'(x) = N(x)$$

$$kQ'(x)M(x) = N(x) - Q(x)M'(x) \vdots Q(x)$$

$kQ'(x) \vdots Q(x)$ — противоречие

$$\deg Q' = \deg Q - 1$$

Это работает при \mathbb{Z}_k ($k \nmid \text{характеристика поля}$).

13.1.5 Следствие

$$P(x) = Q_1^{k_1}(x) \dots Q_m^{k_m}(x), Q_i \text{ — неприводимы} \Rightarrow P'(x) = Q_1^{k_1-1}(x) \dots Q_m^{k_m-1}(x)Q(x), Q \text{ взаимно прост с } Q_i$$

13.1.6 Критерий Эйзенштейна

$$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$a_{n-1} \vdots p, a_{n-2} \vdots p, \dots, a_0 \vdots p, a_n \not\vdots p \Rightarrow P(x) \text{ неприводим над } \mathbb{Q}$$

13.1.7 Доказательство

Рассмотрим $P(x) = f(x)g(x)$.

$$f(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

$$g(x) = c_{n-m} x^{n-m} + \dots + c_0$$

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = (b_m x^m + \dots + b_0) \cdot (c_{n-m} x^{n-m} + \dots + c_0)$$

$$a_0 = b_0 c_0 \vdots p \quad b_0 \vdots p \quad c_0 \not\vdots p$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \vdots p \Rightarrow b_1 \vdots p$$

⋮

$$a_m = b_0 c_m + \dots + b_m c_0 \vdash p \Rightarrow b_{m-1} \vdash p$$

$$a_n = b_n c_{n-m} \vdash p \text{ — противоречие}$$

13.2 Поля Галуа

13.2.1 Определение

Конечное поле, или поле Галуа в общей алгебре — поле, состоящее из конечного числа элементов. Обозначается \mathbb{F}_q или $\mathbf{GF}(q)$ или $\langle \mathbf{GF}(q), +, * \rangle$, где $q = |\mathbf{GF}(q)|$ — порядок поля. Порядком поля называется количество входящих в него элементов. Пример: \mathbb{Z}_p , $p \in \mathbb{P}$.

13.2.2 Определение

Характеристика поля F — наименьшее n , такое, что $\forall a \in F$ выполняется следующее равенство:

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}} = 0$$

Если такого n не существует, то n считается равным 0.

13.2.3 Лемма

Характеристика поля — простое или 0.

13.2.4 Доказательство

Рассмотрим $n = \alpha\beta$.

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\alpha \text{ раз}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\alpha \text{ раз}} + \dots + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\alpha \text{ раз}}}_{\beta \text{ раз}} = 0$$

$$\underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{\beta \text{ раз}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{характеристика} \text{ — } \mathbb{P}$$

13.2.5 Свойства

$f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ ($f(x)$ принадлежит множеству многочленов с целыми коэффициентами по модулю p)
 $\mathbb{Z}_p[x]/f(x)$ (кольцо вычетов многочленов с целыми коэффициентами по модулю $f(x)$)

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x) \equiv_{f(x)} h_1(x) \\ g_2(x) \equiv_{f(x)} h_2(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g_1 + g_2 \equiv_{f(x)} h_1 + h_2 \\ g_1 g_2 \equiv_{f(x)} h_1 h_2 \end{array}$$

13.2.6 Теорема

$\mathbb{Z}_p[x]/f(x) \Leftrightarrow f(x)$ неприводим над \mathbb{Z}_p .
 $\deg f = m$ $\mathbf{GF}(p^m)$

13.2.7 Доказательство

Прямое. Рассмотрим $f(x) = g(x)h(x)$
 $g(x)h(x) \equiv_{f(x)} 0 \mid \cdot g^{-1}(x)$
 $h(x) \equiv_{f(x)} 0 \mid \Rightarrow f(x) = 0$

От обратного. $\forall g(x) \neq 0 \deg g < \deg p$
 $\text{НОД}(g(x), f(x)) = 1 \Rightarrow$ по расширенному алгоритму Евклида:
 $a(x)g(x) + b(x)f(x) = 1$
 $a(x)g(x) \equiv_{f(x)} 1 \Rightarrow a = g^{-1} \Rightarrow \mathbb{Z}_p$ — поле

13.2.8 Связь с линейным пространством

Поле Галуа образует линейное (векторное) пространство. Его аксиомы:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $\exists 0 : a + 0 = a$
- $\forall a \exists (-a) : a + (-a) = 0$
- $a + b = b + a$
- $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
- $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
- $\exists 1 : 1 \cdot a = a$

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p, F$ — линейное пространство. $m = \dim F$.

13.2.9 Определение

α — примитивный элемент, если $\forall b \neq 0 \in F \quad b = \alpha^i$.

14 Кодирование с исправлением ошибок. Граница Хэмминга. Полиномиальное кодирование

14.1 Кодирование с исправлением ошибок. Граница Хэмминга

$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ - функция расстояния

1. $d(a, b) \geq 0; \quad d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$

$$M = \mathbb{Z}_2^m$$

$$a \in M, a = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$$

$$d(a, b) = \sum_{i=0}^{m-1} |a_i - b_i| \text{ - кодовое расстояние Хэмминга (КХР)}$$

$$a \oplus b = (a_0 \oplus b_0, \dots, a_{m-1} \oplus b_{m-1})$$

Теорема КРХ - формула расстояния на \mathbb{Z}_2^m

$$\begin{aligned}
d(a, b) + d(b, c) &= \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - b_i| + \sum_{i=0}^{n-1} |b_i - c_i| = \sum_{i=0}^{n-1} (|a_i - b_i| + |b_i - c_i|) \geq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - b_i + b_i - c_i| = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - c_i| = d(a, c) \\
A &= \{a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\} \leq \mathbb{Z}_2^m \\
&\quad \uparrow \\
&\text{кодовое слово}
\end{aligned}$$

Теорема. Если $\forall i \neq j$
 $d(a^{(i)}, a^{(j)}) \geq 2r + 1 \Rightarrow$ можно исправить $\leq r$ ошибок

Доказательство: $a \in \mathbb{Z}_2^m$

$$A_i = \{b/d(a^{(i)}, b) \leq r\}$$

$$\square | A_i \cap A_j = \{c\}$$

$$\begin{array}{l|l}
c \in A_i & d(c, a^{(i)}) \leq r \\
\hline
c \in A_j & d(c, a^{(j)}) \leq r
\end{array} \Rightarrow$$

$$d(a^{(i)}, a^{(j)}) \leq d(a^{(j)}, c) + d(c, a^{(i)}) \leq 2r \quad ?!$$

A_i - область декодирования $a^{(i)}$

$$a^{(i)} + e \quad d(a^{(i)} + e, a^{(j)}) \leq r \mid \Rightarrow a^{(i)} + e \in A_i \mid \Rightarrow \text{декодирование однознач.}$$

$$|A_i| = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^r \quad |\mathbb{Z}_2^m| = 2^m$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |A_i| \leq |\mathbb{Z}_2^m|; \quad k = |A| \quad k|A_i| \leq |\mathbb{Z}_2^m| \mid \Rightarrow k = \frac{2^m}{\sum_{i=0}^r C_m^i} - \text{граница Хэмминга}$$

$$M = \{0, 1\} \mid \rightarrow A = \{000, \dots, 111\}$$

$$m = 3 \Rightarrow r = 1 \quad d(a^0, a^1) = 3 \geq 2r + 1 \quad k \leq \frac{2^3}{C_3^0 + C_3^1} = \frac{8}{1+3} = 2$$

Определение. Код называется совершенным (или плотно упакованным), если $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i = \mathbb{Z}_2^m$

14.2 Полиномиальное кодирование

$$M \Rightarrow \widetilde{M}$$

$$M \rightarrow C \Rightarrow \widetilde{C} \rightarrow M$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

сообщ. код. слово

Код линейный if $\forall a, b \in A$

Вес Хэмминга $W(a)$

$$a \in A \leq \mathbb{Z}_2^m$$

$$a = (a_0, \dots, a_{m-1})$$

$W(a)$ = количество ненулевых a_i

$$\text{Минимальное кодовое расстояние } d^* = \min_{i \neq j} d(a^{(i)}, a^{(j)})$$

$$\text{Лемма. } d^* = \min_{a \neq 0} W(a)$$

Доказательство: $W(a) = d(a, 0) \geq d^*$

$$d(a, b) = d(a + b, b + b) = d(a + b, 0) = W(a + b)$$

$$d^* = \min_{a \neq b} d(a, b) = \min_{a \neq b} W(a + b) = \min_{a \neq 0} W(a)$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \mid \rightarrow a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$$

Код циклический

$$\text{if } (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \in A \Rightarrow (a_{m-1}, \dots, a_{m-2}) \in A$$

$$a \rightarrow A(x)$$

$$a + b \rightarrow A(x) + B(x)$$

$$b \rightarrow B(x)$$

$$a \rightarrow a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$$

$$a_2 \rightarrow a_{m-1} + a_0x + \dots + a_{m-2}x^{m-1}$$

$$xA(x) \bmod (x^m + 1)$$

$$x^m \equiv 1 \bmod (x^m + 1)$$

$A(x)$ - количество кодов $\Rightarrow P(x)A(x)$ - кодов

Порождающий многочлен - ненулевое приведение мн. наименьшей степени в коде.

$$A = \{\dots\}$$

Теорема. $G(x)$ - порождающий многочлен

$$\text{минимальный цикл кода} \Leftrightarrow x^m + 1 \div G(x)$$

Доказательство:

$$\Leftarrow x^m + 1 \div G(x)$$

$$A(x), B(x)$$

$$A = \{P(x)G(x) \bmod (x^m + 1)\}$$

$$A(x) = P_A(x)G(x) \quad A(x) + B(x) = (P_A(x) + P_B(x))G(x)$$

$$B(x) = P_B(x)G(x) \quad \alpha A(x) = (\alpha P_A(x))G(x)$$

$$xA(x) \bmod (x^m + 1)$$

$$xA(x) = xP_A(x)G(x)$$

$$r(x) = xA(x) \equiv_{x^m+1} Q(x)G(x) + R(x)$$

$$xA(x) = S(x)(x^m + 1) + r(x) = S(x)(x^n + 1) + Q(x)G(x) + R(x)$$

$$P(x)G(x) = Q(x)(x^m + 1) + R(x)$$

$$P(x)G(x) \bmod (x^m + 1) \quad 0 \equiv_{(x^m+1)} Q(x)G(x) + R(x)$$

$$x^m + 1 \div G(x)$$

$$\deg R < \deg G \Rightarrow$$

$$x^m + 1 = Q(x)G(x) + R(x)$$

обязательно делится

$$x^m + 1$$

$$G(x)$$

$$d^* = \min_{P(x) \neq 0} W(P(x)G(x) \bmod x^m + 1)$$

$$d^* > 2r + 1 \quad r < \frac{d^*}{2}$$

$$M \rightarrow C$$

$$M(x) \rightarrow C(x)$$

$$C(x) = M(x)G(x)$$

$$C(x) + E(x)$$

$$\tilde{C}(x) = C(x) + E(x) - \text{многочлен ошибок}$$

$$W(E(x)) \leq r$$

$$\tilde{C}(x) \bmod (G(x)) = S(x) - \text{синдром}$$

$$\text{Теорема. } E_1(x) \neq E_2(x) \Rightarrow E_1(x) \bmod G(x) \neq E_2(x) \bmod G(x)$$

$$W(E_1(x)) \leq r$$

$$W(E_2(x)) \leq r$$

Доказательство:

$$E_1(x) + E_2(x) \neq 0$$

$$W(E_1(x) + E_2(x)) \leq 2r$$

$$\square E_1(x) \equiv E_2(x) \bmod G(x)$$

$$E_1(x) + E_2(x) \div G(x), W(E_1 + E_2) \geq d^* \geq 2r + 1$$

$$\tilde{C}(x) = C(x) + E(x) = M(x)G(x) + E(x)$$

$\text{mod } G(x) :$

$$S(x) \equiv E(x), C(x) = \tilde{C} + E(x)$$

$$M(x) = \frac{\tilde{C}}{G}$$

Если все ошибки в $\deg G$ послед. разр.

$$x^i S(x) \equiv_{G(x)} T(x)$$

$$i \in [0; m-1]$$

$$W(T(x)) \leq r$$

$$x^m S(x) \equiv_{G(x)} x^{m-i} T(x)$$

$$\begin{aligned} &||| \\ x^m + 1 &\equiv_{G(x)} 0 \end{aligned}$$

$$\text{Теорема. } G(x) \div x + 1 \geq W(P(x)G(x)) \div 2$$

$$\text{Доказательство: } G(x) = (x + 1)A(x)$$

$$P(x)G(x) \div x + 1$$

$$P(1)G(1) = 0$$

$$W(P(x)G(x)) \div 2$$

Следствие. $G(x) \div x + 1 \geq \text{детект. } \forall \text{ на ошиб.}$

$$C(x) + E(x)$$

15. Префиксные коды. Неравенство Крафта. Алгоритм Хаффмана.

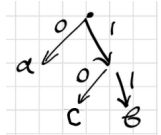
15.1 Префиксные коды

$$A = a_1, \dots, a_n - \text{алфавит } n \leq 2^k \rightarrow \begin{cases} a_1 \sim \underbrace{0 \dots 0}_k - c_1 \\ a_2 \sim \underbrace{0 \dots 0}_k 1 - c_2 \\ \dots \end{cases}$$

$$l_1 = l_2 = l_k; M: a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}; \alpha = ks \geq s \log n$$

Шеннон-Фано

aabc



$$\underbrace{0}_a \underbrace{0}_a \underbrace{11}_b \underbrace{01}_c$$

$$\begin{cases} a \sim 0 \\ b \sim 11 \\ c \sim 01 \end{cases}$$

15.1.1 Определение

Код называется *префиксным*, если ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

15.2 Неравенство Крафта

Для префиксного кода с длинами l_1, \dots, l_s

$$\sum_{i=1}^s 2^{-l_i} \leq 1$$

15.2.1 Доказательство

$$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_s = q$$

$$A_i = \{ \underbrace{(\dots)}_{q \text{ двоичных чисел}} \mid \text{нач. с } l_i \}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

15.2.2 Замечание

$$\cup A_i \leq \underbrace{\{(\dots)\}}_{q \text{ раз } p}$$

$$\sum_{i=1}^s 2^{q-l_i} \leq 2^q$$

15.2.3 Теорема

p_1, \dots, p_n - вер, с которой встречаются a_1, \dots, a_n

$$\text{Сред. длин. код. слова } L = \sum_{i=1}^n l_i p_i ; L \geq H(p_1, \dots, p_s)$$

15.2.4 Доказательство

$$\begin{aligned} \square q_i &= \frac{2^{-l_i}}{\sum_{i=1}^n 2^{l_i}} ; L - H(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n l_i p_i + \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 (p_i 2^{l_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{p_i}{2^{-l_i}} \geq \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{p_i \sum_{j=1}^n 2^{-l_j}}{2^{-l_i}} = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{p_i}{q_i} = D(p||q) \geq 0 \\ &\rightarrow L \geq H(p_1, \dots, p_n) + D(p||q) \end{aligned}$$

15.3 Алгоритм Хаффмана

$$a_1, \dots, a_n \text{ с } p_1, \dots, p_n$$

$$p_i = \frac{N(a_i)}{N}$$

$$p_1, p_2, \dots, p_s$$

$$p_i \geq p_j \rightarrow l_i \leq l_j$$

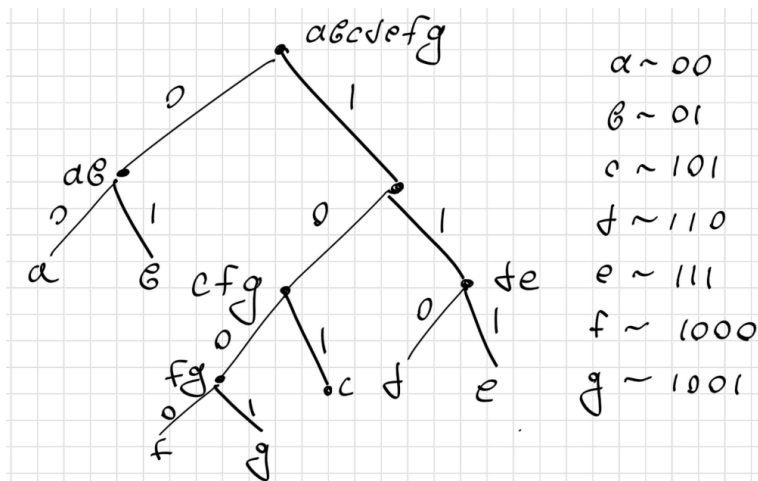
$$\sum_{i=1}^s 2^{-l_i} \leq 1(*)$$

$$p_{n-1}, p_n \text{ - наим. вер} \rightarrow l_{n-1} = l_n$$

[чтобы знам (*) сокращался]

15.3.1 Пример

$$\begin{aligned} &\underbrace{a \sim 0,22 ; b \sim 0,2}_{ab \sim 0,42} ; c \sim 0,15 ; \underbrace{d \sim 0,13 ; e \sim 0,12}_{de \sim 0,25} ; \underbrace{f \sim 0,1 ; g \sim 0,18}_{fg \sim 0,18} \\ &\underbrace{c f g \sim 0,33 ; d e \sim 0,25}_{c d e f g \sim 0,58} ; a b \sim 0,42 \\ &\underbrace{a b \sim 0,42 ; c d e f g \sim 0,58}_{a b c d e f g \sim 1} \end{aligned}$$



16 Коды Рида-Соломона:

Рассмотрим алгоритм на примере:

Поле $GF(16)$ порождается присоединением к $GF(2)$ корня a многочлена $P(x)$, $P(x) = x^4 + x^3 + 1$. Пусть порождающий много член имеет вид $G(x) = (x - a)(x - a^2)(x - a^3)(x - a^4)$, тогда количество ошибок многочлена которое исправит код Рида-Соломона $2t = \deg(G(x)) \Rightarrow t = 4/2 = 2$.

Принятое сообщение $S(x) = a^9x^{14} + a^5x^{13} + a^{12}x^{12} + a^{10}x^{11} + a^7x^9 + a^5x^8 + a^7x^7 + a^{13}x^6 + a^3x^5 + a^{11}x^4 + a^3x^3 + a^{10}x^2 + a^8x + a$

Вырази все a пока они не заикляются, т.е. $a_n = a_0$

$$a^0 = a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a^2$$

$$a^3 = a^3$$

$$a^4 = a^3 + 1$$

$$a^5 = a * a^4 = a^4 + a = a^3 + a + 1$$

$$a^6 = a^3 + a^2 + a + 1$$

$$a^7 = a^2 + a + 1$$

$$a^8 = a^3 + a^2 + a$$

$$a^9 = a^2 + 1$$

$$a^{10} = a^3 + a$$

$$a^{11} = a^3 + a^2 + 1$$

$$a^{12} = a + 1$$

$$a^{13} = a^2 + a$$

$$a^{14} = a^3 + a^2$$

$$a^{15} = a^4 + a^3 = 1$$

И так как у нас поле $GF(16)$ то $a^{15} = a^0 = 1$

Из порождающего многочлена выразим корни уравнения и подставим их в принятое сообщение $S(x)$.

$$S_1(a) = a^4$$

$$S_2(a^2) = 0$$

$$S_3(a^3) = a^2$$

$$S_4(a^4) = a^2$$

Теперь строим систему уравнений вида

$$\begin{pmatrix} S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+t-1} \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{n+t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n+t-1} & S_{n+t} & \dots & S_{n+2t-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \lambda_{t-1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{n+t} \\ S_{n+t+1} \\ \vdots \\ S_{n+2t-2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Где $n = 1, t = 2$, подставим значения в матрицу и получим:

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Решив систему мы получим что $\lambda_2 = a^{13}, \lambda_1 = 1$.

$L(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_t x^t$. Подставим значения от 1 до a^{15} и найдем такие значения a что $L(a^n) = 0$. В нашем случае такими значениями являются a^3 и a^{14} . Найдем обратные к этим значениям $\gamma_1 = \frac{a^{15}}{a^3} = a^{12}, \gamma_2 = a$.

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^s & \gamma_2^s & \dots & \gamma_t^s \\ \gamma_1^{s+1} & \gamma_2^{s+1} & \dots & \gamma_t^{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^{s+t-1} & \gamma_2^{s+t-1} & \dots & \gamma_t^{s+t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n \\ S_{n+1} \\ \vdots \\ S_{n+t-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Подставим значения и получим:

$$\begin{pmatrix} a^{12} & a \\ a^{24} & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Используя метод Крамера найдем e_1 и e_2 :

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} a^4 & a \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^{12} & a \\ a^{24} & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{a^6}{a^{13}} = a^8 \quad (7)$$

$$e_2 = \frac{\begin{vmatrix} a^{12} & a^4 \\ a^{24} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^{12} & a \\ a^{24} & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{-a^{28}}{a^{13}} = a^{15} = 1 \quad (8)$$

Найдем многочлен ошибок $E(x) = e_1 x^{i_1} + e_2 x^{i_2} + e_3 x^{i_3} + \dots + e_t x^{i_t}, \gamma_1 = a^{i_1}, \dots, \gamma_t = a^{i_t}, E(x) = a^8 x^{12} + x$. Теперь найдем правильный код $V(x) + E(x)$, в нашем случае правильный код $V(x) + E(x) = a^9 x^{14} + a^5 x^{13} + a^{11} x^{12} + a^{10} x^{11} + a^7 x^9 + a^5 x^8 + a^7 x^7 + a^{13} x^6 + a^3 x^5 + a^{11} x^4 + a^3 x^3 + a^{10} x^2 + a^6 x^1 + a$ далее используя схему Горнера находим исходное сообщение $A(x)$.

17 Алгоритм Берлекемпа

$\exists F$ - многочлен, свободный от квадратов. Разложим $F = f_1 * f_2 * f_3, \dots, f_s (f_i - \text{неприводим над } \mathbb{Z}_p)$

17.1 Алгоритм:

Составить матрицу A , которая имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} x^0 & x^{1*p} & x^{2*p} & \dots & x^{(deg(f)-1)*p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^{deg(f)-1} \end{matrix}$$

Каждый столбец матрицы соответствует векторному разложению многочленов из множества $\{x^0, x^{1*p}, x^{2*p}, \dots, x^{(deg(f)-1)*p}\}$ (1)
в базисе $\{x^0, x^1, x^2, \dots, x^{deg(f)-1}\}$

Для получения векторного представления каждого из многочленов множества (1) необходимо привести их по модулю f .

$$x_0 \equiv_{f(x)} x^0$$

$$x_1 \equiv_{f(x)} \dots$$

$$x_2 \equiv_{f(x)} \dots$$

Далее необходимо найти собственные векторы матрицы A . Для этого получим матрицу $B = A - E$, где E - единичная матрица. Далее нужно привести матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса или же любым другим методом и найти ранг матрицы.

Если $rank B = 1$, то f - неразложим над \mathbb{Z}_p .

Если $1 < rank B$ и $< deg(f) - 1$, то f - разложим над \mathbb{Z}_p

Далее решим уравнение для нахождения собственных векторов h_i :

$$B * h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Количество подходящих векторов h можно найти по формуле:

Кол-во $h_i = deg f - rank B$

$$h_1 \text{ всегда имеет вид } h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

h_2, h_3 и т.д. необходимо найти аналитическим методом либо другим методом для нахождения собственных векторов матрицы.

После нахождения всех векторов h_i приведем их к виду многочлена.

Пример:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 * x^0 + 0 * x^1 + 0 * x^2 + 1 * x^3 + 0 * x^4 = x^3 + 1$$

Итоговое разложение будет иметь вид:

$$f(x) = \prod_{c \in \mathbb{Z}_p} \text{НОД}(f(x), h_i - c)$$

Примечание: h_1 в формуле разложения не рассматривается, т.к. $\text{НОД} = 1$ или $f(x)$ нас не интересует.

17.2 Пример

$$f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 \text{ над } \mathbb{Z}_2$$

Шаг 1: Проверить, свободен ли $f(x)$ от квадратов

Шаг 2: Составить матрицу A .

Для этого приведем элементы из множества $\{x^0, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}, x^{12}\}$ по модулю $f(x)$.

$$x^0 \equiv_{f(x)} x^0$$

$$x^2 \equiv_{f(x)} x^2$$

$$x^4 \equiv_{f(x)} x^4$$

$$x^6 \equiv_{f(x)} x^6$$

$$x^8 \equiv_{f(x)} x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x \equiv x^3 + x^2 + 1$$

$$x^{10} \equiv_{f(x)} x^8 * x^2 \equiv x^2 * (x^3 + x^2 + 1) \equiv x^5 + x^4 + x^2$$

$$x^{12} \equiv_{f(x)} x^{10} * x^2 \equiv x^7 + x^6 + x^4 \equiv x^5 + x^3 + x + 1$$

Тогда А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} x^0 & x^2 & x^4 & x^6 & x^8 & x^{10} & x^{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{matrix}$$

Шаг 3: Найти собственные векторы матрицы А

$$B = A - E = \begin{pmatrix} x^0 & x^2 & x^4 & x^6 & x^8 & x^{10} & x^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{matrix}$$

Приведенная матрица В будет иметь вид:

$$B = \begin{pmatrix} x^0 & x^2 & x^4 & x^6 & x^8 & x^{10} & x^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{matrix}$$

$$\text{rank} B = 5$$

$$\text{Решим уравнение: } B * h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Кол-во } h_i = \deg(f) - \text{rank} B = 7 - 5 = 2$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = x^5 + x^2$$

Шаг 4: Найдем итоговое разложение

$$f(x) = \prod_{c \in \mathbb{Z}_2} \text{НОД}(f(x), h_i - c)$$

$$\text{НОД}(f(x), x^5 + x^2 - 0) = x^2 + x + 1$$

$$\text{НОД}(f(x), x^5 + x^2 - 1) = x^5 + x^2 + 1$$

$$\text{Ответ: } f(x) = (x^2 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$$

18 Энтропия. Информационное неравенство

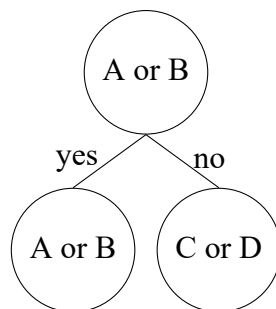
18.1 Пример

Рассмотрим две чёрных коробки, одна и вторая может генерировать символы A,B,C и D.

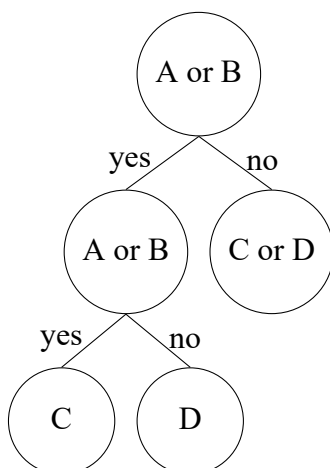
В *первой* вероятности появления символов: $p(A) = 0.25, p(B) = 0.25, p(C) = 0,25, p(D) = 0,25$

Во *второй*: $p(A) = 0.5, p(B) = 0.125, p(C) = 0,125, p(D) = 0,25$ Зададимся вопросом сколько вопросов да или нет нужно задать, чтобы узнать следующий символ, который появится

В первом случае сначала надо можно разделить символы на две равновероятные группы, AB и CD или любые другие по два символа. Мы должны спросить является ли A или B

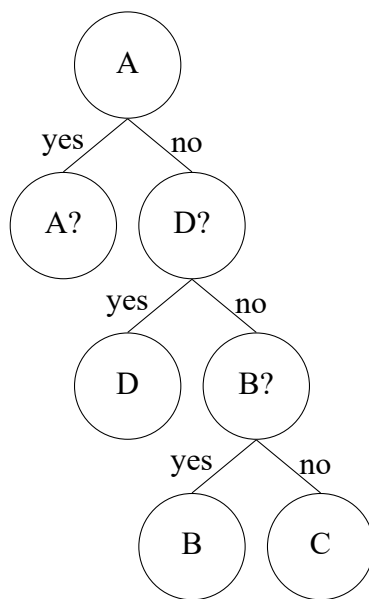


если да,то выбираем из A и B



В среднем количество вопросов для определения - 2

Во втором случае выгоднее сначала спросить является ли это А, т.к. у появления А вероятность 0.5 В случае отрицательного ответа необходимо спросить самое вероятное - D, B и C равновероятны.



Вычислим количество вопросов: $\sum_{i=1}^4 p_i \cdot amount_i = 1 \cdot p(A) + 2 \cdot p(D) + 3 \cdot p(C) + 3 \cdot p(B) = 1,75$

Вторая коробка генерирует меньше информации, так как генерирует меньше неопределённости, меньше неожиданности. Это и есть энтропия. Обозначается как $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$

За единицу измерения был выбран бит - неопределённость о броске монеты, что эквивалентно одному вопросу

$$H = \sum_{i=1}^n x_i \cdot amount_i$$

Количество вопросов = $\log_2(\text{количество исходов})$

Количество исходов = $\frac{1}{p}$

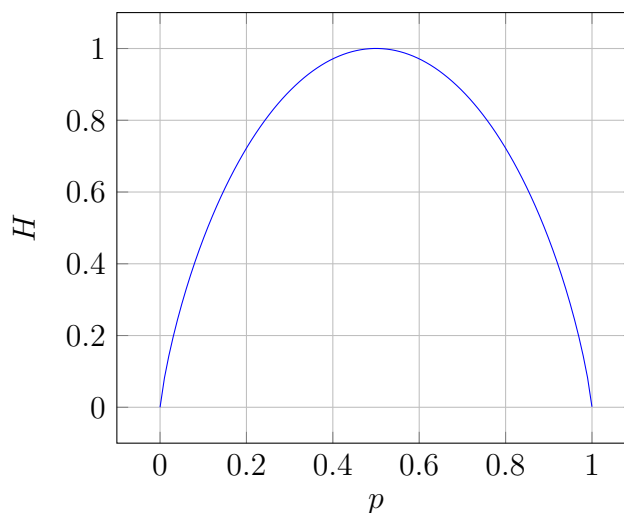
Количество вопросов = $\log_2\left(\frac{1}{p}\right)$

$$H = \sum_{i=1}^n \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \text{ или } H = - \sum_{i=1}^n \log_2(p_i)$$

18.2 Максимум энтропии

Энтропия максимальна когда вероятности вероятности одинаковы.

Данный график для двух исходов, из вероятности p и $1 - p$



18.3 Свойства функции энтропии

- $H(p_1, \dots, p_n)$ определена и непрерывна для всех p_1, \dots, p_n , где $p_i \in [0, 1]$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $p_1 + \dots + p_n = 1$
- $H\left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n\right) < H\left(\underbrace{\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}}_{n+1}\right)$ для целых, положительных n должно это должно выполняться
- $H\left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n\right) = H\left(\frac{b_1}{n}, \dots, \frac{b_k}{n}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{n} H\left(\underbrace{\frac{1}{b_i}, \dots, \frac{1}{b_i}}_{b_i}\right).$
Для целых положительных b_i , Если $\sum_{i=1}^n b_i = n$

Шенон показал, что функция выглядит так: $-K \sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i)$

Коэффициент К нужен для перевода в другую систему исчисления, из бит в нат(основание логарифма е), трит(3), харгли

18.4 Th: $H = -K \sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i)$

$$S^m \leq t^n \leq S^{m+1}$$

$$H\left(\frac{1}{S^m} \dots\right) \leq H\left(\frac{1}{t^n} \dots\right) < H\left(\frac{1}{S^{m+1}} \dots\right)$$

$$]A(n) \equiv H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

$$A(S^m) \leq A(t^n) < A(S^{m+1})$$

$$A(S^m) = A(S) + \sum_{i=1}^s = A(S) + A(S^{m-1}) = 2A(S) + A(S^{m-2}) = \dots = (m+1)A(S) \quad | : nA(S)$$

$$\frac{m}{n} \leq \frac{A(t)}{A(S)} \leq \frac{m+1}{n} \quad | - \frac{m}{n}$$

$$0 \leq \frac{A(t)}{A(S)} - \frac{m}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$m \cdot \log(s) \leq n \cdot \log(t) < (m+1) \cdot \log(s) \quad | : n \cdot \log(s) - \text{Из начальных условий}$$

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\log(t)}{\log(s)} < \frac{m+1}{n} \quad | - \frac{m}{n}$$

$$0 \leq \frac{\log(t)}{\log(s)} - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

Заметим, что $\left| \frac{A(t)}{A(S)} - \frac{\log(t)}{\log(s)} \right| < \frac{1}{n}$

$$\frac{A(t)}{A(S)} = \frac{\log(t)}{\log(s)}; \frac{A(t)}{\log(t)} = \frac{A(S)}{\log(s)} \implies A(s) = k \log(s) \quad \sum_{i=1}^s k = N$$

$$p_1 = \frac{k_1}{N}, \dots, p_s = \frac{k_s}{N}$$

$$A(N) = H(p_1, \dots, p_n) + \sum_{i=1}^s p_i \cdot A(k_i)$$

$$k \cdot \log N = H(p_1, \dots, p_n) + \sum_{i=1}^s p_i \cdot k \cdot \log(k_i)$$

$$H(p_1, \dots, p_n) = k \cdot \left(\log(N) - \sum_{i=1}^s p_i \cdot \log(k_i) \right) \\ k \cdot \left(\log(N) - \sum_{i=1}^s p_i \cdot \log(p_i) - \sum_{i=1}^s p_i \cdot \log(N) \right) = -k \cdot \sum_{i=1}^s p_i \cdot \log(p_i) \text{ ч.т.д.}$$

18.5 Относительная энтропия

$$D(p \parallel q) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log \frac{p_i}{q_i}$$

18.5.1 Th: $D(p \parallel q) \geq 0$ и $D(p \parallel q) = 0 \Leftrightarrow p \equiv q$ - Информационное неравенство

$$f\left(\sum_{i=1}^k p_i \cdot x_i\right) \geq \sum_{i=1}^k p_i \cdot x_i \quad - \quad \text{Неравенство Йенсона} \\ -f\left(\sum_{i=1}^k p_i \cdot x_i\right) \leq -\sum_{i=1}^k p_i \cdot x_i \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log \frac{q_i}{p_i} \geq -\log \sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{q_i}{p_i} = 0 \text{ ч.т.д.}$$

18.5.2

$$H(p_1, \dots, p_n) \quad q_1 = \dots = q_n = \frac{1}{n} D(p \parallel q) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log \frac{p_i}{q_i} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log(n \cdot p_i) = \\ = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log n + \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log(p_i) = \log n + \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log p_i = A(n) - H(p_1, \dots, p_n) \\ \text{Так как } A(n) \geq H(p_1, \dots, p_n) \implies \text{максимум достигается при равновероятных событиях}$$