1. 5. Ядро и образ линейного оператора, их размерности.

1.1. Определение

Пусть A - линейный оператор векторного пространства V.
Образ: множество $\forall y \in V : \exists\, x \in V : A(x) = y$. Обозначение: *Im A*.
Ядро: множество $\forall x \in V : A(x) = 0$. Обозначение: *Ker A*.

1.2. Размерности Образа и Ядра

A - линейный оператор в век. пространстве размерности n.
Размерность образа соответствует рангу матрицы оператора (Размерность $Im(A) = rk(A)$)
Размерность ядра соответствует дополнению ранга матрицы до n (Размерность $Ker(A) = n - rk(A)$)

1.3. Доказательство подпространства

1.3.1. Образ

Пусть $y_1, y_2 \in$ *Im A*, t - произвольное вещественное число $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in A$: $\begin{cases} A(x_1) = y_1 \\ A(x_2) = y_2 \end{cases} \Rightarrow$ $y_1 + y_2 = A(x_1) + A(x_2) = A(x_1 + x_2)$ и $ty_1 = tA(x_1) = A(tx_1) \Rightarrow y_1 + y_2$ и ty - элементы образа $\Rightarrow$ образ - подпространство.

1.3.2. Ядро

Пусть $x_1, x_2 \in$ *Ker A*, t - произвольное вещественное число $\Rightarrow \begin{cases} A(x_1) = 0 \\ A(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = 0 + 0 = 0, A(tx_1) = tA(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2$ и tx - элементы ядра $\Rightarrow$ ядро - подпространство.

1.4. Примеры

Образ проекции пространства на плоскость XOY – плоскость XOY, ядро этого оператора – все векторы, параллельные оси OZ.

Образ оператора дифференцирования на пространстве всех многочленов – это же пространство многочленов. Ядро этого оператора – константы.

2. 6. Алгоритм Чуркина

2.1. Алгоритм

Имеется матрица оператора A размерности n. Составим матрицу B порядка n x 2n, где первые n столбцов занимает транспонированная матрица A, следующие n столбцов единичная матрица.

Элементарными преобразованиями приводим левую часть к ступенчатому виду.

Ненулевые строки левой части - базис образа оператора A.

Продолжение нулевых строк в правой части - базис ядра.

2.2. Обоснование

Строки A^T соответствуют значению оператора на базисе.

Записав значения и приведя к ступенчатому виду, получаем базис (базис Образа).

Левая часть матрицы B соответствует значению оператора на векторе, тогда как правая - координатной записи вектора.После преобразований закономерность сохраняется и в правой части: строки соответствующие нулевым строкам в левой являются базисом ядра. (P.S. Вспомни определение ядра)

2.3. Пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ По алгоритму:

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ перемещаем строку $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$l_3 \to l_3 + l_2 + l_1$ получаем $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Тогда: $(2, -1, -1, 1), (1, 3, 2, 1)$ - базис образа, $(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)$ -базис ядра.

3. 7. Проверка линейного оператора на вырожденность и невырожденность

3.1. Невырожденная матрица оператора

3.2. Оператор вырожденный, если $\exists\ x_1, x_2 : A(x_1) = A(x_2) = y$. Тогда невозможно однозначно определить обратный оператор от y

3.3. Оператор невырожденный только тогда, когда ядро состоит только из нулевого элемента

Оператор невырожденный $\Rightarrow$ ядро не может состоять больше чем из одного элемента (пункт 2) $\Rightarrow$ ядро состоит только из 0.

Ядро состоит из 0 $\Rightarrow A(x_1) = A(x_2)$ будет:

$A(x_1) - A(x_2) = 0 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Совпадение значений оператора на двух элемента $\Rightarrow$ совпадают элементы $\Rightarrow$ возможно корректное определение обратного оператора.

3.4. Геометрические соображения

Пример:

Вырождена ли симметрия относительно плоскости? Легко заметить, что двойная симметрия вернёт точку в исходное положение. Таким образом обратный к симметрии - это сама симметрия, а значит она невырождена.

3.5. Примеры

1. $A(x) = a * x$, где $a \in R$.

   Ядро состоит только из нулевого элемента тогда и только тогда, когда $a \neq 0$.

   Если $a = 0$, оператор вырожден, поскольку прообраз 0 неоднозначно определён.

2. $A(x) = (x, e)e$, при этом $|e| = 1$

   Оператор вырожден, поскольку ядро состоит не только из 0.

4. 8. Собственные числа

4.1. Определение

Число λ называется собственным числом оператора L, если существует такой ненулевой вектор x, что $L(x) = \lambda x$. При этом вектор x называется собственным вектором оператора L, отвечающим собственному числу λ.

4.2. Вычисление

4.2.1. Геометрический

Пример: Найти с.ч. и с.в. проекции пространства на плоскость XOY.

Найдём все векторы || своей проекции - это все вектора || XOY (проекция равна вектору) и все вектора перпендикулярные плоскости (проекция равна нулю). $\Rightarrow$

$\lambda_1 = 1, X_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 0, X_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, где $x, y, z \in R$.

4.2.2. Аналитический

Пример: Найти с.ч. и с.в. оператора дифференцирования на множестве всех многочленов.

Рассмотрим $p'(x) = \lambda p(x)$. Если $\lambda \neq 0$, то степени правой и левой частей не совпадут. Если $\lambda = 0$, то p(x) - константа.

Ответ: $\lambda = 0, X_\lambda = C = const$.

4.2.3. С помощью матрицы

Пусть оператор задан матрицей $\Rightarrow A(x) = Ax \Rightarrow$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow Ax - \lambda Ex = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$$

λ - с.ч. только тогда, когда система уравнений на координаты x $(A - \lambda E)x = 0$ имеет ненулевое решение.

Выполняется только тогда, когда определитель $(A - \lambda E)$ равен 0.

Алгоритм:

1. Найти корни уравнения $det(A - \lambda E) = 0$
2. Для каждого из корней решить СЛУ $(A - \lambda E)x = 0$. Решения будут задавать координаты множества с.в., соответствующих с.ч. (может иметь размерность 1 и более)

4.3. Диагонализуемость

Если удаётся найти базис из с.в. для линейного оператора, то его матрица в этом базисе будет диагональна, а на диагонали будут с.ч.

Пусть матрица диагональна, значит элементы диагонали обозначим через λ_k из условия $A(e_k) = \lambda_k e_k$ получим, что по определению все элементы базиса - с.в. данного линейного оператора.

Итог: матрица линейного оператора диагонализуема тогда только тогда, когда для этого линейного оператора найдётся базис из собственных векторов.

5. 9. Евклидовые и Унитарные пространства

Вещественное линейное пространство $\mathbb{E}$ называется евклидовым, если каждой паре элементов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ этого пространства поставлено в соответствие действительное число $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, называемое скалярным произведением, причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$
3. $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \forall k \in \mathbb{R}$
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ только если $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

В скалярном произведении $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ вектор $\mathbf{u}$ — первый, а вектор $\mathbf{v}$ — второй сомножители. Скалярное произведение $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ вектора $\mathbf{v}$ на себя называется скалярным квадратом. Условия 1–4 называются аксиомами скалярного произведения. Аксиома 1 определяет симметричность скалярного произведения, аксиомы 2 и 3 — аддитивность и однородность по первому сомножителю, аксиома 4 — неотрицательность скалярного квадрата $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

5.1. Геометрические примеры для трёхмерного евклидова пространства

Является ли скалярным произведением:

1. Смешанное произведение (n, x, y), где n – фиксированный вектор.

   Ответ: Нет, поскольку если $n = 0$, то $(n, x, x) = 0$ при каждом x, а если $n \neq 0$, то $(n, x, x) = 0$ при $x = n$.

2. Скалярное произведение $(x + n, y + n)$.

   Ответ: Если $n = 0$, то является, поскольку совпадает с обычным скалярным произведением. Если $n \neq 0$, то нет, поскольку $(x + n, x + n) = 0$ при $x = -n$.

3. Произведение двух скалярных произведений $(n, x)(n, y)$.

   Ответ: Нет, поскольку $(n, x)(n, x) = 0$ при x, перпендикулярном n.

4. Произведение модуля $|n|$ и скалярного произведения $|(n, x)|$.

   Ответ: Если $n = 0$, то не является, поскольку $|n|(x, x) = 0$ при каждом x. Если $n \neq 0$, то является, поскольку совпадает с обычным скалярным произведением, умноженным на ненулевую константу.

5. Произведение модулей $|x| \cdot |y|$.

   Ответ: Нет, поскольку $(x, y - y) = 0$ не всегда равно $(x, y) + (x, -y) = 2(x, y)$. Например, это неверно для двух равных между собой ненулевых векторов.

5.2. Пример вычисления скалярного произведения, модулей и углов для многочленов

Рассмотрим многочлены t и t^3 и скалярное произведение $(f(t), g(t)) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$. Найдем модуль вектора t:

$$(t, t) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}$$

$$|t| = \sqrt{(t, t)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Затем найдем модуль вектора t^3:

$$(t^3, t^3) = \int_{-1}^{1} t^6\,dt = \frac{2}{7}$$

$$|t^3| = \sqrt{(t^3, t^3)} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

И с помощью скалярного произведения найдем угол между ними:

$$(t, t^3) = \int_{-1}^{1} t^4\,dt = \frac{2}{5}$$

$$\measuredangle(t, t^3) = \arccos\frac{(t, t^3)}{|t||t^3|} = \arccos\frac{0.4}{\sqrt{\frac{4}{21}}} = \arccos\frac{\sqrt{21}}{5}$$

6. 10. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Неравенство треугольника

6.1. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

В евклидовом пространстве модуль скалярного произведения двух векторов не превосходит произведения их модулей, то есть $|(x,y)| \le |x| \cdot |y|$. Это неравенство обеспечивает условие $\left|\dfrac{(x,y)}{|x||y|}\right| \le 1$.

6.2. Доказательство неравенства Коши-Буняковского-Шварца

Пусть x,y - векторы в линейном пространстве, λ - произвольное вещественное число. Рассмотрим фукнцию от $\lambda : f(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$

$$0 \le (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)$$

Этот квадратный трехчлен всюду неотрицательный, следовательно, его дискриминант неположительный, то есть

$$D = 4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \le 0;$$

Следовательно, $(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$. Поэтому $|(x,y)| \le |x||y|$.
Примечание
Если определитель скалярного произведения в виде $(f(t), g(t)) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$, неравенство Коши-Неравенство Коши-Буняковского-Шварца принимает вид:

$$|(f(t), g(t))| = |\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt| \le \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_{-1}^{1} g^2(t)\,dt}$$

для любых двух функций f и g. непрерывных функций

Неравенство треугольника

В евклидовом пространстве выполнено неравенство треугольника: модуль суммы двух векторов не превосходит суммы их модулей. Пусть l_1 и l_2 – векторы.
Докажем, что $|l_1 + l_2| \le |l_1| + |l_2|$.

$$(l_1 + l_2)^2 = l_1^2 + 2(l_1, l_2) + l_2^2 \le l_1^2 + 2|l_1||l_2| + l_2^2 = (|l_1| + |l_2|)^2$$

Извлекая из неравенства квадратный корень, получим$|l_1 + l_2| \le |l_1| + |l_2|$.

7. 11. Матрица Грама.Свойства матрицы Грама

Рассмотрим скалярное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве (базис не обязательно ортогональный).

$$x = x_1e_1 + x_2e_3 + x_3e_3$$
$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$$

Тогда $(x, y) = ((x_1e_1 + x_2e_3 + x_3e_3), (y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3)) =$

$x_1y_1e_1^2 + x_1y_2(e_1, e_2) + x_1y_3(e_1, e_3) + x_2y_1(e_2, e_1) + x_2y_2e_2^2 + x_2y_3(e_2, e_3) + x_3y_1(e_3, e_1) + x_3y_2(e_3, e_2) + x_3y_3e_3^2$

Записывать выражение в такой форме не очень удобно, поэтому используется знак суммирования:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{3} x_iy_j(e_i, e_j).$$

Множество коэффициентов можно записать в виде матрицы Грама:

$$\Gamma_{ij} = (e_i, e_j) \quad (i, j \text{ от } 1 \text{ до } 3).$$

То есть

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

или

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e_1^2 & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & e_2^2 & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & e_3^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для случая n-мерного евклидова пространства мы можем записать скалярное произведение векторов в виде $(x, y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_iy_j\Gamma_{ij}$.

Для ортогонального базиса матрица Грама будет диагональной, для ортонормированного базиса будет единичной.

7.1. Свойства матрицы Грама:

1. Симметричность: $(e_i, e_j) = (e_j, e_i)$.

2. Все элементы на диагонали положительны. В самом деле, это скалярные квадраты базисных векторов, а векторы базиса ненулевые.

3. Наибольший элемент (или один из наибольших) находится на диагонали. Возьмём элемент базиса с наибольшим модулем. Тогда его скалярный квадрат будет больше произведения модулей каждых двух векторов и больше их скалярного произведения.

7.2. Примеры вычисления углов

1. Найти угол между векторами $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, если матрица Грама $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

   $(x, y) = (x, y) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} x_iy_j\Gamma_{ij} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 5 = 0$, следовательно векторы ортогональные и угол равен $\frac{\pi}{2}$.

   Ответ:$\frac{\pi}{2}$.

2. Найти угол между векторами $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, если матрица Грама $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$(x, y) = (x, y) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \Gamma_{ij} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + 5 = 1$$

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{1 - 2 - 2 + 5} = \sqrt{2}$$

$$|y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{4 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 5} = 1$$

$$\measuredangle(x, y) = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$