АиГ. ДЗ к 01.11.2022. Вариант №13. Разложение на простейшие

Студент группы 2305 Александр Макурин

31 октября 2022

1 $\dfrac{5x^4+x^3-62x^2-73x-25}{(x+1)(x-4)(x+3)}$

$\dfrac{5x^4+x^3-62x^2-73x-25}{(x+1)(x-4)(x+3)}$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x \quad +1 \\
\hline
x^3-13x-12) & 5x^4+x^3-62x^2-73x-25 \\
 & -5x^4 \qquad +65x^2+60x \\
\hline
 & x^3 \;+3x^2-13x-25 \\
 & -x^3 \qquad +13x+12 \\
\hline
 & 3x^2 \qquad -13
\end{array}
$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+3}=\frac{3x^2-13}{x^3-13x-12}$$

$$A(x^2-x-12)+B(x^2+4x+3)+C(x^2-3x-4)=3x^2-13$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ -A+4B-3C=0 \\ -12A+3B-4C=-13 \end{cases}$$

$$A=4B-3C \Rightarrow B=\frac{3+2C}{5}$$

$$-12(4\frac{3+2C}{5}-3C)+3\frac{3+2C}{5}-4C=-13 \qquad |\cdot 5$$

$$9+6C-20C+180C-96C-144=-65$$

$$70C=70 \Rightarrow C=1 \Rightarrow A=1, \qquad B=1$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+3}+5x+1$

2 $\dfrac{4x^4+14x^3-26x^2-97x-28}{(x+2)^3(x+4)(x-5)}$

$$\frac{4x^4+14x^3-26x^2-97x-28}{(x+2)^3(x+4)(x-5)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3}+\frac{A_4}{x+4}+\frac{A_5}{x-5}$$

$$A_1(x+2)^2(x+4)(x-5)+A_2(x+2)(x+4)(x-5)+A_3(x+4)(x-5)+A_4(x+2)^3(x-5)+A_5(x+2)^3(x+4)=4x^4+14x^3-26x^2-97x-28$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ -14A_3=64-112-104+194-28\Rightarrow A_3=-\frac{14}{14}=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ 72A_4=1024-896-416+388-28\Rightarrow A_4=\frac{72}{72}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ 3087A_5=2500+1750-650-485-28\Rightarrow A_5=\frac{3087}{3087}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ -80A_1-40A_2-20A_3-40A_4+32A_5=-28\Rightarrow 2A_1+A_2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ -6A_1-6A_2-6A_3-2A_4+A_5=11\Rightarrow A_1+A_2=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2=-1-A_1 \\ 2A_1-A_1-1=1\Rightarrow A_1=2\Rightarrow A_2=-3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{2}{x+2}+\frac{-3}{(x+2)^2}+\frac{-1}{(x+2)^3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-5}}$$

3 $\dfrac{6x^3-21x^2+2x-4}{(x^2-x+1)(x-4)x}$

$$x^2-x+1=0$$

$$D=1-4=-3<0$$

$$\frac{6x^3-21x^2+2x-4}{(x^2-x+1)(x-4)x}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x-4}+\frac{D}{x}$$

$$Ax(x-4)x + B(x-4)x + C(x^2-x+1)x + D(x^2-x+1)(x-4) = 6x^3 - 21x^2 + 2x - 4$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ 52 = 52 \Rightarrow C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -4D = -4 \Rightarrow D = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ -3A - 3B + C - 3D = -17 \Rightarrow A + B = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ -8A - 4B + 6C - 6D = -36 \Rightarrow 2A + B = 9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 5 \quad \Rightarrow B = 5 - A \\ 2A + B = 9 \quad \Rightarrow A = 4 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{4x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x}}$$

4 Найти рациональные корни: $-9x^4 + 9x^3 + 28x^2 - 22x + 4 = 0$

$\forall a_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} -$ корень

$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_n \vdots q, a_0 \vdots p$

$p = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$

$q = \{1, 3, 9\}$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$$
\begin{array}{r}
-9x^3 + 6x^2 + 30x - 12 \\
x - \tfrac{1}{3}\overline{\big) -9x^4 + 9x^3 + 28x^2 - 22x + 4} \\
\underline{9x^4 - 3x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
6x^3 + 28x^2 \qquad\qquad\quad \\
\underline{-6x^3 + 2x^2} \qquad\qquad\quad \\
30x^2 - 22x \qquad\quad \\
\underline{-30x^2 + 10x} \qquad\quad \\
-12x + 4 \\
\underline{12x - 4} \\
0
\end{array}
$$

$-9x^3 + 6x^2 + 30x - 12 = 0$

$p = \{-12, -6, -4, -3 - 2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$q = \{1, 3, 9\}$

$x_2 = 2$

$$
\begin{array}{r}
-9x^2 - 12x + 6 \\
x - 2\overline{\big) -9x^3 + 6x^2 + 30x - 12} \\
\underline{9x^3 - 18x^2} \qquad\qquad\qquad \\
-12x^2 + 30x \qquad\quad \\
\underline{12x^2 - 24x} \qquad\quad \\
6x - 12 \\
\underline{-6x + 12} \\
0
\end{array}
$$

$-9x^2 - 12x + 6 = 0$

$D = 144 + 216 = 360$

$x_{3,4} = \dfrac{-2 \mp \sqrt{10}}{3}$

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \dfrac{-2+\sqrt{10}}{3} \\ x_4 = \dfrac{-2-\sqrt{10}}{3} \end{array}\right.$