

# 1 Линейное пространство. Проверка на принадлежность

## 1.1 Определение

Множество  $L$  называют линейным (векторным) пространством, если на нём введены операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие условиям:

1.  $x, y \in L \Rightarrow x + y \in L$ , (замкнутость)
2.  $x + y = y + x$  (коммутативность)
3.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (ассоциативность)
4.  $x + 0 = 0 + x$  (существование нейтрального элемента)
5.  $-x + x = 0$  (существование противоположного для каждого элемента)
6.  $1 \cdot x = x \cdot 1, 1 \in F$  (умножение на нейтральный скаляр по умножению не изменяет элемент)
7.  $x \in L \Rightarrow \lambda x \in L$  (замкнутость при умножении на скаляр)
8.  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$  (ассоциативность умножения на скаляр)
9.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \alpha \in F; x \in L, y \in L$ ; (дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов)
10.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, x \in L; \alpha, \beta \in F$  (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров)

**Примечание:**  $L$  - непустое множество, элементы которого называются векторами.

$F$  - скалярное поле. Например:  $\mathbb{R}$  - множество вещественных чисел,  $\mathbb{C}$  - множество комплексных чисел,  $\mathbb{Q}$  - множество рациональных чисел

## 1.2 Примеры векторных пространств:

- вектора в пространствах  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- матрицы  $m \times n$  с элементами из какого-либо поля.
- многочлены степени не выше  $n$ .

## 1.3 Базис

### 1.3.1 Определение

Базис линейного пространства - линейно независимый, порождающий набор (система) векторов.

Линейно зависимой системой (набор)  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  если существуют ненулевой набор  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , что:  $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$

Если таких коэффициентов не существует, то система линейно независимая.

### 1.3.2 Примеры базисов:

- вектора  $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$  в  $\mathbb{R}^3$  или  $(2, 3, 0)^T, (0, 2, 1)^T, (0, 4, 3)^T$ , главное чтобы они были ЛНЗ.
- $x, x^2, x^3$  в пространстве многочленов степени меньше 3.
- 4 матриц с одной 1 единицей и остальными нулями в линейном пространстве матриц  $2 \times 2$  с вещественными элементами:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- $V = \{p(t) \sin 6t + q(t) \cos 6t \mid \deg(q(t)) \leq 1, \deg(p(t)) \leq 1\}$  Базис:  $\sin 6t, \cos 6t, t \sin 6t, t \cos 6t$ .

### 1.3.3 Матрица перехода

Переход из одного базиса в другой возможен с помощью домножения на матрицу перехода  $A$ , вычисляется она по значениям на базисных векторах, ниже подробнее разобрано.

Пример:

- Запишите матрицу линейного оператора  $L$  в базисе  $u$ , если известно:  $L(u_1) = 2u_1 + u_2 + u_3$ ;  $L(u_2) = u_2$ ;  $L(u_3) = u_2 + u_3$ .

Ответ:  $L_u = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 1.4 Проверка является ли множество векторным пространством

Самым простым является прямое соотношение геометрическим векторам, например матрицы  $2 \times 2$  векторам  $1 \times 4$ , так как там тоже 4 упорядоченных элемента. Это делается для того, чтобы не проверять все аксиомы векторного пространства. Также доказать, что множество является векторным пространством можно, проверив все аксиомы.

### 1.4.1 Примеры проверки:

- $L = \{\text{Множество многочленов степени } 5\}$ . Не является лин. пространство, так как нет нуль-вектора, многочлен с нулевыми коэффициентами не входит в данное множество. Также нет замкнутости:  $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \notin L$
- Окружность радиуса 1 в  $\mathbb{C}$  или  $L = \{\mathbb{C} \mid \text{Im}(z)^2 + \text{Re}(z)^2 = 1\}$ . Также нет замкнутости ни при умножение на скаляр, ни при сложении.
- Матрицы. Не являются, так как не всегда можно складывать.

## 2 Подпространство

### 2.1 Определение

Непустое множество  $L' \subset L$  векторного пространства  $L$  над полем  $F$  является векторным подпространством, если выполнены свойства для всех элементов поля  $F$  и подмножества  $L'$  ( $\subset$ - обозначение подмножества):

- $x + y \in L', x \in L', y \in L'$
- $\alpha x \in L', \alpha \in F, x \in L'$

## 2.2 Примеры:

- Тривиальные подпространства - с одним нулевым элементом. Например матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  в векторном пространстве матриц  $2 \times 2$  над полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .
- тождественное подпространство  $L$  для множества  $L$
- Плоскость или прямая в  $\mathbb{R}^3$  или гиперплоскость в  $\mathbb{R}^n$  пространстве. Прямая и плоскость - частные случаи гиперплоскости.
- матрицы вида  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- векторное пространство  $R^n[x]$  является подпространством всех многочленов  $R[x]$

## 2.3 Проверка является ли подпространством векторное пространство обычно сводится к проверке двух свойств, нам не нужно проверять все 10 аксиом векторного пространства:

- $x + y \in L', x \in L', y \in L'$
- $\alpha x \in L', \alpha \in F, x \in L'$

Можно заметить, что подпространство должно содержать нуль-вектор, из выше изложенных свойств.

## 3 Линейный оператор.

### 3.1 Определение

Линейным оператором называется такое отображение векторного пространства  $L$  над полем  $K$  в это же векторное пространство  $L$  над тем же полем  $f : L \rightarrow L$ , которое удовлетворяет условиям:

- $f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a \in L, \forall b \in L$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in L$

Можно заметить, что первое условие - гомоморфизм групп.

Также заметно важное свойство, что  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ .

### 3.2 Способы задания линейных операторов:

- Словесный, например: проекция пространства на плоскость, проходящую в нуле, прямую, гиперплоскость.
- Функциональный, например: производная)
- Матричный ( $Ax = y$ , матрица  $A$  умножается на вектор  $x$ ).

### 3.3 Примеры проверки отображений :

- Проекция на плоскость  $x + 2y + z = 3$  является линейным оператором, так как  $f(\vec{0}) = \vec{0}$  и  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  (гомоморфизм). Аналогично с любой проекцией на плоскость и прямую
- $f(p(x), q(y), r(z)) = (p(x)', q(x)', r(x)')$  будет являться, а  $f(p(x), q(y), r(z)) = (p(x)' + 1, q(x)' - 2, r(x)')$  по причине не выполнения обоих условий
- оператор поворота на угол  $\alpha$  является линейным оператором
- симметрия относительно плоскости также

### 3.4 Матрица линейного оператора:

Действие на вектор линейного оператора можно представить в виде домножения на матрицу только в случае конечномерного пространства.

Разложим вектор  $x$  по базису. Пусть  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$

Тогда  $A(x) = A(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n) = A(a_1 e_1) + A(a_2 e_2) + \dots + A(a_n e_n) = a_1 A(e_1) + a_2 A(e_2) + \dots + a_n A(e_n)$

Следовательно по значениям линейного оператора на базисе можно вычислить его значения на всём пространстве.

#### 3.4.1 Примеры:

- Матрица оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше 2. Базис:  $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$ ;  $A(e_1) = 0, A(e_2) = 1, A(e_3) = 2x$ . Отсюда получим матрицу оператора на базисе:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Значения на базисных векторах - столбцы слева направо.

- Матрица оператора проекции в  $\mathbb{R}^3$  на плоскость XOY:  
Возьмём базис  $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ .  
 $A(e_1) = (1, 0, 0)^T, A(e_2) = (0, 1, 0)^T, A(e_3) = (0, 0, 0)^T$ .

Тогда матрица оператора  $A$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Матрица поворота в  $\mathbb{R}^2$ :  
Возьмём острый угол.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- В стандартном базисе пространства  $\mathbf{R}^3$  найдите матрицу оператора  $L$ , если  $L(v) = v - 2 \frac{(a, v)}{(a, a)} a$ , где

$$a = (-3, 2, 5)^T, a(, ) \text{ обозначает скалярное произведение. Пусть } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$L(V_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \frac{-3}{38} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} (20V_1 + 12V_2 + 30V_3)$$

$$L(V_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \frac{2}{38} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} (12V_1 + 30V_2 - 20V_3)$$

$$L(V_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{5}{38} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} (30V_1 - 20V_2 - 12V_3)$$

Ответ:  $L_V = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 20 & 12 & 30 \\ 12 & 30 & -20 \\ 30 & -20 & -12 \end{pmatrix}$

### 3.5 Матрица линейного оператора в новом базисе

Чтобы найти матрицу линейного оператора в новом базисе необходимо найти матрицу перехода в новый базис и из нового базиса в старый - обратная к первой.

$$L_f = T_{f \rightarrow e} \cdot L_e \cdot T_{e \rightarrow f},$$

$L_f$ -матрица оператора в новом базисе

$T_{f \rightarrow e}$ -матрица перехода из f в e,

$T_{e \rightarrow f}$ -матрица перехода из e в f

## 4 Обратный оператор

### 4.1 Суть

Обратный оператор при воздействии после воздействия изначального оператора должен вернуть тот же вектор. Обозначается  $A^{-1}$ .

Линейные операторы могут быть как **обратимыми**(переход в другой базис, симметрия), так и **необратимыми**(дифференцирование, проекция на пространство меньшей размерности).

### 4.2 Способы нахождения:

- Алгебраический: нахождение обратной матрицы к матрице оператора(например методом присоединения единичной), возможно только в конечномерном пространстве.
- Геометрический: Например, если симметрия относительно плоскости, то обратный оператор будет возвращать изначальный вектор, при действии на вектор, на который прежде действовали оператором. Также Если  $A$  - оператор на евклидовом пространстве  $V$ , то можно использовать геометрические свойства оператора для нахождения его обратного. Например, если  $A$  - ортогональный оператор, то  $A^{-1} = A^T$ , где  $A^T$  - транспонированная матрица оператора  $A$
- Смешанный - вообще хз, Иванов даже в лс ничего не сказал

## 5 Ядро и образ линейного оператора, их размерности.

### 5.1 Определение

Пусть  $A$  - линейный оператор векторного пространства  $V$ .

Образ: множество  $\forall y \in V : \exists x \in V : A(x) = y$ . Обозначение:  $Im A$ .

Ядро: множество  $\forall x \in V : A(x) = 0$ . Обозначение:  $Ker A$ .

### 5.2 Размерности Образа и Ядра

$A$  - линейный оператор в век. пространстве размерности  $n$ .

Размерность образа соответствует рангу матрицы оператора (Размерность  $Im(A) = rk(A)$ )

Размерность ядра соответствует дополнению ранга матрицы до  $n$  (Размерность  $Ker(A) = n - rk(A)$ )

## 5.3 Доказательство подпространства

### 5.3.1 Образ

Пусть  $y_1, y_2 \in Im A$ ,  $t$  - произвольное вещественное число  $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in A : \begin{cases} A(x_1) = y_1 \\ A(x_2) = y_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 + y_2 = A(x_1) + A(x_2) = A(x_1 + x_2)$  и  $ty_1 = tA(x_1) = A(tx_1) \Rightarrow y_1 + y_2$  и  $ty$  - элементы образа  $\Rightarrow$  образ - подпространство.

### 5.3.2 Ядро

Пусть  $x_1, x_2 \in Ker A$ ,  $t$  - произвольное вещественное число  $\Rightarrow \begin{cases} A(x_1) = 0 \\ A(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = 0 + 0 = 0$ ,  $A(tx_1) = tA(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2$  и  $tx$  - элементы ядра  $\Rightarrow$  ядро - подпространство.

## 5.4 Примеры

Образ проекции пространства на плоскость  $XOY$  - плоскость  $XOY$ , ядро этого оператора - все векторы, параллельные оси  $OZ$ .

Образ оператора дифференцирования на пространстве всех многочленов - это же пространство многочленов. Ядро этого оператора - константы.

## 6 Алгоритм Чуркина

### 6.1 Алгоритм

Имеется матрица оператора  $A$  размерности  $n$ . Составим матрицу  $B$  порядка  $n \times 2n$ , где первые  $n$  столбцов занимает транспонированная матрица  $A$ , следующие  $n$  столбцов единичная матрица.

Элементарными преобразованиями приводим левую часть к ступенчатому виду.

Ненулевые строки левой части - базис образа оператора  $A$ .

Продолжение нулевых строк в правой части - базис ядра.

### 6.2 Обоснование

Строки  $A^T$  соответствуют значению оператора на базисе.

Записав значения и приведя к ступенчатому виду, получаем базис (базис Образа).

Левая часть матрицы  $B$  соответствует значению оператора на векторе, тогда как правая - координатной записи вектора. После преобразований закономерность сохраняется и в правой части: строки соответствующие нулевым строкам в левой являются базисом ядра. (P.S. Вспомни определение ядра)

### 6.3 Пример

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  По алгоритму:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ перемещаем строку } \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$l_3 \rightarrow l_3 + l_2 + l_1 \text{ получаем } \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Тогда:  $(2, -1, -1, 1)$ ,  $(1, 3, 2, 1)$  - базис образа,  $(1, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$  - базис ядра.

## 7 Проверка линейного оператора на вырожденность и невырожденность

### 7.1 Невырожденная матрица оператора

**7.2 Оператор вырожденный, если  $\exists x_1, x_2 : A(x_1) = A(x_2) = y$ . Тогда невозможно однозначно определить обратный оператор от  $y$**

**7.3 Оператор невырожденный только тогда, когда ядро состоит только из нулевого элемента**

Оператор невырожденный  $\Rightarrow$  ядро не может состоять больше чем из одного элемента (пункт 2)  $\Rightarrow$  ядро состоит только из 0.

Ядро состоит из 0  $\Rightarrow A(x_1) = A(x_2)$  будет:

$$A(x_1) - A(x_2) = 0 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Совпадение значений оператора на двух элемента  $\Rightarrow$  совпадают элементы  $\Rightarrow$  возможно корректное определение обратного оператора.

### 7.4 Геометрические соображения

Пример:

Вырождена ли симметрия относительно плоскости? Легко заметить, что двойная симметрия вернёт точку в исходное положение. Таким образом обратный к симметрии - это сама симметрия, а значит она невырождена.

### 7.5 Примеры

1.  $A(x) = a * x$ , где  $a \in R$ .

Ядро состоит только из нулевого элемента тогда и только тогда, когда  $a \neq 0$ .

Если  $a = 0$ , оператор вырожден, поскольку прообраз 0 неоднозначно определён.

2.  $A(x) = (x, e)e$ , при этом  $|e| = 1$

Оператор вырожден, поскольку ядро состоит не только из 0.

## 8 Собственные числа

### 8.1 Определение

Число  $\lambda$  называется собственным числом оператора  $L$ , если существует такой ненулевой вектор  $x$ , что  $L(x) = \lambda x$ . При этом вектор  $x$  называется собственным вектором оператора  $L$ , отвечающим собственному числу  $\lambda$ .

## 8.2 Вычисление

### 8.2.1 Геометрический

Пример: Найти с.ч. и с.в. проекции пространства на плоскость  $XOY$ .

Найдём все векторы  $\parallel$  своей проекции - это все вектора  $\parallel XOY$  (проекция равна вектору) и все вектора перпендикулярные плоскости (проекция равна нулю).  $\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 1, X_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 0, X_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \text{ где } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

### 8.2.2 Аналитический

Пример: Найти с.ч. и с.в. оператора дифференцирования на множестве всех многочленов.

Рассмотрим  $p'(x) = \lambda p(x)$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то степени правой и левой частей не совпадут. Если  $\lambda = 0$ , то  $p(x)$  - константа.

Ответ:  $\lambda = 0, X_\lambda = C = \text{const.}$

### 8.2.3 С помощью матрицы

Пусть оператор задан матрицей  $\Rightarrow A(x) = Ax \Rightarrow$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow Ax - \lambda Ex = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$$

$\lambda$  - с.ч. только тогда, когда система уравнений на координаты  $x$   $(A - \lambda E)x = 0$  имеет ненулевое решение.

Выполняется только тогда, когда определитель  $(A - \lambda E)$  равен 0.

Алгоритм:

1. Найти корни уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$
2. Для каждого из корней решить СЛУ  $(A - \lambda E)x = 0$ . Решения будут задавать координаты множества с.в., соответствующих с.ч. (может иметь размерность 1 и более)

## 8.3 Диагонализуемость

Если удаётся найти базис из с.в. для линейного оператора, то его матрица в этом базисе будет диагональна, а на диагонали будут с.ч.

Пусть матрица диагональна, значит элементы диагонали обозначим через  $\lambda_k$  из условия  $A(e_k) = \lambda_k e_k$  получим, что по определению все элементы базиса - с.в. данного линейного оператора.

Итог: матрица линейного оператора диагонализуема тогда только тогда, когда для этого линейного оператора найдётся базис из собственных векторов.

## 9 Евклидовы и Унитарные пространства

Вещественное линейное пространство  $\mathbb{E}$  называется евклидовым, если каждой паре элементов  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  этого пространства поставлено в соответствие действительное число  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , называемое скалярным произведением, причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$
2.  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$
3.  $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \forall k \in \mathbb{R}$
4.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  и  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$  только если  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$



В скалярном произведении  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  вектор  $\mathbf{u}$  — первый, а вектор  $\mathbf{v}$  — второй сомножители. Скалярное произведение  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  вектора  $\mathbf{v}$  на себя называется скалярным квадратом. Условия 1–4 называются аксиомами скалярного произведения. Аксиома 1 определяет симметричность скалярного произведения, аксиомы 2 и 3 — аддитивность и однородность по первому сомножителю, аксиома 4 — неотрицательность скалярного квадрата  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ .

## 9.1 Геометрические примеры для трёхмерного евклидова пространства

Является ли скалярным произведением:

1. Смешанное произведение  $(n, x, y)$ , где  $n$  — фиксированный вектор.

Ответ: Нет, поскольку если  $n = 0$ , то  $(n, x, x) = 0$  при каждом  $x$ , а если  $n \neq 0$ , то  $(n, x, x) = 0$  при  $x = n$ .

2. Скалярное произведение  $(x + n, y + n)$ .

Ответ: Если  $n = 0$ , то является, поскольку совпадает с обычным скалярным произведением. Если  $n \neq 0$ , то нет, поскольку  $(x + n, x + n) = 0$  при  $x = -n$ .

3. Произведение двух скалярных произведений  $(n, x)(n, y)$ .

Ответ: Нет, поскольку  $(n, x)(n, x) = 0$  при  $x$ , перпендикулярном  $n$ .

4. Произведение модуля  $|n|$  и скалярного произведения  $|(n, x)|$ .

Ответ: Если  $n = 0$ , то не является, поскольку  $|n|(x, x) = 0$  при каждом  $x$ . Если  $n \neq 0$ , то является, поскольку совпадает с обычным скалярным произведением, умноженным на ненулевую константу.

5. Произведение модулей  $|x| \cdot |y|$ .

Ответ: Нет, поскольку  $(x, y - y) = 0$  не всегда равно  $(x, y) + (x, -y) = 2(x, y)$ . Например, это неверно для двух равных между собой ненулевых векторов.

## 9.2 Пример вычисления скалярного произведения, модулей и углов для многочленов

Рассмотрим многочлены  $t$  и  $t^3$  и скалярное произведение  $(f(t), g(t)) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ . Найдём модуль вектора  $t$ :

$$(t, t) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$|t| = \sqrt{(t, t)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Затем найдём модуль вектора  $t^3$ :

$$(t^3, t^3) = \int_{-1}^1 t^6 dt = \frac{2}{7}$$

$$|t^3| = \sqrt{(t^3, t^3)} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

И с помощью скалярного произведения найдём угол между ними:

$$(t, t^3) = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$$

$$\angle(t, t^3) = \arccos \frac{(t, t^3)}{|t||t^3|} = \arccos \frac{0.4}{\sqrt{\frac{4}{21}}} = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$$

## 10 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Неравенство треугольника

### 10.1 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

В евклидовом пространстве модуль скалярного произведения двух векторов не превосходит произведения их модулей, то есть  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ . Это неравенство обеспечивает условие  $\left| \frac{(x, y)}{|x||y|} \right| \leq 1$ .

### 10.2 Доказательство неравенства Коши-Буняковского-Шварца

Пусть  $x, y$  - векторы в линейном пространстве,  $\lambda$  - произвольное вещественное число. Рассмотрим функцию от  $\lambda$ :  $f(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$

$$0 \leq (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y)$$

Этот квадратный трехчлен всюду неотрицательный, следовательно, его дискриминант неположительный, то есть

$$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0;$$

Следовательно,  $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$ . Поэтому  $|(x, y)| \leq |x||y|$ .

Примечание

Если определитель скалярного произведения в виде  $(f(t), g(t)) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ , неравенство Коши-Буняковского-Шварца принимает вид:

$$|(f(t), g(t))| = \left| \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(t) dt} \sqrt{\int_{-1}^1 g^2(t) dt}$$

для любых двух функций  $f$  и  $g$ . непрерывных функций

### Неравенство треугольника

В евклидовом пространстве выполнено неравенство треугольника: модуль суммы двух векторов не превосходит суммы их модулей. Пусть  $l_1$  и  $l_2$  - векторы.

Докажем, что  $|l_1 + l_2| \leq |l_1| + |l_2|$ .

$$(l_1 + l_2)^2 = l_1^2 + 2(l_1, l_2) + l_2^2 \leq l_1^2 + 2|l_1||l_2| + l_2^2 = (|l_1| + |l_2|)^2$$

Извлекая из неравенства квадратный корень, получим  $|l_1 + l_2| \leq |l_1| + |l_2|$ .

## 11 Матрица Грама. Свойства матрицы Грама

Рассмотрим скалярное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве (базис не обязательно ортогональный).

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$$

Тогда  $(x, y) = ((x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3), (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3)) =$

$$x_1 y_1 e_1^2 + x_1 y_2 (e_1, e_2) + x_1 y_3 (e_1, e_3) + x_2 y_1 (e_2, e_1) + x_2 y_2 e_2^2 + x_2 y_3 (e_2, e_3) + x_3 y_1 (e_3, e_1) + x_3 y_2 (e_3, e_2) + x_3 y_3 e_3^2$$

Записывать выражение в такой форме не очень удобно, поэтому используется знак суммирования:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (e_i, e_j).$$

Множество коэффициентов можно записать в виде матрицы Грама:

$$\Gamma_{ij} = (e_i, e_j) \quad (i, j \text{ от } 1 \text{ до } 3).$$

То есть

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

или

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e_1^2 & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & e_2^2 & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & e_3^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для случая  $n$ -мерного евклидова пространства мы можем записать скалярное произведение векторов в виде  $(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}$ .

Для ортогонального базиса матрица Грама будет диагональной, для ортонормированного базиса будет единичной.

### 11.1 Свойства матрицы Грама (в евклидовом пространстве):

1. Симметричность:  $(e_i, e_j) = (e_j, e_i)$ .
2. Все элементы на диагонали положительны. В самом деле, это скалярные квадраты базисных векторов, а векторы базиса ненулевые.
3. Наибольший элемент (или один из наибольших) находится на диагонали. Возьмём элемент базиса с наибольшим модулем. Тогда его скалярный квадрат будет больше произведения модулей каждых двух векторов и больше их скалярного произведения.

### 11.2 Примеры вычисления углов

1. Найти угол между векторами  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , если матрица Грама  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

$(x, y) = (x, y) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \Gamma_{ij} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 5 = 0$ , следовательно векторы ортогональные и угол равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2}$ .

2. Найти угол между векторами  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , если матрица Грама  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

$$(x, y) = (x, y) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \Gamma_{ij} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + 5 = 1$$

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{1 - 2 - 2 + 5} = \sqrt{2}$$

$$|y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{4 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 5} = 1$$

$$\angle(x, y) = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{4}$

## 12 Ортогонолизация

- получение ортогонального базиса из произвольного

### Преимущества:

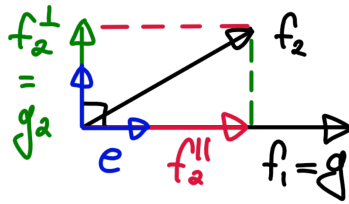
- удобная матрица Грама;
- удобство разложения по базису;
- каждый вектор можно выразить как нормаль к предыдущему.

### Получение:

$\square f_1, \dots, f_n$  — исходный базис,  $g_1, \dots, g_n$  — искомый (ортогональный) базис;

Возьмём  $g_1 = f_1$ , тогда для получения  $g_2$  нужно построить нормаль к  $f_1 (= g_1)$ .

Для этого разложим вектор  $f_2$  на две составляющие: *параллельную*  $f_2^{\parallel}$  и *перпендикулярную*  $f_2^{\perp}$  к  $g_1$ .



По образовавшемуся из векторов треугольнику  $|f_2^{\parallel}| = |f_2| \cdot \cos(f_2, g_1)$  и из скалярного произведения  $(f_2, g_1) = |f_2| \cdot |g_1| \cdot \cos(f_2, g_1)$  получаем:

$$|f_2^{\parallel}| = \frac{(f_2, g_1)}{|g_1|}$$

Вдоль базисного  $g_1$  направим *единичный вектор*  $e = \frac{g_1}{|g_1|}$ , который, взятием  $|f_2^{\parallel}|$  раз, даст вектор  $f_2^{\parallel}$ :

$$f_2^{\parallel} = |f_2^{\parallel}| \cdot e = \frac{(f_2, g_1)}{|g_1|} \cdot \frac{g_1}{|g_1|} \Rightarrow f_2^{\parallel} = \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1$$

Тогда  $f_2^{\perp}$  получается из разности векторов  $f_2 - f_2^{\parallel}$ , он и будет вторым вектором ортогонального базиса:

$$g_2 = f_2^{\perp} = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1$$

Аналогично следующий вектор  $g_3$  получаем как нормаль к двум предыдущим:

$$g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2$$

Таким образом, формула получения ортогонального базиса имеет вид:

$$g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(f_k, g_i)}{(g_i, g_i)} \cdot g_i$$

## Пример

$$f_1 = (1, 3, -2)^T, f_2 = (3, 7, -2)^T - \text{исходный базис.}$$
$$\square g_1 = f_1 = (1, 3, -2)^T; \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1$$

$$g_2 = (3, 7, -2)^T - \frac{3 + 21 + 4}{1 + 9 + 4} \cdot (1, 3, -2)^T = (3, 7, -2)^T - 2 \cdot (1, 3, -2)^T =$$
$$= (3 - 2, 7 - 6, -2 + 4)^T = (1, 1, 2)^T$$

Проверка:  $(g_1, g_2) \stackrel{?}{=} 0$ :  $(g_1, g_2) = 1 + 3 - 4 = 4 - 4 = 0$  — верно.

Ответ:  $g_1 = (1, 3, -2)^T, g_2 = (1, 1, 2)^T$  — ортогональный базис.

## 13 Ортогональные матрицы

**Опр.** Квадратная матрица  $A$  — ортогональная, если она невырождена и  $A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис (ОНБ):

$$\forall \delta_i (\text{строк}) \text{ верно } \delta_i \perp \delta_{i+1} \Leftrightarrow (\delta_i, \delta_{i+1}) = 0, \text{ при } i = \{1, \dots, n-1\} \Rightarrow$$

$$\delta_1 \cdot \delta_1 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 = 1, \text{ т.к. вектор, соответствующий } \delta_1 \text{ не } \perp \text{ самому себе;}$$

$$\delta_1 \cdot \delta_2 =$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{1n}a_{2n} = 0, \text{ как } y \perp \text{ векторов}$$

Аналогично получая подобные выражения для произведения других сочетаний строк, получаем

$$\delta_i \cdot \delta_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

## Пример

Матрица поворота в  $\mathbb{R}^2$ :  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

## 14 Ортогональные операторы. Связь ортогональности оператора и матрицы оператора

### Ортогональные операторы

**Опр.** Линейный оператор  $L(x)$  называется ортогональным (преобразованием), если он сохраняет скалярное произведение в евклидовом пространстве  $\Leftrightarrow (A(x), A(y)) = (x, y)$ .

При таком преобразовании сохраняются:

1. длины (нормы) векторов

$$|(A(x), A(x))| = |(x, x)| \Rightarrow |A(x)| = |x|$$

2. углы между ними

$$\cos \angle(A(x), A(y)) = \frac{(A(x), A(y))}{|A(x)||A(y)|} = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \cos \angle(x, y)$$

(!)  $1 \Rightarrow 2$ :

$$(x + y, x + y) = |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2xy = (x, x) + (y, y) + 2(x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x, y) = (x + y, x + y) - (x, x) - (y, y)$$

– векторы правой части сохраняют норму (из 1)  $\Rightarrow$  в правой части сохраняется скалярное произведение:  $(A(x), A(y)) = (x, y)$ .

Применив формулу скалярного произведения получим 2:

$$(A(x), A(y)) = |A(x)| \cdot |A(y)| \cdot \cos(A(x), A(y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle(A(x), A(y)) = \frac{(A(x), A(y))}{|A(x)||A(y)|} = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \cos \angle(x, y)$$

Ч.т.д.

Перечисленные свойства ортогонального оператора характеризуют его как обобщение понятия движения для  $n$ -мерного пространства.

## Связь ортогональности оператора и матрицы оператора

Если в ОНБ матрица линейного оператора ортогональна, то сам оператор также ортогонален.

Для ОНБ верно  $(x, y) = x^T y$ , а для ортогональной матрицы  $AA^T = E$  ( $A^T = A^{-1}$ ).

Тогда  $(A(x), A(y)) = x^T A^T A y = x^T E y = x^T y = (x, y)$  – выполняется сохранение скалярного произведения  $\Rightarrow$  оператор ортогональный.

Обратное тоже верно:  $\forall x, y : x^T y = x^T A^T A y \Rightarrow \exists x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  с 1 на месте  $i$ ,  $\exists y = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  с 1 на месте  $j$ ;  $(AA^T)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  – условие ортогональности матрицы выполняется.

## 15 Инвариантные подпространства

### 15.1 Определение:

Подпространство  $U$  линейного пространства  $L$  называется инвариантным относительно действия линейного оператора  $A$ , если  $A(U) \subset U$ .

Иными словами, действие оператора на инвариантном подпространстве не выводит за пределы этого подпространства.

### 15.2 Примеры:

- $\ker A$
- $\text{Im } A$
- $X(A, \lambda)$  – Множество всех собственных векторов оператора  $A$  для собственного числа  $\lambda$

Рассмотрим проекцию трёхмерного пространства на плоскость  $YOZ$ .

Тогда инвариантными подпространствами являются:

- плоскость  $YOZ$
- каждая прямая в плоскости  $YOZ$

- прямая ОХ
- нулевой вектор
- всё пространство

Конечно, нулевой вектор и всё пространство являются тривиальными примерами инвариантных подпространств.

## 16 Сопряжённый оператор. Самосопряжённый оператор.

### 16.1 Сопряжённый оператор. Определение:

Пусть  $A(x)$  - линейный оператор на евклидовом пространстве  $L$ .

Тогда оператор  $A^*$  называют сопряжённым к  $A$ , если для каждой пары векторов выполнено равенство  $(A(x), y) = (x, A^*(y))$

Если  $A$  - матрица оператора  $A$  в ортонормированном базисе, то матрица оператора  $A^*$  равна матрице  $A^T$ , транспонированной к  $A$ .

В самом деле,  $(A(x)^T, y) = x^T A^T y = x A^* y$  для всех столбцов координат  $x, y$ .

Следовательно,  $A^* = A^T$

### 16.2 Самосопряжённый оператор. Определение:

Линейный оператор  $A$  на евклидовом пространстве называется самосопряжённым, если  $(A(x), y) = (x, A(y))$

### 16.3 Примеры:

- Тожественный оператор

Справа и слева - скалярное произведение векторов

- Гомотетия с коэффициентом  $t$  (вещественное число)

Справа и слева - скалярное произведение векторов, умноженное на  $t$

- Проекция на плоскость в трёхмерном евклидовом пространстве с обычным скалярным произведением.

Пусть  $x = x_1 + x_2$ ,  $x_1$  - проекция на нормаль,  $x_2$  - проекция на плоскость.

$y = y_1 + y_2$ ,  $y_1$  - проекция на нормаль,  $y_2$  - проекция на плоскость.

Тогда  $(A(x), y) = (A(x_1 + x_2), y) = (x_2, y_1 + y_2) = (x_2, y_2)$

Тогда  $(x, A(y)) = (x_1 + x_2, A(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, y_2) = (x_2, y_2)$

Следовательно,  $(A(x), y) = (x, A(y))$

### 16.4 Свойство собственных векторов самосопряжённого оператора:

Собственные векторы самосопряжённого оператора, соответствующие разным собственным числам, ортогональны.

### 16.4.1 Доказательство:

Пусть  $\lambda, \mu$  - собственные числа самосопряжённого оператора  $A$ .  
Тогда  $A(x) = \lambda x, A(y) = \mu y$ .

$$\lambda \neq \mu$$

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle$$

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

$$\langle \lambda - \mu \rangle \langle x, y \rangle = 0$$

Поскольку  $(\lambda - \mu \neq 0)$ , получим  $\langle x, y \rangle = 0$   
Следовательно,  $x$  ортогонально  $y$ .

## 17 Билинейные и квадратичные формы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Билинейная форма:  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$

(обобщенное скалярное произведение, т.е. усл. на скалярное произведение могут быть не выполнены)

Квадратичная форма:  $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j$

(обобщ. скаляр. квадрат. и ур-я КВП и ПВП)

! Не каждая билинейная форма задает скалярное произведение, как и не каждая квадратичная форма задает скалярный квадрат.

Приведение к симметричному виду

◁ алгебраически как замена переменной; геометрически как преобразование пространства

$$\begin{pmatrix} \dots & a_{ij} \\ a_{ji} & \dots \end{pmatrix}$$

→ замена  $a_{ij}, a_{ji}$  на их полусумму  $\Rightarrow a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i$  не изменится

### 17.1 Приведение к диагональной форме

Приведем матрицу квадратичной формы к симметричному виду.

каждую симметричную матрицу можем представить как матрицу самосопряженного оператора в ортонормированном базисе.

У такого оператора всегда существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Геометрический смысл преобразования: переход к новому базису.

Алгебраический смысл преобразования: замена переменной.



## 18 Метод Лагранжа (выделение полных квадратов)

Этот метод удобен для приведения к диагональному виду квадратичной формы, если собственные числа иррациональные. В общем случае:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1 x_2 + \dots$$

Тогда алгоритм диагонализации:

1. Разделить на  $a_{11}$  (или вынести за скобку)
2. Рассмотреть все слагаемые, содержащие  $x_1$
3. Вместе с выражением  $x_1^2$  выделить полный квадрат (возможно, прибавляя и вычитая квадраты остальных  $x_i$ ), воспользовавшись формулой:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n a_i a_j$$

4. Сделать замену переменной  $y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^n t_i x_i$
5. В итоге квадратичная форма примет вид:

$$y_1^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij}x_i x_j$$

где  $\sum_{i,j=2}^n a_{ij}x_i x_j$  — квадратичная форма с меньшим количеством слагаемых. После этого остаётся

лишь повторять алгоритм до того момента, пока квадратичная форма не примет вид:

$$\sum_{i=1}^n b_i y_i^2$$

Если в квадратичной форме все коэффициенты на главной диагонали равны 0 ( $a_{ii} = 0$ , остались только слагаемые вида  $a_{ij}x_i x_j, i \neq j$ ) можно воспользоваться следующей заменой:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases}$$

Простейший пример подобного:

$$x_1 x_2 = (x'_1 - x'_2)(x'_1 + x'_2) = x_1'^2 - x_2'^2$$

В итоге форма также придёт к диагональному виду

## 18.1 Пример

$$4x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Поделим на  $a_1 = 4$

$$x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{3}{4}x_3^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3$$

Выделим полный квадрат

$$(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3)^2 = x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{16}x_3^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{1}{4}x_2x_3$$

Сделаем замену  $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3$

$$y_1^2 + \frac{11}{16}x_3^2 + \frac{3}{4}x_2x_3$$

Поделим на  $\frac{11}{16}$

$$\frac{16}{11}y_1^2 + x_3^2 + \frac{12}{11}x_2x_3$$

Выделим полный квадрат

$$(x_3 + \frac{6}{11}x_2)^2 = x_3^2 + \frac{36}{121}x_2^2 + \frac{12}{11}x_2x_3$$

Сделаем замену  $y_2 = x_3 + \frac{6}{11}x_2$

$$\frac{16}{11}y_1^2 + y_2^2 - \frac{36}{121}x_2^2$$

Сделаем замену  $y_3 = x_2$

$$\frac{16}{11}y_1^2 + y_2^2 - \frac{36}{121}y_3^2 - \text{диагональный вид}$$

Сделав ещё одну замену  $z_1 = \frac{4y_1}{\sqrt{11}}, z_2 = y_2, z_3 = \frac{6y_3}{11}$  можно прийти к каноническому виду

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - \text{канонический вид}$$

## 19 Закон инерции квадратичной формы

Закон инерции квадратичных форм гласит: число положительных, отрицательных и нулевых диагональных коэффициентов квадратичной формы не зависит от невырожденного преобразования, с помощью которого квадратичная форма приводится к диагональному виду.

Число положительных диагональных коэффициентов квадратичной формы называется **положительным индексом инерции** квадратичной формы. Число отрицательных диагональных коэффициентов квадратичной формы называется **отрицательным индексом инерции** квадратичной формы. Разность между положительным и отрицательным индексами квадратичной формы называется **сигнатурой** квадратичной формы. Число ненулевых диагональных коэффициентов называется **рангом** квадратичной формы.

### 19.1 Доказательство

Пусть закон инерции не работает. Тогда разными преобразованиями одной квадратичной формы можно получить две формы с различным числом положительных, отрицательных и нулевых диагональных коэффициентов.

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

Приведём к двум диагональным видам ( $\forall \alpha, b > 0$ ):

$$F(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i^2 - \sum_{i=k+1}^n \alpha_i y_i^2$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^l b_i z_i^2 - \sum_{i=l+1}^n b_i z_i^2$$

Так как это одна и та же форма, то справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i y_i^2 - \sum_{i=k+1}^n \alpha_i y_i^2 = \sum_{i=1}^l b_i z_i^2 - \sum_{i=l+1}^n b_i z_i^2$$

Пусть  $k > l$ , т. е. количества не совпали. Тогда найдётся такой ненулевой набор  $x_1, \dots, x_n$ , что:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{k+1} = \sum_{i=1}^n c_{k+1,i} x_i = 0 \\ y_{k+2} = \sum_{i=1}^n c_{k+2,i} x_i = 0 \\ \vdots \\ y_n = \sum_{i=1}^n c_{n,i} x_i = 0 \\ z_1 = \sum_{i=1}^n d_{1,i} x_i = 0 \\ z_2 = \sum_{i=1}^n d_{2,i} x_i = 0 \\ \vdots \\ z_l = \sum_{i=1}^l d_{l,i} x_i = 0 \end{array} \right. \quad - \text{СЛУ с } n \text{ неизвестных } (x_1, \dots, x_n)$$

Количество уравнений:  $(n - k) + l = n - (k - l) < n$ , где  $n - k$  — количество уравнений для  $y$ ,  $l$  — количество уравнений для  $z$ ,  $k - l > 0$  по условию.

СЛУ однородное, содержит  $n$  неизвестных и  $n - k + l < n$  уравнений, следовательно найдётся ненулевое решение. Обозначим его за  $x_1^*, \dots, x_n^*$

Подставим набор в равенство квадратичных форм и оно сократится до:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i y_i^2 = - \sum_{i=l+1}^n b_i z_i^2$$

Для того, чтобы  $y_1, \dots, y_k = 0$  и  $z_{l+1}, \dots, z_n = 0$  необходимо, чтобы все  $x_i^* = 0$ , но набор был взят ненулевой, следовательно условие  $k > l$  приводит к противоречию. Аналогично и для  $k < l$ .

## 19.2 Пример

Приведём квадратичную форму  $x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$  к диагональному виду:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 - 4y_3 \\ x_2 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 \\ z_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \\ z_3 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - 2z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}z_3 \end{cases}$$

Получим два диагональных вида:

$$y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 - 8y_3^2 \qquad z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2$$

При этом можно заметить, что оба вида имеют одинаковое количество положительных и отрицательных коэффициентов.

## 20 Примеры приведения уравнения кривой второго порядка и поверхности второго порядка к канонической форме

Выбор метода зависит от поставленной задачи. Вычисление с помощью собственных векторов и ортонормированного базиса позволяет применить движение плоскости или пространства и решить вычислительные задачи.

Преобразование методом Лагранжа удобнее применить, если собственные числа иррациональны. При этом некоторые величины (например, координаты центра при его наличии) найти удастся, но некоторые другие (например, координаты фокусов) не удастся. С применением закона инерции квадратичной формы можно определить тип кривой или поверхности, но вычислительные возможности ниже. Однако вычислений может потребоваться меньше.

### 20.1 Приведение уравнения кривой второго порядка $11x^2 + 19y^2 + 6xy - 28x - 44y = 14$ к каноническому виду

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 19 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 11 - \lambda & 3 \\ 3 & 19 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$|B| = \lambda^2 - 30\lambda + 200 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 10; 20$$

$$\lambda = 20 : \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x_1 = x_2 \Rightarrow e_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 10 : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -3x_2 \Rightarrow e_2 = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \text{ортогональная} \Rightarrow C^{-1} = C^T$$

$$C^{-1} = C^T, C^T = C \Rightarrow C^{-1} = C$$

$$\begin{cases} x = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x + 3y}{\sqrt{10}} \\ y' = \frac{3x - y}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\frac{11(x' + 3y')^2 + 19(3x' - y')^2 + 6(x' + 3y')(3x' - y')}{10} - \frac{28(x' + 3y') + 44(3x' - y')}{\sqrt{10}} = 14$$

$$20x'^2 + 10y'^2 - 16\sqrt{10}x' - 4\sqrt{10}y' = 14$$

$$20(x' - \frac{4}{\sqrt{10}})^2 - 32 + 10y'^2 - 4\sqrt{10}y' = 14$$

$$20(x' - \frac{4}{\sqrt{10}})^2 - 32 + 10(y' - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 - 4 = 14$$

$$20(x' - \frac{4}{\sqrt{10}})^2 + 10(y' - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 50 \quad | : 50$$

$$\frac{x' - \frac{4}{\sqrt{10}}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + \frac{y' - \frac{2}{\sqrt{10}}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\begin{cases} x'' = y' - \frac{2}{\sqrt{10}} \\ y'' = x' - \frac{4}{\sqrt{10}} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y'' + \frac{4}{\sqrt{10}} \\ y' = x'' + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\frac{x''^2}{\sqrt{5}} + \frac{y''^2}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = 1$$

## 20.2 Приведение поверхности второго порядка $4x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xy + 2xz + 2yz - 2x + 4y + 2z = 0$ к канонической форме

$$(2x - y - z)^2 = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz$$

$$(2x - y + z)^2 + 2(z^2 + 3xz) - 2x + 4y + 2z = 0$$

$$2(z + \frac{3}{2}x)^2 = 2z^2 + 6xz + \frac{9}{2}x^2$$

$$(2x - y - z)^2 + 2(z + \frac{3}{2}x)^2 - \frac{9}{2}x^2 - 2x + 4y + 2z = 0$$

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = z + \frac{3}{2}x \\ z' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x = z' \\ y = -x' - y' + \frac{7}{2}z' \\ z = y' - \frac{3}{2}z' \end{cases}$$

$$x'^2 + 2y'^2 - \frac{9}{2}z'^2 - 2z' - 4x' - 4y' + 14z' + 2y' - 3z' = 0$$

$$x'^2 + 2y'^2 - \frac{9}{2}z'^2 - 4x' - 2y' + 9z' = 0$$

$$(x' - 2)^2 - 4 + 2\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2}(z' - 1)^2 + \frac{9}{2} = 0$$

$$(x' - 2)^2 + 2\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}(z' - 1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \\ z'' = z' - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x'' + 2 \\ y' = y'' + \frac{1}{2} \\ z' = z'' + 1 \end{cases}$$

$$x''^2 + \left(\frac{y''}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 - \left(\frac{z''}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^2 = 0$$

## 21 Жорданова форма матрицы линейного оператора

### 21.1 Определение

Пусть характеристический многочлен линейного оператора  $A$  раскладывается на множители:  $(-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{i_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{i_m}$

Тогда матрицу можно представить в виде блоков

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

где

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$\lambda_k$  - собственное число номер  $k$ ,  $J_k$  - соответствующая этому числу клетка матрицы.

Такая форма называется Жордановой формой матрицы оператора.

Примечание 1. Собственные числа для такой формы надо вычислять над множеством комплексных чисел, поскольку по первому столбцу видно, что у матрицы должно быть собственное число.

Примечание 2. Некоторые клетки могут иметь размер  $1 \times 1$ .

Если все клетки имеют такой размер, то жорданова форма – это диагональная форма матрицы оператора. Оператор диагонализуем тогда и только тогда, когда у него есть базис из собственных векторов. В результате приведения матрицы к жордановой форме мы сможем представить пространство в виде суммы инвариантных подпространств, каждое из которых соответствует своему собственному числу.

Алгоритм вычисления жордановой формы

Для каждого собственного числа  $\lambda_i$  находим собственный вектор  $X_{\lambda_i}$ , удовлетворяющий условию  $(A - \lambda_i E)X_{\lambda_i} = 0$ . Возьмем его в качестве первого вектора базиса для  $\lambda_i$ .

Затем, с учетом матрицы оператора, ищем вектор  $X_{\lambda_i}^1$  такой, что  $(A - \lambda_i E)X_{\lambda_i}^1 = X_{\lambda_i}$ , поскольку  $AX_{\lambda_i}^1 = \lambda_i X_{\lambda_i}^1 + X_{\lambda_i}$

Затем ищем вектор  $X_{\lambda_i}^2$  такой, что  $(A - \lambda_i E)X_{\lambda_i}^2 = X_{\lambda_i}^1$ , и так далее.

Общая формула:  $(A - \lambda_i E)X_{\lambda_i}^{p+1} = X_{\lambda_i}^p$

## 21.2 Примеры жордановой формы недиагонализуемой матрицы третьего порядка

ка

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Не  $\forall$  линейные операторы имеют R - с.ч (оператор поворота)

Если  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k$  имеют кратность 1, то в качестве жордановой формы получится диаг. матрица  $\lambda_m$  кратности  $i_m > 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & & \\ 0 & \lambda_m & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \lambda_m - \text{с.ч} \Rightarrow \exists \text{ такой } X_{\lambda_m}: A(X_m) = \lambda_m X_m$$

В качестве  $l_{m,1}$  возьмем  $X_m$

По определению матрицы оператора  $A(l_{m,2}) = l_{m,1} \cdot 1 + \lambda_m l_{m,2} \mid \Rightarrow$

$\Rightarrow Al_{m,2} - \lambda_m l_{m,2} = l_{m,1}$

$$Al_{m,2} - \lambda \cdot l_{m,2}E = l_{m,1}$$

$(A - \lambda_m E)l_{m,2} = l_{m,1}$ , а т.к.  $\lambda_m$  - с.ч, матрица вырождена.

СЛУ для коорд-т вектора  $l_{m,2}$

Далее получается  $l_{m,3}$  аналогично:  $A(l_{m,3}) = l_{m,2} \cdot 1 + \lambda_m l_{m,3}$

По математической индукции получаются вектора до  $l_{m,im}$

Если  $\psi$  для  $\forall$  с.ч, то можно найти базис линейного пространства, в котором матрица имеет жорданову форму.

Все пространство =  $\sum$  подпространств, в каждом из которых имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

## 22 Критерий Сильвестра

- Квадратичная форма является *положительно определенной* (т.е. принимает только положительные значения на ненулевых векторах) тогда и только тогда, когда все верхние угловые миноры положительны.
- Квадратичная форма является *отрицательно определенной* (т.е. принимает только отрицательные значения на ненулевых векторах) тогда и только тогда, когда все миноры знакопеременны, начиная с "-".

### 22.1 Примечания:

1. Если определитель матрицы квадратичной формы не равен 0 и цепочка миноров не отвечает ни требованиям для положительной определенности, ни требованиям для отрицательной определенности, то форма на ненулевых векторах принимает значения разных знаков, и такая квадратичная форма будет называться *неопределенной* (или формой общего вида).
2. Если определитель матрицы квадратичной формы равен 0, то знаки миноров не несут информации про значения формы.

### 22.2 Доказательство необходимости для случая положительной определенности:

Докажем, что если форма положительно определена, то все левые верхние угловые миноры положительны:

Пусть квадратичная форма имеет вид  $F(x) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j$

Существует приведение к каноническому виду - невырожденное преобразование с матрицей  $C$ :  $A = C^T D C$ ,  $D$  - диагональная матрица, элементы на диагонали  $> 0$

Тогда  $\det A = \det C^T D C = \det C^T \cdot \det D \cdot \det C = \det D \cdot (\det C)^2 \Rightarrow$  матрица  $C$  невырожденная

Докажем, что все верхние угловые миноры  $> 0$ :

Рассмотрим минор размером  $k \times k$ . Рассмотрим вектор, в котором первые  $k$  элементов равны 1, остальные равны 0. Для таких наборов квадратичная форма положительно определена, поэтому определитель минора размером  $k \times k$  положителен.

### 22.3 Примеры:

$$1. x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$$

$\det A = 26 - 25 = 1 > 0$ ; верхний минор размером  $1 \times 1 > 0 \Rightarrow$  положительно определенная - по критерию Сильвестра.

2.  $-x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 4 - 1 = 3 > 0$ ; верхний минор размером  $1 \times 1 < 0 \Rightarrow$  отрицательно определенная - по критерию Сильвестра.

3.  $x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Верхний минор размером  $1 \times 1$  положителен, определитель минора  $2 \times 2$  отрицателен,  $\det A = -6 \neq 0 \Rightarrow$  форма не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной  $\Rightarrow$  неопределенная - по критерию Сильвестра.

## 23 Определение группы, свойства группы и проверка свойств группы

### 23.1 Определение

*Группа* в математике — множество  $G$ , на котором определена бинарная операция  $*$  (то есть операция, задающая по двум элементам третий элемент, принадлежащий группе) со следующими свойствами:

1. Ассоциативность:  $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$
2. Наличие нейтрального элемента:  $\exists e \in G : \forall a \in G : a * e = e * a = a$
3. Наличие обратного элемента:  $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

#### 23.1.1 Примечание.

Если дополнительно в группе выполнено условие  $a * b = b * a$ , то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

### 23.2 Единственность нейтрального элемента

Пусть  $e_1, e_2$  — два нейтральных элемента.

Тогда  $e_1 * e_2 = e_2$ , поскольку  $e_1$  — нейтральный элемент.

$e_1 * e_2 = e_1$ , поскольку  $e_2$  — нейтральный элемент. Следовательно,  $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ .

### 23.3 Единственность обратного элемента

Пусть  $b_1, b_2$  — два обратных элемента к данному элементу  $a$ .

Тогда получим  $b_1 = b_1 e = b_1 (a b_2) = (b_1 a) b_2 = b_2$ , следовательно,  $b_1 = b_2$ .



## 23.4 Примеры

1. Натуральные числа со сложением не являются группой, поскольку нет нейтрального по сложению ( $0$  — не натуральное число) и нет обратного.
2. Целые числа со сложением являются группой, ассоциативность выполнена, нейтральный элемент  $0$ , в качестве обратного к числу  $a$  можем взять  $(-a)$ .
3. Ненулевые целые числа с умножением не являются группой, поскольку нет обратного для чисел, не равных  $1$  или  $-1$ .
4. Ненулевые рациональные числа с умножением являются группой, ассоциативность выполнена,

1

нейтральный элемент  $1$ , в качестве обратного к числу  $a$  можем взять  $\frac{1}{a}$ .

$a$

1. Множество остатков при делении на данное натуральное число  $n$ . Складывая остатки, результат сложения заменяем его остатком от деления на  $n$ .

Это группа, поскольку ассоциативность выполнена, в качестве нейтрального элемента можем взять  $0$ , в качестве обратного к числу  $a$  можем взять  $(n - a)$ .

В качестве примера составим таблицу сложения в множестве остатков по модулю  $4$ . Например,  $1 + 3$  заменим  $0$  (остатком от деления на  $4$ ).

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

1. Найдите все натуральные  $n$ , при которых множество остатков при делении на  $n$  с умножением является группой.

Для примера рассмотрим таблицу умножения в множестве остатков по модулю  $4$ .

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Видно, что для числа  $2$  обратного по умножению нет, то есть нет остатка, при умножении на который числа  $2$  мы получим число  $1$ .

Аналогично, если рассмотрим множество остатков при делении на составное число  $n = ab$ , где оба натуральных множителя больше  $1$ , получим, что для числа  $a$  нет обратного, поскольку при умножении числа  $a$  на остатки мы получим только числа, кратные  $a$ , поэтому не получим  $1$ .

Теперь для сравнения рассмотрим таблицу умножения в множестве остатков по модулю  $3$ .

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Здесь получаем группу, поскольку ассоциативность выполнена, в качестве нейтрального элемента можем взять  $1$ , и для каждого элемента обратный можем найти по таблице.

Осталось уточнить, для каждого ли простого числа сможем так сделать.

6. Найдите все натуральные  $n$ , при которых множество всех ненулевых остатков при делении на  $n$  с умножением является группой.

Мы уже проверили, что для составных чисел условие не выполнено.

Для числа  $n = 1$  множество ненулевых остатков при делении на  $n$  пусто. А группа не может быть пустым множеством, поскольку нейтральный элемент в группе должен быть.

Осталось уточнить, для каждого ли простого числа  $n$  множество всех ненулевых остатков при делении на

$n$  с умножением является группой.

Если остаток  $b$  обратный к остатку  $a$ , то  $ab = 1$  в множестве ненулевых остатков при делении на  $n$ . Это означает, что  $ab - 1$  делится на  $n$ , то есть что существует целое число  $k$  такое, что  $ab - 1 = kn$ . Можно переписать условие в виде  $ab - kn = 1$ .

При этом числа  $a$  и  $n$  даны по условию, а числа  $b$ ,  $k$  — искомые. Если  $b$  окажется отрицательным или не меньше  $n$ , заменим число  $b$  его остатком от деления на  $n$ .

Для доказательства существования таких чисел в случае простого  $n$  и ненулевого остатка  $a$  воспользуемся алгоритмом Евклида для поиска наибольшего общего делителя двух натуральных чисел и расширенным алгоритмом Евклида для поиска линейного представления наибольшего общего делителя для двух взаимно простых натуральных чисел.

Общая формула алгоритма для двух чисел  $n$  и  $a$ .

$n = aq_1 + r_1$  НОД  $(a, r_1) = \text{НОД}(n, a)$ , поскольку множество общих делителей одно и то же.

$$a = r_1q_2 + r_2 \text{ НОД}(r_1, r_2) = \text{НОД}(a, r_1) \quad r_1 = r_2q_3 + r_3 \text{ НОД}(r_2, r_3) = \text{НОД}(r_1, r_2)$$

...

В конце концов остаток при делении окажется равен нулю, поскольку остатки уменьшаются с каждым шагом, и все они неотрицательные.

$$rk-1 = rk \quad q_{k+1} + rk+1 \quad rk = rk+1 \quad q_{k+2}$$

Тогда НОД  $(n, a) = rk+1$  (то есть наибольший общий делитель равен последнему ненулевому остатку).

Алгоритм Евклида относится к так называемым «быстрым» алгоритмам, поскольку на каждом шаге остаток уменьшается, по крайней мере, в 2 раза, поэтому за сравнительно небольшое количество шагов алгоритм заканчивает работу.

Теперь докажем, что для каждой двух натуральных чисел можно представить их наибольший делитель как линейную комбинацию этих чисел.

Если  $d = \text{НОД}(a, b)$ , то существуют такие целые числа  $x$  и  $y$ , что  $d = ax + by$ .  $a = bq_1 + r_1$

$$b = r_1q_2 + r_2 \quad r_1 = r_2q_3 + r_3$$

...

$$rk-2 = rk-1 \quad q_k + rk$$

$$rk-1 = rk \quad q_{k+1} + rk+1 \quad rk = rk+1 \quad q_{k+2}$$

Отсюда получаем:

$$rk+1 = rk-1 - rk \quad q_{k+1}$$

То есть мы выразили  $rk+1 = \text{НОД}(a, b)$  через два предыдущих остатка:  $rk$  и  $rk-1$ .

Далее, воспользовавшись тем, что

$$rk = rk-2 - rk-1 qk,$$

выразим  $rk+1$  в виде  $rk+1 = rk-1 - rk qk+1 = rk-1 - (rk-2 - rk-1 qk)qk+1$ . (1)

В этом случае получим линейное представление  $rk+1 = \text{НОД}(a, b)$  через остатки  $rk-1$  и  $rk-2$ .

Затем выразим  $rk-1$  через остатки  $rk-2$  и  $rk-3$ , подставив полученное представление в формулу (1), получим представление  $\text{НОД}(a, b)$  через остатки  $rk-2$  и  $rk-3$ . Продолжим процесс до тех пор, пока не получим линейное представление  $\text{НОД}(a, b)$  через  $a$  и  $b$ .

В частности, для любых двух взаимно простых чисел можно найти такие целые коэффициенты, что линейная комбинация с ними равна 1.

*Пример.*

Найдём такие  $x, y$ , что  $25x + 36y = 1$  (числа 25 и 36 не простые, но взаимно простые).  $36 = 25 + 11$

$$25 = 11 \cdot 2 + 3$$

$$11 = 3 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } 1 &= 3 - 2 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) = 3 \cdot 4 - 11 = (25 - 11 \cdot 2) \cdot 4 - 11 = 25 \cdot 4 - 11 \cdot 9 = 25 \cdot 4 - \\ (36 - 25) \cdot 9 &= 25 \cdot 13 - 36 \cdot 9. \end{aligned}$$

Тогда  $x = 13, y = -9$ . *Примечание:* линейное представление  $\text{НОД}(a, b)$  не единственно.

**Ответ к задаче 6.** Множество всех ненулевых остатков при делении на натуральное  $n$  с умножением является группой тогда и только тогда, когда  $n$  — простое число.

## 23.5 Примеры

1. Являются ли группой по сложению многочлены степени 5? Не являются — нет замкнутости по сложению.

2. Являются ли группой по умножению многочлены произвольной степени с вещественными коэффициентами?

Не являются — не у каждого есть обратный.

3. Найдите все натуральные  $n$ , при которых множество всех невырожденных квадратных матриц  $n \times n$  со сложением является группой.

Если размер матрицы больше 1, не будет замкнутости по сложению. Для матриц порядка 1 условия выполнены.

Ответ:  $n = 1$ .

4. Найдите все пары  $a, b$ , при которых геометрические векторы  $x$ , удовлетворяющие условию  $a \leq x \leq b$ , образуют группу по сложению.

Если  $b$  положительно, не будет замкнутости по сложению. Если  $b$  отрицательно, множество будет пустым, а группа должна содержать хотя бы один элемент (нейтральный).

Следовательно,  $b = 0, a \leq 0$ . В этом случае множество состоит только из 0.

5. Является ли группой множество всех ненулевых рациональных чисел с делением? Проверим ассоциативность.

$$a : (b : c) = ac : b, (a : b) : c = a : bc$$

Эти два числа равны тогда и только тогда, когда  $c : b = 1 : bc$ . Это неверно, например, если  $b = c = 2$ .

Ассоциативность не выполнена, группой не является.

6. Является ли группой множество всех линейных операторов в трёхмерном пространстве с композицией? Не является, поскольку не у каждого есть обратный. Например, нет обратного у нулевого оператора.
7. Является ли группой множество всех невырожденных линейных операторов в трёхмерном пространстве с композицией?

Является. Ассоциативность вытекает из ассоциативности умножения матриц, нейтральным элементом является тождественный оператор, обратный к данному оператор можем получить, если возьмём матрицу, обратную к матрице этого оператора.

8. Является ли группой множество всех *перестановок* из  $n$  элементов относительно композиции? Перестановка — это набор чисел от 1 до  $n$ , возможно, переставленных в другом порядке. Можно её представить как функцию.

Нейтральным элементом является тождественная перестановка. Обратным элементом — перестановка, задающая числу его номер. Ассоциативность выполняется, поскольку

$$((\pi * \rho) * \tau)(x) = (\pi * \rho)(\tau(x)) = \pi(\rho(\tau(x)))$$

$$(\pi * (\rho * \tau))(x) = \pi((\rho * \tau)(x)) = \pi(\rho(\tau(x)))$$

Таким образом, это группа. В ней  $n!$  элементов.

Но группа не коммутативна при  $n \geq 3$ , поскольку можем построить контрпример.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда  $\pi(\rho(1)) = \pi(1) = 2$ ,  $\rho(\pi(1)) = \rho(2) = 3$ .

9. Является ли группой множество всех геометрических векторов с векторным произведением?

Не является, поскольку нет нейтрального элемента. Такой элемент был бы перпендикулярен сам себе, следовательно, был бы нулевым вектором.

10. Является ли группой множество  $\{1, -1, i, -i\}$  с умножением?

Является, поскольку замкнутость по умножению есть, ассоциативность вытекает из ассоциативности комплексных чисел, нейтральный элемент есть, а обратный к каждому можно найти.

Со сложением это множество уже не будет группой, поскольку нет нейтрального элемента и нет замкнутости по сложению.

11. Является ли группой множество всех подмножеств плоскости с умножением?

Не является, поскольку нейтральным может быть только пустое множество, только для него выполнено условие  $A \cup E = A$ , но в таком случае у непустых множеств нет обратного элемента.

12. Какое действие для подмножеств плоскости нужно ввести, чтобы получить группу?

Ответ: симметрическая разность (то есть все элементы, которые принадлежат одному множеству и не принадлежат другому — иными словами, разность объединения и пересечения множеств).

## 24 Подгруппа

Подгруппой группы  $G$  с действием  $*$  называют такое подмножество  $H$  группы  $G$ , что  $H$  является группой относительно действия  $*$ .

### Примечание.

Чтобы подмножество  $H$  группы  $G$  было подгруппой, необходимо и достаточно:

1. для любых  $a, b$  из  $H$   $a * b$  принадлежит  $H$ ,
2. вместе с каждым элементом  $a$  из  $H$  обратный к нему  $a^{-1}$  тоже принадлежит  $H$ .

При выполнении таких условий нейтральный элемент тоже принадлежит  $H$ , поскольку в  $H$  находится  $a$  и обратный к нему элемент  $a^{-1}$ , следовательно, в  $H$  находится их произведение, равное нейтральному элементу.

## 24.1 Примеры

1. Вся группа и подмножество, состоящее из одного нейтрального элемента.
2. Множество всех целых чисел, кратных данному натуральному числу, со сложением. Эту группу иногда обозначают  $\{n\mathbb{Z}, +\}$ .
3. Группа  $(\{1, -1\}, \cdot)$  *Примечание:* для сложения это уже не группа, поскольку сумма элементов не лежит в группе.
4. Матрицы с определителем 1 по умножению. *Примечание:* матрицы с определителем 4 — не группа.
5. Множество двумерных векторов как подпространство множества трёхмерных векторов со сложением.

## 25 Отображение групп, гомоморфизм.

### 25.1 Определение

$G_1 \rightarrow G_2$ , где  $(G_1, \cdot)$  — группа, а  $(G_2, \times)$  — группа, называется гомоморфизмом, если он сохраняет групповую структуру:  $\forall a, b \in G_1 : \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(a), \varphi(b) \in G_2$ . Если, кроме того,  $\varphi$  является взаимно-однозначным, то  $\varphi$  называют изоморфизмом (биекцией).

Если  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  — биекция, то  $\varphi$  — изоморфизм.

Если для двух групп существует изоморфизм, группы называют изоморфными.

Если образом  $\varphi$  является вся группа  $G_2$ , то  $\varphi$  называют эпиморфизмом (сюръекцией).

Если гомоморфизм имеет вид  $\varphi(G_1) = G_2$ , то он называется сюръекцией.

Если для любых двух различных элементов  $a, b \in G_1$  при действии  $\varphi$  различаются их образы, то  $\varphi$  называют мономорфизмом или же (инъекцией).

Если  $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$ , то гомоморфизм называется инъекцией.

Гомоморфизм группы на себя называется автоморфизмом. Простейший пример автоморфизма — тождественный автоморфизм при котором  $f(x) = x$

### 25.2 Примеры гомоморфизма:

1. Проекция трёхмерных векторов на плоскость. Проекция суммы равна сумме проекций.
2. Нахождение остатка от деления на 9 — гомоморфизм между группами:  $(G_1, \cdot)$  — целые числа с умножением,  $(G_2, \times)$  — множество  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  с умножением, при котором результат произведения заменяется остатком от деления на 9.

## 26 Изоморфизм

### 26.1 Определение

Изоморфизм — это биективный гомоморфизм.  
Если  $f : G_1 \rightarrow G_2$  — биекция, то  $f$  — изоморфизм.

### 26.2 Проверка изоморфности:

1. Найти свойство, которое есть у одной  $G$ , но отсутствует у другой.
2. Если не нашлось, то построить изоморфизм.

### 26.3 Примеры

1. **(Изоморфные группы)** Операция сопряжения в множестве комплексных чисел является изоморфизмом и относительно сложения, и относительно умножения. Это отображение взаимно-однозначно из соображений симметрии. Проверим выполнение условия на гомоморфизм для сложения:

$$z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$f(z_1 + z_2) = \overline{(a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i)} = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i = f(z_1) - f(z_2)$$

И проверим условие на гомоморфизм для умножения:

$$f(z_1 * z_2) = \overline{(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i)} = a_1 a_2 - (b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = f(z_1) * f(z_2)$$

2. Мн-ч степени  $\leq 2$  со сложением. Гомоморфизм - взаимно-однозначное соответствие коэффициентов мн-ч. 2.
3. Трёхмерные векторы со сложением. Гомоморфизм - взаимно-однозначное соответствие координат вектора. Доказательство изоморфности проводится построением изоморфизма.
4.  $(R^+, \cdot)$  и  $(R, +)$  — группы. В качестве изоморфизма возьмем:  $f(x) = \ln(x)$ . Отображение взаимно-однозначное. Условие гомоморфизма выполняется:  $(a \cdot b) = \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) = f(a) + f(b)$
5.  $(Q^+, \cdot)$  и  $(Q, +)$  — группы. В рациональных числах можно делить на 2, но не всегда можно извлечь квадратный корень.

Пусть из  $(Q, +)$  в  $(Q^+, \cdot)$  построен изоморфизм  $f(x)$ . Обратное  $f(x)$  отображение —  $g(x)$ . Найдётся такое рациональное число  $a$ , что  $a + a = g(2)$ . Тогда применим к этому равенству отображение  $f(x)$  и получим  $f(a)f(a) = 2$ . Это противоречит иррациональности  $\sqrt{2}$ . Следовательно, изоморфизма нет.

## 27 Смежные классы

### 27.1 Определение

Пусть  $G$  — группа,  $H$  — подгруппа. Введем отношение  $\sim$  на  $G$ :  $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ , где  $a^{-1}$  — мультипликативная запись действия, т.е. действие в виде произведения.

Определение: отношение на множестве  $G$  — это подмножество декартового квадрата  $G \times G$ . Т.е. для каждых двух элементов можно сказать, находятся ли они в этом отношении. Отношение  $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$  обладает свойствами:

## 27.2 Свойства

- Рефлексивность:  $\forall a : a \sim a$ , т.е.  $a^{-1}a = e$ .
- Симметричность:  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ .
- Транзитивность:  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ .

## 27.3 Обобщение классов вычетов

У нас есть группа  $G = (\mathbb{Z}, +)$ ,  $H = (7\mathbb{Z}, +)$ , тогда два числа лежат в одном классе, когда дают одинаковый остаток от деления на 7. Правый смежный класс  $(H_a)$  позволяет определить отношение  $a \sim b$ .

Левый смежный класс  $({}_aH)$  - для отношения  $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ .

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется нормальной, если для каждого элемента  $a$  из  $G$  левый смежный класс и правый смежный класс совпадают.

## 27.4 Примеры

$G = (\mathbb{Z}, +)$ ,  $H = (7\mathbb{Z}, +)$ , Тогда два числа лежат в одном классе тогда и только тогда, когда дают одинаковый остаток от деления на 7. Таким образом, смежные классы – обобщение классов вычетов.

# 28 Ядро и образ гомоморфизма

## 28.1 Определение

Пусть  $(G_1, \cdot)$  и  $(G_2, *)$  - две группы, а  $f$  - гомоморфизм из  $G_1$  в  $G_2$ .

Ядро гомоморфизма  $f$ ,  $\ker(f)$ , определяется как множество всех  $x$  из  $G_1$  таких, что  $f(x) = e_{G_2}$ .

Образ гомоморфизма  $f$ ,  $\text{im}(f)$ , определяется как множество всех  $y$  из  $G_2$  таких, что существует  $x$  из  $G_1$  такой, что  $f(x) = y$ . То есть, образ гомоморфизма - это множество всех элементов.

Докажем, что ядро и образ являются подгруппами относительно соответствующих групп.

## 28.2 Для ядра

Замкнутость выполняется, так как если  $x_1, x_2 \in \ker(f)$ , то

$$f(x_1) = f(x_2) = e_{G_2} \text{ и } f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) * f(x_2) = e_{G_2} * e_{G_2} = e_{G_2}.$$

Ассоциативность выполняется, так как действия происходят в группе.

Существует нейтральный элемент, так как  $f(x \cdot e_{G_1}) = f(x) * f(e_{G_1}) = f(x)$ .

Существуют обратные элементы, так как если  $f(x) = e_{G_2}$ , то  $e_{G_2} = f(e_{G_1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1}) = e_{G_2} * f(x^{-1})$ , откуда следует, что  $f(x^{-1}) = e_{G_2}$  и  $x^{-1} \in \ker(f)$ .

## 28.3 Для образа

Замкнутость выполняется, так как если  $y_1, y_2 \in \text{im}(f)$ , то

$$\exists x_1, x_2 : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2 \text{ и } y_1 * y_2 = f(x_1) * f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2) \in \text{im}(f).$$

Ассоциативность выполняется, так как действия происходят в группе.

Существует нейтральный элемент, так как  $f(e_{G_1}) = e_{G_2}$ .

Существуют обратные элементы, так как если  $y \in \text{im}(f)$ , то  $\exists x : f(x) = y$ ,  $e_{G_2} = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1}) = y * f(x^{-1})$ , откуда следует, что  $f(x^{-1}) \in \text{im}(f)$  и является обратным к  $y$ .

Гомоморфизм является мономорфизмом (инъекцией) тогда и только тогда, когда его ядро тривиально.

Если  $(G_1, \cdot)$  и  $(G_2, *)$  - две группы, а  $f$  - гомоморфизм из  $G_1$  в  $G_2$ , то  $\ker(f)$  тривиально и  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) * (f(x_2))^{-1} = e_{G_2}$ .

Значит,  $f(x_1 \cdot x_2^{-1}) = f(x_1) * f(x_2^{-1}) = e_{G_2}$ , то есть,  $\ker(f)$  тривиально, и  $x_1 = x_2$ .

## 28.4 Пример

Две группы  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  и  $(\mathbb{R}, +)$  с гомоморфизмом  $f(x) = \ln(x)$ .  $\ker(f) = \{1\}$ ,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ . Гомоморфизм является мономорфизмом (инъекцией) тогда и только тогда, когда его ядро тривиально.

## 29 Алгебраический подход к линейным дифференциальным уравнениям. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

### 29.1 Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Решение некоторых дифференциальных уравнений можно рассматривать как поиск собственных чисел и собственных векторов дифференциального оператора. Если искать собственные векторы оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше некоторого числа, собственные вектора будут только константами, поскольку при дифференцировании понижается степень многочлена. Но если рассмотреть линейную оболочку экспонент вида  $e^{\lambda x}$ , получим, что такие экспоненты являются собственными векторами:

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$$

Если подставить такое соотношение в дифференциальное уравнение  $ay'' + by' + c = 0$ , то получим уравнение  $(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$ . Уравнение  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  называют характеристическим уравнением дифференциального уравнения  $ay'' + by' + c = 0$ . Случай с комплексными корнями будет рассмотрен позже.

Поскольку множество решений дифференциального уравнения второго порядка двумерно (это теоретический факт, на который ссылаемся без доказательства), то получается, что, решив квадратное уравнение, мы можем найти два линейно независимых собственных вектора, а их линейная комбинация даст общее решение для дифференциального уравнения.

Если для дифференциального уравнения заданы значения функции и первой производной в начальной точке, то можно найти и коэффициенты функции, то есть частное решение. Для этого надо подставить коэффициенты функции из общего решения в условия на значения функции и производной.

Если множество корней характеристического многочлена имеет вид  $\lambda_1$  (кратности  $p_1$ ),  $\lambda_2$  (кратности  $p_2$ ), ...,  $\lambda_n$  (кратности  $p_n$ ), то в качестве базиса можно взять функции:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{p_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ &e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{p_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ &\dots \\ &e^{\lambda_n x}, xe^{\lambda_n x}, \dots, x^{p_n-1}e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

В случае двух комплексных корней  $a \pm bi$ . Базис образуют функции  $e^{(a+bi)x}$ ,  $e^{(a-bi)x}$ , которые посредством невырожденного преобразования могут быть преобразованы в базис  $e^{ax} \cos bx$ ,  $e^{ax} \sin bx$ .

### 29.2 Неоднородные дифференциальные уравнения

Если уравнение имеет вид  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ , то в ряде случаев можно найти решение уравнения методом неопределённых коэффициентов.

При этом используется представление общего решения, как суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.



Если  $f(x) = e^{ax}(Q(x) \cos bx R(x) \sin bx)$  или  $P(x)e^{\lambda x}$  и при этом  $\lambda (a \pm bi)$  не является корнем характеристического уравнения, то следует искать решение с помощью метода неопределённых коэффициентов.

При этом частное решение имеет вид  $P_0(x)e^{\lambda x}$  для случая с вещественным корнем (степень  $P_0(x)$  равна степени  $P(x)$ ), и  $(Q_0(x) \cos bx + R_0(x) \sin bx)e^{ax}$  (степень многочленов  $Q_0(x), R_0(x)$  равна наибольшей из степеней многочленов  $Q(x), R(x)$ ).

Для кратных корней: если число  $\lambda (a \pm bi)$  является корнем характеристического уравнения кратности  $p$ , то соответствующее уравнение надо умножить на  $x^p$ .

### 29.3 Примеры

$$1. \quad y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$2. \quad y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1, 2$$

$$y_{o.o.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

$$y' = e^{3x}(3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C)$$

$$y'' = e^{3x}(9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B + 9C)$$

Подставим в исходное уравнение

$$e^{3x}(2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C)) = e^{3x}(x^2 + x)$$

Решаем методом неопределённых коэффициентов

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 6A + 2B = 1 \\ 2A + 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$y_{ч.н.} = e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)$$

Отсюда получаем общее решение неоднородного как сумму общего однородного и частного неоднородного

$$y_{o.n.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)$$

## 30 Системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение таких систем связано с несколькими темами, которые в решении одной задачи могут использоваться одновременно. В частности, мы сводим решения задачи о дифференциальных уравнениях к поиску собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Рассмотрим систему  $X'(t) = AX(t)$ , где  $X(t)$  — набор  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ .

Тогда по аналогии с решением уравнений можно искать решение в виде комбинации экспонент. Точнее, найти собственные числа матрицы  $A$ . Сначала предположим, что они вещественные и различные —  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Для каждого из них найдём собственный вектор  $Y_k$ . Тогда базис пространства

решений выглядит так:  $e^{\lambda_1 x} Y_1, e^{\lambda_2 x} Y_2, \dots, e^{\lambda_n x} Y_n$ . Это вытекает из выполнения двух условий:

$$X'_k = \lambda_k X \text{ (из формулы для производной экспоненты)}$$

$$AX_k = \lambda_k X_k \text{ (поскольку } \lambda_k \text{ — собственное число)}. \text{ Поэтому } X'_k = AX_k$$

Если собственное число  $\lambda$  имеет кратность  $r \geq 2$ , то решение системы ищут в виде вектора

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^r a_{1i} t^{i-1} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^r a_{ri} t^{i-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

координаты которого определяются методом неопределённых коэффициентов.

Для комплексных чисел с ненулевой мнимой частью решение системы выражается через тригонометрические функции. Но подобный случай сложнее, поэтому удобнее взять для каждой пары сопряженных комплексных корней два решения — вещественную и мнимую части решения в комплексной форме.

### 30.1 Пример

Найти частное решение однородной системы

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + x_2 \\ x'_2 = 3x_1 + 2x_2 \\ x'_3 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

Собственные числа: 1, 4, 5. Собственные векторы:  $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\text{Общее решение системы: } X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}$$

## 31 Изображение множества решений систем дифференциальных уравнений на плоскости.


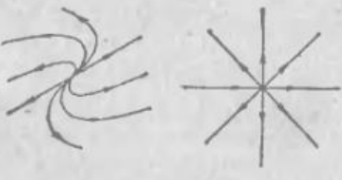



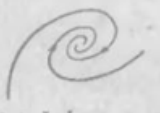


Для исследования на устойчивость точки покоя систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами надо составить характеристическое уравнение. В зависимости от вида и знаков корней, можно определить вид точки покоя. Пусть система дифференциальных уравнений имеет вид :

$$\begin{cases} y' = a_{11}x + a_{12}y \\ x' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение  $\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$

Из свойств показательной функции и общей формулы для решения системы дифференциальных уравнений указанного вида можем сделать такие выводы. Если характеристическое уравнение имеет два отрицательных вещественных корня (или один отрицательный корень кратности 2), имеем устойчивый узел, если два положительных вещественных корня (или один положительный корень кратности 2) — неустойчивый узел, если два вещественных корня разных знаков — седло. В случае с комплексными корнями с отрицательной вещественной частью получим устойчивый полюс (фокус), с положительной вещественной частью — неустойчивый полюс (фокус), с нулевой вещественной частью — центр

## 31.1 Наглядные примеры:

Корни $\lambda_1, \lambda_2$		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительный, кратности 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$	Устойчивый узел 	Асимптотически устойчива
	$\lambda > 0$	Неустойчивый узел 	Неустойчива
Корни $\lambda_1, \lambda_2$		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел 	Асимптотически устойчива
	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел 	Неустойчива
	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Седло 	Неустойчива
Комплексные $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0, \beta \neq 0$	Устойчивый фокус 	Асимптотически устойчива
	$\alpha > 0, \beta \neq 0$	Неустойчивый фокус 	Неустойчива
	$\alpha = 0, \beta \neq 0$	Центр 	Устойчива

## 32 Решение ДУ с помощью характеристического многочлена (общее и частное)

Уравнение  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  называют характеристическим уравнением дифференциального уравнения  $ay'' + by' + cy = 0$ . Если это уравнение имеет два различных вещественных корня, мы получим два линейно независимых решения дифференциального уравнения. Для случая с совпадающими корнями или с комплексными корнями решение придётся несколько модифицировать, эти случаи рассмотрим позже. Поскольку множество решений дифференциального уравнения второго порядка двумерно (это теоретический факт, на который ссылаемся без доказательства), то получается, что, решив квадратное уравнение, мы можем найти два линейно независимых собственных вектора, а их линейная комбинация даст общее решение для дифференциального уравнения. Если для дифференциального уравнения заданы значения функции и первой производной в начальной точке, то можно найти и коэффициенты функции, то есть частное решение. Для этого надо подставить коэффициенты функции из общего решения в условия на значения функции и производной.

### 32.1 Пример

$$y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = y'(0) = 1 \text{ (частное решение)}$$

Решим квадратное уравнение  $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ . Его корни: 1 и 4.

Общее решение:  $C_1 e^x + C_2 e^{4x}$

Производная от него:  $C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}$

Подставим  $x = 0$  в условие для функции и производной, получим систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = 1 \end{cases}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 0$$

$$C_1 e^x + C_2 e^{4x} = 1 * e^x + 0 * e^{4x} = e^x$$

Ответ:  $e^x$ .

## 33 Базис, ЛНЗ

### 33.1 Базис линейного пространства -

порождающая линейно независимая подсистема.

- Если каждый элемент пространства можно линейно выразить через некоторую подсистему, то считается, что эта подсистема *порождает* всю систему.
- Система элементов линейного пространства  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  называется *линейно зависимой*, если существуют числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , не все равные 0, такие, что  $a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2, \dots, a_n \vec{x}_n = \vec{0}$ , где  $\vec{0}$  - арифметический вектор, состоящий из одних нулей (*ноль-вектор*). Если таких коэффициентов не существует, то система называется *линейно независимой*.

### 33.2 Примеры:

1. Набор из трех векторов, направленных по осям координат в  $\mathbb{R}^3$ :  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(0,0,1)$ .
2. Для пространства многочленов степени не выше 2:  $1, x, x^2$ .

В векторном пространстве можно выбрать базис и разложить каждый элемент по базису.

### 33.3 Переход к новому базису:

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - прежний базис,  $f_1, \dots, f_n$  - новый базис.

Тогда каждый вектор  $f_k$  в новом базисе можно выразить через прежний базис:

$$f_k = \sum_{i=0}^n t_{ik} e_i$$

Иногда записывают такой переход через матрицу  $T$  - матрицу перехода.

## 34 Группа перестановок

### 34.1 Определение

Группой перестановок называется множество элементов  $x_1 x_2 \dots x_n$  с перестановкой  $\sigma$ , с операцией композиции.  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \dots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}$

Пусть  $n = 5$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  - пример перестановки.

1 переходит в 3, 2 переходит в 4, 3 переходит в 5, 4 переходит в 2, 5 переходит в 1.

### 34.2 Форма записи

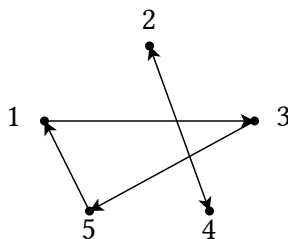
Перестановки можно записывать в виде:

- Матрицы  $2 \times n$   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

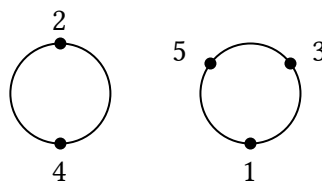
- Циклов. Та же перестановка:  $(135)(24)$ .

При этом  $(135)(24) = (24)(135) = (42)(135) = (42)(513)$ .

Из данной формы легче увидеть, какой элемент куда приходит. Соответственно 1 в 3, 3 в 5, 5 в 1, 2 в 4, 4 в 2.



- В виде графа, с соединением элементов.



- В виде кругов(читаем против часовой стрелки)

### 34.3 Композиция

Композиция двух перестановок  $a$  и  $b$ ,  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$   $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$a \circ b = (143)(25) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Сначала перестановка была найдена в циклическом виде, так как это проще.

Рассуждения при композиции таковы: в  $a$  1 переходит в 3, при этом в  $b$  3 переходит в 4, следовательно

1 переходит в 4;

в а 4 переходит в 2, при этом в b 2 переходит в 3, следовательно 4 переходит в 3. Затем аналогично с остальными числами.

### 34.4 Проверка является ли группой:

- ассоциативность по композиции выполняется в силу свойств композиции как операции.

- нейтральным элементов является тождественная подстановка:  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

- Обратная перестановка - перевёрнутая перестановка:

для  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \dots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}$  обратный будет -  $\begin{pmatrix} \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \dots & \sigma(x_n) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$

Пример: обратный для  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  будет -  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

- Замкнутость по групповой операции: так как композиция двух биекций есть другая биекция, то композиция двух перестановок есть перестановка