АиГ. ДЗ к 2023-05-25. Кривые второго порядка. Вариант №14

Студент группы 2305 Александр Макурин

25 мая 2023

1 Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, найти координаты центра и фокусов в исходной системе координат и построить эскиз графика: $9x^2 - 6y^2 + 8xy + 34x - 16y = 69$.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9-\lambda & 4 \\ 4 & -6-\lambda \end{pmatrix} \qquad |B| = \lambda^2 - 3\lambda - 70$$

$$\lambda_{1,2} = -7; 10$$

$$\lambda = 10 : \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 4y \qquad t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -7 : \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x = -y \qquad t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = C^T = C = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4x' + y'}{\sqrt{17}} \\ y = \dfrac{x' - 4y'}{\sqrt{17}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{4x + y}{\sqrt{17}} \\ y' = \dfrac{x - 4y}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$\frac{9}{17}(4x' + y')^2 - \frac{6}{17}(x' - 4y')^2 + \frac{8}{17}(4x' + y')(x' - 4y') + 2\sqrt{17}(4x' + y') - \frac{16}{\sqrt{17}}(x' - 4y') = 69$$

$$9(16x'^2 + 8x'y' + y'^2) - 6(x'^2 - 8x'y' + 16y'^2) + 8(4x'^2 - 15x'y' - 4y'^2) + 34\sqrt{17}(4x' + y') - 16\sqrt{17}(x' - 4y') = 1173$$

$$(144 - 6 + 32)x'^2 + (72 + 48 - 120)x'y' + (9 - 96 - 32)y'^2 + 120\sqrt{17}x' + 98\sqrt{17}y' - 1173 = 0$$

$$(\sqrt{17}\sqrt{10}x')^2 + 2 \cdot 6\sqrt{10}\sqrt{10}\sqrt{17}x' - ((\sqrt{17}\sqrt{7}y')^2 - 2 \cdot 7\sqrt{7}\sqrt{7}\sqrt{17}y') - 1173 = 0$$

$$170(x' + \frac{6}{\sqrt{17}})^2 - 360 - 119(y' - \frac{7}{\sqrt{17}})^2 + 343 - 1173 = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{6}{\sqrt{17}} \\ y'' = y' - \dfrac{7}{\sqrt{17}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'' - \dfrac{6}{\sqrt{17}} \\ y' = y'' + \dfrac{7}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$170x''^2 - 119y''^2 = 1190 \quad | : 1190$$

$$\frac{x''}{\sqrt{7}}^2 - \frac{y''}{\sqrt{10}}^2 = 1 - \text{гипербола}$$

В системе координат x'', y'' гипербола имеет следующие параметры:

$C(0,0)$ $\qquad$ $F_{1,2}(\pm\sqrt{17}, 0)$

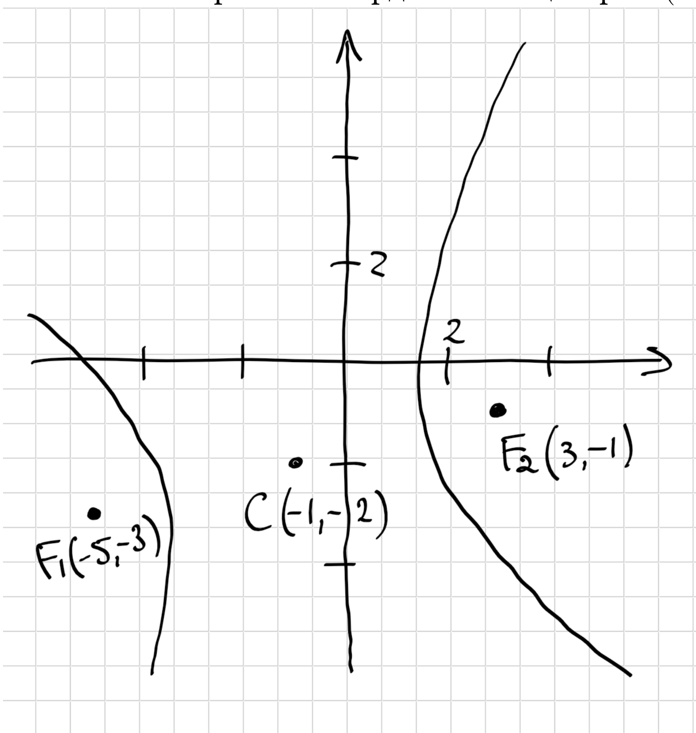
В системе координат x', y':

$C(-\frac{6}{\sqrt{17}}, \frac{7}{\sqrt{17}})$ $\qquad$ $F_{1,2}\left(\frac{\pm 17 - 6}{\sqrt{17}}, \frac{7}{\sqrt{17}}\right)$

В исходной системе координат x, y:

$C(-1,-2)$ $\qquad$ $F_{1,2} = (-1,-2) \pm (4,1)$

Ответ: гипербола с координатами центра $C(-1,2)$, фокусов $F_1(-5,-3)$ и $F_2(3,-1)$. График:



2 Определить тип поверхности второго порядка и найти координаты её центра (если он существует): $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6xy - 12xz - 6yz - 4x + 2y - 6z = 3$

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6xy - 12xz - 6yz - 4x + 2y - 6z = 3$$

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6xy - 12xz - 6yz = x^2 + 2x(3y - 6z) + (9y^2 - 36yz + 36z^2) - 7y^2 + 30yz - 32z^2 =$$
$$= (x + (3y - 6z))^2 - 7y^2 + 30yz - 32z^2$$

$$(x + (3y - 6z))^2 - (7y^2 - 30yz + 32z^2) - 4x + 2y - 6z = 3$$

$$7y^2 - 30yz + 32z^2 = 7(y^2 - 2 \cdot \frac{15}{7}yz + \frac{32}{7}z^2) = 7(y - \frac{15}{7}z)^2 - \frac{1}{7}z^2$$

$$(x+(3y-6z))^2-7(y-\frac{15}{7}z)^2+\frac{1}{7}z^2-4x+2y-6z=3$$

$$\begin{cases} x'=x+3y-6z \\ y'=y-\dfrac{15}{7}z \\ z'=z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x'-3y'-\dfrac{45}{7}z'+6z'=x'-3y'-\dfrac{3}{7}z' \\ y=y'+\dfrac{15}{7}z' \\ z=z' \end{cases}$$

$$-4x+2y-6z=-4x'+12y-24z+2y-6z=-4x'+14y-30z=-4x'+14y'$$

$$x'^2-7y'^2-\frac{1}{7}z'^2-4x'+14y'=3$$

$$(x'^2-2x'\cdot 2+4)-4-7(y'^2-2y'\cdot 1+1)+7+\frac{1}{7}z'^2=3$$

$$\begin{cases} x''=x'-2 \\ y''=y'-1 \\ z''=z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=x''+2 \\ y'=y''+1 \\ z'=z'' \end{cases}$$

$$x''^2-7y''^2+\frac{1}{7}z''^2=0 - \text{конус}$$

Центр в системе координат x'', y'', z'' находится в точке $C(0,0,0)$.
В системе координат x', y', z': $C(2,1,0)$.
В системе координат x, y, z: $C(-1,1,0)$.

$\boxed{\text{Ответ: действительный конус с центром в точке } C(-1,1,0)}$