МатАн. Подготовка к экзамену

Студент группы 2305 Александр Макурин

11 января 2022

11 Предел и непрерывность сложной функции.

Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0, если соблюдается любое из:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0),\ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$
3. $\{x_n\} : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \{f(x_n)\} = f(x_0)$

Предел сложной функции $f(x)$ в точке x_0, при $x_0 = \varphi(t_0)$, если функция $f(x_0)$ непрерывна в точке x_0:

$$\lim_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = f(\lim_{t \to t_0} \varphi(t))$$

12 Односторонняя непрерывность и точки разрыва.

Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 справа, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если соблюдается любое из:

1. $\nexists f(x),\ \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) \neq \infty$
2. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \neq \infty$

   $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b \neq \infty$

   $a \neq b$

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если любой из односторонних пределов функции равен ∞ или $\nexists$.

13 Свойства функций непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Теорема Коши о промежуточном значении

Функция $f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ если она непрерывна в $\forall x_0 \in [a, b]$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда:

1. $f(x) \pm g(x)$ - непрерывна
2. $f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна, если $\forall x \in [a, b]$ $g(x) \neq 0$

Док-во (3):

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывны в$x_0, x_0 \in [a, b] \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Тогда:
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна, ч.т.д.

Теорема Вейерштрасса. Если $f(x)$ непрерывна и ограничена на отрезке $[a, b]$, то она достигает на нём $\sup\limits_{[a,b]} f(x)$ и $\inf\limits_{[a,b]} f(x)$.

Теорема Коши. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b],\ f(a) = A,\ f(b) = B,\ C \in [A, B]$ или $C \in [B, A]$, то $f(\xi) = C,\ \xi \in [a, b]$.

14 Обратные функции. Свойства непрерывности для обратных функций.

15 Элементарные функции и их основные свойства.

16 Замечательные пределы.

17 Производная функции и ее свойства.

18 Дифференциал функции и его свойства.

19 Производная сложной функции.

20 Производная обратной функции.

21 Производные и дифференциалы высших порядков.

22 Теоремы о среднем.

23 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

Пусть $\exists f$, f определена на $U(x_0), \exists f^{(n)}(x_0)$. $f^{(0)}(x) = f(x)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(f, x)$$

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ - многочлен Тейлора.
$r_n(f, x)$ - остаток.
$\overline{o}((x - x_0)^n)$ - остаток в форме Пеано. $\overline{o}(f(x)), x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \dfrac{\overline{o}(f(x))}{f(x)} = 0$

Формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \overline{o}((x-x_0)^n), x \to x_0$$

Док-во:

$$\overline{o}((x-x_0)^n) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}\right) = 0 \text{ -- док-ть}$$

По правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}\right) =$$

Пусть $\Delta x = x - x_0$. Тогда:

$$= \frac{1}{n!}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} - f^{(n)}(x_0)\right) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0, \text{ ч.т.д.}$$

24 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

25 Правило Лопиталя.

26 Монотонность и экстремумы функции.

27 Выпуклость и точки перегиба.

28 Асимптоты.

29 Построение графиков функций с полным исследованием.