АиГ. ДЗ к 2022-12-27. Вариант №13

Студент группы 2305 Александр Макурин

18 декабря 2022

1 Найти вектор x длины $\sqrt{57}$, коллинеарный вектору $a = (12, 15, 12)$ и образующий с вектором $b = (-1, 1, -2)$.

$$\begin{cases} x = \lambda a \\ |x| = \sqrt{57} \Rightarrow |\lambda|\sqrt{12^2 + 15^2 + 12^2} = \sqrt{57} \Rightarrow |\lambda| = \sqrt{\dfrac{57}{513}} = \dfrac{1}{3} \\ \cos\angle(x, b) < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} x \cdot b = \lambda(x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b) \\ x \cdot b = |x||b| \cos\angle(x, b) \end{cases}\right| \Rightarrow \cos\angle(x, b) = \frac{\lambda(x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b)}{|x||b|} = \lambda\frac{-21}{\sqrt{57} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\left.\begin{cases} \cos\angle(x, b) = \lambda\dfrac{-7}{\sqrt{38}} \\ |\lambda| = \dfrac{1}{3} \\ \cos\angle(x, b) < 0 \end{cases}\right| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow x = (4, 5, 4)$$

$\boxed{\text{Ответ: } x = (4, 5, 4)}$

2 Найти площадь треугольника с вершинами $A(-6, 1, 2)$, $B(-8, -3, 1)$ и $C(-10, -3, 2)$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}|}{2}$$

$\overrightarrow{CB} = (2, 0, -1)$

$\overrightarrow{CA} = (4, 4, 0)$

$$\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k} = 4(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{6}}$$

3 При каком значении λ прямые $l_1 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-7}{3} = \dfrac{z-2}{2}$ и $l_2 : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-\lambda}{2}$ пересекаются? Найти точку пересечения.

$$\left\{\begin{array}{l} x = A_1 t_1 + x_{1_0} \\ y = B_1 t_1 + y_{1_0} \\ z = C_1 t_1 + z_{1_0} \\ x = A_2 t_2 + x_{2_0} \\ y = B_2 t_2 + y_{2_0} \\ z = C_2 t_2 + z_{2_0} \end{array}\right| = \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & - & A_1 t_1 & & & = & x_{1_0} \\ & y & & - & B_1 t_1 & & & = & x_{1_0} \\ & & z & - & C_1 t_1 & & & = & z_{1_0} \\ x & & & & & - & A_2 t_2 & = & x_{2_0} \\ & y & & & & - & B_2 t_2 & = & y_{2_0} \\ & & z & & & - & B_2 t_2 & = & z_{2_0} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & - & t_1 & & & = & 2 \\ & y & & - & 3t_1 & & & = & 7 \\ & & z & - & 2t_1 & & & = & 2 \\ x & & & & & - & 3t_1 & = & 7 \\ & y & & & & + & 3t_1 & = & -2 \\ & & z & & & - & 2t_2 & = & \lambda \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка пересечения $(1,4,0)$ при $\lambda = 4$

$\boxed{\text{Ответ: точка пересечения } (1,4,0) \text{ при } \lambda = 4}$

4 При каком значении λ прямые $l_1 : \dfrac{x-0}{5} = \dfrac{y+6}{-4} = \dfrac{z-8}{3}$ и $l_2 : \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-\lambda}{1}$ пересекаются? Найти точку пересечения.

$$\begin{cases} x - 5t_1 = 0 \\ y + 4t_1 = -6 \\ z - 3t_1 = 8 \\ x - t_2 = -3 \\ y = -2 \\ z - t_2 = \lambda \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & \lambda-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка пересечения $(-5,-2,5)$ при $\lambda = 7$

$\boxed{\text{Ответ: точка пересечения } (-5,-2,5) \text{ при } \lambda = 7}$

5 Даны: точка $M(6,5,-1)$, плоскость $\Gamma_1 : 4x + y - z = 12$ и вектора $\overline{a} = (4,7,-4)$ и $\overline{b} = (7,7,-1)$.

5.1 а) Написать уравнение плоскости Γ_2, параллельной векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и проходящей через точку M.

$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} \Rightarrow \Gamma_2 : x_c(x-6) + y_c(y-5) + z_c(z+1) = 0$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & -4 \\ 7 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 21\vec{i} - 24\vec{j} - 21\vec{k}$$

$$\Gamma_2 : 7(x-6) - 8(y-5) - 7(z+1) = 0$$

$$\Gamma_2 : 7x - 8y - 7z = 9$$

$\boxed{\text{Ответ: } \Gamma_2 : 7x - 8y - 7z = 9}$

5.2 b) Написать каноническое уравнение линии пересечения плоскостей Γ_1 и Γ_2.

$$\begin{cases} 4x + y - z = 12 \\ 7x - 8y - 7z = 9 \end{cases}$$

Пусть $\vec{n}$ - направляющий вектор линии пересечения. Тогда $\vec{n} = (4, 1, -1) \times (7, -8, -7)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & -8 & -7 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 21\vec{j} - 39\vec{k} \sim (-5, 7, -13)$$

Пусть M - точка, лежащая на линии пересечения и её координата по оси аппликат равна 0, тогда:

$$\begin{cases} 4x + y = 12 \\ 7x - 8y = 9 \end{cases} \Rightarrow y = 12 - 4x \Rightarrow 39x = 105 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{35}{13} \\ y = \dfrac{16}{13} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x - \dfrac{35}{13}}{-5} = \frac{y - \dfrac{16}{13}}{7} = \frac{z}{-13}$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{x - \frac{35}{13}}{-5} = \frac{y - \frac{16}{13}}{7} = \frac{z}{-13}}$

5.3 c) Найти угол между плоскостями Γ_1 и Γ_2.

Пусть $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ - нормальные векторы плоскостей Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда:

$$\cos\angle(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \frac{x_{\vec{n_1}} x_{\vec{n_2}} + y_{\vec{n_1}} y_{\vec{n_2}} + z_{\vec{n_1}} z_{\vec{n_2}}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{4 \cdot 7 + 1 \cdot (-8) + (-1) \cdot (-7)}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \frac{27}{\sqrt{18 \cdot 162}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\angle(\vec{n_1},\vec{n_2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(\vec{n_1},\vec{n_2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{\pi}{3}}$$

5.4 d) Выбрать нормальные вектора между плоскостями Γ_1 и Γ_2 так, чтобы они были равны по длине и между ними был острый угол.

Между векторами уже острый угол, см. пункт c.

$$\left\{\begin{array}{l} |\vec{n_1}| = \lambda|\vec{n_2}| \\ |\vec{n_1}| = 3\sqrt{2} \\ |\vec{n_2}| = 9\sqrt{2} \end{array}\right| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \left| \begin{array}{l} \vec{n_1} = (4, 1, -1) \\ \vec{n_2} = (\frac{7}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-7}{3}) \end{array}\right.}$$

5.5 e) Написать уравнение биссектрисы острого двугранного угла между плоскостями Γ_1 и Γ_2

Построим плоскость α, перпендикулярную линии пересечения плоскостей Γ_1 и Γ_2 и проходящей через точку $M\left(\frac{35}{13}, \frac{16}{13}, 0\right)$.

$$-5(x - \frac{35}{13}) + 7(y - \frac{16}{13}) - 13z = 0$$

$$65x - 175 - 91y + 112 + 169z = 0$$

$$5x - 7y + 13z = \frac{63}{13}$$

Найдём направляющие вектора линий пересечения плоскости α с плоскостями Γ_1 и Γ_2.

$$\vec{l_1}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \sim (-6, 57, 33) \sim (-2, 19, 11)$$

$$\vec{l_2}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -7 & 13 \\ 7 & -8 & -7 \end{vmatrix} \sim (153, 126, 9) \sim (17, 14, 1)$$

Найдём косинус угла между ними.

$$\cos\angle(\vec{l_1}, \vec{l_2}) = \frac{-2\cdot 17 + 19\cdot 14 + 11\cdot 1}{\sqrt{4+361+121}\cdot\sqrt{289+196+1}} = \frac{243}{\sqrt{486}\cdot\sqrt{486}} = \frac{1}{2}$$

$\cos\angle(\vec{l_1}, \vec{l_2}) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ угол между ними острый.

$|\vec{l_1}| = |\vec{l_2}|$ - вектора равны по длине.

Направляющим вектором биссектрисы будет вектор, равный сумме векторов $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$.

$$\vec{l} = \vec{l_1} + \vec{l_2} = (15, 33, 12) \sim (5, 11, 4)$$

Построим уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

$$\frac{x - \frac{35}{13}}{5} = \frac{y - \frac{16}{13}}{11} = \frac{z}{4}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{x - \frac{35}{13}}{5} = \frac{y - \frac{16}{13}}{11} = \frac{z}{4}}$$