АиГ. Подготовка к экзамену

Студент группы 2305 Александр Макурин

16 января 2022

Все случаи обозначеия векторов в формулах предполагают, что эти векторы ненулевые.

1 Определение, геометрическая интерпретация комплексных чисел в алгебраической форме. Сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень комплексных чисел в алгебраической форме.

Комлексное число — выражение вида $a + bi$, где $a \in \mathbf{R}$ называют вещественной частью, а $b \in \mathbf{R}$ мнимой частью комлексного числа. i - спецсимвол (корень из -1). Геометрически комплексное число есть точка в декартовой системе координат, где a - это значение по оси абсцисс, а b - значение по оси ординат.

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (cbi - adi)}{c^2 + d^2}$$

$$(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdot ... \cdot (a + bi) \text{ (n раз)}$$

Если $z = a + bi$, то $\overline{z} = a - bi$ называют сопряжённым к числу z. Пример:

$$(2 - 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$$

2 Квадратные корни из комплексных чисел в алгебраической форме. Квадратные уравнения с комплексными коэффициентами и корнями в алгебраической форме.

Квадратными корнями комплексного числа $z = a+bi$ называют такие числа z_1 и z_2, что $z_1^2 = z$ и $z_2^2 = z$. Для нахождения квадратного корня комплексного числа используется уравнение вида $(c+di)^2 = a+bi$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$), которое удобно представить как систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} c^2 - d^2 = a \\ 2cd = b \end{cases}$$

Решением данной системы будут пары чисел c и d, являющиеся вещественной и мнимой частью искомых корней соответственно.

Решение уравнений с комплексными корнями требует знания того, что $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$. В остальном решение совпадает со стандартным решением квадратных уравнений. Решение уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - комплексные числа происходит по стандартному алгоритму, но с вычислением корней из комплексных чисел:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Пример (этот пример лютая дичь, лучше взять что-то вроде нахождения квадратного корня из чего-то типа $3-4i$):

$$(4+i)x^2+(2+i)x-3-4i=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2-i\pm\sqrt{3+4i-4(4+i)(-3-4i)}}{8+2i}=\frac{-2-i\pm\sqrt{5}\sqrt{7+16i}}{8+2i}$$

$$\begin{cases} a^2-b^2=7 \\ 2ab=16 \end{cases}\Bigg|\Rightarrow b=\frac{8}{a}\Rightarrow\frac{a^4-64}{a^2}=7\Rightarrow a^4-7a^2-64=0$$

$$a^2=\frac{7\pm\sqrt{49+256}}{2}\Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{305}}{2}};b=\pm 8\sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{305}}}$$

$$x_{1,2}=\frac{(-2-i\pm\sqrt{5}\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{305}}{2}}+8\sqrt{\frac{2}{7+\sqrt{305}}}i\right))(8-2i)}{68}$$

3 Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = r(\cos\varphi i\sin\varphi)$, где z - комплексное число, r - модуль комплексного числа (всегда ≥ 0), φ - аргумент комплексного числа (наклон прямой, проведённой в комплексной плоскости из начала координат в точку этого комплексного числа).

Умножение и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме (сумма выводится через тригонометрические формулы $\cos(a+b)$ и $\sin(a+b)$, произведение через сумму):

$$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 i\sin\varphi_2)=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in\mathbb{N}$$

4 Корни из комплексных чисел в тригонометрической форме.

$$\begin{cases} z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \\ (p(\cos\beta+i\sin\beta))^n=z \end{cases}\Bigg|\Rightarrow\begin{cases} p=\sqrt[n]{r} \\ \cos n\beta=\cos\varphi\Rightarrow n\beta=\varphi+2\pi k\Rightarrow\beta=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n},\ k=0,1,2,3,...,n-1 \end{cases}$$

При $k=n,\ \beta_0=\beta_n$

Пример:

$$\sqrt{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2(\cos(\frac{\pi}{2} + \pi k) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \pi k)),\ k = 0, 1$$

5 Многочлены и действия над ними. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.

Многочлен порядка n - выражение вида $\sum_{i=0}^{n}(a_i x^i),\ a_n \neq 0$.

Многочлены можно умножать, делить с остатком и складывать. Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ означает найти такие $q(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, при этом порядок $r(x)$ меньше, чем порядок $g(x)$.

Если многочлен имеет целые коэффициенты и $\frac{p}{q}$ - рациональный корень (несократимая дробь), то

$$\begin{cases} a_0 \vdots p \\ a_n \vdots q \end{cases}$$

Доказательство:

$$a_0 + a_1(\frac{p}{q}) + a_2(\frac{p}{q})^2 + ... + a_n(\frac{p}{q})^n = 0$$

$$a_1(\frac{p}{q}) + a_2(\frac{p}{q})^2 + ... + a_n(\frac{p}{q})^n = -a_0 \quad | \cdot q^n$$

$$a_1 p q^n + a_2 p^2 q^{n-1} + ... + a_n p^n = -a_0 q^n$$

(Левая часть кратна $p \Rightarrow$ правая кратна p), $\frac{p}{q}$ несократима $\Rightarrow a_0$ кратно p

Аналогично a_n кратно q

Пример:

$$1 - 3x + 2x^2 = 0$$

$$p \in \{-1, 1\}$$

$$q \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

$$x_1 = 1$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

6 Разложение многочленов на множители. Основная теорема алгебры. Следствие.

Основная теорема алгебры: «Каждый многочлен, не равный константе, имеет хотя бы один комплексный корень». Следствие: количество комплексных корней многочлена равно его степени, с учётом кратности корней.

Из следствия основной теоремы алгебры следует, что любой многочлен можно разложить на множители степени 1:

$f(z) = a_0(z - z_0)(z - z_1)...(z - z_{n-1})(z - z_n)$, где $z_{0..n}$ - корни многочлена $f(z)$, a_0 - коэффициент при старшем члене

Пример:

$$2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$$

7 Приближенное вычисление корней многочленов. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на множители степени не выше 2. Теорема Виета для многочленов степени выше второй.

Приближенное вычисление корней многочлена может быть выполнено, к примеру, с помощью метода Ньютона: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, где x_n - корень итерации n, x_{n+1} - корень следующей итерации (более высокой точности).

Многочлен с вещественными коэффициентами может быть разложен на множители степени не выше 2. Множителями первой степени будут выражения с вещественными корнями, а а множители со степенью 2 будут получены в результате перемножения сопряжённых комплексных корней. Это следует из свойства, что если z - комплексный корень, то $\overline{z}$ (сопряжённое к z) тоже является корнем. Доказательство:

Пусть $\exists z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ - комплексные числа. Тогда:

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (cb + ad)i$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (cb + ad)i$

Отсюда: $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ (легко доказывается через мат. индукцию)

Соответсвенно: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0 \Rightarrow \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i} = \overline{0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{x}^i = 0$

Теорема Виета для многочленов степени выше второй:

Пусть старший коэффициент многочлена = 1, тогда многочлен будет представлять собой $x^n +$

$a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$. При этом справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (-1)^1 &= x_1 + x_2 + ...x_n \\ a_2 \cdot (-1)^2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ a_n \cdot (-1)^n &= x_1x_2x_3...x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

Пример:

$$f(x) = x^2$$

$$x_0 = 100$$

$$x_1 = 100 - \frac{10000}{200} = 100 - 50 = 50$$

$$x_2 = 50 - \frac{2500}{100} = 50 - 25 = 25$$

$$x_3 = 25 - \frac{625}{50} = 12.5$$

$$x_4 = 12.5 - \frac{156.25}{25} = 6.25$$

...

8 Дробно-рациональные функции. Разложение правильной дроби на простейшие.

Дробно-рациональной функцией (дробью) называется выражение вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ - многочлены. Если порядок $f(x)$ строго меньше порядка $g(x)$, то такая дробь называется правильной.

Для разложения правильной дроби на простейшие нужно записать её в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами, где в знаменателях все возможные множители знаменателя начальной дроби. Для нахождения неопределённых коэффициентов нужно привести к общему знаменателю все простейшие дроби и приравнять результат к начальной дроби. Затем найти коэффициенты либо подстановкой x-ов (удобнее всего подставлять корни многочлена-знаменателя), либо составить систему уравнений, приравнивая коэффициенты при равных степенях у левого и правого числителей.

Пример:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)+b(x-2)}{x^2-5x+6} = \frac{(a+b)x-3a-2b}{x^2-5x+6}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} & a+b=0 \\ & -(3a+2b)=1 \end{aligned}\right| \Rightarrow a=-1; b=1$$
$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

9 Матрицы и основные действия над ними (сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матриц).

Матрица - прямоугольная таблица чисел, функций или алгебраических выражений, состоящая из строк одинаковой длины. Если количество строк и столбцов совпадает, то такая матрица зовётся квадратной матрицей порядка n, где n - количество строк/столбцов в матрице. $A_{n\times m}$ - матрица, содержащая n строк и m столбцов. $n \times m$ - размер матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ - квадратная матрица 3-го порядка}$$

В общем виде матрица может быть записана как $A = (a_{ij})$, где a_{ij} - элемент матрицы, находящийся на пересечении строки i и столбца j.

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ - матрицы одинакового размера, c - константа. Тогда:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$
$$c \cdot A = A \cdot c = (c \cdot a_{ij})$$

Пусть $A_{n\times k},\ B_{k\times m}$. Тогда:

$$A \times B = \left(\sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}\right) = C_{n\times m} \neq B \times A$$

Умножение матриц не коммутативно.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

10 Возведение матрицы в степень. «Квадратный корень» из матрицы. Значение многочлена от матрицы. Геометрический смысл сложения и умножения матриц.

Возведение матрицы A в степень n есть ничто иное, как $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (n множителей). При этом очевидно, что умножать можно только квадратные матрицы.

Квадратный корень из матрицы A - задача по нахождению такой матрицы B, что $B^2 = A$. Может быть решена посредством составления матрицы B из неопределённых коэффициентов и решения системы линейных уравнений. Количество ответов бесконечно, если порядок матрицы больше 1. Применимо только к квадратным матрицам.

Многочленом $f(x)$ от квадратной матрицы A является тот же многочлен $f(x)$ с подстановкой A в качестве x и заменой одночлена a_n нулевого порядка на a_nE, где E - единичная матрица того же порядка, что и A.

Линейное преобразование пространства можно представить в виде матрицы. Геометрический смысл сложения матриц - сложение преобразований, умножения матриц - композиция преобразований (последовательное применение).

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

11 Определитель матрицы второго и третьего порядка. Свойства определителей второго порядка.

Определителем матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называют число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Обозначение: $\det A$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называют число $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Свойства определителей второго порядка:

- $\det A = \det A^T$
- Определитель матрицы равен определителю этой же матрицы с переставленными строками или столбцами, умноженному на -1.
- Если одну строку или столбец домножить на k, то определитель матрицы измениться в k раз.
- Если строки или столбцы равны, то определитель матрицы равен 0.
- Произведение определителей двух матриц равно определителю произведения этих матриц.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

12 Определение определителя матрицы порядка n. Чётные и нечетные перестановки.

Перестановкой набора чисел (n_1, n_2, n_3) называется запись этих же чисел в другом порядке. Когда количество неправильных пар в перестановке чётное, перестановка называется чётной, иначе - нечётной. Неправильная пара - случай, когда в наборе чисел меньшее число идёт после большего.

Определитем матрицы порядка n называется сумма произведений элементов матрицы, номером столбца которых будут элементы перестановок, на -1 в степени чётности этих перестановок:

$$\det A = \sum_{k_1,k_2,...,k_n} (-1)^{t(k_1,k_2,...,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} ... a_{nk_n}$$

Где рассматривают все варианты перестановки $(k_1, k_2, ..., k_n)$, а $t(k_1, k_2, ..., k_n)$ - чётность перестановки.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-1)^0 + 2 \cdot 3 \cdot (-1)^1 = -2$$

13 Вычисление определителей произвольного порядка (три способа).

- Через чётности перестановок: $\det A_{n\times n} = \sum\limits_{k_1,k_2,...,k_n} (-1)^{t(k_1,k_2,...,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n}$, $t(k_1, k_2, ..., k_n)$ - чётность перестановки.

- Через разложение по строке/столбцу - определителем матрицы будет сумма произведений элементов a_{ij} этой строки/столбца на $(-1)^{i+j}$ на определитель матрицы, полученной из исходной посредством вычёркивания строки i и столбцы j.

- Через элементарные преобразования и приведение к верхнему/нижниму диагональному виду — тогда определитель матрицы будет равен произведению элементов на главной диагонали (определитель при элементарных преобразованиях не меняется).

- С помощью Конденсации Доджсона:
  - 1. С помощью элементарных преобразований делаем внутренние элементы матрицы $A_{n\times n}$ не равными 0 ($a_{ij} \neq 0, \;\; i, j \notin \{1, n\}$)
  - 2. Строим матрицу $B_{(n-1)\times(n-1)}$ из миноров матрицы A: $b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,j+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}$
  - 3. Строим матрицу $C(n-2) \times (n-2)$, разделив миноры матрицы B на внутренние элементы матрицы A: $c_{ij} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_{ij} & b_{i,j+1} \\ b_{i+1,j} & b_{i+1,j+1} \end{vmatrix}}{a_{i+1,j+1}}$

– 4. Пусть $A = B$ и $B = C$. Повторяем шаг 3, пока не придём к матрице первого порядка - её единственный элемент и будет ответом.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-1)^0 + 2 \cdot 3 \cdot (-1)^1 = -2$$

14 Обратная матрица. Определение, свойства. Вычисление обратной матрицы (два способа).

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
Свойства обратной матрицы:

- $(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}$, $a \neq 0$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Вычисление обратной матрицы:

- Способ 1. Обозначим $A^{(i,j)}$ - матрица, полученная в результате вычёркивания столбца j и строки i из матрицы A. A^* - результат транспонирования матрицы, составленной из выражений вида $(-1)^{i+j}A^{(i,j)}$. Тогда $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$, если $\det A \neq 0$.
- Способ 2. Припишем к матрице $A_{n\times n}$ справа единичную матрицу порядка n. Затем с помощью элементарных преобразований сведём левую часть (изначально A) получившейся матрицы к единичной. Тогда матрица, получившаяся справа и будет искомой обратной матрицей: $(A|E) \to (E|A^{-1})$.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

15 Арифметические векторы. Ранг матрицы. Признаки линейно зависимой системы.

Вектор - матрица, у которой ширина либо высота равна 1. Ранг матрицы - ранг (размерность) линейной оболочки этой матрицы. Система арифметических векторов $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}$ является линейно зависимой если существует такой набор $a_1, a_2, ..., a_n$, содержащий хотя бы один ненулевой элемент, что $\sum_{i=1}^{n} \vec{x_i} a_i = 0$. Иначе система линейно независима.

Признаки линейно зависимой системы:

- Есть 2 равных вектора
- Есть пара векторов, таких что $\vec{x_i} = k\vec{x_j}$ ($k \in R$)
- Есть нулевой вектор
- Есть линейно зависимая подсистема

Пример:

$$\vec{x_1} = (0, 1, 2); \vec{x_2} = (3, 4, 5) \Rightarrow \vec{x_1} + \vec{x_2} = (3, 5, 7)$$

16 Методы вычисления ранга матрицы (три способа).

Ранг матрицы не меняется в результате элементарных преобразований.

- Метод элементарных преобразований (Гаусса). Ранг матрицы равен количеству количеству строк после приведения её к верхнетреугольному виду, содержащих ненулевой элемент на главной диагонали. Другими словами, ранг матрицы равен количеству линейно независимых строк этой матрицы.
- Определитель квадратной матрицы. Если определитель матрицы $\neq 0$, то её ранг равен её размеру. Иначе ранг < размера.
- Метод окаймляющих миноров. Минор матрицы A - определитель квадратной матрицы B, полученной в результате вычеркивания некоторого количества строк и столбцов из матрицы A. Если минор = 0, то он называется вырожденным, иначе - невырожденным. Ранг матрицы равен

размеру самого большого невырожденного минора, такого, что все миноры большего размера, чьи матрицы содержат матрицу этого минора, вырождены.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

17 Системы линейных уравнений. Правило Крамера.

Системой линейных уравнений называют систему уравнений вида $\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i = b_k$, где $k = 1, 1, 2, ..., n$ - номер строки уравнения, a_{ki} - коэффициент при x_i в строке k, а b_k - правая часть уравнения в строке k.

Также можно записать такую систему в виде $AX = B$, где:

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Предположим, что решение единственное и существует. Тогда метод крамера следует из свойства $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$. По методу Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}$, где Δ_i - определитель матрицы, полученной в результате замены столбца i в матрице A на столбец B.

Пример:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$$

$\det A = 3$

$\Delta_x = 10$

$\Delta_y = 2$

$x = \dfrac{\Delta_x}{\det A} = \dfrac{10}{3}$

$y = \dfrac{\Delta_y}{\det A} = \dfrac{2}{3}$

18 Теорема Кронекера-Капелли. Решение системы линейных уравнений с помощью вычисления ранга матрицы.

Ткорема Кронекера-Капелли гласит, что если ранг расширенной матрицы и ранг матрицы A совпадают, тогда и только тогда СЛАУ имеет непустое множество решений. Расширенная матрица - матрица, полученная в результате приписывания к матрице A справа матрицы B.

Решение СЛАУ с помощью вычисления ранга матрицы: Пусть $r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B)$. Тогда возьмём r строк СЛАУ таким образом, чтобы они образовывали базис (были линейно независимыми и порождающими). Остальные строки можно отбросить, так как их можно выразить через базис. $x_1, x_2, ..., x_r$ - базисные переменные, $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_m$ - свободные переменные, через которые можно выразить базисные. Проведя замену $x_{r+1}, ...x_m$ на $t_1, ..., t_m$ выразим все переменные через t_i. Это и будет решением СЛАУ.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = t_1;\ x_3 = t_2;\ x_1 = 1 - 3t_2 - 2t_1$$

Ответ: $x_1 = 1 - 3t_2 - 2t_1, x_2 = t_1, x_3 = t_2$, где $t_{1,2}$ - свободные переменные

19 Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений. Однородная система линейных уравнений.

Метод Гаусса заключается в приведении СЛАУ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Тогда, в зависимости от того, как выглядит последняя строка, возможны варианты:

- Если в последней строке 0 = 0, то система имеет бесконечное множество решений, записываемое через свободные переменные.
- Если в последней строке *const* $= 0$, то система не имеет решений
- Если в последней строке $a_n x_n = b_n$, то из неё можно найти x_n, подставив которое в предыдущую строку можно найти x_{n-1} и т. д.

СЛАУ называется однородной, если в правой части во всех строках нули.

Пример:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3};\ x = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

20 Системы линейных уравнений с параметрами.

Можно найти такие значения параметра λ, что определитель основной матрицы A будет равен 0. В таких случаях можно отдельно решить систему, поскольку она будет без параметра это будет частными случаями. Затем отдельно решить случаи, когда $\det A \neq 0$ (тогда решение единственно) любым удобным методом.

Пример:

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda \\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix}$$

$\det A = 1 - \lambda^2$

$1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$0 = 1 \Rightarrow$ при $\lambda = 1$ решений нет

$\lambda = -1$

$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$0 = 3 \Rightarrow$ при $\lambda = -1$ решений нет

$\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 2-\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \dfrac{2-\lambda}{1-\lambda^2}$

$\Rightarrow x_1 = 1 - \dfrac{2\lambda - \lambda^2}{1-\lambda^2} = -\dfrac{2\lambda - 1}{1-\lambda^2} = \dfrac{1-2\lambda}{1-\lambda^2}$

Ответ: при $\lambda = \pm 1$ решений нет, иначе $x_1 = \dfrac{1-2\lambda}{1-\lambda^2}$, $x_2 = \dfrac{2-\lambda}{1-\lambda^2}$

21 Геометрические векторы. Определение, основные операции. Примеры задач на сложение геометрических векторов.

Геометрическим вектором называется класс равных сонаправленных отрезков. Вектора можно складывать, вычитать, умножать на число.

Сложение геометрических векторо производится по правилу параллелограмма или треугольника. Один вектор строится от конца второго вектора - вектор проведённый из начала первого в конец второго и будет результатом сложения двух векторов.

Результат умножения вектора a на число α есть такой вектор b, что $|b| = |\alpha a| = |\alpha||a|$. При этом если $\alpha > 0$, то вектор b сонаправлен вектору a, если $\alpha < 0$, то противонаправлен.

Вычитание вектора b из вектора a есть то же, что и $a + (-1) \cdot b$.

Классической задачей на сложение геометрических веторов является нахождение середины стороны треугольника по двум векторам.

Пример:

Найти середину стороны AB треугольника ABC - точку M -, если

$\vec{CA} = (-1, 0, 0), \vec{CB} = (0, 1, 1), C(1, 0, 0):$

$M = C + \frac{\vec{CA} + \vec{CB}}{2} = (1, 0, 0) + \frac{(-1, 0, 0) + (0, 1, 1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

22 Базис системы геометрических векторов. Примеры разложения по базису.

Базисом системы геометрических векторов называется подсистема линейно независимых порождающих векторов.

Определение линейно независимых (ЛНЗ) геометрических векторов аналогично определению ЛНЗ арифметических векторов:

Вектора $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}$ называются ЛНЗ, если не существует такого набора $a_1, a_2, ..., a_n$, в котором хотя бы одно $a_i \neq 0$, что $\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{x_i} = 0$.

Подсистема называется порождающей, если все вектора системы могут быть выражены в виде $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{x_i}$, где $\vec{x_i}$ - вектор базиса, $a_i \in R$.

Пример:

Разложить по базису вектор, соединяющий вершину треугольника и точку, делящую противолежащую сторону в соотношении 2:3:

Пусть ABC - треугольник, AC - противолежащая сторона, D - точка на AC, $AD : DC = 2 : 3$. Тогда:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} - \frac{2}{5}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2\overrightarrow{BC}}{5} + \frac{3\overrightarrow{BA}}{5}$

Ответ: $\overrightarrow{BD} = \frac{2\overrightarrow{BC}}{5} + \frac{3\overrightarrow{BA}}{5}$

23 Использование центра масс для доказательства некоторых геометрических теорем.

Если на всех вершинах треугольника ABC разместить грузы с массой 1, то, очевидно, если расположить груз массой 2 в середине стороны AB - точке D -, убрав грузы с концов, то центр масс не изменится. Соответственно центр масс треугольника будет располагаться на прямой AD в точке F, Делящей AD на AF и FD в соотношении 2:1. Прямая AD - медиана. Так как центр масс у любого тела один, а всё вышесказанное справедливо для любых медиан, то отсюда следует, что все медианы пересекаются в одной точке, которая делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины.

Аналогично для тетраэдра:

Если на всех вершинах тетраэдра ABCD разместить грузы с массой 1, то, по вышедоказанному правилу для треугольника, можно переместить все грузы в точку пересечения медиан ABC - на центр масс это не повлияет. Точку пересечения обозначим буквой M. Тогда центр масс будет лежать на отрезке DM в точке F, при этом DF:FM = 3:1. Назовём прямую DM медианой тетраэдра. Тогда, т. к. всё вышесказанное справедливо для любой стороны тетраэдра, а центр масс у любого тела единственный, то все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит все эти стороны в отношении 3:1 от вершины.

Аналогично можно доказать для произвольного шестигранника для пересечения средних линий в соотношении 1:1.

24 Вычисления в прямоугольной системе координат: Расстояние в координатах.

В прямоугольной системе координат переход от одной точки к другой может быть осуществлён с помощью вектора - прибавлением вектора к координатам начальной точки. Расстояние между двух точек есть длина вектора, проведённого от одной точки к другой - т. е. его модуль. Например, даны две точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ тогда расстояние между этими точками равно $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример: Даны две точки: A(10, 10, 10) и B(1, 2, 3). Найти расстояние между ними.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-1)^2 + (10-2)^2 + (10-3)^2)} = \sqrt{81+64+49} = \sqrt{194}$$

25 Уравнение окружности и круга. Уравнение сферы и шара. Координаты середины отрезка. Деление отрезка в данном отношении.

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$. Площадь круга: πR^2. Уравнение круга: $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Уравнение сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Площадь сферы: $4\pi R^2$. Объём шара: $\frac{4}{3}\pi R^3$. Уравнение шара: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Координаты середины отрезка по двум точкам с координатами $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_n)$ равны $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, ..., \frac{a_n+b_n}{2}\right)$. При задании отрезка через точку и вектор не составляет труда найти вторую точку и воспользоваться этой же формулой.

Точка C, разделяющая отрезок AB, заданный двумя точками с координатами $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_n)$, в данном отношении $x : y$ имеет координаты $\left(\frac{ya_1 + xb_1}{x+y}, \frac{ya_2 + xb_2}{x+y}, ..., \frac{ya_n + xb_n}{2}\right)$.

26 Скалярное произведение: определение, свойства, вычисление в координатах, применение.

Скалярным произведением векторов a и b называется: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\alpha$, где α - угол между векторами. Обозначается символом $\cdot$.

Свойства скалярного произведения (α - угол между векторами):

- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.
- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} < 0 \Rightarrow \alpha > \frac{pi}{2}$ (угол между векторами тупой).
- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{pi}{2}$ (угол между векторами острый).
- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
- $(c\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = c(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$

- $c(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = c\overrightarrow{a} + c\overrightarrow{b}$

Скалярное произведение в координатах:

- $(\overline{i_1}a_1, \overline{i_2}a_2, ..., \overline{i_n}a_n) \cdot (\overline{i_1}b_1, \overline{i_2}b_2, ..., \overline{i_n}b_n)$, где $\overline{i_{1..n}}$ - вектора базиса, решается по стандартным правилам умножения, но неудобно вычислять по причине большого количества слагаемых.

- $(\overline{i_1}a_1, \overline{i_2}a_2, ..., \overline{i_n}a_n) \cdot (\overline{i_1}b_1, \overline{i_2}b_2, ..., \overline{i_n}b_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$, где $\overline{i_{1..n}}$ - вектора ортонормированного базиса

Скалярное произведение удобно применять для нахождения угла между векторами. Например, в двухмерном пространстве $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_a x_b + y_a y_b$ и одновременно $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b}{|\overline{a}||\overline{b}|}$.

Также скалярное произведение можно использовать для вычисления площади треугольника. $S = \dfrac{ab\sin\alpha}{2}$. Синус в этой формуле можно выразить через косинус с помощью основного тригонометрического тождества, а косинус легко находится скалярным произведением.

Пример:

Найти угол α между сторонами AB и AC треугольника, заданного точками $A(0,0,0), B(1,1,0), C(1,0,0)$.

$$\alpha = \arccos \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC} = \arccos \frac{1+0+0}{\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

27 Сапог Шварца (или гармошка Шварца).

Сапог Шварца - фигура, используемая для опровержения теоремы о том, что для подсчёта площади объёмной фигуры достаточно поделить её на множество равных треугольников. При этом чем больше количество треугольников и меньше их размер, тем больше точность.

Возьмём цилиндр радиуса 1 и высоты 1 и разделим его плоскостями, параллельными основаням на m равных частей. В каждый слой впишем правильный n-угольник, при этом в каждом следующем слое будем поворачивать n-угольник на $\dfrac{\pi}{n}$, чтобы вершины следующего n угольника была над серединами сторон предыдущего. Затем соединяем вершина так, чтобы получилась поверхность из треугольников. Эта многогранная поверхность и называется сапогом Шварца.

По теореме при $m \to \infty, n \to \infty$ площадь данной поверхности стремиться к площади цилиндра.

Покажем, что площадь данной поверхности больше, чем любое заранее заданное k.

Зафиксируем n и возьмём произвольный треугольник ABC, соединяющий произвольные два слоя. Толщина слоя $\frac{1}{m}$. Спроецируем точку A на плоскость-сечение цилиндра, содержащую точки B и C и обозначим её точкой A_1. Расстояние от BC до A_1 обозначим за d (очевидно, что d зависит только от n). Высота треугольника ABC гарантированно больше d, т. к. гипотенуза всегда больше катета. Тогда найдётся такое m, что для произвольного k $\frac{k}{m} < d$. Тогда высота треугольника будет больше $\frac{k}{m}$.

Пусть периметр n-угольника будет обозначен P_n. Тогда площадь треугольников одного слоя будет больше, чем $P_n \frac{k}{m}$, а площадь всей фигуры заведомо больше, чем $P_n k$. Так как длина окружности сечения равна 2π, а при минимальном $n = 3$ $P_n = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а при увеличении n $P_n \to 2\pi$, то $P_n k > 2k$. Отсюда площадь фигуры больше любого заведомо заданного числа k. Так как площадь конечна, а k может быть любым, возникает противоречие.

28 Уравнение плоскости в пространстве. уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой в пространстве (три способа)

Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит в плоскости α, $MN(A, B, C)$ - нормальный вектор к этой плоскости. Тогда плоскость - это множество точек K, для которых $\angle NMK = \frac{\pi}{2}$. Отсюда уравнение плоскости в пространстве: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Часто принимают $-D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$. Тогда уравнение принимает вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

Также можно представить плоскость как множество всех точек, равноудалённых от двух данных точек.

Уравнение прямой на плоскости в общем виде: $Ax + By + C = 0$, где x, y - прямоугольные координаты на плоскости.

Прямую в пространстве можно задать через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\overline{q(A, B, C)}$. Тогда множество всех точек $K(x, y, z)$, для которых вектор $\overline{MK}$ параллелен (ещё говорят коллинеарен) вектору $\overline{q}$ будет данной прямой.

Допустим, что K - произвольная точка, лежащая на прямой. Тогда $K(t) = M + \overline{q}t$, $t \in R$. Отсюда вытекает параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + At \\ y(t) = y_0 + Bt \\ z(t) = z_0 + Ct \end{cases}$$

Выражая из него t получим, что $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$ - каноническое уравнение прямой. При этом A, B, C могут принимать значение 0 - это нормально и означает, что координата по данной оси у прямой является константой.

Третьим вариантом задания прямой является пересечение двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} A_1 \neq A_2 \\ B_1 \neq B_2 \\ C_1 \neq C_2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Пример:

Дана точка $M(0, 0, 0)$ и нормальный вектор $n(0, 0, 1)$. Найти уравнение плоскости α. Решение:

$\alpha : 0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow \alpha : z = 0$

Ответ: z = 0

29 Векторное произведение: определение, свойства, вычисление в координатах, применение.

Векторным произведием веторов $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ называют такой вектор $\overrightarrow{c}$, что $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$, вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, образуют правую тройку (если смотреть изнутри тетраэдра, образованного этими векторами, то поворот от $\overrightarrow{a}$ к $\overrightarrow{b}$, от $\overrightarrow{b}$ к $\overrightarrow{c}$ и от $\overrightarrow{c}$ к $\overrightarrow{b}$ будет против часовой стрелки) и $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Обозначается как $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Свойства векторного произведения:

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$

- $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

- $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$

Если представить, что $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}$ - правая тройка и ортонормированный базис, то получается следующая таблица векторных произведений:

	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{i}$	0	$-\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j}$	0	$-\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{i}$	0

Вычисление векторного произведения в матричной форме. Пусть $\overrightarrow{a} = (x_a\overrightarrow{i}, y_a\overrightarrow{j}, z_a\overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{b} = (x_b\overrightarrow{i}, y_b\overrightarrow{j}, z_b\overrightarrow{k})$. Тогда:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (x_a\overrightarrow{i}, y_a\overrightarrow{j}, z_a\overrightarrow{k}) \times (x_b\overrightarrow{i}, y_b\overrightarrow{j}, z_b\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i}(y_a z_b - y_b z_a) - \overrightarrow{j}(x_a z_b - x_b z_a) + \overrightarrow{k}(x_a y_b - x_b y_a)$$

Если внимательно присмотреться, то это выражение есть ничто иное, как определитель матрицы вида:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Применение:

- Модуль векторного произведелия равен площади параллелограмма, построенного на его множителях.

Пример:

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $(0, 1, 2)$ и $(1, 2, 3)$. Решение:

$$S = (0, 1, 2) \times (1, 2, 3) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = |(-1, 2, -1)| = \sqrt{6}$$

30 Смешанное произведение: определение, свойства, вычисление в координатах, применение.

Смешанным произведением называется выражение $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$. Обозначается $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Свойства:

- Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда все три вектора лежат в одной плоскости.
- Смешанное произведение равно объёму параллелограмма, если вектора образуют правую тройку, и минус объёму параллелограмма, если левую.

Вычисление в координатах (a_b - координата по оси a вектора $\overrightarrow{b}$):

$$x_c(y_a z_b - y_b z_a) - y_c(x_a z_b - x_b z_a) + z_c(x_a y_b - x_b y_a) = \begin{vmatrix} x_c & y_c & z_c \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Применения вытекают из свойств.

Пример: Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $(0,1,2)$, $(1,2,3)$ и $(2,3,4)$. Решение:

$$V = \frac{1}{6}|((0,1,2) \times (1,2,3)) \cdot (2,3,4)| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix} \right\| \frac{1}{6} = \frac{|2-2|}{6} = 0$$

31 Применение метода координат для решения конструктивно-исследовательских задач по геометрии

Примеры задач:

- Доказать, существует ли такой треугольник, что все его стороны больше какого-то конечного числа n, а площадь меньше 1?
- Найти объём тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

- Найти тракторию возможных положений точки, лежащей в середине гипотенузы прямого угла при фиксированной длине гипотенузы.

32 Примеры задач аналитической геометрии: уравнение плоскости по координатам трёх точек. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки до плоскости в пространстве.

Уравнение плоскости по трём точкам можно найти двумя способами:

- Подставив эти точки в каноническое уравнение и построив систему
- Построив по этим трём точкам два вектора, проходящих из одной точки и найдя их векторное произведение - получим нормаль к плоскости. Имея точку и нормаль переход к каноническому уравнению элементарен.

Расстояние от точки до прямой на плоскости:

Прямая задана в виде $Ax + By + C = 0$. Тогда $\overrightarrow{n}(A, B)$ - нормальный вектор (нормаль) к прямой. $M(x_0, y_0)$ - точка на конце нормали, $M_1(x_1, y_1)$ - точка, лежащая на прямой. Тогда расстояние от точки до прямой $d = |\overrightarrow{M_1M}| \cos\alpha$, где α - угол между нормалью и прямой MM_1. Тогда $d = |\overrightarrow{M_1M}| \frac{|\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{M_1M}||\overrightarrow{n}|} = \frac{|(A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{|\overrightarrow{n}|} = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$.

Для нахождения расстояния от точки до плоскости в пространстве, применив аналогичные размышления, получим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример:

Найти расстояние от точки $(0, 0)$ до прямой $x + y - 5 = 0$. $\frac{|-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

33 Вычисления в кубе и правильном тетраэдре.

Классическим задачами на вычисления в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются нахождение длины диагонали куба, нахождение угла между плоскостями ABC и A_1BC.

В правильном тетраэдре вычисляют высоту, площадь всего тетраэдра, его объём, радиус вписанной сферы, угол между двумя гранями, угол между ребром и гранью.

Предположим, что ребро тетраэдра $ABCD$ = 1, обозначим за O проекцию D на ABC, за E проекцию D на AB. Тогда $h = DO = \sqrt{DE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Угол между ABC и BDC = arccos $\sqrt{\frac{1}{9}} =$ arccos $\frac{1}{3}$.

Площадь поверхности тетраэдра $S = \sqrt{3}$. Объём тетраэдра $V = \frac{S_{\text{основания}} h}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ или $V = \frac{rS}{3}$, где r - радиус вписанной сферы. Отсюда $r = \frac{3V}{S} = \frac{3\sqrt{2}}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Угол между AD и ABC = arccos $\frac{AO}{AD} = \arccos AO = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

34 Действия с прямыми и плоскостями в пространстве. Примеры задач в общем виде.

Построение плоскости:

- Через 3 точки (построение двух векторов, векторное произведение и построение через нормаль и точку)
- Через точку и два вектора, параллельных плоскости (векторное произведение $\to$ нормаль + точка = плоскость)
- Через точку, параллельно прямой (взять две точки на прямой и построить по 3 точкам)
- Через точку и перпендикулярную прямую (направляющий вектор прямой - нормаль $\to$ нормаль + точка = плоскость)
- Через две пересекающихся прямых (найти точку пересечения, произведение направляющих векторов $\to$ нормаль + точка = плоскость)
- Через одну прямую, параллельно другой прямой (направляющие векторы $\to$ нормаль + точка на первой прямой $\to$ плоскость)

Найти проекцию:

- Точки на плоскость (пересечение плоскости и прямой по точке и нормали плоскости)
- Прямой на плоскость (взять две точки на прямой, спроецировать их на плоскость и построить прямую по двум точкам).

Найти расстояние:

- От точки до прямой в пространстве (построим плоскость через точку и направляющий вектор прямой $\to$ найдём точку пересечения плоскости и прямой $\to$ расстояние между двумя точками).
- Между двумя прямыми в пространстве (построить плоскость через одну прямую, параллельную второй прямой и найти расстояние от плоскости до любой точки на второй прямой).

Найти угол:

- Между плоскостями (по углу между нормалями, либо его дополнению до π, если он тупой)
- Между прямыми (по углу между направляющими векторами, либо его дополнению до π, если он тупой)

35 Кривые второго порядка. Определение, простейшие случаи.

Кривой второго порядка на плоскости называют множество точек, которое задаётся уравнением вида $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, причём хотя бы одно из $a, b, c \neq 0$.

Простейшие случаи:

- Одна прямая ($x^2 = 0$)
- Две параллельных прямых ($x^2 \neq 0$)
- Точка ($x^2 + y^2 = 0$
- Окружность ($x^2 + y^2 = R^2$)
- Пустое множество ($x^2 = -1$)
- Две пересекающиеся прямые ($xy - y^2 = 0$)

36 Геометрическое определение эллипса, вывод уравнения эллипса, простейшие свойства эллипса, эскиз, площадь эллипса.

Геометрическое определение: эллипс - множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, равна константе и больше расстояния между фокусами (если она равна расстоянию между фокусами, то эллипс вырождается в прямую и такие случаи, обычно, не рассматривают как эллипс).

Возьмём за фокусы точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ Если точка $A(x, y)$ принадлежит эллипсу, то выполняется равенство $AF_1 + AF_2 = C$, где $F_{1,2}$ - фокусы эллипса, а C - константа - сумма расстояний до фокусов. Тогда в координатах уравнение примет вид:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = C$$

Выведем каноническое уравнение:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = C - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$(x+1)^2 + y^2 = C^2 - 2C\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (x-1)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 + y^2 - y^2 - C^2 = -2C\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$C^2 - 4x = 2C\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$C^4 - 8xC^2 + 16x^2 = 4C^2((x^2 - 2x + 1) + y^2)$$

$$x^2(4C^2 - 16) + 4C^2y^2 = C^4 - 4C^2 \quad | : (C^4 - 4C^2)$$

$$\frac{x^2(4C^2 - 16)}{(C^4 - 4C^2)} + \frac{4y^2}{C^2 - 4} = 1$$

Обозначим $a^2 = \dfrac{C^4 - 4C^2}{4C^2 - 16}$ и $b^2 = \dfrac{C^2 - 4}{4}$. Тогда выражение примет вид: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Геометрический смысл a и b - a - абсцисса крайней правой точки, b - ордината крайней верхней точки.

Эллипс - это единичная окружность, растянутая в a раз по оси абсцисс и в b раз по оси ординат. Площадь эллипса = $ab\pi$.

Если точки фокусов эллипса совпадают, то эллипс вырождается в окружность.

Свойства эллипса:

- Ограничен
- Имеет две оси симметрии
- Имеет центр симметрии

37 Геометрическое определение гиперболы, вывод уравнения гиперболы, простейшие свойства гиперболы, эскиз.

Гиперболой называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, равно константе.

Выведем уравнение гиперболы, приняв за фокусы $(-1, 0)$ и $(1, 0)$:

Обозначим разность расстояний между точкой и фокусами как $\pm 2a$ (т. к. разность может быть и отрицательной). Тогда $a < 1$, т. к. одна сторона треугольника всегда больше разности двух других сторон.

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (x-1)^2 + y^2$$

$$a^2 - x = \pm a\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$a^4 - 2xa^2 + x^2 = a^2((x^2 - 2x + 1) + y^2)$$

$$x^2(a^2 - 1) + y^2a^2 = a^4 - a^2 \quad | : a^2(a^2 - 1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1 - a^2} = 1$$

Т. к. $0 < a < 1$, то $0 < a^2 < 1$. Сделаем замену $b^2 = 1 - a^2$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы

Рассмотрим для примера $x^2 - y^2 = 1$. Сделаем замену $x' = x - y, y' = x + y$. Тогда $x'y' = 1$. Очевидно, что у этого уравнения две асимптоты - $x = 0$ и $y = 0$. Значит и у исходного уравнения две асимптоты.

Гипербола неограничена, имеет две оси симметрии, центр симметрии и две асимптоты.

Геометрический смысл $\pm a$ - точки пересечения с осью абсцисс. a - действительная полуось, b - мнимая полуось.

Уравнения асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$

38 Геометрическое определение параболы, вывод уравнения параболы, простейшие свойства параболы, эскиз.

Парабола - множество точек, равноудалённых от заданной точки, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой.

Вывод уравнения параболы (возьмём за фокус точку $F(a, 0)$, за директрису прямую $x = -a$):

$$\sqrt{(a-x)^2 + y^2} = x + a$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax$$

$y^2 = 2px$ - каноническое уравнение параболы (p - расстояние от фокуса до директрисы).

Парабола неограничена, имеет ось симметрии, не имеет центра симметрии.

39 Построение касательных к эллипсу.

Касательные к эллипсу можно построить 4 способами:

- Представить эллипс как растяжение единичной окружности, а касательную к эллипсу как растяжение соответствующей касательной к окружности.
- Выразить касательную через систему с параметром и найти такое значение параметра k, при котором система будет иметь единственное решение (в таком случае параметр будет угловым

коэффициентом касательной к эллипсу в точке): $\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

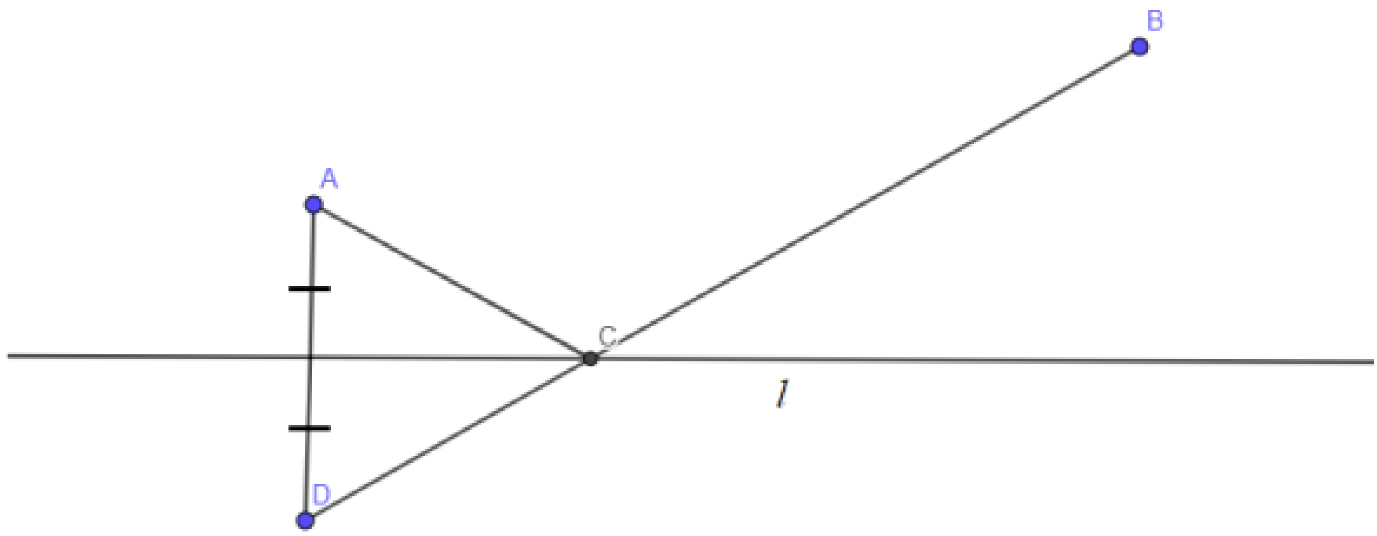
- Через производную, разделив эллипс на две части по оси абсцисс - $y'_x(x_0) = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Тогда уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\dfrac{x_0b^2}{y_0a^2}(x - x_0)$
- Через производную, представив $x(t) = a\cos(t), y(t) = b\sin(t)$. Тогда можно найти направление касательной через $(x'(t), y'(t)) = (-a\sin(a), b\cos(a))$. Зная точку и направление найдём касательную.

40 Оптическое свойство эллипса.

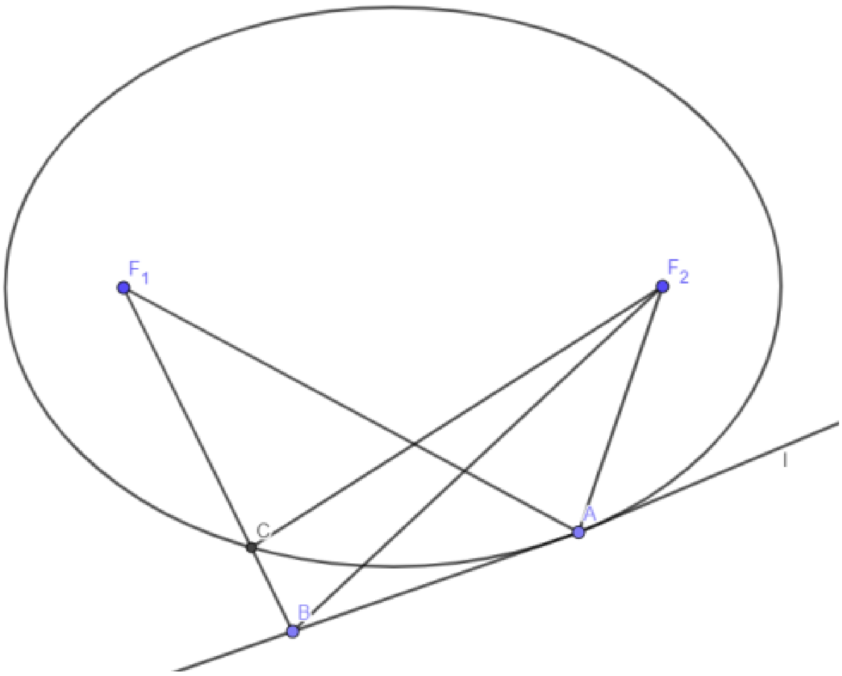
Оптическое свойство эллипса заключается в том, что если из одного фокуса выпустить луч, то, отразившись от стенки эллипса, он придёт во второй фокус.

Доказательство оптического свойства происходит через решение дополнительной задачи:

Пусть даны точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой l. Найти такую точку C, что ломанная (линия, составленная из отрезков) ACB имеет минимальную длину. Обозначим точку пересечения AD и l как E.



Построим такую точку D, что она будет лежать симметрично A относительно l. Тогда $BCD = BCA$. По неравенству треугольника, BCD минимально, когда является прямой. Т. к. $\angle ACE = \angle DCE$ и, как было доказано BD прямая, то $\angle(CA, l) = \angle(BC, l)$.



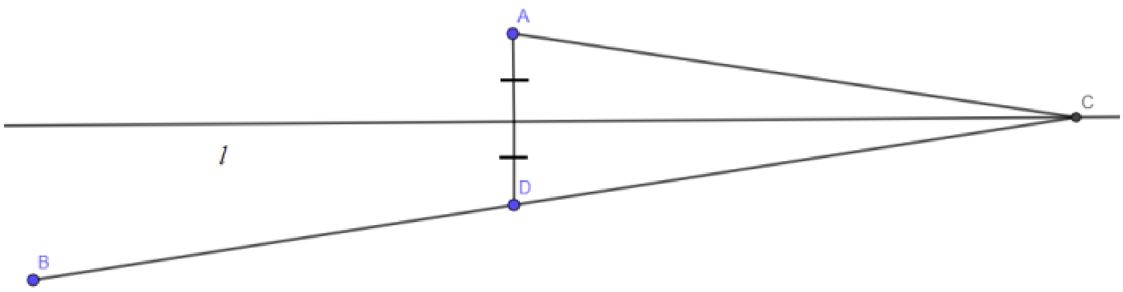
Вернёмся к оптическому свойству. Для доказательства проведём касательную l к эллипсу в точке A. Докажем, что через точку A проходит кратчайший путь от F_1 до F_2 через l. Для этого возьмём точку $B \neq A$ на l. Тогда нужно доказать, что $F_1B + BF_2 > F_1A + AF_2$.

Отметим на эллипсе точку C, лежащую на пересечении F_1B с эллипсом. $F_1C + CF_2 = F_1A + AF_2$. При этом по неравенству треугольника $F_1C + CA_2 < F_1C + BC + BF_2 = F_1B + BF_2$. Следовательно, отрезки F_1A и F_2A образуют равные углы с прямой l, значит, по закону отражения, луч пройдёт через F_2.

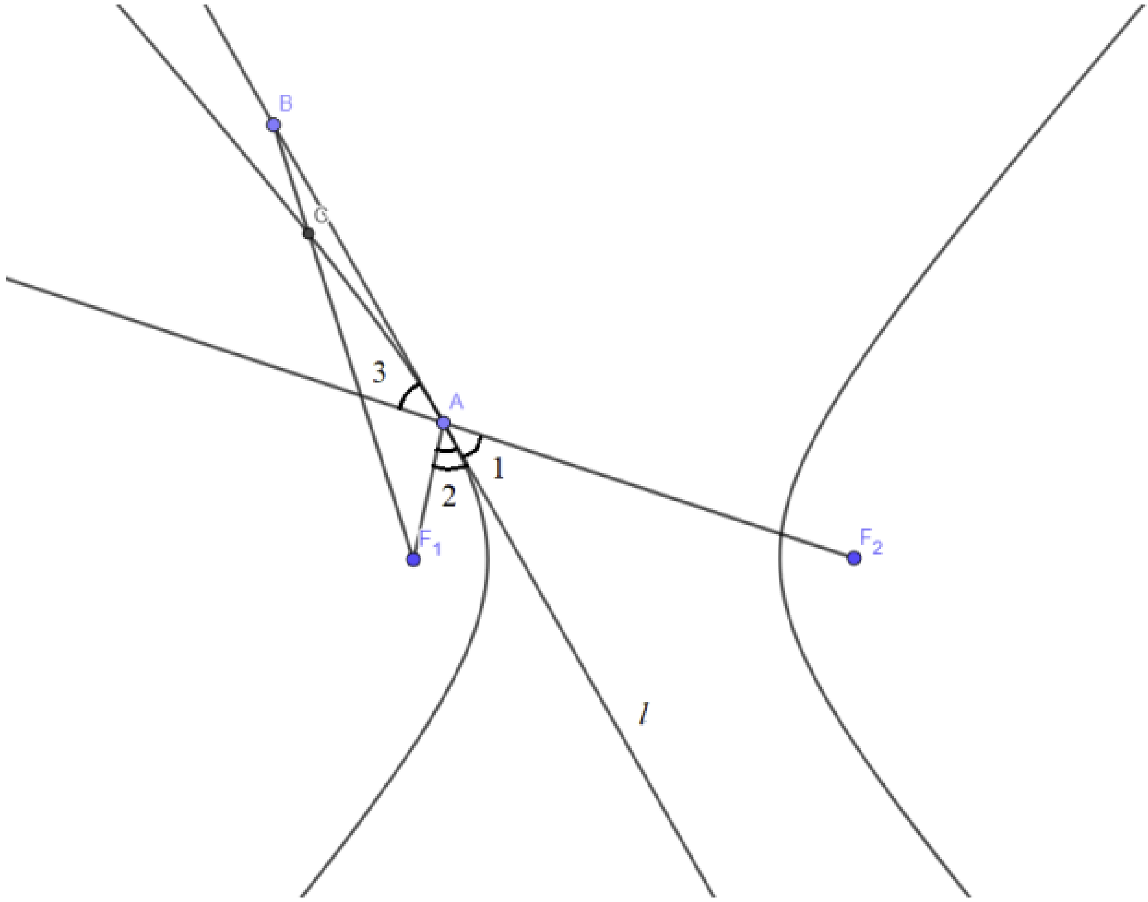
41 Оптическое свойство гиперболы.

Оптическое свойство гиперболы заключается в том, что при выходе луча из одного фокуса, после его отражения при продлении луча в противоположную сторону он пройдёт через второй фокус.

Для доказательства оптического свойства гиперболы пригодится решение вспомогательной задачи: Даны точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой l. Найти такую точку C, лежащую на l, что $|BC - AC|$ максимален.



Возьмём точку D, симметричную A относительно l. Тогда |BC - AC| = |BC - CD|. Тогда по неравенству треугольника максимум достигается в случае, если D лежит на луче BC, т. к. тогда $AC = BC - BD \Rightarrow |BC - AC| = BD$. В иных случаях $AC > BC - BD \Rightarrow |BC - AC| < BD$. При этом углы между отрезками AC и BC, и прямой l равны.

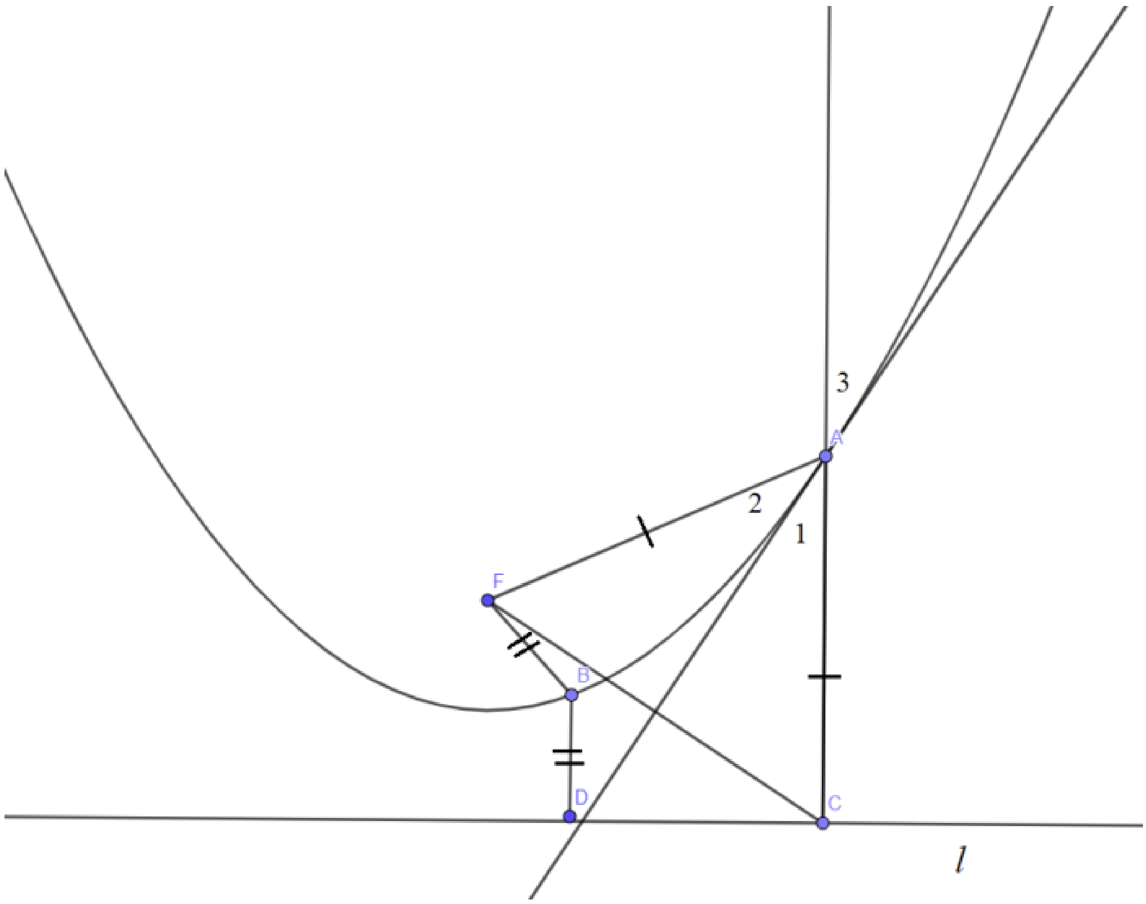


Вернёмся к оптическому свойству гиперболы. Построим луч, выходящий из точки F_1 и касающийся гиперболы в точке A. Построим касательную к гиперболе в этой точке и назовём её l. Докажем, что отрезок F_1A и луч F_2A об разуют с прямой l равные углы. Для этого достаточно доказать, что точка A является решением вспомогательной задачи для точек F_1 и F_2 и прямой l.

Для этого возьмём на прямой l точку $B \neq A$ и докажем, что $|F_1A - F_2A| > |F_1B - F_2B|$. Для этого на пересечении BF_1 и гиперболы обозначим точку C. Так как мы ближе к F_1, чем к F_2, можно рассматривать неравенства $F_2A - F_1A > F_2B - F_1B$. При этом $F_2A - F_1A = F_2C - F_1C$. По неравенству треугольника очевидно, что $F_2C - F_1C < F_2B - F_1B \Rightarrow F_2A - F_1A < F_2B - F_1B$. Значит, угол 1 равен углу 2, угол 1 равен углу 3 т. к. они вертикальные $\Rightarrow$ угол 3 равен углу 2, следовательно, по закону отражения, продолжение луча в противоположную сторону проходит через точку F_2.

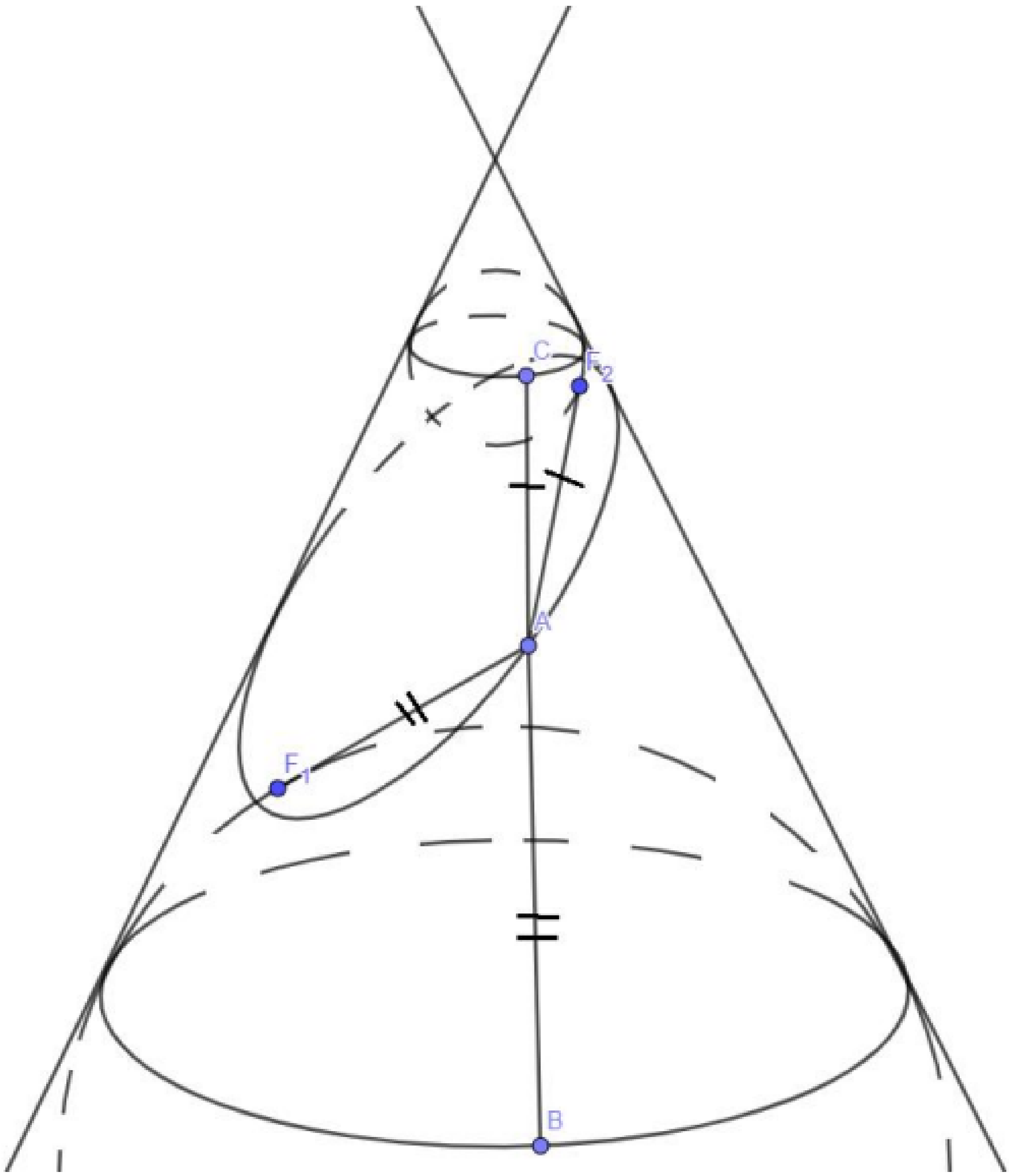
42 Оптическое свойство параболы.

Луч, выйдя из фокуса F параболы, после отражения пойдёт перпендикулярно директрисе l.

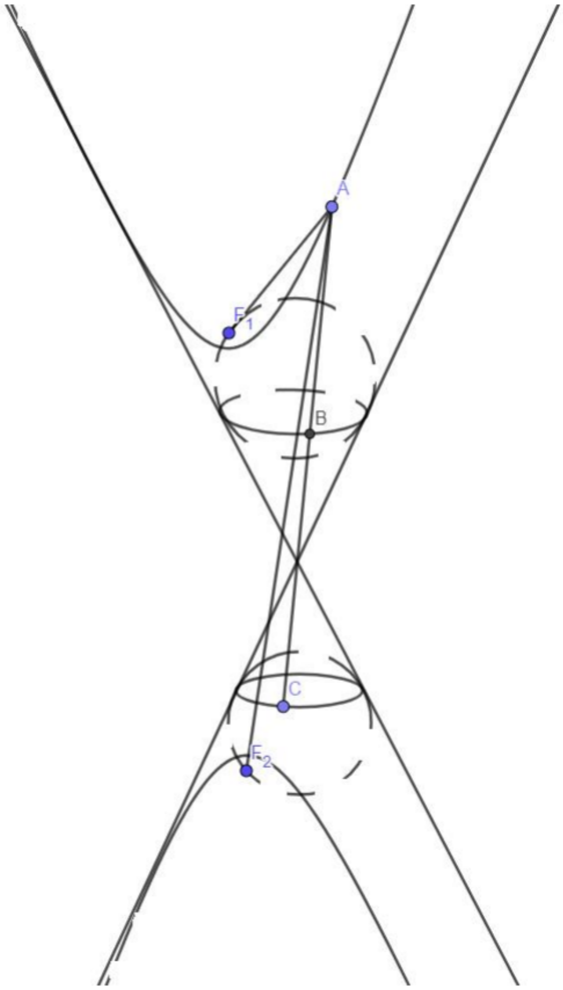


Обозначим за A точку отражения луча от параболы, C - проекцию этой точки на директрису. $B \neq A$ - произвольную точку на параболе, D - проекцию точки B на l. Сначала докажем, что вся парабола лежит слева от серединного перпендикуляра отрезка FC, т. е. он является касательной к параболе. Заметим, что BC всегда больше $BD = BF$ по неравенству треугольника, если B не совпадает с C. Отсюда FC - касательная к параболе в точке A. Так как углы 1 и 2 находятся в равных треугольниках при равных сторонах, они равны. Углы 1 и 3 вертикальные, следовательно углы 2 и 3 тоже равны. Тогда после отражения луч пойдёт вертикально, то есть перпендикулярно директрисе.

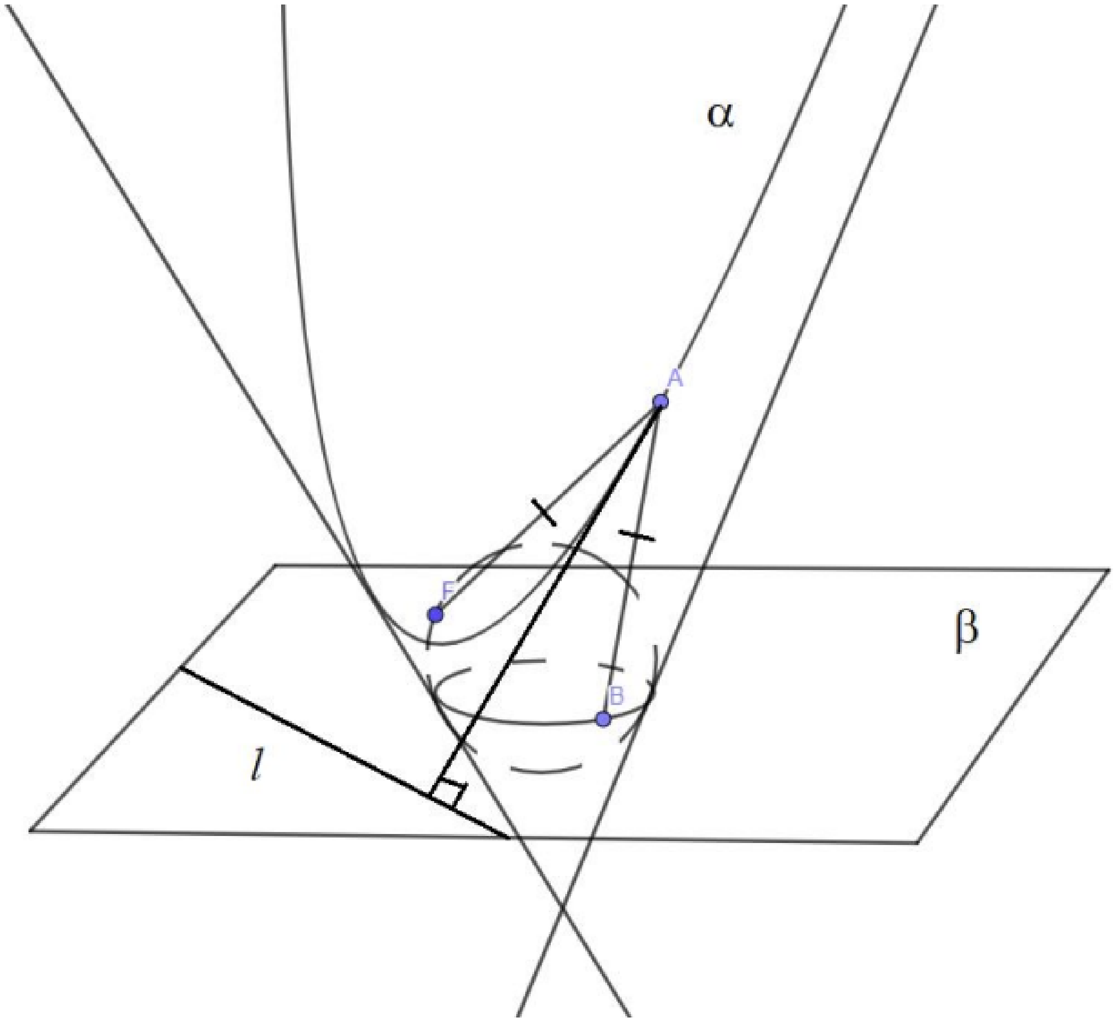
43 Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения.



Длина касательных к одному шару равны. Отсюда, если взять сечение конуса, проходящее через его образующие, точку A на его границе и два шара, касающихся конуса и сечения в точках F_1, F_2, а затем две точки (B, C) на окружностях, которыми эти сферы касаются конуса, то $AF_1 = AB$ и $AF_2 = AC$. Соответственно $AB + AC = const \Rightarrow$ сечение конуса через образующие является эллипсом.



Возьмём сечение верхней и нижней полостей конуса, проходящее через их основания. Впишем два шара, касающихся конуса (B, C) и сечений (F_1, F_2) и точку A, находящуюся на границе плоскости сечения. По вышеописанным причинам $AF_1 = AB$, $AF_2 = AC$. Следовательно, $AF_2 - AF_1 = const \Rightarrow$ сечение - гипербола.



Возьмём сечение плоскостью α, параллельное одной из образующих конуса, шар, касающийся сечения в точке F и касающийся конуса по окружности, точку B на этой окружности, плоскость β, проходящую через эту окружность и прямую l - пересечение α и β. Очевидно, что $AF = AB$ и AB равно длине наклонной, направленной из точки A к плоскости β под тем же углом, что и образующие. Но расстояние от точки A до прямой l (обозначим проекцию A на l как C) тоже равно длине наклонной из A к β. Отсюда $AF = AC \Rightarrow$ сечение является параболой, так как задаётся множеством точек равноудалённых от точки F и прямой l.

44 Поверхности второго порядка. Определение, простейшие случаи.

Поверхностями второго порядка называют множества точек, являющихся корнями уравнения $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + iz + j = 0$.

Простейшие случаи:

- Точка ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$)
- Прямая ($x^2 + y^2 = 0$)
- Плоскость ($x^2 = 0$)
- Две параллельных плоскости ($x^2 - 1 = 0$)
- Пустое множество ($x^2 + 1 = 0$)

Если выражение не зависит от z, поверхность называют цилиндром.

Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ задаёт конус вращения.

45 Цилиндр (круговой, эллиптический, гиперболический, параболический), конус, эллипсоид: уравнения, свойства, эскизы.

Если выражение не зависит от z, то поверхность называют цилиндром (обычно рассматривают прямые цилиндры):

- $x^2 + y^2 = R^2$ - круговой цилиндр
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр
- $y^2 = px$ - параболический цилиндр

Выражение вида $x^2 + y^2 = z^2$ задаёт прямой конус вращения. Можно представить два сечения - $z = const$ - получим окружность - и $x = 0$ - получим две прямые $y = \pm z$. Таким образом можно представить прямой круговой конус как результат вращения двух прямых $y = \pm z$ вокруг оси OZ.

Также можно представить конус как $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, но это уже не будет конусом вращения.

Эллипсоид задаётся выражением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Если рассмотреть сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной одной из осей, то мы увидим эллипс. Эллипс можно представить как растянутый вдоль осей в a, b, c раз шар с единичным радиусом. Тогда объём эллипсоида можно записать как объём единичного шара, умноженного на abc: $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

46 Гиперболоид, однополостный и двуполостный: уравнения, свойства, эскизы.

Однополостным гиперболоидом называют поверхность, заданную выражением $x^2 + y^2 = z^2 + a^2$. При этом если взять его сечение в $x = a$, то мы увидим 2 прямые $y = \pm z$. Гиперболоид можно представить как результат вращения гиперболы вокруг не содержащей её прямой. Отсюда гиперболоид - это поверхность вращения и это верно для каждой точки в сечении $z = 0$ и это сечение будет представлять собой окружность.

Иногда рассматривают гиперболоид вращения с дополнительными коэффициентами. Это означает, что гиперболоид растянули вдоль каждой из осей:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$x^2 + y^2 = z^2 - a^2$ - двуполостный гиперболоид. Представляет собой результат вращения гиперболы вокруг содержащей её прямой. Состоит из двух несвязанных между собой частей. При растяжении вокруг осей получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

47 Параболоид круговой, эллиптический и гиперболический: уравнения, свойства, эскизы.

48 Вопросы к преподавателю

Какой смысл в поиске определителя матрицы при решении СЛАУ с параметром?

Какие примеры можно привести к использованию центра масс для доказательства некоторых геометрических теорем?

Что писать в пункте «применение метода координат для решения конструктивно-исследовательских задач по геометрии»? Исключительно примеры?

49 Найденные ошибки в лекциях

Лекция 04. Страница 5. Первый множитель третьего слагаемого определителя матрицы 3×3.

Лекция 09. Страница 4. Третье алгебраическое свойство - b не должно быть вектором.

Лекция 11. Страница 7. Расстояние между скрещивающимися прямыми - "направляющих векторов плоскости".

Лекция 13. Страница 2. Вывод уравнения параболы - "а уравнение директрисы y = -1".

Лекция 13. Страница 7. Оптическое свойство гиперболы - "Пусть C – точка пересечения эллипса".

Лекция 13. Страница 9. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения - "наклонное сечение прямого кругового цилиндра является конусом".

Лекция 13. Страница 11. Как мне кажется, там ошибка в рисунке.