Université de Blida 1
Faculté des Sciences
Première année LMD, TC-SM

Matière : Maths 1
Année : 2022-2023

Rappels

1 Valeur absolue d'un réel

Soit a un réel. La valeur absolue de a est égale à la distance de ce nombre à 0 et on la note $|a|$. De façon générale,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Exemples :

1. $|2| = 2$.
2. $|-3| = 3$.
3. $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3}, \\ 2-3x & \text{si } x < \frac{2}{3}. \end{cases}$

Propriétés Soient a et b deux nombres réels et n est un entier. On a

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
3. $-|a| \leq a \leq |a|$
4. $|a| = |b| \Rightarrow (a = b \vee a = -b)$.
5. $|ab| = |a||b|$.
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $(b \neq 0)$
7. $|a^n| = |a|^n$
8. $\sqrt{a^2} = |a|$.
9. $||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$.
10. $|a-b| \geq |a| - |b|$.
11. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$, $(b \in \mathbb{R}^+)$
12. $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$

2 Partie entière d'un réel

Pour tout nombre réel x, la partie entière de x, notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif n inférieur ou égal à x.

Exemples

1. $E(2,3) = 2$
2. $E(-2) = -2$
3. $E(-2,6) = -3$.
4. $E(-37,21) = -38$.

Propriétés Soient x un réel et n un entier relatif

1. $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
2. $x - 1 < E(x) \leq x$.
3. $E(n) = n$.
4. $E(x+n) = E(x) + n$.
5. $nE(x) \leq E(nx)$
6. $\forall x > 1,\ E(\frac{1}{x}) = 0$.

Exemples :

1. $E(x) = 5 \Leftrightarrow 5 \leq x < 6$
2. $E(x) = -6 \Leftrightarrow -6 \leq x < -5$
3. $E(3) = 3$
4. $E(-36) = -36$.
5. $E(\sqrt{2}) = 1$.
6. Si $x = 3,5$ et $n = 10$. Alors
   (a) $E(x+n) = E(x) + n = 13$
   (b) $nE(x) = 30$ et $E(nx) = E(35) = 35$.
7. $E\left(\frac{1}{7}\right) = 0$

3 Identités remarquables

Soient a et b deux nombres réels. Pour tout entier n non nul, on peut montrer, par récurrence, la formule du binôme de Newton suivantes :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \\ &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n\end{aligned}$$

Les coefficients C_n^k sont appelés les coefficients binomiaux où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et $n! = n(n-1)!$ avec $0! = 1$.

On peut aussi déterminer les coefficients binomiaux grâce au triangle de Pascal.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & \leftrightarrow & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & \leftrightarrow & 2 & \leftrightarrow & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & \leftrightarrow & 3 & \leftrightarrow & 3 & \leftrightarrow & 1 & & \\
n=4: & & 1 & \leftrightarrow & 4 & \leftrightarrow & 6 & \leftrightarrow & 4 & \leftrightarrow & 1 & \\
n=5: & 1 & & 5 & \leftrightarrow & 10 & \leftrightarrow & 10 & \leftrightarrow & 5 & \leftrightarrow & 1
\end{array}$$

Exemples :

1. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
2. $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.
3. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
4. $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

4 Identités géométriques

Soient a et b deux nombres réels. Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned}a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k.b^{n-k} \\ &= (a-b)(b^n + a.b^{n-1} + a^2.b^{n-2} + \cdots + a^{n-1}b + a^n)\end{aligned}$$

Exemples :

1. $a^3 - b^3 = (a-b)(b^2 + ab + a^2)$.
2. $a^9 - 1 = (a-1)(a^8 + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a)$