Université de Blida 1
Faculté des Sciences
Première année LMD, TC-SM

Matière: Maths 1
Année: 2022-2023

Série d'exercices 2
Nombres complexes

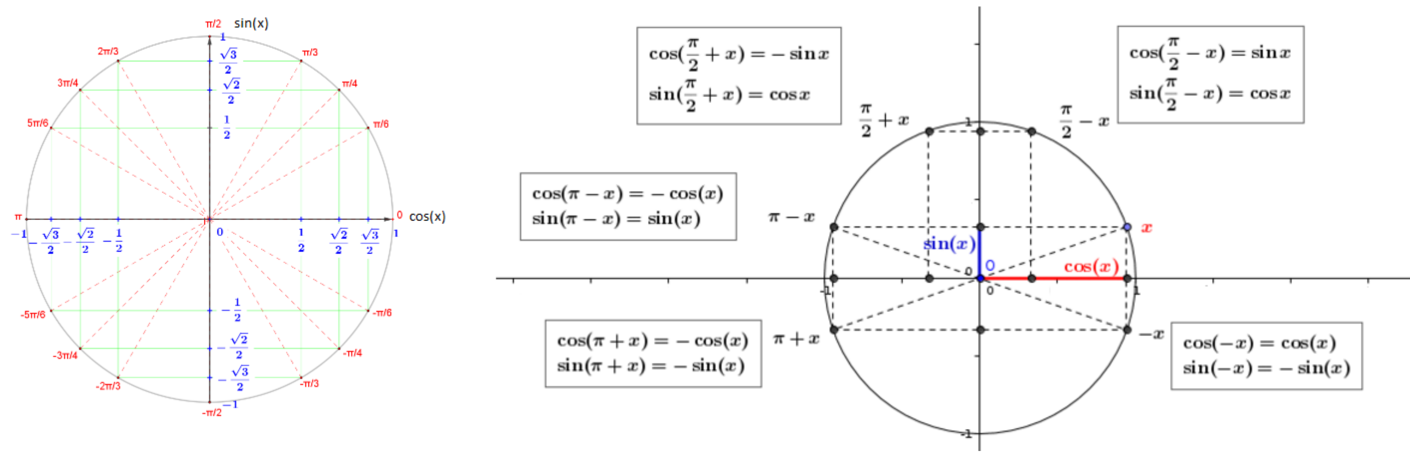

Figure 1: Cercle trigonométrique

Exercice 01: Donner la forme algébrique, le module et l'argument des nombres complexes suivants:

1. $z_1 = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$
2. $z_2 = (1+i)e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3. $z_3 = \dfrac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{1-i}$.
4. $z_4 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i)^3}$.
5. $z_5 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.
6. $z_6 = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}{1+i}$.

Exercice 02: Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de a la quantité $(a-i)^3$ est un réel? un imaginaire pur?

Exercice 03: Soient les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

1. Écrire z_1 sous la forme trigonométrique et la forme exponentielle.
2. Déterminer la forme algébrique de z_2.
3. Montrer que $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.
4. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 04: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1. $z^2 - 2z + 3 = 0$
2. $z^5 - z = 0$
3. $z^6 = (1+i)^2$
4. $z^3 + 8i = 0$
5. $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$
6. $iz^2 + (1-5i)z - 2 + 6i = 0$

Exercice 05: (Devoir de maison)

1. Calculer les racines troisièmes de $2i$ et de $1+i$.
2. Déterminer les solutions complexes z de l'équation : $z^2 - (1+3i)z - 2 + 2i = 0$.
3. En déduire les solutions complexes z de l'équation : $z^6 - (1+3i)z^3 - 2 + 2i = 0$.

Exercice 07: Soit $z_1 = 2 + 2i$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations : $z^2 = z_1$ et $z^2 = \overline{z_1}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.
4. En déduire les solutions de $z^4 - 4z^2 + 8 = 0$.

Exercice 08: On considère le polynôme $P(z)$ suivant :

$$P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12).$$

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.
2. Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$.
3. Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 10:

1. Linéariser les expressions suivantes
   (a) $\sin^3(\theta)\cos(\theta)$.
   (b) $\cos(2\theta)\sin^2(\theta)$.
2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

Exercice 09:

1. Développer $\sin(4\theta)$ et $\cos(4\theta)$.
2. En déduire que $\tan(4\theta) = \dfrac{4\tan(\theta) - 4\tan^3(\theta)}{1 - 6\tan^2(\theta) + \tan^4(\theta)}$.