Université de Blida 1
Faculté des Sciences
Première année LMD, SM

Matière : Maths 1
Année : 2022-2023

Série d'exercices 1

Rappels - Logique & raisonnements

Exercice 01 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   (a) $|x-1|+|x-2|=2$,
   (b) $|x+12|=|x^2-8|$,
   (c) $|-x^2-2x+3|+2=0$,
   (d) $|x^2-x+1|+|x^2+x+1|=0$,
   (e) $x-3+\sqrt{(x-3)^2}=0$,
   (f) $3\sqrt{x+3}-6=x-2$,
   (g) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=1$,
   (h) $|x-2|<|x+1|$,
   (i) $\sqrt{-(x-5)}\geq x+1$.

2. Discuter, selon les valeurs du paramètre réel λ, le nombre de solutions de l'équation :

$$x^2+2(1+\lambda)x-(3\lambda+5)=0$$

Exercice 02 :

1. Développer :

   (a) $(x+2)^3$ (b) $(x-3)^4$ (c) $(x+y)^5$.

2. Factoriser les identités géométriques suivantes :

   (a) a^4-b^4 (b) $1-x^6$

Exercice 03 : Pour tout réel x, on note $E(x)$ la partie entière de x.

1. Évaluer :

   (a) $E(2)$ (b) $E(3.7)$ (c) $E(\pi)$ (d) $E(-\pi)$ (e) $E(-\frac{3}{8})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   (a) $E(x)=6$, (b) $E(x)=-3$, (c) $E(x^3-1)=-1$.

3. Soit x un réel, calculer $E(x)+E(-x)$.

Exercice 04 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies; lesquelles sont fausses? justifier votre réponse.

1. $(2<3)$ et (2 divise 4).
2. $(2<3)$ et (2 divise 5).
3. $(2<3)$ ou (2 divise 5).
4. $(2<3)$ et non(2 divise 5).
5. non$(2<3)$ ou (2 divise 5).
6. Si $2=3$ alors $3=4$.
7. Si $2=3$ alors 4 est un entier pair.
8. Si $(1=2$ et $3=4)$ alors $5=5$.

Exercice 05 : Les propositions suivantes sont-elles vraies ? énoncer leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 5.$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 > 5.$
3. $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 > 5.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

Exercice 06 : En utilisant les connecteurs logiques et les quantificateurs, réecrire les propositions suivantes.

1. La racine carrée de tout réel positif ou nul est positives ou nulle.
2. Il y a un entier plus grand que tous les entiers.
3. Si un réel x est inférieur de -1 alors il est strictement négatif.
4. Certains entiers sont impairs.
5. Le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul.
6. Les graphes des fonctions f et g se coupent en un seul point sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 07 : Compléter avec $\forall$ ou $\exists$ ou $\exists!$ pour que les énoncés suivants soient vrais :

1. $\cdots x \in \mathbb{R},\ (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$
2. $\cdots x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0.$
3. $\cdots x \in \mathbb{R},\ 3x + 5 = 0.$
4. $\cdots x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \neq 0.$

Exercice 08 :

1. Écrire les ensembles suivants en extension :
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} / 6x^2 + x - 1 = 0\}$
   (b) $B = \{n \in \mathbb{Z} / n^2 \leq 24\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{N} / x^3 - 4x \leq 2 - x\}$
   (d) $D = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 0 \wedge -4 < x < 10\}$
2. Écrire les ensembles suivants en compréhension :
   (a) $E =]-\infty; 5] \cup]10; +\infty[$
   (b) $F = \{4, 5, 6, 7, \cdots, 11\}$
   (c) $I =]4, +\infty[\cup \{2\}$
   (d) $J = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots\}$
3. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telle que :
$$A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5 \vee x > 10\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5 \wedge -10 < x < 6\}.$$
   (a) Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $C_{\mathbb{R}}A$, $C_{\mathbb{R}}B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
   (b) A-t-on $A \subset B$? A-t-on $B \subset A$?
   (c) Peut-on écrire : $1 \in \mathbb{R}$? $1 \subset \mathbb{R}$? $\{1\} \subset \mathbb{R}$? $\emptyset \in \mathbb{R}$? $\emptyset \subset \mathbb{R}$?

Exercice 09 : Montrer que les propositions suivantes sont vraies :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}).$
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$
3. $\forall p \in \mathbb{N}$, si p n'est pas un multiple de 3 alors p^2 n'est pas un multiple de 3.
4. Si p^2 n'est pas un multiple entier de 16 alors $\frac{p}{2}$ n'est pas un entier pair.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.