Chapitre 1

Éléments de logique et techniques de démonstrations

1.1 Éléments de logique

1.1.1 Définition

Une proposition mathématique P est un énoncé auquel on peut répondre par vrai ou faux.

— Lorsque P est une proposition vraie, on lui attribue la valeur de vérité 1 ou V.

— Lorsque P est une proposition fausse, on lui attribue la valeur de vérité 0 ou F.

Exemples : Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. P : "9 est plus grand que 7" ....
2. Q : " 4 est un nombre premier" ....
3. R : " n est un entier pair" ....

1.1.2 Connecteurs logiques

À partir de propositions données, on peut former de nouvelles propositions à l'aide de symboles logiques appellés *connecteurs logiques*.

Soient P et Q deux propositions.

1.1.2.1 Négation

La négation de P est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse ; et fausse lorsque P est vraie. La négation de P est notée $\overline{P}$ (nonP, $\neg$P).

La Table **??**, appelée *table de vérité*, fait apparaître les différentes valeurs de vérité possibles pour la négation de P.

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

TABLE 1.1 – Table de vérité de la négation

Exemples : Donner la négation des propositions suivantes :

1. P : "2 est strictement plus petit que 3" ....
   $\overline{P}$ ....
2. Q : "5 est égal à 7" ....
   $\overline{Q}$ ....
3. S : "3 est un nombre impair" ....
   $\overline{S}$ ....

1.1.2.2 Conjonction

La proposition P et Q, notée $P \wedge Q$, est vraie si P est vraie **et** Q est vraie.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	$\cdots$
0	1	$\cdots$
1	0	$\cdots$
1	1	$\cdots$

TABLE 1.2 – Table de vérité de la conjonction

1.1.2.3 Disjonction

La proposition P ou Q, notée $Q \vee P$, est fausse si P est fausse **et** Q est fausse.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	$\cdots$
0	1	$\cdots$
1	0	$\cdots$
1	1	$\cdots$

TABLE 1.3 – Table de vérité de la disjonction

1.1.2.4 Équivalence

La proposition P équivalente à Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, est vraie si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$Q \Leftrightarrow P$
0	0	$\cdots$	$\cdots$
0	1	$\cdots$	$\cdots$
1	0	$\cdots$	$\cdots$
1	1	$\cdots$	$\cdots$

TABLE 1.4 – Table de vérité de l'équivalence

1.1.2.5 Implication

La proposition P implique Q, notée $P \Rightarrow Q$, est fausse si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$\overline{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \vee Q$
0	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

TABLE 1.5 – Table de vérité de l'implication

Remarques :

1. $P \Rightarrow Q$ ne suppose pas que la proposition P est vraie, mais :
   — Si la proposition P est vraie alors la proposition Q est vraie.
   — Si la proposition P est fausse, la proposition Q peut être vraie ou fausse.
2. La réciproque de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition $Q \Rightarrow P$.

Exemples : Étudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. $(-5 > 0) \wedge ((-2)^2 = 4)$ ....
2. $(-5 > 0) \vee ((-2)^2 = 4)$ ....
3. $((-2)^2 = 2^2) \Leftrightarrow (4 = 4)$ ....
4. $(5 = 6) \Leftrightarrow (2 = 3)$ ....
5. $((-2)^2 = 2^2) \Leftrightarrow (-2 = 2)$ ....
6. $(2 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$..

1.1.2.6 Propriétés des connecteurs logiques

Soient P, Q et R trois propositions.

1. $\overline{\overline{\mathrm{P}}} \Leftrightarrow \mathrm{P}$.
2. $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}) \Leftrightarrow \mathrm{P}$.
3. $(\mathrm{P} \vee \mathrm{P}) \Leftrightarrow \mathrm{P}$.
4. Commutativité :
   (a) $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$.
   (b) $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\mathrm{Q} \vee \mathrm{P})$.
5. Associativité :
   (a) $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$.
   (b) $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$.
6. Distributivité :
   (a) $\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \Leftrightarrow (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R})$.
   (b) $\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \Leftrightarrow (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{R})$.
7. Lois de De Morgan :
   (a) $(\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}}) \Leftrightarrow (\overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}})$.
   (b) $(\overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}}) \Leftrightarrow (\overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}})$.
8. Transitiviré de l'implication : $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{R}) \Leftrightarrow (\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{R})$.
9. Réécriture de l'implication $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\overline{\mathrm{P}} \vee \mathrm{Q})$.
10. Négation de l'implication : $(\overline{\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}}) \Leftrightarrow (\mathrm{P} \wedge \overline{\mathrm{Q}})$.
11. Contraposée de l'implication : $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}})$.

1.1.3 Notions d'ensembles

Un ensemble E est une collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés et chacun de ces objets est appelé éléments de cet ensemble. E peut contenir un nombre fini d'éléments ou un nombre infini d'éléments.

Exemples :

— $\mathrm{E} = \{1, 0, e, f\}$ est un ensemble.

— $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

— $\mathbb{Z} = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

— $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*\}$ est l'ensemble des nombres rationnels.

1.1.3.1 Cardinal d'un ensemble fini

1. On appelle cardinal d'un ensemble E le nombre d'éléments de E et on note card(E) ou |E|.
2. E est dit ensemble vide s'il ne contient aucun élément (card(E) = 0) et on note $E = \emptyset$.
3. E est dit un ensemble singleton s'il contient exactement un élément (card(E) = 1).

Exemples : Donner le cardinal des ensembles E et F suivants :

— Si $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors card(E) = ...

— Si $F = \{1, 2, 3, 4\}$ alors card(F) = ...

1.1.3.2 Appartenance à un ensemble

Soit E un ensemble. Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$. Dans le cas contraire, si x n'appartient pas à E on note $x \notin E$.

Exemple : Si $E = \{0, 1, 2, a, b\}$ alors $0 \in E$ et $c \notin E$.

1.1.3.3 Écriture d'un ensemble

Il existe deux manières d'écrire un ensemble :

1. **Écriture en extension :** Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble E, on dit qu'on a défini ou écrit l'ensemble E *en extension.* Dans ce cas, on écrit tous les éléments de l'ensemble E considéré entre accolade : $\{\cdots\}$.

   Exemples : Les ensembles suivant sont écrits en extension

   — $E = \{0, a, b, *\}$.

   — $B = \{0, 1\}$ est l'ensemble des Booléens.

   — $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ est l'ensemble des 10 chiffres servants à la numérotation décimale.

2. **Écriture en compréhension :** Lorqu' on caractérise les éléments d'un ensemble E par une ou plusieurs propriétés, on dit qu'on a écrit ou défini l'ensemble E par *compréhension.* Dans ce cas, on définit l'ensemble E comme étant constitué de tous les éléments x d'un autre ensemble A qui vérifient une propriété $P(x)$, on écrit :

$$E = \{x \in A \diagup P(x)\}.$$

Exemples : Définir les ensembles suivants en extension :

— $E = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 + 2 \leq 6\} =$ ....

— $F = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 3\} =$ ....

— $G = \{x \in \mathbb{N} / x(2x+3) = 14\} =$ ....

1.1.4 Quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont en fonction des éléments x appartenant à un ensemble D.

Exemple : Considérons la proposition $P(x)$: x est un nombre premier.

La véracité de $P(x)$ dépend de la valeur de x. En effet, elle est vraie quand $x = 2$ ou $x = 3$ et est fausse si x est un nombre pair plus grand que 2.

1.1.4.1 Quantificateur universel

Le quantificateur universel, noté $\forall$, permet d'exprimer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de D, on écrit : $\forall x \in D,\ P(x)$ et on lit : "Quelque soit x dans D, la proposition $P(x)$ est vérifiée".

1.1.4.2 Quantificateur existentiel

1. Le quantificateur existentiel, noté $\exists$, permet d' exprimer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de D, on écrit : $\exists x \in D,\ P(x)$ et on lit : "Il existe au moins un x dans D tel que la proposition $P(x)$ est vérifiée " ou "Il existe x dans D qui vérifie $P(x)$".
2. Pour exprimer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour exactement un et un seul élément x de D, on écrit : $\exists! x \in D, P(x)$ et on lit "Il existe un unique x dans D tel que la proposition $P(x)$ est vérifiée".

Exemples : En utilisant les quantificateurs, réécrire les propositions suivantes :

1. "Le carré de tout nombre réel est positif" ....
2. "Pout tout réel x positif ou nul, x^2 est strictement supérieur à 1" ....
3. "Il existe un réel inférieur à 10" ....
4. "L'équation $3x^2 - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$" ....
5. "L'équation $3x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{N}$" ....

1.1.4.3 Négation des quatificateurs

- $(\overline{\forall x \in \mathrm{D},\ \mathrm{P}(x)}) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathrm{D},\ \overline{\mathrm{P}(x)})$.
- $(\overline{\exists x \in \mathrm{D},\ \mathrm{P}(x)}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{D},\ \overline{\mathrm{P}(x)})$.
- $(\overline{\exists! x \in \mathrm{D},\ \mathrm{P}(x)}) \Leftrightarrow \Big[(\forall x \in \mathrm{D},\ \overline{\mathrm{P}(x)}) \vee (\exists x_1 \in \mathrm{D}, \exists x_2 \in \mathrm{D},\ \mathrm{P}(x_1) \wedge \mathrm{P}(x_2) \wedge\ x_1 \neq x_2)\Big]$.

Exemples : Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ....
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 \neq y$ ....
3. $\exists! x \in \mathbb{R}, 3x - 1 = 0$ ....

Remarques : Soit $\mathrm{P}(x, y)$ une proposition dépendant de $x \in \mathrm{D}_1$ et $y \in \mathrm{D}_2$. Alors,

1. $[\forall x \in \mathrm{D}_1, \forall y \in \mathrm{D}_2, \mathrm{P}(x, y)] \Leftrightarrow [\forall y \in \mathrm{D}_2, \forall x \in \mathrm{D}_1, \mathrm{P}(x, y)]$.
2. $[\exists x \in \mathrm{D}_1, \exists y \in \mathrm{D}_2, \mathrm{P}(x, y)] \Leftrightarrow [\exists y \in \mathrm{D}_2, \exists x \in \mathrm{D}_1, \mathrm{P}(x, y)]$.
3. Par contre, $\forall x \in \mathrm{D}_1, \exists y \in \mathrm{D}_2, \mathrm{P}(x, y)$ n'est pas équivalente à $\exists y \in \mathrm{D}_2, \forall x \in \mathrm{D}_1, \mathrm{P}(x, y)$. En effet, la proposition $\forall x \in \mathrm{D}_1, \exists y \in \mathrm{D}_2, \mathrm{P}(x, y)$ signifie que pour tout x dans D_1, il existe une valeur y (qui dépend apriori de x) telle que $\mathrm{P}(x, y)$ est vérifée, alors que $\exists y \in \mathrm{D}_2, \forall x \in \mathrm{D}_1, \mathrm{P}(x, y)$ signifie qu'il existe une valeur de y dans D_2 telle que $\mathrm{P}(x, y)$ est vérifée pour toutes les valeurs de x dans D_1. En conclusion, l'ordre dans lequel on place les quantificateurs est important.

Exemples :

- La proposition "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$" signifie que quel que soit le réel x, il existe au moins un réel y tel que y est supérieur à x. La proposition est vraie car on peut toujours trouver un nombre supérieur à un nombre réel donné.
- La proposition "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y > x$" signifie qu'il existe au moins un réel x (indépendant de y) tel que pour tout réel y, y est supérieur à x. Cette proposition est fausse car on ne peut pas trouver un réel inférieur à tous les autres.

1.1.5 Inclusion et égalité entre deux ensembles

1.1.5.1 Inclusion

Soient E et F deux ensembles.

— On dit que F est inclus au sens large dans E, si tout élément de F est un élément E. On dit aussi que F est un sous ensemble ou une partie de E. On note $F \subseteq E$.

$$F \subseteq E \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \in E)$$

— On dit que F est inclus au sens stricte dans E, si tout élément de F est un élément de E et il existe au moins un élément de E qui n'est pas dans F. On note $F \subset E$.

$$F \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \in E) \wedge (\exists x \in E, x \notin F)$$

— On dit que F n'est pas inclus dans E s'il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E . On note $F \not\subset E$.

$$F \not\subset E \Leftrightarrow (\exists x \in F, x \notin E)$$

Exemples : Dans chacun des cas suivants, quelles sont les relations d'inclusion existantes entre ces ensembles ?

1. $E = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $F = \{4, 5, 6, 7\}$ ....
2. $E = \{4, 5, 6, 7\}$ et $F = \{5, 6, 7, 4\}$..
3. $E = \mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$ et $F = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ ....
4. $E = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} / x \geq |x|\}$...

1.1.5.2 Égalité

Soient E et F deux ensembles.

— On dit que E est égal à F, et on note E = F, si tout élément de E est un élément de F et tout élément de F est un élément de E.

$$E = F \Leftrightarrow (E \subseteq F) \wedge (F \subseteq E)$$

— On dit que E n'est pas égal à F, s'il existe au moins un élément de E qui n'appartient pas à F ou il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E.

$$E \neq F \Leftrightarrow (E \not\subset F) \vee (F \not\subset E)$$

Exemples : Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles sont égaux :

1. Si $E = \{4,5,6,7\}$ et $F = \{4,6,5,7\}$, ...
2. Si $E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 4\}$ et $F = [-2,2]$, ...
3. Si $E = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 \leq 4\}$ et $F = [-2,2]$, ...

1.1.5.3 Propriétés :

1. Tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subseteq E$.
2. L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E : $\emptyset \subseteq E$.
3. Si E , F et G sont trois ensembles, alors : $((E \subseteq F) \text{ et } (F \subseteq G)) \Rightarrow (E \subseteq G)$.

1.1.6 Opérations sur les ensembles

1.1.6.1 Ensembles de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. L'ensemble de parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est l'ensemble de tous les sous ensembles de E.

$$\mathscr{P}(E) = \{F / F \subseteq E\}$$

Si $\text{card}(E) = n$ alors $\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$ alors
$\mathscr{P}(E) =$ ....

Remarques : Si x est un élément d'un ensemble E, alors :

- $x \in E$: x est un élément de E.
- $\{x\} \subset E$: $\{x\}$ est un sous ensemble de E.
- $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$: $\{x\}$ est un élément de $\mathscr{P}(E)$.
- $x \in \{x\}$: x est un élément du singleton $\{x\}$.

1.1.6.2 Réunion et intersection de deux ensembles

Soient A et B deux parties de E.

- On appelle *réunion* des ensembles A et B l'ensemble, noté $A \cup B$, contenant tous les éléments de A et B.

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \vee x \in B\}.$$

— On appelle *intersection* des ensembles A et B l'ensemble, noté $A \cap B$, contenant tous les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

$$A \cap B = \{x \in E \diagup x \in A \wedge x \in B\}.$$

Exemples : Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des ensembles A et B.

1. $A = \{a, b, c, 3\}$ et $B = \{0, 1, 3, a, e\}$.
   - $A \cup B =$ ....
   - $A \cap B =$ ....
2. Soient $A = \{2x + 1 \diagup x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ et $B =]-1, 1[$.
   - $A \cup B =$ ....
   - $A \cap B =$ ....

Remarques : Soient A et B deux parties de E.

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \notin B)$ ou $(x \notin A \text{ et } x \in B)$.
2. $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \text{ et } x \notin B)$.
3. $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$.
4. $x \notin A \cap B \Leftrightarrow ((x \notin A \text{ et } x \notin B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \notin B)$ ou $(x \notin A \text{ et } x \in B)$.
5. Si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B sont dits disjoints.

Propriétés : Soient A, B et C trois parties de E.

1. $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
7. $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1.1.6.3 Complémentaire d'un ensemble

Soit A une partie de E. On appelle *complémentaire de* A *par rapport Ã* E l'ensemble, noté $\complement_E^A$, contenant tous les éléments de E n'appartenant pas à A.

$$\complement_E^A = \{x \in E \diagup x \notin A\}.$$

Exemples : Dans chacun des cas, déterminer le complémentaire de A par rapport E.

1. $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $A = \{a, b, e\}$ alors $\complement_E^A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Si $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 2[\cup]2, 6]$ alors $\complement_E^A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriétés : Soient A et B deux parties de E.

1. $\complement_E^{\complement_E^A} = A$.
2. $A \cup \complement_E^A = E$.
3. $A \cap \complement_E^A = \emptyset$.
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow \complement_E^A \subseteq \complement_E^B$.
5. $\complement_E^{(A\cup B)} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$.
6. $\complement_E^{(A\cap B)} = \complement_E^A \cup \complement_E^B$

1.1.6.4 Différence et différence symétrique entre deux ensembles

Soient A et B deux parties de E.

1. On appelle *différence* de A et B l'ensemble, noté $A \setminus B$, contenant tous les éléments de E appartenant A et n'appartenant pas à B.

$$A \setminus B = \{x \in E \diagup x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \complement_E^B.$$

2. On appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble, noté $A\Delta B$, contenant tous les éléments appartenant soit à A soit à B, mais pas aux deux ensembles A et B à la fois. Autrement dit, $A\Delta B$ est la réunion des deux différences $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Exemples : Si $A =]-\infty, 1]$ et $B =]-2, +\infty[$, alors

1. $A \setminus B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $B \setminus A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $A\Delta B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $B\Delta A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.2 Techniques de démonstrations

1.2.1 Raisonnement direct d'une implication

Soient P et Q deux propositions logiques. Montrer que P $\Rightarrow$ Q est une proposition vraie, revient à supposer que P vraie et montrer directement par un argument juste que Q est vraie.

Exemple : Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ (x-1)(y+1) = (x+1)(y-1) \Rightarrow x = y$.

Démonstration. ....

....

....

....

.... □

1.2.2 Raisonnement par contraposée d'une implication

Soient P et Q deux propositions logiques. Le raisonnement par contraposée se base sur l'équivalence

$$(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}).$$

Ainsi, pour montrer que P $\Rightarrow$ Q est une proposition vraie, il faut et il suffit de montrer que sa contraposée $\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}$ est une proposition vraie. Autrement dit, on suppose que $\overline{\mathrm{Q}}$ est vraie et on montre directement avec un argument juste que $\overline{\mathrm{P}}$ est vraie.

Exemple : Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \ x \neq y \Rightarrow \frac{1}{1-x} \neq \frac{1}{1-y}$.

Démonstration. ....

....

....

....

....

□

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

- Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut raisonner par l'absurde. On suppose que sa negation $\overline{\mathrm{P}}$ est vraie, puis on montre que cette hypothèse conduit à une contradiction (une absurdité), cela signifie que la proposition $\overline{\mathrm{P}}$ est fausse et donc P est vraie.
- Pour montrer que $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est vraie, on peut raisonner par l'absurde. On suppose que $\overline{\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}}$ est vraie. Autrement dit, on suppose que P et $\overline{\mathrm{Q}}$ est vraie et on montre que cette hypothèse conduit à une contradiction (une absurdité), cela signifie que la proposition $\mathrm{P} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$ est fausse et donc $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est vraie..

Exemple : Montrer que pour tout x, y dans $\mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$, on a $4xy - 6x - 6y + 12 \neq 3$.

Démonstration. ....

....

....

.... □

1.2.4 Raisonnement par un contre exemple

Pour montrer qu'une proposition de type $\forall x \in \mathrm{D}, \mathrm{P}(x)$ est fausse, il suffit de trouver un contre exemple, c'est à dire trouver au moins un élément $x_0 \in \mathrm{D}$ qui vérifie $\overline{\mathrm{P}(x_0)}$.

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ est fausse

Démonstration. Contre exemple : .... □

1.2.5 Raisonnement par disjonction des cas

Soient P et Q deux propositions. Pour montrer que $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est vraie, on peut sépare l'hypothèse P de départ en différents cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas.

Exemple : Montrer que si n est un entier alors $n(n+1)$ est entier un pair.

Démonstration. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

1.2.6 Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété sur $\mathbb{N}$ (ou I une partie de $\mathbb{N}$). Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$(ou à partir d'un certain rang n_0), on raisonne par récurrence.

Principe de réccurence : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie (héridité) alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Pour démontrer une propriété par un raisonnement par récurrence, la preuve se fait en trois étapes :

1. **Initialisation :** On vérifie la propriété pour le premier rang $n_0 \in \mathbb{N}$, c'est à dire, on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Héridité :** On suppose que $P(k)$ vraie pour un certain $k \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), et on montre $P(k+1)$ à l'aide de cette hypothèse.
3. **Conclusion :** Le principe de récurrence permet de conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{p=n} p = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... $\square$