Отчет по лабораторной работе №2 «Решение нелинейных уравнений» Вариант №22

Левицкий Валентин А-13-22

НИУ «МЭИ»

27 марта 2024 г.

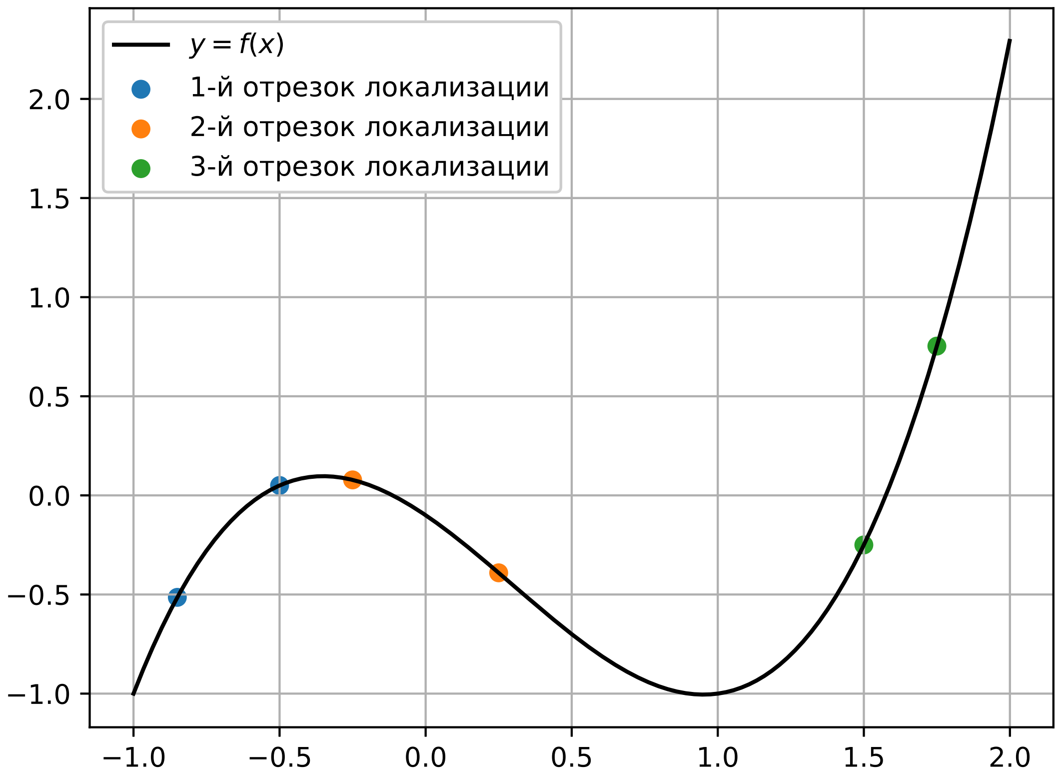
Задача 2.1

Методом простой итерации найти вещественные корни нелинейного уравнения $f(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

$$f(x) = x^3 - 0.9x^2 - x - 0.1.$$

Решение

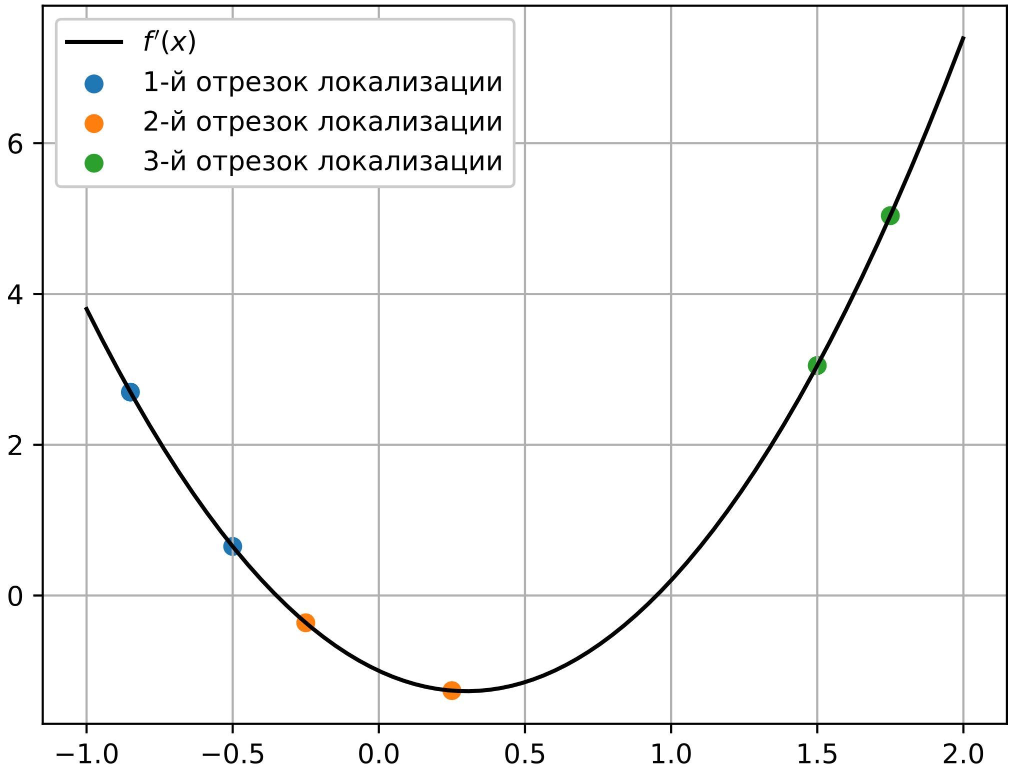
Построим график функции и определим отрезки локализации для каждого корня:



Определим производную $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.8x - 1.$$

Построим график производной и отметим на нём границы отрезков локализации:



Из графика видно, что на отрезках локализации производная функции сохраняет постоянный знак.

Для каждого корня определим итерационный параметр α и параметр q, используя формулы:

$$\alpha = \frac{2}{M1 + m1},$$

$$q = \left|\frac{M1 - m1}{M1 + m1}\right|,$$

где $M1 = \max\limits_{x \in [a,b]} f'(x), \; m1 = \min\limits_{x \in [a,b]} f'(x)$.

Составим программу для нахождения корня с заданной точностью ε по методу простых итераций. В качестве расчетной формулы используем метод простой итерации с параметром:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n).$$

```
def MPI(x0, M1, m1, f, eps):
    alpha = 2 / (M1 + m1)
    q = np.abs((M1 - m1) / (M1 + m1))
    x1 = x0 - alpha * f(x0)
    it = 1
    while abs(x1 - x0) > (1 - q) * eps / q:
        x0, x1 = x1, x1 - alpha * f(x1)
        it += 1
    print(f"Выполнено {it} итераций, x = {x1}")
    return x1
```

Запишем результаты вычислений в таблицу:

Левицкий Валентин Димитриевич А-13-22						Вариант №22
$f(x) = x^3 - 0.9x^2 - x - 0.1$						$\varepsilon = 10^{-8}$
Корни	$[a, b]$	M_1	m_1	α	q	Итерации
$x_1 = -0.56224597$	$[-0.65, -0.5]$	1.4375	0.65	0.9581	0.3772	8
$x_2 = -0.11291429$	$[-0.25, 0.25]$	-0.3625	-1.2625	-1.2308	0.5538	8
$x_3 = 1.57516025$	$[1.5, 1.75]$	5.0375	3.05	-0.1129	1.5752	8

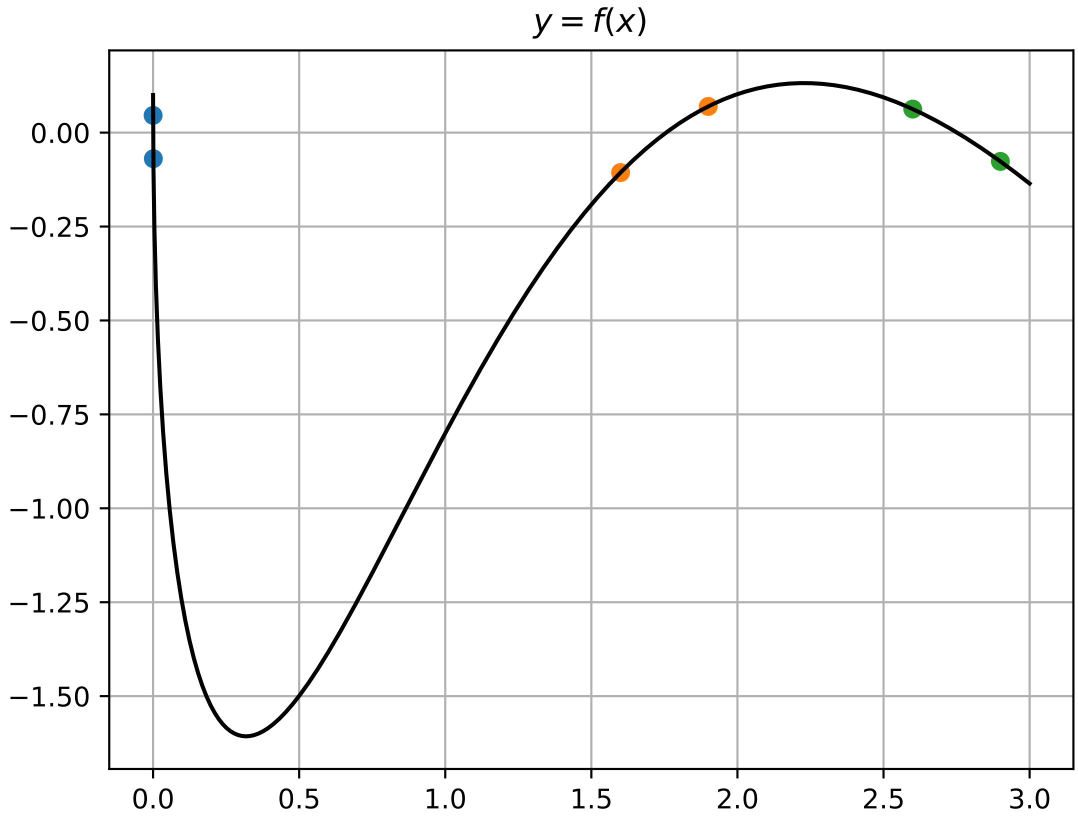
Задача 2.2

Дано уравнение $f(x) = 0$. Найти все корни уравнения с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-12}$ на указанном отрезке $[a, b]$. Для решения задачи использовать метод Ньютона и метод простых итераций. Сравнить количество итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности каждым методом.

$$f(x) = 10^{-\sqrt{x}} - \sin(\pi\sqrt{x}) - 0.9,$$
$$x \in [0, 3].$$

Решение

Найдем отрезки локализации для каждого корня и середины этих отрезков примим за начальные приближения.



Составим программу вычисления корня методом Ньютона, предусмотрев в ней подсчёт числа итераций. Найдем с заданной точностью корни уравнения на отрезке $[0, 3]$.

```
def newton(x0, func, dfunc, eps):
    x1 = x0 - func(x0) / dfunc(x0)
    it = 1
    while abs(x1 - x0) > eps:
        x0 = x1
        x1 = x0 - func(x0) / dfunc(x0)
        # print(f"\t{x1}")
        it += 1
    print(f"\tВыполнено {it} итераций. x = {x1}")
    return x1
```

Результаты для каждого из отрезков локализации:

```
Выполнено 5 итераций. x = 0.000343705625
Выполнено 4 итераций. x = 1.755702317447
Выполнено 4 итераций. x = 2.751734381135
```

Составим программу вычисления корня методом простых итераций, предусмотрев в ней подсчёт числа итераций. Найдем с заданной точностью те же корни уравнения.

```
def MPI(x0, m1, M1, f, eps):
    alpha = 2 / (m1 + M1)
    q = abs((M1-m1)/ (M1 + m1))
    x1 = x0 - alpha * f(x0)
    it = 1
    while abs(x1 - x0) > (1 - q) * eps / q:
        x0 = x1
        x1 = x0 - alpha * f(x0)
        it += 1
    print(f"\tВыполнено {it} итераций. x = {x1}")
    return x1
```

Результаты для каждого из отрезков локализации:

```
Выполнено 13 итераций. x = 0.000343705625
Выполнено 7 итераций. x = 1.755702317447
Выполнено 7 итераций. x = 2.751734381135
```

Полученные результаты запишем в таблицу:

$f(x) = 10^{-\sqrt{x}} - \sin(\pi\sqrt{x}) - 0.9$			
Расчетная формула метода Ньютона: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$			
Расчетная формула метода простых итераций: $x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n)$			
Задача 2.2			
Начальное приближение	Корень уравнения	Число итераций Метод Ньютона	Число итераций Метод простых итераций
0.00055	0.00034370562	5	13
1.75	1.755702317447	4	7
2.75	2.751734381135	4	7

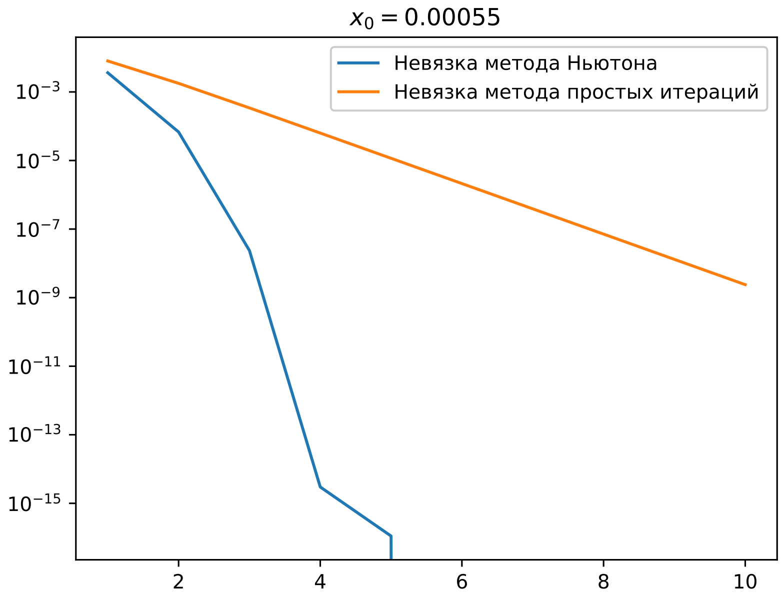
Модифицируем методы так, чтобы каждый метод делал заданное количество итераций и на каждом шаге сохранял значение модуля невязки $r_n = |f(x_n)|$.

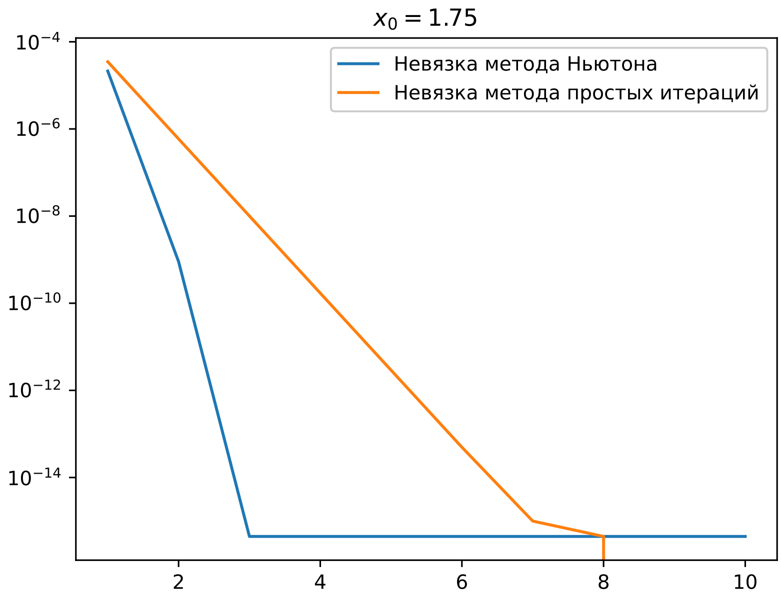
```
def newton2(x0, func, dfunc, n, eps):
    x1 = x0 - func(x0) / dfunc(x0)
    r = [abs(f(x1))]
    it = 1
    while it < n:
        x0 = x1
        x1 = x0 - func(x0) / dfunc(x0)
```

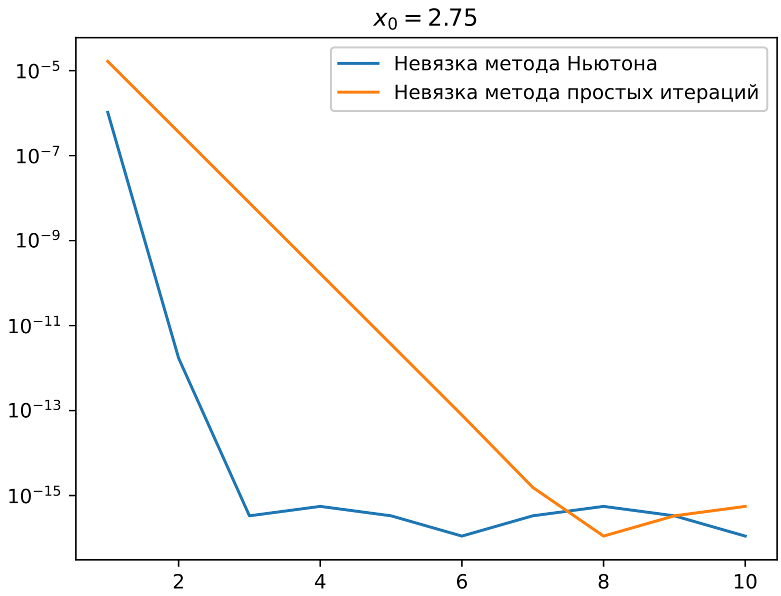
```
        r.append(abs(f(x1)))
        it += 1
    return x1, np.array(r)

def MPI2(x0, m1, M1, f, n, eps):
    alpha = 2 / (m1 + M1)
    q = abs((M1-m1)/ (M1 + m1))
    x1 = x0 - alpha * f(x0)
    r = [abs(f(x1))]
    it = 1
    while it < n:
        x0 = x1
        x1 = x0 - alpha * f(x0)
        r.append(abs(f(x1)))
        it += 1
    return x1, np.array(r)
```

Для каждого начального приближения вызовем модифицированные методы так, чтобы они проделали 10 итераций. Построим графики зависимости r_n от n в логарифмической шкале.







По полученым графикам можно сделать следующий вывод:

1. Возможно приблизительно определить порядок сходимости методов: для метода Ньютона он равен 2, для метода простых итераций 1.6.

2. Больший порядок сходимости позволяет методу быстрее приближаться к точному значению корня, что соответствует теоретическим результатам.

3. Невязка не будет стремиться к нулю из-за погрешности округления значений в памяти компьютера, а также из-за наличия интервала неопределенности корня.

4. Возможно, что начиная с какой-то итерации невязка будет равна нулю (1 график), если компьютер позволяет сохранить точное значение данного корня в памяти.

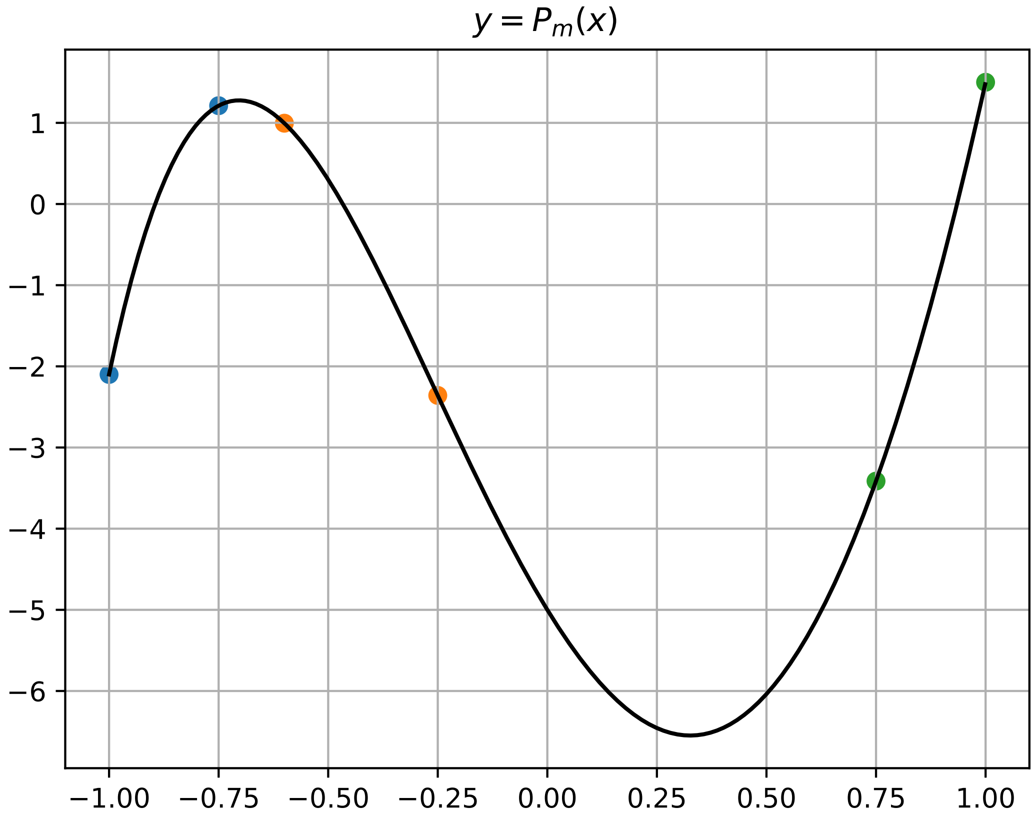
Задача 2.3

Используя метод Ньютона найти все корни алгебраического уравнения $P_m(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

$$P_m(x) = x^5 - 5.1x^4 + 9.6x^3 + 9.8x^2 - 8.8x - 5.$$

Решение

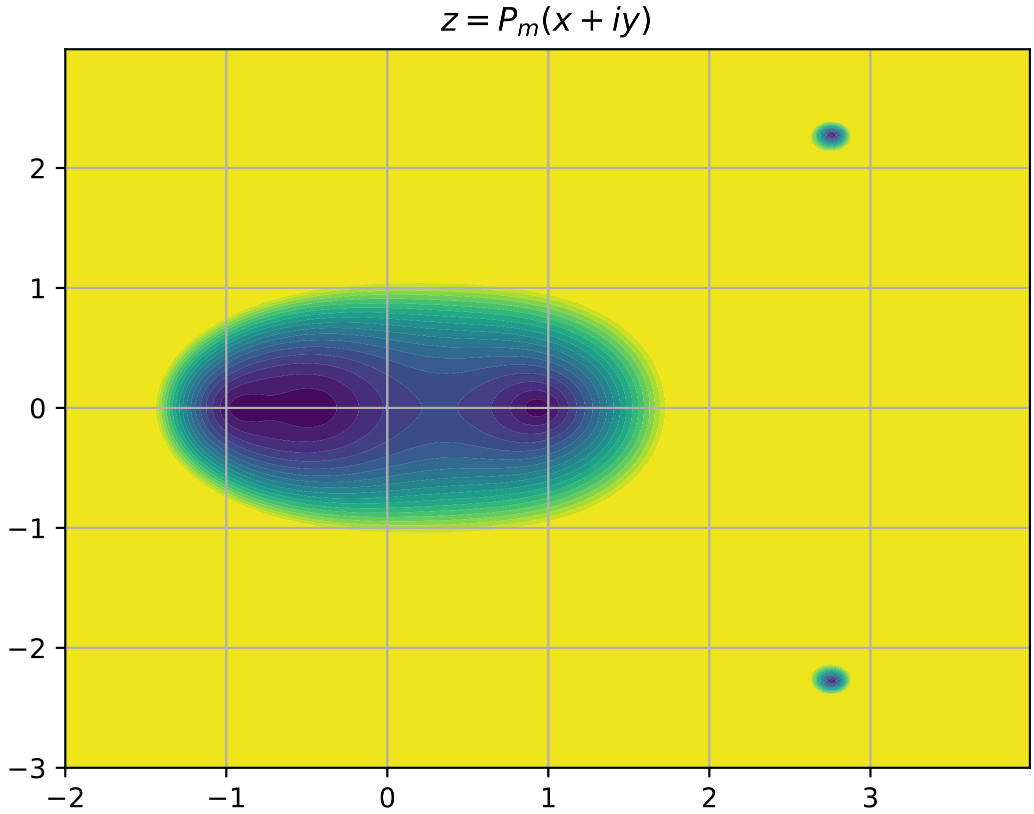
Графически найдем отрезки локализации для вещественных корней, за начальные приближения возьмем середины отрезков.



Результат применения метода Ньютона:

```
Выполнено 4 итераций. x = -0.89479384
Выполнено 4 итераций. x = -0.46653499
Выполнено 4 итераций. x = 0.93485047
```

Для поиска комплексных корней уравнения построим график на комплексной плоскости, где большим значениям функции соответствуют более светлые цвета и наоборот.



На графике, кроме трех вещественных корней, видны также два комплексных корня в окрестностях точек $2.8{+}2.5i$ и $2.8{-}2.5i$. Запустим из них метод Ньютона, чтобы узнать точные значения этих корней:

```
Выполнено 5 итераций. x = 2.76323918-2.27521843j
Выполнено 5 итераций. x = 2.76323918+2.27521843j
```

Таким образом уравнение $P_m(x) = 0$ имеет пять алгебраических корней:

$$x_1 = -0.89479384,$$
$$x_2 = -0.46653499,$$
$$x_3 = 0.93485047,$$
$$x_4 = 2.76323918 - 2.27521843i,$$
$$x_5 = 2.76323918 + 2.27521843i.$$