Отчет по лабораторной работе №3 «Решение СЛАУ прямыми методами. Теория возмущений» Вариант №22

Левицкий Валентин А-13-22

НИУ «МЭИ»

1 мая 2024 г.

Задача 3.1

Реализовать решение СЛАУ с помощью LU разложения и LU разложения по схеме частичного выбора. Решить систему небольшой размерности с возмущенной матрицей обоими методами, оценить погрешность и сравнить с теоретической оценкой. Проанализировать поведение методов с ростом числа уравнений.

$A_{ij} = \arctan(0.1(10i + j + 1))$.

Решение

Напишим функцию создания матрицы размера m:

```
def init_matr(m):
    matr = np.zeros((m, m))
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            matr[i][j] = np.arctan(0.1 * (10 * i + j + 1))
    return matr
```

1. Реализуем метод решения СЛАУ с помощью LU разложения по схеме единственного деления, модифицирующий исходную матрицу A.

```
def LU(A) -> np.array:
    lu = A.copy()
    for i in range(1, A.shape[0]):
        for j in range(0, i):
            mu = lu[i, j] / lu [j, j]
            mask = np.ones_like(lu[j, :])
            mask[:j] = 0
            # print(lu[j, :] * mask)
            lu[i, :] -= mu * (lu[j, :] * mask)
            lu[i, j] = mu
    return lu

def solve(A, b):
    lu = LU(A)
    l = np.tril(lu, -1) + np.eye(lu.shape[0])
    u = np.triu(lu)
    # print(l)
    # print(u)
    y = np.linalg.inv(l).dot(b)
    x = np.linalg.inv(u).dot(y)
    # return l, u
    return x
```

Убедимся в работоспособности метода:

```
solve(A, b)

array([[22. , 22. , 22.00000001, 22. , 22. ]])
```

2. Реализуем метод решения СЛАУ с помощью LU разложения по схеме частичного выбора в виде двух функций, одна из которых возвращает две матрицы – L и U, не модифицируя A, а вторая функция решает систему.

```
def Mimod(A, k, is_l):
    mi = np.eye(*A.shape)
    P = np.eye(*A.shape)
    mx = k + np.argmax(np.abs(A[k:, k]))
    P[[k, mx]] = P[[mx, k]]
    A = P.dot(A)
    for i in range(k + 1, A.shape[1]):
        mi[i, k] = A[i, k] / A[k, k]
        if not is_l:
            mi[i, k] *= -1
    return mi, P

def LUmod(A):
    U = A.copy()
    L = np.eye(*A.shape)
    M = np.eye(*A.shape)
    for j in range(0, A.shape[1] - 1):
        mi, pi = Mimod(U, j, False)
        mii, pii = Mimod(U, j, True)
        U = mi.dot(pi).dot(U)
        L = L.dot(pii).dot(mii)
    return L, U

def solvemod(A, b):
    L, U = LUmod(A)
    y = np.linalg.inv(L) @ b
    x = np.linalg.inv(U) @ y
    return x
```

Убедимся в работоспособности метода:

```
solve(A, b)
```

```
array([[22. , 21.99999999, 22.00000002, 21.99999998, 22. ]])
```

3. Решим систему $A^*x = b$, размера 5 x 5, двумя методами. A^* зададим как A и к одному элементу прибавим 10^{-3}

```
A_star  = A.copy()
A_star[3, 3] += 0.001
x1 = solve(A_star, b)
x2 = solvemod(A_star, b)
```

4. Вычислим погрешности и сравним с теоретической оценкой.

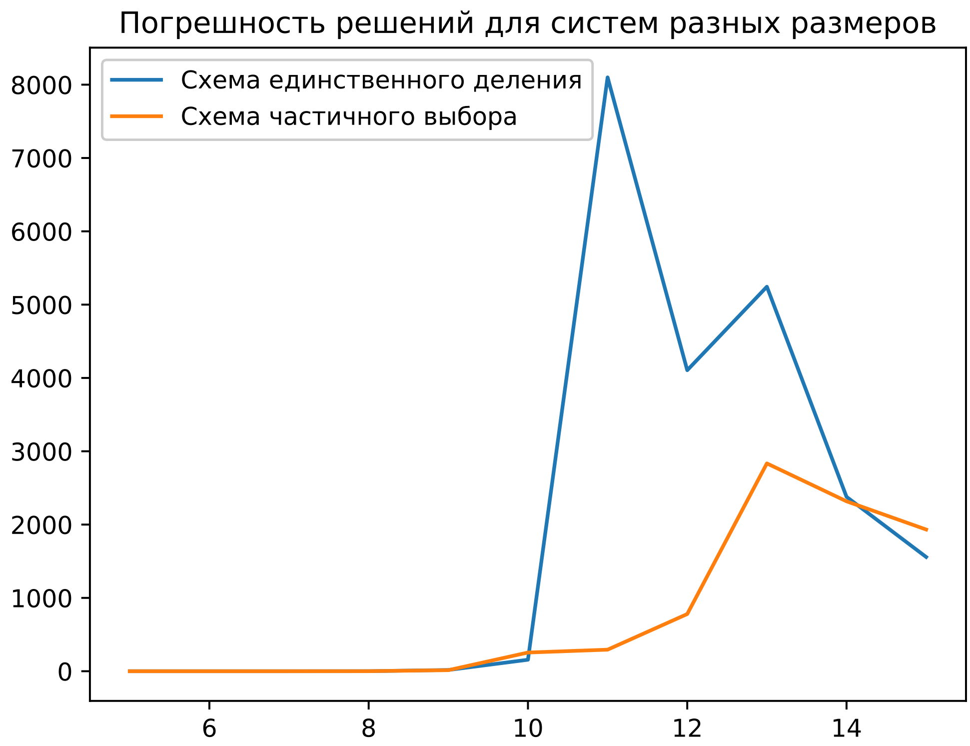
```
Dx1 = np.linalg.norm(x_root - x1)
Dx2 = np.linalg.norm(x_root - x2)
DA = np.linalg.norm(A - A_star)
dx1 = Dx1 / np.linalg.norm(x_root)
dx2 = Dx2 / np.linalg.norm(x_root)
dA = DA / np.linalg.norm(A)
condA = np.linalg.norm(A) * np.linalg.norm(np.linalg.inv(A))
d_hat = condA * DA
```

```
print(f'{dx1 = }')
print(f'{dx2 = }')
print(f'Теоретическая оценка: {d_hat}')
```

```
dx1 = 0.8568133536857635
dx2 = 0.8568133536692295
Теоретическая оценка: 56493.659253590085
```

Погрешность решений полученых обоими методами находится в пределах теоретической оценки.

5. Решим систему обоими методами для матриц большей размерности. Построим на одном графике погрешности обоих методов как функций, зависящих от n.



Из графиков видно, что погрешность прямых методов возрастает с размерами системы, при этом метод частичного выбора дает более точный результат.

Задача 3.2

Дана разреженная матрица A. Найти число обусловленности матрицы.

Решение

1. Зададим матрицу A согласно схеме из приложения: все ненулевые элементы матрицы равны N (номеру варианта), элементы главной диагонали равны $N * m + m/N$, m - размерность матрицы.

```
A = np.eye(20, 20)
A[:8,:4] = N
A[8:14, 4:8] = N
A[14:, :8] = N
for i in range(8, m-1):
    A[i, i+1:] = N
for i in range(m):
    A[i, i] = (N*m + m/N)
```

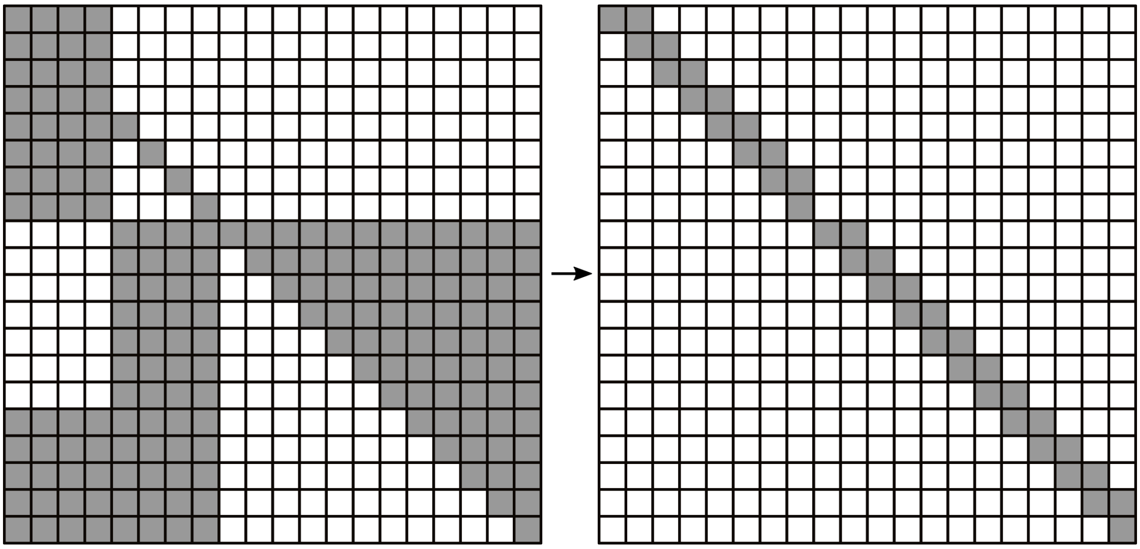
2.Разработаем и реализуем алгоритм решения системы с данной матрицей прямым методом с учетом нулевых элементов.

```
def zerofy(B, n):
    """Зануляет элеметны строки n, находящиеся под главной диагональю."""
    for i in range(0, n):
        mu = B[n, i] / B[i, i]
        B[n, :] -= mu * B[i, :]
    return B

def simplify(A, b):
    """Приводит разреженную матрицу A к двухдиагональному виду"""
    B = np.concatenate((A, b), axis = 1)
    for i in range(1, 8):
        B[i-1, :] -= B[i, :]
    for i in range(9, 20):
        B[i-1, :] -= B[i, :]
    B = zerofy(B, 7)
    B = zerofy(B, 13)
    B = zerofy(B, 19)
    return B[:, :-1], B[:, -1]

def backward(A, b):
    """Обратный ход для двухдиагональной матрицы"""
    x = np.zeros_like(b)
    x[-1] = b[-1] / A[-1, -1]
    for i in range(b.size-2, -1, -1):
        x[i] = (b[i] - A[i, i+1] * x[i+1]) / A[i, i]
    return x

def fast_solve(A, b):
    return backward(*simplify(A, b))
```



Выполним проверку, взяв вектор x, состоящий из одинаковых элементов 33:

```
x_root = np.ones((20, 1)) * 33
b = A.dot(x_root)
fast_solve(A, b)

array([33., 33., 33., 33., 33., 33., 33., 33., 33., 33., 33.,
       33., 33., 33., 33., 33., 33., 33., 33., 33.])
```

3. Напишим алгоритм для поиска обратной матрицы, основанный на решении уравнений $Ax^j = E^j$, где E^j - столбцы единичной матрицы, проверим работоспособность:

```
def inv(A):
    ans = np.eye(*A.shape)
    for j in range(A.shape[1]):
        ans[:, j] = fast_solve(A, ans[:, j].reshape(A.shape[0], 1))
    return ans
```

Проверим работоспособность алгоритма:

```
np.max(np.abs(inv(A).dot(A) - np.eye(20, 20)))

2.220446049250313e-16
```

4. Найдем число обусловленности матрицы, используя евклидову норму:

```
condA = np.linalg.norm(A) * np.linalg.norm(inv(A))
condA

20.37275136439184
```

5. Вывод

1. Данная матрица является хорошо обусловленной т.к. $condA < 100$;

2. Трудоемкость метода составила: - 57m вычитаний, 3m умножений - функция simplify;

- 3m вычитаний и умножений - функция backward;

- Итого 63m операций, т.е. сложность алгоритма - линейная.

Задача 3.3

Дана система уравнений $Ax = b$ с матрицей A из задачи 3.2 и вектором b : $b_i = |N - 25| + 5$, где N - номер варианта. Решить систему методом Якоби с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$.

Решение

1. Составим программу преобразования системы $Ax = b$ к виду $x = Bx + c$.

```
def Jacobi(A, b):
    '''Перобразует СЛАУ Ax=b к виду x = Bx + c.'''
    B = np.zeros_like(A)
    c = np.zeros_like(b)
    for i in range(A.shape[1]):
        B[i, :] = -A[i, :] / A[i, i]
        B[i, i] = 0
        c[i,0] = b[i,0] / A[i, i]
    return B, c
```

Убедимся, что выполнено достаточное условие сходимости метода: $||B|| < 1$

```
B, c = Jacobi(A, b)
np.linalg.norm(B)
```

```
0.6428766787355629
```

2. Составим программу метода простых итераций с подсчетом нормы вектора невязки на каждой итерации.

```
def MPI(A, b, eps):
    B, c = Jacobi(A, b)
    x0 = c
    x1 = B.dot(x0) + c
    iters = 1
    r_n = []
    k = (1 - inf_norm(B)) / inf_norm(B)
    while inf_norm(x1 - x0) > k * eps:
        r_n.append(euclid_norm(A.dot(x1) - b))
        x0 = x1
        x1 = B.dot(x1) + c
        iters +=1
    print("Выполнено итераций: ", iters)
    return x1, np.array(r_n)
```

Убедимся, что выполнено достаточное условие сходимости метода: $||B|| < 1$.

```
B, c = Jacobi(A, b)
np.linalg.norm(B)
```

```
0.6428766787355629
```

Составим программу метода простых итераций с подсчетом нормы вектора невязки на каждой итерации.

```
def MPI(A, b, eps):
    B, c = Jacobi(A, b)
    x0 = c
    x1 = B.dot(x0) + c
    iters = 1
    r_n = []
    k = (1 - inf_norm(B)) / inf_norm(B)
    while inf_norm(x1 - x0) > k * eps:
        r_n.append(euclid_norm(A.dot(x1) - b))
        x0 = x1
        x1 = B.dot(x1) + c
        iters +=1
    print("Выполнено итераций: ", iters)
    return x1, np.array(r_n)
```

Найдем решение задачи с заданной точностью.

```
x, r_n = MPI(A, b, eps)
```

```
Выполнено итераций:  13
```

Подставим найденое решение в исходное уравнение и убедимся в корректности метода:

```
A.dot(x).T
```

```
array([[8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8., 8.,
        8., 8., 8., 8.]])
```

Нормы векторов невязки по итерациям: