ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4.
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 7].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) результаты вычислительного эксперимента; 4) анализ полученных результатов; 5) графический материал (если необходимо);
6) тексты программ.

Задача 4.1. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ все корни системы нелинейных уравнений
$f_1(x_1, x_2) = 0,$
$f_2(x_1, x_2) = 0,$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1.Локализовать корни системы уравнений графически (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 4.В*).
2. Произвести линеаризацию системы. Составить программу-функцию, вычисляющую корень системы двух нелинейных уравнений по упрощенному методу Ньютона с точностью ε. Предусмотреть подсчет количества итераций.
3. Найти корни с заданной точностью.

Задача 4.2. Дана система уравнений $Ax = b$, где A – симметричная положительно определенная матрица. Найти решение системы с помощью метода релаксации и метода, указанного в индивидуальном варианте. Сравнить оба метода решения по числу итераций и по времени решения.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать матрицу системы при заданном значении m – размерности системы. Используя встроенную функцию для нахождения собственных чисел матриц, найти собственные числа матрицы A (убедиться, что матрица $A > 0$).
2. Задать вектор x с координатами: $x_i = N$ где N – номер варианта и вектор b как $b = Ax$.
3. Преобразовать систему к виду удобному для итераций $y = Bx + c$.
3. Составить программу, реализующую метод релаксации с параметром ω. Изменяя значения параметра ω из интервала (0.2) с шагом 0.1, найти оптимальное значение параметра.
4. Решить систему с оптимальным значением параметра ω, найденным в п.2, при размерности системы $10m$. Определить число итераций, требуемых для достижения заданной точности и время решения системы. Критерий окончания : $\frac{\|r^{(n)}\|}{\|r^{(0)}\|} \le \varepsilon, \varepsilon = 10^{-10}$
5. Составить программу, решающую задачу методом индивидуального варианта при размерности 10m. Критерий окончания взять такой же, как в п.4.
6. Полученные результаты свести в таблицу.

Параметр релаксации	Число итераций при m= методом релаксации	Время решения	Число итераций при 10m = методом релаксации	Время решения	Число итераций при 10m = индивидуальным методом	Время решения

Задача 4.3. Задана функция $f(x)$, определенная на отрезке [-1;1]. Требуется разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности нуля с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ и произвести экономизацию полученного степенного ряда.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Определить функцию $S(x,c) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, вычисляющую частичную сумму ряда по коэффициентам $\{c_k\}_{k=0}^{n}$.

2. Вычислить коэффициенты разложения и определить требуемое количество слагаемых для достижения требуемой точности, построив график.

3. Произвести экономизацию степенного ряда до тех пор, пока сохраняется необходимая точность (см. приложение 4В).

4. Построить график погрешности каждого этапа экономизации.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 4

Таблица к задаче 4.1

N	Система уравнений	N	Система уравнений
4.1.1 4.1.31	$\sin(x_1 + x_2) - x_2 - 1.2 = 0$ $2x_1 + \cos x_2 - 2 = 0$	4.1.16 4.1.46	$\sin(0.5x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
4.1.2 4.1.32	$\cos(x_1 - 1) + x_2 - 0.5 = 0$ $\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$	4.1.17 4.1.47	$\tan(x_1 x_2 + 0.3) - x_1^2 = 0$ $0.9x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
4.1.3 4.1.33	$\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ $\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$	4.1.18 4.1.48	$\sin(x_1 + x_2) - 1.3x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + 0.2x_2^2 - 1 = 0$
4.1.4 4.1.34	$\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$ $2x_1 - \sin(x_2 - 0.5) - 1 = 0$	4.1.19 4.1.49	$\tan(x_1 x_2) - x_1^2 = 0$ $0.8x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
4.1.5 4.1.35	$\sin(x_1 + 1.5) - x_2 + 2.9 = 0$ $\cos(x_2 - 2) + x_1 = 0$	4.1.20 4.1.50	$\sin(x_1 + x_2) - 1.5x_1 - 0.1 = 0$ $3x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
4.1.6 4.1.36	$\cos(x_1 + 0.5) + x_2 - 0.8 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 1.6 = 0$	4.1.21 4.1.51	$\tan(x_1 x_2) - x_1^2 = 0$ $0.7x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
4.1.7 4.1.37	$\sin(x_1 - 1) + x_2 - 0.1 = 0$ $x_1 - \sin(x_2 + 1) - 0.8 = 0$	4.1.22 4.1.52	$\sin(x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 0.1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
4.1.8 4.1.38	$\cos(x_1 + x_2) + 2x_2 = 0$ $x_1 + \sin x_2 - 0.6 = 0$	4.1.23 4.1.53	$\tan(x_1 x_2 + 0.2) - x_1^2 = 0$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$

4.1.9 4.1.39	$\cos(x_1 + 0.5) - x_2 - 2 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 1 = 0$	4.1.24 4.1.54	$\sin(x_1 + x_2) - x_1 + 0.1 = 0$ $x_2 - \cos(3x_1) + 0.1 = 0$
4.1.10 4.1.40	$\sin(x_1 + x_2) - x_2 - 1.5 = 0$ $x_1 + \cos(x_2 - 0.5) - 0.5 = 0$	4.1.25 4.1.55	$\cos(x_1 + 0.5) + x_2 - 1 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 2 = 0$
4.1.11 4.1.41	$\sin(x_2 + 1) - x_1 - 1.2 = 0$ $2x_1^2 + x_2 - 2 = 0$	4.1.26 4.1.57	$\cos(x_2 - 2) + x_1 = 0$ $\sin(x_1 + 0.5) - x_2 + 2.9 = 0$
4.1.12 4.1.42	$\cos(x_2 - 1) + x_1 - 0.5 = 0$ $x_2 - \cos x_1 - 3 = 0$	4.1.27 4.1.57	$\sin(x_1 - 1) + x_2 - 1.5 = 0$ $x_1 - \sin(x_2 - 1) - 1 = 0$
4.1.13 4.1.43	$\tan(x_1 x_2 + 0.4) - x_1^2 = 0$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$	4.1.28 4.1.58	$\sin(x_2 + 1) - x_1 - 1 = 0$ $2x_2 + \cos x_1 - 0.5 = 0$
4.1.14 4.1.44	$\sin(x_1 + x_2) - 1.6x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	4.1.29 4.1.59	$\cos(x_2 - 1) + x_1 - 0.8 = 0$ $x_2 - \cos x_1 - 2 = 0$
4.1.15 4.1.45	$\tan(x_1 x_2 + 0.1) - x_1^2 = 0$ $x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$	4.1.30 4.1.60	$\cos(x_1 - 1) + x_2 - 1 = 0$ $\sin x_2 + 2x_1 - 1.6 = 0$

Таблица к задаче 4.2

Элементы матрицы A задаются формулами:

$$a_{ij} = \frac{\ln(i+j)^3}{t} + C e^{-(i-j)^2}, \quad i, j = 1 \cdots m, \ t = m + 0.1N$$

здесь N – номер варианта, m – размерность матрицы, указанная в варианте, константа C заданы в индивидуальном варианте.

N	C	m	N	C	m	N	C	m	N	C	m
4.1.1	3.8	8	4.2.15	9.6	15	4.2.29	3.9	6	4.2.43	2.8	9
4.2.2	9.2	10	4.2.16	6.5	7	4.2.30	9.3	15	4.2.44	7.2	10
4.2.3	6.3	6	4.2.17	7.2	8	4.2.31	6.4	9	4.2.45	5.4	6
4.2.4	9.1	9	4.2.18	3.9	6	4.2.32	4.1	7	4.2.46	3.6	8
4.2.5	10.2	12	4.2.19	5.4	7	4.2.33	9.8	12	4.2.47	4.3	12
4.2.6	6.9	7	4.2.20	9.8	13	4.2.34	8.8	11	4.2.48	6.7	10
4.2.7	8.9	11	4.2.21	8.9	15	4.2.35	9.6	13	4.2.49	5.9	11
4.2.8	8.5	9	4.2.22	8.1	10	4.2.36	6.6	10	4.2.50	3.8	9
4.2.9	9.7	15	4.2.23	8.6	9	4.2.37	8.9	14	4.2.51	7.7	13
4.2.10	7.4	8	4.2.24	7.4	12	4.2.38	3.8	6	4.2.52	8.4	8
4.2.11	9.2	9	4.2.25	8.3	14	4.2.39	4.1	7	4.2.53	6.5	9
4.2.12	7.8	14	4.2.26	4.6	7	4.2.40	9.0	12	4.2.54	8.4	12
4.2.13	3.9	7	4.2.27	5.1	6	4.2.41	8.9	14	4.2.45	3.6	7
4.2.14	9.4	9	4.2.28	8.7	8	4.2.42	3.8	6	4.2.56	7.9	8

Вариант			Метод решения
$N=$ **1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43,49**			Метод минимальных невязок
$N=$ **2, 8, 14, 20, 26, 32, 38 , 44, 50**			Метод простой итерации с оптимальным параметром
$N=$ **3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45**			Метод минимальных поправок, B – диагональная матрица, содержащая главную диагональ матрицы A
$N=$ **4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46**			Метод наискорейшего спуска
$N=$ **5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47**			Метод Зейделя
$N=$ **6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48**			Метод сопряженных градиентов

Таблица к задаче 4.3

N	$F(x)$	N	$F(x)$	N	$F(x)$
4.3.1 4.3.31	xe^x	4.3.11 4.3.41	$x\cos(x)$	4.3. 21 4.3.51	$x^2(1-\cos(x))$
4.3.2 4.3.32	$\sin(x)$	4.3.12 4.3.42	$x^2(e^x-x-1)$	4.3.22 4.3.52	$x\sin(x)$
4.3.3 4.3.33	$e^{2x}-1$	4.3.13 4.3.43	$x\cos(x^2)$	4.3.23 4.3.53	x^2e^{-x}
4.3.4 4.3.34	$\sin(x^2)$	4.3.14 4.3.44	$\sin(2x)$	4.3.24 4.3.54	$(1-\cos(x))/x$
4.3.5 4.3.35	$x(e^x-1)$	4.3.15 4.3.45	$\sin(x)/x$	4.3.25 4.3.55	e^x-1
4.3.6 4.3.36	$\cos(x)$	4.3.16 4.3.46	$(e^x-x-1)x^3$	4.3.26 4.3.56	$1-\cos(x)$
4.3.7 4.3.37	$x(1-\cos(x))$	4.3.17 4.3.47	$3xe^x$	4.3.27 4.3.57	$x-\cos(x)$
4.3.8 4.3.38	$(e^x-1)x^2$	4.3.18 4.3.48	$x(e^x-x-1)$	4.3.28 4.3.58	$\cos(x^2)$
4.3.9 4.3.39	$x^2\cos(x)$	4.3.19 4.3.49	$x^2\sin(x)$	4.3.29 4.3.59	$x\sin(2x)$
4.3.10 4.3.40	e^x-x-1	4.3.20 4.3.50	x^2e^x	4.3.30 4.3.60	$x^2(e^x-1)$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.В.

Фрагмент решения задачи 4.1.0

Уравнения системы:

$$f1(x1,x2):=x2+1.5\cdot\cos(x1-1)-1$$

$$f2(x1,x2):=0.9\cdot x2^2+0.4\cdot x1^2-1$$

Локализация корней:

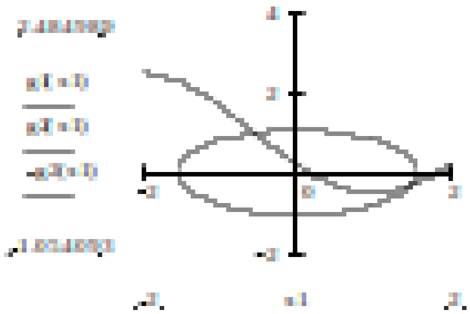
Первое уравнение, разрешенное относительно *x2:*

$$g1(x1):=1-1.5\cdot\cos(x1-1)$$

Второе уравнение, разрешенное относительно *x2:*

$$g2(x1) := \sqrt{\frac{1 - 0.4 \cdot x1^2}{0.9}}$$

$$x1 := -2, -2 + 0.01 \ldots 2$$



Первый корень:
Начальное приближение:
$x1 := 1.7 \quad x2 := -0.5$
Полученное приближенное решение:

$$xr1 = \begin{bmatrix} 1.5124471 \\ -0.3073209 \end{bmatrix}$$

Задача 4.3. Для экономизации степенного ряда необходимо воспользоваться многочленами Чебышёва и формулами экономизации степенного ряда.
Многочлены Чебышёва $T_n(x)$ могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.
Формулы экономизации степенного ряда:

$$x = T_1,\quad x^2 = \frac{1}{2}(1 + T_2),\quad x^3 = \frac{1}{4}(3x + T_3),\quad x^4 = \frac{1}{8}(8x^2 - 1 + T_4),\quad x^5 = \frac{1}{16}(20x^3 - 5x + T_5)$$

$$x^6 = \frac{1}{32}(48x^4 - 18x^2 + 1 + T_6),\quad x^7 = \frac{1}{64}(112x^5 - 56x^3 + 7x + T_7),\quad x^8 = \frac{1}{128}(256x^6 - 160x^4 + 32x^2 - 1 + T_8)$$

$$x^9 = \frac{1}{256}(576x^7 - 432x^5 + 120x^3 - 9x + T_9),\quad x^{10} = \frac{1}{512}(1280x^8 - 1120x^6 + 400x^4 - 50x^2 + 1 + T_{10})$$

$$x^{11} = \frac{1}{1024}(2816x^9 - 2816x^7 + 1232x^5 - 220x^3 + 11x + T_{11})$$

Рассмотрим конкретный пример. Разложим в окрестности нуля функцию $f(x) = e^x \approx S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Несложно проверить, что для вычисления e^x на отрезке [-1,1] с точностью ε^{-8} необходимо разложение до n=11: $|e^x - S_{11}(x)| < 10^{-8}, \quad x \in [-1,1]$.
Попробуем уменьшить количество слагаемых используя формулы экономизации так, чтобы точность сохранилась. Подставим $x^{11} = \frac{1}{1024}(2816x^9 - 2816x^7 + 1232x^5 - 220x^3 + 11x + T_{11})$ в $S_{11}(x)$ и после группирования слагаемых получим $S_{11}(x) = \tilde{S}_{10}(x) + \frac{1}{1024 \times 11!}T_{11}$. Отбрасывая $\frac{1}{1024 \times 11!}T_{11}$ мы приходим к новому приближению e^x с меньшим количеством слагаемых и дающее

требуемую точность: $|e^x - \tilde{S}_{10}(x)| < 10^{-8}, \quad x \in [-1,1]$. Повторяя аналогично с x^{10} и т.д. мы приходим к тому, что ряд можно сократить до $\tilde{S}_9(x)$ и сохранить необходимую точность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.