Autres Systèmes Déductifs
Exercice 2

Logique des Propositions

Autres Systèmes déductifs

-Système $(\neg, \rightarrow)$

-Système $(\neg, \vee)$

- Système (….)

Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Système Déductif de $\mathcal{L}_p$

=

{ Ensemble de règles associées aux connecteurs }

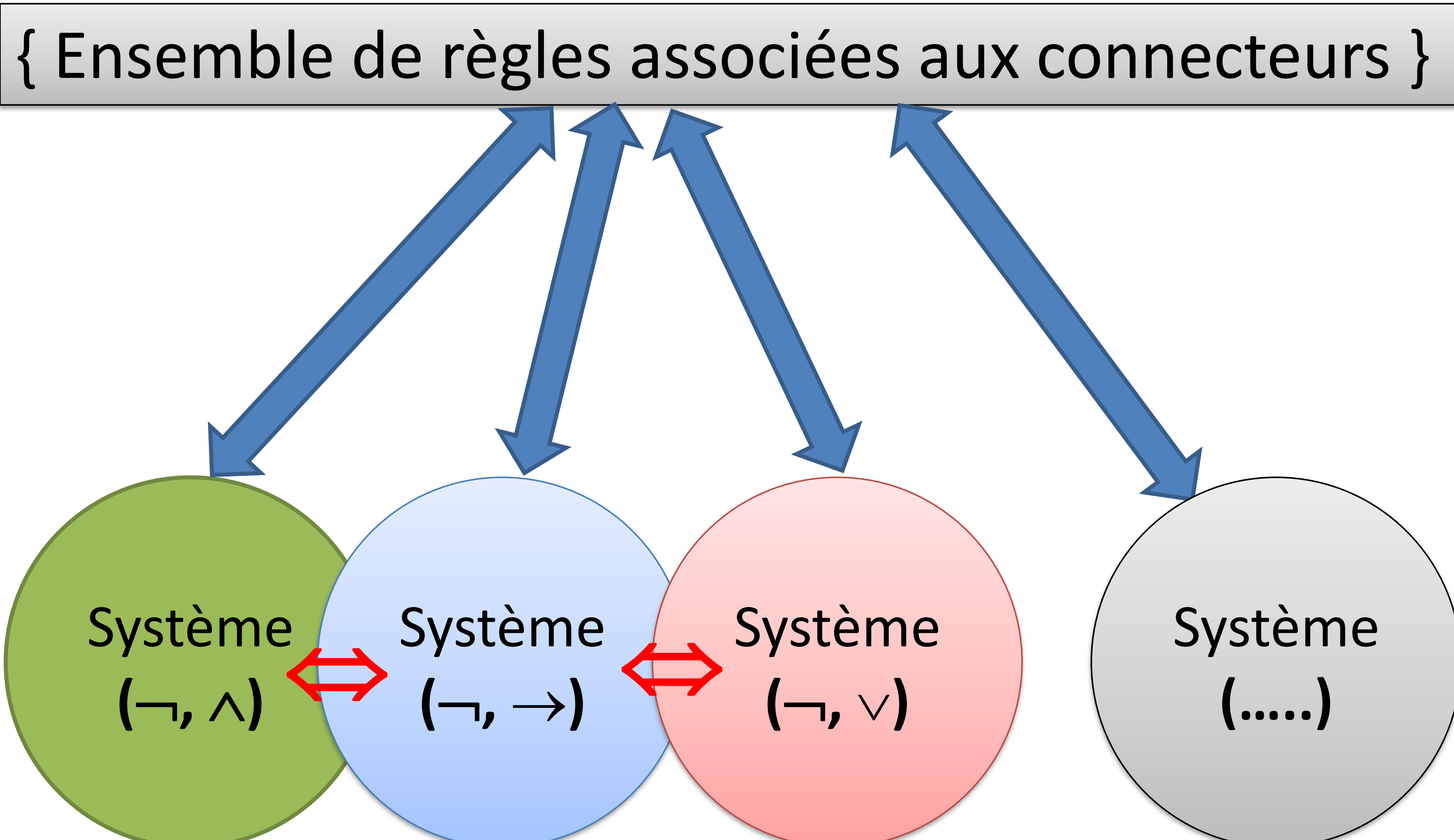
Système

($\neg$, $\wedge$)

=

{ (E $\wedge$) , (I $\wedge$) , (E$\neg$) , (I$\neg$) }

Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions



Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

<u>Equivalences entre les différents systèmes déductifs (Exo2)</u>

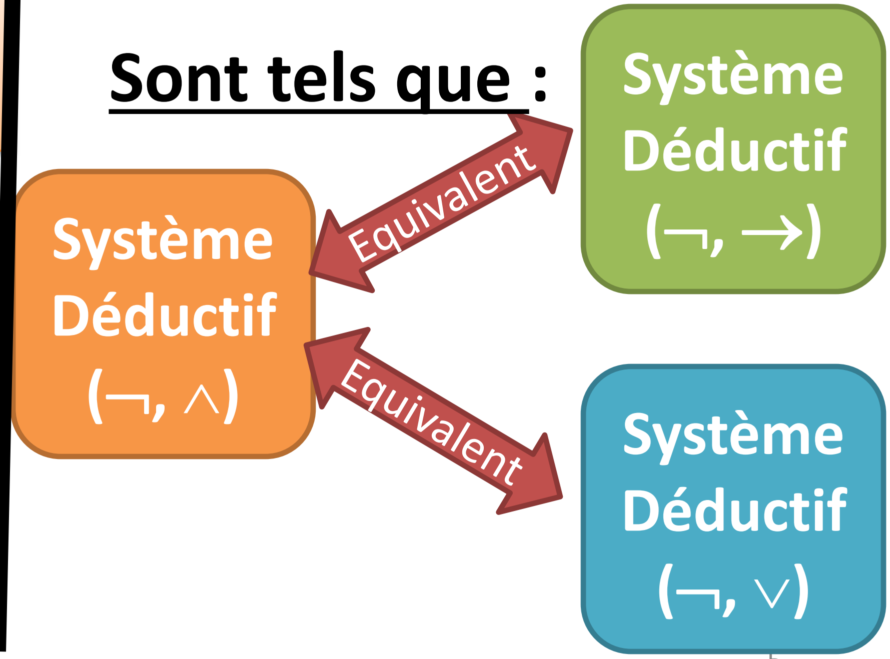
Le But est d'arriver à dire, que toute déduction (démonstration) faite dans un système déductif pourra être effectuée aussi dans un autre système déductif équivalent

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles : $\{ (E \wedge), (I \wedge), (E\neg), (I\neg) \}$

Le système déductif $(\neg, \rightarrow)$ défini par les règles : $\{ (E \rightarrow), (I \rightarrow), (E\neg), (I\neg) \}$

Le système déductif $(\neg, \vee)$ défini par les règles : $\{ (E \vee), (I \vee), (E\neg), (I\neg) \}$

<u>Sont tels que</u> :



Système déductif (¬, ∧)

Rappel des Règles

Le système déductif (¬, ∧)

- **Les règles du connecteur « ∧ » : (E ∧) et (I ∧)**

1ere Forme :

$$\frac{\alpha \land \beta}{\alpha} \quad (\mathbf{E} \land)$$

2eme Forme :

$$\frac{\alpha \land \beta}{\beta} \quad (\mathbf{E} \land)$$

Règle d'Elimination du « ∧ »

$$\boldsymbol{\alpha \land \beta \vdash \alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha \land \beta \vdash \beta}$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \land \beta} \quad (\mathbf{I} \land)$$

Règle d'Introduction du « ∧ »

$$\boldsymbol{\alpha \ , \ \beta \vdash \alpha \land \beta}$$

Système déductif (¬, ∧)

Rappel des Règles

Le système déductif (¬, ∧)

- **Les règles du connecteur « ¬ » : (E ¬) et (I ¬)**

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ (E\neg)$$

Règle d'Elimination du « ¬ »

$$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\alpha}\\ \vdots \\ \beta \qquad \perp \qquad \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}\ (I\neg)$$

Règle d'Introduction du « ¬ »

$$\alpha \vdash \perp \quad \Rightarrow \quad \vdash \neg\alpha$$

Autres Systèmes déductifs

Le système déductif (¬, →)

- **Les règles du connecteur « ¬ » : (E¬) et (I¬)**

C'est les mêmes règles vues précédemment

- **Les règles du connecteur « → » : (E→) et (I→)**

$$\frac{\alpha\to\beta \qquad \alpha}{\beta}\ (\mathbf{E}\to)$$

Règle d'Elimination de la « → »

$$\alpha\to\beta\ ,\ \alpha\ \vdash\ \beta$$

$$\begin{array}{c} \dots\dots\dots\ \cancel{\alpha}\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \beta \\ \hline \alpha\to\beta \end{array}\ (\mathbf{I}\to)$$

Règle d'Introduction de la « → »

$$\alpha\ \vdash\ \beta\ \Rightarrow\ \vdash\ \alpha\to\beta$$

Autres Systèmes déductifs

Le système déductif $(\neg, \vee)$

- **<u>Les règles du connecteur « $\neg$ » : (E$\neg$) et (I$\neg$)</u>**

C'est les mêmes règles vues précédemment

- **<u>Les règles du connecteur « $\vee$ » : (E $\vee$) et (I $\vee$)</u>**

1ere Forme :

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ (\mathbf{I} \vee)$$

2eme Forme :

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\ (\mathbf{I} \vee)$$

Règle d'Introduction du « $\vee$ »

$$\boldsymbol{\alpha} \vdash \alpha \vee \beta$$

$$\beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\alpha}\\ \vdots\\ \delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{\beta}\\ \vdots\\ \delta\end{array} \qquad \alpha \vee \beta}{\delta}\ (\mathbf{E} \vee)$$

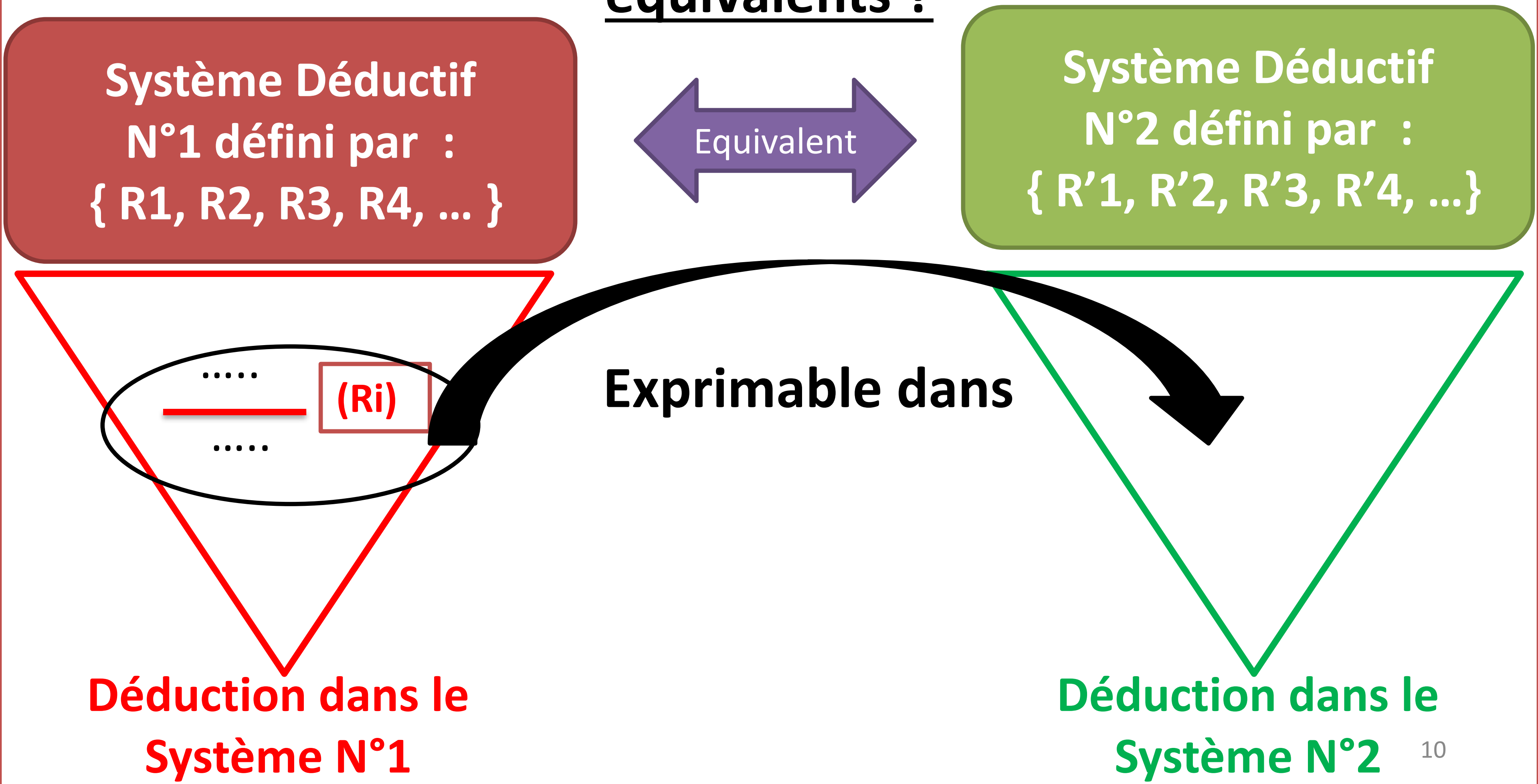
Règle d'Elimination du « $\vee$ »

$$\boldsymbol{\alpha} \vdash \delta \quad \text{et} \quad \beta \vdash \delta$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \vee \beta \vdash \delta$$

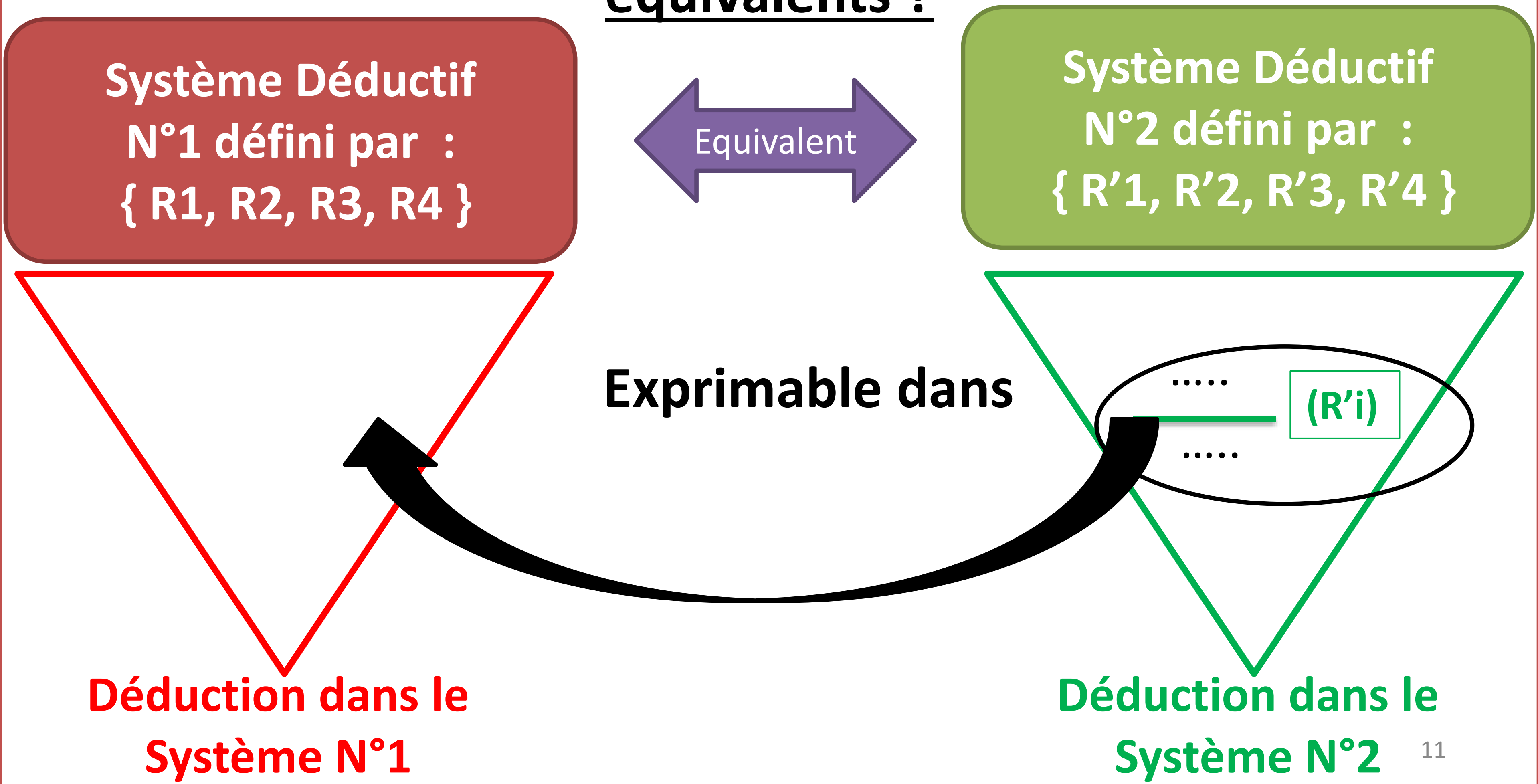
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Comment monter que deux (02) systèmes déductifs sont équivalents ?



Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

<u>Comment monter que deux (02) systèmes déductifs sont équivalents ?</u>



Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Montrons que :

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E \wedge) , (I \wedge) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \rightarrow)$ défini par les règles :
$\{ (E \rightarrow) , (I \rightarrow) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Déduction dans le Système $(\neg, \wedge)$

Déduction dans le Système $(\neg, \rightarrow)$

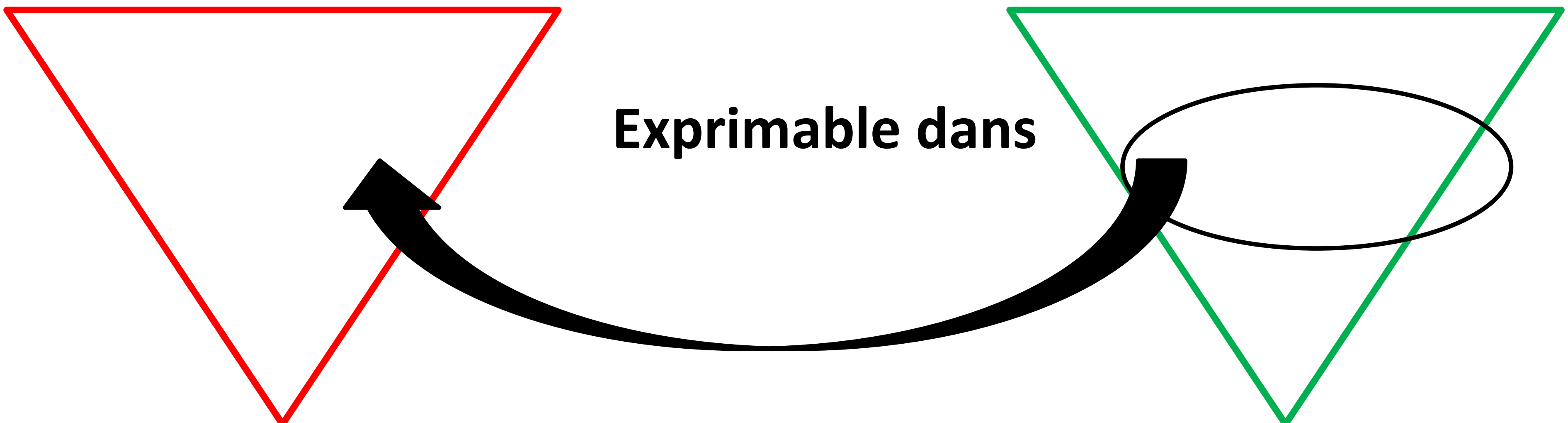
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 1er sens

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E\wedge), (I\wedge), (E\neg), (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \rightarrow)$ défini par les règles :
$\{ (E\rightarrow), (I\rightarrow), (E\neg), (I\neg) \}$



Déduction dans le Système $(\neg, \wedge)$

Déduction dans le Système $(\neg, \rightarrow)$

Autres Systèmes déductifs

1. Les règles de $\rightarrow$ dans le système $(\neg, \wedge)$:

($E\rightarrow$) : $\alpha \rightarrow \beta\ ,\ \alpha \vdash \beta$

($I\rightarrow$) : $\alpha \vdash \beta \Rightarrow\ \vdash \alpha \rightarrow \beta$

<u>Exercice 1</u>:

Démontrer les déductions suivantes dans le langage $L_P(\neg, \wedge)$:

a1) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

a2) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

a3) $\beta \wedge \neg\beta \vdash \alpha$ a4) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

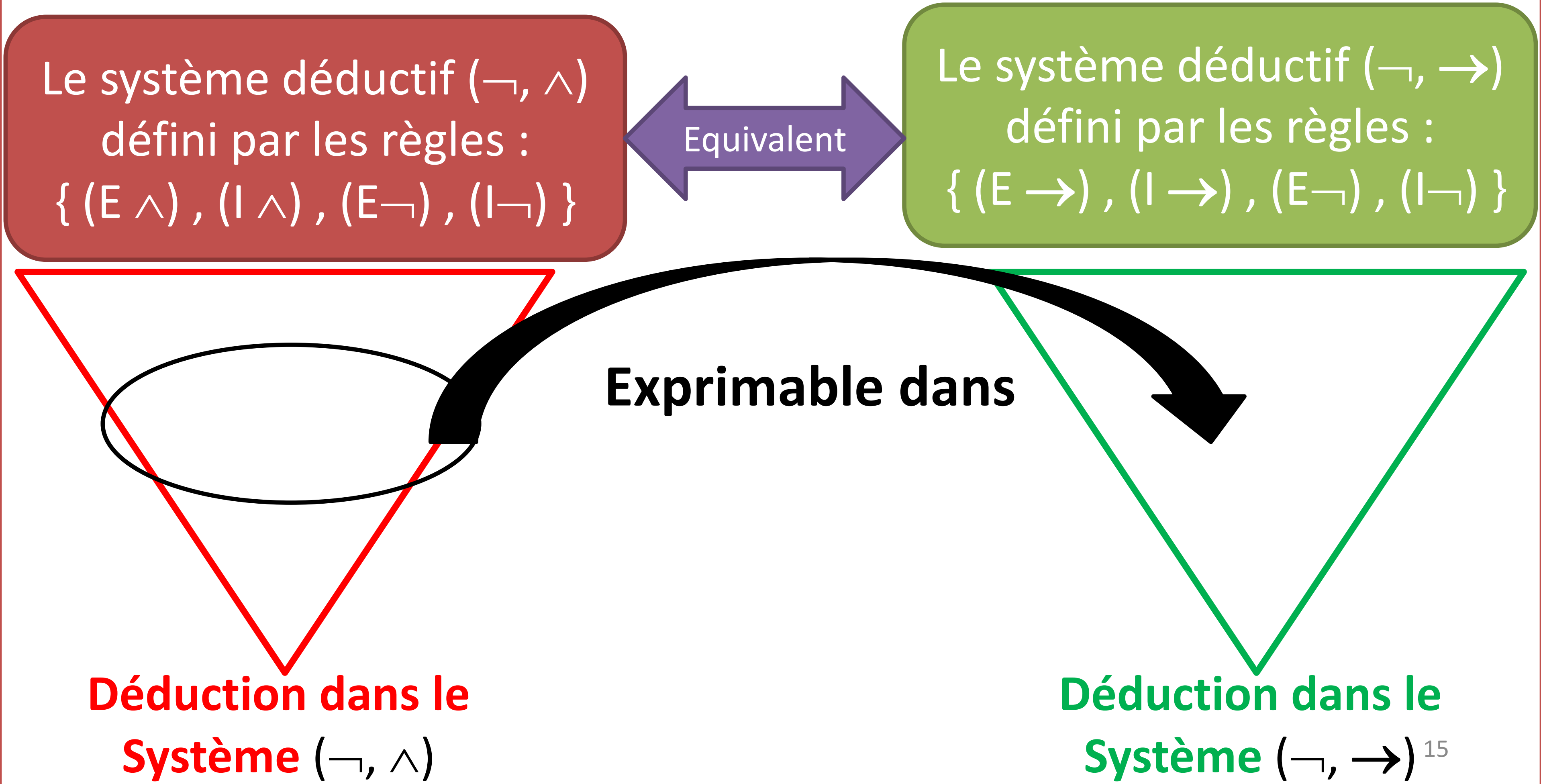
b1) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ b2) $\beta \vdash \alpha \vee \beta$ b3) $(\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta) \Rightarrow \alpha \vee \beta \vdash \delta$

c1) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$ c2) $\alpha \vdash \beta \Rightarrow\ \vdash \alpha \rightarrow \beta$ c3) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \alpha \vdash \beta$

d1) $\alpha, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \beta$ d2) $\beta, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha$ d3) $\alpha \vdash \beta$ et $\beta \vdash \alpha \Rightarrow\ \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 2eme sens



Autres Systèmes déductifs

Exercice N°2

Enoncé de l'exercice N°2 : Montrer les déductions suivantes dans le Système déductif **($\neg$, $\rightarrow$)**

- $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ ➡ Règle (E$\wedge$) 1ère forme
- $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ ➡ Règle (E$\wedge$) 2ème forme
- $\alpha \;,\; \beta \vdash \alpha \wedge \beta$ ➡ Règle (I$\wedge$)

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}\mathbf{p}(\neg, \rightarrow)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\alpha \rightarrow \neg \beta) \vdash \alpha$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

$$\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \vdash \alpha$$

On suppose : $\neg\alpha$ et α

On a : $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha} \quad \cancel{\neg\alpha}}{\neg\beta}\ \text{Contradiction (a4)}}{\alpha \rightarrow \neg\beta}\ (I \rightarrow) \quad \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)}{\perp}}{\neg\neg\alpha}\ (I \neg)}{\alpha}\ (E\neg)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}\mathbf{p}(\neg, \rightarrow)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\alpha \rightarrow \neg \beta) \vdash \beta$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

$$\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \vdash \beta$$

On suppose : α et $\neg\beta$

On a : $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha} \quad \cancel{\neg\beta}}{\alpha \rightarrow \neg\beta}\,(I \rightarrow) \qquad \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)}{\perp}}{\neg\neg\beta}\,(I \neg)$$

$$\dfrac{\neg\neg\beta}{\beta}\,(E\neg)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha , \beta \vdash \alpha \wedge \beta$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}$**p**$(\neg, \rightarrow)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\alpha , \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

$$\alpha \, , \, \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

On suppose : $\alpha \rightarrow \neg \beta$

On a : α et β

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \cancel{\rightarrow \neg} \beta \qquad \alpha}{\neg \beta}\,(E\rightarrow) \qquad \qquad \beta}{\dfrac{\perp}{\neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)}\,(I\neg)}$$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

CONCLUSION

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E \wedge) , (I \wedge) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \rightarrow)$ défini par les règles :
$\{ (E \rightarrow) , (I \rightarrow) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Quelques déductions dans le système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Application 1

1. Montrer le théorème suivant dans le système déductif $(\neg, \rightarrow)$:

$$\vdash (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta)$$

Donc, cela revient à :

$$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha \vdash (\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

Donc, cela revient à :

$$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha \quad , \quad \neg \beta \rightarrow \alpha \vdash \beta$$

Système déductif (¬, →)

Application 1

$$\neg\,\beta \to \neg\,\alpha \quad , \quad \neg\,\beta \to \alpha \ \ \vdash \ \ \beta$$

On suppose : $\neg\,\beta$

On a : $\neg\,\beta \to \neg\,\alpha$ et $\neg\,\beta \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\beta} \qquad \neg\,\beta \to \neg\,\alpha}{\neg\,\alpha}\,(E\to) \qquad\qquad \dfrac{\cancel{\neg\beta} \qquad \neg\,\beta \to \alpha}{\alpha}\,(E\to)}{\perp}}{\neg\,\neg\beta}\,(I\,\neg)}{\beta}\,(E\neg)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Application 2

2. Montrer dans le système déductif $(\neg, \rightarrow)$:

$$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)\ ,\ \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \delta$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)\ ,\ \alpha \rightarrow \beta\ ,\ \alpha \vdash \delta$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Application 2

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)\ ,\ \alpha \rightarrow \beta\ ,\ \alpha \vdash \delta$$

On a : $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$, $\alpha \rightarrow \beta$ et α

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}\,(E\rightarrow) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)}{\beta \rightarrow \delta}\,(E\rightarrow)}{\delta}\,(E\rightarrow)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$
Application 3

3. Montrer dans le système déductif **$(\neg, \rightarrow)$**

$$P \rightarrow Q \rightarrow (R \rightarrow S), \neg S \vee \neg Q , P \rightarrow Q \vdash \neg R \vee \neg P$$

$$\alpha \vee \beta =_{def} \neg \alpha \rightarrow \beta$$

Donc, cela revient à :

$$P \rightarrow Q \rightarrow (R \rightarrow S), \neg\neg S \rightarrow \neg Q , P \rightarrow Q \vdash \neg\neg R \rightarrow \neg P$$

Système déductif (¬, →)

Application 3

$$P \to Q \to (R \to S),\ \neg\neg S \to \neg Q\ ,\ P \to Q \vdash \neg\neg R \to \neg P$$

On a : $P \to Q \to (R \to S)$, $\neg\neg S \to \neg Q$ et $P \to Q$

On suppose : P et $\neg\neg R$

$(P \to Q) \to (R \to S)$ $\quad P \to Q$ $\quad \neg\neg S \to \neg Q$ $\quad \cancel{P}$ $\quad \cancel{\neg\neg R}$

$$\dfrac{(P \to Q) \to (R \to S) \qquad P \to Q}{R \to S}\ (E\to)$$

$$\dfrac{\cancel{\neg\neg R}}{R}\ (E\neg)$$

$$\dfrac{R \to S \qquad R}{S}\ (E\to)$$

$$\dfrac{S}{\neg\neg S}\ \boxed{(a1)}$$

$$\dfrac{P \to Q \qquad \cancel{P}}{Q}\ (E\to) \qquad \dfrac{\neg\neg S \qquad \neg\neg S \to \neg Q}{\neg Q}\ (E\to)$$

$$Q \qquad \bot \qquad \neg Q$$

$$\dfrac{\bot}{\neg P}\ (I\neg)$$

$$\dfrac{\neg P}{\neg\neg R \to \neg P}\ (I\to)$$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Montrons que :

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
{ $(E \wedge)$, $(I \wedge)$, $(E\neg)$, $(I\neg)$ }

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \vee)$ défini par les règles :
{ $(E \vee)$, $(I \vee)$, $(E\neg)$, $(I\neg)$ }

Déduction dans le Système $(\neg, \wedge)$

Déduction dans le Système $(\neg, \vee)$

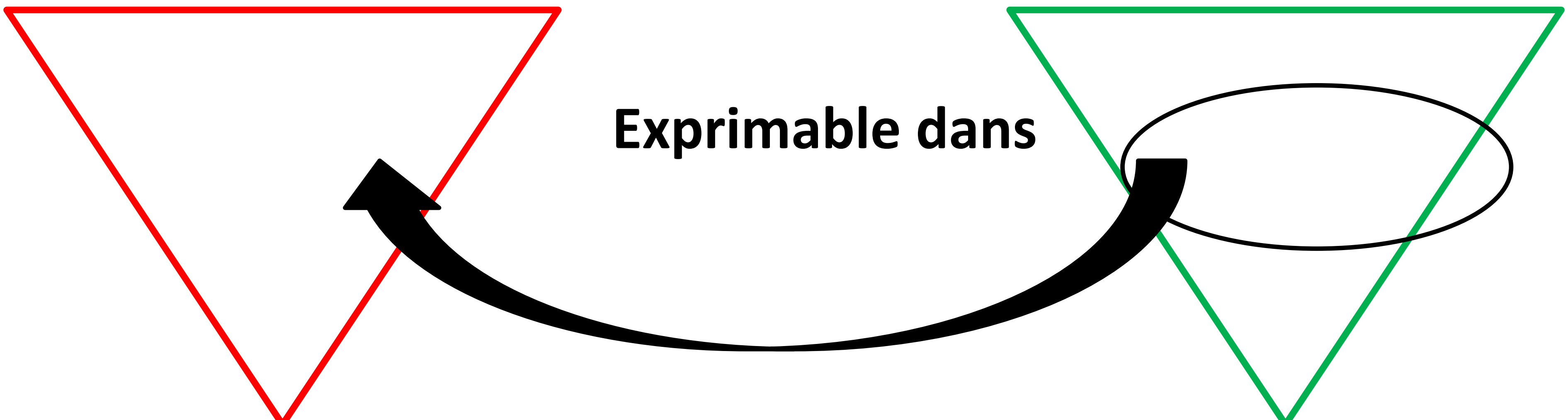
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 1er sens

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E \wedge) , (I \wedge) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \vee)$ défini par les règles :
$\{ (E \vee) , (I \vee) , (E\neg) , (I\neg) \}$



Déduction dans le Système $(\neg, \wedge)$

Déduction dans le Système $(\neg, \vee)$

Autres Systèmes déductifs

Les règles de $\vee$ dans le système $(\neg, \wedge)$:

(I$\vee$) 1er: $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ -- **(I$\vee$) 2eme:** $\beta \vdash \alpha \vee \beta$

(E$\vee$) : $\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta \Rightarrow \alpha \vee \beta \vdash \delta$

Exercice 1:

Démontrer les déductions suivantes dans le langage $L_P(\neg,\wedge)$:

a1) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

a2) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

a3) $\beta \wedge \neg\beta \vdash \alpha$ a4) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

$\boxed{\text{b1) } \alpha \vdash \alpha\vee\beta \quad \text{b2) } \beta \vdash \alpha\vee\beta}$ $\boxed{\text{b3) } (\alpha \vdash \delta \text{ et } \beta \vdash \delta) \Rightarrow \alpha\vee\beta \vdash \delta}$

c1) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ c2) $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \alpha\to\beta$ c3) $\vdash \alpha\to\beta \Rightarrow \alpha \vdash \beta$

d1) $\alpha, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \beta$ d2) $\beta, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha$ d3) $\alpha \vdash \beta$ et $\beta \vdash \alpha \Rightarrow \vdash \alpha\leftrightarrow\beta$

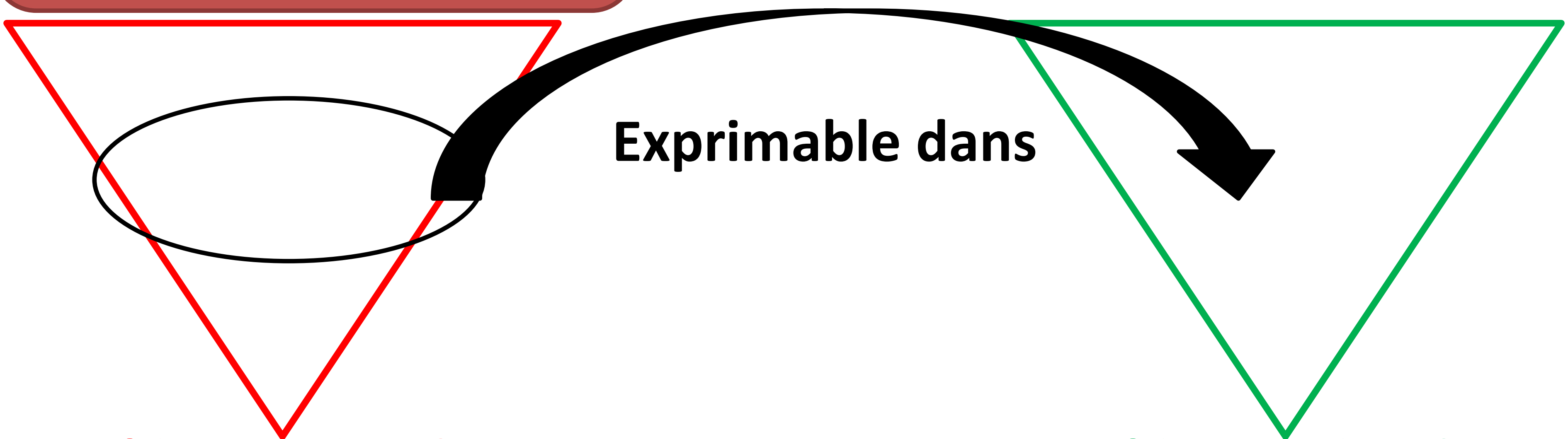
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 2^{eme} sens

Le système déductif (¬, ∧) défini par les règles :
{ (E ∧) , (I ∧) , (E¬) , (I¬) }

Equivalent

Le système déductif (¬, ∨) défini par les règles :
{ (E ∨) , (I ∨) , (E¬) , (I¬) }



Déduction dans le Système (¬, ∧)

Déduction dans le Système (¬, ∨)

Autres Systèmes déductifs

Exercice N°2

Enoncé de l'exercice N°2 : Montrer les déductions suivantes dans le Système déductif **($\neg$, $\vee$)**

- $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ ➡ Règle (E$\wedge$) 1ère forme
- $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ ➡ Règle (E$\wedge$) 2ème forme
- $\alpha \ , \ \beta \vdash \alpha \wedge \beta$ ➡ Règle (I$\wedge$)

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}$**p**$(\neg, \vee)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\neg\, \alpha \vee \neg\, \beta) \vdash \alpha$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

$$\neg(\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta) \vdash \alpha$$

On suppose : $\neg\alpha$

On a : $\neg(\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta)$

$$\dfrac{\cancel{\neg\alpha}}{\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta}\ (\mathrm{I}\vee) \qquad\qquad \neg(\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta)$$

$$\dfrac{\dfrac{\perp}{\neg\,\neg\,\alpha}\ (\mathrm{I}\neg)}{\alpha}\ (\mathrm{E}\neg)$$

Système déductif **($\neg$, $\vee$)**

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}$**p**($\neg$, $\vee$),

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \beta$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

$$\neg(\neg\, \alpha \vee \neg\, \beta) \vdash \beta$$

On suppose : $\neg\, \beta$

On a : $\neg(\neg\, \alpha \vee \neg\, \beta)$

$$\dfrac{\cancel{\neg\, \beta}}{\neg\, \alpha \vee \neg\, \beta}\ (\mathrm{I} \vee) \qquad \neg(\neg\, \alpha \vee \neg\, \beta)$$

$$\bot$$

$$\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg\, \neg\, \beta}\ (\mathrm{I}\, \neg)}{\beta}\ (\mathrm{E}\neg)$$

Système déductif (¬, ∨)

Exercice 2

Montrer : $\alpha , \beta \vdash \alpha \wedge \beta$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}$**p**(¬, ∨),

on doit remplacer le ∧ par sa définition.

Cela revient à :

$$\alpha , \beta \vdash \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

$$\alpha , \beta \vdash \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$$

On suppose : $\neg \alpha \vee \neg \beta$, $\neg \alpha$ **et** $\neg \beta$

On a : α et β

$\cancel{\neg \alpha \vee \neg \beta}$

$\cancel{\neg \alpha}$ $\quad \alpha$

$\neg(\neg \alpha \quad \neg \beta)$ Contra (a4)

$\cancel{\neg \beta}$ $\quad \beta$

$\neg(\neg \alpha \quad \neg \beta)$ Contra (a4)

$\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$ $(E \vee)$

$\perp$

$\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$ $(I \neg)$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

CONCLUSION

Le système déductif ($\neg$, $\wedge$) défini par les règles :
{ (E $\wedge$) , (I $\wedge$) , (E$\neg$) , (I$\neg$) }

Equivalent

Le système déductif ($\neg$, $\vee$) défini par les règles :
{ (E $\vee$) , (I $\vee$) , (E$\neg$) , (I$\neg$) }

Fin TD sur les systèmes déductifs