Logique des Propositions

Corrigé Série N°5
Exo4

Système Déductif

USTHB
Faculté Informatique
L. KADDOURI

Système déductif **(¬, ∧, ∀)**

N°1 :

Montrer la déduction suivante :

$$\forall x\ \alpha(x) \vdash \exists x\ \alpha(x)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif **(¬, ∧, ∀)** , on doit remplacer ∃ par sa définition.

Cela revient à montrer :

$$\forall x\ \alpha(x) \vdash \neg\ \forall x\ \neg\alpha(x)$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$\forall x\, \alpha(x) \vdash \neg\forall x\, \neg\alpha(x)$

$$\cfrac{\cfrac{\forall x\,\alpha(x)}{\alpha(x)}\,(E\,\forall) \qquad \cfrac{\cancel{\forall x\,\neg\alpha(x)}}{\neg\alpha(x)}\,(E\,\forall)}{\cfrac{\bot}{\neg\,\forall x\,\neg\alpha(x)}\,(I\,\neg)}$$

x libre pour x

x libre pour x

Système déductif (¬, ∧, ∀)

N°2 :

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x\, \alpha(x) \to \forall x\, (\alpha(x) \vee \beta(x))$$

Utilisons le théorème vu dans le chapitre précédent : $\Gamma, \alpha 1 \vdash \alpha 2 \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha 1 \to \alpha 2$

Donc, c'est équivalent ⇔ à faire :

$$\forall x\, \alpha(x) \vdash \forall x\, (\alpha(x) \vee \beta(x))$$

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

N°2 (suite) :

Etant donné qu'on est dans le système déductif **$(\neg, \wedge, \forall)$** , on doit remplacer le $\vee$ par sa définition.
Cela revient à montrer :

$$\forall x\, \alpha(x) \vdash \forall x\, \neg(\neg\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$\forall x\, \alpha(x) \vdash \forall x\, \neg(\neg\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$

$$\dfrac{\forall x\, \alpha(x)}{\alpha(x)}\,(E\,\forall) \qquad\qquad \dfrac{\neg\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)}{\neg\alpha(x)}\,(E\,\wedge)$$

x libre pour x

$$\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg(\neg\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))}\,(I\,\neg)}{\forall x\, \neg(\neg\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))}\,(I\,\forall)$$

x non libre dans les hypothèses non éliminées

Système déductif (¬, ∧, ∀)

N°3 :

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x\,(\alpha(x) \to \beta\,(x)) \to (\exists x\,\alpha(x) \to \exists x\,\beta(x))$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

$$\forall x\,(\alpha(x) \to \beta\,(x)) \vdash \exists x\,\alpha(x) \to \exists x\,\beta(x)$$

Qui est équivalent ⇔ à :

$$\forall x\,(\alpha(x) \to \beta\,(x))\,,\ \exists x\,\alpha(x) \vdash \exists x\,\beta(x)$$

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

N°3 (suite) :

Etant donné qu'on est dans le système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$, on doit remplacer le $\exists$ et $\rightarrow$ par leur définition respective .

Cela revient à montrer :

$$\forall x \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)) , \neg\forall x \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x \neg\beta(x)$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$$\forall x\, \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)),\ \neg\forall x\, \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\, \neg\beta(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))}{\neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))}\,(E\ \forall) \qquad \dfrac{\cancel{\alpha(x)} \qquad \dfrac{\cancel{\forall x\, \neg\beta(x)}}{\neg\beta(x)}\,(E\ \forall)}{\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)}\,(I\ \wedge)}{\bot}}{\neg\alpha(x)}\,(I\ \neg)}{\forall x\, \neg\alpha(x)}\,(I\ \forall) \qquad \neg\forall x\, \neg\alpha(x)}{\bot}}{\neg\forall x\, \neg\beta(x)}\,(I\ \neg)$$

x libre pour x

x libre pour x

x non libre dans les hypothèses non éliminées

Système déductif **(¬, ∧, ∀)**

N°4 Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \exists x\,(\alpha(x) \rightarrow \forall x\, \alpha(x))$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif **(¬, ∧, ∀)** , on doit remplacer le $\exists$ et $\rightarrow$ par leur définition respective .

Cela revient à montrer :

$$\vdash \neg\forall x \neg\,(\alpha(x) \rightarrow \forall x\, \alpha(x))$$

$$\vdash \neg\forall x \neg \neg(\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \alpha(x))$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$$\vdash \neg\forall x \neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \alpha(x))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x \neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \alpha(x))}}{\neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \alpha(x))}\,(E\,\forall)}{\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \alpha(x)}\,(E\,\neg)}{\alpha(x) \qquad\qquad \neg\forall x\, \alpha(x)}\,(E\,\wedge)\ \textbf{X 2 Fois}$$

x libre pour x

$$\dfrac{\alpha(x)}{\forall x\, \alpha(x)}\,(I\,\forall)$$

x non libre dans les hypothèses non éliminées

$$\dfrac{\forall x\, \alpha(x) \qquad \neg\forall x\, \alpha(x)}{\dfrac{\bot}{\neg\forall x \neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \alpha(x))}\,(I\,\neg)}$$

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

N°5 :

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (\forall x\, \alpha(x) \rightarrow \forall x\, \beta(x))$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent $\Leftrightarrow$ à :

$$\forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \vdash \forall x\, \alpha(x) \rightarrow \forall x\, \beta(x)$$

Qui est équivalent $\Leftrightarrow$ à :

$$\forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) , \forall x\, \alpha(x) \vdash \forall x\, \beta(x)$$

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

N°5 (suite) :

Etant donné qu'on est dans le système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$, on doit remplacer la $\rightarrow$ par sa définition.
Cela revient à montrer :

$$\forall x \neg(\alpha(x) \wedge \neg \beta(x)) , \forall x \, \alpha(x) \vdash \forall x \, \beta(x)$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$$\forall x\, \neg(\alpha(x) \wedge \neg\, \beta(x))\ ,\ \forall x\, \alpha(x) \vdash \forall x\, \beta(x)$$

$$\dfrac{\forall x\, \neg(\alpha(x) \wedge \neg\, \beta(x))}{\neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta\, (x))}\ (E\ \forall)$$

x libre pour x

$$\dfrac{\forall x\, \alpha(x)}{\alpha(x)}\ (E\ \forall)$$

x libre pour x

$$\dfrac{\alpha(x) \qquad \cancel{\neg\beta(x)}}{\alpha(x) \wedge \neg\beta\, (x)}\ (I\ \wedge)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg\neg\beta(x)}\ (I\ \neg)}{\beta(x)}\ (E\ \neg)}{\forall x\, \beta(x)}\ (I\ \forall)$$

x non libre dans les
hypothèses
non éliminées

Système déductif **($\neg$, $\wedge$, $\forall$)**

N°6 : Montrer la déduction suivante :

$$(\forall x\, \alpha(x)) \vee \forall x\, \beta(x) \vdash \alpha(x) \vee \beta(x)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif **($\neg$, $\wedge$, $\forall$)** , on doit remplacer le $\vee$ par sa définition.

Cela revient à montrer :

$$\neg(\neg(\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg \forall x\, \beta(x)) \vdash \neg(\neg\, \alpha(x) \wedge \neg\, \beta(x))$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$\neg(\neg(\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg \forall x\, \beta(x)) \vdash \neg(\neg \alpha(x) \wedge \neg \beta(x))$

$\neg(\neg(\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg \forall x\, \beta(x))$ $\quad \cancel{\forall x\, \alpha(x)}$ $\quad \cancel{\forall x\, \beta(x)}$ $\quad \cancel{\neg \alpha(x) \wedge \neg \beta(x)}$

(E ∀) x libre pour x $\quad$ (E ∀) x libre pour x $\quad$ (E ∧) x2 fois

$\alpha(x)$ $\quad \beta(x)$ $\quad \neg\alpha(x)$ $\quad \neg\beta(x)$

$\bot$

(I ¬)

$\neg\forall x\, \beta(x)$

$\bot$

(I ¬)

$\neg\forall x\, \alpha(x)$

(I ∧)

$\neg(\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg \forall x\, \beta(x)$

$\bot$

(I ¬)

$\neg(\neg \alpha(x) \wedge \neg \beta(x))$

Système déductif **$(\neg, \wedge, \forall)$**

N°7 :

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x\, (\alpha(x) \vee \beta\, (x)) \rightarrow (\forall x\, \alpha(x)) \vee \exists x\, \beta(x)$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent $\Leftrightarrow$ à :

$$\forall x\, (\alpha(x) \vee \beta\, (x)) \vdash (\forall x\, \alpha(x)) \vee \exists x\, \beta(x)$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

N°7 (suite) :

Etant donné qu'on est dans le système déductif **(¬, ∧, ∀)** , on doit remplacer le ∨ et ∃ par leur définition respective.

Cela revient à montrer :

$$\forall x \neg (\neg\alpha(x) \wedge \neg \beta (x)) \vdash \neg (\neg\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\neg\forall x \neg\beta(x)$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$$\forall x \neg (\neg\alpha(x) \wedge \neg \beta (x)) \vdash \neg (\neg\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\neg\forall x \neg\beta(x))$$

$\forall x \neg (\neg\alpha(x) \wedge \neg \beta (x))$ (E ∀)

x libre pour x

$\neg (\neg\alpha(x) \wedge \neg \beta (x))$

$\cancel{\neg\alpha(x)}$

$\cancel{(\neg\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\neg\forall x \neg\beta(x)}$ (E ∧)

2Fois

$\neg\forall x\, \alpha(x)$

$\neg\neg\forall x \neg\beta(x)$ (E ¬)

$\forall x \neg\beta(x)$ (E ∀)

$\neg\beta(x)$

x libre pour x

(I ∧)

$(\neg\alpha(x) \wedge \neg \beta (x))$

$\perp$ (I ¬)

$\neg \neg \alpha(x)$ (E ¬)

$\alpha(x)$ (I ∀)

x non libre dans les hypothèses non éliminées

$\forall x\, \alpha(x)$

$\perp$ (I ¬)

$\neg (\neg\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\neg\forall x \neg\beta(x))$

Système déductif **($\neg$, $\wedge$, $\forall$)**

N°8 :

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash (\exists x\, \alpha(x) \rightarrow \forall x\, \beta(x)) \rightarrow \forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent $\Leftrightarrow$ à :

$$(\exists x\, \alpha(x) \rightarrow \forall x\, \beta(x)) \vdash \forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

N°8 (suite) :

Etant donné qu'on est dans le système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$, on doit remplacer la $\rightarrow$ et $\exists$ par leur définition respective.

Cela revient à montrer :

$$(\neg\forall x\, \neg\alpha(x) \rightarrow \forall x\, \beta(x)) \vdash \forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$

$$\neg(\neg\forall x\, \neg\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \beta(x)) \vdash \forall x\, \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$$\neg(\neg\forall x\, \neg\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \beta(x)) \vdash \forall x\, \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$$

$\neg(\neg\forall x\, \neg\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \beta(x))$

$\cancel{\forall x\, \neg\alpha(x)}$ (E ∀) ; $\cancel{\forall x\, \beta(x)}$ (E ∀) ; $\cancel{\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)}$ (E ∧) 2Fois

x libre pour x

x libre pour x

$\neg\alpha(x)$; $\beta(x)$; $\alpha(x)$; $\neg\beta(x)$

$\perp$ (I ¬)

$\neg\forall x\, \neg\alpha(x)$

$\perp$ (I ¬)

$\neg\forall x\, \beta(x)$ (I ∧)

$\neg\forall x\, \neg\alpha(x) \wedge \neg\forall x\, \beta(x))$

$\perp$ (I ¬)

$\neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$ (I ∀)

$\forall x\, \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$

x non libre dans les hypothèses non éliminées

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

N°9 : Montrer la déduction suivante :

$$(\forall x\, \alpha(x)) \rightarrow \beta(x) \vdash \exists x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$

avec x n'apparaît pas libre dans β

Etant donné qu'on est dans le système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$, on doit remplacer la $\rightarrow$ et $\exists$ par leur définition respective.

Cela revient à montrer :

$$\neg((\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\beta(x)) \vdash \neg \forall x \neg \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$$

avec x n'apparaît pas libre dans β

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$$\neg((\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\beta(x)) \;\vdash\; \neg \forall x \neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta (x))$$

Hypothèse : x n'apparaît pas libre dans β

$\neg((\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\beta(x))$

Hypothèse

$\cancel{\forall x \neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta (x))}$

(E ∀)

$\neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta (x))$

x libre pour x

(E ¬)

$\alpha(x) \wedge \neg\beta (x)$

(E ∧) 2Fois

$\alpha(x)$ $\qquad$ $\neg\beta (x)$

(I ∀)

x non libre dans les hypothèses non éliminées

$\forall x\, \alpha(x)$

(I ∧)

$(\forall x\, \alpha(x)) \wedge \neg\beta(x)$

$\perp$

(I ¬)

$\neg \forall x \neg\neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta (x))$

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

N°10 : Montrer la déduction suivante :

$$\forall x\,(\alpha(x) \vee \beta(x)),\ \exists x\,\neg\alpha(x)\ \vdash \exists x\,\beta(x)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif **$(\neg, \wedge, \forall)$** , on doit remplacer le $\vee$ et $\exists$ par leur définition respective.

Cela revient à montrer :

$$\forall x\,\neg(\neg\,\alpha(x) \wedge \neg\,\beta(x)),\ \neg\forall x\,\neg\,\neg\,\alpha(x)\ \vdash \neg\forall x\,\neg\beta(x)$$

Système déductif **(¬, ∧, ∀)**

$$\forall x\, \neg(\neg\, \alpha(x) \wedge \neg\, \beta(x)),\ \neg\forall x\, \neg\neg\, \alpha(x)\ \vdash \neg\forall x\, \neg\beta(x)$$

$$\dfrac{\forall x\, \neg(\neg\, \alpha(x) \wedge \neg\, \beta(x))}{\neg(\neg\, \alpha(x) \wedge \neg\beta\,(x))}\ (\mathrm{E}\ \forall) \qquad \neg\forall x\, \neg\neg\, \alpha(x) \qquad \cancel{\neg\, \alpha(x)} \qquad \dfrac{\cancel{\forall x\, \neg\beta(x)}}{\neg\beta\,(x)}\ (\mathrm{E}\ \forall)$$

x libre pour x

x libre pour x

$$\dfrac{\neg\alpha(x) \qquad \neg\beta\,(x)}{\neg\alpha(x) \wedge \neg\beta\,(x)}\ (\mathrm{I}\ \wedge)$$

$$\dfrac{\perp}{\neg\neg\, \alpha(x)}\ (\mathrm{I}\ \neg)$$

$$\dfrac{\neg\neg\, \alpha(x)}{\forall x\, \neg\neg\, \alpha(x)}\ (\mathrm{I}\ \forall)$$

x non libre dans les hypothèses non éliminées

$$\dfrac{\perp}{\neg\forall x\, \neg\beta(x)}\ (\mathrm{I}\ \neg)$$

Système déductif **($\neg$, $\wedge$, $\forall$)**

N°11 : Montrer la déduction suivante :

$$\vdash \forall x\ \forall y\ P(x, y) \rightarrow \forall x\ P(x, x)$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent $\Leftrightarrow$ à :

$$\forall x\ \forall y\ P(x, y) \vdash \forall x\ P(x, x)$$

Système déductif (¬, ∧, ∀)

$\forall x\, \forall y\, P(x, y) \vdash \forall x\, P(x, x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, \forall y\, P(x, y)}{\forall y\, P(x, y)}\ (E\,\forall)}{P(x, x)}\ (E\,\forall)}{\forall x\, P(x, x)}\ (I\,\forall)$$

x libre pour x dans $\forall y\, P(x,y)$

t=x libre pour y dans P(x,y)

x non libre dans les hypothèses non éliminées

Système déductif **(¬, ∧, ∀)**

N°12 : Montrer la déduction suivante :

$$\vdash \forall x\, \forall y\, (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \rightarrow \forall x\, \neg P(x, x)$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

$$\forall x\, \forall y\, (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \vdash \forall x\, \neg P(x, x)$$

Système déductif ($\neg$, $\wedge$, $\forall$)

N°12 (suite) :

Etant donné qu'on est dans le système déductif ($\neg$, $\wedge$, $\forall$) , on doit remplacer la $\rightarrow$ par sa définition

Cela revient à montrer :

$$\forall x\ \forall y\ \neg(P(x, y) \wedge \neg\neg P(y, x)) \vdash \forall x\ \neg P(x, x)$$

Système déductif $(\neg, \wedge, \forall)$

$$\forall x\, \forall y\, \neg(P(x, y) \wedge \neg\neg P(y, x)) \vdash \forall x\, \neg P(x, x)$$

$$\forall x\, \forall y\, \neg(P(x, y) \wedge \neg\neg P(y, x))$$

$$\text{(E } \forall)$$

x libre pour x

$$\forall y\, \neg(P(x, y) \wedge \neg\neg P(y, x))$$

$$\text{(E } \forall)$$

x libre pour y dans $\neg(P(x, y) \wedge \neg\neg P(y, x))$

$$\neg(P(x, x) \wedge \neg\neg P(x, x))$$

$$\cancel{P(x, x)} \qquad \cancel{P(x, x)}$$

$$\neg\neg P(x, x)$$

$$\text{(I } \wedge)$$

$$P(x, x) \wedge \neg\neg P(x, x)$$

$$\perp$$

$$\text{(I } \neg)$$

$$\neg P(x, x)$$

$$\text{(I } \forall)$$

x non libre dans les hypothèses non éliminées

$$\forall x\, \neg P(x, x)$$