Logique des Propositions

Corrigé Série N°4
Exo3

Etude Sémantique

Série N°4 : Exercice N°3

Langage $\mathbb{L}$ ($\neg$, $\rightarrow$, $\leftarrow$) avec :

P	Q	P$\leftarrow$Q
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Série N°4 : Exercice N°3

1. Montrons que : a) $\neg (P \rightarrow Q) \equiv \neg P \leftarrow \neg Q$

P	**Q**	**$\neg P$**	**$\neg Q$**	**$P \rightarrow Q$**	**$\neg(P \rightarrow Q)$**	**$\neg P \leftarrow \neg Q$**
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	V	**F**	**F**

Série N°4 : Exercice N°3

1. Montrons que : b) $\neg (P \leftarrow Q) \equiv \neg P \rightarrow \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \leftarrow Q$	$\neg(P \leftarrow Q)$	$\neg P \rightarrow \neg Q$
V	V	F	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	F	**V**	**V**

Série N°4 : Exercice N°3

2. Déduire que $\{\neg , \leftarrow\}$ est un S. C. C ?

On sait que $\{\neg , \rightarrow\}$ est un S. C. C

Pour montrer que $\{\neg , \leftarrow\}$ est un S. C. C.

Il faut exprimer :

$\neg\alpha$ et $\boxed{\alpha \rightarrow \beta}$ en fonction en fonction de $\{\neg , \leftarrow\}$

D'après la question 1)a) :

$$\neg (\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg \alpha \leftarrow \neg \beta$$

$$\neg \neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg (\neg \alpha \leftarrow \neg \beta)$$

$$\boxed{\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg (\neg \alpha \leftarrow \neg \beta)}$$

Donc $\{\neg , \leftarrow\}$ est un S. C. C

Série N°4 : Exercice N°3

3. Rappel des Clauses du $\rightarrow$

$$\Sigma \cup \{ \alpha \rightarrow \beta \} \quad \begin{cases} \nearrow \; \Sigma \cup \{\neg\alpha\} \\ \searrow \; \Sigma \cup \{\beta\} \end{cases}$$

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \rightarrow \beta)\} \longrightarrow \Sigma \cup \{\alpha , \neg\beta\}$$

Série N°4 : Exercice N°3

3. Donnons les Clauses du connecteur $\leftarrow$.

D'après la question 1)b) :

$\neg(\alpha \leftarrow \beta) \equiv \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$

$\neg\neg(\alpha \leftarrow \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$

$\alpha \leftarrow \beta \equiv \neg(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$

Série N°4 : Exercice N°3

3. Les Clauses du connecteur $\leftarrow$.

$$\Sigma \cup \{ \alpha \leftarrow \beta \}$$

$$\Sigma \cup \{ \neg (\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\Sigma \cup \{ \neg \alpha , \neg \neg \beta \}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\Sigma \cup \{ \neg \alpha , \beta \}$$

Série N°4 : Exercice N°3

3. Les Clauses du connecteur $\leftarrow$.

$$\Sigma \cup \{\neg (\alpha \leftarrow \beta) \}$$

$$\Sigma \cup \{\neg \neg(\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \}$$

$$\Sigma \cup \{\neg \alpha \rightarrow \neg \beta\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg \neg \alpha\} \qquad \Sigma \cup \{\neg \beta\}$$

$$\Sigma \cup \{\alpha \}$$

Série N°4 : Exercice N°3

En Conclusion

Clauses du $\leftarrow$

$$\Sigma \cup \{ \alpha \leftarrow \beta \} \longrightarrow \Sigma \cup \{\neg\alpha , \beta\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \leftarrow \beta) \} \nearrow \Sigma \cup \{\alpha\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \leftarrow \beta) \} \searrow \Sigma \cup \{\neg\beta\}$$

Série N°4 : Exercice N°3

4. Montrer que :

$$\vdash \underbrace{\neg (B \leftarrow A)}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{\neg(\neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B)}_{\beta}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma = \{\neg (\neg (B \leftarrow A) \rightarrow \neg(\neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B))\}$$

Est inconsistant

Série N°4 : Exercice N°3

$$\Gamma = \{\neg(\neg(B \leftarrow A) \rightarrow \neg(\neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B))\}$$

$$\{\neg(B \leftarrow A)\ ,\ \neg\neg(\neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B)\}$$

$$\{\neg(B \leftarrow A)\ ,\ \neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B\}$$

$$\{\neg(B \leftarrow A)\ ,\ \neg\neg(\neg B \rightarrow A)\ ,\ \neg B\}$$

$$\{\neg(B \leftarrow A)\ ,\ \neg B \rightarrow A\ ,\ \neg B\}$$

Série N°4 : Exercice N°3

$$\{\neg (B \leftarrow A) \; , \; \neg B \rightarrow A \; , \; \neg B\}$$

$$\{\neg (B \leftarrow A) \; , \; \neg \neg B \; , \; \neg B\}$$

$$\bot$$

$$\{\neg (B \leftarrow A) \; , \; A \; , \; \neg B\}$$

$$\{B \; , \; A \; , \; \neg B\}$$

$$\bot$$

$$\{\neg A \; , \; A \; , \; \neg B\}$$

$$\bot$$

Série N°4 : Exercice N°3

En Conclusion

$$\boldsymbol{\Gamma = \{\neg\, (\neg\, (B \leftarrow A) \rightarrow \neg(\neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B))\,\}}$$

Est inconsistant

$$\Updownarrow$$

$$\vdash \neg\, (B \leftarrow A) \rightarrow \neg(\neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B)$$