Système déductif **(¬, ∧)**

Série N2
Exercice N°1

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice N°1

a1) $$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

On a : α

On suppose en plus : $\neg \alpha$

$$\alpha \qquad \cancel{\neg \alpha}$$

$$\frac{\perp}{\neg\neg\alpha}\ (\mathrm{I}\,\neg)$$

Contradiction $\perp$:
On applique la règle
$(\mathrm{I}\,\neg)$ pour déduire $\neg\neg\alpha$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

a2) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\, \alpha)$

$$\dfrac{\cancel{\alpha \wedge \neg\, \alpha}}{\neg\, \alpha}\ (E \wedge) \qquad \dfrac{\cancel{\alpha \wedge \neg\, \alpha}}{\alpha}\ (E \wedge)$$

$$\dfrac{\bot}{\neg\,(\alpha \wedge \neg\, \alpha)}\ (I\, \neg)$$

On suppose : $\alpha \wedge \neg\, \alpha$ 2 fois

On applique 2 fois la règle (E ∧) pour déduire $\neg\, \alpha$ à gauche et α à droite

Contradiction $\bot$:
On applique la règle (I ¬) pour déduire $\neg\,(\alpha \wedge \neg\, \alpha)$

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice N°1

a3) $\beta \wedge \neg\beta \vdash \alpha$ (la Contradiction)

On a : $\beta \wedge \neg \beta$ (écris 2 fois)

On suppose en plus : $\neg \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \wedge \neg \beta}{\neg \beta}\,(E\wedge) \qquad \dfrac{\beta \wedge \neg \beta}{\beta}\,(E\wedge) \qquad \cancel{\neg \alpha}}{\dfrac{\perp}{\neg \neg \alpha}\,(I\neg)}}{\alpha}\,(E\neg)$$

On applique 2 fois la règle $(E \wedge)$ pour déduire $\neg \beta$ à gauche et β à droite

Contradiction $\perp$:
On applique la règle $(I \neg)$ on élimine $\neg \alpha$ pour déduire $\neg \neg \alpha$

On applique la règle $(E\neg)$ pour déduire α

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice N°1

a4) $\alpha\ ,\ \neg\,\alpha \vdash \beta$ (la contradiction)

On a : α et $\neg\,\alpha$ (CONTRADICTION)

On suppose en plus : $\neg\,\beta$

$$\alpha \qquad \neg\,\alpha \qquad \cancel{\neg\,\beta}$$

$$\dfrac{\dfrac{\perp}{\neg\neg\,\beta}\ (I\,\neg)}{\beta}\ (E\neg)$$

Contradiction $\perp$ sur la 1ere Ligne des hypothèses: On applique la règle $(I\,\neg)$ on élimine $\neg\,\beta$ pour déduire $\neg\,\neg\,\beta$

On applique la règle $(E\neg)$ pour déduire α

Système déductif **($\neg$, $\wedge$)**

Exercice N°1

a3) $\beta \wedge \neg\beta \vdash \alpha$ (la Contradiction)

a4) $\alpha , \neg \alpha \vdash \beta$ (la Contradiction)

A partir d'une Contradiction $\perp$

On peut déduire n'importe quelle formule !

a1) $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$

On peut introduire un NON sur n'importe quelle formule

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

b1) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer le $\vee$ par sa définition.

Cela revient à montrer : $\alpha \vdash \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$

On a : α

On suppose en plus : $\neg \alpha \wedge \neg \beta$

$$\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{\cancel{\neg \alpha \wedge \neg \beta}}{\neg \alpha}\,(E \wedge)}{\dfrac{\perp}{\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)}\,(I \neg)}$$

On applique la règle $(E \wedge)$ pour déduire $\neg \alpha$

Contradiction $\perp$:
On applique la règle $(I \neg)$ pour supprimer $(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$ et déduire $\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

b2) $\beta \vdash \alpha \vee \beta$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer le ∨ par sa définition.

Cela revient à montrer : $\beta \vdash \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$

On a : β

On suppose en plus : $\neg \alpha \wedge \neg\beta$

$$\dfrac{\dfrac{\beta \qquad \dfrac{\cancel{\neg \alpha \wedge \neg \beta}}{\neg \beta}\,(E \wedge)}{\perp}}{\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)}\,(I \neg)$$

On applique la règle (E ∧) pour déduire $\neg \beta$

Contradiction ⊥ :
On applique la règle (I ¬) pour supprimer $(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$ et déduire $\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$

Système déductif $(\neg, \wedge)$
Exercice N°1

c1) $\alpha\rightarrow\beta\ ,\ \alpha \vdash \beta$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,
on doit remplacer la $\rightarrow$ par sa définition.
Cela revient à montrer : $\neg(\alpha \wedge \neg \beta), \alpha \vdash \beta$

$$\neg(\alpha \wedge \neg \beta) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \cancel{\neg\beta}}{\alpha \wedge \neg \beta}\ (I\wedge)$$

$$\dfrac{\dfrac{\perp}{\neg\neg\beta}\ (I\neg)}{\beta}\ (E\neg)$$

On suppose en plus : $\neg\beta$

On applique la règle $(I\wedge)$ pour déduire $\alpha \wedge \neg\beta$

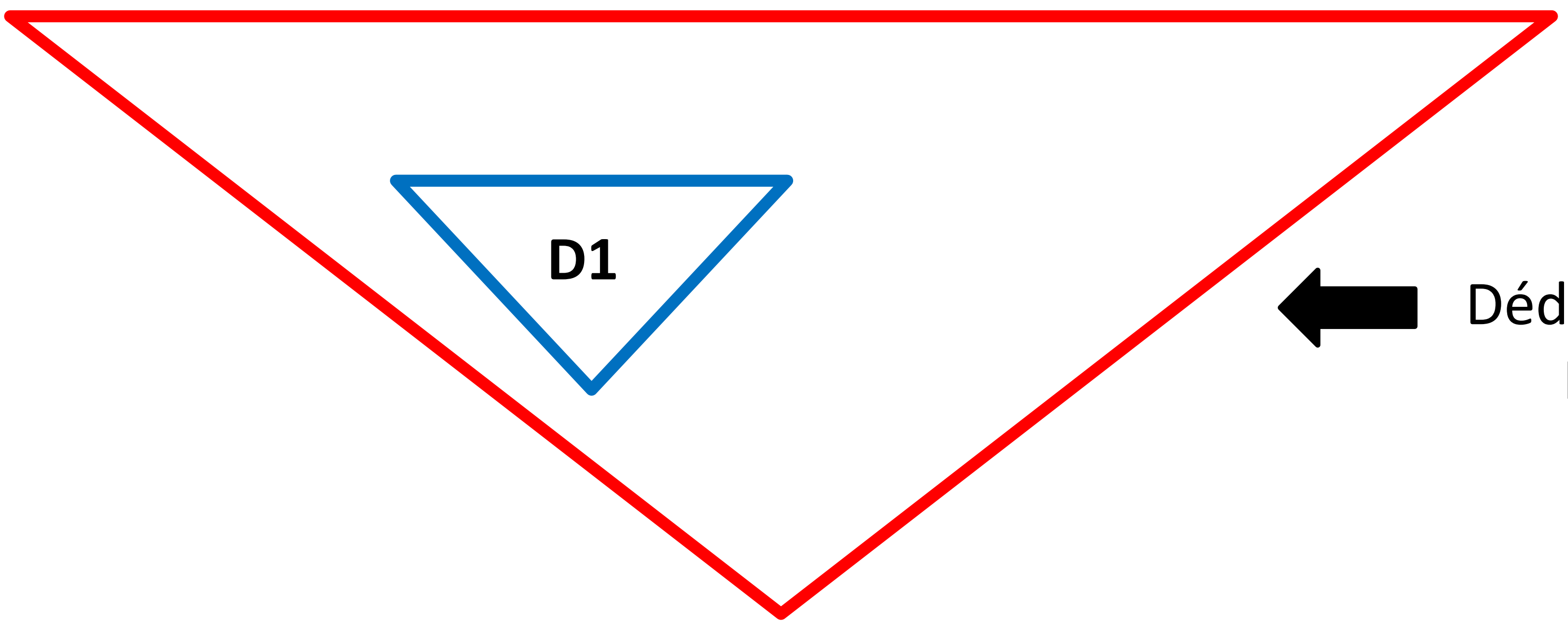
Contradiction $\perp$:
On applique la règle $(I\neg)$ pour supprimer $\neg\beta$ et déduire $\neg\neg\beta$

On applique la règle $(E\neg)$ pour déduire β

Système déductif ($\neg$, $\wedge$)
Exercice N°1

C2) $\underbrace{\alpha \vdash \beta}_{\text{Hypothèse : D1}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\vdash \alpha \rightarrow \beta}_{\text{Conclusion : D2}}$

On demande de faire la déduction D2, en utilisant la déduction D1 comme une hypothèse ($\Rightarrow$: Si ….. Alors) :



Déduction D2

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice N°1

C2) $\underbrace{\alpha \vdash \beta}_{\text{Hypothèse : D1}} \Rightarrow \underbrace{\vdash \alpha \rightarrow \beta}_{\text{Conclusion : D2}}$

Dans le système déductif de $\mathcal{L}p\,(\neg, \wedge)$:

on doit remplacer le $\rightarrow$ par sa définition. On obtient :

$\alpha \vdash \beta \Rightarrow\ \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. On fait alors la déduction D2

on suppose on plus (2 fois) : $\alpha \wedge \neg\beta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha \wedge \neg\beta}}{\alpha}\,(E\wedge)}{\beta}\,\text{Hyp} \qquad \dfrac{\cancel{\alpha \wedge \neg\beta}}{\neg\beta}\,(E\wedge)}{\dfrac{\perp}{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}\,(I\neg)}$$

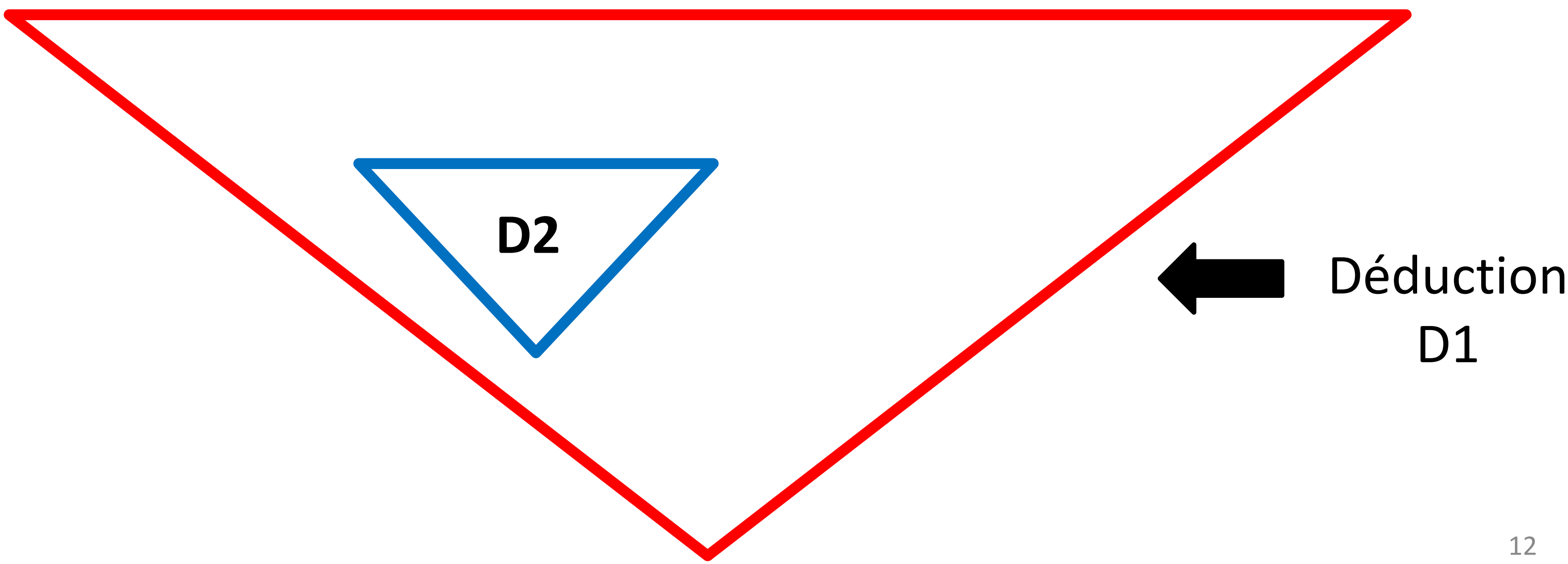
On applique les règles $(E\wedge)$ sur $\alpha \wedge \neg\beta$ pour déduire à gauche α et à droite $\neg\beta$

Contradiction $\perp$:
On applique la règle $(I\neg)$ pour supprimer $\alpha \wedge \neg\beta$ et déduire $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

Système déductif (¬, ∧)
Exercice N°1

C3) $\underbrace{\vdash \alpha \rightarrow \beta}_{\text{Hypothèse : D2}} \Rightarrow \underbrace{\alpha \vdash \beta}_{\text{Conclusion : D1}}$

On demande de faire la déduction D1, en utilisant la déduction D2 comme une hypothèse (⇒ : Si ……. Alors) :



Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

C3)

$$\underbrace{\vdash \alpha \rightarrow \beta}_{\textbf{Hypothèse : D2}} \Rightarrow \underbrace{\alpha \vdash \beta}_{\textbf{Conclusion : D1}}$$

Dans le système déductif de $\mathcal{L}p$ (¬, ∧). Remplacer → par sa def :

$\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \alpha \vdash \beta$. On fait alors la déduction D1

on suppose en plus : $\neg\beta$

Hyp

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \cancel{\neg\beta}}{\alpha \wedge \neg\beta}\,(\mathrm{I}\wedge)}{\perp}}{\neg\neg\beta}\,(\mathrm{I}\neg)}{\beta}\,(\mathrm{E}\neg)$$

On applique la règle (I∧) pour déduire $\alpha \wedge \neg\beta$

Contradiction ⊥ : On applique la règle (I ¬) pour supprimer $\neg\beta$ et déduire $\neg\neg\beta$

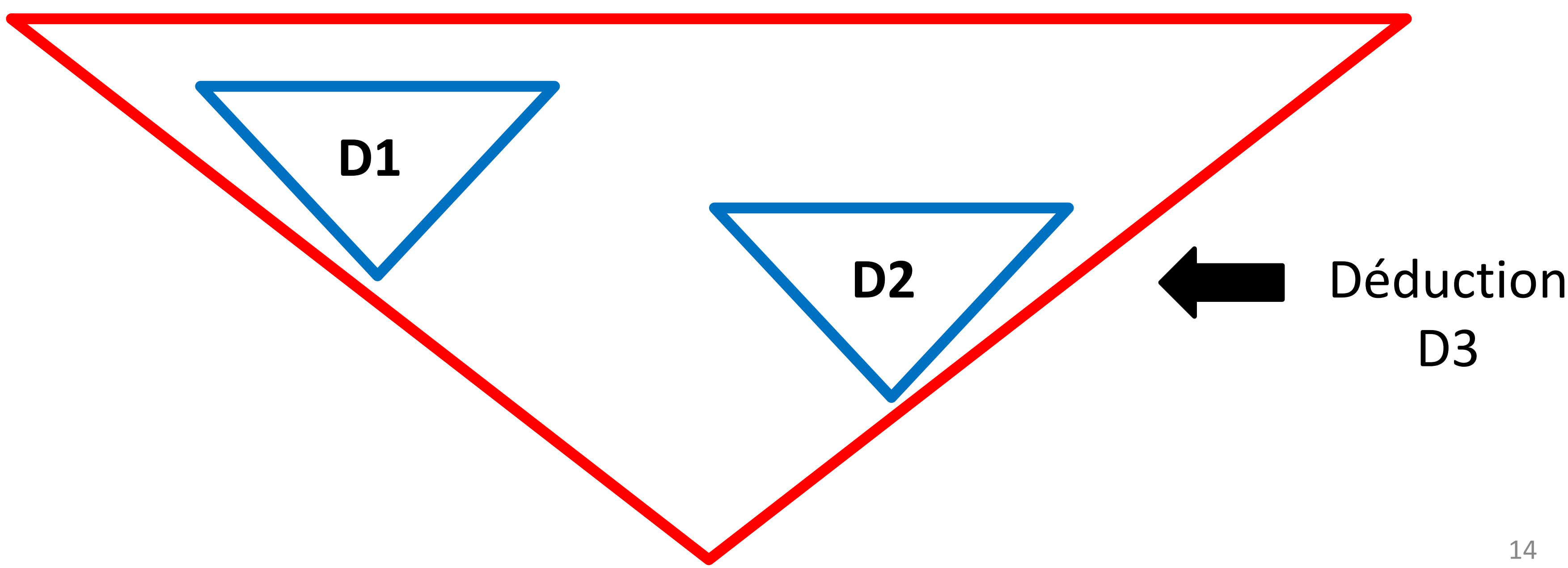
On applique la règle (E¬) pour déduire β

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

b3) $\underbrace{\alpha \vdash \delta}_{\text{Hypothèse N°1: D1}}$ et $\underbrace{\beta \vdash \delta}_{\text{Hypothèse N°2: D2}} \Rightarrow \underbrace{\alpha \vee \beta \vdash \delta}_{\text{Conclusion : D3}}$

On demande de faire la déduction D3, en utilisant les déductions D1 et D2 comme des hypothèses (⇒: Si …. Alors)



Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice N°1

b3) $\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta \Rightarrow \alpha \vee \beta \vdash \delta$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer le $\vee$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\underbrace{\alpha \vdash \delta}_{\text{Hypothèse N°1: D1}} \text{ et } \underbrace{\beta \vdash \delta}_{\text{Hypothèse N°2: D2}} \Rightarrow \underbrace{\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \vdash \delta}_{\text{Conclusion : D3}}$$

On fait alors la déduction D3

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

Hyp N°1 Hyp N°2

b3) $\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta \Rightarrow \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \vdash \delta$

On suppose en plus : α , β et $\neg \delta$

On a : $\neg (\neg \alpha \wedge \neg\beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha}}{\delta}\,\text{Hyp1} \qquad \cancel{\neg\delta}}{\perp_1}}{\neg \alpha}\,(I\,\neg) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\beta}}{\delta}\,\text{Hyp2} \qquad \cancel{\neg\delta}}{\perp_2}}{\neg \beta}\,(I\,\neg)}{\neg \alpha \wedge \neg \beta}\,(I\,\wedge) \qquad \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)}{\dfrac{\dfrac{\perp_3}{\neg\neg\,\delta}\,(I\,\neg)}{\delta}\,(E\neg)}$$

Première Contradiction $\perp$
On applique la règle (I $\neg$)
pour supprimer α
et déduire $\neg\alpha$

Deuxième Contradiction $\perp$
On applique la règle (I $\neg$)
pour supprimer β
et déduire $\neg\,\beta$

Troisième Contradiction $\perp$:
On applique la règle (I $\neg$)
pour supprimer $\neg\,\delta$
et déduire $\neg\neg\,\boldsymbol{\delta}$

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice N°1

d1) $\alpha \,,\ \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \beta$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer le $\leftrightarrow$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\alpha \quad , \quad \neg(\alpha \wedge \neg \beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha) \vdash \beta$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

d1) $\alpha\ , \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha) \vdash \beta$

On suppose : $\neg\beta$

On a : α et $\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)$

$$\dfrac{\cancel{\neg\beta} \qquad \alpha}{\alpha \wedge \neg\beta}\ (\mathrm{I}\wedge) \qquad\qquad \dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)}{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}\ (\mathrm{E}\wedge)$$

Contradiction $\perp$
On applique la règle (I ¬)
pour supprimer $\neg\beta$
et déduire $\neg\neg\beta$

$$\dfrac{\perp}{\neg\neg\beta}\ (\mathrm{I}\neg)$$

$$\dfrac{\neg\neg\beta}{\beta}\ (\mathrm{E}\neg)$$

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice N°1

d2) $\beta \,,\ \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer le $\leftrightarrow$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\beta \,,\ \neg(\alpha \wedge \neg \beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha) \vdash \alpha$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

d2) $\beta\ ,\ \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha) \vdash \alpha$

On suppose : $\neg\alpha$

On a : β et $\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)$

$$\dfrac{\beta \qquad \cancel{\neg\alpha}}{\beta \wedge \neg\alpha}\ (I \wedge)$$

$$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)}{\neg(\beta \wedge \neg\alpha)}\ (E\wedge)$$

Contradiction $\perp$
On applique la règle ($I\ \neg$)
pour supprimer $\neg\alpha$
et déduire $\neg\neg\alpha$

$$\dfrac{\perp}{\neg\neg\alpha}\ (I\ \neg)$$

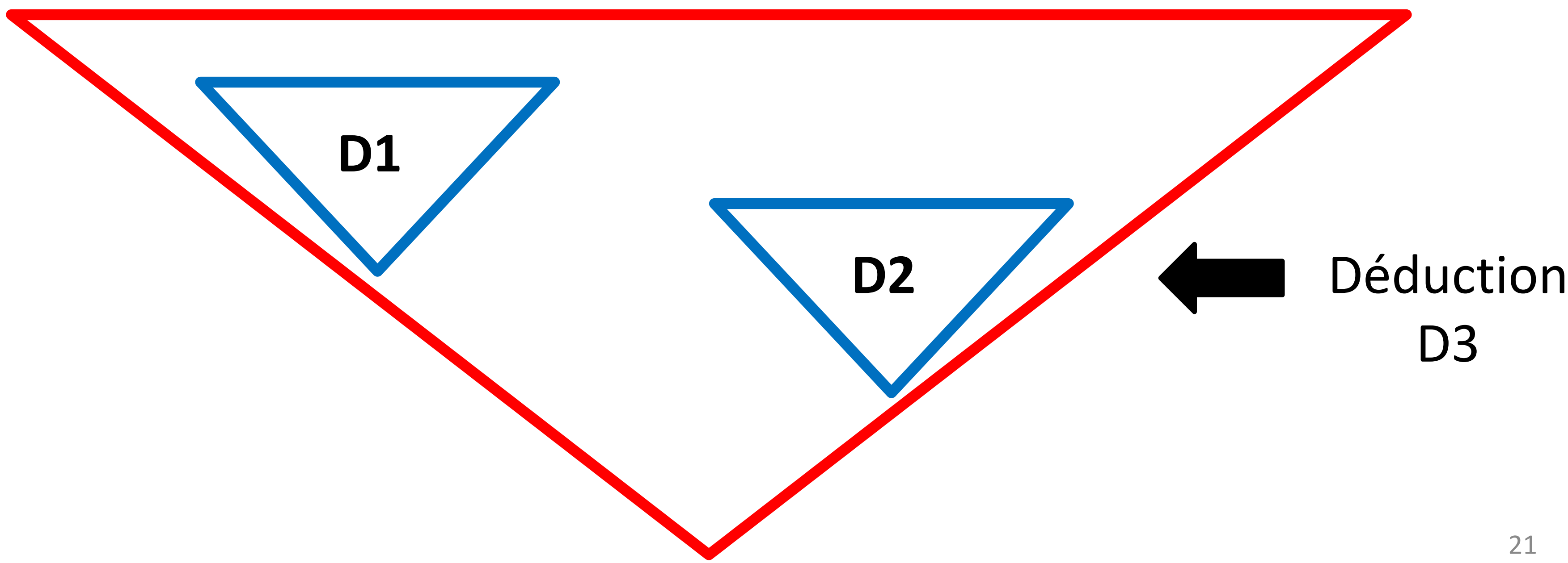
$$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ (E\neg)$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

d3) $\underbrace{\alpha \vdash \beta}_{\text{Hypothèse N°1: D1}}$ et $\underbrace{\beta \vdash \alpha}_{\text{Hypothèse N°2: D2}} \Rightarrow \underbrace{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta}_{\text{Conclusion : D3}}$

On demande de faire la déduction D3, en utilisant les déductions D1 et D2 comme des hypothèses (⇒:Si ……Alors)



Système déductif (¬, ∧)
Exercice N°1

d3) $\alpha \vdash \beta$ et $\beta \vdash \alpha \Rightarrow \ \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer le $\leftrightarrow$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\underbrace{\alpha \vdash \beta}_{\text{Hypothèse N°1 : D1}} \text{ et } \underbrace{\beta \vdash \alpha}_{\text{Hypothèse N°2 : D2}} \Rightarrow \vdash \underbrace{\neg(\alpha \wedge \neg \beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)}_{\text{Conclusion : D3}}$$

On fait alors la déduction D3

Système déductif (¬, ∧)

Exercice N°1

Hyp N°1 Hyp N°2

d3) $\alpha \vdash \beta$ et $\beta \vdash \alpha \Rightarrow \vdash \neg(\alpha \wedge \neg \beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)$

On suppose : $\alpha \wedge \neg \beta$ et $\beta \wedge \neg\alpha$

$$\dfrac{\cancel{\alpha \wedge \neg \beta}}{\alpha \qquad\qquad \neg \beta}\ (E\wedge)\ \textbf{2fois} \qquad\qquad \dfrac{\cancel{\beta \wedge \neg \alpha}}{\beta \qquad\qquad \neg \alpha}\ (E\wedge)\ \textbf{2fois}$$

$$\dfrac{\alpha}{\beta}\ \text{Hyp1} \qquad\qquad \dfrac{\beta}{\alpha}\ \text{Hyp2}$$

$$\dfrac{\perp_1}{\neg(\alpha \wedge \neg \beta)}\ (I\neg) \qquad\qquad \dfrac{\perp_2}{\neg(\beta \wedge \neg\alpha)}\ (I\neg)$$

$$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg \beta) \qquad \neg(\beta \wedge \neg\alpha)}{\neg(\alpha \wedge \neg \beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)}\ (I\wedge)$$

Première Contradiction $\perp$
On applique la règle ($I\neg$) pour supprimer $\alpha \wedge \neg \beta$ et déduire $\neg(\alpha \wedge \neg \beta)$

Deuxième Contradiction $\perp$
On applique la règle ($I\neg$) pour supprimer $\beta \wedge \neg\alpha$ et déduire $\neg(\beta \wedge \neg\alpha)$

Système déductif (¬, ∧)

Encore d’autres déductions
Exercice 3

Système déductif (¬, ∧)

Rappel du Théorème de Simplification :

Les déductions où la conclusion est de la forme :

$$\boldsymbol{\alpha 1 \rightarrow \alpha 2}$$

$$\delta 1, \delta 2, \ldots, \delta n \vdash \alpha 1 \rightarrow \alpha 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\delta 1, \delta 2, \ldots, \delta n, \alpha 1 \vdash \alpha 2$$

(plus simple !)

Système déductif (¬, ∧)

Rappel du Théorème de Simplification :

$$\Gamma=\{\ \delta 1,\ \delta 2,\ \ldots,\ \delta n\ \}$$

$$\Gamma \vdash \alpha 1 \rightarrow \alpha 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma,\ \alpha 1 \vdash \alpha 2$$

(plus simple !)

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice 3

1. Montrer le théorème : $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

Rappel : $\Gamma, \alpha 1 \vdash \alpha 2 \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha 1 \rightarrow \alpha 2$ (cas où Γ est ϕ)

Donc, cela revient à : $\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer les $\vee$ par leur définition.

Cela revient à :

$$\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \vdash \neg(\neg \beta \wedge \neg \alpha)$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice 3

$$\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \vdash \neg(\neg \beta \wedge \neg \alpha)$$

On suppose : $\neg \beta \wedge \neg \alpha$

On a : $\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$

$$\cfrac{\cfrac{\cancel{\neg\beta \wedge \neg\alpha}}{\neg \alpha \qquad\qquad \neg \beta}\ (E\wedge)\ \textbf{2fois}}{\neg \alpha \wedge \neg \beta}\ (I\wedge)$$

$$\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$$

$$\cfrac{\perp}{\neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha)}\ (I\neg)$$

Contradiction $\perp$
On applique la règle ($I\neg$) pour supprimer $\neg\beta \wedge \neg\alpha$ et déduire $\neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha)$

Système déductif ($\neg, \wedge$)

Exercice 3

2. Montrer le théorème :

$$\vdash (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta)$$

Rappel : $\Gamma, \alpha 1 \vdash \alpha 2 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \alpha 1 \rightarrow \alpha 2$ (cas où Γ est ϕ)

Donc, cela revient à :

$$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha \ \vdash (\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

Donc, cela revient à :

$$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha \quad , \quad \neg \beta \rightarrow \alpha \ \vdash \ \beta$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$, on doit remplacer les $\rightarrow$ par leur définition.

Cela revient à :

$$\neg (\neg \beta \wedge \neg \neg \alpha) \quad , \neg (\neg \beta \wedge \neg \alpha) \ \vdash \ \beta$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice 3

$$\neg(\neg\beta \wedge \neg\neg\alpha),\ \neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha) \vdash \beta$$

On suppose : $\neg\beta$ et $\neg\alpha$

On a : $\neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha)$ et $\neg(\neg\beta \wedge \neg\neg\alpha)$

$$\dfrac{\cancel{\neg\beta} \qquad \cancel{\neg\alpha}}{\neg\beta \wedge \neg\alpha}\ (I\wedge) \qquad \neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha) \qquad \neg(\neg\beta \wedge \neg\neg\alpha)$$

$$\perp_1$$

$$\dfrac{\perp_1}{\neg\neg\alpha}\ (I\neg)$$

$$\dfrac{\neg\beta \qquad \neg\neg\alpha}{\neg\beta \wedge \neg\neg\alpha}\ (I\wedge)$$

$$\perp_2$$

$$\dfrac{\perp_2}{\neg\neg\beta}$$

$$\dfrac{\neg\neg\beta}{\beta}\ (E\neg)$$

Contradiction $\perp$
On applique la règle (I ¬)
pour supprimer $\neg\alpha$
et déduire $\neg\neg\alpha$

Contradiction $\perp$
On applique la règle (I ¬)
pour supprimer $\neg\beta$
et déduire $\neg\neg\beta$

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice 3

3. Montrer le théorème :

$$\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

Donc, cela revient à :

$$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \vdash \alpha$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer les $\rightarrow$ par leur définition.

Cela revient à :

$$\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\alpha) \vdash \alpha$$

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice 3

$$\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\alpha) \vdash \alpha$$

On suppose : $\alpha \wedge \neg\beta$ et $\neg\alpha$

On a : $\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$

$\cancel{\alpha \wedge \neg\beta}$ $\quad$ $\cancel{\neg\alpha}$ $\quad$ $\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$

$$\dfrac{\cancel{\alpha \wedge \neg\beta}}{\alpha}\,(E\wedge)$$

$\perp_1$

$$\dfrac{\perp_1}{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}\,(I\neg)$$

$$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \quad \neg\alpha}{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\alpha}\,(I\wedge)$$

$\perp_2$

$$\dfrac{\perp_2}{\neg\neg\alpha}\,(I\neg)$$

$$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\,(E\neg)$$

Contradiction $\perp$ N°1
On applique la règle $(I\neg)$
pour supprimer $\alpha \wedge \neg\beta$
et déduire $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

Contradiction $\perp$ N°2
On applique la règle $(I\neg)$
pour supprimer $\neg\alpha$
et déduire $\neg\neg\alpha$

Système déductif $(\neg, \wedge)$

Exercice 3

4. Montrer le théorème :

$$\vdash (\alpha \to (\beta \to \delta)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \delta))$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \to (\beta \to \delta) \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \delta)$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \to (\beta \to \delta), \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \delta$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \to (\beta \to \delta), \alpha \to \beta, \alpha \vdash \delta$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice 3

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) \,,\, \alpha \rightarrow \beta \,,\, \alpha \vdash \delta$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

on doit remplacer les $\rightarrow$ par leur définition.

Cela revient à :

$$\neg\,(\alpha \wedge \neg\neg(\beta \wedge \neg\delta)) \,,\, \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \,,\, \alpha \vdash \delta$$

$\neg(\alpha\wedge\neg\neg(\beta\wedge\neg\delta))\,,\ \neg(\alpha\wedge\neg\beta)\,,\ \alpha \vdash \delta$

On a : $\neg(\alpha\wedge\neg\neg(\beta\wedge\neg\delta))\,,\ \neg(\alpha\wedge\neg\beta)$ et α

On suppose : $\neg\beta$ et $\neg\delta$

$$\neg(\alpha\wedge\neg\neg(\beta\wedge\neg\delta)) \qquad \neg(\alpha\wedge\neg\beta) \qquad \dfrac{\alpha \quad \cancel{\neg\beta}}{\alpha\wedge\neg\beta}\,(I\wedge) \qquad \cancel{\neg\delta}$$

$$\perp_1$$

$$\dfrac{\perp_1}{\neg\neg\beta}\,(I\neg)$$

$$\dfrac{\neg\neg\beta}{\beta}\,(E\neg)$$

$$\dfrac{\beta \quad \neg\delta}{\beta\wedge\neg\delta}\,(I\wedge)$$

$$\dfrac{\beta\wedge\neg\delta}{\neg\neg(\beta\wedge\neg\delta)}\ \boxed{\text{(a1)}}$$

$$\dfrac{\alpha \quad \neg\neg(\beta\wedge\neg\delta)}{\alpha\wedge\neg\neg(\beta\wedge\neg\delta)}\,(I\wedge)$$

$$\perp_2$$

$$\dfrac{\perp_2}{\neg\neg\delta}\,(I\neg)$$

$$\dfrac{\neg\neg\delta}{\delta}\,(E\neg)$$

Système déductif **(¬, ∧)**

Exercice 3

5. Montrer le théorème :

$$\vdash \big((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta \big)\rightarrow \alpha\vee\beta$$

Donc, cela revient à :

Donc, cela revient à :

$$(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta \vdash \alpha\vee\beta$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

remplaçons les $\rightarrow$ et le $\vee$ par leurs définitions

$$\neg(\neg\,(\alpha \wedge \neg\,\beta) \wedge \neg\,\beta) \vdash \neg(\neg\,\alpha \wedge \neg\,\beta)$$

$$\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\beta) \vdash \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

On a : $\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\beta)$

On suppose : $\alpha \wedge \neg\beta$ et $\neg\alpha \wedge \neg\beta$

$$\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\beta)$$

$$\dfrac{\cancel{\alpha \wedge \neg\beta}}{\alpha}\,(\mathrm{I}\wedge) \qquad \dfrac{\cancel{\neg\alpha \wedge \neg\beta}}{\neg\alpha \quad \neg\beta}\,(\mathrm{E}\wedge)\ \textbf{2fois}$$

$$\dfrac{\bot_1}{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}\,(\mathrm{I}\neg)$$

$$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \qquad \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg\beta}\,(\mathrm{I}\wedge)$$

$$\dfrac{\bot_2}{\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)}\,(\mathrm{I}\neg)$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice 3

6. Montrer le théorème :

$$\vdash ((\alpha \rightarrow \delta) \wedge (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \delta)$$

Donc, cela revient à :

$$(\alpha \rightarrow \delta) \wedge (\beta \rightarrow \delta) \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow \delta)$$

Donc, cela revient à :

$$(\alpha \rightarrow \delta) \wedge (\beta \rightarrow \delta)\, ,\, \alpha \vee \beta \vdash \delta$$

Système déductif ($\neg, \wedge$)

Exercice 3

$$(\alpha \rightarrow \delta) \wedge (\beta \rightarrow \delta)\ ,\ \alpha \vee \beta \vdash \delta$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

remplaçons les $\rightarrow$ et le $\vee$ par leurs définitions

Cela revient à :

$$\neg\,(\alpha \wedge \neg\,\delta) \wedge \neg\,(\beta \wedge \neg\,\delta)\ ,\ \neg(\neg\,\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \delta$$

$\neg(\alpha \wedge \neg\delta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\delta), \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \delta$

On a : $\neg(\alpha \wedge \neg\delta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\delta)$ et $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

On suppose : α , β et $\neg\delta$

$$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg\delta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\delta)}{\neg(\alpha \wedge \neg\delta) \qquad \neg(\beta \wedge \neg\delta)}\ (E\wedge)\ \textbf{2fois}$$

$$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

$$\dfrac{\cancel{\alpha} \qquad \cancel{\neg\delta}}{\alpha \wedge \neg\delta}\ (I\wedge) \qquad \dfrac{\cancel{\beta} \qquad \cancel{\neg\delta}}{\beta \wedge \neg\delta}\ (I\wedge)$$

$$\bot_1 \qquad \bot_2$$

$$\dfrac{\bot_1}{\neg\alpha}\ (I\neg) \qquad \dfrac{\bot_2}{\neg\beta}\ (I\neg)$$

$$\dfrac{\neg\alpha \qquad \neg\beta}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}\ (I\wedge)$$

$$\bot_3$$

$$\dfrac{\bot_3}{\neg\neg\delta}\ (I\neg)$$

$$\dfrac{\neg\neg\delta}{\delta}\ (E\neg)$$

Système déductif (¬, ∧)

Exercice 3

7. Montrer la déduction:

$$\alpha \vee (\beta \rightarrow \delta) \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow \alpha \vee \delta$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \vee (\beta \rightarrow \delta) \, , \, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \delta$$

Système déductif **($\neg$, $\wedge$)**

Exercice 3

$$\alpha \vee (\beta \rightarrow \delta) , \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \delta$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \wedge)$,

remplaçons les $\rightarrow$ et le $\vee$ par leurs définitions

Cela revient à :

$$\neg (\neg \alpha \wedge \neg \neg (\beta \wedge \neg \delta)) , \neg(\neg \alpha \wedge \neg\beta) \vdash \neg(\neg \alpha \wedge \neg \delta)$$

$$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\neg(\beta \wedge \neg\delta)),\ \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \neg(\neg\alpha \wedge \neg\delta)$$

On a : $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\neg(\beta \wedge \neg\delta))$ et $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

On suppose : $\neg\alpha \wedge \neg\delta$ et $\neg\beta$

$$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\neg(\beta \wedge \neg\delta)) \qquad \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \qquad \cancel{\neg\beta} \qquad \cancel{\neg\alpha \wedge \neg\delta}$$

$$\frac{\cancel{\neg\alpha \wedge \neg\delta}}{\neg\alpha \qquad \neg\delta}\ (E\wedge)\ \textbf{2fois}$$

$$\frac{\neg\alpha \qquad \neg\beta}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}\ (I\wedge)$$

$$\bot_1$$

$$\frac{\bot_1}{\neg\neg\beta}\ (I\neg)$$

$$\frac{\neg\neg\beta}{\beta}\ (E\neg)$$

$$\frac{\beta \qquad \neg\delta}{\beta \wedge \neg\delta}\ (I\wedge)$$

$$\frac{\beta \wedge \neg\delta}{\neg\neg(\beta \wedge \neg\delta)}\ \boxed{(a1)}$$

$$\frac{\neg\alpha \qquad \neg\neg(\beta \wedge \neg\delta)}{\neg\alpha \wedge \neg\neg(\beta \wedge \neg\delta)}\ (I\wedge)$$

$$\bot_2$$

$$\frac{\bot_2}{\neg(\neg\alpha \wedge \neg\delta)}\ (I\neg)$$

Fin Exercices sur le système déductif **($\neg$, $\wedge$)**

Autres Systèmes Déductifs

Logique des Propositions

Autres Systèmes déductifs

-Système **($\neg$, $\rightarrow$)**

-Système **($\neg$, $\vee$)**

- Système (....)

Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Système Déductif de $\mathcal{L}_p$

=

{ Ensemble de règles associées aux connecteurs }

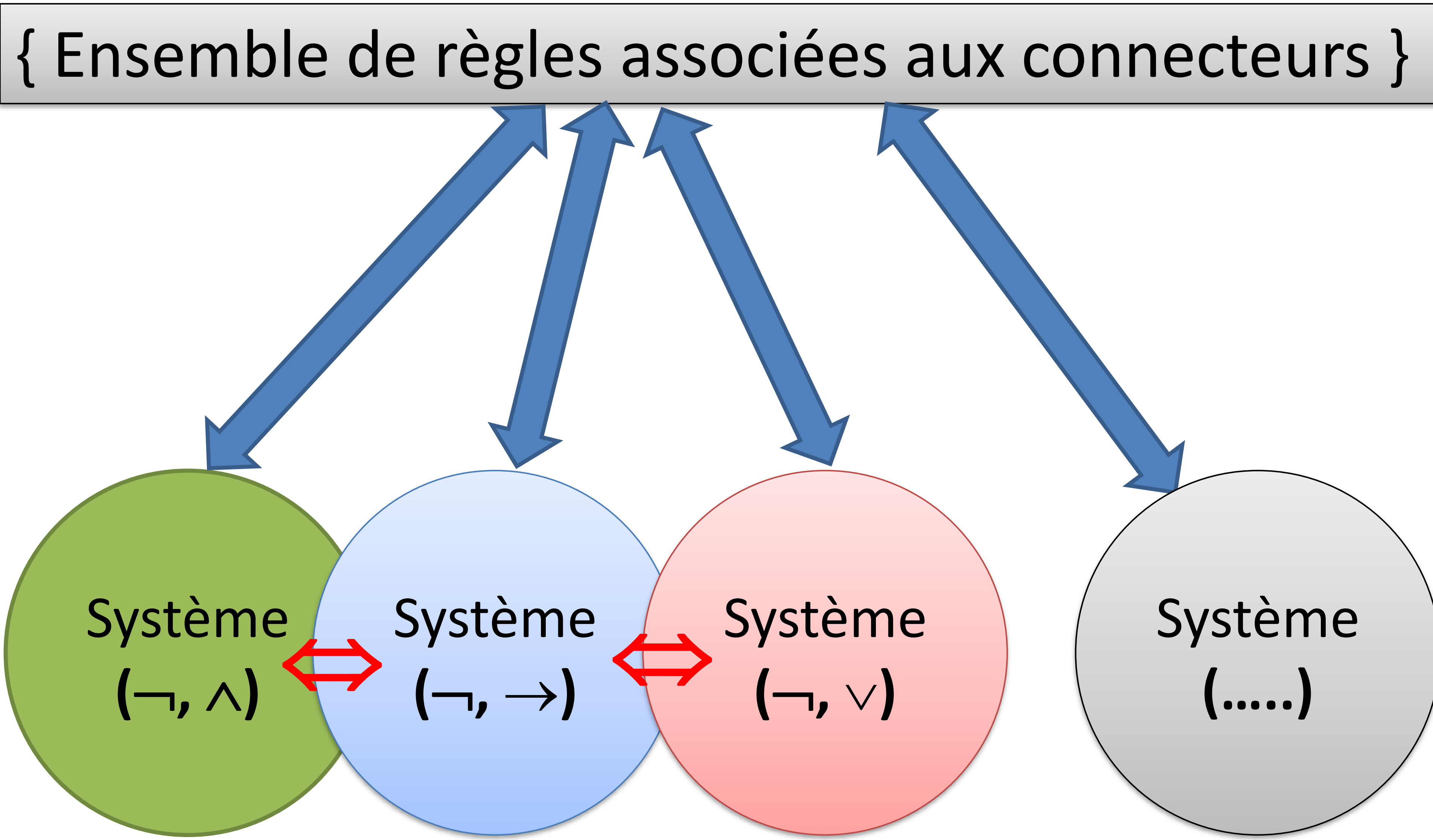
Système

(¬, ∧)

=

{ (E ∧) , (I ∧) , (E¬) , (I¬) }

Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions



Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

<u>Equivalences entre les différents systèmes déductifs (Exo2)</u>

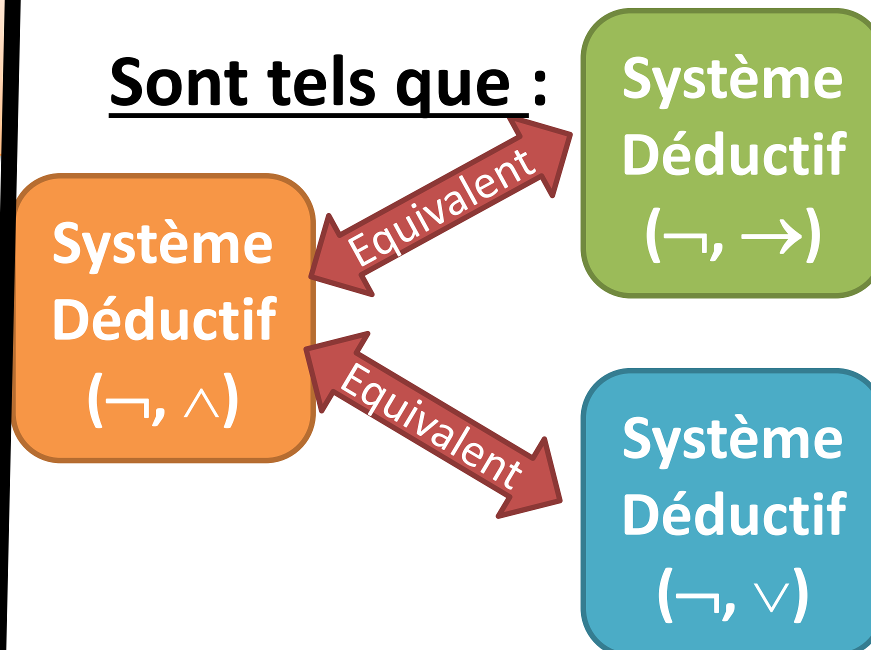
Le But est d'arriver à dire, que toute déduction (démonstration) faite dans un système déductif pourra être effectuée aussi dans un autre système déductif équivalent

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles : $\{ (E \wedge), (I \wedge), (E\neg), (I\neg) \}$

Le système déductif $(\neg, \rightarrow)$ défini par les règles : $\{ (E \rightarrow), (I \rightarrow), (E\neg), (I\neg)$

Le système déductif $(\neg, \vee)$ défini par les règles : $\{ (E \vee), (I \vee), (E\neg), (I\neg) \}$

<u>Sont tels que</u> :



Système déductif (¬, ∧)
Rappel des Règles

Le système déductif (¬, ∧)

- **Les règles du connecteur « ∧ » : (E ∧) et (I ∧)**

1ere Forme :

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ (\mathbf{E} \wedge)$$

2eme Forme :

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ (\mathbf{E} \wedge)$$

Règle d'Elimination du « ∧ »

$$\boldsymbol{\alpha \wedge \beta \vdash \alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha \wedge \beta \vdash \beta}$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\ (\mathbf{I} \wedge)$$

Règle d'Introduction du « ∧ »

$$\boldsymbol{\alpha\ ,\ \beta \vdash \alpha \wedge \beta}$$

Système déductif (¬, ∧)

Rappel des Règles

Le système déductif (¬, ∧)

- **Les règles du connecteur « ¬ » : (E ¬) et (I ¬)**

$$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ (E\,\neg)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\alpha}\\ \vdots\\ \beta \qquad \perp \qquad \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}\ (I\,\neg)$$

Règle d'Elimination du « ¬ »

Règle d'Introduction du « ¬ »

$$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$$

$$\alpha \vdash \perp \quad \Rightarrow \quad \vdash \neg\alpha$$

Autres Systèmes déductifs

.

Le système déductif ($\neg, \to$)

- <u>**Les règles du connecteur « $\neg$ » : (E$\neg$) et (I$\neg$)**</u>

C'est les mêmes règles vues précédemment

- <u>**Les règles du connecteur « $\to$ » : (E$\to$) et (I$\to$)**</u>

$$\frac{\alpha\to\beta \qquad\qquad \alpha}{\beta}\ (\mathbf{E}\to)$$

Règle d'Elimination de la « $\to$ »

$$\boldsymbol{\alpha\to\beta\ ,\ \alpha\ \vdash\ \beta}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots\ \cancel{\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha\to\beta}\ (\mathbf{I}\to)$$

Règle d'Introduction de la « $\to$ »

$$\boldsymbol{\alpha\ \vdash\ \beta\ \Rightarrow\ \vdash\alpha\to\beta}$$

Autres Systèmes déductifs

Le système déductif ($\neg$, $\vee$)

- **<u>Les règles du connecteur « $\neg$ » : (E$\neg$) et (I$\neg$)</u>**

C'est les mêmes règles vues précédemment

- **<u>Les règles du connecteur « $\vee$ » : (E $\vee$) et (I $\vee$)</u>**

1ere Forme :

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ (\mathbf{I} \vee)$$

2eme Forme :

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\ (\mathbf{I} \vee)$$

Règle d'Introduction du « $\vee$ »

$$\boldsymbol{\alpha} \vdash \boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{\beta} \vdash \boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\alpha}\\ \vdots \\ \delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{\beta}\\ \vdots \\ \delta\end{array} \qquad \alpha \vee \beta}{\delta}\ (\mathbf{E} \vee)$$

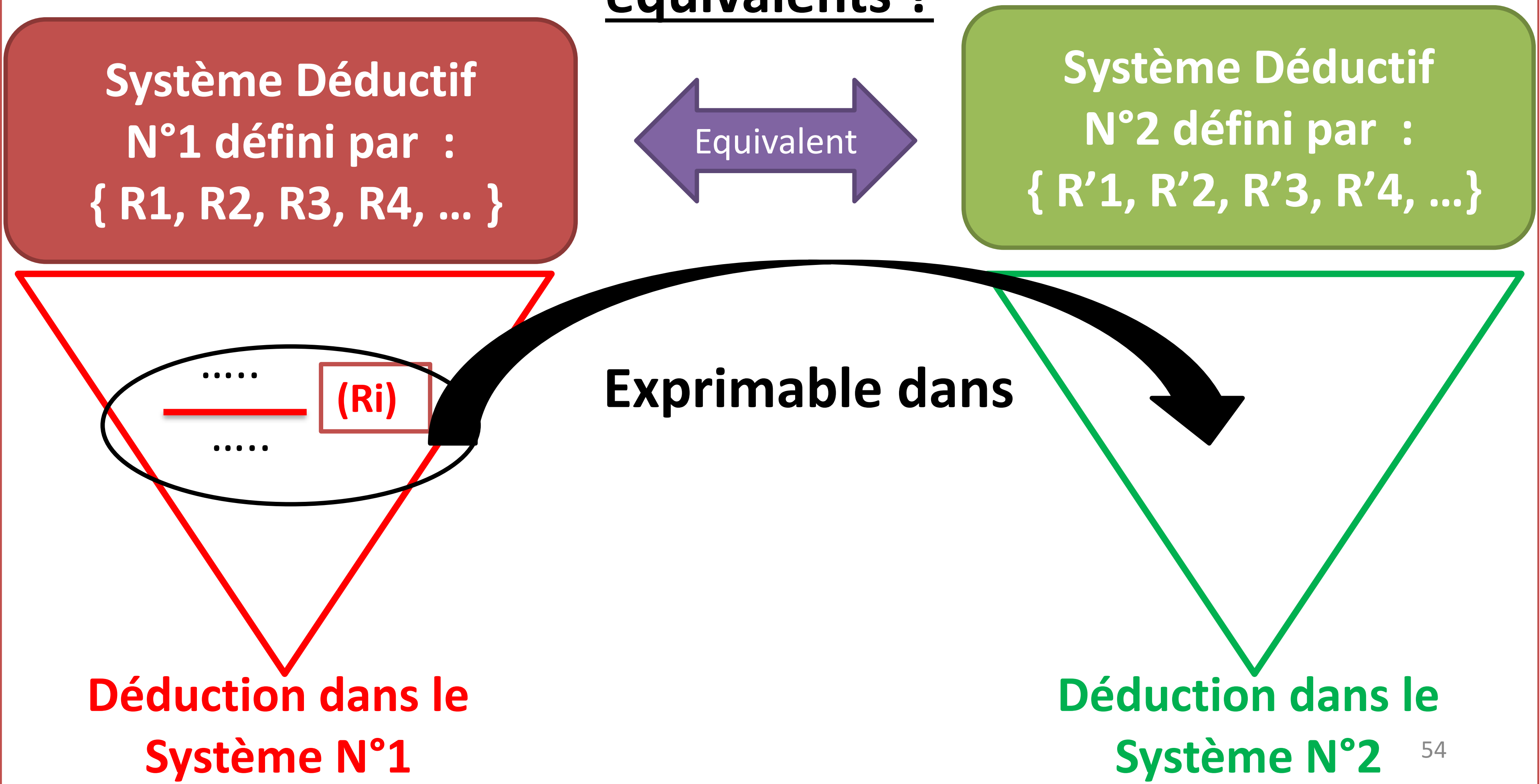
Règle d'Elimination du « $\vee$ »

$$\boldsymbol{\alpha} \vdash \boldsymbol{\delta} \text{ et } \boldsymbol{\beta} \vdash \boldsymbol{\delta}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta} \vdash \boldsymbol{\delta}$$

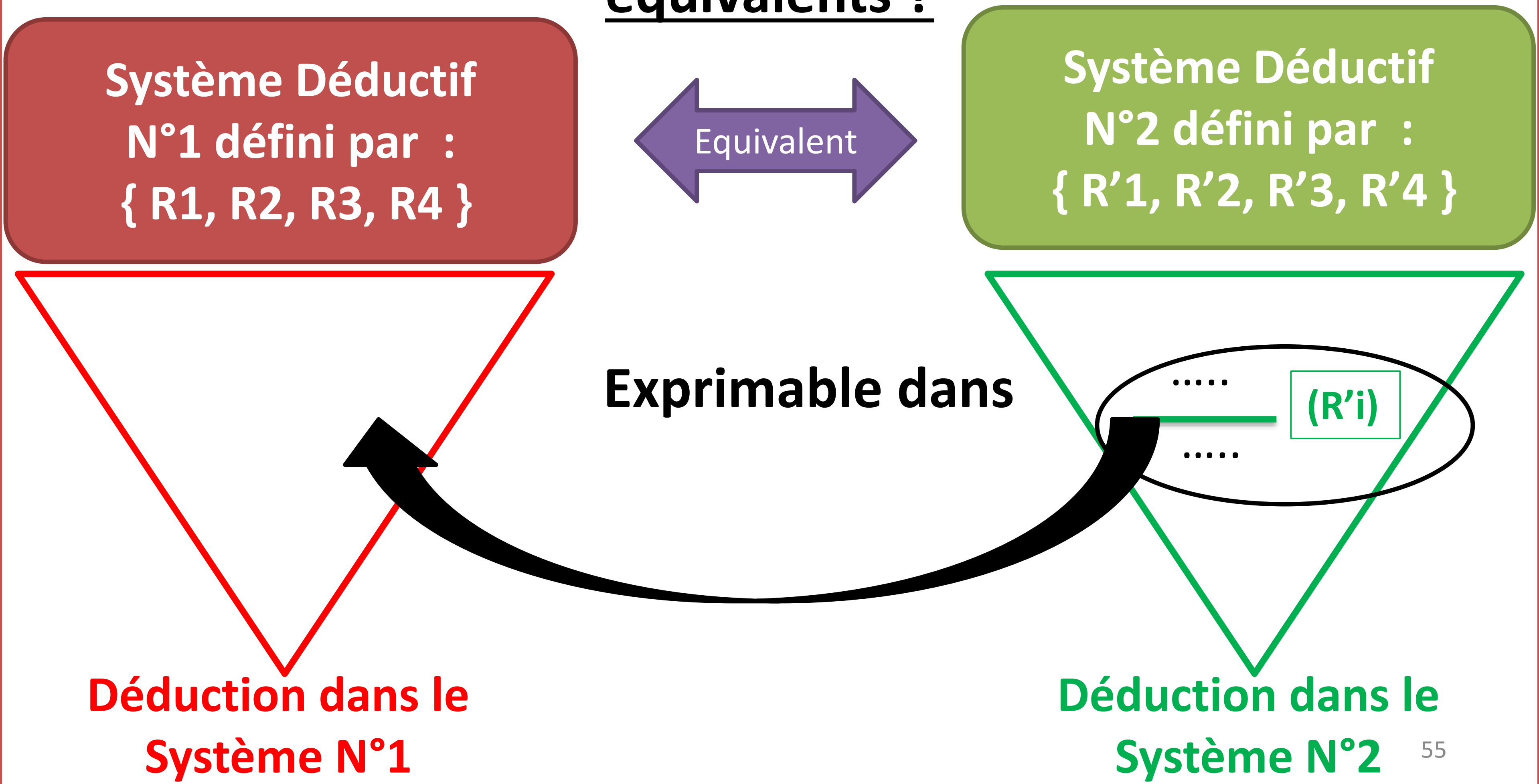
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

<u>Comment monter que deux (02) systèmes déductifs sont équivalents ?</u>



Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

<u>Comment monter que deux (02) systèmes déductifs sont équivalents ?</u>



Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Montrons que :

Le système déductif ($\neg$, $\wedge$) défini par les règles :
{ (E $\wedge$) , (I $\wedge$) , (E$\neg$) , (I$\neg$) }

Equivalent

Le système déductif ($\neg$, $\rightarrow$) défini par les règles :
{ (E $\rightarrow$) , (I $\rightarrow$) , (E$\neg$) , (I$\neg$) }

Déduction dans le Système ($\neg$, $\wedge$)

Déduction dans le Système ($\neg$, $\rightarrow$)

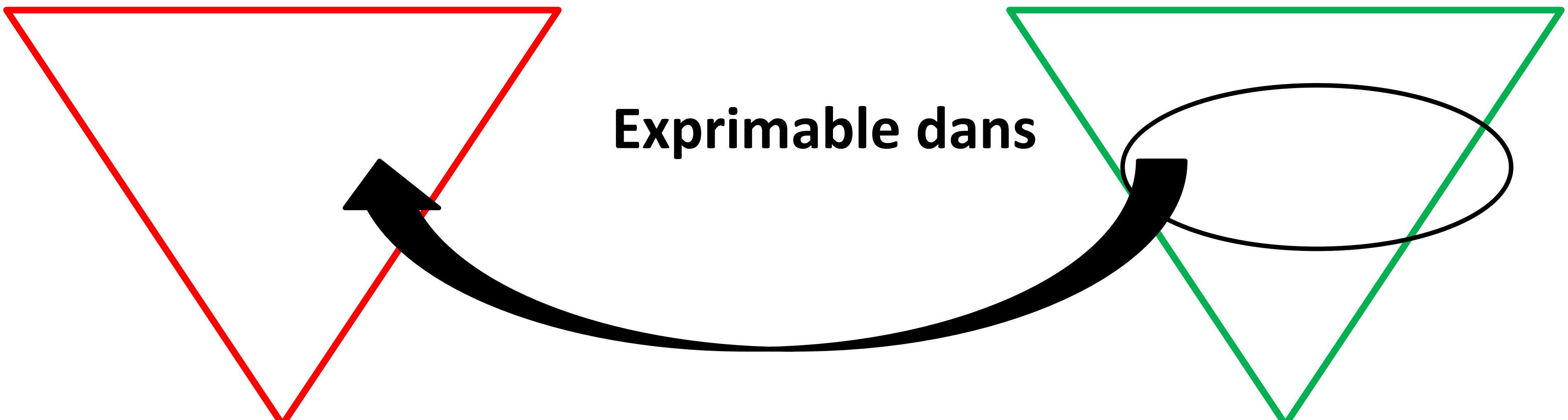
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 1er sens

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E \wedge), (I \wedge), (E\neg), (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \rightarrow)$ défini par les règles :
$\{ (E \rightarrow), (I \rightarrow), (E\neg), (I\neg) \}$



Déduction dans le Système $(\neg, \wedge)$

Déduction dans le Système $(\neg, \rightarrow)$

Autres Systèmes déductifs

1. Les règles de $\rightarrow$ dans le système $(\neg, \wedge)$:

$(E\rightarrow)$: $\alpha\rightarrow\beta\ ,\ \alpha\ \vdash\ \beta$

$(I\rightarrow)$: $\alpha\ \vdash \beta\ \Rightarrow\ \ \vdash \alpha\rightarrow\beta$

Déjà fait

<u>Exercice 1</u>:

Démontrer les déductions suivantes dans le langage $L_P(\neg,\wedge)$:

a1) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

a2) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

a3) $\beta \wedge \neg\beta \vdash \alpha$

a4) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

b1) $\alpha \vdash \alpha\vee\beta$

b2) $\beta \vdash \alpha\vee\beta$

b3) $(\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta) \Rightarrow \alpha\vee\beta \vdash \delta$

c1) $\boxed{\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta}$

c2) $\boxed{\alpha \vdash \beta \Rightarrow\ \vdash \alpha\rightarrow\beta}$

c3) $\vdash \alpha\rightarrow\beta \Rightarrow \alpha \vdash \beta$

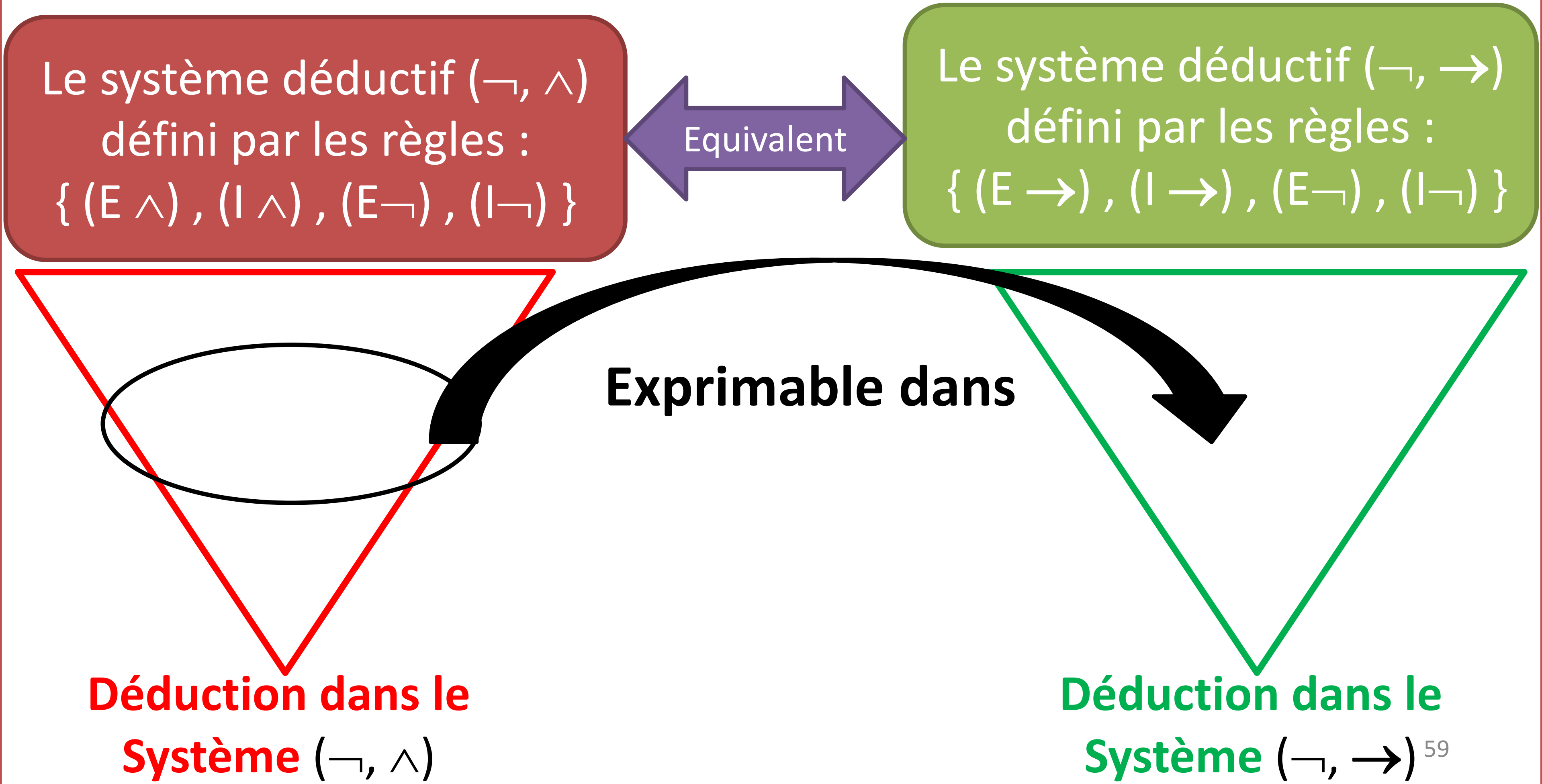
d1) $\alpha, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \beta$

d2) $\beta, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha$

d3) $\alpha \vdash \beta$ et $\beta \vdash \alpha \Rightarrow\ \vdash \alpha\leftrightarrow\beta$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 2eme sens



Autres Systèmes déductifs

Exercice N°2

Enoncé de l'exercice N°2 : Montrer les déductions suivantes dans le Système déductif **($\neg$, $\rightarrow$)**

- $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ ➡ Règle ($E\wedge$) $1^{ère}$ forme
- $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ ➡ Règle ($E\wedge$) $2^{ème}$ forme
- $\alpha\ ,\ \beta \vdash \alpha \wedge \beta$ ➡ Règle ($I\wedge$)

$$\alpha\wedge\beta =_{def} \neg(\alpha\rightarrow\neg\beta)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \rightarrow)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\alpha \rightarrow \neg \beta) \vdash \alpha$$

Système déductif (¬, →)

Exercice 2

$$\neg(\alpha \to \neg \beta) \vdash \alpha$$

On suppose : $\neg\alpha$ et α

On a : $\neg(\alpha \to \neg \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha} \qquad \cancel{\neg\alpha}}{\neg \beta}\ \text{Contradiction (a4)}}{\alpha \to \neg \beta}\ (I \to) \qquad \neg(\alpha \to \neg \beta)}{\bot}\ (I \neg)}{\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ (E\neg)}$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \rightarrow)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \vdash \beta$$

Système déductif (¬, →)

Exercice 2

$$\neg(\alpha \to \neg\beta) \vdash \beta$$

On suppose : α et $\neg\beta$

On a : $\neg(\alpha \to \neg\beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha} \qquad \cancel{\neg\beta}}{\alpha \to \neg\beta}\,(I \to) \qquad \neg(\alpha \to \neg\beta)}{\perp}}{\neg\neg\beta}\,(I\,\neg)}{\beta}\,(E\neg)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha , \beta \vdash \alpha \wedge \beta$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \rightarrow)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\alpha , \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

Système déductif (¬, →)

Exercice 2

$$\alpha , \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

On suppose : $\alpha \rightarrow \neg \beta$

On a : α et β

$$\dfrac{\alpha \cancel{\rightarrow \neg} \beta \qquad \alpha}{\neg \beta}\,(E \rightarrow) \qquad\qquad \beta$$

$$\dfrac{\perp}{\neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)}\,(I\neg)$$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

CONCLUSION

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E\wedge), (I\wedge), (E\neg), (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \rightarrow)$ défini par les règles :
$\{ (E\rightarrow), (I\rightarrow), (E\neg), (I\neg) \}$

Quelques déductions dans le système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Application 1

1. Montrer le théorème suivant dans le système déductif $(\neg, \rightarrow)$:

$$\vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta)$$

Donc, cela revient à :

$$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha \;\vdash (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

Donc, cela revient à :

$$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha \;\;,\;\; \neg\beta \rightarrow \alpha \;\vdash\; \beta$$

Système déductif (¬, →)
Application 1

$$\neg\beta \to \neg\alpha \ , \quad \neg\beta \to \alpha \ \vdash \ \beta$$

On suppose : $\neg\beta$

On a : $\neg\beta \to \neg\alpha$ et $\neg\beta \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\cancel{\neg\beta}\qquad\neg\beta\to\neg\alpha}{\neg\alpha}\,(E\to)\qquad\qquad\dfrac{\cancel{\neg\beta}\qquad\neg\beta\to\alpha}{\alpha}\,(E\to)\\ \bot\end{array}}{\neg\neg\beta}\,(I\,\neg)}{\beta}\,(E\neg)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$

Application 2

2. Montrer dans le système déductif $(\neg, \rightarrow)$:

$$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) , \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \delta$$

Donc, cela revient à :

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) , \alpha \rightarrow \beta , \alpha \vdash \delta$$

Système déductif (¬, →)
Application 2

$$\alpha \to (\beta \to \delta)\ ,\ \alpha \to \beta\ ,\ \alpha \vdash \delta$$

On a : $\alpha \to (\beta \to \delta)$, $\alpha \to \beta$ et α

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(E\to) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to (\beta \to \delta)}{\beta \to \delta}\,(E\to)}{\delta}\,(E\to)$$

Système déductif $(\neg, \rightarrow)$
Application 3

3. Montrer dans le système déductif $(\neg, \rightarrow)$

$$P \rightarrow Q \rightarrow (R \rightarrow S),\ \neg S \vee \neg Q\ ,\ P \rightarrow Q \vdash \neg R \vee \neg P$$

$$\alpha \vee \beta =_{def} \neg \alpha \rightarrow \beta$$

Donc, cela revient à :

$$P \rightarrow Q \rightarrow (R \rightarrow S),\ \neg\neg S \rightarrow \neg Q\ ,\ P \rightarrow Q \vdash \neg\neg R \rightarrow \neg P$$

Système déductif (¬, →)

Application 3

$$P\to Q\to(R\to S),\ \neg\neg S\to\neg Q,\ P\to Q \vdash \neg\neg R\to\neg P$$

On a : $P\to Q\to(R\to S)$, $\neg\neg S\to\neg Q$ et $P\to Q$

On suppose : P et $\neg\neg R$

$(P\to Q)\to(R\to S)$ $\quad P\to Q \quad \neg\neg S\to\neg Q \quad \cancel{P} \quad \cancel{\neg\neg R}$

$$\dfrac{\cancel{\neg\neg R}}{R}\ (E\neg)$$

$$\dfrac{(P\to Q)\to(R\to S)\qquad P\to Q}{R\to S}\ (E\to)$$

$$\dfrac{R\to S\qquad R}{S}\ (E\to)$$

$$\dfrac{S}{\neg\neg S}\ \boxed{(a1)}$$

$$\dfrac{P\to Q\qquad P}{Q}\ (E\to) \qquad \dfrac{\neg\neg S\to\neg Q\qquad \neg\neg S}{\neg Q}\ (E\to)$$

$$\dfrac{\dfrac{Q\qquad \neg Q}{\bot}}{\neg P}\ (I\neg)$$

$$\dfrac{\neg P}{\neg\neg R\to\neg P}\ (I\to)$$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Montrons que :

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E \wedge) , (I \wedge) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \vee)$ défini par les règles :
$\{ (E \vee) , (I \vee) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Déduction dans le Système $(\neg, \wedge)$

Déduction dans le Système $(\neg, \vee)$

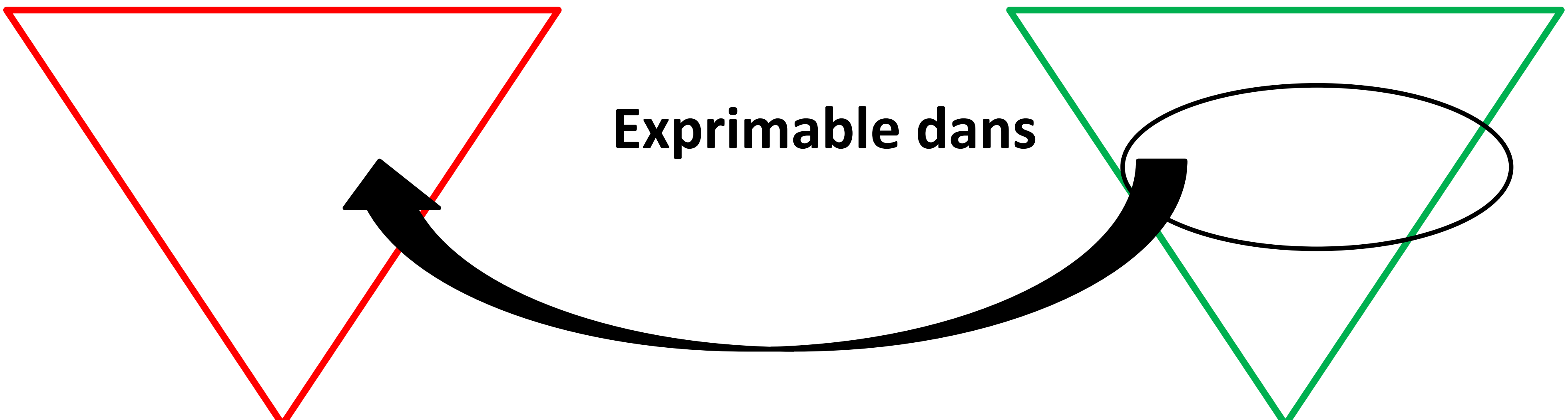
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 1er sens

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E \wedge), (I \wedge), (E\neg), (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \vee)$ défini par les règles :
$\{ (E \vee), (I \vee), (E\neg), (I\neg) \}$



Déduction dans le Système $(\neg, \wedge)$

Déduction dans le Système $(\neg, \vee)$

Autres Systèmes déductifs

Les règles de $\vee$ dans le système $(\neg, \wedge)$:

$(I\vee)$ 1er: $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ -- $(I\vee)$ 2eme: $\beta \vdash \alpha \vee \beta$

$(E\vee)$: $\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta \Rightarrow \alpha \vee \beta \vdash \delta$

Déjà fait

<u>Exercice 1</u>:

Démontrer les déductions suivantes dans le langage $L_P(\neg,\wedge)$:

a1) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

a2) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

a3) $\beta \wedge \neg\beta \vdash \alpha$ a4) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

b1) $\alpha \vdash \alpha\vee\beta$ b2) $\beta \vdash \alpha\vee\beta$ b3) $(\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta) \Rightarrow \alpha\vee\beta \vdash \delta$

c1) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ c2) $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \alpha\to\beta$ c3) $\vdash \alpha\to\beta \Rightarrow \alpha \vdash \beta$

d1) $\alpha, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \beta$ d2) $\beta, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha$ d3) $\alpha \vdash \beta$ et $\beta \vdash \alpha \Rightarrow \vdash \alpha\leftrightarrow\beta$

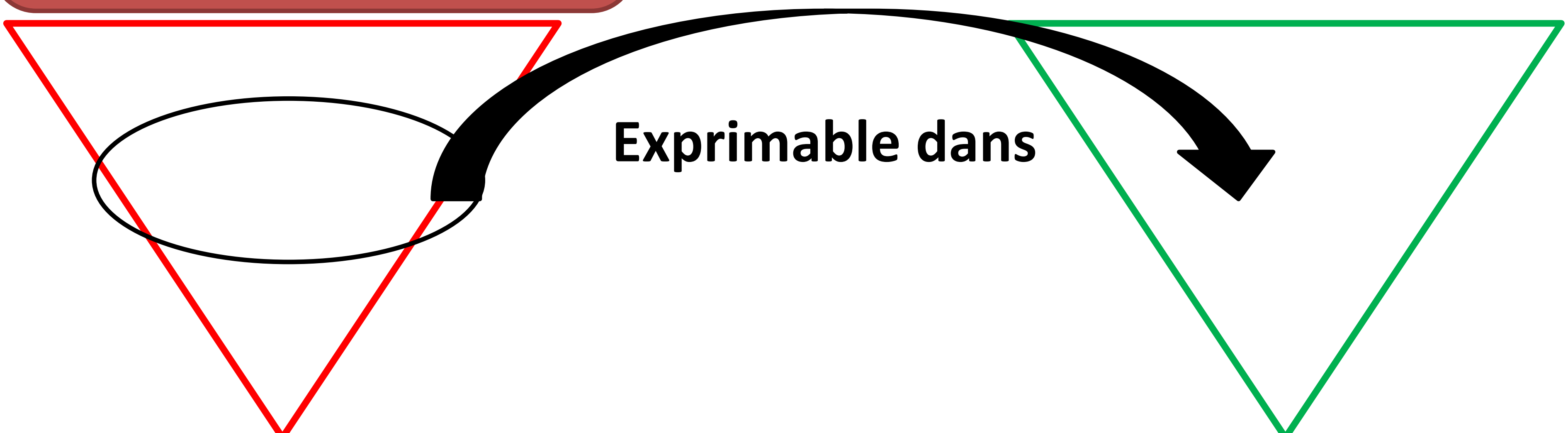
Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

Application du 2eme sens

Le système déductif ($\neg$, $\wedge$) défini par les règles :
{ (E $\wedge$) , (I $\wedge$) , (E$\neg$) , (I$\neg$) }

Equivalent

Le système déductif ($\neg$, $\vee$) défini par les règles :
{ (E $\vee$) , (I $\vee$) , (E$\neg$) , (I$\neg$) }



Déduction dans le Système ($\neg$, $\wedge$)

Déduction dans le Système ($\neg$, $\vee$)

Autres Systèmes déductifs

Exercice N°2

Enoncé de l'exercice N°2 : Montrer les déductions suivantes dans le Système déductif **($\neg$, $\vee$)**

- $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ ➡ Règle ($E\wedge$) 1ère forme
- $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ ➡ Règle ($E\wedge$) 2ème forme
- $\alpha \; , \; \beta \vdash \alpha \wedge \beta$ ➡ Règle ($I\wedge$)

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \vee)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \vdash \alpha$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

$$\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \vdash \alpha$$

On suppose : $\neg\alpha$

On a : $\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg \alpha}}{\neg \alpha \vee \neg \beta}\,(\mathrm{I} \vee) \qquad \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)}{\dfrac{\perp}{\neg \neg \alpha}\,(\mathrm{I} \neg)}$$

$$\dfrac{\neg \neg \alpha}{\alpha}\,(\mathrm{E}\neg)$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \vee)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \vdash \beta$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

$$\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \vdash \beta$$

On suppose : $\neg \beta$

On a : $\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg \beta}}{\neg \alpha \vee \neg \beta}\,(I \vee) \qquad \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)}{\dfrac{\perp}{\neg \neg \beta}\,(I \neg)}}{\beta}\,(E \neg)$$

Système déductif $(\neg, \vee)$

Exercice 2

Montrer : $\alpha , \beta \vdash \alpha \wedge \beta$

$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$

Etant donné qu'on est dans le système déductif de $\mathcal{L}p(\neg, \vee)$,

on doit remplacer le $\wedge$ par sa définition.

Cela revient à :

$$\alpha , \beta \vdash \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$$

Système déductif (¬, ∨)

Exercice 2

$$\alpha , \beta \vdash \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$$

On suppose : $\neg \alpha \vee \neg \beta$, $\neg \alpha$ **et** $\neg \beta$

On a : α et β

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg \alpha \vee \neg \beta} \qquad \dfrac{\cancel{\neg \alpha} \qquad \alpha}{\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)}\,\text{Contra (a4)} \qquad \dfrac{\cancel{\neg \beta} \qquad \beta}{\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)}\,\text{Contra (a4)}}{\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)}\,(E \vee) \qquad \perp}{\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)}\,(I \neg)$$

Equivalence entre Les Systèmes Déductifs de la Logique des Propositions

CONCLUSION

Le système déductif $(\neg, \wedge)$ défini par les règles :
$\{ (E \wedge) , (I \wedge) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Equivalent

Le système déductif $(\neg, \vee)$ défini par les règles :
$\{ (E \vee) , (I \vee) , (E\neg) , (I\neg) \}$

Fin TD sur les systèmes déductifs