Logique des Propositions

Corrigé Série N°3
Exo1 et Exo2

Etude Sémantique

Série N°3 : Exercice N°1

a) $P \leftrightarrow \neg P$

P	$\neg P$	$P \leftrightarrow \neg P$
V	F	F
F	V	F

Quelque soit l'instanciation la formule : $P \leftrightarrow \neg P$ est toujours fausse. Donc cette formule est insatisfiable. C'est une Antilogie.

Série N°3 : Exercice N°1

c) $(P \vee Q) \rightarrow (\neg P)$

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \vee Q \rightarrow \neg P$
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Il existe au moins une instanciation pour laquelle la formule : $P \vee Q \rightarrow \neg P$ est vraie. Donc cette formule est Satisfiable.

Elle contient 2 modèles : (P=F - Q=V) et (P=F - Q=F)

Et 2 contre-modèles : (P=V - Q=V) et (P=V - Q=F)

Série N°3 : Exercice N°1

d) $P \wedge (P \vee Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Il existe au moins une instanciation pour laquelle la formule : $P \wedge (P \vee Q)$ est vraie. Donc cette formule est Satisfiable.

Elle contient 2 modèles : (P=V - Q=V) et (P=V - Q=F)

Et 2 contre-modèles : (P=F - Q=V) et (P=F - Q=F)

Série N°3 : Exercice N°1

b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$P \rightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Série N°3 : Exercice N°2

$$1/\ \overbrace{\models\ \alpha}^{\text{Hypothèse}} \Rightarrow \overbrace{\models\ \alpha\vee\beta}^{\text{Conclusion 1}} \text{ Et } \overbrace{\alpha\wedge\beta\equiv\beta}^{\text{Conclusion 2}}$$

Si ……………..Alors ………………………………………………

Soit une instanciation quelconque de la TV.

Var prop	α	β	$\alpha\vee\beta$	$\alpha\wedge\beta$
	V	….	V	….
	. .	. .	. .	. .
	V	V	V	V
	V	F	V	F
	. .	. .	. .	. .
	V	….	V	….

Série N°3 : Exercice N°2

Pour cette instanciation : α = V (Hyp : α Tautologie)

et deux cas se présentent pour β :

Soit : <u>1er Cas</u> : $\boxed{\beta=V}$ Donc : $\boxed{\alpha\vee\beta=V}$ et $\boxed{\alpha\wedge\beta=V}$

Soit : <u>2ème Cas</u> : $\boxed{\beta=F}$ Donc : $\boxed{\alpha\vee\beta=V}$ et $\boxed{\alpha\wedge\beta=F}$

Conclusion 1 :

$\alpha\vee\beta$ Tautologie

Conclusion 2 :

$$\alpha \wedge \beta \equiv \beta$$

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence $\alpha \equiv \beta$ (sans utiliser les TV)

A/ <u>Théorème de Remplacement :</u>

α : …………………… β…………………

α' : ……………………β'………………

Si $\beta \equiv \beta'$ Alors $\alpha \equiv \alpha'$

B/ Equivalence Logique ($\equiv$) est :

-Symétrique : si $\alpha \equiv \beta$ alors $\beta \equiv \alpha$

-Transitive : si $\alpha \equiv \beta$ et $\beta \equiv \delta$ alors $\alpha \equiv \delta$

C/

Par Transitivité

$$\alpha \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \ldots\ldots \equiv \alpha_n \equiv \beta$$

Commutativité

$$\alpha\wedge\beta \equiv \beta\wedge\alpha$$

$$\alpha\vee\beta \equiv \beta\vee\alpha$$

Associativité

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\delta \equiv \alpha\wedge(\beta\wedge\delta)$$

$$(\alpha\vee\beta)\vee\delta \equiv \alpha\vee(\beta\vee\delta)$$

Idempotence

$$\alpha\wedge\alpha \equiv \alpha \text{ et } \alpha\vee\alpha \equiv \alpha$$

Double Négation

$$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$$

Antilogie

$$\alpha \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \text{ et } \alpha \vee \mathbf{F} \equiv \alpha$$

Tautologie

$$\alpha \wedge \mathbf{V} \equiv \alpha \text{ et } \alpha \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$$

Distributivité

$$\alpha\wedge(\beta\vee\delta) \equiv (\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\delta)$$

$$\alpha\vee(\beta\wedge\delta) \equiv (\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\delta)$$

Lois de Morgan

$$\neg(\alpha\wedge\beta) \equiv \neg\alpha\vee\neg\beta$$

$$\neg(\alpha\vee\beta) \equiv \neg\alpha\wedge\neg\beta$$

Abréviations

$$\alpha\vee\beta \equiv \neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$$

$$\alpha\rightarrow\beta \equiv \neg(\alpha\wedge\neg\beta) \equiv \neg\alpha\vee\beta$$

$$\alpha\leftrightarrow\beta \equiv \neg(\alpha\wedge\neg\beta)\wedge\neg(\beta\wedge\neg\alpha)$$

$$\equiv (\neg\alpha\vee\beta)\wedge(\neg\beta\vee\alpha)$$

Contraposé

$$\alpha\rightarrow\beta \equiv \neg\beta\rightarrow\neg\alpha$$

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$\mathbf{P \to Q \equiv \neg P \lor Q}$$

$P \to Q \equiv$

$\neg(P \land \neg Q) \equiv$ (Abréviation de $\to$)

$\neg P \lor \neg\neg Q \equiv$ (loi de Morgan)

$\neg P \lor Q \equiv$ (Double Négation)

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$\mathbf{P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)}$$

$P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv$

$\neg (P \wedge \neg (Q \wedge R)) \equiv$ (Abréviation de $\rightarrow$)

$\neg (P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \equiv$ (loi de Morgan)

$\neg ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)) \equiv$ (Distributivité)

$\neg (P \wedge \neg Q) \wedge \neg (P \wedge \neg R) \equiv$ (loi de Morgan)

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg (P \wedge \neg R) \equiv$ (Abréviation de $\rightarrow$)

$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ (Abréviation de $\rightarrow$)

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$\mathbf{P \leftrightarrow Q \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)}$$

$P \leftrightarrow Q \equiv$

$(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P) \equiv$ (Abréviation de $\leftrightarrow$)

$(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P) \equiv$ X2 (Abréviation de $\rightarrow$)

$((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Q) \land P) \equiv$ (Distributivité)

$(\neg Q \land (\neg P \lor Q)) \lor (P \land (\neg P \lor Q)) \equiv$ X2 (Commutativité)

$((\neg Q \land \neg P) \lor \cancel{(\neg Q \land Q)}) \lor (\cancel{(P \land \neg P)} \lor (P \land Q)) \equiv$ X2(Distr)

$(\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q) \equiv$ X2 (Antilogie)

$(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \equiv$ (Commutativité)

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$\neg(P\wedge Q) \wedge ((P\vee R) \wedge \neg R) \equiv P \wedge \neg(Q\vee R)$$

$\neg(P\wedge Q) \wedge ((P\vee R) \wedge \neg R) \equiv$

$\neg(P\wedge Q) \wedge ((P\wedge\neg R) \vee \cancel{(R\wedge\neg R)}) \equiv$ (Distributivité)

$\neg(P\wedge Q) \wedge (P\wedge\neg R) \equiv$ (Antilogie)

$(\neg P\vee\neg Q) \wedge (P\wedge\neg R) \equiv$ (Loi de Morgan)

$((\neg P\vee\neg Q)\wedge P) \wedge \neg R \equiv$ (Associativité)

$(P\wedge (\neg P\vee\neg Q)) \wedge \neg R \equiv$ (Commutativité)

$(\cancel{(P\wedge\neg P)} \vee (P\wedge\neg Q)) \wedge \neg R \equiv$ (Distributivité)

$(P\wedge\neg Q) \wedge \neg R \equiv$ (Antilogie)

$P\wedge (\neg Q \wedge \neg R) \equiv$ (Associativité)

$P\wedge \neg (Q \vee R) \equiv$ (Loi de Morgan)