Logique des Propositions

Corrigé Série N°4
Exo1

Etude Sémantique

Rappel Clauses

Algorithme de Réfutation :

Clause 1 :

$$\Gamma = \Sigma \cup \{\neg\neg\alpha\}$$

Sera remplacé par

Branche

$$\Gamma' = \Sigma \cup \{\alpha\}$$

Γ' Inconsistant $\Rightarrow$ Γ Inconsistant	
Γ' Satisfiable $\Rightarrow$ Γ Satisfiable	

Rappel Clauses

Algorithme de Réfutation :

Clause 2 :

$$\Gamma = \Sigma \cup \{\alpha \wedge \beta\}$$

Sera remplacé par

Branche

$$\Gamma' = \Sigma \cup \{\alpha , \beta\}$$

Γ' Inconsistant $\Rightarrow$ Γ Inconsistant	
Γ' Satisfiable $\Rightarrow$ Γ Satisfiable	

Rappel Clauses

Algorithme de Réfutation :

Clause 3 :

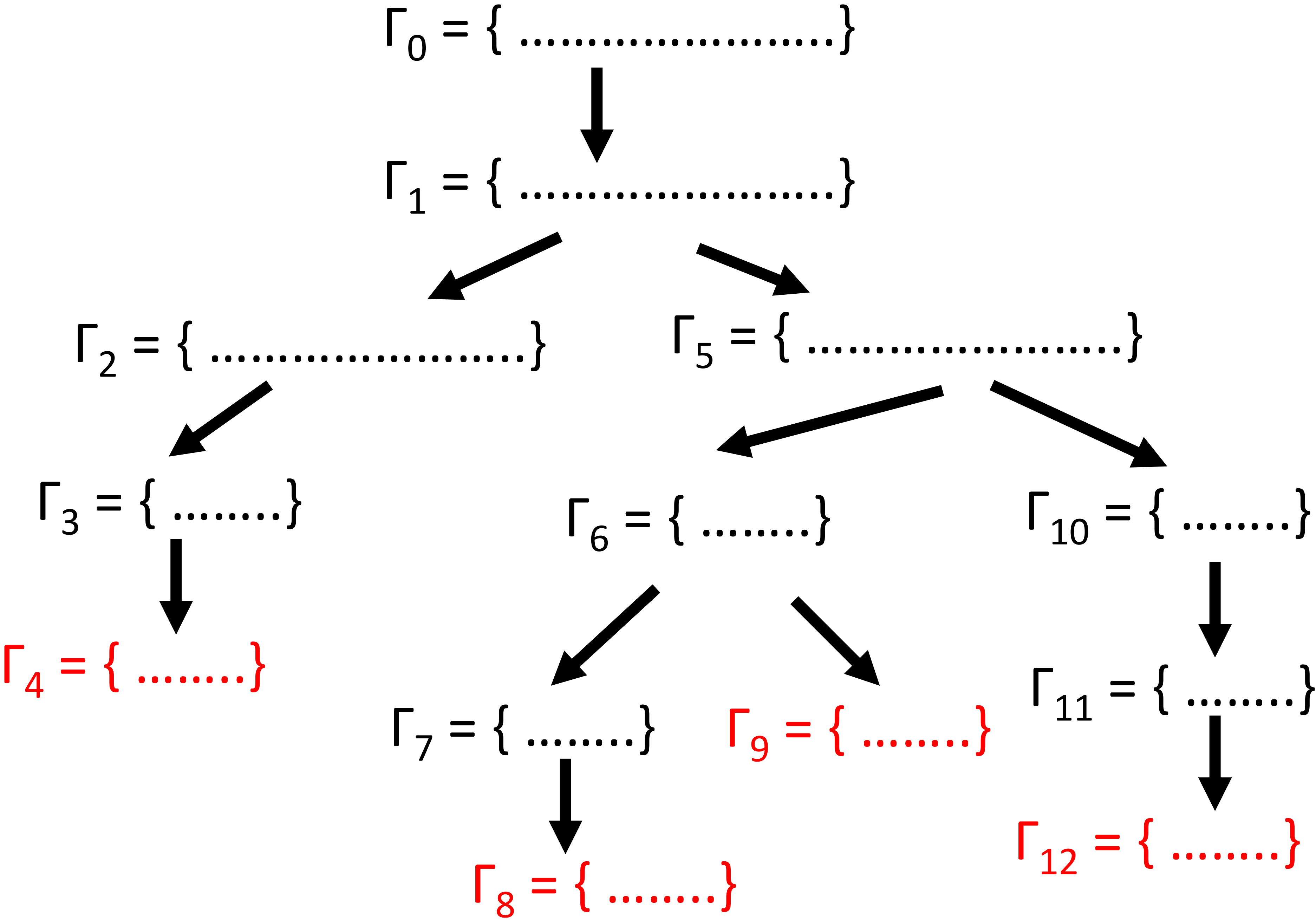
$$\Gamma = \Sigma \cup \{\neg(\alpha \wedge \beta)\}$$

Sera remplacé par :

Fourche

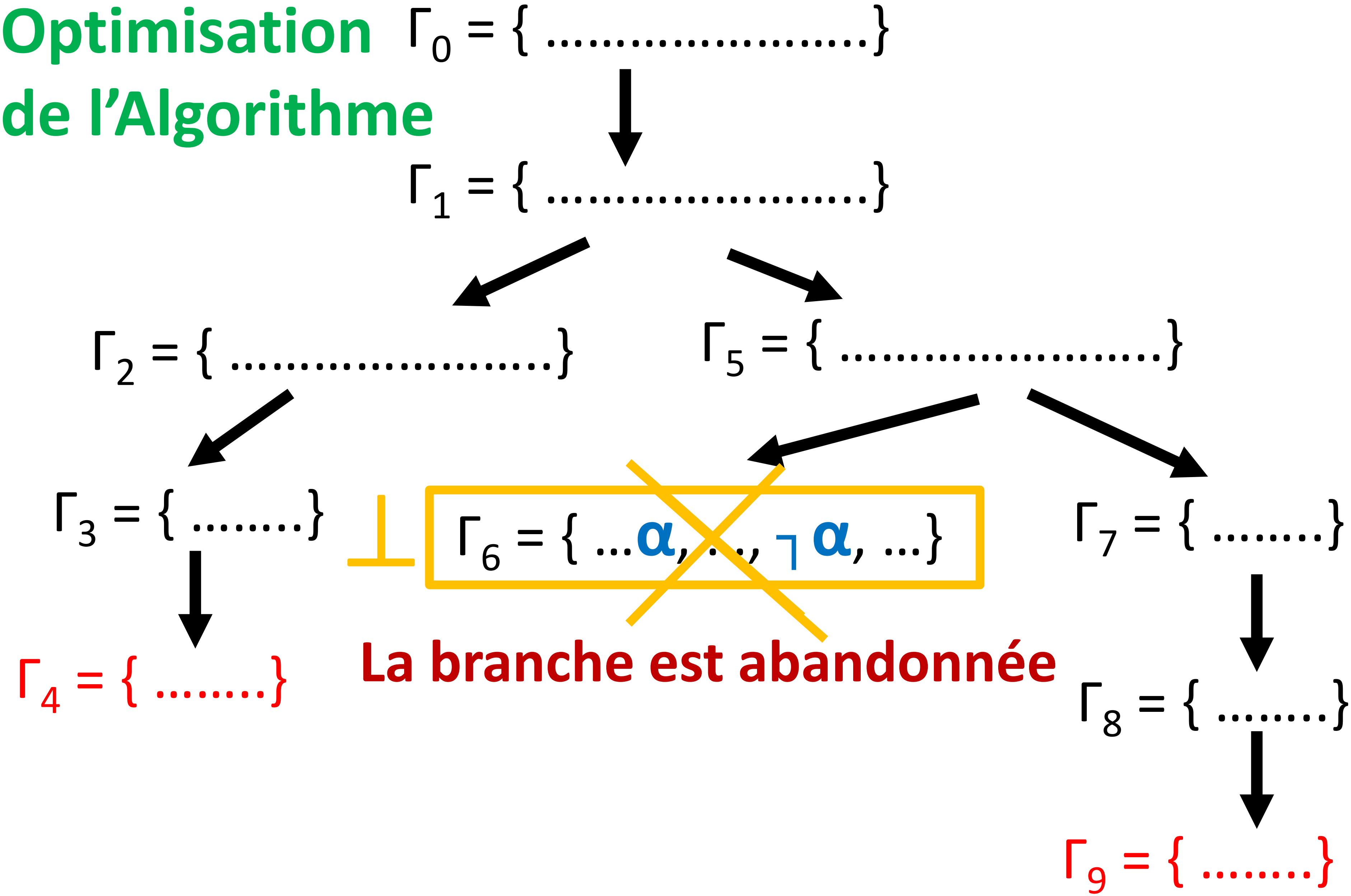
$$\Gamma' = \Sigma \cup \{\neg\alpha\} \qquad \Gamma'' = \Sigma \cup \{\neg\beta\}$$

Γ’ **et** Γ’’ Inconsistants ⇒ Γ Inconsistant
Γ’ **ou** Γ’’ Satisfiable ⇒ Γ Satisfiable



Jusqu'aux Ensembles de littéraux

Optimisation de l'Algorithme



Série N°4 : Exercice N°1

1. Montrer la déduction suivante en utilisant l'algorithme de réfutation vu en cours :

$$\mathbf{P \lor (Q \to R),\ P \lor Q\ \vdash\ P \lor R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{\Gamma_0 = \{\ P \lor (Q \to R),\ P \lor Q\ ,\ \neg(P \lor R)\ \}\ Inconsistant}$$

$\alpha \lor \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \land \neg\beta)$

$\alpha \to \beta =_{def} \neg(\alpha \land \neg\beta)$

$\neg(\alpha \lor \beta) =_{def} \neg\alpha \land \neg\beta$

$$\mathbf{\Gamma_0 = \{\neg(\neg P \land \neg\neg(Q \land \neg R),\ \neg(\neg P \land \neg Q)\ ,\ \neg P \land \neg R\ \}}$$

Inconsistant

Série N°4 : Exercice N°1

$$\Gamma_0 = \{\neg(\neg P\land\neg\neg(Q\land\neg R)), \neg(\neg P\land\neg Q), \neg P\land\neg R\}$$

$$\Gamma_1 = \{\neg(\neg P\land\neg\neg(Q\land\neg R)), \neg(\neg P\land\neg Q), \neg P, \neg R\}$$

$$\Gamma_2 = \{\neg(\neg P\land\neg\neg(Q\land\neg R)), \overset{\perp}{\boxed{\neg\neg P, \neg P}}, \neg R\}$$

$$\boxed{\Gamma_3 = \{\neg(\neg P\land\neg\neg(Q\land\neg R)), \neg\neg Q, \neg P, \neg R\}}$$

$$\Gamma_3 = \{\neg(\neg P\land\neg\neg(Q\land\neg R)), Q, \neg P, \neg R\}$$

Série N°4 : Exercice N°1

$$\Gamma_3 = \{\neg(\neg P \wedge \neg\neg\neg(Q \wedge \neg R)), Q, \neg P, \neg R\}$$

$$\Gamma_4 = \{\overset{\perp}{\boxed{\neg\neg P,}}\ Q, \boxed{\neg P}, \neg R\}$$

$$\Gamma_5 = \{\neg\neg\neg(Q \wedge \neg R), Q, \neg P, \neg R\}$$

$$\Gamma_6 = \{\neg(Q \wedge \neg R), Q, \neg P, \neg R\}$$

$$\Gamma_7 = \{\overset{\perp}{\boxed{\neg Q, Q,}}\ \neg P, \neg R\} \qquad \Gamma_7 = \{\boxed{\neg\neg R,}\ Q, \neg P, \overset{\perp}{}\boxed{\neg R}\}$$

Série N°4 : Exercice N°1

Conclusion :

Toutes les branches mènent vers des ensembles inconsistants Donc :

$$\Gamma_0 = \{\neg(\neg P \wedge \neg\neg\neg(Q \wedge \neg R)),\ \neg(\neg P \wedge \neg Q)\ ,\ \neg P \wedge \neg R\ \}$$

Est Inconsistant

Série N°4 : Exercice N°1

2. Compléter l'algorithme de réfutation pour introduire les règles des connecteurs $\vee$ et $\rightarrow$.

<u>Connecteur $\vee$</u> :

$$\Sigma \cup \{ \alpha\vee\beta \}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma \cup \{ \neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta) \} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Sigma \cup \{\neg\neg\alpha\} \arrow[d] & & \Sigma \cup \{\neg\neg\beta\} \arrow[d] \\
\Sigma \cup \{\alpha\} & & \Sigma \cup \{\beta\}
\end{tikzcd}$$

Série N°4 : Exercice N°1

2. Compléter l'algorithme de réfutation pour introduire les règles des connecteurs $\vee$ et $\rightarrow$.

Connecteur $\vee$:

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \vee \beta)\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)\}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma \cup \{\neg\alpha \wedge \neg\beta\}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma \cup \{\neg\alpha , \neg\beta\}$$

Série N°4 : Exercice N°1

En Conclusion

Clauses du $\vee$

$$\Sigma \cup \{ \alpha \vee \beta \} \rightarrow \Sigma \cup \{\alpha\}$$

$$\Sigma \cup \{ \alpha \vee \beta \} \rightarrow \Sigma \cup \{\beta\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \vee \beta) \} \longrightarrow \Sigma \cup \{\neg\alpha , \neg\beta\}$$

Série N°4 : Exercice N°1

2. Compléter l'algorithme de réfutation pour introduire les règles des connecteurs $\vee$ et $\rightarrow$.

<u>Connecteur $\rightarrow$</u> :

$$\Sigma \cup \{ \alpha \rightarrow \beta \}$$

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma \cup \{ \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Sigma \cup \{\neg\alpha\} & & \Sigma \cup \{\neg\neg\beta\} \arrow[d] \\
& & \Sigma \cup \{\beta\}
\end{tikzcd}$$

Série N°4 : Exercice N°1

2. Compléter l'algorithme de réfutation pour introduire les règles des connecteurs $\vee$ et $\rightarrow$.

<u>Connecteur $\rightarrow$</u> :

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \rightarrow \beta)\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma \cup \{\alpha \wedge \neg\beta\}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma \cup \{\alpha, \neg\beta\}$$

Série N°4 : Exercice N°1

En Conclusion

Clauses du →

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \Sigma \cup \{\neg\alpha\} \\
\Sigma \cup \{\alpha \rightarrow \beta\} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \Sigma \cup \{\beta\}
\end{tikzcd}
$$

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \rightarrow \beta)\} \longrightarrow \Sigma \cup \{\alpha , \neg\beta\}$$

Série N°4 : Exercice N°1

3. Montrer la déduction précédente (Q1), en utilisant l'algorithme de réfutation enrichi avec les règles obtenues précédemment.

$$\mathbf{P \vee (Q \rightarrow R),\ P \vee Q\ \vdash\ P \vee R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{\Gamma_0 = \{\ P \vee (Q \rightarrow R),\ P \vee Q\ ,\ \neg(P \vee R)\ \}}\ \textbf{Inconsistant}$$

Série N°4 : Exercice N°1

$$\Gamma_0 = \{\, P \vee (Q \rightarrow R),\ P \vee Q\ ,\ \neg(P \vee R)\ \}$$

$$\Gamma_1 = \{\, P \vee (Q \rightarrow R),\ P \vee Q\ ,\ \neg P\ ,\ \neg R\ \}$$

$$\Gamma_2 = \{\, P \vee (Q \rightarrow R),\ \boxed{P}\ ,\ \boxed{\neg P}\ ,\ \neg R\ \}$$

$$\perp$$

$$\boxed{\Gamma_3 = \{\, P \vee (Q \rightarrow R),\ Q\ ,\ \neg P\ ,\ \neg R\ \}}$$

Série N°4 : Exercice N°1

$$\Gamma_3 = \{ P \vee (Q \to R), Q, \neg P, \neg R \}$$

$$\Gamma_4 = \{ \boxed{P}, Q, \boxed{\neg P}, \neg R \}$$

$$\perp$$

$$\Gamma_5 = \{ Q \to R, Q, \neg P, \neg R \}$$

$$\Gamma_2 = \{ \boxed{\neg Q}, \boxed{Q}, \neg P, \neg R \}$$

$$\perp$$

$$\Gamma_3 = \{ \boxed{R}, Q, \neg P, \boxed{\neg R} \}$$

$$\perp$$

Série N°4 : Exercice N°1

Conclusion :

Toutes les branches mènent vers des ensembles inconsistants Donc :

$$\boldsymbol{\Gamma_0 = \{\ P \vee (Q \rightarrow R),\ P \vee Q\ ,\ \neg(P \vee R)\ \}}$$

Est Inconsistant