

Logique des Propositions

Corrigé Série N°3 **Exo1 et Exo2**

Etude Sémantique

Série N°3 : Exercice N°1

a) $P \leftrightarrow \neg P$

P	$\neg P$	$P \leftrightarrow \neg P$
V	F	F
F	V	F

Quelque soit l'instanciation la formule : $P \leftrightarrow \neg P$ est toujours fausse. Donc cette formule est **insatisfiable**. C'est une **Antilogie**.

Série N°3 : Exercice N°1

c) $(P \vee Q) \rightarrow (\neg P)$

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \vee Q \rightarrow \neg P$
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Il existe au moins une instanciation pour laquelle la formule : $P \vee Q \rightarrow \neg P$ est vraie. Donc cette formule est **Satisfiable**.

Elle contient 2 modèles : $(P=F - Q=V)$ et $(P=F - Q=F)$

Et 2 contre-modèles : $(P=V - Q=V)$ et $(P=V - Q=F)$

Série N°3 : Exercice N°1

d) $P \wedge (P \vee Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Il existe au moins une instanciation pour laquelle la formule : $P \wedge (P \vee Q)$ est vraie. Donc cette formule est **Satisfiable**.

Elle contient 2 modèles : $(P=V - Q=V)$ et $(P=V - Q=F)$

Et 2 contre-modèles : $(P=F - Q=V)$ et $(P=F - Q=F)$

Série N°3 : Exercice N°1

b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$P \rightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Série N°3 : Exercice N°2

Hypothèse

Conclusion 1

Conclusion 2

$$1/ \underbrace{\models \alpha}_{\text{Hypothèse}} \Rightarrow \underbrace{\models \alpha \vee \beta}_{\text{Conclusion 1}} \quad \text{Et} \quad \underbrace{\alpha \wedge \beta \equiv \beta}_{\text{Conclusion 2}}$$

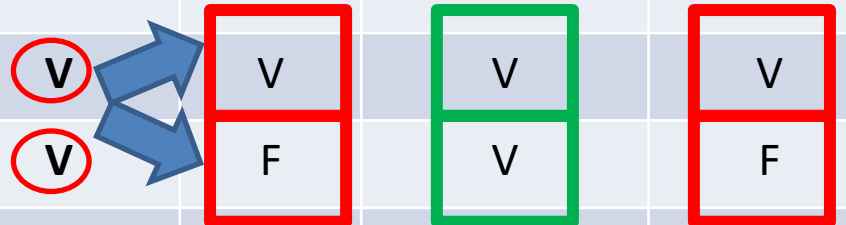
Si Alors

Var prop	α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$
	V	V

	V	V	V	V
	V	F	V	F

	V	V

Soit une
instanciation
quelconque
de la TV.



Série N°3 : Exercice N°2

Pour cette instanciación : $\alpha = V$ (Hyp : α Tautologie)
et deux cas se présentent pour β :

Soit : 1^{er} Cas : $\beta = V$ Donc : $\alpha \vee \beta = V$ et $\alpha \wedge \beta = V$

Soit : 2^{ème} Cas : $\beta = F$ Donc : $\alpha \vee \beta = V$ et $\alpha \wedge \beta = F$

Conclusion 1 :
 $\alpha \vee \beta$ Tautologie

Conclusion 2 :
 $\alpha \wedge \beta \equiv \beta$

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence $\alpha \equiv \beta$ (sans utiliser les TV)

A/ Théorème de Remplacement :

α : β

α' : β'

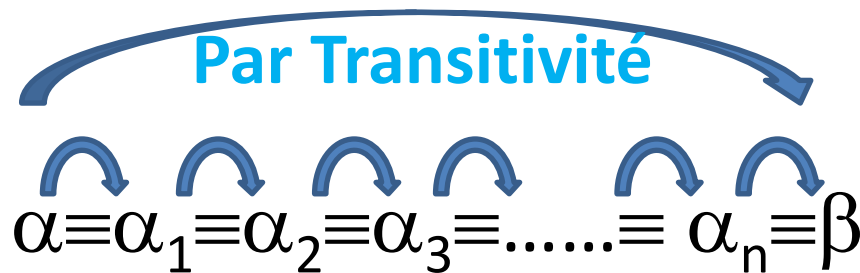
Si $\beta \equiv \beta'$ Alors $\alpha \equiv \alpha'$

B/ Equivalence Logique (\equiv) est :

-Symétrique : si $\alpha \equiv \beta$ alors $\beta \equiv \alpha$

-Transitive : si $\alpha \equiv \beta$ et $\beta \equiv \delta$ alors $\alpha \equiv \delta$

C/



Commutativité

$$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$$

$$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$$

Associativité

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \delta \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \delta)$$

$$(\alpha \vee \beta) \vee \delta \equiv \alpha \vee (\beta \vee \delta)$$

Idempotence

$$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha \text{ et } \alpha \vee \alpha \equiv \alpha$$

Double Négation

$$\neg \neg \alpha \equiv \alpha$$

Antilogie

$$\alpha \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \text{ et } \alpha \vee \mathbf{F} \equiv \alpha$$

Tautologie

$$\alpha \wedge \mathbf{V} \equiv \alpha \text{ et } \alpha \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$$

Distributivité

$$\alpha \wedge (\beta \vee \delta) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \delta)$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \delta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \delta)$$

Lois de Morgan

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg \alpha \vee \neg \beta$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$$

Abréviations

$$\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$$

$$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg \beta) \equiv \neg \alpha \vee \beta$$

$$\begin{aligned} \alpha \leftrightarrow \beta &\equiv \neg(\alpha \wedge \neg \beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg \alpha) \\ &\equiv (\neg \alpha \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee \alpha) \end{aligned}$$

Contraposé

$$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$$

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$\mathbf{P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q}$$

$$P \rightarrow Q \equiv$$

$$\neg(P \wedge \neg Q) \equiv$$

(Abréviation de \rightarrow)

$$\neg P \vee \neg \neg Q \equiv$$

(loi de Morgan)

$$\neg P \vee Q \equiv$$

(Double Négation)

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

$$P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv$$

$$\neg (P \wedge \neg (Q \wedge R)) \equiv$$

(Abréviation de \rightarrow)

$$\neg (P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \equiv$$

(loi de Morgan)

$$\neg ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)) \equiv$$

(Distributivité)

$$\neg (P \wedge \neg Q) \wedge \neg (P \wedge \neg R) \equiv$$

(loi de Morgan)

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg (P \wedge \neg R) \equiv$$

(Abréviation de \rightarrow)

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

(Abréviation de \rightarrow)

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv \quad \text{(Abréviation de } \leftrightarrow \text{)}$$

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \equiv \quad \text{X2 (Abréviation de } \rightarrow \text{)}$$

$$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P) \equiv \quad \text{(Distributivité)}$$

$$(\neg Q \wedge (\neg P \vee Q)) \vee (P \wedge (\neg P \vee Q)) \equiv \text{X2 (Commutativité)}$$

$$((\neg Q \wedge \neg P) \vee (\cancel{\neg Q \wedge Q})) \vee ((\cancel{P \wedge \neg P}) \vee (P \wedge Q)) \equiv \text{X2 (Distr)}$$

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \equiv \quad \text{X2 (Antilogie)}$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \equiv \quad \text{(Commutativité)}$$

Série N°3 : Exercice N°2

2/ Montrer l'équivalence (sans utiliser les TV)

$$\neg(P \wedge Q) \wedge ((P \vee R) \wedge \neg R) \equiv P \wedge \neg(Q \vee R)$$

$$\neg(P \wedge Q) \wedge ((P \vee R) \wedge \neg R) \equiv$$

$$\neg(P \wedge Q) \wedge ((P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R)) \equiv \quad (\text{Distributivité})$$

$$\neg(P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg R) \equiv \quad (\text{Antilogie})$$

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge \neg R) \equiv \quad (\text{Loi de Morgan})$$

$$((\neg P \vee \neg Q) \wedge P) \wedge \neg R \equiv \quad (\text{Associativité})$$

$$(P \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg R \equiv \quad (\text{Commutativité})$$

$$((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)) \wedge \neg R \equiv \quad (\text{Distributivité})$$

$$(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R \equiv \quad (\text{Antilogie})$$

$$P \wedge (\neg Q \wedge \neg R) \equiv \quad (\text{Associativité})$$

$$P \wedge \neg(Q \vee R) \equiv \quad (\text{Loi de Morgan})$$