Logique des Prédicats

Corrigé Série N°7

Etude Sémantique

USTHB
Faculté Informatique
L. KADDOURI

Logique des Prédicats

Corrigé Série N°7
Exo 1

Série N°7 : Exercice N°1

Soit L le langage de 1er ordre contenant deux symboles de constante a et b, un symbole de fonction f monaire (arité 1) et un symbole de prédicat P binaire (arité 2).

On définit l'Interprétation de domaine $D=\{1, 2, 4, 5\}$ suivante :

$I(a)=1$

$I(b)=5$

$I(f)=\phi$ / $\phi(1)=2$, $\phi(2)=4$, $\phi(4)=5$ et $\phi(5)=1$

$I(P)=\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5),(4,1), (4,2), (5,1) \}$

Série N°7 : Exercice N°1

Interprétation I : **Domaine** D={1, 2, 4, 5}

Constantes : I(a)=1 et I(b)=5 deux éléments de D

Fonction : I(f)=fonction monaire ϕ : D -> D /

ϕ(1)=2, ϕ(2)=4, ϕ(4)=5 et ϕ(5)=1

Prédicat : I(P)= relation R /

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5),(4,1), (4,2), (5,1) }

Autrement dit :

1 R 1, 1 R 2, 2 R 1, 2 R 2, 2 R 4, 2 R 5,

4 R 1, 4 R 2, 5 R 1

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 1$: $P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b))$ Formule Fermée

$I(\alpha 1)$: $I(P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b)))$

$I(\alpha 1)$: $1 \ \mathbf{R} \ \phi(1)$ ET $5 \ \mathbf{R} \ \phi(5)$

$I(\alpha 1)$: $\underbrace{(1, 2) \in \mathbf{R}}_{V}$ ET $\underbrace{(5, 1) \in \mathbf{R}}_{V}$ **C'est VRAI**

Donc, puisque $\alpha 1$ est fermée alors :

$\alpha 1$ **est valide pour *I***

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 2$: $\forall x\, P(x, a)$ Formule Fermée

$I(\alpha 2)$: $I(\forall x\, P(x, a))$

$I(\alpha 2)$: Qqsoit $e \in D$ on a : $(e, 1) \in R$

C'est VRAI

e	(e, 1) ∈ R	I(α2)
1	(1, 1) ∈ R	Vraie
2	(2, 1) ∈ R	Vraie
4	(4, 1) ∈ R	Vraie
5	(5, 1) ∈ R	Vraie

Donc, puisque $\alpha 2$ est fermée alors : $\alpha 2$ **est valide pour *I***

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 3$: $\exists x\, P(b, x)$ Formule Fermée

$I(\alpha 3)$: $I(\exists x\, P(b, x))$

$I(\alpha 3)$: Il existe $e \in D$ /: $(5, e) \in R$

C'est VRAI, il suffit de prendre $e = 1$ on a :

$(5, 1) \in R$

Donc, puisque $\alpha 3$ est fermée alors :

$\alpha 3$ **est valide pour *I***

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 6$: $\forall x \, \forall y \, (P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y))$ Formule Fermée

$I(\alpha 6)$: $I(\forall x \, \forall y \, (P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$

$I(\alpha 6)$: Qqsoit $(e1, e2) \in D^2$ on a :

Si $(e1, e2) \in R$ **Alors** $(\phi(e1), \phi(e1)) \in R$

Série N°7 : Exercice N°1

$I(\alpha 6)$: Qqsoit $(e1, e2) \in D^2$ on a :

Si $(e1, e2) \in R$ **Alors** $(\phi(e1), \phi(e1)) \in R$

Fonction :

$\phi(1)=2$, $\phi(2)=4$, $\phi(4)=5$ et $\phi(5)=1$

$(e1, e2) \in R$	$(\phi(e1), \phi(e1)) \in R$	$I(\alpha 6)$
$(1, 1) \in R$ = V	$(2, 2) \in R$ = V	Vrai
$(1, 2) \in R$ = V	$(2, 4) \in R$ = V	Vrai
$(2, 1) \in R$ = V	$(4, 2) \in R$ = V	Vrai
$(2, 2) \in R$ = V	$(4, 4) \in R$ = F	Faux
$(2, 4) \in R$ = V	$(4, 5) \in R$ = F	Faux
$(2, 5) \in R$ = V	$(4, 1) \in R$ = V	Vrai
$(4, 1) \in R$ = V	$(5, 2) \in R$ = F	Faux
$(4, 2) \in R$ = V	$(5, 4) \in R$ = F	Faux
$(5, 1) \in R$ = V	$(1, 2) \in R$ = V	Vrai
Les autres $\in R$ = F	-	Vrai

Relation :

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

C'est FAUX

(contre exemple)

Donc, puisque $\alpha 6$ est fermée alors :

$\alpha 6$ **est NON valide pour *I***

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 5$: $\exists x\, P(x, y)$ Formule Non Fermée

$I(\alpha 5)$ [V] : $I(\exists x\, P(x, y))$ [V]

$I(\alpha 5)$ [V] : Il existe $e \in D$ / $(e, V(y)) \in R$

Relation :

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Soit la valuation V1/ V1(y)=1

Il existe $e \in D$ / $(e, V1(y)) \in R$

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Il existe $e \in D$ / $(e, 1) \in R$ ….C'est Vrai e=4, $(4, 1) \in R$

Donc : **α5 est Satisfaite par V1 pour I**

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 5$: $\exists x\, P(x, y)$ Formule Non Fermée

$I(\alpha 5)$ [V] : $I(\exists x\, P(x, y))$ [V]

$I(\alpha 5)$ [V] : Il existe $e \in D$ / $(e, V(y)) \in R$

Relation :

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Soit la valuation V2/ V2(y)=2

Il existe $e \in D$ / $(e, V1(y)) \in R$

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Il existe $e \in D$ / $(e, 2) \in R$ ….C'est Vrai e=2, $(2, 2) \in R$

Donc : **α5 est Satisfaite par V2 pour I**

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 5$: $\exists x\, P(x, y)$ Formule Non Fermée

$I(\alpha 5)$ [V] : $I(\exists x\, P(x, y))$ [V]

$I(\alpha 5)$ [V] : Il existe $e \in D$ / $(e, V(y)) \in R$

Relation :

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Soit la valuation V3/ V3(y)=4

Il existe $e \in D$ / $(e, V1(y)) \in R$

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Il existe $e \in D$ / $(e, 4) \in R$ ….C'est Vrai e=2, $(2, 4) \in R$

Donc : **α5 est Satisfaite par V3 pour I**

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 5$: $\exists x\, P(x, y)$ Formule Non Fermée

$I(\alpha 5)$ [V] : $I(\exists x\, P(x, y))$ [V]

$I(\alpha 5)$ [V] : Il existe $e \in D$ / $(e, V(y)) \in R$

Relation :

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Soit la valuation V4/ V4(y)=5

Il existe $e \in D$ / $(e, V1(y)) \in R$

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Il existe $e \in D$ / $(e, 5) \in R$ ....C'est Vrai e=2, $(2, 5) \in R$

Donc : **α5 est Satisfaite par V4 pour I**

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 5$: $\exists x\, P(x, y)$

Formule Non Fermée

$I(\alpha 5)$ [V] : $I(\exists x\, P(x, y))$ [V]

$I(\alpha 5)$ [V] : Il existe $e \in D$ / $(e, V(y)) \in R$

CONCLUSION

α5 est Satisfaite par toutes les valuations pour l'interpretation I.

Donc : **α5 est VALIDE pour I**

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 4$: $\forall x\, P(x, f(y))$ Formule Non Fermée

$I(\alpha 4)$ [V] : $I(\forall x\, P(x, f(y)))$ [V]

$I(\alpha 4)$ [V] : Qqsoit $\in$ D on a : $(e, \phi(V(y))) \in R$

Relation :

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Fonction :

$\phi(1)=2$, $\phi(2)=4$, $\phi(4)=5$ et $\phi(5)=1$

Soit la valuation V1/ V1(y)=5

Qqsoit e $\in$ D / $(e, \phi(V1(y))) \in R$

Qqsoit e $\in$ D / $(e, \phi(5)) \in R$

Qqsoit e $\in$ D / $(e, 1) \in R$ ….C'est VRAI

Donc : **$\alpha 4$ est Satisfaite par V1 pour I**

Série N°7 : Exercice N°1

Etudier la satisfaisabilité des formules suivantes pour I

$\alpha 4$: $\forall x\, P(x, f(y))$ Formule Non Fermée

$I(\alpha 4)$ [V] : $I(\forall x\, P(x, f(y)))$ [V]

$I(\alpha 4)$ [V] : Qqsoit $\in D$ on a : $(e, \phi(V(y))) \in R$

Relation :

R ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (2, 5), (4,1), (4,2), (5,1) }

Fonction :

ϕ(1)=2, ϕ(2)=4, ϕ(4)=5 et ϕ(5)=1

Soit la valuation V2/ V2(y)=2

Qqsoit $e \in D$ / $(e, \phi(V2(y))) \in R$

Qqsoit $e \in D$ / $(e, \phi(2)) \in R$

Qqsoit $e \in D$ / $(e, 4) \in R$ ….C'est FAUX on a $(5,4) \notin R$

Donc : **α4 est NON Satisfaite par V2 pour I**

Conclusion : **α_4 est Satisfiable mais non valide pour I**

Logique des Prédicats

Corrigé Série N°7
Exo 4

Série N°7 : Exercice N°4

1- Soit deux formules

$$\alpha : \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$$

$$\beta : \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Donner une interprétation pour laquelle α est vraie et β est fausse

Série N°7 : Exercice N°4

α : $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ ……………………………VRAIE

β : $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ ……………………………~~FAUSSE~~ VRAIE

<u>Soit I1 interprétation</u> :

Domaine D=N

I1(P) = « Multiple de 10 » et I1(Q) = « Multiple de 2 »

I1(α) : **Si** Qqsoit e ∈ N, e multiple de 10 Fausse
Alors Qqsoit e ∈ N, e multiple de 2 VRAIE

I1(β) : Qqsoit e ∈ N, **Si** e multiple de 10
Alors e multiple de 2 VRAIE

Série N°7 : Exercice N°4

α : $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ ....VRAIE

β : $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ ....FAUSSE

Soit I2 interprétation :

Domaine D=N

I2(P) = « Multiple de 2 » et I2(Q) = « Multiple de 10 »

Fausse

I2(α) : **Si** Qqsoit e $\in$ N, e multiple de 2
Alors Qqsoit e $\in$ N, e multiple de 10

VRAIE

I2(β) : Qqsoit e $\in$ N, **Si** e multiple de 2
Alors e multiple de 10

FAUSSE

Contre exemple : e = 18 est multiple de 2 mais n'est pas multiple de 10

Série N°7 : Exercice N°4

2- Montrer que la formule suivante n'est pas un théorème du calcul des prédicats :

$$\forall x\, \forall y\ \ ((x=y) \vee P(x,y) \vee P(y, x))$$

δ N'est pas un théorème

$$\Updownarrow$$

δ N'est pas Universellement valide

$$\Updownarrow$$

Il existe une interprétation I telle que δ N'est pas valide pour I (δ est FAUSSE)

Série N°7 : Exercice N°4

$$\delta : \forall x\, \forall y\ ((x=y) \vee P(x,y) \vee P(y,x))$$

Soit I1 interprétation :

Domaine D=N

I1 (P) = « > »

$$I1(\delta) = \text{Qqsoit } (e1, e2) \in N^2 : \left.\begin{array}{l} \\ e1=e2 \text{ OU } e1>e2 \text{ OU } e2>e1 \end{array}\right\} \text{VRAIE}$$

C'est VRAI (ordre des entiers naturels)

Donc, puisque δ est fermée alors :

δ **est valide pour *I1***

Cherchons une autre Interprétation !

Série N°7 : Exercice N°4

$$\delta \ : \forall x \ \forall y \ \ ((x=y) \vee P(x,y) \vee P(y, x))$$

<u>Soit I2 interprétation</u> :

Domaine D=Humains

I2 (P) = « Frère de »

I1 (δ) = Qqsoit (h1, h2) ∈ N^2 :

h1=h2 (même personne) OU

h1 frère de h2 OU h2 frère de h1

FAUSSE

C'est FAUX (contre exemple)

Donc, puisque δ est fermée alors :

δ est Non valide pour *I2*

Conclusion : **δ Non Universellement Valide**