Logique des Propositions

Corrigé Série N°3
Exo4

Etude Sémantique

Série N°3 : Exercice N°4

On considère dans cet exercice que les formules sont formées avec les connecteurs **« $\neg$ », « $\wedge$ » et « $\vee$ » seulement**.

Etant donné une formule **Γ**, on note :

-« **Γ*** » la formule obtenue à partir de **Γ** en **remplaçant chaque variable propositionnelle par sa négation et en inter-changeant « $\wedge$ » et « $\vee$ ».**

-« $\mathbf{\Gamma^{\#}}$ » la formule obtenue à partir de **Γ** en **inter-changeant « $\wedge$ » et « $\vee$ ».**

-« $\mathbf{\Gamma^{+}}$ » la formule obtenue à partir de **Γ** en **remplaçant chaque variable propositionnelle par sa négation.**

Série N°3 : Exercice N°4

1. Montrer par récurrence que $\Gamma^* \equiv \neg \Gamma$ quelque soit Γ

Démonstration par récurrence sur le nombre de connecteurs dans Γ (soit n ce nombre)

Pour n=0 : $\Gamma_0 = A$ (A : une Var Prop)

$\Gamma_0^* \equiv \neg \Gamma_0$?

$\Gamma_0^* = (A)^* = \neg A = \neg \Gamma_0$ Donc Vérifié

Supposons vrai jusqu'à p connecteurs et montrons pour (p+1) connecteurs

$$\Gamma_{p+1} = \begin{cases} \neg \Gamma_p & \text{.............................. 1 er Cas} \\ \Gamma_l \wedge \Gamma_q \quad (l+q=p) & \text{..................... 2 em Cas} \\ \Gamma_l \vee \Gamma_q \quad (l+q=p) & \text{..................... 3 em Cas} \end{cases}$$

Série N°3 : Exercice N°4

1^er Cas : $\Gamma_{p+1} = \neg \Gamma_p$

Montrons que $\Gamma_{p+1}^{*} \equiv \neg \Gamma_{p+1}$?

$$\Gamma_{p+1}^{*} = (\neg \Gamma_p)^{*} = \neg \Gamma_p^{*} \equiv \neg (\neg \Gamma_p)$$

car par Hypothèse de Récurrence

$$\Gamma_p^{*} \equiv \neg \Gamma_p$$

Donc $\Gamma_{p+1}^{*} \equiv \neg (\neg \Gamma_p)$

$\equiv \neg \Gamma_{p+1}$

Série N°3 : Exercice N°4

2ème Cas : $\Gamma_{p+1} = \Gamma_l \wedge \Gamma_q$ (avec l+q=p)

Montrons que $\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg \Gamma_{p+1}$?

$$\Gamma_{p+1}^* = (\Gamma_l \wedge \Gamma_q)^* = \Gamma_l^* \vee \Gamma_q^* \equiv \neg \Gamma_l \vee \neg \Gamma_q$$

car par Hypothèse de Récurrence

$\Gamma_l^* \equiv \neg \Gamma_l$ **(l<=p) et** $\Gamma_q^* \equiv \neg \Gamma_q$ **(q<=p)**

Donc $\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg \Gamma_l \vee \neg \Gamma_q$

$\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg (\Gamma_l \wedge \Gamma_q)$ **(loi de Morgan)**

$\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg \Gamma_{p+1}$

Série N°3 : Exercice N°4

3ème Cas : $\Gamma_{p+1} = \Gamma_l \vee \Gamma_q$ (avec l+q=p)

Montrons que $\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg \Gamma_{p+1}$?

$$\Gamma_{p+1}^* = (\Gamma_l \vee \Gamma_q)^* = \Gamma_l^* \wedge \Gamma_q^* \equiv \neg \Gamma_l \wedge \neg \Gamma_q$$

car par Hypothèse de Récurrence

$\Gamma_l^* \equiv \neg \Gamma_l$ **(l<=p) et** $\Gamma_q^* \equiv \neg \Gamma_q$ **(q<=p)**

Donc $\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg \Gamma_l \wedge \neg \Gamma_q$

$\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg (\Gamma_l \vee \Gamma_q)$ **(loi de Morgan)**

$\Gamma_{p+1}^* \equiv \neg \Gamma_{p+1}$

Série N°3 : Exercice N°4

2. En déduire la négation de la formule suivante et la simplifier $(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)$

Posons $\alpha = (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)$

D'après la question N°1 on a : $\neg \alpha \equiv \alpha^*$

Donc :

$\neg((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)) \equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D))^*$

$\neg((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)) \equiv (\neg\neg A \vee \neg\neg B) \wedge \neg(\neg C \vee \neg D)$

$\neg((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)) \equiv (A \vee B) \wedge \neg(\neg C \vee \neg D)$

$\neg((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)) \equiv (A \vee B) \wedge (\neg\neg C \wedge \neg\neg D)$

$\neg((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)) \equiv (A \vee B) \wedge (C \wedge D)$

Série N°3 : Exercice N°4

3. Montrer que **Γ** est une tautologie si et seulement si **Γ**$^+$ en est une.

Premier Sens : Si $\models$ **Γ** Alors $\models$ **Γ**$^+$

Supposons que **Γ** contient N (N>=0) Variables Propositionnelles notées : A1, A2, … An

Etape N°1 : Appliquons le théorème de substitution sur **Γ (Tautologie)** pour remplacer toutes les occurrences de A1 par la formule $\beta_1 = \neg$ A1

On obtient $\mathbf{\Gamma_1}$ telle que $\models$ $\mathbf{\Gamma_1}$

Série N°3 : Exercice N°4

Etape N°2 : Appliquons le théorème de substitution sur $\mathbf{\Gamma_1}$ **(Tautologie)** pour remplacer toutes les occurrences de A2 par la formule $\beta_2 = \neg$ A2

On obtient $\mathbf{\Gamma_2}$ telle que $\models \mathbf{\Gamma_2}$

- .
- .
- .

Etape N°n : Appliquons le théorème de substitution sur $\mathbf{\Gamma_{n-1}}$ **(Tautologie)** pour remplacer toutes les occurrences de An par la formule $\beta_n = \neg$ An

On obtient $\mathbf{\Gamma_n}$ telle que $\models \mathbf{\Gamma_n}$

Série N°3 : Exercice N°4

Par construction on a : $\mathbf{\Gamma_n} \equiv \mathbf{\Gamma^+}$

Donc puisque $\mathbf{\Gamma_n}$ est une tautologie alors :

$$\models \mathbf{\Gamma^+}$$

Série N°3 : Exercice N°4

3. Montrer que Γ est une tautologie si et seulement si Γ^+ en est une.

<u>Deuxième Sens</u> : Si $\models \Gamma^+$ Alors $\models \Gamma$

Si Γ^+ tautologie, alors selon le premier sens on a :
Γ^{++} est aussi une tautologie

Or Γ^{++} est obtenue à partir de Γ en remplaçant chaque variable propositionnelle Ai par $\neg\neg$ Ai

En appliquant, cette fois-ci, le théorème de remplacement, autant de fois que nécessaire) pour remplacer toutes les formules de la forme $\neg\neg$ Ai par la formule Ai ($\neg\neg$ Ai $\equiv$ Ai)

Série N°3 : Exercice N°4

La formule obtenue sera donc : $\mathbf{\Gamma}$

telle que $\mathbf{\Gamma}^{++} \equiv \mathbf{\Gamma}$

Donc puisque $\mathbf{\Gamma}^{++}$ est une tautologie alors :

$$\models \mathbf{\Gamma}$$

Série N°3 : Exercice N°4

4. Montrer que $\Gamma^* \equiv (\Gamma^{\#})^+$ quelque soit Γ.

Démonstration par récurrence sur le nombre de connecteurs dans Γ (soit n ce nombre)

<u>Pour n=0</u> : $\Gamma_0 = A$ (A une Var Prop)

$\Gamma_0{}^* \equiv (\Gamma_0{}^{\#})^+$?

$\Gamma_0{}^* = (A)^* = \neg A = (A^{\#})^+ = (\Gamma_0{}^{\#})^+$ Donc Vérifié

<u>Supposons vrai jusqu'à p connecteurs et montrons pour (p+1) connecteurs</u>

$$\Gamma_{p+1} = \begin{cases} \neg\,\Gamma_p & \text{.............................. 1 er Cas} \\ \Gamma_l \wedge \Gamma_q \quad (l+q=p) & \text{..................... 2 em Cas} \\ \Gamma_l \vee \Gamma_q \quad (l+q=p) & \text{..................... 3 em Cas} \end{cases}$$

Série N°3 : Exercice N°4

Supposons vrai jusqu'à p connecteurs et montrons pour (p+1) connecteurs

$$\Gamma_{p+1} = \begin{cases} \neg\, \Gamma_p & \text{.......................... 1 er Cas} \\ \Gamma_l \wedge \Gamma_q \quad (l+q=p) & \text{.................... 2 em Cas} \\ \Gamma_l \vee \Gamma_q \quad (l+q=p) & \text{.................... 3 em Cas} \end{cases}$$

Continuer le Cas Général de la démonstration par récurrence de la même façon que la question N° 1

Série N°3 : Exercice N°4

5. Montrer que $(\Gamma \leftrightarrow \Sigma) \equiv (\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})^{+}$

On a : $(\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})^{+} \equiv (\Gamma^{\#})^{+} \leftrightarrow (\Sigma^{\#})^{+}$

$(\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})^{+} \equiv \Gamma^{*} \leftrightarrow \Sigma^{*}$ (question N°4)

$(\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})^{+} \equiv \neg\Gamma \leftrightarrow \neg\Sigma$ (question N°1)

Montrons que : $\neg\Gamma \leftrightarrow \neg\Sigma \equiv \Gamma \leftrightarrow \Sigma$

Revient à montrer que : $(\neg\Gamma \leftrightarrow \neg\Sigma) \leftrightarrow (\Gamma \leftrightarrow \Sigma)$ **est une tautologie**

$$(\neg\Gamma \leftrightarrow \neg\Sigma) \leftrightarrow (\Gamma \leftrightarrow \Sigma) \equiv \underbrace{\underbrace{\cancel{(\neg\Gamma \leftrightarrow \Gamma)}}_{\text{Fausse}} \leftrightarrow \underbrace{\cancel{(\neg\Sigma \leftrightarrow \Sigma)}}_{\text{Fausse}}}_{\text{Tjs Vraie = Tautologie}}$$

(Associativité de $\leftrightarrow$)

Série N°3 : Exercice N°4

6. Montrer que $(\Gamma \equiv \Sigma)$ si et seulement si $(\Gamma^{\#} \equiv \Sigma^{\#})$

Revient à montrer que :

$(\Gamma \leftrightarrow \Sigma)$ Tautologie $\Leftrightarrow$ $(\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})$ Tautologie

Or d'après la question N°3 :

$(\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})$ Tautologie $\Leftrightarrow$ $(\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})^{+}$ Tautologie

Or d'après la question N°5 :

$$(\Gamma^{\#} \leftrightarrow \Sigma^{\#})^{+} \equiv \Gamma \leftrightarrow \Sigma$$

Donc : $\Gamma \leftrightarrow \Sigma$ est aussi une Tautologie