Logique des Propositions

Corrigé Série N°5 Exo4

Système Déductif

USTHB Faculté Informatique L. KADDOURI

N°1:

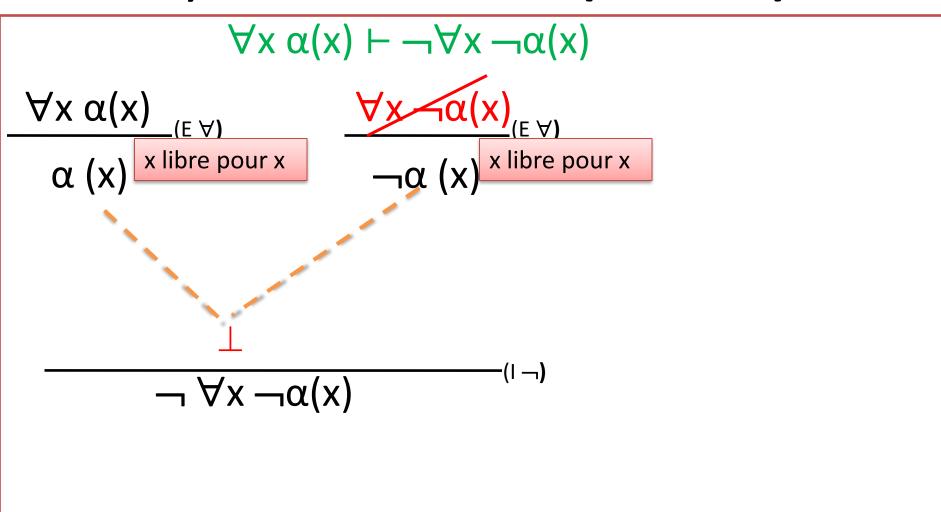
Montrer la déduction suivante :

$$\forall x \alpha(x) \vdash \exists x \alpha(x)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer \exists par sa définition. Cela revient à montrer :

$$\forall x \alpha(x) \vdash \neg \forall x \neg \alpha(x)$$

2



N°2:

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x \alpha(x) \rightarrow \forall x (\alpha(x) \vee \beta(x))$$

Utilisons le théorème vu dans le chapitre précédent : Γ , $\alpha 1 \vdash \alpha 2 \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha 1 \rightarrow \alpha 2$

Donc, c'est équivalent ⇔ à faire :

$$\forall x \alpha(x) \vdash \forall x (\alpha(x) \lor \beta(x))$$

N°2 (suite):

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer le \lor par sa définition. Cela revient à montrer :

$$\forall x \alpha(x) \vdash \forall x \neg (\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x))$$

5

$$\begin{array}{c|c} \forall x \ \alpha(x) \vdash \forall x \ \neg(\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x)) \\ \hline \forall x \ \alpha(x) & \neg \alpha(x) \land \neg \beta(x) \\ \hline \alpha(x) & x \ \text{libre pour } x \\ \hline \neg(\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x)) & \\ \hline \forall x \ \neg(\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x)) & \\ \hline \hline \forall x \ \neg(\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x)) & \\ \hline \end{array}$$

N°3:

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x (\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\exists x \alpha(x) \to \exists x \beta(x))$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

$$\forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \vdash \exists x \alpha(x) \rightarrow \exists x \beta(x)$$

Qui est équivalent ⇔ à :

$$\forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)), \exists x \alpha(x) \vdash \exists x \beta(x)$$

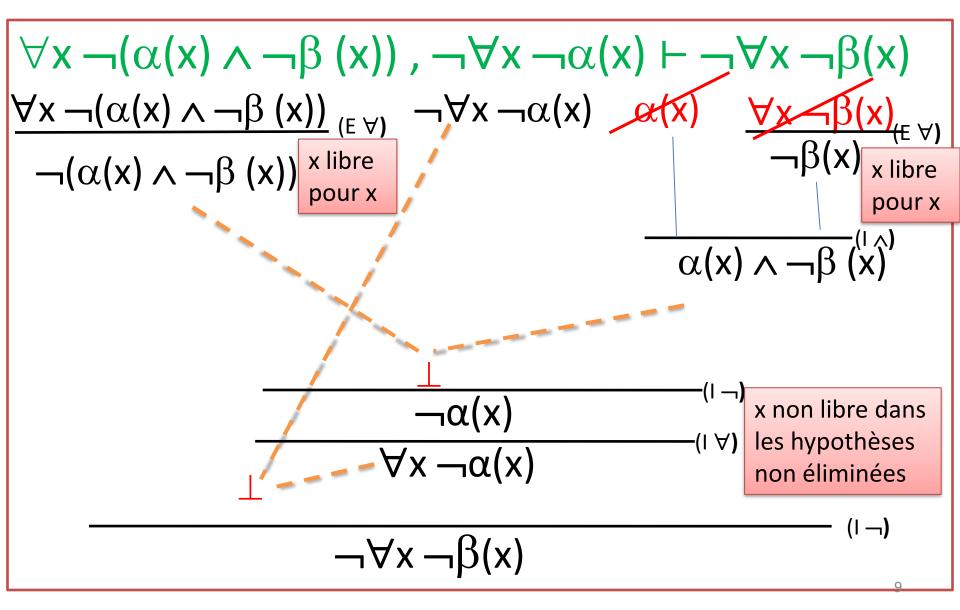
N°3 (suite):

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer le \exists et \rightarrow par leur définition respective.

Cela revient à montrer:

$$\forall x \neg (\alpha(x) \land \neg \beta(x)), \neg \forall x \neg \alpha(x) \vdash \neg \forall x \neg \beta(x)$$

Q



N°4 Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \exists x (\alpha(x) \rightarrow \forall x \alpha(x))$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer le \exists et \rightarrow par leur définition respective .

Cela revient à montrer:

$$\vdash \neg \forall x \neg (\alpha(x) \rightarrow \forall x \alpha(x))$$

$$\vdash \neg \forall x \neg \neg (\alpha(x) \land \neg \forall x \alpha(x))$$

N°5:

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x (\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\forall x \alpha(x) \to \forall x \beta(x))$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

$$\forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \vdash \forall x \alpha(x) \rightarrow \forall x \beta(x)$$

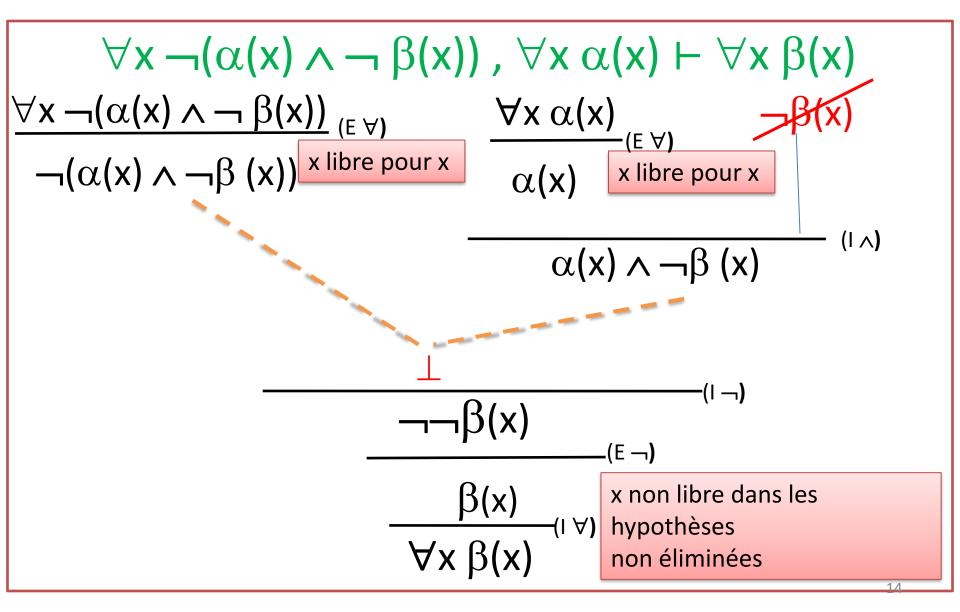
Qui est équivalent ⇔ à :

$$\forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)), \forall x \alpha(x) \vdash \forall x \beta(x)$$

N°5 (suite):

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer la \rightarrow par sa définition. Cela revient à montrer :

$$\forall x \neg (\alpha(x) \land \neg \beta(x)), \forall x \alpha(x) \vdash \forall x \beta(x)$$

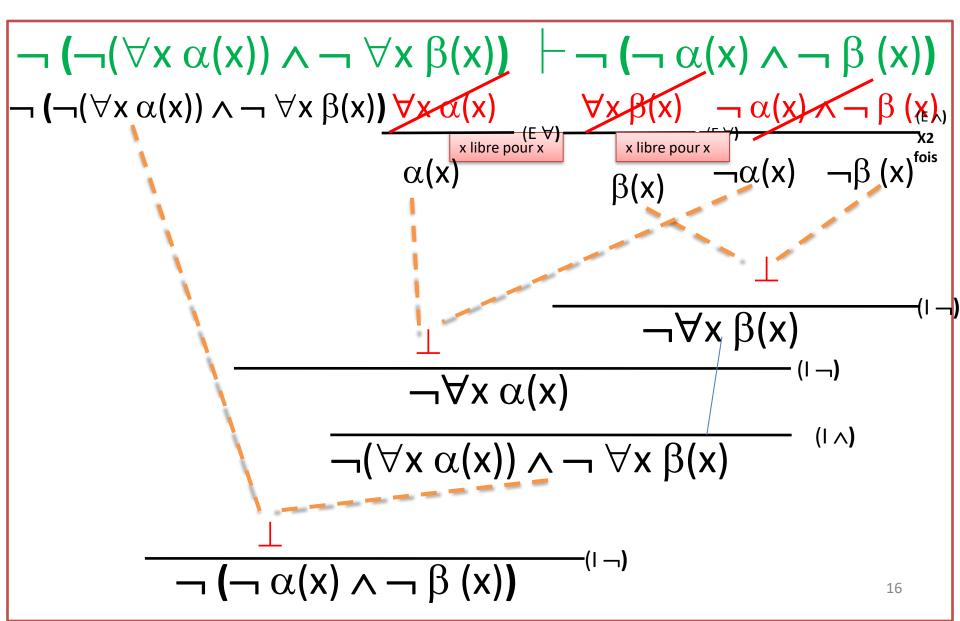


N°6: Montrer la déduction suivante:

$$(\forall x \alpha(x)) \vee \forall x \beta(x) \vdash \alpha(x) \vee \beta(x)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer le \vee par sa définition. Cela revient à montrer :

$$\neg (\neg(\forall x \alpha(x)) \land \neg \forall x \beta(x)) \vdash \neg (\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x))$$



N°7:

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash \forall x (\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow (\forall x \alpha(x)) \vee \exists x \beta(x)$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

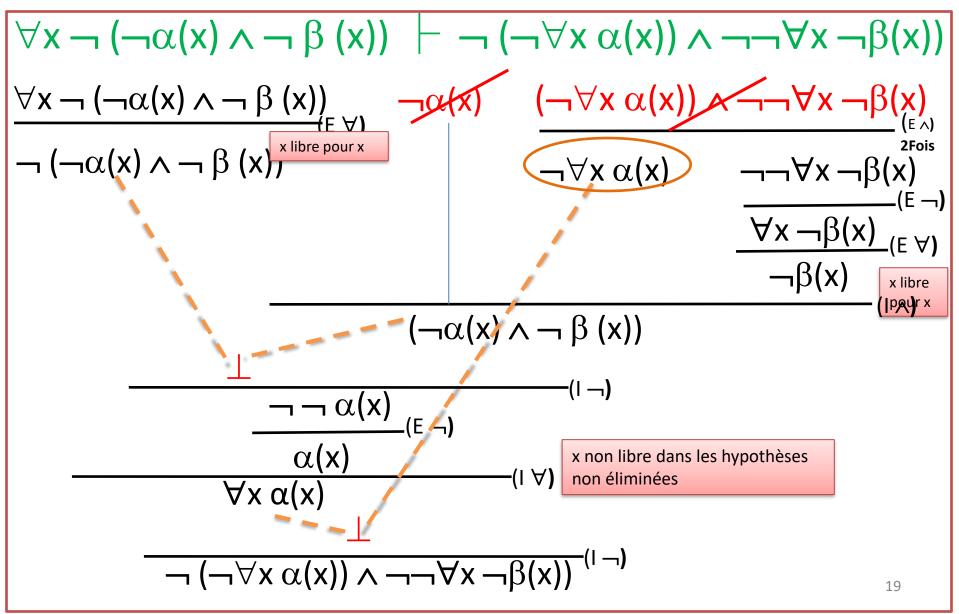
$$\forall x (\alpha(x) \vee \beta(x)) \vdash (\forall x \alpha(x)) \vee \exists x \beta(x)$$

N°7 (suite):

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer le \lor et \exists par leur définition respective.

Cela revient à montrer:

$$\forall x \neg (\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x)) \vdash \neg (\neg \forall x \alpha(x)) \land \neg \neg \forall x \neg \beta(x)$$



N°8:

Montrer la déduction suivante (théorème) :

$$\vdash (\exists x \ \alpha(x) \rightarrow \forall x \ \beta(x)) \rightarrow \forall x \ (\alpha(x) \rightarrow \beta \ (x))$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

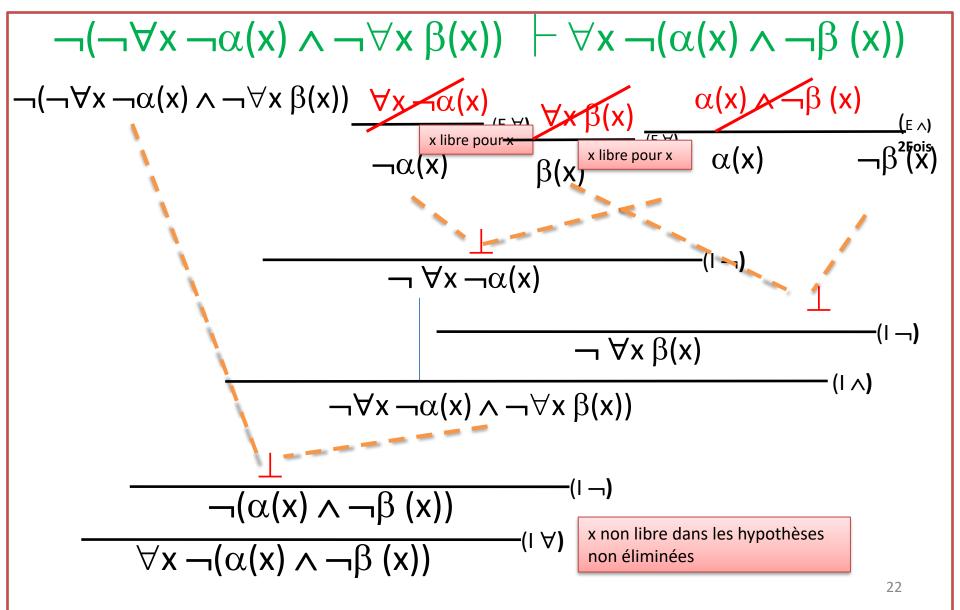
$$(\exists x \alpha(x) \rightarrow \forall x \beta(x)) \vdash \forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$

N°8 (suite):

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer la \rightarrow et \exists par leur définition respective.

Cela revient à montrer:

$$(\neg \forall x \neg \alpha(x) \rightarrow \forall x \beta(x)) \vdash \forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$
$$\neg (\neg \forall x \neg \alpha(x) \land \neg \forall x \beta(x)) \vdash \forall x \neg (\alpha(x) \land \neg \beta(x))$$



N°9: Montrer la déduction suivante:

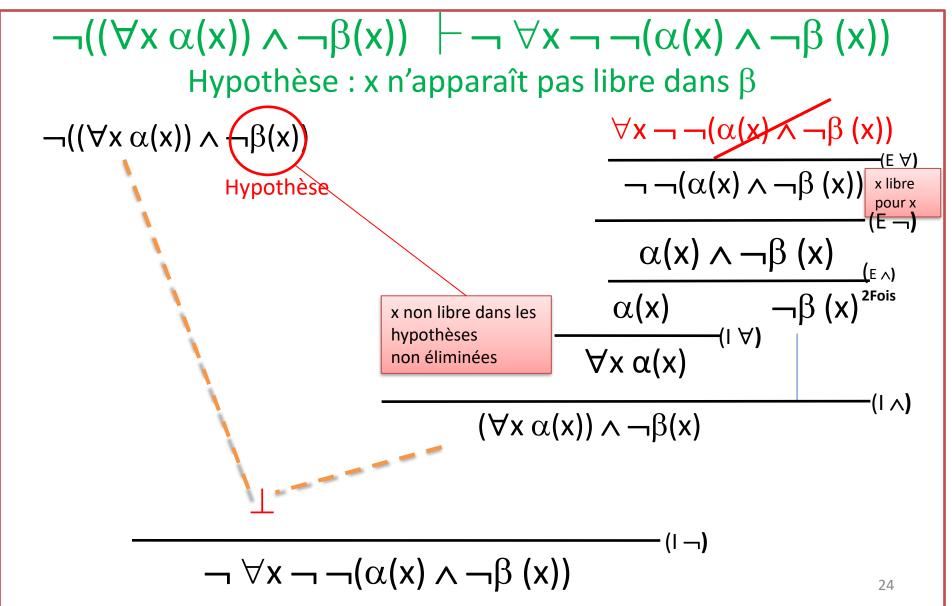
$$(\forall x \alpha(x)) \rightarrow \beta(x) \vdash \exists x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$$

avec x n'apparaît pas libre dans β

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer la \rightarrow et \exists par leur définition respective.

Cela revient à montrer:

$$\neg ((\forall x \alpha(x)) \land \neg \beta(x)) \vdash \neg \forall x \neg \neg (\alpha(x) \land \neg \beta(x))$$
 avec x n'apparaît pas libre dans β



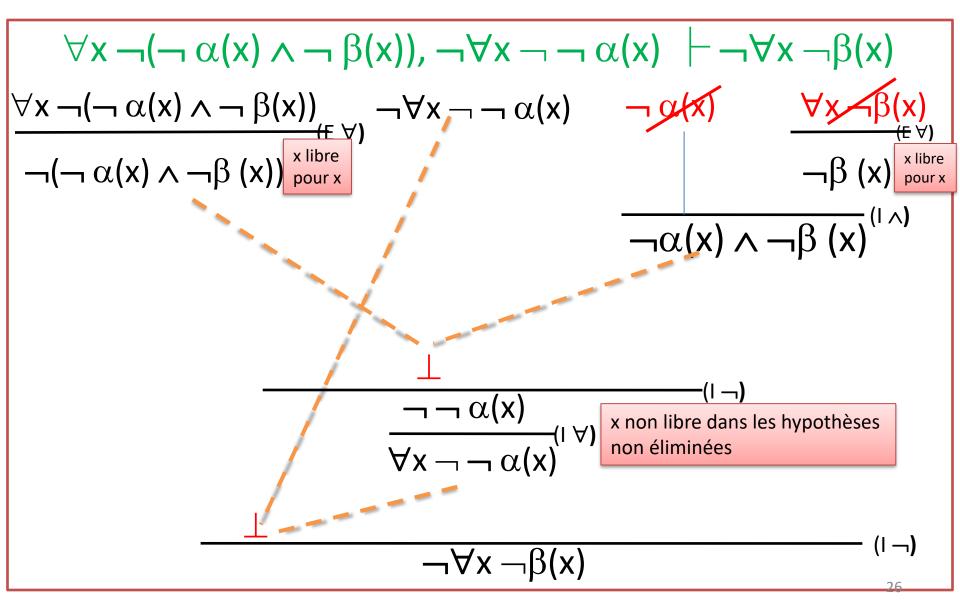
N°10: Montrer la déduction suivante:

$$\forall x (\alpha(x) \vee \beta(x)), \exists x \neg \alpha(x) \vdash \exists x \beta(x)$$

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer le \lor et \exists par leur définition respective.

Cela revient à montrer:

$$\forall x \neg (\neg \alpha(x) \land \neg \beta(x)), \neg \forall x \neg \neg \alpha(x) \vdash \neg \forall x \neg \beta(x)$$



N°11: Montrer la déduction suivante :

$$\vdash \forall x \ \forall y \ P(x, y) \rightarrow \forall x \ P(x, x)$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

$$\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall x P(x, x)$$

N°12: Montrer la déduction suivante:

$$\vdash \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \rightarrow \forall x \neg P(x, x)$$

Utilisons le théorème de simplification :

Donc, c'est équivalent ⇔ à :

$$\forall x \ \forall y \ (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \ \vdash \forall x \neg P(x, x)$$

N°12 (suite):

Etant donné qu'on est dans le système déductif (\neg, \land, \forall) , on doit remplacer la \rightarrow par sa définition Cela revient à montrer :

$$\forall x \forall y \neg (P(x, y) \land \neg \neg P(y, x)) \vdash \forall x \neg P(x, x)$$

