

Def [Continuità] $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ①

NOTA Per ogni ε esiste una δ che soddisfa la proprietà, dunque δ può essere pensata come funzione di ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$).

Esercizio 1 Dimostrare che la definizione di continuità è eq. a $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$ ②

Soluzione

② \Rightarrow ② ovvia poiché $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

② \Rightarrow ① Fisso $\varepsilon > 0$,^① voglio trovare δ che faccia funzionare la proprietà ②. Chiamo $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$.^② Per la proprietà ② esiste $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$ tale che $\forall x \in A$ con $|x - x_0| < \delta_1$ vale che $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon_1$. Noto che $\varepsilon_1 = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Dunque $\forall x \in A$ con $|x - x_0| < \delta_1$ vale che $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$. Quindi $\delta = \delta_1$ fa funzionare la proprietà ① \square

NOTA 1 Riflettere sul fatto che questo lo dimostra " $\forall \varepsilon$ "!

NOTA 2 Qua basta qualunque cosa che renda ε strettamente più piccolo, non occorre necessariamente dividere per 2.

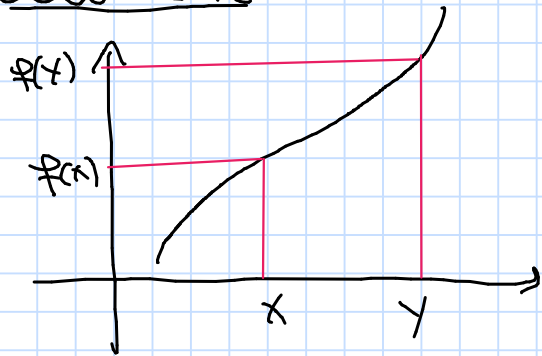
Def [Uniforme continuità] $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è UNIFORMEMENTE CONTINUA su A se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

NOTA La definizione di continuità è PUNTUALE (nel senso che una funzione è continua in un punto), mentre la definizione di UNIFORME CONTINUITÀ è su un insieme A .

NOTA Provate a dimostrare che se $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è UNIF. CONTINUA su A allora è continua $\forall x_0 \in A$ (ovvero, è CONTINUA su A)!

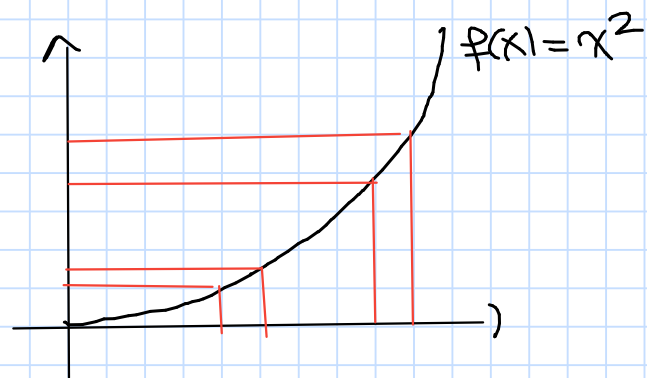
Esercizio 2 Trovare una funzione $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sia continua su A ma non sia uniformemente continua su A .

Soluzione



Dire che se $|x - y|$ non è troppo grande allora $|f(x) - f(y)|$ non è troppo grande significa dire che f non si "inclina troppo" (fare un disegno).
Dunque l'intuizione ci suggerisce di cercare una funzione che si inclini "sempre di più".

Proviamo per esempio $f(x) = x^2$



Supponiamo per assurdo ⁽¹⁾ che la funzione sia uniformemente continua. Visto che la proprietà deve valere $\forall \epsilon > 0$, deve valere in particolare per $\epsilon = 1$, ⁽²⁾ ovvero deve $\exists \delta_0$ tale che, se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| < 1$.

Notiamo però che $|x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| = |x - y||x + y|$. Scegliamo come coppie di punti x e $x + \frac{\delta}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. ⁽³⁾ Notiamo subito che $|x - (x + \delta/2)| = |\delta/2| < \delta$, dunque dovrebbe valere $|x^2 - (x + \delta/2)^2| < 1$.

Ma $|x^2 - (x + \delta/2)^2| = |-x + \frac{\delta^2}{2}|$ e la funzione $|-x + \frac{\delta^2}{2}|$ è decisamente non limitata da 1!

NOTA 1 Per dimostrare per assurdo si suppone che la tesi sia vera e si cerca una qualche contraddizione.

NOTA 2 e 3 Se sospettiamo che una cosa che deve valere per ogni elemento di un certo insieme sia falsa, possiamo tentare elementi più "comodi" e sperare che (non) funzionino. Nello specifico, avrebbe funzionato un qualunque $\epsilon > 0$ (quindi $\epsilon = 1$ per semplicità) ed un qualunque sottoinsieme di coppie di punti vicini che vanno "all'infinito".