

Esercizi di Aritmetica 2023-2024

Cristofer Villani

Settimana 1

1. Dimostra che, per $a, b, c \in \mathbb{Z}$, vale

$$\gcd(ac, bc) = c \cdot \gcd(a, b).$$

Deduci da questo il lemma di Euclide: se $a \mid bc$ e $\gcd(a, b) = 1$, allora $a \mid c$. [In classe, avete già dimostrato il lemma di Euclide, usando l'identità di Bézout; questa è una dimostrazione alternativa che non usa Bézout.]

2. Trova espressioni per le seguenti formule contenenti numeri di Fibonacci (Guardando i casi piccoli, congettura un'identità, poi dimostrarla per induzione). Ricordo che la successione di Fibonacci è definita da

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2.$$

- i) $\sum_{i=0}^n F_i,$
ii) $\sum_{i=0}^n F_{2i+1},$
iii) $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}.$

3. Trova una formula esplicita per le seguenti successioni per ricorrenza.

(a)