Задание 1

Регулярные языки и автоматы

Усвяцов Михаил, группа 176б

1 Задачи предбазового уровня

Задача 1.

1. $\{a, aa\} \cdot \{b, bb\} = \{ab, abb, aab, aabb\}$. По определению операции "конкатенация".

2. $\{a, aa\} + \{b, bb\} = \{a, aa, b, bb\}$. По определению операции "Объединение".

3. $\{a, aa\} \times \{b, bb\} = \{(a, b), (a, bb), (aa, b), (aa, bb)\}$. По определению операции "Декартово произведение".

4. $((aa|b)^*(a|bb)^*)^* =?$
Заметим, что:
$((aa|b)^*(a|bb)^*)^* = \{\{x, y\}^* | x \in \{aa, b\}^*, y \in \{a, bb\}^*\} = A$
А теперь рассмотрим следующее множество B:
$B = \{a, b\}^*$
Очевидно, что $A \subset B$.
Так как подмножеством А является множество $\{\{x, y\}^* | x \in \{b\}^*, y \in \{a\}^*\}$, отсюда следует, что $B \subset A$. Из этих фактов следует, что А = В.

5. $\{a^{3n} |\, n > 0\} \cap \{a^{5n+1} | n \geqslant 0\}^* =?$

$\{a^{5n+1} | n \geqslant 0\}^* = \{a^{(5n+1)k} | n \geqslant 0, k \geqslant 0\}$
$\{a^{3n} |\, n > 0\} \subset \{a^{(5n+1)k} | n \geqslant 0, k \geqslant 0\} \Longrightarrow$
$\{a^{3n} |\, n > 0\} \cap \{a^{5n+1} | n \geqslant 0\}^* = \{a^{3n} |\, n > 0\}$

6. $\emptyset \cap \{\varepsilon\} =?$
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\} \Longrightarrow \emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$

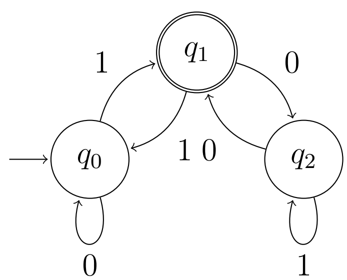
2 Задачи базового уровня

Задача 2. Записать регулярное выражение для языка $L = \Sigma^* \backslash \{(a|b)^* ab(a|b)^*\}$. Доказать, что язык порождённый регулярным выражением совпадает с L.

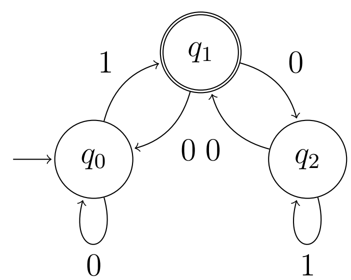
Рассмотрим регулярное выражение (b^*a^*). Оно соответсвует множеству $A = \{b^*a^*\}$. Множество $B = \{(a|b)^*ab(a|b)^*\}$ содержит все слова, содержащие ab, следовательно, L содержит все слова, которые не содержат ab, так как состоит из всех возможных слов над алфавитом a, b, которые не входят в B, следовательно $L \subset A$. A задает множество всех слов над алфавитом a, b, которые не содержат ab. Следовательно, $A \subset L$ $\Longrightarrow$ A = L.

Задача 3.

Автомат $\mathcal{A}$:



Автомат $\mathcal{B}$:



Для каждого автомата ответьте на следующие вопросы (1-2):

1. Автомат задан через граф переходов. Запишите определение автомата в виде $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Опишите элементы каждого множества

Автомат $\mathcal{A}$:

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$q_0 = q_0$
$\delta(q_0, 0) = q_0$
$\delta(q_0, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 0) = q_2$
$\delta(q_1, 1) = q_0$
$\delta(q_2, 0) = q_1$
$\delta(q_2, 1) = q_2$
$F = \{q_1\}$

Автомат $\mathcal{B}$:

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$
$q_0 = q_0$
$\delta(q_0, 0) = q_0$
$\delta(q_0, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 0) = \{q_0, q_2\}$
$\delta(q_2, 0) = q_1$
$\delta(q_2, 1) = q_2$
$F = \{q_1\}$

2. Является ли автомат детерминированным?

Автомат $\mathcal{A}$: Является, так как все функции переходов однозначны

Автомат $\mathcal{B}$: Не является, так как существует неоднознаячная функция переходов

3. Опишите последовательность конфигураций автомата $\mathcal{A}$ при обработке слова $w = 1101010$. Верно ли, что $w \in L(\mathcal{A})$?

$q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_0 \longrightarrow q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_2 \longrightarrow q_2 \longrightarrow q_1$

Так как конечное состояние автомата является принимающим, то $w \in L(\mathcal{A})$.

4. Принимает ли автомат $\mathcal{B}$ слово $v = 10001$?
Да, принимает. Так как существует такая цепочка конфигурация, которая при данном слове приведет автомат в принимающее состояние.

5. Укажите по одному слову, принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$ и по одному слову, не принадлежащее $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$. Все 4 слова должны быть различными.
$1101010 \in L(\mathcal{A})$, $1101011 \notin L(\mathcal{A})$
$10001 \in L(\mathcal{B})$, $\varepsilon \notin L(\mathcal{B})$

Задача 4.

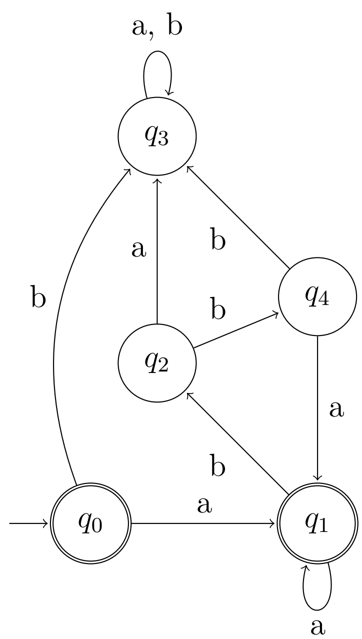
Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:
(1) $\varepsilon \in L$;
(2) вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $xa, xaa, xabba$;
(3) никаких других слов в L нет.

В язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ входит пустое слово ε и ВСЕ начинающиеся и заканчивающиеся буквой a слова, в которых нет подслов "aba" или "bbb". Докажите или опровергните, что $L = T$.

1. Докажите или опровергните, что $L = T$.
abbabba подходит языку T. Но не подходит языку L. Следовательно, языки неэквивалентны.

2.

Рассмотрим ДКА A:



T = $(a(a|b)^*a|\varepsilon|a) \setminus ((a|b)^*(aba|bbb)(a|b)^*)$
База индукции:
$\varepsilon \in T, L(A)$
Предположение индукции:
$v \in (a|b)^*$, такое, что в $q_0 : v \in \varepsilon, q_1 : v \in T/\{\varepsilon\}, q_2 : v \in T\{\varepsilon\}b, q_3 : v \in ((a(a|b)^*(aba|bbb)(a|b)^*)|b), q_4 : v = T/\{\varepsilon\}bb$
Шаг индукции:
Рассмотрим слова va и vb:
$q_0 : va \in T, L(A), vb \notin T, L(A)$
$q_1 : va \in T, L(A), vb \notin T, L(A)$
$q_2 : va \notin T, L(A), vb \notin T, L(A)$
$q_3 : va \notin T, L(A), vb \notin T, L(A)$
$q_4 : va \in T, L(A), vb \notin T, L(A)$
Следовательно, все слова либо распознаются обоими языками, либо нераспознаются обоими, что означает, что множетсва T и L(A) равны.