Faculté des Sciences et Technologie
Bio-Informatique

2016 – 2017

Compte-rendu
BMM-BISM
Systèmes dynamiques

BACCAM Emmy
11401990
emmy.baccam@etu.univ-lyon.fr

Université Claude Bernard –Lyon 1

Faculté des Sciences et Technologies

Département Informatique
43, Boulevard DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX
Tel : 04 72 44 58 19– Télécopie : 04 72 44 58 91
Courriel : scolarite.licence.STS@univ-lyon1.fr
URL : http://fst-informatique.univ-lyon1.fr

Table des matières

Introduction

Ce compte-rendu est effectué dans le cadre de l'UE BMM – BISM à l'Université Claude Bernard Lyon1. Le but est de présenter les résultats de l'analyse qualitative d'un système donné, de donner une interprétation biologique et de les illustrer avec le logiciel R Studio.

Les scripts R sont joints avec ce compte-rendu et permettent de vérifier les résultats/hypothèses.

Le modèle proposé décrit l'évolution de l'effectif de deux populations par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K} - \dfrac{aP(t)}{K}\right) \\ \dfrac{dP(t)}{dt} = sP(t)\left(1 - \dfrac{P(t)}{M} - \dfrac{bN(t)}{M}\right) \end{cases}$$

Où N(t) et P(t) sont les effectifs respectifs des deux populations au temps t, et les paramètres r, s, K, M, a et b sont positifs.

Interprétation biologique

Interprétation biologique aux paramètres

On sait que N et P correspondent au nombre d'individus que la population respective comprend au temps t. Ces valeurs varient au cours du temps et sont influencées par des paramètres:

r : taux de croissance de la population N

s : taux de croissance de la population P

Les taux de croissance indique notamment si la population tend à s'éteindre ou à augmenter.

K : capacité limite de la population N ou capacité biotique.

M : capacité limite de la population P ou capacité biotique.

La capacité biotique est le maximum d'individus que la population peut avoir.

a : effet négatif de la population P sur la population N

b : effet négatif de la population N sur la population P

Type d'interactions modélisées

Le type d'interaction modélisé par ces équations correspond à un modèle de compétition interspécifique entre 2 populations différentes (N et P). Les 2 populations ont une croissance logistique.

Dans ce modèle a et b représentent l'effet négatif d'une population sur l'autre. Dans le cas du modèle de compétition interspécifique si ces 2 paramètres étaient à 0, par exemple, les deux dynamiques des 2 populations seraient indépendantes l'une de l'autre.

- Si $a < 1$ la croissance de la population P va diminuer plus fortement lorsqu'un individu en plus va s'ajouter dans la communauté que lorsqu'on ajoute un individu de la population N.
  Cela peut se traduire par le fait que la ressource dont dépend la population N pour sa croissance et sa survie n'est pas accessible pour la population P.
- Si $a>1$ c'est le même effet qui se produira mais dans la population inverse.

Situation biologique

Ce système peut être modélisé dans une situation biologique concrète. C’est le cas des *Crépidules* ou « Berlingot des Mers ».

La Crépidule est considérée comme une espèce invasive et problématique pour les ressources vivantes du milieu marin, en raison de sa prolifération sur les côtes.

Certaines activités humaines ont favorisé sa rapide propagation ; outre l'ostréiculture qui les a involontairement introduites le long du littoral, l'eutrophisation générale des eaux leur est très favorable, de même que la pêche au chalut qui les diffuse sur des kilomètres à chaque pêche.

Figure 1 Les crépidules s’encastrent les unes sur les autres, formant des colonies

Conséquences : elle entre en compétition pour la nourriture et l'espace avec d'autres mollusques comme les moules et les huîtres et les élimine de leur environnement initial.

Les particularités écologiques et biologiques de l'espèce favorisent une telle prolifération. Sa stratégie de reproduction est efficace (hermaphrodisme successif et fécondation directe, pontes multiples et protection des œufs). Elle est peu exigeante et ne possède pas en Europe de prédateurs.

Sources :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Crepidula_fornicata

http://www.manger-la-mer.org/Crepidule-son-present-son-avenir

La population N et P peuvent correspondre à la population des Crépidules et celle des autres espèces de coquillages comme les moules et les huitres.

L’effet négatif de la Crépidule sur les moules et les huitres seraient les déjections qu’elle produit (qui limite l’accès aux ressources des populations) ainsi que sa faculté à « s’accrocher » sur les autres mollusques.

Il n’y a pas vraiment d’effet négatif direct des moules et des huitres sur les Crépidules. Mais cet effet n’est pas négligeable.

Les effets biologiques négligeables seraient notamment les effets de l’homme pour empêcher la prolifération des crépidules sur les huitres et moules, notamment les producteurs de fruits de mer.

Analyse qualitative dans le plan (N, P)

Points d'équilibres : expression, conditions d'existence, nature et stabilité

Expression

Comme il s'agit d'un système comprenant 2 populations, un point d'équilibre doit vérifier les équations $\frac{dN(t)}{dt} = 0$ et $\frac{dP(t)}{dt} = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} = 0 &\Leftrightarrow rN\left(1 - \frac{N}{K} - \frac{aP}{K}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow rN = 0 \; ou \; 1 - \frac{N}{K} - \frac{aP}{K} = 0 \\ &\Leftrightarrow N = 0 \; ou \; \frac{N}{K} = 1 - \frac{aP}{K} \\ &\Leftrightarrow N^* = 0 \; ou \; N^* = K - aP\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} = 0 &\Leftrightarrow sP\left(1 - \frac{P}{M} - \frac{bN}{M}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow sP = 0 \; ou \; 1 - \frac{P}{M} - \frac{bN}{M} = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0 \; ou \; \frac{P}{M} = 1 - \frac{bN}{M} \\ &\Leftrightarrow P^* = 0 \; ou \; N^* = M - bN\end{aligned}$$

En remplaçant les valeurs de P et N on obtient les points d'équilibres :

$$\begin{aligned}N = K - aP &\Leftrightarrow N = K - a(M - bN) \\ &\Leftrightarrow N = K - aM + abN \\ &\Leftrightarrow N - abN = K - aM \\ &\Leftrightarrow N(1 - ab) = K - aM \\ &\Leftrightarrow N^* = \frac{K - aM}{(1 - ab)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P = M - bN &\Leftrightarrow P = M - b(K - aP) \\ &\Leftrightarrow P = M - bK + abP \\ &\Leftrightarrow P - abP = M - bK \\ &\Leftrightarrow P(1 - ab) = M - bK \\ &\Leftrightarrow P^* = \frac{M - bK}{(1 - ab)}\end{aligned}$$

Il y a donc 4 points d'équilibres :

- Le point $(0,0)$ qui correspond biologiquement à l'extinction des 2 populations
- $(K, 0)$ qui correspond au cas où la population P s'éteint
- Le point $(0, M)$ qui correspond au cas où la population N s'éteint
- (N^*, P^*) qui correspond au cas où les 2 espèces en compétition coexistent

Conditions d'existence

- Soit a<1 et b<1
- Soit a>1 et b>1
- Le dénominateur (1-ab) doit être différent de 0.

Nature et stabilité

Jacobienne du système :

$$J = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2N}{K} - \frac{aP}{K}\right) & -r\frac{Na}{K} \\ -s\frac{bP}{M} & s\left(1 - \frac{2P}{M} - \frac{bN}{M}\right) \end{bmatrix}$$

Détails calculs Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dN(t)}{dN} & \frac{dN(t)}{dP} \\ \frac{dP(t)}{dN} & \frac{dP(t)}{dP} \end{pmatrix}$$

$$rN\left(1 - \frac{P}{K} - \frac{aP}{K}\right) = rN - \frac{rN^2}{K} - \frac{rNaP}{K} \; donc \; \frac{dN}{N} = r\left(1 - \frac{2N}{K} - \frac{aP}{K}\right)$$

$$sP\left(1-\frac{P}{M}-\frac{bN}{M}\right)=sP-\frac{sP^2}{M}-\frac{sPbN}{M}\ donc\frac{dP}{P}=s\left(1-\frac{2P}{M}-\frac{bN}{M}\right)$$

Point d'équilibre (0,0)

$J(0{,}0)=\begin{bmatrix} r(1-0) & 0 \\ 0 & s(1-0) \end{bmatrix}$ Soit $J(0{,}0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$

Donc (0,0) est un **nœud instable**.

Point d'équilibre (K, 0)

$J(K,0)=\begin{bmatrix} r\left(1-\frac{2K}{K}-0\right) & -r\frac{Ka}{K} \\ 0 & s\left(1-\frac{bK}{M}\right) \end{bmatrix}$ Soit $J(K,0)=\begin{bmatrix} -r & -ra \\ 0 & s\left(1-\frac{bK}{M}\right) \end{bmatrix}$

2 valeurs propres réelles de signe opposé donc (K, 0) est un **point selle**.

Point d'équilibre (0, M)

$J(0,M)=\begin{bmatrix} r\left(1-0-\frac{aM}{K}\right) & 0 \\ -sb & s\left(1-\frac{2M}{M}\right) \end{bmatrix}$ Soit $J(0,M)=\begin{bmatrix} r\left(1-\frac{aM}{K}\right) & 0 \\ -sb & -s \end{bmatrix}$

2 valeurs propres réelles de signe opposé donc (0,M) est un **point selle**.

Point d'équilibre (N,P)

$$J(N^*,P^*)=\begin{bmatrix} -\frac{rN^*}{K} & -\frac{raN^*}{K} \\ -\frac{sbP^*}{M} & -\frac{sP^*}{M} \end{bmatrix}$$

Justification :

Considérons$x=K-2N-aP$. L'expression finale sera $r\frac{x}{K}$.

$$x=K-\frac{2(K-aM)}{1-ab}-\frac{a(M-bK)}{1\_ab}$$

$$x=\frac{K(1-ab)-2(K-aM)-aM+abK}{1-ab}$$

$$x=\frac{K-abK-2K+2aM-aM+abK}{1-ab}$$

$$x=\frac{-K+aM}{1-ab}$$

$$x=\frac{-(K-aM)}{1-ab}$$

$$x=-N^*$$

L'expression finale correspond donc à $-\frac{rN^*}{K}$.

Le même raisonnement s'applique pour$-\frac{sP^*}{M}$.

Calcul de la trace de J^*

$$tr(J^*) = -r\frac{N^*}{k} - s\frac{P^*}{M} < 0$$

Calcul du déterminant de J^*

$$\det(J^*) = -r\frac{N^*}{K} \times \left(-s\frac{P^*}{M}\right) - \left(-sb\frac{P^*}{M}\right) \times \left(-ra\frac{N^*}{K}\right)$$

$$\det(J^*) = \frac{rsN^*P^*}{KM} - \frac{rsabN^*P^*}{KM}$$

$$\det(J) = \frac{rs}{KM}N^*P^*(1-ab) > 0 \; donc \; (N^*, P^*) \; est \; \boldsymbol{point\ fixe\ stable}$$

$$\Delta = tr^2 - 4det > 0 \; donc \; (N^*, P^*) est \; un \; \boldsymbol{noeud\ stable}$$

Portraits de phase : isoclines nulles, sens des vecteurs vitesse, présentation des différents cas possibles

Portrait de phase

Isoclines horizontales

- $\frac{dN(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow N = 0 \; ou \; N = K - aP$
- $droite \; de \; pente < 0 \; passant \; par \; (K, 0) et \; \left(0, \frac{M}{a}\right)$

Isoclines verticales

- $\frac{dP(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow P = 0 \; ou \; P = M - bN \; , bN = M - P \; donc \; N = \frac{M-P}{b}$
- $droite \; de \; pente < 0 \; passant \; par \; (0, M) et \; (\frac{K}{b}, 0)$

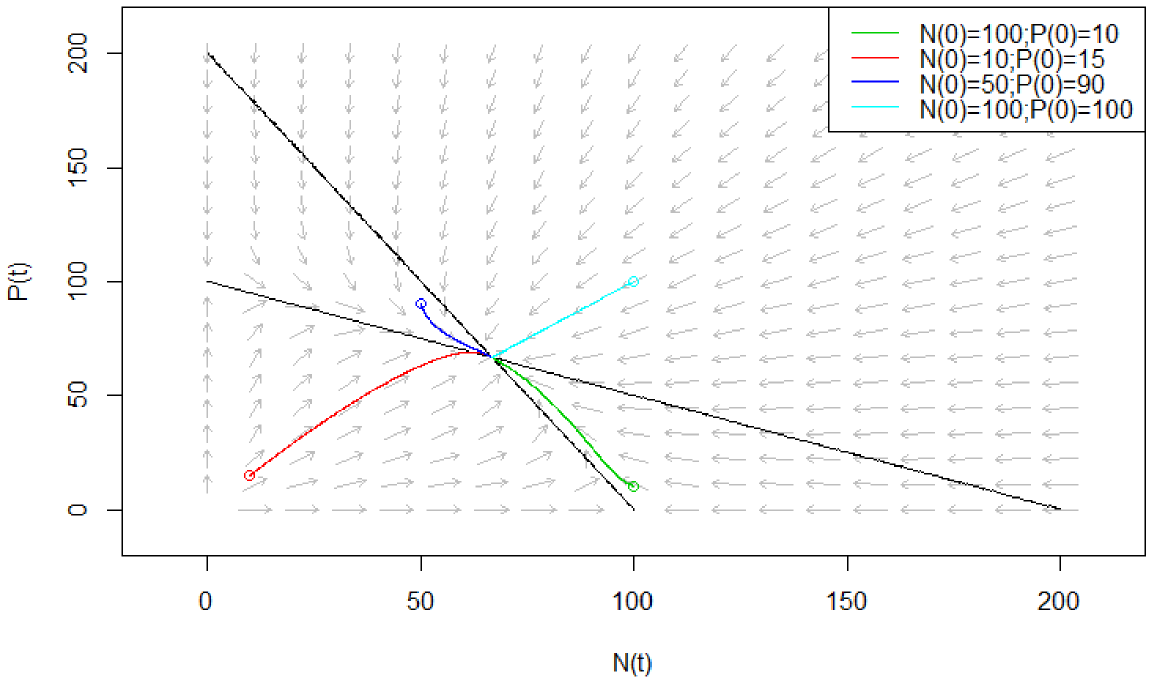
Sens des flèches

- $Si \; P = 0, \frac{dN(t)}{dt} > 0 \; entre \; 0 \; et \; K$
- $Si \; N = 0, \frac{dP(t)}{dt} > 0 \; entre \; 0 \; et \; M$

Différents cas possibles

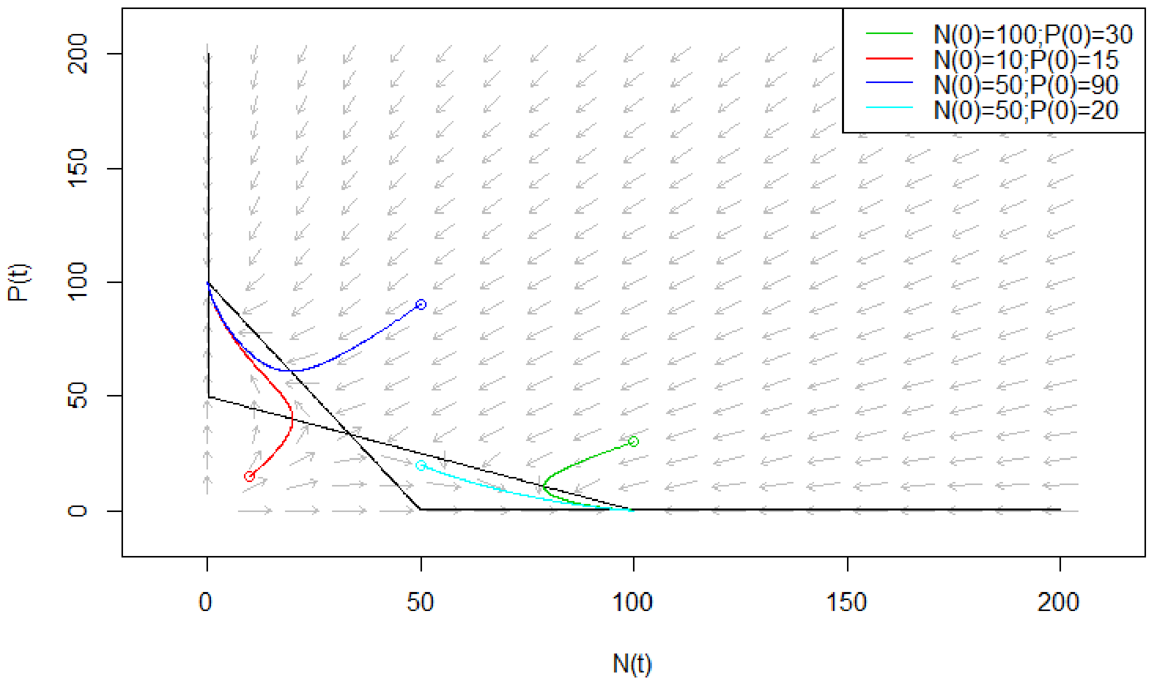
Il peut exister plusieurs cas possibles selon la valeur des paramètres:

1. $aK < M \text{ et } bM < K$



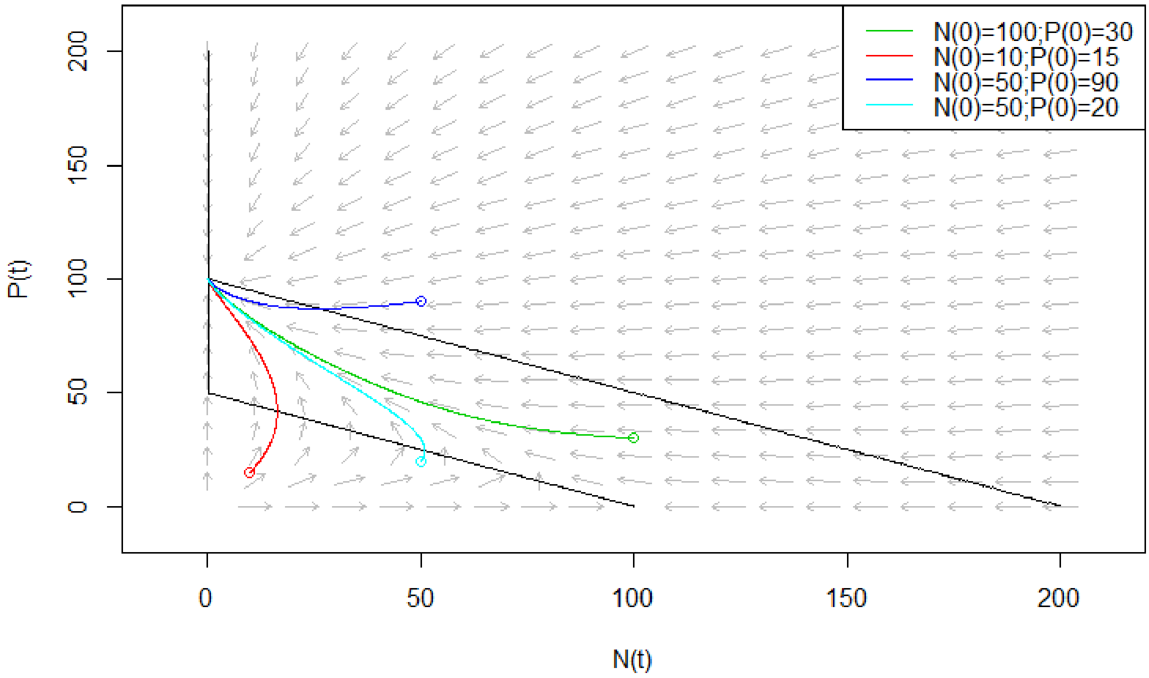
Graphique 1 Portrait de phase cas aK<M et bM<K

2. $aK > M \text{ et } bM > K$



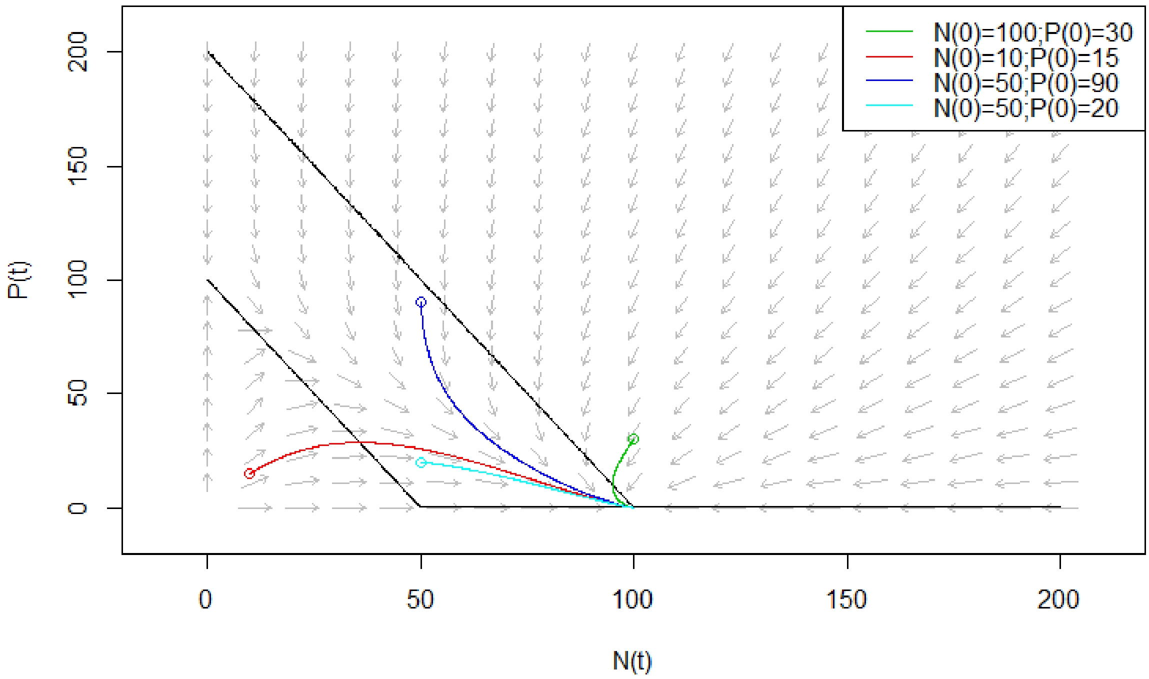
Graphique 2 Portrait de phase cas aK>M et bM>K

3. $aK < M$ et $bM > K$



Graphique 3 Portrait de phase cas aK<M et bM>K

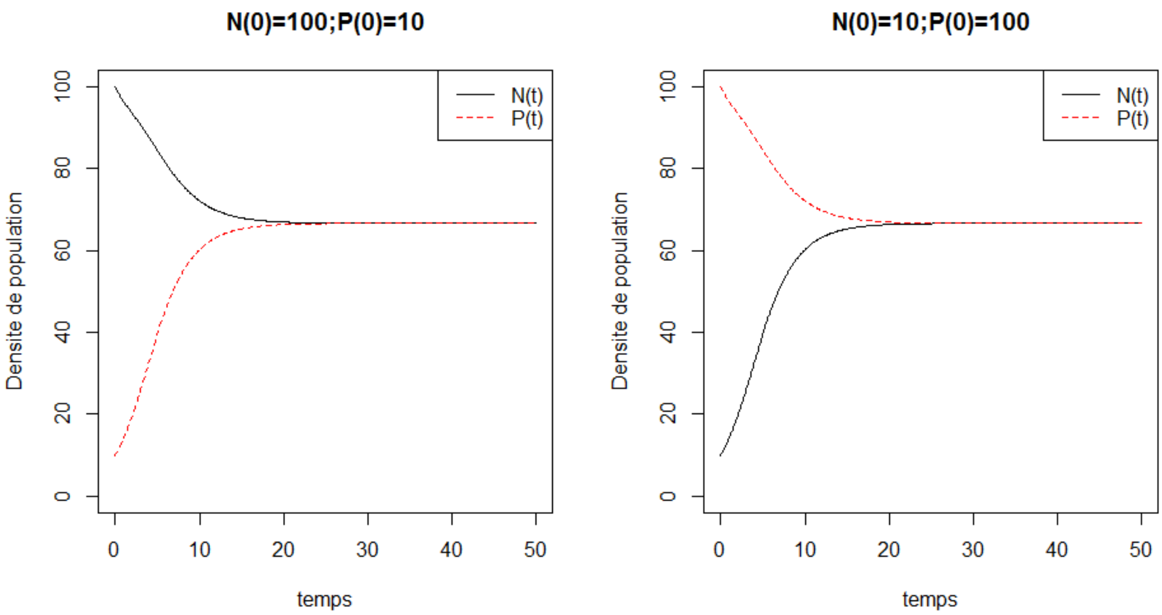
4. $aK > M$ et $bM < K$



Graphique 4 Portrait de phase cas aK>M et bM<K

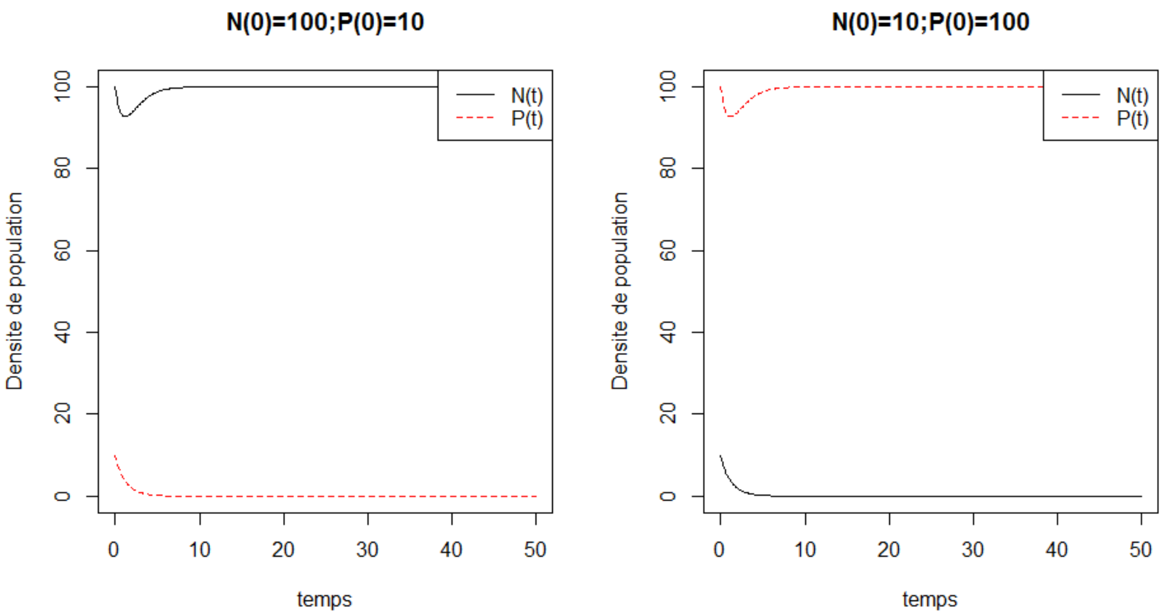
Chroniques avec 2 conditions initiales différentes

1. $aK < M \ et \ bM < K$



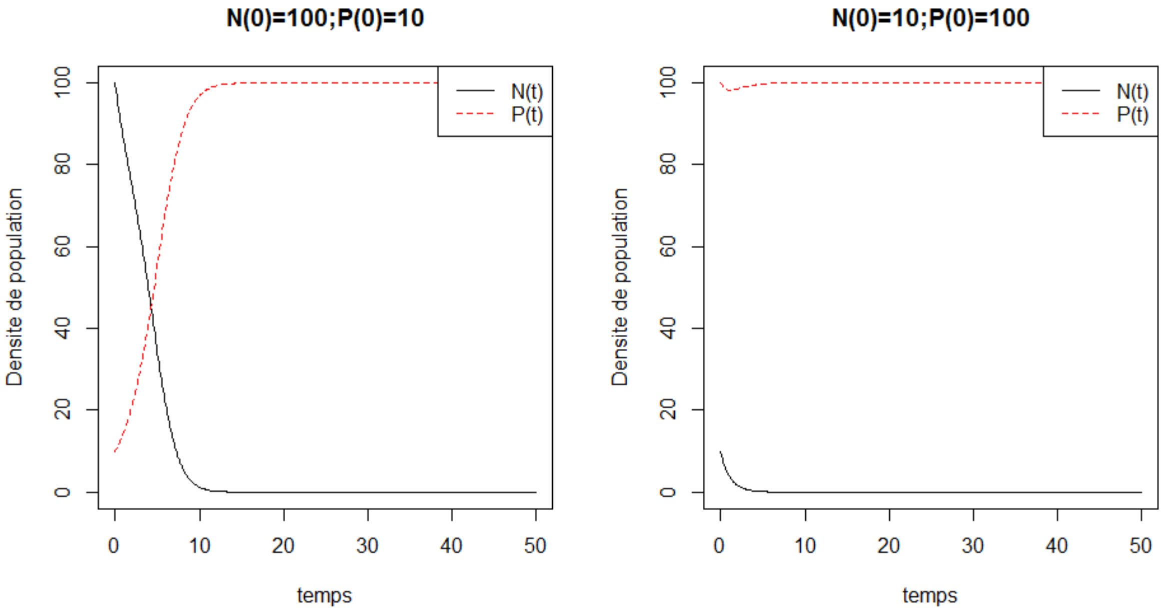
Graphique 5 Chroniques cas aK<M et bM<K

2. $aK > M \ et \ bM > K$



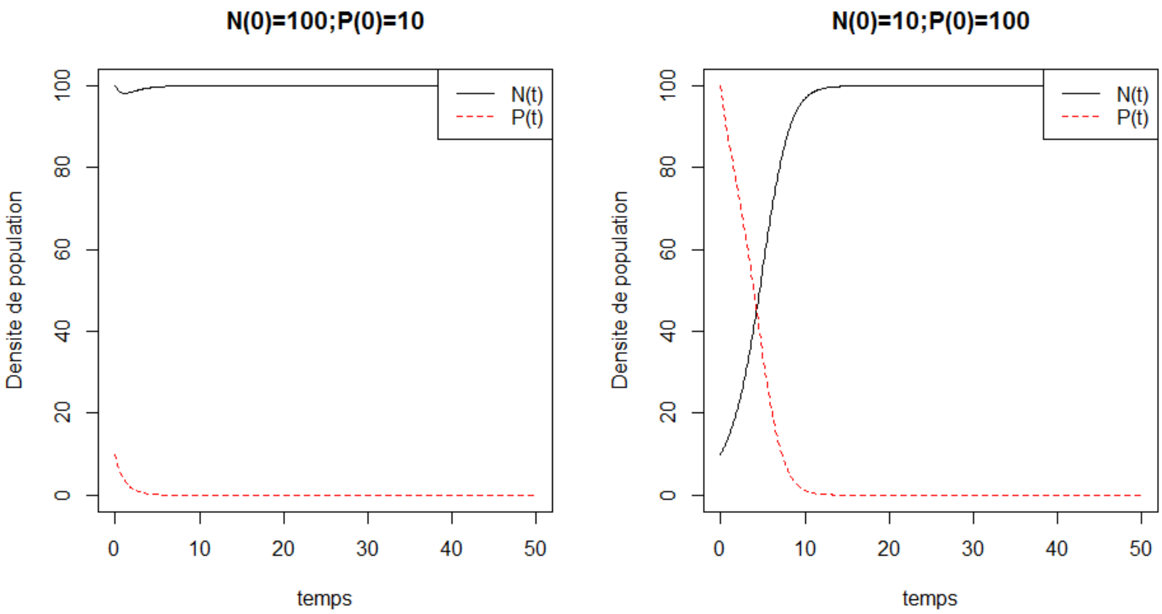
Graphique 6 Chroniques cas aK>M et bM>K

3. $aK < M \text{ et } bM > K$



Graphique 7 Chroniques cas aK<M et bM>K

4. $aK > M \text{ et } bM < K$



Graphique 8 Chroniques cas aK>M et bM<K

Interprétation

1. $aK < M \text{ et } bM < K$
   La Crépidule et les autres mollusques (huitres et moules) coexistent quel que soit les conditions initiales. Cf graphique 5.

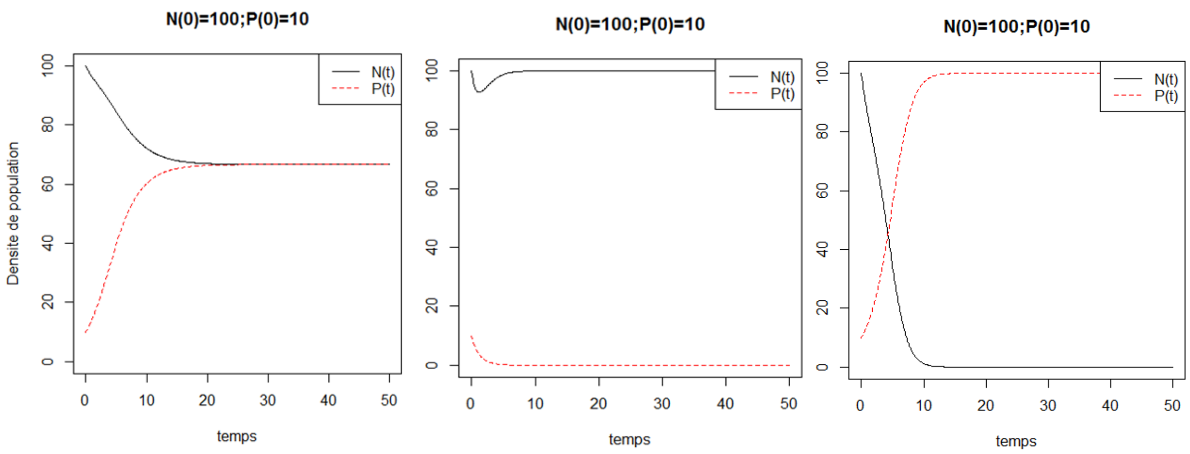
2. $aK > M \text{ et } bM > K$
   Aucune des 2 espèces ne parvient à envahir l'autre. Soit l'une ou l'autre des 2 espèces va s'éteindre selon la condition initiale. Cf graphique 6.

3. $aK < M \text{ et } bM > K$
   Si les Crépidules sont à leur capacité biotique et les huitres/moules sont en nombre inférieur à leur capacité biotique, les huitres/moules vont croître progressivement jusqu'à envahir la Crépidule et les remplacer.
   A l'inverse les si les huitres moules sont à leur capacité biotique et les Crépidules sont en nombre inférieur à leur capacité biotique, la Crépidule ne parvient pas à envahir les huitres/moules et va s'éteindre. Cf graphique 7.

4. $aK > M \text{ et } bM < K$
   Si les Crépidules sont à leur capacité biotique et les huitres/moules sont en nombre inférieur à leur capacité biotique, les huitres/moules ne parviennent pas à envahir la Crépidule et vont s'éteindre.
   A l'inverse les si les huitres moules sont à leur capacité biotique et les Crépidules sont en nombre inférieur à leur capacité biotique, c'est la Crépidule qui va croitre progressivement jusqu'à remplacer les huitres/moules. Cf graphique 8.

Simulations numériques

En revenant aux différent cas de la partie précédente, on a pu observer 3 dynamiques possibles des deux populations en compétition selon la valeur des constantes r, s, K, M, a et b et de la condition initiale. Par exemple le cas où la population N est initialement à sa capacité biotique :



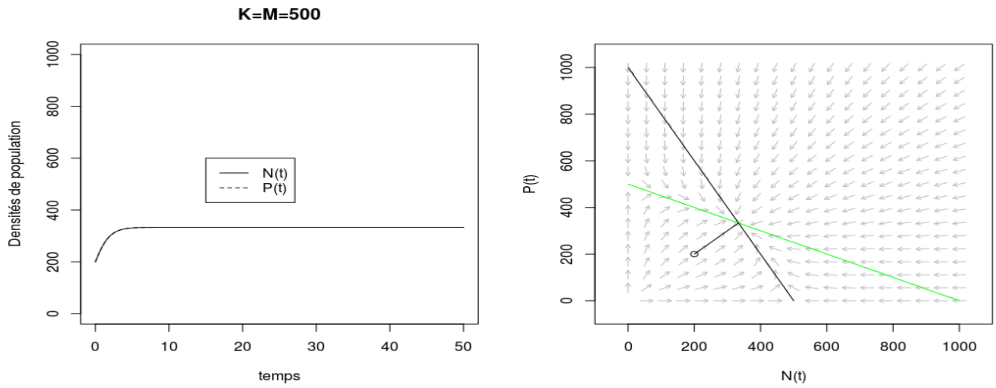
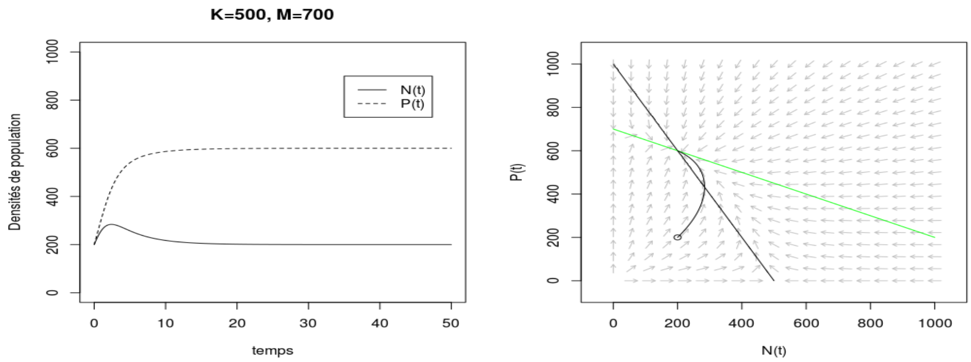
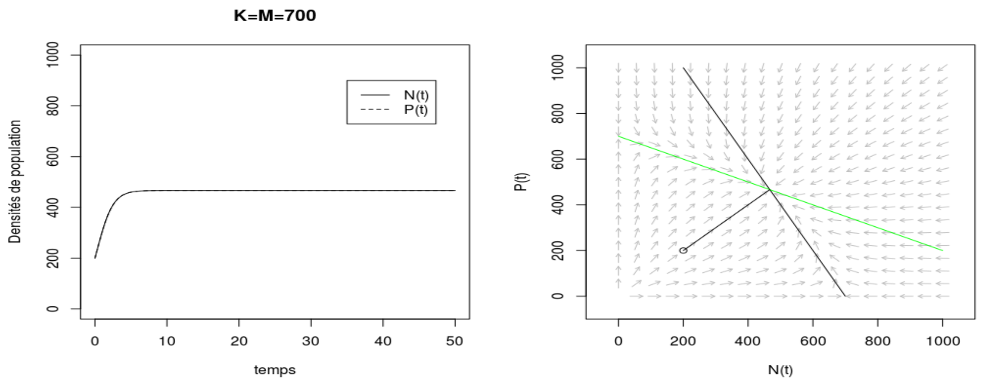
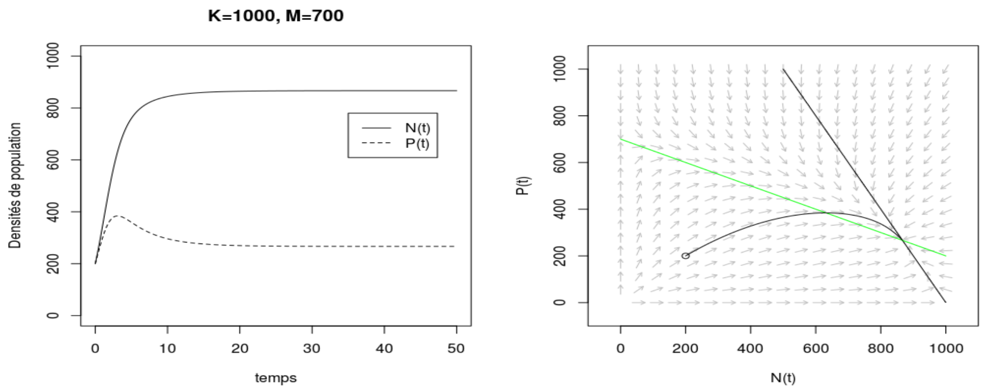
Sur le 1er graphique, la population P envahit mais coexiste de façon stable avec la population2. Sur le 2ème la population P n'arrive pas à envahir la population N. Enfin dans le 3ème graphique la population P envahit et remplace la population N.

*Les graphiques illustrés dans cette partie ont été générés via les scripts **Q3_1.R** (portraits de phase, point d'équilibres) et **Q3_1.R** (chroniques).*

Influence des paramètres sur le comportement du modèle

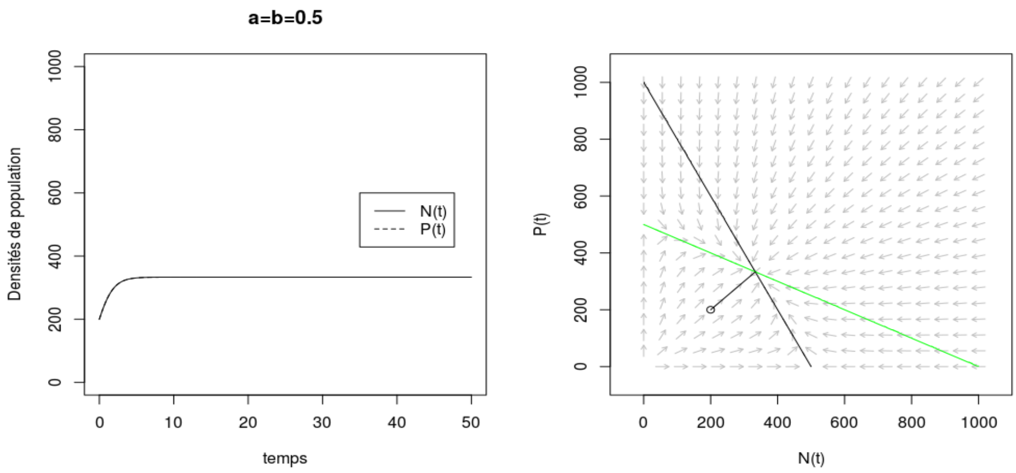
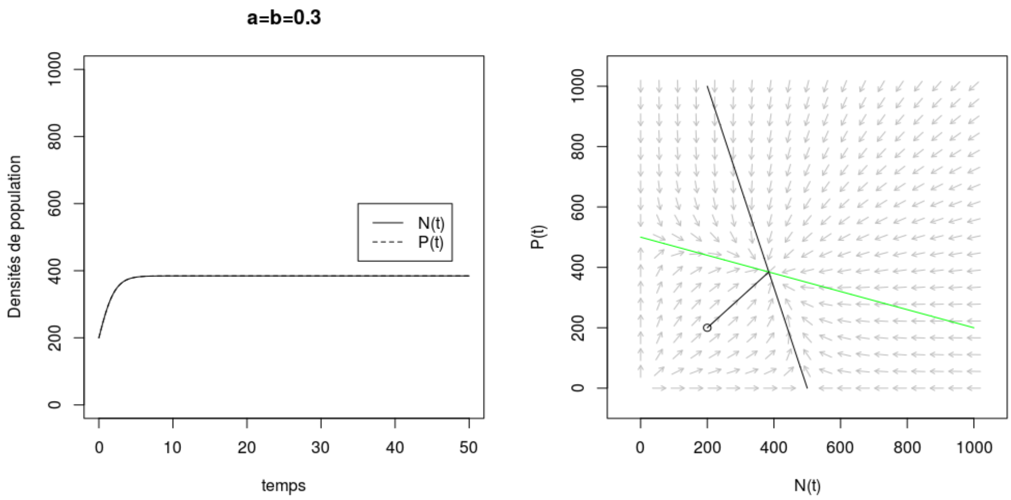
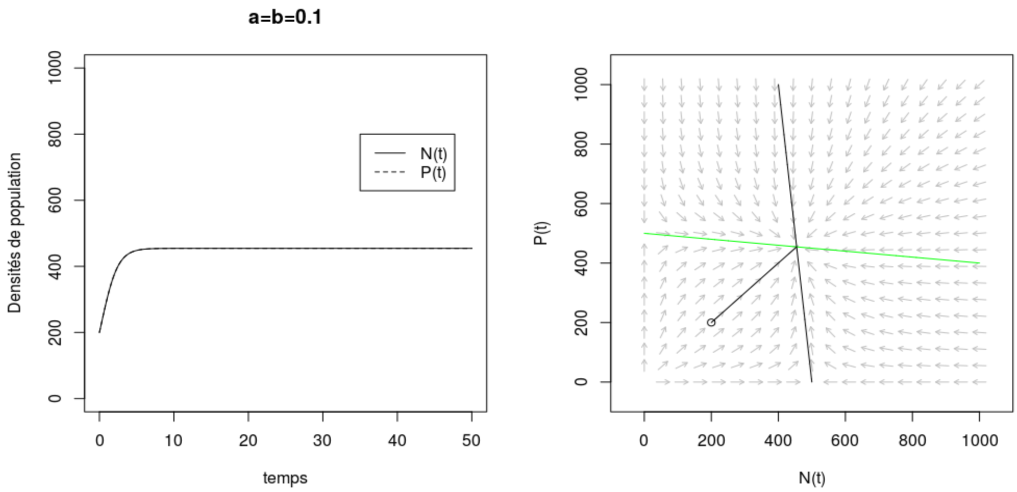
Paramètres 1

$N(0) = P(0) = 200, r = s = 0.9\ , a = b = 0.5$ *et* $N(t), P(t)$ *les effectifs à l'équilibre*

K	M	N(t)	P(t)	Chroniques et portrait de phase
500	500	**333**	**333**	
500	700	**200**	**600**	
700	700	**467**	**467**	
1000	700	**867**	**267**	

Paramètres 2

$N(0) = P(0) = 200, r = s = 0.9 \; et \; K = M = 500 \; et \; N(t), P(t) \; les \; effectifs \; \text{à} \; l'\text{équilibre}$

a	b	N(t)	P(t)	Chroniques et portrait de phase
0.5	0.5	**333**	**333**	
0.3	0.3	**385**	**385**	
0.1	0.1	**455**	**455**	

Conclusion

Paramètres 1

Pour une même condition initiale (N(0)=P(0)=200) et paramètres, on remarque que les effectifs à l'équilibre des deux populations peuvent varier significativement selon leur capacité biotique respective. Si les 2 populations ont la même capacité limite (K=M=500 et K=M=700), la valeur de leur effectif est similaire.

Cependant si l'une des populations à une capacité biotique supérieure à l'autre, son effectif augmente. Par exemple pour K=M=500 on obtient N(t)=333 et P(t)=333. Mais si K=500 et M=700 (donc K<M) on obtient N(t)=200 et P(t)=600. Cela s'explique biologiquement que la population P (qui est beaucoup plus importante que la population N) va progressivement gagner en surface et envahir la population N.

Paramètres 2

Pour une même condition initiale (N(0)=P(0)=200) et paramètres, plus la valeur de a et b se rapproche de 0 (donc plus ces valeurs sont basses) plus l'effectif à l'équilibre des 2 populations augmente.

Par exemple, pour a=b=0.5 l'effectif des 2 populations est atteint 333. Puis 385 pour a=b=0.3 et 455 pour a=b=0.1. Cela semble logique car a et b correspondent « biologiquement » aux effets négatifs d'une population sur l'autre, affectant ainsi la croissance des individus. Plus cet effet est bas, plus la population va donc croitre.

*Les graphiques illustrés dans cette partie ont été générés via le script **Q4.R**.*