TIN 2022 – Úkol 3

Autor: Vojtěch Fiala <xfiala61>

1. Dokažte redukcí, že následující jazyk L není ani částečně rozhodnutelný:

$$\mathrm{L} = \{\langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle \mid M_1 \text{ a } M_2 \text{ jsou Turingovy stroje takové, že } \mathrm{L}(M_1) \leq \mathrm{L}(M_2)\}$$

Jelikož je úkolem dokázat, že jazyk L není ani částečně rozhodnutelný, bude redukce probíhat z jazyka co-HP (komplementu jazyka Halting problému), o kterém je dokázáno, že ani částečně rozhodnutelný není, tedy co-HP ≤ L.

Redukční funkce φ bude mít signaturu:

$$\varphi: \{0,1,\#\}^* \rightarrow \{0,1,\#\}^*$$

Pokud je na vstupu jiný řetězec než $\langle M\rangle\#\langle \mathrm{w}\rangle$, kde $\langle M\rangle$ je validní kód Turingova stroje a $\langle \mathrm{w}\rangle$ je kód řetězce, pak redukční funkce φ vrátí výstup $\langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle$, kde $\langle M_1\rangle$ a $\langle M_2\rangle$ jsou kódy Turingova stroje takové, že L(M_1) = $\sum$* a L(M_2) = {}, kde $\sum$ = {0,1}. Je zřejmé, že pravidlo L(M_1) ≤ L(M_2) bude v tomto případě porušeno, protože pro redukční funkci φ musí mmj. platit:

$$\forall \mathrm{w} \in \textstyle\sum^*: \mathrm{w} \in \mathrm{L}(M_1) \Leftrightarrow \varphi\,(\mathrm{w}) \in \mathrm{L}(M_2).$$

Toto tvrzení je zde však zřejmě porušeno, neboť zřejmě pro žádné slovo z jazyka L(M_1) neexistuje odpovídající slovo, které by patřilo do jazyka L(M_2) a tedy neplatí, že $\sum$* ≤ {}.

Pokud je na vstupu validní řetězec, tedy $\langle M\rangle\#\langle \mathrm{w}\rangle$, φ se zachová takto:

$$\varphi(\langle M\rangle\#\langle \mathrm{w}\rangle) = \langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle$$

Dále se napevno se zafixuje, že L(M_2) = {}. Chování M_1nad abecedou $\sum$ = {0,1} v případě, když mu přijde nějaký vstup w' (tedy w' ∈ $\sum$*) bude následující:

Turingův stroj M_1 bude ignorovat svůj vstup w'. Následně Turingův stroj M_1 spustí simulaci Turingova stroje M nad slovem w (kódy Turingova stroje M, tedy $\langle M\rangle$ a slova w, tedy $\langle w\rangle$, jsou zakódovány ve stavovém řízení Turingova stroje M_1). Pokud tato simulace cyklí, cyklí i M_1. Pokud simulace TS M zastaví, M_1 akceptuje.

Z toho plynou následující skutečnosti (HP a co-HP značí jazyky Halting problému a jeho komplementu):

$$\langle M\rangle\#\langle \mathrm{w}\rangle \in \text{co-HP} \Rightarrow (\mathrm{L}(M_1) = \{\} \wedge \mathrm{L}(M_2) = \{\}) \Rightarrow \mathrm{L}(M_1) \leq \mathrm{L}(M_2) \Rightarrow \langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle \in \mathrm{L}.$$

Výše popsané je možné, jelikož jazyk TS M_2, tedy L(M_2), byl zafixován na {} a výstup jazyka L(M_1) je, v případě, že $\langle M\rangle\#\langle \mathrm{w}\rangle \in$ co-HP, taktéž {}. Platí, že {} ≤ {}, neboť existuje totální, rekurzivně vyčíslitelná redukční funkce φ taková, že: ∀w ∈ $\sum$*: w ∈ A ⇔ φ (w) ∈ B, neboť nad libovolnou abecedou $\sum$ zřejmě platí, že neexistuje žádné slovo w, které by patřilo do prázdného jazyka a tedy se mohlo zobrazit do jiného prázdného jazyka.

Dále platí následující (posloupnost symbolů X !≤ Y značí, že jazyk X není redukovatelný na jazyk Y):

$$\langle M\rangle\#\langle \mathrm{w}\rangle \in \mathrm{HP} \Rightarrow (\mathrm{L}(M_1) = \textstyle\sum^* \wedge \mathrm{L}(M_2) = \{\}) \Rightarrow \mathrm{L}(M_1)\ !\!\leq \mathrm{L}(M_2) \Rightarrow \langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle \notin \mathrm{L}.$$

$\langle M \rangle\#\langle \mathrm{w} \rangle \notin \text{co-HP} \Rightarrow (\mathrm{L}(M_1) = \sum^* \wedge \mathrm{L}(M_2) = \{\}) \Rightarrow \mathrm{L}(M_1)\ !\leq \mathrm{L}(M_2) \Rightarrow \langle M_1 \rangle\#\langle M_2 \rangle \notin \mathrm{L}$.

Důkaz, že neplatí $\sum^* \leq \{\}$, byl popsán již na počátku řešení tohoto úkolu.

Je tedy možné říci, že:

$(\langle M \rangle\#\langle \mathrm{w} \rangle \in \text{co-HP} \Leftrightarrow \varphi(\langle M \rangle\#\langle \mathrm{w} \rangle) \in \mathrm{L}) \Rightarrow$ co-HP ≤ L ⇒ **L není ani částečně rozhodnutelný**.