TIN - Úkol 1
Vypracoval: Vojtěch Fiala / xfiala61

1a) - Zadaný automat má 3 stavy, soustava tedy bude obsahovat 3 rovnice
- Hledané neznámé pojmenuji Q, R, S, podle odpovídajících stavů q, r, s v tomto pořadí

$$\begin{bmatrix} Q = Sb + \varepsilon \\ R = Qa + Sa \\ S = Qb + Sc + Rb \end{bmatrix}$$

- První rovnici (Q) dosadím do druhé (R):

$$[R = (Sb+\varepsilon)a + Sa = Sba + a + Sa]$$

- Získanou rovnici R dosadím společně s Q do S:

$$\begin{bmatrix} Q = Sb + \varepsilon \\ R = Sba + a + Sa \\ S = (Sb+\varepsilon)b + Sc + (Sba + a + Sa)b \end{bmatrix}$$

- Rovnici S dále upravím:

$$\begin{bmatrix} S = Sbb + b + Sc + Sbab + ab + Sab = \\ = S(bb + c + bab + ab) + b + ab \end{bmatrix}$$

- Tento tvar odpovídá pevnému bodu rovnice $[X = Xp + q]$, který se rovná $[X = qp^*]$.

- Získaná soustava po tomto kroce:

$$\begin{bmatrix} Q = Sb + \varepsilon \\ R = Sba + a + Sa \\ S = (b+ab)\cdot(bb+c+bab+ab)^* \end{bmatrix}$$

- Třetí rovnici dosadím do druhé, která odpovídá jedinému koncovému stavu, čímž získám hledaný RV:

$$R = (b+ab)\cdot(bb+c+bab+ab)^* ba + a + (b+ab)\cdot(bb+c+bab+ab)^* a =$$
$$= (b+ab)\cdot(bb+c+bab+ab)^* \cdot (a+ba) + a$$

$$[L(M_3) = L((b+ab)\cdot(bb+c+bab+ab)^* \cdot (a+ba) + a)]$$

1b) – Jedná se o NKA automat je tedy nutné převést na úplný deterministický

– Automat si přepíšu do tabulky

	a	b	c
→q	r	s	∅
←r	∅	s	∅
s	r	q	s

– pro neakceptující řetězce vytvořím nový „sink" stav. Automat tedy bude vypadat takto:

	a	b	c
→q	r	s	sink
←r	sink	s	sink
s	r	q	s
sink	sink	sink	sink

– Ke každému stavu vytvořím odpovídající ekvivalenční třídu reprezentující přístupové řetězce daného stavu.

– Ekv. třídy budou tvořeny regulárními množinami

– Pro jejich vytvoření využiju reg. výrazy z 1a)

$$\left[\begin{array}{l} Q = (b+ab)(bb+c+bab+ab)^* b + \varepsilon \\ R = (b+ab)\cdot(bb+c+bab+ab)^* \cdot (a+ba) + a \\ S = (b+ab)\cdot(bb+c+bab+ab)^* \\ sink = Qc + R(a+b) + Sa + sink(a+b+c) \end{array}\right]$$

tedy

$$\left[\begin{array}{l} L^{-1}(r) = (\{b\} \cup (\{a\}\cdot\{b\}))\cdot(\{b\}\cdot\{b\} \cup \{c\} \cup \{b\}\cdot\{a\}\cdot\{b\} \cup \{a\}\cdot\{b\})^* \cdot (\{a\} \cup \{b\}\cdot\{a\}) \cup \{a\} \\ L^{-1}(s) = (\{b\} \cup (\{a\}\cdot\{b\}))\cdot(\{b\}\cdot\{b\} \cup \{c\} \cup \{b\}\cdot\{a\}\cdot\{b\} \cup \{a\}\cdot\{b\})^* \\ L^{-1}(q) = (\{b\} \cup (\{a\}\cdot\{b\})\cdot(\{b\}\cdot\{b\} \cup \{c\} \cup \{b\}\cdot\{a\}\cdot\{b\} \cup \{a\}\cdot\{b\})^* \cdot (\{b\} \cup \{\varepsilon\}) \\ L^{-1}(sink) = (L^{-1}(q)\cdot\{c\} \cup L^{-1}(r)\cdot\{a,b\} \cup L^{-1}(s)\cdot\{a\})\cdot\{a,b,c\}^* \end{array}\right]$$

– Jazyk L přijímaný DKA M_{3D} tedy bude sjednocením ekv. tříd $L^{-1}(r)$, jelikož se jedná o koncový stav, a $L^{-1}(sink)$.

– $L(M_{3D}) = L^{-1}(r) \cup L^{-1}(sink)$

– pravá kongruence se tedy dá zapsat:

$$u \sim v \Leftrightarrow (u \in L^{-1}(r) \wedge v \in L^{-1}(r)) \vee (u \in L^{-1}(sink) \wedge v \in L^{-1}(sink))$$

2) $L_1 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \wedge \#_a(w) > \#_b(w)\}$

$L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$

L_2 bude komplement jazyka L_1, tedy

$L_2 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \wedge \#_a(w) \le \#_b(w)\}$.

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{L}_3$

$L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$, $\Sigma^* \in \mathcal{L}_3$

- Ani jeden z jazyků není regulární
- Důkazem bude Pumping lemma

PL říká: $L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \exists p : \forall w \in L : |w| \ge p \Rightarrow \exists x,y,z \in \Sigma^*$:

$w = xyz \wedge |y| > 0 \wedge |xy| \le p \wedge \forall i \ge 0 : xy^iz \in L$

a) - Důkaz neregularity jazyka L_2 sporem:

- Předpokládám, že $L_2 \in \mathcal{L}_3$
- Jestliže $L_2 \in \mathcal{L}_3$, pak dle PL platí: $\exists p > 0 : \forall w \in L_2$:
$|w| \ge p \Rightarrow \exists x,y,z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge |y| > 0 \wedge |xy| \le p \wedge \forall i \ge 0$:
$xy^iz \in L_2$
- Uvažme libovolné $p > 0$, které splňuje výše uvedené
- Vyberme libovolné $w \in L_2$ takové, že $|w| \ge p$, lze zvolit např. $w = b^pa^p$. Slovo určitě náleží do L_2.
- $|b^pa^p| = 2p$; $2p \ge p$
- Dle PL platí: $\exists x,y,z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge |y| > 0 \wedge |xy| \le p \wedge \forall i \ge 0$:
$xy^iz \in L_2$
- Uvažme všechna rozdělení w taková, že $w = xyz \wedge |y| > 0 \wedge |xy| \le p \wedge \forall i \ge 0 : xy^iz \in L_2$

$$\left[\begin{array}{l} x = b^{\alpha_1} \\ y = b^{\alpha_2} \\ z = b^{p-\alpha_1-\alpha_2}a^p \end{array}\right. \quad \text{musí platit: } \left.\begin{array}{l} \alpha_1 \ge 0 \\ \alpha_2 > 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \le p \end{array}\right]$$

- Zvolme libovolné i, lze použít $i = 0$
- Potom $w = b^{\alpha_1}b^{0 \cdot \alpha_2}b^{p-\alpha_1-\alpha_2}a^p$, tedy $w = b^{p-\alpha_2}a^p$.
- Pravidla jazyka říkají, že $\#_a(w) \le \#_b(w)$
- Bylo zavedeno pravidlo $\alpha_2 > 0$, tedy $|b^{p-\alpha_2}| = p - \alpha_2$ a $|a^p| = p$, tedy $p - \alpha_2 < p$
- Získané slovo obsahuje méně b než a, tedy nepatří do jazyka L_2, což je spor
- Implikace tedy neplatí a jazyk L_2 není regulární

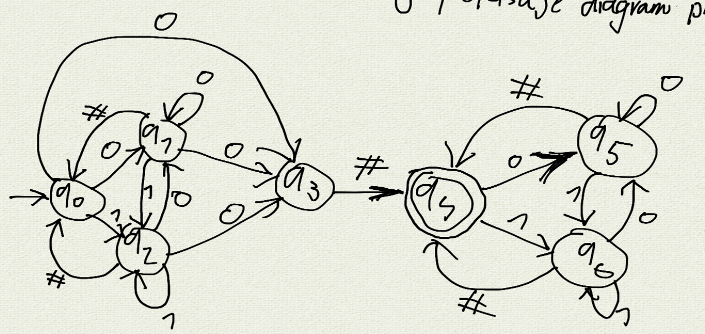
b) Důkaz neregularity jazyka L_1 sporem:

- Předpokládám, že $L_1 \in \mathcal{L}_3$
- Jestliže $L_1 \in \mathcal{L}_3$, pak dle PL platí: $\exists p > 0 : \forall w \in L_1$:
$|w| \ge p \Rightarrow \exists x,y,z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge |y| > 0 \wedge |xy| \le p \wedge \forall i \ge 0$:
$xy^iz \in L_1$
- Uvažme libovolné $p > 0$, které splňuje výše uvedené
- Vyberme libovolné $w \in L_1$ takové, že $|w| \ge p$, lze zvolit např. $w = a^{p+1}b^p$. Slovo určitě náleží do L_1.
- $|a^{p+1}b^p| = 2p+1$; $2p+1 \ge p$
- Dle PL platí: $\exists x,y,z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge |y| > 0 \wedge |xy| \le p \wedge$
$\forall i \ge 0 : xy^iz \in L_1$
- Uvažme všechna rozdělení $w = xyz$ splňující výše uvedené

$$\left[\begin{array}{l} x = a^{\alpha_1} \\ y = a^{\alpha_2} \\ z = a^{p+1-\alpha_1-\alpha_2}b^p \end{array}\right. \quad \text{musí platit: } \left.\begin{array}{l} \alpha_1 \ge 0 \\ \alpha_2 > 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \le p \end{array}\right]$$

- Zvolme libovolné i, lze použít $i = 0$
- Potom $w = a^{\alpha_1}a^{0 \cdot \alpha_2}a^{p+1-\alpha_1-\alpha_2}b^p$, tedy $w = a^{p+1-\alpha_2}b^p$.
- Pravidla jazyka říkají, že $\#_a(w) > \#_b(w)$
- Bylo zavedeno pravidlo $\alpha_2 > 0$, tedy $|a^{p+1-\alpha_2}| = p+1-\alpha_2$, $|b^p| = p$, tedy $p+1-\alpha_2 \le p$
- Získané slovo obsahuje menší nebo totožný počet a oproti b, tedy nepatří do jazyka L_1, což je spor.
- Implikace neplatí, jazyk L_1 tedy není regulární

3a) NKA $M_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1, \#\}, \delta, q_0, \{q_4\})$,
kde přechodovou funkci δ popisuje diagram přechodů níže:



3b) DKA $M_2 = (Q', \{0, 1, \#\}, \delta', \{q_0'\}, F')$

-zapíšu si přechodovou funkci δ automatu M_1 v tabulkovém tvaru

	0	1	#
$\rightarrow q_0$	q_1, q_3	q_2	
q_1	q_1, q_3	q_2	q_0
q_2	q_1, q_3	q_2	q_0
q_3			q_4
$\leftarrow q_4$	q_5	q_6	
q_5	q_5	q_6	q_4
q_6	q_5	q_6	q_4

-začnu od původního stavu q_0

	0	1	#
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow \{q_0, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_5\}$	$\{q_2, q_6\}$	$\{\}$
$\{q_1, q_3, q_5\}$	$\{q_1, q_3, q_5\}$	$\{q_2, q_6\}$	$\{q_0, q_4\}$
$\{q_2, q_6\}$	$\{q_1, q_3, q_5\}$	$\{q_2, q_6\}$	$\{q_0, q_4\}$

-pro úplnost automatu přidám „sink" stav a výsledkem bude:

$M_2 = (\{\{q_0\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{sink\}, \{q_0, q_4\}, \{q_1, q_3, q_5\}, \{q_2, q_6\}\}, \{0, 1, \#\}, \delta', \{q_0\}, \{\{q_0, q_4\}\})$

δ' znázorňuje diagram přechodů níže: