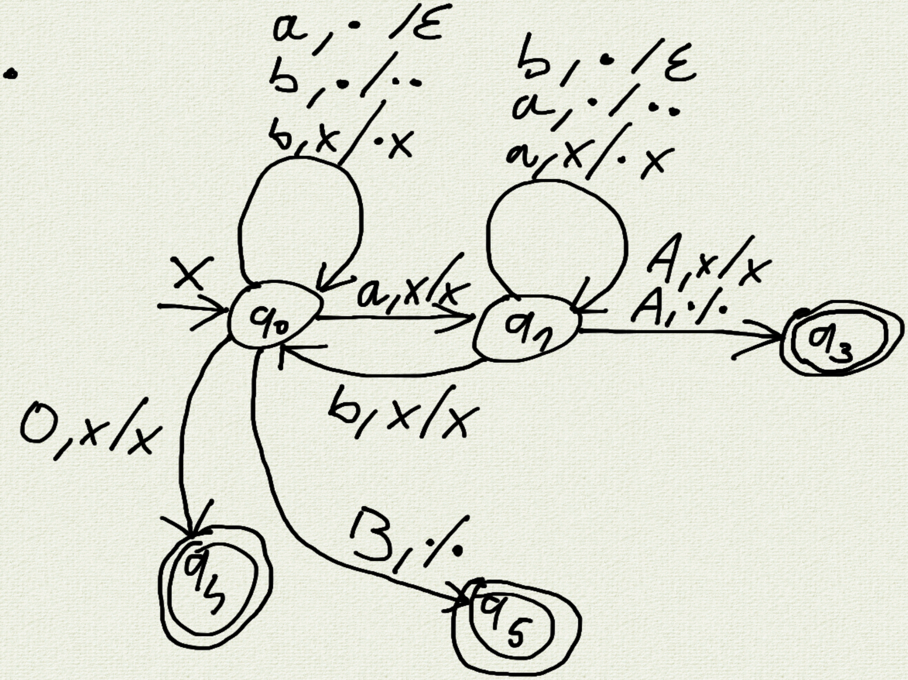
VUT FIT – TIN – úkol 2

Autor: Vojtěch Fiala (xfiala61)

1.



Demonstrace přijetí slova ababaabA:

$(q_0, ababaabA, x) \vdash (q_1, baabA, x) \vdash$

$\vdash (q_0, aabA, x) \vdash (q_1, abA, x) \vdash (q_1, bA, \bullet x) \vdash$

$\vdash (q_1, A, x) \vdash \underline{(q_3, \varepsilon, x)}$

2. Uvažujte abecedu Σ takovou, že $\Sigma \cap \{0,1\} = \emptyset$ a jazyk $L = L(G)$ nad abecedou Σ zadaný pomocí BKG G. Dále uvažujte jazyk L' def. jako

$$L' = \{w.x \mid w \in \Sigma^* \wedge (w \in L \Leftrightarrow x = 1) \wedge (w \notin L \Leftrightarrow x = 0)\}$$

- Budu dokazovat, že alg. neexistuje
- Jazyk L' je možné přepsat jako sjednocení 2 jazyků:

$$L_0 = \{w.0 \mid w \in \Sigma^* \wedge w \notin L\}$$

$$L_1 = \{w.1 \mid w \in \Sigma^* \wedge w \in L\}$$

$$L' = L_0 \cup L_1$$

- Pro každé w z jazyka L_0 platí: $w \in \Sigma^* \wedge w \notin L \Rightarrow w \in \Sigma^* \setminus L$. To znamená, že každé w z L_0 náleží do jazyka komplementu L.
- Pro každé w z jazyka L_1 platí: $w \in \Sigma^* \wedge w \in L \Rightarrow w \in \Sigma^* \cap L \Rightarrow w \in L$. Každé w z jazyka L_1 je tedy slovem jazyka L.
- Z uzávěrových vlastností bezkontextových jazyků je zřejmé, že bezkontextové jazyky nejsou uzavřeny vůči komplementům.
- L_0 tedy není nutně bezkontextový jazyk.
- Důkaz: Zvolme $\Sigma = \{a,b,c\}$ a $L = \{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\}$. L je zřejmě bezkontextový. $L_0 = co\text{-}L0 = \Sigma^* \setminus \{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\}.0$ Je zřejmé, že do jazyka L_0 bude náležet i jazyk $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}.0$, který zřejmě není bezkontextový.
- Je nutné dokázat, že ani sjednocením L_0 a L_1 nevznikne bezkontext. jazyk.
- $co\text{-}L \cup L = \Sigma^*$, tedy $L_0 \cup L_1 = \Sigma^*$. Toto zde ovšem neplatí.
- Jazyk L' je tvořen abecedou $\Sigma_{L'} = \Sigma_L \cup \{0,1\}$.
- Aby platilo, že z $\Sigma_{L'}$ je možné vytvořit Σ^*, je nutné, aby bylo z $\Sigma_{L'}$ možné vytvořit libovolná slova.
- Jazyky L_0 a L_1 obsahují jako poslední znak 0, respektive 1.
- Použiju totožný jazyk jako v důkazu výše: $L = \{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\} \Rightarrow$ $\Rightarrow L_0 = \Sigma^* \setminus \{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\}.0$
- Aby platilo, že $L' = \Sigma^*$, musel by jazyk obsahovat i slova ve tvaru $\{a^n b^n c^n \mid n,m \geq 0\}.1$. Takové ale zjevně neobsahuje, protože posledním znakem L_0 je vždy 0. V L_1 se řetězce taktéž nebjeví, neboť ten řetězce $\{a^n b^n c^n \mid n,m \geq 0\}.1$ vůbec nebude obsahovat, protože obsahuje v tomto případě pouze řetězce ve tvaru $L.1$, tedy $\{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\}.1$
- Sjednocením L_0 a L_1 tedy vznikne v tomto případě jazyk L', který není bezkontextový.
- Obecný algoritmus pro tvorbu BKG generující L' tedy navrhnout nelze. L' totiž nemusí být bezkontextový a BKG, co by jej generovala, nemusí existovat.

3. Navrhněte alg., který pro BKG $G=(N, \Sigma, P, S)$ spočítá množinu

$$N_{aa} = \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^*: A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \land aa \text{ je podřetězec } w\}$$

---

1. začne se konstrukcí pomocné množiny N_+ obsahující všechny neterminály generující terminály.

   1.1. $N_+^0 = \emptyset, i = 1$

   1.2. $N_+^i = \{A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P: \alpha \in (N_+^{i-1} \cup \Sigma)^*\}$

   1.3. Pokud $N_+^i = N_+^{i-1}$, polož $N_+ = N_+^i$ a skonči.
   Jinak polož $i = i+1$ a vrať se k (2).

---

2. Vytvoří se množina všech dostupných symbolů V.

   2.1. $V_0 = \{S\}, i = 1$

   2.2. $V_i = \{X \in (N \cup \Sigma) \mid A \in V_{i-1}: \exists (A \to \alpha X \beta) \in P: \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*\} \cup V_{i-1}$

   2.3. Pokud $V_i = V_{i-1}$, polož $V = V_i$ a skonči.
   Jinak polož $i = i+1$ a vrať se k (2).

---

3. Spočte se množina N_ε obsahující všechny neterminály, ze kterých lze vytvořit ε.

---

4. zavede se relace ρ následovně:

$$A \rho B \Leftrightarrow A, B \in N_+ \land \exists (A \to \alpha B \beta) \in P: \alpha, \beta \in (N_+ \cup \Sigma)^*$$

---

5. Spočte se tranzitivní uzávěr ρ^+ relace ρ

---

6. Vytvoří se množina všech neterminálů, které lze rozgenerovat do tvaru aAa – N_{aAa}

   6.1. $N_{aAa}^0 = \emptyset, i = 1$

   6.2. $N_{aAa}^i = N_{aAa}^{i-1} \cup \{A \in N \mid \exists B \in (N_+ \cup N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}): \exists (A \to \alpha B \beta) \in P:$
   $(\alpha \in (\Sigma \cup N_+)^* \{a\} \land \beta \in \{a\} (\Sigma \cup N_+)^* \land B \in N_\varepsilon)$
   $(\alpha, \beta = \{a\} \land B \in (N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}) \lor (\alpha \in (N_{aAa}^{i-1})^+ \lor \beta \in (N_{aAa}^{i-1})^+)$

   6.3. Pokud $N_{aAa}^i = N_{aAa}^{i-1}$, polož $N_{aAa} = N_{aAa}^i \cap V$ a skonči.
   Jinak polož $i = i+1$ a vrať se k (2).

---

7. Vytvoří se množina N_{aR} všech neterminálů, co lze rozgenerovat do tvaru, kde bude na pravé straně a:

   7.1. $N_{aR}^0 = \emptyset, i = 1$

   7.2. $N_{aR}^i = N_{aR}^{i-1} \cup \{A \in N \mid \exists B \in (N_+ \cup \{\varepsilon\}): \exists (A \to \alpha B \beta) \in P:$
   $(\alpha \in (N_+ \cup \Sigma)^* \land \beta \in (N_+ \cup \Sigma)^* \{a\}) \lor$
   $(\alpha \in (N_{aR}^{i-1})^+ \lor \beta \in (N_{aR}^{i-1})^+)$

   7.3. Pokud $N_{aR}^i = N_{aR}^{i-1}$, polož $N_{aR} = N_{aR}^i \cap V$ a skonči.
   Jinak polož $i = i+1$ a vrať se k (2).

---

8. Vytvoří se množina N_{aL} všech neterminálů, co lze rozgenerovat do tvaru, kde bude na levé straně a.

   8.1. $N_{aL}^0 = \emptyset, i = 0$

   8.2. $N_{aL}^i = N_{aL}^{i-1} \cup \{A \in N \mid \exists B \in N_+ \cup \{\varepsilon\}: \exists (A \to \alpha B \beta) \in P:$
   $(\alpha \in \{a\} (\Sigma \cup N_+)^* \land \beta \in (\Sigma \cup N_+)^*) \lor$
   $(\alpha \in (N_{aL}^{i-1})^+ \lor \beta \in (N_{aL}^{i-1})^+)$

   8.3. Pokud $N_{aL}^i = N_{aL}^{i-1}$, polož $N_{aL} = N_{aL}^i \cap V$ a skonči.
   Jinak polož $i = i+1$ a vrať se na (2).

---

9. Vytvoří se množina N_{xaL} všech neterminálů takových, že z nich lze vygenerovat tvar $\alpha a X$:

   9.1. $N_{xaL}^0 = \emptyset, i = 1$

   9.2. $N_{xaL}^i = N_{xaL}^{i-1} \cup \{A \in N \mid \exists B \in N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}: \exists (A \to \alpha B \beta) \in P:$
   $(\alpha \in (\Sigma \cup N_+)^* \{a\} \land \beta \in (N_\varepsilon)^*) \lor$
   $(\alpha \in (N_{xaL}^{i-1})^+ \lor \beta \in (N_{xaL}^{i-1})^+)$

   9.3. Pokud $N_{xaL}^i = N_{xaL}^{i-1}$, polož $N_{xaL} = N_{xaL}^i \cap V$ a skonči. Jinak polož $i = i+1$ a vrať se na (2).

---

10. Vytvoří se množina N_{axR} všech neterminálů takových, že je lze rozgenerovat do tvaru $Xa\alpha$:

   10.1. $N_{axR} = \emptyset, i = 0$

   10.2. $N_{axR}^i = N_{axR}^{i-1} \cup \{A \in N \mid \exists B \in N_\varepsilon \cup \{\varepsilon\}: \exists (A \to \alpha B \beta) \in P:$
   $(\alpha \in N_\varepsilon^* \land \beta \in \{a\} (\Sigma \cup N_+)^*) \lor$
   $(\alpha \in (N_{axR}^{i-1})^+ \lor \beta \in (N_{axR}^{i-1})^+)$

   10.3. Pokud $N_{axR}^i = N_{axR}^{i-1}$, polož $N_{axR} = N_{axR}^i \cap V$ a skonči.
   Jinak polož $i = i+1$ a vrať se do (2).

---

11. Vytvoří se množina N_{RL} všech neterminálů, které lze rozgenerovat do tvaru XY, kde XY vytvoří podřetězec aa:

   11.1. $N_{RL}^0 = \emptyset, i = 1$

   11.2. $N_{RL}^i = N_{RL}^{i-1} \cup \{A \in N \mid \exists X, Y \in N_+ \cup \{\varepsilon\}: \exists (A \to \alpha X Y \beta) \in P:$

   $(\alpha, \beta \in (\Sigma \cup N_+)^* \land ((X \in N_{aL} \land X \in N_\varepsilon \land Y \in N_{aR} \land N \in N_\varepsilon) \lor$
   $(X \in N_{aR} \land X \in N_\varepsilon \land Y \in N_{axR} \land Y \in N_\varepsilon) \lor (X \in N_{aR} \land X \in N_\varepsilon \land Y \in N_{aL} \land Y \in N_\varepsilon) \lor$
   $(X \in N_{xaL} \land X \in N_\varepsilon \land Y \in N_{aL} \land Y \in N_\varepsilon)) \lor (\alpha \in N_{RL}^{i-1} \lor \beta \in N_{RL}^{i-1}))$

   11.3. Pokud $N_{RL}^i = N_{RL}^{i-1}$, polož $N_{RL} = N_{RL}^i \cap V$ a skonči.
   Jinak polož $i = i+1$ a vrať se do (2).

---

12. Vytvoří se množina $\underline{N_{aa}}$

$N_{aa} = \{A \in N \mid \exists X, Y \in N_+: (A \rho^+ X \land \exists (X \to \alpha Y \beta) \in P: \alpha = \{a\} \land \beta \in (\Sigma \cup N_+)^*) \land Y \in N_{aL}) \lor$
$(\exists (A \to \alpha Y \beta) \in P: \alpha = \{a\} \land \beta \in (\Sigma \cup N_+)^*) \land Y \in N_{aL}) \lor$
$(A \rho^+ X \land \exists (X \to \alpha Y \beta) \in P: \alpha \in (\Sigma \cup N_+)^* \{a\}\{a\} (\Sigma \cup N_+)^* \lor \beta \in (\Sigma \cup N_+)^* \{a\}\{a\} (\Sigma \cup N_+)^*) \lor$
$(\exists (A \to \alpha Y \beta) \in P: \alpha \in (\Sigma \cup N_+)^* \{a\}\{a\} (\Sigma \cup N_+)^* \lor \beta \in (\Sigma \cup N_+)^* \{a\}\{a\} (N_+ \cup \Sigma)^*) \lor$
$(A \rho^+ X \land K \rho Y \land X \in N_{axR} \land (\exists (Y \to \alpha X \beta) \in P: \alpha = \{N_+ \cup \Sigma\}^* \land \beta = \{a\}) \lor$
$(A \rho Y \land A \in N_{axR} \land \exists (Y \to \alpha X \beta) \in P: \alpha = \{N_+ \cup \Sigma\}^* \land \beta = \{a\}) \lor$
$(A \in N_{RL}) \lor (A \in N_{aAa})\}$

3. Ilustrace použití:

$S \to XY|YX|Z \quad X \to Xba|\varepsilon \quad Y \to Yab|\varepsilon \quad Z \to XbaaU$

1. $N_+^0 = \emptyset$

$N_+^1 = \{X, Y\}$

$N_+^2 = \{X, Y, S\}$; $N_+^3 = \{X, Y, S\}$

$N_+ = N_+^3$

2. $V_0 = \{S\}$

$V_1 = \{S, X, Y, Z\}$

$V_2 = \{S, X, Y, Z, a, b, \varepsilon\}$

$V_3 = \{S, X, Y, Z, a, b, \varepsilon\}$

$V = V_3$

3. $N_\varepsilon^0 = \emptyset$

$N_\varepsilon^1 = \{X, Y\}$

$N_\varepsilon^2 = \{X, Y, S\}$

$N_\varepsilon^3 = \{X, Y, S\}$

$N_\varepsilon = N_\varepsilon^3$

4.

ρ	X	Y	S
X	1	0	0
Y	0	1	0
S	1	1	0

5.

ρ^+	X	Y	S
X	1	0	0
Y	0	1	0
S	1	1	0

6.

$N_{aAa}^0 = \emptyset$

$N_{aAa}^1 = \emptyset$

$N_{aAa} = N_{aAa}^1$

7. $N_{aR}^0 = \emptyset$

$N_{aR}^1 = \{X\}$

$N_{aR}^2 = \{X, S\}$

$N_{aR}^3 = \{X, S\}$

$N_{aR} = N_{aR}^3$

8. $N_{aL}^0 = \emptyset$

$N_{aL}^1 = \emptyset$

$N_{aL} = N_{aL}^1$

9. $N_{xaL}^0 = \emptyset$

$N_{xaL}^1 = \emptyset$

$N_{xaL} = N_{xaL}^1$

10. $N_{axR}^0 = \emptyset$

$N_{axR}^1 = \{Y\}$

$N_{axR}^2 = \{Y, S\}$

$N_{axR}^3 = \{Y, S\}$

11. $N_{aL} = \emptyset$, $N_{aR} = \{X, S\}$, $N_{axR} = \{Y, S\}$, $N_{xaL} = \emptyset$

$N_{RL}^0 = \emptyset$

$N_{RL}^1 = \{S\}$

$N_{RL}^2 = \{S\}$

$N_{RL} = N_{RL}^2$

12. $N_{aL} = \emptyset$, $N_{axR} = \{Y, S\}$, $N_{RL} = \{S\}$, $N_{aAa} = \emptyset$,

$N_+ = \{X, Y, S\}$

$N_{aa} = \{S\}$

4. Uvažujte následující operátor ▲: $2^{\Sigma^*} \times 2^{\Sigma^*} \rightarrow 2^{\Sigma^*}$ na jazycích nad abecedou Σ: L_1 ▲ L_2 = {w ∈ Σ* | $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* : w_1 w_2 = w \Rightarrow (w_1 \in L_1 \vee w_2 \in L_2)$}

Dokažte, že množina rekurzivně vyčíslitelných jazyků je uzavřena na ▲

Důkaz, že množina rekurzivně vyčíslitelných jazyků je uzavřena na ▲:

Určeme si libovolné rekurzivně vyčíslitelné jazyky L_1, $L_2 \in \mathcal{L}_{RE}$. Pak existují dva Turingovy stroje M_1 a M_2 takové, že L(M_1) = L_1 a L(M_2) = L_2. Dále sestrojme Turingův stroj $M_▲$ takový, že L_1 ▲ L_2 = L($M_▲$). Turingův stroj $M_▲$ bude mít na vstupu slovo *w*. TS $M_▲$ bude mít tři pásky -- P_0, P_1, P_2. Na začátku bude mít P_0 na vstupu řetězec *w*. Tento řetězec bude deterministicky procházet a dělit na 2 části – prefix a suffix, které lze označit w_1 a w_2, tedy w = $w_1 w_2$. Prefix w_1 bude následně nakopírován na pásku P_1. Suffix w_2 bude obdobně nakopírován na pásku P_2.

Na pásce P_1 bude simulován chod M_1. Na pásce P_2 bude simulován chod M_2. Vždy dojde k vykonání pouze jednoho kroku P_1 a následně kroku P_2. Teprve poté může dojít k vykonání dalšího kroku P_1 následovaného krokem P_2.

Pokud alespoň jedna simulace přijme, je toto rozdělení validní a na pásce P_0 dojde k vytvoření dalšího rozdělení slova *w* na prefix w_1 a suffix w_2, tedy opět w = $w_1 w_2$. Tato rozdělení jsou opět nahrána na pásky P_1 a P_2 způsobem popsaným výše.

Pokud se stane, že simulace M_1 i M_2 odmítnou, odmítne i $M_▲$. Pokud jedna ze simulací odmítne a druhá cyklí, cyklí i $M_▲$. Pokud obě cyklí, cyklí i $M_▲$. Pokud jedna cyklí a druhá přijme, je dané rozdělení validní a dojde k vytvoření dalšího rozdělení, kterým bude obsah pásek P_1 a P_2 nahrazen. Pokud P_0 projde přes všechna možná rozdělení, aniž by došlo k odmítnutí (a $M_▲$ necyklí), $M_▲$ slovo přijme.

Pro libovolné jazyky L_1, $L_2 \in \mathcal{L}_{RE}$ tedy existuje TS $M_▲$ takový, že L($M_▲$) = L_1 ▲ L_2 a třída rekurzivně vyčíslitelných jazyků $\mathcal{L}_{RE}$ je tedy na operaci ▲ uzavřena.