

## <알고리즘 실습> - 탐색트리

### ※ 입출력에 대한 안내

- 특별한 언급이 없으면 문제의 조건에 맞지 않는 입력은 입력되지 않는다고 가정하라.
- 특별한 언급이 없으면, 각 줄의 맨 앞과 맨 뒤에는 공백을 출력하지 않는다.
- 출력 예시에서 □는 각 줄의 맨 앞과 맨 뒤에 출력되는 공백을 의미한다.
- 입출력 예시에서  $\mapsto$  이 후는 각 입력과 출력에 대한 설명이다.

\* 이 문제에서 사용되는 알고리즘은 주교재를 중심으로 기술되었음.

[ 문제 1 ] (이진탐색트리 구현) 주어진 조건을 만족하는 이진탐색트리를 구현하는 프로그램을 작성하라.

※ 조건: 종료(**q**) 명령 때까지 삽입(**i**), 탐색(**s**), 삭제(**d**), 인쇄(**p**), 명령을 반복 입력받아 수행한다.

**i** <키> : 입력 <키>에 대한 노드 생성 및 트리에 삽입

**d** <키> : 입력 <키>가 트리에 존재하면 해당 노드 삭제 후 삭제된 키를 출력, 없으면 'X'를 출력

**s** <키> : 입력 <키>가 트리에 존재하면 해당 키를 출력, 없으면 'X'를 출력

**p** : 현재 트리를 전위순회로 인쇄

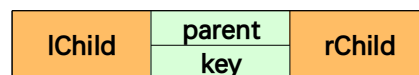
**q** : 프로그램 종료

### 주의:

1. 중복 키가 없는 것으로 전제한다.
2. 문제를 단순화하기 위해, 키만 존재하고 원소(element)는 없는 것으로 구현한다.
3. **main** 함수는 반복적으로 명령을 입력받기 전에 빈(empty) 이진탐색트리를 초기화해야 한다 - 즉, 외부노드 1개로만 구성된 이진트리를 말한다.

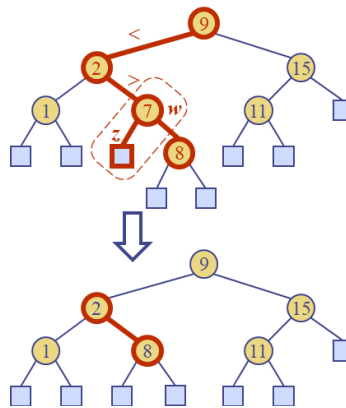
### 힌트:

1. 트리 노드는 아래의 구조체를 이용하여 구현한다.



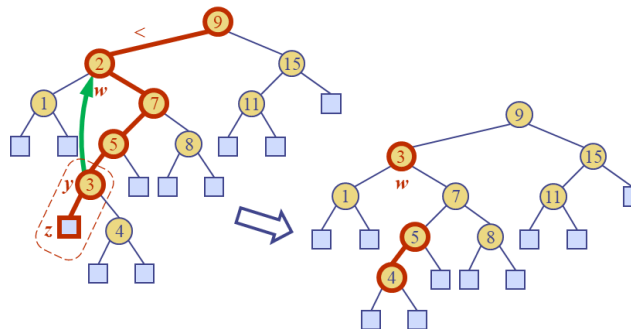
node

2. 전위순회는 루트 노드를 먼저 방문하고, 왼쪽 부트리, 오른쪽 부트리 순서로 순회한다.
3. 트리 노드 삭제 시, 삭제할 노드 **w**의 자식 중 하나(**z**이라 하자)라도 앞인 경우는 아래 그림 <삭제 예시 1>처럼 **w**를 **z**과 함께 삭제하고, 반대쪽 자식 노드(그림에서 **8**을 저장한 노드)가 **w**를 계승한다 - **reduceExternal(z)** 함수 사용.



<삭제 예시 1>

4. 삭제할 노드 **w**의 자식 둘 다 내부 노드인 경우는 **w**의 **중위순회 후계자 y**가 삭제한 노드 위치에 오도록 한다. 중위순회 후계자를 찾는 방법은 오른쪽 자식으로 이동한 후, 거기서부터 왼쪽 자식들만을 끝까지 따라 내려가서 도달하게 되는 내부노드를 찾는 것이다(그림 <삭제 예시 2> 참고).



<삭제 예시 2>

#### 입출력 형식:

- 1) **main** 함수는 아래 형식으로 명령을 표준입력받는다.

입력 : 문자(**i**, **d**, **s**)와 정수형 <키> 또는 문자(**p**, **q**)

- 2) **main** 함수는 각 명령에 대해 아래 형식으로 표준출력한다.

출력 : 키 또는 X (**d**, **s** 명령인 경우)

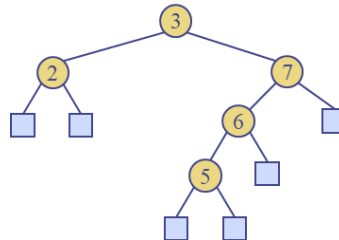
트리의 전위순회 인쇄 (**p** 명령인 경우)

#### 입력 예시 1

i 3	→ 3 삽입	X	→ 4 탐색 결과
i 2	→ 2 삽입		
i 7	→ 7 삽입		
s 4	→ 4 탐색		
i 6	→ 6 삽입		

#### 출력 예시 1

p	↳ 전위순회 인쇄	□ 3 2 7 6	↳ 전위순회 인쇄
i 5	↳ 5 삽입		
s 6	↳ 6 탐색	6	↳ 6 탐색 결과
q	↳ 종료		



<구축된 이진탐색트리>

입력 예시 2

출력 예시 2

i 9	↳ 9 삽입		
i 2	↳ 2 삽입		
i 15	↳ 15 삽입		
i 1	↳ 1 삽입		
i 7	↳ 7 삽입		
i 11	↳ 11 삽입		
i 5	↳ 5 삽입		
i 8	↳ 8 삽입		
i 3	↳ 3 삽입		
i 4	↳ 4 삽입		
p	↳ 전위순회 인쇄	□ 9 2 1 7 5 3 4 8 15	↳ 전위순회 인쇄
d 2	↳ 2 삭제	11	↳ 2 삭제 결과
d 13	↳ 13 삭제	2	↳ 13 삭제 결과
p	↳ 전위순회 인쇄	X	↳ 전위순회 인쇄
q	↳ 종료	□ 9 3 1 7 5 4 8 15 11	

### 주요 필요 함수:

- **main()** 함수
  - 인자: 없음
  - 반환값: 없음
  - 내용: 빈 트리를 초기화한 후 반복적으로 명령을 입력받아 처리
- **findElement(k)** 함수
  - 인자: 탐색 키 **k**
  - 반환값: 원소(이 문제에서 원소 = 키)
  - 내용: 현재 트리에서 키 **k**를 저장한 노드를 찾아 그 노드에 저장된 원소를 반환
- **insertItem(k)** 함수
  - 인자: 삽입 키 **k**
  - 반환값: 없음
  - 내용: 현재 트리에 키 **k**를 저장한 새 노드를 삽입

- **treeSearch(k)** 함수
  - 인자: 탐색 키  $k$
  - 반환값: 키  $k$ 를 저장한 내부 노드 반환, 혹은 그런 노드가 없으면 만약 있었다면 위치할 외부 노드를 반환
  - 내용: 현재 트리에서 키  $k$ 를 저장한 노드를 반환
- **removeElement(k)** 함수
  - 인자: 삭제 키  $k$
  - 반환값: 삭제된 원소(이 문제에서 원소 = 키)
  - 내용: 현재 트리에서 키  $k$ 를 저장한 노드를 삭제한 후 원소를 반환
- **isExternal(w)** 함수
  - 인자: 노드  $w$
  - 반환값: 참 또는 거짓
  - 내용: 노드  $w$ 가 외부노드인지 여부를 반환
- **isInternal(w)** 함수
  - 인자: 노드  $w$
  - 반환값: 참 또는 거짓
  - 내용: 노드  $w$ 가 내부노드인지 여부를 반환
- **inOrderSucc(w)** 함수
  - 인자: 내부노드  $w$
  - 반환값: 내부노드
  - 내용: 노드  $w$ 의 중위순회 후계자를 반환

알고리즘 설계를 위한 의사코드 가이드:

Alg **isExternal(w)**

input node  $w$   
output boolean

1. if ( $w.left = \emptyset$  and  $w.right = \emptyset$ )  
    return **True**  
else  $\{w.left \neq \emptyset$  or  $w.right \neq \emptyset\}$   
    return **False**

Alg **isInternal(w)**

input node  $w$   
output boolean

1. if ( $w.left \neq \emptyset$  or  $w.right \neq \emptyset$ )  
    return **True**  
else  $\{w.left = \emptyset$  and  $w.right = \emptyset\}$   
    return **False**

```

Alg sibling(w)
    input node w
    output sibling of w

1. if (isRoot(w))
    invalidNodeException()           {root has no sibling}
2. if (leftChild(parent(w)) = w)
    return rightChild(parent(w))
    else
    return leftChild(parent(w))

```

```

1. if (isRoot(w))
    invalidNodeException()           {root has no sibling}
2. if (leftChild(parent(w)) = w)
    return rightChild(parent(w))
else
    return leftChild(parent(w))

```

```

Alg inOrderSucc(w)
    input internal node w
    output inorder successor of w

1. w ← rightChild(w)
2. if (isExternal(w))
    invalidNodeException()           {No inorder successor}
3. while (isInternal(leftChild(w)))
    w ← leftChild(w)
4. return w

```

```

1. w ← rightChild(w)
2. if (isExternal(w))
    invalidNodeException()           {No inorder successor}
3. while (isInternal(leftChild(w)))
    w ← leftChild(w)
4. return w

```

```

Alg reduceExternal(z)
    input external node z
    output the node replacing the parent node of the removed node z

1. w  $\leftarrow$  z.parent
2. zs  $\leftarrow$  sibling(z)
3. if (isRoot(w))
    root  $\leftarrow$  zs                                {renew root}
    zs.parent  $\leftarrow$   $\emptyset$ 
else
    g  $\leftarrow$  w.parent
    zs.parent  $\leftarrow$  g
    if (w = g.left)
        g.left  $\leftarrow$  zs
    else {w = g.right}
        g.right  $\leftarrow$  zs

4. putnode(z)                                {deallocate node z}
5. putnode(w)                                {deallocate node w}
6. return zs

```

```

1. w ← z.parent
2. zs ← sibling(z)
3. if (isRoot(w))
    root ← zs
    zs.parent ←  $\emptyset$ 
else
    g ← w.parent
    zs.parent ← g
    if (w = g.left)
        g.left ← zs
    else {w = g.right}
        g.right ← zs
4. putnode(z)
5. putnode(w)
6. return zs

```

```
6. return zs
```

\* 수록되지 않은 함수의 의사코드는 교재의 코드를 참고할 수 있다. 하지만 가능하면 교재를 참조하지 않고 스스로 작성해본다.

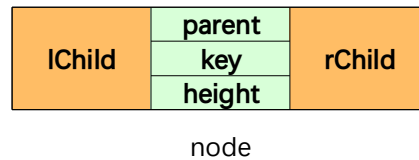
[ 문제 2 ] (AVL 트리 생성) 주어진 조건을 만족하는 AVL 트리를 구현하는 프로그램을 작성하라.

- 1) 기본적인 입출력 구조는 문제 1과 동일하나 삭제(삭제)를 제외한 삽입, 탐색, 출력을 구현한다.
- 2) **main** 함수에서 명령과 <키>를 입력받는다.
- 3) 명령에 따라 AVL 트리를 생성, 탐색한다.

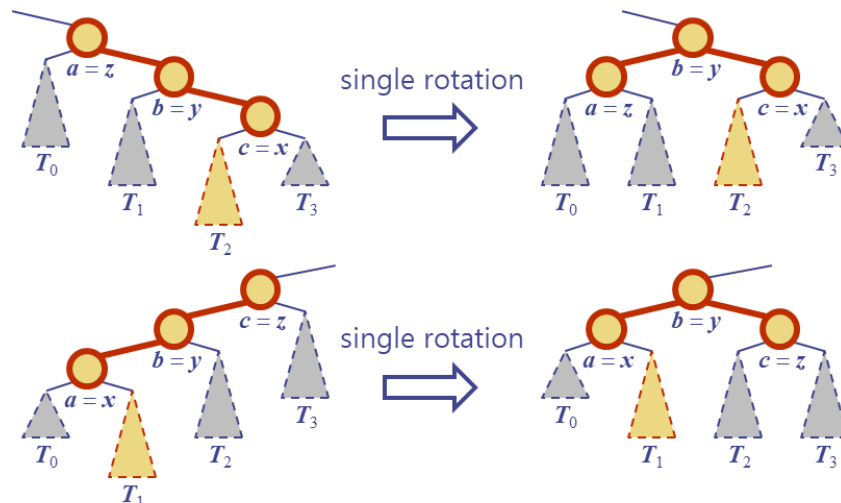
주의: 문제 1과 동일

힌트:

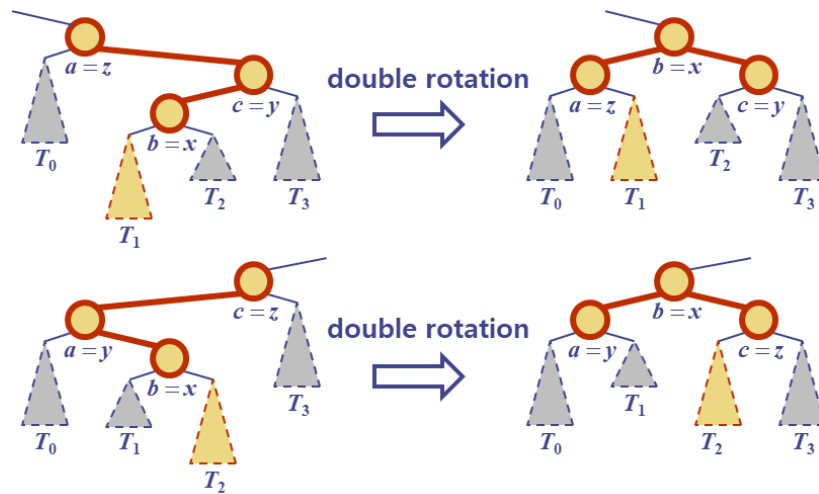
1. 노드 구조체에 높이(height)를 추가한다.



2. 문제 1의 이진탐색트리에서 구현한 함수들을 그대로 또는 수정해서 사용하고 더 필요한 함수를 추가한다.
3. 키 삽입 후 트리에 불균형이 발생했을 경우, **개조(restructure)**를 수행한다. 개조는 종종 **회전(rotation)**이라고도 불리며, 좌우대칭을 포함하여 모두 4개 유형이 존재한다.



<단일회전(single rotation) 예시>



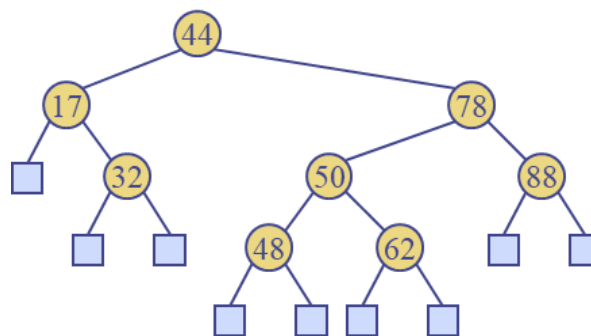
<이중회전(double rotation) 예시>

입출력 형식: 문제 1과 동일(삭제는 제외)

입력 예시 1

출력 예시 1

i 44	⇒ 44 삽입	<div>88 ⇒ 탐색 결과</div> <div>□44 17 32 78 50 48 62 88 ⇒ 전위순회 인쇄</div>
i 17	⇒ 17 삽입	
i 78	⇒ 78 삽입	
i 32	⇒ 32 삽입	
i 50	⇒ 50 삽입	
i 88	⇒ 88 삽입	
i 48	⇒ 48 삽입	
i 62	⇒ 62 삽입	
s 88	⇒ 88 탐색	
p	⇒ 전위순회 인쇄	
q	⇒ 프로그램 종료	



<구축된 AVL 트리>

**필요 함수:**

- **insertItem(k)** 함수
  - 인자: 삽입 키 **k**
  - 반환값: 없음
  - 내용: 현재 트리에 **k**를 저장한 새 노드 **w**를 삽입하고, **searchAndFixAfterInsertion(w)** 함수를 호출
- **searchAndFixAfterInsertion(w)** 함수
  - 인자: 내부노드 **w**
  - 반환값: 없음
  - 내용: 균형검사를 수행하고 불균형이 있으면 개조를 통해 높이균형 속성을 회복
- **updateHeight(w)** 함수
  - 인자: 내부노드 **w**
  - 반환값: 참 또는 거짓
  - 내용: 노드 **w**의 높이를 (필요하면) 갱신한 후 갱신 여부를 반환
- **isBalanced(w)** 함수
  - 인자: 내부노드 **w**
  - 반환값: 참 또는 거짓
  - 내용: 노드 **w**의 높이균형 여부를 반환
- **restructure(x, y, z)** 함수
  - 인자: 내부노드 **x, y, z**
  - 반환값: 내부노드
  - 내용: 3-노드 개조를 수행한 후 (갱신된) 3-노드의 루트를 반환



알고리즘 설계를 위한 의사코드 가이드:

```
Alg expandExternal(w)
    input external node w
    output none
```

```
1. l ← getNode()
2. r ← getNode()
```

```
3. l.left =  $\emptyset$ 
4. l.right =  $\emptyset$ 
5. l.parent = w
6. l.height = 0
```

```
7. r.left =  $\emptyset$ 
8. r.right =  $\emptyset$ 
9. r.parent = w
10. r.height = 0
```

```
11. w.left = l
12. w.right = r
13. w.height = 1
14. return
```

```
Alg insertItem(k)
    input AVL tree T, key k
    output none
```

```
1. w ← treeSearch(root(), k) {삽입 키를 저장한 노드 찾기}
```

```
2. if (isInternal(w)) {이미 존재하면 반환}
```

```
    return
```

```
    else
```

```
        Set node w to k
```

```
        expandExternal(w)
```

```
        searchAndFixAfterInsertion(w)
```

```
    return
```

다음 알고리즘은 교재의 연습문제 11-15의 답을 참고할 수 있다.

Alg **searchAndFixAfterInsertion**

Alg **restructure**

Alg **updateHeight**

Alg **isBalanced**

[ 문제 3 ] (AVL 트리 삭제) AVL 트리에서 삭제를 구현하라.

- 1) 기본적인 입출력 구조는 문제 2와 동일하며 삭제를 추가하여 구현한다.
- 2) **main** 함수에서 명령과 <키>를 입력받는다.
- 3) 명령에 따라 AVL 트리를 생성한다.

주의: 문제 1과 동일

힌트:

1. 문제 2에서 만든 함수들을 그대로 이용하고, **삭제 관련 함수**를 추가로 구현한다.
2. AVL 트리에서 삭제는 이진탐색트리에서와 동일하게 수행되지만, 마지막 단계에서 **reduceExternal** 작업으로 삭제된 노드의 부모 노드(그리고 조상 노드들)가 불균형이 될 수 있음에 유의한다.
3. 트리의 불균형을 해소하기 위한 개조는 문제 2에서 작성한 **restructure** 함수를 그대로 사용할 수 있다.

입출력 형식:

- 1) 문제 1과 동일

입력 예시 1		출력 예시 1	
i 9	↳ 9 삽입		
i 31	↳ 31 삽입		
i 66	↳ 66 삽입		
i 30	↳ 30 삽입		
i 1	↳ 1 삽입		
s 30	↳ 30 탐색	30	↳ 30 탐색 결과
i 24	↳ 24 삽입	□30 9 1 24 31 66 X	↳ 전위순회 인쇄 ↳ 47 탐색 결과
p	↳ 전위순회 인쇄		
s 47	↳ 47 탐색	30	↳ 30 삭제
i 61	↳ 61 삽입		
d 30	↳ 30 삭제		
i 13	↳ 13 삽입		
q	↳ 프로그램 종료		

필요 함수:

- **removeElement(k)** 함수
  - 인자: 삭제 키 **k**
  - 반환값: 삭제된 원소(이 문제에서 원소 = 키)
  - 내용: 현재 트리에서 **k**를 저장한 노드를 삭제한 후, **reduceExternal** 작업으로 삭제된 노드의 부모 노드 **w**에 대해 **searchAndFixAfterRemoval(w)** 함수를 이용하여 균형검사 및 수리를 수행

알고리즘 설계를 위한 의사코드 가이드:

```
Alg removeElement(k)
    input AVL tree T, key k
    output key

1. w ← treeSearch(root(), k)           {삭제 키를 저장한 노드 찾기}
2. if (isExternal(w))                   {그런 노드가 없으면 반환}
    return NoSuchKey
3. z ← leftChild(w)
4. if (!isExternal(z))
    z ← rightChild(w)
5. if (isExternal(z))                   {case 1}
    zs ← reduceExternal(z)
    else                               {case 2}
    y ← inOrderSucc(w)
    z ← leftChild(y)
    Set node w to key(y)
    zs ← reduceExternal(z)
6. searchAndFixAfterRemoval(parent(zs))
7. return k
```

다음 알고리즘은 교재의 연습문제 11-15의 답을 참고할 수 있다.

Alg **searchAndFixAfterRemoval**